République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités

Par :

GHEDDAB Iman

Titre :

Equations Différentielles Stochastiques et Calcul de Malliavin

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	TAMER Lazhar	UMKB	Président
Pr.	LABED Boubakeur	UMKB	Encadreur
Dr.	BOUGHERARA Saliha	UMKB	Examinatrice

Juin 2021

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mes parents : **Mohammed L'arbi** et **Aïcha**, aucun mot ne sera témoigné de l'entendu des sentiments que j'éprouve à leur grand.

A mes trés chére "**père**" pour son sacrifice, quoi que rien ne puisse égaler tout ce qu'il ma donné.

A ma trés chére "**mère**" pour son sacrifice inestimable, sa tendresse, son amour et son dévouement.

Je tiens à remercier vivement mon "**époux**" : **Abde Rahmane** pour ses aides, ses orientations et surtout ses encouragements durant mon cursus universitaire.

Et tout ma famille : "**Gheddab**".

A mes trés chères soeurs : "*Fahima*","*Dhikra*","*Maroua*","*Safa*","*Rahma*".

A tout mes amis : *Zoulikha*, *Abir*, *Mebarka, Halima Sarah, Mariem, Hadhba, Djalila, Asma, Donia, Khedidja, Hakima, Mohammed Islem, Abd-El Raouf, Ahmed, Fateh, Saleh.*

A toute la promotion de Master Mathématique *2021*.

"Iman"

REMERCIEMENTS

Je tiens remercier tout d'abord mon dieu Allah qui ma donnè la force, et la volontè, pour accomplir ce travail.

Nous tiens à remercier vivement mon encadreur Dr : **LABED Boubakeur** d'avoir accepté de diriger ce projet et pour la confiance qu'il ma accordée, ses encouragements, et ses précieux conseils.

Je remercie également Dr. TMER Lazhar et Dr. BOUGHERARA Saliha, membres de jury, de nous avoir fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce travail.

Je tiens à remercier, tous ceux qui nous enseignés durant toutes notre étude et en particulier nos enseignants à l'université de **"Mohamed Khider Biskra"**.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles stochastiques surviennent dans des situations où, par exemple, l'évolution temporelle d'une quantité donnée a un certain degré d'incertitude inhérente. Datant de travail d'Albert Einstein, les équations différentielles stochastiques sont largement utilisées dans beaucup d'applications telle que la physique mathématique et la mathématique financière. Les exemples classique comprennent le modèle de Black-Scholes, et le processus de Ornstein-Uhlenbeck comme solution de l'équation de Langevin.

L'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}B_t \\ X_0 = x. \end{cases}$$

est le premier sujet de ce mémoire.

Les équations diifférentielles stochastiques de ce type ont été largement utilisées en sciences physiques en raison du contexte historique évident, mais aussi en mathématique financière, théorie du filtrage, en bio mathématique. Les developpements ulterieurs ont été liés aux diffusions reliant la théorie des équations différentielles stochastiques et les équations aux dérivées partielles.

Le deuxième sujet de ce mémoire est le calcul de Malliavin. Le calcul de Malliavin ets un calcul différentiel en dimension infinie dans l'espace de Wiener. Il initialement developpé par Malliavin pour étudier la régularité des densités des solutions des équations différentielles stochastiques. Pour plusieurs années, le calcul de Malliavin a été considéré comme très théorique et très technique du point de vu mathématique. En 1991, Karatzas et Ocone montrent comment le théorème de representation que ocone a formulé quelques années plus tôt en terme de la dérivée de Malliavin peut être utilisé en finance.

Ce mémoire comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre, On commence par rappeler les principaux résultats sur la théorie des processus stochastiques et du calcul stochastique.

Dans le deuxième chapitre, on présente le théorème d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques par rapport à un mouvement Brownien, sous les hypothèses que les coefficientssatisfont les conditions de Lipschitz et de croissance linéaire. Le théorème est à l'origine dû à Kiyosi Itô. En plus, on présente un e preuve de la continuité ds solutions par rapport à la donnée initiale qu'on suppose déterministe. ce théorème était à l'origine démontré par Tsukasa Fujiwara et Hiroshi Kunita.

Dans le troisième chapitre, on étudie la dérivée de malliavin, l'intégrale de Skorohod, la théorie ddu chaos de Wiener, le générateur du semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck, ainsi que l'expression de la densité d'une variable aléatoire différentiable de Malliavin en termes d'une fonction f.

Chapitre 1

Processus stochastiques

Dans ce premier chapitre on introduit quelques définitions et notions de base de calcul stochatique : Processus stochastique, Mouvement Brownien, Martingale, Intégrale stochastique, Formule d' Itô.

1.1 Processus stochastiques

Définition 1.1.1 *Un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est une famille de variables aléatoires* $X_t(\omega) : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^{\mathrm{d}}, B(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}))$ *indexée par un temps* $t \in T$:

1. *Pour* t *fixé,* $\omega \in \Omega \to X_t(\omega)$ *est une variable aléatoire.*
2. *Pour* ω *fixé,* $t \in T \to X_t(\omega)$ *est une fonction réelles, appelée trajectoire du processus.*

   * $T \subseteq N$ *le processus est temps discret.*

   * $T = [0; a]$ *telle que* $a > 0$ *le processus est temps continu.*

Définition 1.1.2 (Filtration) *une filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *pour* $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

Définition 1.1.3 *la filtration naturelle(ou canonique) de processus X_t est donner par $\mathcal{F}_t^x = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$, $t \in T$, c'est la plus petite $\sigma-$algèbre par rapport à laquelle X_s est mesurable pour tous $0 \leq s \leq t$.*

Notation : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé filtré.

Remarque La filtration est dite :

1. Continue droite si $\mathcal{F}_{t^+} := \underset{s \geq t}{\cap} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$.
2. Satisfait les conditions habituelles si elle est continue droite et si F_0 contient tous les ensembles $\mathbb{P}-$négligeable de $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.4 *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit mesurable si l'application défnie sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, B(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ par $(t, \omega)) \to X_t(\omega)$est mesurable.*

Définition 1.1.5 *On dit que un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est adapté par rapport à $\mathcal{F}$ si pour tout $t \in T$, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Définition 1.1.6 *Un processus est trajectoire continue si :*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega; t \to X_t(\omega) \text{ est continue}\}) = 1.$$

Définition 1.1.7 *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit progressivement mesurable par rapport $\mathcal{F}$ si $\forall\ t \in T$ l'pplication $(s; \omega) \to X_s(\omega)$ est mesurable sur $([0; t] \times \Omega, B([0; t]) \otimes \mathcal{F}_t)$.*

Définition 1.1.8 *Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit cadàlg (continue à droite et pourvu de limite à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et pourvues de limite à gauche pour presque tout ω.*

Définition 1.1.9 *On dit que deux processus (X_t) et (Y_t) sont distingables si et seulment si :*

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega; \forall t \in T; X_t(\omega) = Y_t(\omega)) = 1.$$

Remarque 1.1.1 *Autrement si X et Y sont indistingables alors l'un est une modification de l'autre.*

Définition 1.1.10 *Deux processus sont dites équivalentes si et seulmentes si :*

$\forall n \in N, \forall t_1, t_2, ..., t_n \in T$:

$$Loi\left(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n}\right) = \ Loi\left(Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n}\right).$$

Définition 1.1.11 *Un processus X est progressivement mesurable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0.T]}$ si pour tout $t \geq 0$, l'application :*

$X_t : [0, t] \times \Omega, B\left([0, t] \otimes \mathcal{F}_t\right) \to \left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}, B\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\right)\right)$

$(s, t) \to X_s\left(\omega\right),$

mesurable par rapport à $B\left([0, t] \otimes \mathcal{F}_t\right)$ de $B\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}\right)$.

Remarque 1.1.2 *Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté.*

Proposition 1.1.1 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique dont les trajectoires sont continués à droite (ou à gauche), alors X_t est mesurable et progressivement mesurables s'il est de plus adapté.*

Définition 1.1.12 (processus gaussien) *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est gaussien ssi toute combinaison linéaire de ses marginales $a_1X_{t_1} + ... + a_nX_{t_n}$ suit une loi gaussienne (pour tout $n \in \mathbb{N}, t_1...t_n \in T$ et $a_1...a_n \in \mathbb{R}$).*

1.2 Mouvement Brownien

Définition 1.2.1 (mouvement brownien standard) *Le mouvement brownien $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un processus trajectoires continues tel que :*

i. $B_0 = 0$.

ii. *Pour tout* $t \geq 0 : B_t \backsim N(0,t)$.

iii. *Pour tout* $0 \leq t_1 ... \leq t_n$*, les variables aléatoires* $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*

Proposition 1.2.1 *Soit B un mouvement brownien alors presque sûrement B n'est pas différentiable et n'est pas variation finie en aucun point t.*

Proposition 1.2.2 *Soit B un mouvement brownien Standard*

1. $\forall\, t \geq 0$, $X_t = tB_{\frac{1}{t}}$, alors (X_t) est un mouvement brownien.
2. Soit $Z_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$, tel que $c > 0$ alors Z_t est un mouvement brownien.
3. Pour tout $s > 0$, $\{B_{t+s} - B_s\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\sigma(B_u, u \leq s)$.

