République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **SATISTIQUE**

Par

GHODBANE SARA RAYANE

Titre :

Loi des grands nombres :Théorie et Applications

Membres du Comité d'Examen :

Mr.	*BRAHIMI Brahim*	*Prof.*	*UMKB*	*Président*
Mr.	*YAHIA Djabrane*	*Prof.*	*UMKB*	Encadreur
Mme.	*DJABER Ibtisem*	*MAB.*	*UMKB*	*Examinatrice*

JUIN 2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A Mes Très chers Parents, pour l'amour qu'ils m'ont toujours donné, leurs encouragements et leurs aide qu'ils m'ont apportée durant mes études.aucun mot,aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma considération, et mon amour pour les sacrifices qu'ils ont consentis pour mon instruction et mon bien-être,leurs prières tout au long de mes études.

A mes chères sœurs **Lina** et **Narimane** pour leurs encouragements permanents, et leurs soutien moral,sans oublié mon petit frère **Mohamed Ala Eddine**.

A ma grande famille chaqu' un son nom .

A mes chers amis, pour leur compagnie et les bons moments passés ensemble

Merci d'être toujours là pour moi.

REMERCIEMENTS

d'abord,J'exprime mes profonds remerciements à "**ALLAH**" le tout puissant pour le courage ,la force et la patience pour réaliser ce travail.

Je remercie mon encadreur le professeur **YAHIA Djabrane** pour m'avoir aidé,conseillé,encadré et orienté.

Je remercie aussi les membres du jury Pr**.BRAHIMI Brahim** et Dr.**Djaber Ibtissem** d'avoir accepté d'évaluer

et d'examiner ce travail.

Enfin, Je remercie mes professeurs qui m'ont accompagné tout au long de mon parcours académique.

Table des matières

Table des figures

Introduction

La loi des grands nombres est l'une des théorèmes de mathématiques fondamental (probabilités et statistiques). Elle a été formalisée au XVIIe siècle lors de la découverte des nouveaux langages mathématiques. Le scientifique français Poisson a été le premier à préconiser l'utilisation de cette loi mathématique en (1835). En général, la loi des grands nombres dit qu'une expérience aléatoire se répète encore et encore se raproche vers une constante (non aléatoires). Cela permet d'augmenter la précision de la prévision des futurs incidents.

Elle est trés importante pour les compagnies d'assurance, c'est-à-dire prédire un accident spécifique devient presque certain si ce que nous essayons de prédire est un nombre suffisant d'incidents similaires. Nous ne pouvons pas savoir si quelqu'un entrera en collision avec sa voiture au cours de l'année en cours comme c'est le cas n'est pas encore arrivé, mais nous pouvons le savoir d'une certaine manière. Plus précisément, combien de personnes auront des accidents de voiture dans la même ville au cours de cette année, selon qu'il y a suffisamment des années au cours des quelles nous pouvons déduire ce que nous voulons en nous basant sur cette loi des grands nombres.

Ce mémoire contient trois chapitre comme suite :

Chapitre 1 : Nous avons rappelé dans le premier chapitre des généralites sur probabilités et satistique (espace probabilisé,variable aléatoire,esperance mathématique,moment *d'ordre k,variance,covariance et indépandance des variables aléatoires). Nous citons encore quelques types de convergence, comme la convergence presque sûre, la convergence en probabilité et la convergence dans* L^k.

Chapitre 2 : C'est un chapitre principal, et qui parle de la loi des grands nombres théoriqument. Dans lequel, nous étudions la convergence de la moyenne arithmétique. Il contient deux théorèmes principales, la loi faible et la loi forte des grands nombres. La loi faible, généralment,demande l'indpendance deux à deux où non corrélation des variables aléatoires et de montrer la convergence en probabilité où la convergence dans L^2. *La deuxième loi forte des grands nombres, demande l'indpendance globale des variables aléatoires, et de montrer la convergence presque sûre. Dans ce chapitre, nous donnons aussi quelques exemples pour une meilleure explication de cette loi.*

Chapitre 3 : Ce troisième chapitre est une application de la loi des grands nombres, (théorème de Glivenco-Contelli, méthode de Monte Carlo et applications aux quelques lois usuelle : Normal, Poisson, Uniforme, Gamma et Beta.