1.3 Martingale (Martingale, sous-martingale et sur-martingale)

Un processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit martingale, sous-martingale ou sur-martingale si :

1. Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
2. Pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable i.e.$\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$.
3. Pour tout $0 \leq s \leq t$:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}s] = Xs, \ \mathbb{P} - p.s(\text{si martingale}). \\ \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}s] > Xs, \ \mathbb{P} - p.s(\text{si sous-martingale}). \\ \mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}s] < Xs, \ \mathbb{P} - p.s(\text{si sur-martingale}). \end{cases}$$

1.4 Intégrale stochastique

(**Propriétés d'intégrale stochastique**) les plus importantes propriétés sur l'intégrale stochastique :

a- Linéarité :

$$\int_0^t (a\phi_s^1 + b\phi_s^2)\mathrm{d}B_s = a\int_0^t \phi_s^1\mathrm{d}B_s + b\int_0^t \phi_s^2\mathrm{d}B_s.$$

b- Additivité : Pour $0 \leq s \leq u \ \leq t \leq T$

$$\int_s^t \phi_v\mathrm{d}B_v = \int_s^u \phi_v\mathrm{d}B_v + \int_u^t \phi_v\mathrm{d}B_v.$$

c- Propriétés de martingale : Pour tout processus ϕ les processus :

$$t \to I_t(\phi), \text{et} \to I_t(\phi)^2 - \int_0^t \phi_s\mathrm{d}s.$$

sont des$(\mathcal{F}_t^B)-$martingale continues.

d- Si $(x_t)_{0\leq s\leq T}$ est un prossus $\mathcal{F}_t-$adapté et $\mathbb{E}(\int_0^T |x_s|^2 \, ds) < \infty$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t |x_s|^2 \mathrm{d}B_s\right|^2\right] \leq 4(\int_0^T |x_s|^2 \mathrm{d}s).$$

e- Isométrie :

$$\mathbb{E}\left[(\int_0^t \phi_s\mathrm{d}B_s)\right]^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^t \phi_s^2\mathrm{d}s\right]. \tag{1.1}$$

1.4.1 Processus d'Itô

Définition 1.4.1 (Processus d'Itô) *On dit procussus d'Itô pour tous X_t de la forme suivantes :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s\mathrm{d}s + \int_0^t \theta_s\mathrm{d}B_s \ \mathbb{P}-p.s.$$

avec X_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable, φ et le drift ou la dérivée et θ deux processus $\mathcal{F}_t-$adapté telle que :

$$\int_0^t |\varphi_s| \, \mathrm{d}s < \infty \text{ et } \int_0^t \|\theta_s\|^2 \, \mathrm{d}s < \infty.$$

où le coefficient φ est le drift ou la dérivée et θ est le coefficient de diffusion.

1.4.2 Formule d'Itô

Théorème 1.4.1 (Premiére formule d'Itô) *Supposons f de classe $\mathbb{C}^2$. Alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s){\sigma^2}_s\mathrm{d}s.$$

Cette formule s'écrit sous forme condensée :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(X_t) &= f'(X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}f''(X_t){\sigma^2}_t\mathrm{d}t \qquad (1.2) \\ &= (f'(X_t)b_t + \frac{1}{2}f''(X_t){\sigma^2}_t)\mathrm{d}t + f'(X_t)\sigma_t\mathrm{d}B_t \\ &= f'(X_t)b_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\mathrm{d}\langle X\rangle_t + f'(X_t)\sigma_t\mathrm{d}B_t. \end{aligned}$$

Théorème 1.4.2 (Deuxième formule d'Itô) *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^1$ par rapport à t, de classe $\mathbb{C}^2$ par rapport à x. On a :*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s)\mathrm{d}X_s + \int_0^t f'_x(s, X_s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s){\sigma^2}_s\mathrm{d}s.$$

On peut écrire cette formule sous la forme différentielle

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(t, X_t) &= (f'_x(t, X_t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t){\sigma^2}_t)\mathrm{d}t + f'_x(t, X_t)\mathrm{d}X_t \\ &= f'_x(t, X_t)\mathrm{d}t + f'_x(t, X_t)\mathrm{d}X_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t)\mathrm{d}\langle X\rangle_t \\ &= (f'_x(t, X_t) + f'_x(t, X_t)b_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t){\sigma^2}_t)\mathrm{d}t + f'_x(t, X_t)\sigma_t\mathrm{d}B_t. \end{aligned}$$

Proposition 1.4.1 (Formule d'Intégration par partie) *Soit X et Y deux processus d'Itô,alors*

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s + \langle X, Y \rangle_t.$$

cette formule est connue sous le nom d'intégration par partie.

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques

Les équations diffèrentielles stochastiques "**EDS**" constituent une généralisation des équations différentielles ordinaires. Elles ont été introduites pour la première fois par Itô pour étudier les trajectoires des processus de diffusion. La formulation générale d'une équation différentielle stochastique est :

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}B_t \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{2.1}$$

et pour la forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\mathrm{d}B_s, \text{pour } 0 \leq t \leq T.$$

2.1 Solution forte et solution faible

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilité filtré, B_t est $(\mathcal{F}_t)-$ MB $d-$dimensionnel, $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus stochastique continue à valeur dans $\mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0, T] \times$

$\mathbb{R}^n \to M_{n\times d}(\mathbb{R})$, et $b : [0,T]\times\mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)$, deux fonction Boreliennes, et ζ un variable aléatoir $\mathcal{F}_0-$mesurable indépendante de B_t telle que : $\mathbb{E}(\ [\zeta|^p\ ) < \infty$, et $\forall p > 1$.

Définition 2.1.1 (Solution forte) *On dit que l'équation 2.1 admet une solution forte si pour chaque espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$; et pour tout mouvement Brownien $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$, il existe un processus continue $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ telle que :*

1. X est progressivement mesurable.
2. $\mathbb{P}-p.s$ $\left(\int_0^T \{|b(s,X_s)| + \|\sigma(s,X_s)\|\}\,\mathrm{d}s\right) < \infty$ où : $||\sigma|| = trace(\sigma\sigma^*)$.
3. $\mathbb{P}-p.s$ on a $0 \leq t \leq T$:

Alors :

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,X_s)\mathrm{d}B_s.$$

Si de plus

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X.$$

alors le processus X et $\mathcal{F}_t-$adapté et on a :

$$\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^B.$$

Définition 2.1.2 (Solution faible) *On dit que l'équation 2.1 admet une solution faible si on peut trouver un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un mouvement brownien $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$, il existe un un processus continue $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ tel que les propriétés 1), 2),3) soient vérifiées.*

Donc une solution faible est une collection d'objets :

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}, (B_t)_{t\in[0,T]}, (X_t)_{t\in[0,T]})$

Dans beaucoup de cas, où la solution faible existe on a :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X.$$

et par conséquent $(B_t)_{t\in[0,T]}$ est un $\left(\mathcal{F}_t^X\right)$ mouvement brownien. C'est pourquoi dans le cas des solutions faible on a :

$$\mathcal{F}_t^B \subset \mathcal{F}_t^X.$$

2.2 Unicité forte et unicité faible

Définition 2.2.1 (Unicité forte) *on dit que l'équation 2.1 admet une solution forte unique ; si pour chaque deux solution fortes $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ et $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$; on a :*

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} |X_t - Y_t| > 0\right\} = 0;$$

c'est à dire :

$$\mathbb{P}\left\{X_t = Y_t; \forall t \in [0,T]\right\} = 1.$$

Définition 2.2.2 (Unicité faible) *on dit que l'équation 2.1 admet une solution faible unique ; si pour chaque deux solution faibles*

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, \mathbb{P}, (B_t)_{t\in[0,T]}, (X_t)_{t\in[0,T]})$; et $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}})_{t\geq 0}, \tilde{\mathbb{P}}, (\tilde{B}_t)_{t\in[0,T]}, (\tilde{X}_t)_{t\in[0,T]})$;

il y'a coincidence des distribution des processus X et $\tilde{X}$. C'est à dire en ; pour tout B on a :

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\right\} = \tilde{\mathbb{P}}\left\{\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} / \tilde{X}(\tilde{\omega}) \in B\right\}.$$

Lemme 2.2.1 (de Granwall) *Soit $g : [0 : T] \to \mathbb{R}$ une fonction continu telle que, pour*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)\mathrm{d}s, a \in \mathbb{R}, b \geq 0. \tag{2.2}$$

alors, pour tout t :

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

Preuve. on pose

$$G(t) = a + b \int_0^t g(s)\mathrm{d}s.$$

alors :

$$g(t) \leq G(t).$$

si g est continu, G est une fonction dérivable et

$$\begin{aligned}\left(e^{-bt}G\left(t\right)\right)' &= -be^{-bt}G\left(t\right) + e^{-bt}G'\left(t\right) \\ &= -be^{-bt}G\left(t\right) + e^{-bt}g\left(t\right) \leq 0.\end{aligned}$$

donc :

$$e^{-bt}g\left(t\right) \leq e^{-bt}G\left(t\right) \leq G\left(0\right) = a.$$

si g est seulement mesurable bornée, G est continu et vérifie :

$$G\left(t\right) = a + b \int_0^t g(s)\mathrm{d}s \leq a + b \int_0^t G(s)\mathrm{d}s.$$

donc la même conclusion est vrai. ■

2.3 Théorème d'existence et unicité

Théorème 2.3.1 *Supposons que pour tout x, $y \in \mathbb{R}^n$ et $T \geq 0$. La fonctions b et σ satisfait les deux conditions suivantes :*