Chapitre 1

Généralites

1.1 Rappel de Probabilités

1.1.1 Espaces probabilisé

Définition 1.1.1 *On dit que le triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est un espace probabilisé, quand* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *est un espace mésure et vérifier les deux conditions suivantes :*

$$P(\phi) = 0 \quad et \quad P(\Omega) = 1.$$

et pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *d'éléments deux à deux disjoints :*

$$(\forall i, j : A_i \cap A_j = \phi)$$

on a :

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

1.1.2 Variable aléatoire

Définition 1.1.2 *Une variable aléatoire (notée va) X est une fonction de l' ensemble Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$:*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$w \to x_i$$

1.1.3 Esperance mathématique

Définition 1.1.3 *L'esperance d'une va X notée $E(X)$ correspand à la moyenne des valeurs possibles de X liées avec sa probabilité associe :*

· Si X est une variable aléatoire discret, alors

$$E(X) = \sum_{w \in \Omega} X(w) P(w).$$

· Si X est une variable aléatoire continue, alors

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X f(X) dX.$$

Propriétés 1.1.1 *Si X et Y deux variables aléatoires admettant une esperance et a, b des réeles, alors :*

$$E(X) = E(X) + E(Y) \quad et \quad E(aX + b) = aE(X) + b.$$

On dit alors, que l'esperance est linéaire.

1.1.4 Moment d'ordre k

Définition 1.1.4 *On dit qu'une va X définit sur$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ admet un moment d'ordre* 2, *si elle est de carré intégrable,c'est à dire :*

$$E(\left|X^2\right|) < \infty.$$

Dans le cas géneral, une va X admet un moment d'ordre k si :

$$E(\left|X^k\right|) < \infty.$$

1.1.5 Variance et covariance

Soient X et Y deux variables aléatoires définiés sur$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et de carré intégrable.

Définition 1.1.5 *La covariance entre les deux variables aléatoires X et Y est définit par*

$$cov(X, Y) = E(X - E(X))E(Y - E(Y)) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Remarque 1.1.1 *Si $cov(X, Y) = 0$, on dit que les variable aléatoire X et Y ce sont non corrélées.*

Définition 1.1.6 *La variane d'une variable aléatoire X est donnée par*

$$var(X) = E(X - E(X^2)) = E(X)^2 - E(X^2).$$

La racine carré de la variance s'appel l'ecrat type :

$$\sigma(X) = \sqrt{var(X)}$$

Remarque 1.1.2 *On a,*

$$\forall a, b \in R \; : \; var(aX+b) = a^2 var(X)$$

et

$$var(X+Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X,Y).$$

1.2 Indépendance des variables aléatoires

Définition 1.2.1 *Soient X et Y deux variables aléatoires définiés sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et indépendantes.*

1) Si X et Y admettant une moyenne, il en est de même pour la variable aléatoire XY. En effet,

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

2) Si X et Y admettant un moment d'ordre deux fini, alors

$$cov(X,Y) = 0,$$

donc,

$$var(X+Y) = var(X) + var(Y).$$

Remarque 1.2.1 *Si Xet Y sont indépendantes, cela implique que X et Y sont non corrélées, et la reciproque n'est pas toujours vraie.*

1.3 Convergences d'une suite de variables aléatoires

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Il ya plusieurs types fondamentals de convergence de la suite de variables aléatoires X_n. On va citer dans cette section quelques types usuelles.

1.3.1 Convergence presque sûre

Définition 1.3.1 *On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires converge presque sûrement vers une variable aléatoire X, si*

$$P(w \in \Omega; X_n(w) \to X(w)) = 1$$

On écrit alors,

$$X_n \xrightarrow{Ps} X.$$

Théorème 1.3.1 *La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X, si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon > 0 : P(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0.$$

Théorème 1.3.2 (loi 0-1 de Borel) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$un suite variable aléatoire indépandantes, et X variable aléatoire :*

1) Si

$$\forall\varepsilon > 0 : \sum_{n\in N^*} P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) \quad \textit{converge},$$

alors,

$$\forall\varepsilon > 0 : \; P(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0.$$