1. Condition Lipschitz : S'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$|b(t,x) - b(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq k\,|x-y|^2\,. \tag{2.3}$$

2. Croissance linéaire : S'il existe une constante $L > 0$ telle que :

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq L(1 + |x|^2). \tag{2.4}$$

3. X_0 est indépendant à $(B_t, t \geq 0)$ et de carré intégrable i.e :

$$\int_0^t |x|^2 \,\mathrm{d}s < \infty.$$

Alors : On dit que l'équation différentielle stochastique 2.1 admet une unique solution à trajectoire continue. De plus cette solution vérifie :

$$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2) < \infty.$$

Preuve. L'unicité : Soient $X \in \mathbb{S}^2$ et $K \in \mathbb{S}^2$, où $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ et $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$ deux solutions de l'EDS 2.1

$$X_0 = Y_0 = \zeta.$$

Notation $\mathbb{S}^2$: l'éspace de mesure X_t progressivement mesurable telle que :

$$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2) < \infty,$$

muni de

$$\|X_t\|_2 = \mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2) < \infty.$$

En utilisant les formules de X_t et Y_t et on obtient :

$$\begin{aligned}
|X_t - Y_t|^2 &= \left|\zeta + \int_0^t b(s,X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,X_s)\mathrm{d}B_s - \zeta - \int_0^t b(s,Y_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s,X_s)\mathrm{d}B_s\right|^2 \\
&= \left|\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\mathrm{d}s + \int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\mathrm{d}B_s\right|^2.
\end{aligned}$$

On applique maintenant cette inégalité : $(a+b)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right)$, alors :

$$|X_t - Y_t|^2 \leq 2\left|\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\mathrm{d}s\right|^2 + 2\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\mathrm{d}B_s\right|^2.$$

En passant à l'espérence mathématique et d' aprés l'inégalité de Cauchy-Schawrtz **??**, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|X_t - Y_t|^2 &\leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\mathrm{d}s\right|^2 + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\mathrm{d}B_s\right|^2 \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t 1^2\mathrm{d}s \int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\mathrm{d}s\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\mathrm{d}B_s\right|^2.
\end{aligned}$$

D'aprés l'isometrie d'Itô 1.1, on obtient :

$$\mathbb{E}\,|X_t - Y_t|^2 \leq 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t 1^2\mathrm{d}s \int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\mathrm{d}s\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\right|^2 \quad \mathrm{d}s.$$

D'aprés condition lipchitizienne 2.3, nous donne :

$$\mathbb{E}\,|X_t - Y_t|^2 \leq 2T\mathbb{E}\int_0^t k\,|X_t - Y_t|^2\,\mathrm{d}s + 2\mathbb{E}\left(\int_0^t k\,|X_t - Y_t|^2\,\mathrm{d}s\right).$$

De plus le théorème de Fibuni, on peut écrire

$$\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq 2Tk \int_0^t \mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \mathrm{d}s + 2k \int_0^t \mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \ \mathrm{d}s.$$

On pose $C = max(2Tk, 2k)$, alors :

$$\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq C \int_0^t \mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \mathrm{d}s.$$

D'aprés inégalité de Gronwall 2.2, ona :

$$\mathbb{E}\left|X_t - Y_t\right|^2 \leq 0 \int_0^t e^{cs} = 0.$$

Alors :

$$X_t = Y_t \mathbb{P}{-}p.s.$$

Finalement on a l'unicité fort de la solution.

Preuve. Existence : On montre l'existence d'une solution forte, en utilisant la méthode des approximations successives, pour cela on pose

$$X_t^n = \xi + \int_0^t b(s, X_s^{n-1}) \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) \mathrm{d}B_s.$$

On a :

$$\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right| = \left|\int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_t^{n-1}))\mathrm{d}s - \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma\left(s, X_t^{n-1}\right))\mathrm{d}B_s\right|$$

En utilisant la même technique pour l'unicité, on obtient :

$$\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2 \leq C \int_0^t \mathbb{E}\left(\left|X_t^n - X_t^{n-1}\right|^2\right) \mathrm{d}s.$$

On a :

$$\mathbb{E}\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 \leq 2\mathbb{E}\left|\int_0^t (b(s, X_s^0)\mathrm{d}s\right|^2 + 2\mathbb{E}\left|\int_0^t (\sigma(s, X_s^0)\mathrm{d}B_s\right|^2.$$

D'après l'intégrale de Cauchy-Schwartz **??** et l'isometrie d'Itô 1.1, on obtient :

$$\mathbb{E}\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 \leq 2t\mathbb{E}\int_0^t \left|b(s, X_s^0)\right|^2 \mathrm{d}s + 2\mathbb{E}\int_0^t \left|\sigma(s, X_s^0\right|^2 \mathrm{d}s.$$

En utilisant la croissance linéaire 2.2 de b et σ , on trouve :

$$\mathbb{E}\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 \leq 2tk\mathbb{E}\int_0^t (1 + |X_0|^2)\mathrm{d}s + 2k\mathbb{E}\int_0^t (1 + |X_0|^2)\mathrm{d}s.$$

De plus le théorème de Fubuni, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|X_t^1 - X_t^0\right|^2 &\leq 2tk\int_0^t (1 + \mathbb{E}|X_0|^2)\mathrm{d}s + 2k\int_0^t (1 + \mathbb{E}|X_0|^2)\mathrm{d}s \\ &\leq M(1 + |X_0|^2)T \leq CT,\end{aligned}$$

avec : $M = max(2Tk, 2k)$ et $C = M(1 + |X_0|^2)$ Alors :

$$\mathbb{E}\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2 \leq C\int_0^t \mathbb{E}\left(\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2\right)\mathrm{d}s.$$

En appliqaunt les même étapes successivement, nous avons trouver :

$$\mathbb{E}\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2 \leq C^2\int_0^t s\mathrm{d}s \leq C^2\frac{t^2}{2} \leq \frac{(CT)^2}{2}.$$

De plus, pour $n = 3$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left|X_t^3 - X_t^2\right|^2 &\leq C \int_0^t \mathbb{E}\left(\left|X_t^2 - X_t^1\right|^2\right) \mathrm{d}s \\
&\leq C \int_0^t C^2 \frac{S^2}{2} \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{C^3}{2} \int_0^t s^2 \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{C^3}{2} \frac{t^3}{3} \\
&\leq \frac{C^3 T^3}{1.2.3} \\
&\leq \frac{(CT)^3}{3!}.
\end{aligned}
$$

Alors : $\forall n \geq 0$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|X_t^{n+1} - X_t^n\right|^2\right) &\leq C \int_0^t \mathbb{E}\left(\left|X_s^n - X_s^{n-1}\right|^2\right) ds \\
&\leq C \int_0^t \left(\frac{C^n S^n}{n!}\right) ds \\
&\leq \frac{C^{n+1}}{n!} \left(\frac{S^{n+1}}{n+1}\right) \\
&\leq \frac{(CT)^{n+1}}{(n+1)!} \\
&\leq \frac{(CT)^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}
$$

Deuxiement on montre que X_t^n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$, en utilisant l'inégalité triangulaire on trouve :

$$
\begin{aligned}
(\mathbb{E}\left|X_t^m - X_t^n\right|^2)^{\frac{1}{2}} = \left\|X_t^m - X_t^n\right\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left\|X_t^{k+1} - X_t^k\right\| \mathbb{L}^2_{(\Omega)} \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{(MT)^{k+1}}{(k+1)!}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Lorsque $n, m \to \infty$, on obtient :

$$\left(\mathbb{E}\left(\left|X_t^m - X_t^n\right|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

Donc X_t^n est une de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$ (qui est lui même un éspace de Banach), et par conséquent elle est converg dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Notons X_t la limite de la suite X_t^n alors $\lim\limits_{n\to\infty} = X_t$, telle que :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\mathrm{d}B_s. \tag{2.5}$$

Il faut montrer que la solution s'écrit sous la forme EDS 2.1, en utilisant l'isométrie d'Itô 1.1, on a :

$$\mathbb{E}\left|\left(\int_0^t (\sigma(s, X_s^{n-1}) - \sigma(s, X_s))\mathrm{d}B_s\right)^2\right| \leq C\mathbb{E}\left(\int_0^t \left|X_s^{n-1} - X_s\right|^2 \mathrm{d}s\right).$$

Comme $X_t^n \underset{n\to\infty}{\overset{L^2}{\to}} X_t$, Alors :

$$\int_0^t (\sigma\left(s, X_s^{n-1}\right))\mathrm{d}B_s \underset{n\to\infty}{\overset{L^2}{\to}} \int_0^t \sigma(s, X_s)\,\mathrm{d}B_s.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz **??**, on a :

$$\mathbb{E}\left|\left(\int_0^t (b(s, X_s^{n-1}) - b(s, X_s))\mathrm{d}s\right|^2 \leq CT\mathbb{E}\left(\left|X_s^n - X_s\right|^2\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Par la continuité de la fonction b on obtient :

$$b(s, X_s^{n-1}) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{L}^2}{\to}} b(s, X_s).$$

En passant à la limite, on obtient :

$$X_t^n = \xi + \int_0^t b(s, X_s^{n-1})\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})\mathrm{d}B_s \underset{n\to\infty}{\overset{L^2}{\longrightarrow}} X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, X_s)\mathrm{d}B_s.$$

Donc X_t est une solution de l'équation 2.1. Il reste à vérifier que :

$$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^2) < \infty.$$

Premièrement d'après l'inégalité $(a+b+c) \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, on a :

$$|X_t|^2 = \left(|\xi| + \int_0^t |b(s, X_s|)\mathrm{d}s + \int_0^t |\sigma(s, X_s)|\,\mathrm{d}B_s\right)^2 \leq 3\,|\xi|^2 + 3(\int_0^t |b(s, X_s)|\,\mathrm{d}s)^2 + 3(\int_0^t |\sigma(s, X_s)|$$

En passant à l'inégalité de Cauchy-Schwarz **??**, et l'ésperance mathématique, on obtient :

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq 3\mathbb{E}\,|\xi|^2 + 3t\mathbb{E}(\int_0^t |b(s, X_s)|^2\,\mathrm{d}s + 3\mathbb{E}(\int_0^t \left|\sigma(s, X_s)^2\right|\mathrm{d}B_s)^2.$$

En appliquant l'isométrie d'Itô 1.1, on trouve :

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq 3\mathbb{E}\,|\xi|^2 + 3t\mathbb{E}(\int_0^t |b(s, X_s)|^2\,\mathrm{d}s + 3\mathbb{E}(\int_0^t \left|\sigma(s, X_s)^2\right|\mathrm{d}s).$$

D'aprés la croissance linéaire de b et σ 2.2, on obtient :

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq 3\mathbb{E}\,|\xi|^2 + 3t\mathbb{E}(\int_0^t k(1+|x|^2)\mathrm{d}s + 3\mathbb{E}(\int_0^t k(1+|x|^2)\mathrm{d}s.$$

Puis on applique le théorème de Fibuni, on trouve :

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq 3\mathbb{E}\,|\xi|^2 + 3tk(\int_0^t k(1+|x|^2)\mathrm{d}s + 3k(\int_0^t k(1+|x|^2)\mathrm{d}s.$$

On possons $N = max(3, 3Tk, 3k)$, alors :

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq N\mathbb{E}\,|\xi|^2 + N(\int_0^t (1 + \mathbb{E}\,|x|^2)\mathrm{d}s + N(\int_0^t (1 + \mathbb{E}\,|x|^2)\mathrm{d}s.$$

On pose aussi $c = max\,(N, 2N)$, alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X_t|^2) &\leq c\mathbb{E}\,|\xi|^2 + c\int_0^t (1 + \mathbb{E}\,|x|^2)\mathrm{d}s \\ &\leq c\mathbb{E}\,|\xi|^2 + cT + c\int_0^t \mathbb{E}\,|x|^2\,\mathrm{d}s \\ &\leq c(\mathbb{E}\,|\xi|^2 + T) + c\int_0^t \mathbb{E}\,|x|^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Gronwal 2.2, on obtient :

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq c(\mathbb{E}\,|\xi|^2 + T)\exp^{ct}.$$

telle que $a = c(\mathbb{E}\,|\xi|^2 + T)$ et $b = c = max\,(N, 2N)$ et $M = c(\mathbb{E}\,|\xi|^2 + T)\exp^{ct}$ sont positives.

Alors : ■ ■

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) \leq M < \infty.$$

D'où $X_t \in \mathbb{S}^2$.

2.4 Quelques proprétiés de Markov

On note $\mathbb{P}_x$ la probabilité partant de x : $\mathbb{P}_x(.) = \mathbb{P}(.|X_0 = x)$ et $\mathbb{E}_x$ l'espérance conditionnelle sachant $X_0 = x$.

Théorème 2.4.1 (Propriété de Markov faible)

Soit X_n une chîne de markov canonique. Pour toute variable aléatoire Z bornée (resp.positive)

$$\mathbb{E}_{\mu}\left[(Z \circ \theta_n | \mathcal{F}_n)\right] = \mathbb{E}_{X_n}(Z), P_{\mu}.$$

presque sûrement.

En particulier, pour tout événement A et pour tout entier n,

$$\mathbb{P}\left[(X_n, X_{n+1}, ...) \in A | X_{0,...,}X_n\right] = \mathbb{P}_{X_n}(A).$$

Preuve. Par définition de l'espérance conditionnelle, il s'agit de montrer que tout $B \in \mathcal{F}_n$ on a :

$$\int_B Z \circ \theta_n \mathrm{d}P_\mu = \int_B \mathbb{E}_{X_n}(Z) \mathrm{d}P_\mu.$$

La relation est vrai pour une fonction indicatrice $Z = 1$. Pour $B = (X_0 \in B_0, ..., X_n \in B_n)$ et $A = (X_0 \in A_0, ..., X_k \in A_k)$, on a :

$$\theta_n^{-1}(A) = (X_n \in A_0, ..., X_{n+k} \in A_k).$$

Pour tout $B \in \mathcal{F}_n$

$$\mathbb{E}_\mu \left[\left(1_{\theta_n^{-1}(A) \cap B}\right)\right] = \mathbb{E}_\mu \left(\mathbb{E}_{X_n} 1_A\right) 1_B.$$

Soit en sommant

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\mu \left[\left(1_{\theta_n^{-1}(A) \cap B}\right)\right] &= P_\mu \left(X_0 \in B_0, ..., X_n \in B_n, X_n \in A_0, ..., X_{n+k} \in A_k\right) \\
&= \sum_{x_0 \in B_0, ..., x_{n+k} \in A_k} \mu(x_0) Q(x_0, x_1) ... Q(x_{n+k-1}, x_{n+k}) \\
&= \mathbb{E}_\mu \left[1_{X_0 \in B_0} ... 1_{X_n \in B_n} \mathbb{E}_{X_n} (1_{X_n \in A_0} ... 1_{X_{n+k} \in A_k})\right] \\
&= \mathbb{E}_\mu \left[1_B \mathbb{E}_{X_n} 1_A\right] = \int_B \mathbb{E}_{X_n}(1_A) \mathrm{d}s P_\mu.
\end{aligned}$$

Le théorème est donc vrai pour des fonctions étagées, puis pour toute fonction positive par passage à la limite sur des fonctions étagées. ■

Théorème 2.4.2 (Propriété de Markov forte)

Soit T un temps d'arrêt, toute variable aléatoire bornée (resp.positive), on a sur $(T<\infty)$

$$\mathbb{E}_{\mu}\left[(Z\circ\theta_T|\mathcal{F}_T)\right]=\mathbb{E}_{X_T}(Z),P_{\mu}.$$

presque sûrement.

Pour tout événement A, on a $\mathbb{P}-p.s$

$$\mathbb{P}\left[(X_T,X_{T+1},...)\in A|\mathcal{F}_T\right]=\mathbb{P}_{X_T}(A).$$

On remarque la fonction indicatrice, la propriété de **Markov** s'écrit :

$$\mathbb{E}_{\mu}\left[1_{(T<\infty)}Z\circ\theta_T|\mathcal{F}_T\right]=1_{(T<\infty)}\mathbb{E}_{X_T}(Z).$$

Preuve. Il faut démontrer que pour tout $A\in\mathcal{F}_T$ on a :

$$\int_A Z\circ\theta_T\mathrm{d}P_{\mu}=\int_A E_{X_T}(Z)\mathrm{d}P_{\mu}.$$

D'aprés la propriété de **Markov** faible, pour tout n et pour tout $B\in\mathcal{F}_n$, on a :

$$\int_B Z\circ\theta_n\mathrm{d}P_{\mu}=\int_B \mathbb{E}_{X_n}(Z)\mathrm{d}P_{\mu}.$$

donc pour tout $A\in\mathcal{F}_{\infty}$

$$\int_{A\cap(T=n)} Z\circ\theta_n\mathrm{d}P_{\mu}=\int_{A\cap(T=n)} \mathbb{E}_{X_n}(Z)\mathrm{d}P_{\mu}.$$

et en sommant sur n,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{A\cap(T=n)} Z \circ \theta_n \mathrm{d}P_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A\cap(T=n)} \mathbb{E}_{X_n}(Z)\mathrm{d}P_\mu.$$

ce qui démontrer la propriété de Markov forte.

Pour chaque temps d'arrêt, on définit une probabilité de transition Q_T par :

$$Q_T f(x) = \mathbb{E}_x f(X_t).$$

Dans ces conditions, pour toute fonction borélienne bornée,

$$Q_n = Q^n.$$

et avec la notation :

$$\mathbb{E}\left[f\left(X_{T+n}\right)|\mathcal{F}_T\right] = Q_n f(X_t).$$

■

2.5 Théorème de comparaison

Ce théorème permet de comparer presque sûrement deux EDS uni-dimensionnelles et s'avère souvent extrémement utile en pratique.