2) Si

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n \in N^*} P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) \quad diverge,$$

alors,

$$\forall \varepsilon > 0 : P(\overline{\lim_{n\to\infty}} \{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 1.$$

Corollaire 1.3.1 *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et X des variables aléatoires, telles que :*

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n \in N^*} P(\{|X_n - X| > \varepsilon\})$$

converge. Alors, nous avons

$$X_n \xrightarrow{Ps} X.$$

1.3.2 Convergence en moyenne d'ordre k

Définition 1.3.2 *On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires converge en moyenne d'ordre k (dans L^k) vers X, ssi :*

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^k) = 0.$$

On note ainsi, $(X_n \xrightarrow{L^k} X \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^k) = 0)$.

Remarque 1.3.1 *En particulier, si $k = 2$ on dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers X.*

1.3.3 Convergence en probabilités

Définition 1.3.3 *On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilités vers X, si*

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left[|X_n - X| > \varepsilon\right] = 0.$$

On écrit alors,

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

Théorème 1.3.3 (Inégalité de Markov) *Soit X une variable aléatoire positive et intégrable, alors*

$$\forall \varepsilon > 0 : P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{EX}{\varepsilon}.$$

Théorème 1.3.4 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) *Soit X une variable aléatoire de carré intégrable, alors*

$$\forall \varepsilon > 0 : P(|X - E(X)|) \geq \varepsilon) \leq \frac{var(X)}{\varepsilon^2}.$$

Théorème 1.3.5 (Inégalité de Kolmogorov) *Soient n variable aléatoire $X_1, X_2, ..., X_n$ indépandantes, admettant un moment d'ordre deux et centrées. Alors,*

$$\forall \varepsilon > 0 : P(\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} X_i \right| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\sum_{i=1}^{n} var(X_i) \right).$$

1.3.4 Comparaison entres les types de convargence

Convergence presque sûre vs convergence en probabilités

Théorème 1.3.6 *La convergence presque sûre implique la convergence en probabilités.*

Remarque 1.3.2 *La convergence en probabilité n'entraîne pas la convergence presque sûre.*

Convergence dans L^k vs convergence en probabilités

Théorème 1.3.7 *La convergence dans $L^k (k \geq 1)$ implique la convergence en probabilités.*

Remarque 1.3.3 *La convergence en probabilité n'entraîne pas la convergence dans L^k.*

Théorème 1.3.8 (somme de Cesàro) *Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels convergeant vers X lorsque n tend vers l'infini. Alors,*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

converge vers X.

Preuve. Ona, par hypothèse sur la convergence de (X_n),

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n \geq n_0, |X_n - X| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

on outre, $\forall n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}\left|\overline{X_n} - X\right| &= \left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} X_i - X\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{i=0}^{n}(X_i - X)\right| \\ &= \frac{1}{n}\left|\sum_{i=0}^{n_0}(X_i - X) + \sum_{i=n_0}^{n}(X_i - X)\right|\end{aligned}$$

Alors, (par l'inégalité triangulaire)

$$\left|\overline{X}_n - X\right| \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{i=0}^{n_0-1}(X_i - X)\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{i=n_0}^{n}(X_i - X)\right|$$

donc

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=n_0}^{n}(X_i - X)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=n_0}^{n}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon(n - n_0 + 1)}{2n} \leq \frac{\cancel{n}\varepsilon}{2\cancel{n}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

(comme $n \geq n_0$ et donc $(n - n_0 + 1) \leq n$) et on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{i=0}^{n_0-1}(X_i - X)\right| = 0$$

(une somme finie de réels). Alors,

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists n_1 \in N, \forall n \geq n_1, |X_n - X| \leq \frac{\varepsilon_1}{2}$$

par définition de la limite, on prend $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$et on pose $n_2 = \max(n_1, n_0)$. Donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq n_2, \left|\overline{X_n} - X\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

implique que $\overline{X_n}$convergent vers X. ■

Proposition 1.3.1 (théorème de convergence dominée) *Soit$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite des fonction mesurables sur espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a valeur de Ω dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que :*