Théorème 2.5.1 *Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien réel, b_1, b_2 et σ trois fonctions globalement lipshitiziennes, $x_1 \geq x_2$ deux réels. On considère les deux EDS*

$$X_t^i = x_i + \int_0^t b(X_s^i)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s^i)\mathrm{d}B_s.$$

pour $i = 1, 2$, Supposons que $b_1(x) \geq b_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $X_t^1 \geq X_t^2$ $p.s$, pour tout $t \geq 0$.

2.6 Sabilité de la solution par rapport aux données initiales :

Théorème 2.6.1 (Inégalité des Burkholder) *Soit B un MB, et $f \in \mathbb{L}^2$. Alors pour tous $p \geq 2$, Il exist une constant $C = C(p)$ pour qui :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T}\left|\int_0^t f_s \mathrm{d}B_s\right|^p\right] \leq C\mathbb{E}\left[\left(\left|\int_0^T f_s\right|^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}}\right]. \tag{2.6}$$

pour tous $t > 0$.

Preuve. Désignons par $X_t := \int_0^t f_s \mathrm{d}B_s$. De sorte que $dX_s = f_s \mathrm{d}B_s$.Premièrement, notons que nous pouvons supposer que les chemins

d'échantillonnage de X son presque sûrement bornés :en effet, définissezune suite de temps d'arrêt par $\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |X_t = n|\}$, et observons que $T \leq \infty$ si le processus $X_{\tau_n} \to X_T$ s'est arrêté, comme $n \to \infty$. Parconséquent, par un argument standard de convergence monontone, il s'agit de prouver l'affirmation dans le cas que X est borné. Aussi par lapositivité de l'intégrale dans le côté droit de l'inégalité 2.6, nous pouvons suppposer que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T}\left|\int_0^t f \mathrm{d}B_s\right|^p\right] \neq 0.$$

Nous prouvons d'abord le cas lorsque $p = 2$. Par [$lemme$(3.33), [8]],X_t est marginale. D'où il résulte du [$lemme$(2.21), [8]] (L'inégalité de Doob, cas continu) et de l'isométrie Itô dans le [$lemme$(3.28), [8]] que nous avons :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq T}\left|\int_0^t f \mathrm{d}B_s\right|^p\right] \leq 2\sup_{t \leq T}\mathbb{E}\left|\int_0^t f \mathrm{d}B_s\right|^p = 2\sup_{t \leq T}\int_0^t \mathbb{E}|f(s)|^2 \mathrm{d}s \leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t |f_s|^2 \mathrm{d}s\right].$$

Par conséquent, l'inégalité est prouvée pour $p = 2$.

Alors, pour $p > 2$. La fonction $\theta(x) = |x|^p$ est de classe $\mathbb{C}^2$ par $\mathbb{R}$. En effet, un calcul direct donne cela $\theta'(x) = px|x|^{p-2}$ et $\theta''(x) = p(p-1)|x|^{p-2}$, nous voyons donc que $\theta \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$.

Par conséquent, nous pouvons appliquer la formule d'Itô dans le [$theorem$(3.40), [8]] (Formule d'Itô), et obtenir de [$equation$(3.41), [8]] :

$$|X_t|^p = p\int_0^t |X_s|^{p-1} f_t \mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}p(p-1)\int_0^t |X_s|^{p-2}|f_s|^2 \mathrm{d}s.$$

puisque $(\mathrm{d}X_t)^2 = |f_t|^2\mathrm{d}t$. De ce qui précède, nous obtenons immédiatement :

$$\mathbb{E}|X_t|^p = p\mathbb{E}\int_0^t |X_s|^{p-1} f_t \mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}p(p-1)\mathbb{E}\int_0^t |X_s|^{p-2}|f_s|^2 \mathrm{d}s. \tag{2.7}$$

Puisque X est borné, et par hypothèse $f \in L^2\left([0,T]\times\Omega, \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}P\right)$, un processus prévisible, le premier terme dans 2.7est une martingale sur $[0,T]$ par [$theorem$(3.33), [8]], et donc d'espérance nulle. En utilisant également la bornitude de X nous pouvons faire l'estimation évidente du deuxième terme de droite dans l'équation ci-dessous et nous avons :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s|^{p-2}|f_s|^2 \mathrm{d}s\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \sup_{t\leq T}|X_t|^{p-2}\int_0^t |f_s|^2\mathrm{d}s\right] \leq \left[\mathbb{E}\sup_{t\leq T}|X_t|^p\right]^{\frac{p-2}{p}}\left[\mathbb{E}\int_0^T (|f_s|^2\mathrm{d}s)^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{2}{p}}. \tag{2.8}$$

où cette derniére inégalité résulte d'une application de l'inégalité de **Hölder** avec deux exposants $p' = \frac{p}{p-2}$,et $q\prime = \frac{p}{2}$. Non comme indiqué précédemment, X_t est une martingale, donc du [$theorem$(2.21), [8]] il s'ensuit que nous avons :

$$\mathbb{E}\sup_{t\leq T}|X_t|^p \leq \left(\frac{p}{p-2}\right)^2 \sup_{t\leq T}\mathbb{E}|X_t|^p.$$

En mettant 2.7 dans l'inégalité ci-dessous et en utilisant l'estimation dans 2.8, et finalement en divisant par le facteur commun $\mathbb{E}\left[\sup_{t\leq T}|X_t|^p\right]^{\frac{p-2}{p}}$, nous obtenons précisément l'inégalité voulue 2.6, et la preuve est terminée. ■

Chapitre 3

Calcul de Malliavin

3.1 Calcul de Malliavin

Le calcul de Malliavin pose les premiers éléments de l'analyse stochastique. L'idée est de développer un calcul aléatoire dans des espace Hilbertiens (gaussiens) de demension infinie. Le chapitre présente quelques résultats qui ont de nombreuses applications, comme la dérivée stochastique, la formule de **Clark-Ocone** et l'intégrale de **Skorohod**.

3.2 Chaos de Wiener

Polynômes d'Hermite :

Rappelons pour commencer quelques résultats sur les polynômes d'Hermite. Ces polynômes sont définis de la façon suivante :

$$h_n(x,q) = (-q)^n \exp^{x^2/2q} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\exp^{x^2/2q}\right)$$

Pour : $n = 0, 1, 2, ...$et q un paramètre positif $q > 0$.

lorsque $q = 1$, on les note simplement $h_n(x)$. Ils sont engedrés par la fonction génératrice :

$$\exp(tx - q\frac{t^2}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^2}{n!} h_n(x, q).$$

et vérifient la relation de récurrence :

$$h_{n+1}(x, q) = xhn - nqh_{n-1}(x, q).$$

avec par convention $h_{-1}(x) = 0$. La dérivée du $n - ième$ polynôme est liée au $(n-1) - ième$ polynôme **d'Hermite** par la relation :

$$h'_n(x, q) = nh_{n-1}(x)(x, q).$$

Le polynôme h_n est de degré n et sa partié est fonction de celle de n,

$h_n(-x, q) = (-1)^n h_n(x, q)$. Les première valeurs sont $h_0(x) = 1, h_1(x) = x, h_2(x) = x^2 - q, h_3(x) = x^3 - 3qx, h_4(x) = x^4 - 6qx^2 + 3q^2$. Ces polynômes forment une base orthonormale de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ relativement à la mesure gaussienne centrée de variance q. Plus précisément, si l'on pose $\mathrm{d}v(x) = \frac{1}{\sqrt{2qx}} \exp(-\frac{x^2}{2q})\mathrm{d}x$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x, q) h_m(x, q) \mathrm{d}v(x) = n! q^n \delta_{n,m}.$$

où le sumbole de Kronecker $\delta_{n,m}$ vaut 1 si $n = m$ et 0 sinon. À partir de ces polynômes, on définit la $n - ième$ fonction d'Hermite par :

$$e_n(x, q) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{n! q^n}} h_n\left(x\sqrt{2q}, q\right) e^{-x^2/2}.$$

Ces fonctions forment une base orthonormée relativement à la mesure de Lebesgue :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e_n(x,q)\, e_m(x,q)\, \mathrm{d}x = \delta_{n,m}.$$

On note $e_n(x)$ la fonction obtenue pour $q = 1$. Tout fonction de $\mathbb{L}^2(v)$ se décompose de manière unique en une somme :

$$f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n!q^n}} h_n(x,q).$$

où les coefficients a_n sont donnés par :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n!q^n}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, h_n(x,q)\, \mathrm{d}v(x).$$

Le carré de la norme de f dans $\mathbb{L}^2$ est la somme des coefficients au carré :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2.$$

Du fait de cette décomposition, les polynôme d'Hermite sont parfois apelés **polynôme de chaos.**

3.3 Décomposition de $\mathbb{L}^2$:

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de Wiener muni de son mouvement brownien standard B_t. Soit f une fonction définie sur les réels positifs de carée intégrable $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$. On définit une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\|f\|_{\mathbb{L}^2}^2$ par :

$$I(f) = \int_0^{\infty} f(s) \mathrm{d}B(s).$$

L'espace $\mathcal{H}_n$ engendré par les variables aléaoires $h_n(I(f))$ pour $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ est un sous-espace fermé de $\mathbb{L}^2(\Omega)$. L'espace $\mathcal{H}_0$ est celui des nombres complexes $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$.

L'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)$ des fonctions de carée intégrable se décompose en une somme des espaces $\mathcal{H}_n$. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 3.3.1 *Les espaces $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_m$ pour $n \neq m$ sont deux à deux orthogonaux et*

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = \overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} \mathcal{H}_n.$$

L'espace $\mathcal{H}_n$ est appelé le $n - ième$ chaos de Wiener.

Preuve. En introduisant les vecteurs exponentiels

$$\varepsilon(f) = \exp\left(I(f) - \frac{1}{2}\|f\|^2\right).$$

pour lesqueles $I(f)$ est une variable gaussienne centrée de variance $\|f\|^2$(par conséquent) $\mathbb{E}(\varepsilon(f)) = 1$) et de la relation triangulaire :

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle a, b\rangle.$$

appliquée à deux fonctions f et g :

$$\|tf + sg\| = l^2\|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\operatorname{Re}(st\langle f, g\rangle).$$

on écrit les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(tI(f) - \frac{1}{2}t^2\|f\|^2\right)\exp\left(sI(g) - \frac{1}{2}s^2\|g\|^2\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\varepsilon(tf) + \varepsilon(sg)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\varepsilon(tf+sg)\exp\left(\operatorname{Re} st\langle f, g\rangle\right)\right] \\
&= \exp\left(ts\operatorname{Re}\langle f, g\rangle\right).
\end{aligned}$$

En dérivant n fois selon t et m fois selon s, en prenant la dérivée aux valeurs $s = t$ et en introduisant la fonction génératrice en $x = I(f)$ et $q = \|f\|^2$

$$e^{tI(f)-\frac{1}{2}t^2\|f\|^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} h_n(I(f), \|f\|^2).$$

on voit que la quantité :

$$\mathbb{E}\left[h_n(I(f), \|f\|^2) h_m(I(g), \|g\|^2)\right] = n!(\mathrm{Re}\,\langle f, g\rangle)^n \delta_{n,m}\theta.$$

sera non nulle que pour $n \neq m$ ce qui montre l'orthogonalité. Reste à montrer qui si X ets une variable aléatoire de carré inégrable orthogonale à chaque $h_n(I(f), \|f\|^2)$ alors X est nulle. En effet si $\mathbb{E}(Xh_n\left(I(f), \|f\|^2\right)) = 0$, on a :

$$\mathbb{E}\left[X \exp\left(tI(f) - \frac{1}{2}t^2 \|f\|^2\right)\right] = 0.$$

pour tout réel $t \geq 0$. La variable X es donc orthogonale à tout vecteur exponentiel $\varepsilon(f)$. Comme ces vecteurs forment une base orthonormée totale de $\mathbb{L}^2(\Omega)$, on en déduit que X est nulle. ■

3.4 Dérivée de Malliavin

Soit $\mathbb{C}$ l'espace des variables aléatoires $F : \Omega \to \mathbb{R}$ de la forme $F(\omega) = \varphi(\theta_1, ..., \theta_n)$ où φ est une fonction à n indéterminées de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ indéfiniment différentiable et tel que φ e toutes ses dérivée partielles sont de croissance polynomiale et où les θ_i son les variables aléatoires

$$\theta_i = \int f_i(t)\mathrm{d}B_t.$$

avec f_i déterministe de carée intégrable $f \in \mathbb{L}^2$.Cet espace $\mathbb{C}$ est dns dans $\mathbb{L}^2$. La dérivée stochastique est définie pour tout $t \geq 0$ par :

$$D_t F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \varphi(\theta_1, ..., \theta_n).f_i(t).$$

On note $\|F\|_{1,2}^2 = \|F\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 + \|D_t F\|_{\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)}^2$

et $\mathbb{D}_{1,2}$ la fermeture de $\mathbb{C}$ pour cette norme. L'espace $\mathbb{D}_{1,2}$ est donc l'espace des variables aléatoirs $F \in \mathbb{L}^2(\Omega)$ telle qu'il existe une suite $F_n \in \mathbb{C}$ vérifiant :

1. $F_n \underset{n \to \infty}{\overset{\mathbb{L}^2(\Omega)}{\rightarrow}} F$.
2. La suite $D_t F_n$ converge dans $\mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$. La limite de cette suite est appelée la dérivée de Malliavin et noté par :

$$D_t F_n = \underset{n \to \infty}{lim} D_t F_n.$$

Cette définition est possible car on démontre que l'opérateur D_t est fermable : s'il existe une autre suite G_n qui converge aussi vers F telle que les dérivées $D_t G_n$ convergent, alors les limites lim $D_t G_n$ et lim $D_t F_n$ coïncident. De façon plus générale, on définit la dérivée stochastique selon une direction. L'espace de **Cameron-Martin** $\mathbb{H}$ est l'espace des ensembles $h \in \Omega$ qui s'écrivent sous la forme :

$$h(t) = \int_0^t u(s) \mathrm{d}s.$$

pour une fonction u de carée intégrable. La dérivée de F dans la direction γ est la limite dans $\mathbb{L}^2$:

$$D_h F(w) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(w + \varepsilon h) - F(w)}{\varepsilon}.$$

S'il existe $\psi(t, w) \in \mathbb{L}^2(\Omega \times \mathbb{R}^+)$ telle que :

$$D_h F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t, w) u(t) \mathrm{d}t.$$

alors on dit que F est différentiable et on pose :

$$D_t F(w) = \psi(t, w).$$

On a le résultat suivant.

Théorème 3.4.1 (Cameron-Martin) *: Pour tout $F \in \mathbb{D}_{1,2}$, et $h \in \mathbb{H}$, on a pour tout $\varepsilon \geq 0$*

$$\mathbb{E}(F(w + \varepsilon h)) = \mathbb{E}(F(w) \exp(\varepsilon h - \frac{\varepsilon^2}{2} \|h\|^2)).$$

Théorème 3.4.2 (Intégration par parties) *: Pour tout $F \in \mathbb{D}_{1,2}$, on a :*

$$\mathbb{E}(D_h F) = \mathbb{E}(F I(h)).$$

Preuve. Il suffit d'écrir la définition de la dérivée et d'appliquer le théorème précédent.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(D_h F)(w) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}(\frac{F(w + \varepsilon h) - F(w)}{\varepsilon}) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{E}(F(w) \frac{\exp(\varepsilon h - \frac{\varepsilon^2}{2} \|h\|^2) - 1}{\varepsilon}) \\
&= \mathbb{E}(F I(h)).
\end{aligned}$$

■

3.5 Formule de Clark-Ocone

Soit $X(w)$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_t-$mesurable de$\mathbb{L}^2(\Omega)$. Il existe un unique processus $\mathcal{F}_t-$ adapté $\varphi(t, w)$ telle que :

$$X(w) = \mathbb{E}(\mathbb{X}) + \int_0^t \varphi(t, w) \mathrm{d}B_t.$$

Ce théorème affirme l'existence du processus $\varphi(t,w)$ mais ne permet pas de le calculer.

Si $X \in \mathbb{D}_{1,2}$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable, alors on a :

$$X(w) = \mathbb{E}(X) + \int_0^t \mathbb{E}(D_s X/\mathcal{F}_s)\mathrm{d}B_s.$$

3.6 Intégrale de Skorohod

La dérivée stochastique $D : \mathbb{D}_{1,2} \to \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ est un opérateur fermé.

Son adjoint δ est un opérateur non borné, fermé de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega) \to \mathbb{L}^2(\Omega)$ qui opère sur le domaine des processus stochastiques $X(t,\omega) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ pour lequeles l'application $F \to DF$. X est continue sur $\mathbb{D}_{1,2} \subset \mathbb{L}^2(\Omega)$.

$$\langle F, \delta(X)\rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \langle DF, X\rangle_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}.$$

Soit $X(t,\omega) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ un processus stochastique dont le développement chaotique s'ècrit :

$$X(t,\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n, t).$$

où $f_{n,t}$ désigne comme précédemment la fonction dépendant du paramètre t,

$f_{n,t}(t_1, ..., t_n) = f_n(t_1, ..., t_n, t)$

La fnction f_n considérée comme une fonction de $n+1$ variables est symétrique par rapport aux n premières variables. On définit le symétrisé $\tilde{f}_n$ de f_n par :

$$\tilde{f}_n(t_1, ..., t_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t_1, ..., \hat{t}_i, ..., t_{n+1}, t_i).$$

avec la notation $\hat{t}_i$ qui signifie que la variable t_i est omise, $t_{n+1} = t$ et l'indice $i = 0$ est inopérant.

$\tilde{f}_n(t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{3}\left[f_2(t_1, t_2, t_3) + f_2(t_2, t_3, t_1) + f_2(t_1, t_3, t_2)\right]$

$= \frac{1}{3}\left[f_2(t_1, t_2, t) + f_2(t_2, t, t_1) + f_2(t_1, t, t_2)\right].$

L'action de l'opérateur divergence sur le processus X_t est définie par :

$$\delta(X) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n).$$

Cette quantité est appelée *intégrale de Skorohod* et notée par :

$$\delta(X_t) = \int_0^t X_s(\omega)\delta B_s = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n).$$

On dit que l'intégrale converge ou que X_t est intégrable au sens de Skorohod, et on note $X_t \in Dom(\delta)$ si la somme converge dans $\mathbb{L}^2$. Nous admettrons le résultat suivant.