1) La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge P-presque sûrement ; on note

$$X = \lim_{n\to\infty} X_n$$

2) S'il existe une fonction Y, P-intégrable telle que

$$\forall n \geq 0 : |X_n| \leq Y \quad P - pp.$$

Alors, les fonctions X_n et X sont P-intégrables et

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |X_n - X| (x) P(dx) = 0.$$

3) En particulier,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |X_n(x)| P(dx) = \int_\Omega |X(x)| P(dx) = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} |X_n(x)| P(dx).$$

Chapitre 2

Loi des grands nombres

2.1 Loi faible des grands nombres

Théorème 2.1.1 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite des variable aléatoires définiés sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *suit la méme loi et de carré intégrable (admettent un moment d'ordre deux fini) et deux à deux non corrélées, notons* $\overline{X}_n$ *la moyenne empirique,*

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

alors, $\overline{X_n}$ *converge en moyenne quadratique vers la moyenne commune* $E(X_1)$*. On note cela comme suit :*

$$\overline{X_n} \xrightarrow{L^2} E(X_1).$$

on a également

$$\overline{X_n} \xrightarrow{P} E(X_1).$$

Preuve. En effet, d'après la linéarité de l'ésperence :

$$
\begin{aligned}
E(\overline{X_n}) &= E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i) = \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i) \\
&= \frac{1}{n}n\ E(X_1) = E(X_1).
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
E(\left|\overline{X}_n - E(X_1)\right|^2) = var(\overline{X}_n) &= var(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i) \\
&= \frac{1}{n^2}var(\sum_{i=1}^{n}X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}var(X_i)
\end{aligned}
$$

$$
var(X_1 + X_2) = var(X_1) + var(X_2) + 2cov(X_1, X_2)),
$$

X_1et X_2 deux à deux ou non corrélées. Alors,

$$
var(X_1 + X_2) = var(X_1) + var(X_2)
$$

Donc,

$$
E(\left|\overline{X_n} - E(X_1)\right|^2) = \frac{1}{n \times n}n\ var(X_1) = \frac{1}{n}\ var(X_1)
$$

quand n tends vers l'infini,

$$
E(\left|\overline{X}_n - E(X_1)\right|^2)
$$

tends vers zero parceque $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de carré intégrable. C'est-à-dire $var(X_1)$ finie, donc $\overline{X_n} \stackrel{L^2}{\to} E(X_1)$. ■

Théorème 2.1.2 *Soit*$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite des variable aléatoires définiés sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *admettent un moment d'ordre deux et deux à deux non corrélées.*

On suppose la convergence des suites

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i) \underset{n\to+\infty}{\to} m \quad et \quad \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}var(\overline{X_n}) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Alors, $\overline{X_n} \overset{P}{\to} m.$

Preuve. On a, (d'aprés le théorème précédent)

$$E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

et

$$var(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}var(X_i)$$

On utilse l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (1.3.4), on trouve

$$\lim_{n\to\infty}P(\left|\overline{X_n} - E(\overline{X_n})\right|) \geq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty}P(\left|\overline{X_n} - m\right|) \geq \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{var(X_i)}{n\varepsilon^2} = 0.$$

Donc, $\overline{X_n} \overset{P}{\to} m.$ ■

Exemple 2.1.1 *Soit*$(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépandantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre* p*. Alors,* $\overline{X_n} \overset{P}{\to} p.$

En effet, nous rappelons que $X \sim Ber(p)$ *la loi de Bernoulli est une loi discréte telle que* $E(X) = p$ *(il est fini* $p \in [0;1]$*) et*

$$var(X) = p(1-p)$$

On a : $\overline{X_n} \overset{P}{\to} m$*, alors on va montrer que*

$$\forall\varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty}P\left[\left|\overline{X_n} - p\right| > \varepsilon\right] = 0.$$

On a

$$E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{n}{n}p = p$$

$$var(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(\overline{X_i}) = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{1}{n}p(1-p)$$

alors :

$$P\left|\overline{X_n} - p\right| > \varepsilon] \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}p(1-p)$$

(d'apres l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev(1.3.4)). On remarque que

$$p(1-p) \leq \frac{1}{4}$$

$((p(1-p))' = 1 - 2p \Rightarrow 1 - 2p = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{2}.)$. Donc,

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\overline{X_n} - p\right| > \varepsilon\right] \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n\varepsilon^2} = 0$$

Ce qui implique que $\overline{X_n} \xrightarrow{P} p$.