Théorème 3.6.1 *Le processus X_t est intégrable au sens de Skorohod si et seulement si :*

$$\mathbb{E}\left[\delta(X_t)^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)! \left\|\tilde{f}_n\right\|^2_{L^2([0,t]^{n+1})}.$$

Cette intégrale est une extension de l'intégrale d'Itô. Si le processus $X_t(\omega)$ est $\mathcal{F}_t-$adapté alors les deux intégrales coïncident. On démontre que le processus $X_t(\omega)$, admettant la décomposition chaotique précédente :

$$X_t(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n, t).$$

est $\mathcal{F}_t-$adapté si et seulement si :

$$f_n(t_1, ..., t_n, t) = 0 \text{ si } t < max(t_1, ..., t_n).$$

Théorème 3.6.2 *Si $X_t(\omega) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ est intégrable au sens d'Itô (avec un* *intégrand $\mathcal{F}_t-$adapté) alors $X_t \in Dom(\delta)$ et les deux intégrales coïncident :*

$$\int_0^t X_s(\omega)\delta \mathrm{d}B_s = \int_0^t X_s(\omega)\mathrm{d}B_s.$$

Exemple 3.6.1 *Calculons l'intégrale de Skorohod d'un mouvement brownien*

$$\int_0^t B_s(\omega)\delta dB_s.$$

On a vu que ce processus admet une décomposition en Chaos de Wiener avec des fonctions f_n nulles sauf pour $n = 1$ au quel cas $f_1 = 1$. par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^t B_s(\omega)\delta \mathrm{d}B_s &= I_2\left(\tilde{f}_1\right) \\ &= \int_0^t \int_0^{t2} \mathrm{d}B(t_1)\mathrm{d}B\left(t_2\right) \\ &= \frac{1}{2}(B_t^2 - t).\end{aligned}$$

Les deux intégrales donnent le même résulta.

3.7 Critères d'existence et de régularité des densités

3.7.1 Existence de densités :

Tout d'abord, nous allons introduire le cas le plus simple, celui d'une variable aléatoire.

Proposition 3.7.1 *Soit $f \in \mathbb{D}_{1,2}$ et supposons que, $\frac{DF}{\|DF\|^2} \in Dom\ \delta$, puis, le loi de*

F est absolument continue. En outre, sa densité est donnée par :

$$p(x) = \mathbb{E}\left[1_{(F\geq x)}\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|^2_{\mathbb{H}}}\right)\right]. \tag{3.1}$$

par conséquent, il est continu et limité.

Preuve. Cette preuve repose sur la [$proposition$(1.1), [2]], nous avons juste besoin de montrer que :

$$\mathbb{E}\left[\varphi'\left(F\right)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi\left(F\right)\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|^2_{\mathbb{H}}}\right)\right].$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{C}_b^\infty(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que F et $G = 1$ satisfont à une

intégration par parties de formule de degré 1 avec

$H_1(F,1) = \delta\left(\frac{DF}{\|DF\|^2_{\mathbb{H}}}\right)$, puisque par hypothèse $\frac{DF}{\|DF\|^2_{\mathbb{H}}} \in Dom\ \delta$.

En appliquant la règle de chaîne, on obtient que $D(\varphi(F)) = \varphi'\left(F\right)DF$, donc :

$\langle D(\varphi(F)), DF\rangle_{\mathbb{H}} = \langle\varphi'\left(F\right)DF, DF\rangle_{\mathbb{H}} = \varphi'\left(F\right)\|DF\|^2_{\mathbb{H}}$,

ce qui signifie que :

$$\left[\varphi'\left(F\right)\right] = \left\langle D(\varphi\left(F\right)), \frac{DF}{\|DF\|^2_{\mathbb{H}}}\right\rangle_{\mathbb{H}}.$$

En utilisant la propriété de la dualité, elle conduit à l'intégration désirée par la formule des parties.

Lorsque F est un vecteur aléatoire à la place, nous devons envisager une analyse plus impliquée. ■

Proposition 3.7.2 *Que $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ soit un vecteur aléatoire avec des composants $F^i \in \mathbb{D}_{1,2}$, $i \in \{1, ..., n\}$. Supposons que :*

1. La matrice de Malliavin,γ, est inversable a.s.
2. Pour chaque $i,j \in \{1,...,n\}$, les variables aléatoires$(\gamma^{-1})_{i,j}\,DF^j \in Dom\ \delta$.

Ensuite, pour tout $\varphi \in \mathbb{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{E}\left[\partial_i\varphi\left(F\right)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi\left(F\right)H_i(F,1)\right].$$

avec $H_i(F,1) = \sum_{l=1}^{n}\delta\left(\gamma^{-1}\right)_{i,l}DF^l$. Ainsi, la loi de F est absolument continue.

Preuve. Pour tout $\varphi \in \mathbb{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, en utilisant la règle de [$Chaîne$(4.4), [2]], nous obtenons que $D(\varphi(F) = \sum_{k=1}^{n}\partial_k\varphi\left(F\right)DF^k$. Par conséquent :

$$\left\langle D(\varphi(F)), DF^l\right\rangle = \sum_{k=1}^{n}\partial_k\varphi\left(F\right)\left\langle D(F^k), DF^l\right\rangle_{\mathbb{H}} = \sum_{k=1}^{n}\partial_k\varphi\left(F\right)_{\gamma k,l},$$

pour $l \in \{1,...,n\}$. Comme ceci forme un système linéaire avec la matrice γ, nous pouvons inverser ceci, puisqu'il est invertible a.s, et obtenir :

$$\partial_k\varphi\left(F\right) = \sum_{l=1}^{n}\left\langle D(\varphi(F)), \left(\gamma^{-1}\right)_{k,l}DF^l\right\rangle_{\mathbb{H}}.$$

pour tout $k \in \{1,...,n\}$, a.s. Remarquez que γ est symétrique et $\left(\gamma^{-1}\right)_{k,l} = \left(\gamma^{-1}\right)_{l,k}$. Maintenant, prendre les attentes et appliquer la propriété de la dualité :

$$\mathbb{E}\left[\partial_k\varphi\left(F\right)\right] = \sum_{l=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left\langle D(\varphi(F)), \left(\gamma^{-1}\right)_{k,l}DF^l\right\rangle_{\mathbb{H}}\right] = \sum_{l=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left\langle\varphi(F), \delta(\left(\gamma^{-1}\right)_{k,l}DF^l)\right\rangle_{\mathbb{H}}\right].$$

pour tout $k \in \{1,...,n\}$, satisfaisant la première partie de la proposition. Par hypothèse *in* [2, [2]] $\delta((\gamma^{-1})_{i,l}DF^l) \in \mathbb{L}^2\left(\Omega\right) \subset \mathbb{L}^1\left(\Omega\right)$ pour tout $k,l \in \{1,...,n\}$ et donc :

$$\left|\mathbb{E}\left[\partial_k\varphi\left(F\right)\right]\right| \leq \|\varphi\|_\infty\sum_{l=1}^{n}\mathbb{E}\left|\delta(\left(\gamma^{-1}\right)_{k,l}DF^l)\right|.$$

Maintenant, l'existence de la densité pour le vecteur aléatoire F suit l'application de la [$proposition$(1.2), [2]]. ■

3.7.2 Régularité des densités.

Lemme 3.7.1 *Soit* $(Fn)_n$ *une suite de variables aléatoires convergeant vers* F *dans* $\mathbb{L}^p(\Omega)$ *pour certains* $p > 1$ *Supposons que* $\sup_n \|F_n\|_{s,p} < \infty$ *pour certains* s. *Puis,* $F \in \mathbb{D}_{s,p}$.*Que* $F \in \mathbb{D}_{1,2}$ *soit une variable aléatoire telle que* $\mathbb{E}\left[|F|^{-2}\right] < \infty$.

Alors, $P(F > 0)$ est soit 0, soit 1.

Maintenant nous allons exposer des conditions suffisantes pour la finesse des densités d'un vecteur aléatoire.

Proposition 3.7.3 *Soit* $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un vecteur aléatoire satisfaisant :*

1. $F^i \in \mathbb{D}^\infty$; pour tout $i \in \{1, ..., n\}$,
2. La matrice de Malliavin de F, γ, est inversible presque sûrement et

$$det\ \gamma^{-1} \in \underset{p\in[1,\infty)}{\cap} \mathbb{L}^p(\Omega). \tag{3.2}$$

Alors la loi de F a une densité indifiniment différentiable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Tout d'abord, voyons que $\left(\gamma_{i,j}^{-1}\right) \in \mathbb{D}^\infty$Faire pour tous, $i, j \in \{1, ..., n\}$. Soit φ_N est défini comme $\varphi_N = \left(x + \frac{1}{N}\right)$ pour $x \geq 0$ et $N \geq 1$. Comme $P(det\gamma > 0)$ est zéro ou un par [$lemme$(5.2), [2]], nous supposerons que $det\gamma > 0$. Soit maintenant $Y_N = (det\ \gamma + \frac{1}{N})$, $N \geq 1$. Comme φ_N peut être pronlongée à une fonction dans $\mathbb{C}_p^\infty(\mathbb{R})$ et $det\ \gamma \in \mathbb{D}^\infty$ (déduit du[$corollary$(4.1), [2]]), puis, par une itération de la règle de chaîne, nous avons ce $Y_N \in \mathbb{D}^\infty$, pour tout $N \geq 1$. Nous avons que Y_N converge pour $det\gamma^{-1}$ dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ pour tout $p \geq 1$, par [(37), [2]]. Ensuite, en raison de [$lemme$(5.1), [2]], $det\ \gamma^{-1}$ appartiennent à $\mathbb{D}^\infty$ si la séquence $(Y_N)_N$ a desdériveés uniformément bornées de n'importe quel ordre dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ pour n'importe quel p. En appliquant la règle de [$leibniz$(23), [2]], nous pouvons voir que les dériveés sont uniformément bornées. En effet :

$$D^k(\varphi_N(det\ \gamma)) = \sum_{l=1}^{k}\sum_{\rho_l} c_l \varphi_N^{(l)}(det\ \gamma)\prod_{i=1}^{l} D^{|p_i|}det\ \gamma,$$

sont uniformément délimités depuis $det\ \gamma \in \mathbb{D}^{\infty}$ et

$$\left|\varphi_N^{(l)}(det\ \gamma)\right| = l!\left((det\gamma + \frac{1}{N})\right)^{-(l+1)} = l!(Y_N)^{(l+1)},$$

et la norme $\mathbb{L}^p$ de Y_N est bornée par la norme $\mathbb{L}^p$ de $det\ \gamma^{-1}$ pour tout $p,N \geq 1$. D'après l'expression de l'inverse de γ, [35, [2]], on peut voir que toutes les entrées de γ^{-1} appartiennent à $\mathbb{D}^{\infty}$. C'est parce que les deux $det\ \gamma^{-1}\ F^i$ et i appartiennent à $\mathbb{D}^{\infty}$, pour tout $i \in \{1,...,n\}$.

Maintenant, comme dans la preuve de la $proposition$(3.7.2), nous pouvons obtenir cela pour n'importe quel $\varphi \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^n)$:

$$\partial_i\varphi(F) = \sum_{l=1}^{n}\left\langle D(\varphi(F)), \left(\gamma^{-1}\right)_{k,l} DF^l\right\rangle_{\mathbb{H}}.$$

Multiplier les deux membres par un $G \in \mathbb{D}^{\infty}$ donné et prendre les attentes que nous obtenons :

$$\mathbb{E}\left[\partial_i\varphi(F)\,G\right] = \sum_{l=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left\langle D(\varphi(F)), G\left(\gamma^{-1}\right)_{k,l} DF^l\right\rangle_{\mathbb{H}}\right].$$

Nous avons ce $G\left(\gamma^{-1}\right)_{i,l}$, $DF^l \in \mathbb{D}^{\infty}$, puisque chacun des facteurs appartient à $\mathbb{D}^{\infty}$, alors, nous pouvons appliquer la propriété de la dualité et obtenir :

$$\mathbb{E}\left[\partial_i\varphi(F)\,G\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(F)\,H_i(F,G)\right], \tag{3.3}$$

avec $H_i = (F,G)$, pour tous $i \in \{1,...,n\}$. Il peut être montré en utilisant une extension de la [$proposition$(4.7), [2]] et en itérant, que $H_i \in \mathbb{D}^{\infty}$. De plus, on peut généraliser 3.3 pour n'importe quel multiindex α en utilisant l'induction sur $|\alpha|$. L'expression a été donnée pour $|\alpha| = 1$, supposons maintenant que c'est vrai pour $|\alpha| = r - 1$. Donné à β un multiindex tel que $\beta = r$, on peut exprimer $\beta = a + i$, où a et i sont des multiindex tels que $|\alpha| = r - 1$ et $|i| = 1$. Puis, par récursion :

$$\mathbb{E}\left[\left(\partial_{\beta}\varphi\right)(F)\, G\right] = \mathbb{E}\left[\partial_{i}\varphi\,(F)\, H_{\alpha}(F,G)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi\,(F)\, H_{i}(F, H_{\alpha}(F,G))\right],$$

et on peut définir la variable aléatoire $\mathbb{D}^{\infty}$, $H_{\beta}(F,G)$ égale à $H_i(F, H_{\alpha}(F,G))$ presque sûrement, où :

$$H_i(F, H_{\alpha}(F,G)) = \sum_{l=1}^{n} \delta(H_{\alpha}(F,G)\left(\gamma^{-1}\right)_{i,l} DF^{l}).$$

En prenant $G = 1$ on obtient que pour tout multiindex α et chaque fonction $\varphi \in \mathbb{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathbb{E}\left[\partial_{\alpha}\varphi\,(F)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi\,(F)\, H_{\alpha}(F,1)\right].$$

En particulier :

$$\left|\mathbb{E}\left[\left(\partial_{\alpha}\varphi\right)(F)\right]\right| \leq C_{\alpha}\left\|\varphi\right\|_{\infty}$$

$C_{\alpha} := \mathbb{E}[H_{\alpha}(F,1)]$ est une constante qui ne dépend pas de φ. En appliquant la $[proposition(1.2), [2]]$ nous montrons finalement que la loi de F a une densité $\mathbb{C}^{\infty}$. ∎

Conclusion

Dans ce mémoire on a considérer le problème qui garantit une solution unique à l'équation différentielle

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = b(t, X_t)\mathrm{d}t + \sigma(t, X_t)\mathrm{d}B_t \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{3.4}$$

avec b et σ sont des coefficient Lipschitz de l'équation. On a présenté aussi le calcul de Malliavin et le théorie du chaos de Wiener. On a étudié la dérivée de Malliavin. Alors on prolonge l'intégrale d'Itô à l'intégrale de Skorohod. On a présenté en plus la rgularité de la desnité d'une variable aléatoire différentiable de malliavin en utilisant le calcul de Malliavin.

Bibliographie

[1] Briand, P. (2001). Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades. Mars.

[2] Capilla Guilarte, D. (2019). Basics of Malliavin Calculus.

[3] Gihman, I. I. I., & Skorohod, A. V. (1979). Stochastic differential equations.

[4] Jedrzejewski, F. (2009). Modeles aleatoires et physique probabiliste. Springer Science & Business Media.

[5] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry.

[6] Jeanblanc, M., & Simon, T. (2005). Eléments de calcul stochastique. IRBID, septembre.

[7] khalfallah, N. (2019). Cours de martingale. Département de mathématique, premier année Master, Université de Biskra.

[8] Nummi, P. (2019). Existence and Uniqueness of Solutions for Stochastic Differential Equations.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$B(\mathbb{R}^{\mathrm{d}})$	:	Tribu borélienne sur $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$.
$P.s$	:	Presque sûrement.
B_t	:	Mouvement brownien.
$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$	:	Filtration.
EDS	:	Equation différentielle stochastique.
$\mathbb{P}-p.s$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité filtré.
b	:	Drift ou la dérive.
δ	:	Terme de diffusion.
lim	:	Limite.
$\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^2$	:	L'espace des fonction continue intégrable.
$\mathbb{E}\left[X\right]$	:	Espérence mathématique ou moyenne du variable alétoire.
cov	:	Fonction de Covariance.
$resp$	:	Respectivement.
exp	:	Exponentiel.

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	:	Espace de probabilité.
c^{te}	:	Constante.
$(X_t)_{t\geq 0}$	:	Processus.
$(M_t)_{t\geq 0}$	:	Martingale.
$\mathbb{L}^2$	:	L'espace de fonctions de carré intégrable.
$i.e$	:	C'est à dire.
$\tilde{f}$	:	La fonction symétrique de f.
$\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$	:	L'ensemble des fonctions carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Abstract

The object of this work concerns stochastic differential equations and Malliavin calculus. More precisely, we give existence and uniqueness theorem for stochastic differential equations with some properties, then we give some results in the Malliavin calculus, as Malliavin derivative, Clark-Ocone formula and skorohod integral.
Keywords : Stochastic differential equation, strong solution, weak solution, strong uniqueness, weak uniqueness, Markov process, Comparison theorem, Malliavin derivative, Clark-Ocone formula, Skorohod integral.

Résumé

L'objectif de ce travail concerne les équations différentielles stochastiques et sur le calcul de Malliavin. Plus précisément, on donne le théorème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques avec quelques propriétés importantes.Ensuite on donne quelques résultats sur le calcul de Malliavin, comme la dérivée de Malliavin, la formule de Clark-Ocone et l'intégrale de Skorohod.
Mots clés : Équation différentielle stochastique, solution forte, solution faible, unicité forte, unicité faible, processus de Markov, théorème de comparaison, dérivée de Malliavin, formule de Clark-Ocone, intégrale Skorohod.

ملخص

الهدف من هذا العمل يتعلق بالمعادلات التفاضلية العشوئية وحساب ماليافين. أكثر دقة، نعطي مبرهنة الوجود و الوحدانية لحلول المعادلات التافضلية العشوئية مع بعض الخصائص. و من بعدو نعطي بعض النتائج من حساب ماليافين، مثل مشتق ماليافين و علاقة كلارك اكون و تكامل سكروخود.
الكلمات المفتاحية : المعادلات التفاضلية العشوئية، حل قوي، حل ضعيف، الوحدانية القوية، الوحدانية الضعيفة، عملية ماركوف، مبرهنة المقارنة، علاقة كلارك اكون، تكامل سكروخود