La figure suivante explique la convergence de la moyenne émpirique de $(X_n)_{n\geq 1}$ suite des variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.5$. La courbe en noir représente la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ qui suit la loi de Bernoulli et la linge rouge qui représente l'espérance de cette loi. On remarque que la convergence est plus claire quand n est plus grand.

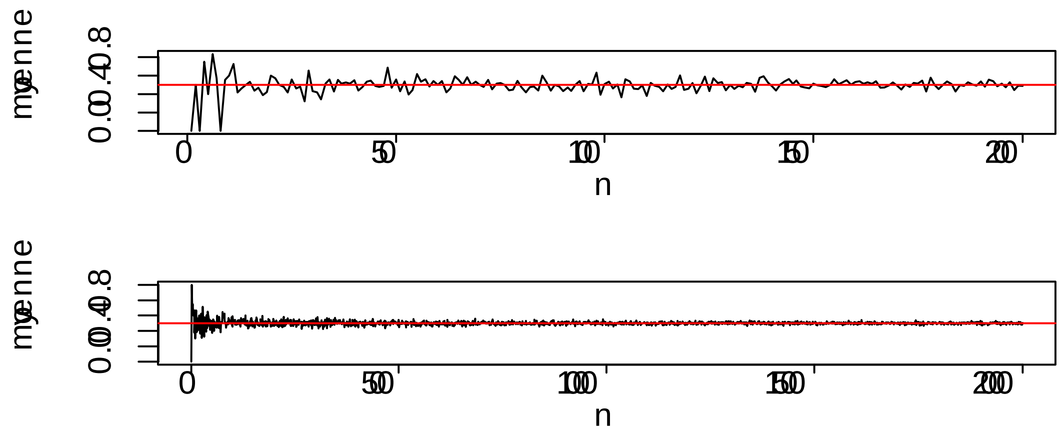

FIG. 2.1 – Convergence de la moyenne émpirique en fonction de n : $X_n \sim Ber(0.5)$.

Théorème 2.1.3 *Soit$(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des variable aléatoires définiés sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, deux à deux indépendantes. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite croissant strictement positifs tendant vers l''infini, pour $n \geq 1$,et $i \in \{1, ..., n\}$, on pose :*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad et \quad X_{i,n} = X_i 1_{\{|X_i| \leq a_n\}}$$

Soit $S'_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}$ *avec* $E(S'_n) = \mu_n$. *Si*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > a_n) = 0 \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n^2} \sum_{i=1}^{n} var(X_{i,n}) = 0,$$

donc

$$\frac{S_n - \mu_n}{a_n} \xrightarrow{P} 0.$$

Preuve. On a

$$P(\left|\frac{S_n - \mu_n}{a_n}\right| > \varepsilon) = P(\left|\frac{S'_n - \mu_n}{a_n}\right| > \varepsilon)$$

■

$(\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} X_{i,n} \;\Rightarrow E(S_n) = E(S_n^{'}) = \mu_n)$, donc

$$P(\left|\frac{S_n^{'}-\mu_n}{a_n}\right| > \varepsilon) \leq P(\left|\frac{S_n^{'}-\mu_n}{a_n}\right| > \varepsilon) + P(S_n \neq S_n^{'})$$

on rappel que $0 \leq P(S_n \neq S_n^{'}) \leq 1$, c'est-à-dire on a ajouter une quantité positive. D'ou

$$P(\left|\frac{S_n^{'}-\mu_n}{a_n}\right| > \varepsilon) = P(\left|S_n^{'}-\mu_n\right| > \varepsilon \left|a_n\right|)$$

on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev(1.3.4) on trouve,

$$P(\left|S_n^{'}-\mu_n\right| > \varepsilon \left|a_n\right|) \leq \frac{1}{{a_n}^2\varepsilon^2} var(S_n^{'}) \tag{2.1}$$

$$P(S_n \neq S_n^{'}) = P(\sum_{i=1}^{n} X_n \neq \sum_{i=1}^{n} X_{i,n}) \leq \sum_{i=1}^{n} P(X_n \neq X_{i,n}) \tag{2.2}$$

D'après (2.1) (2.2) on trouve

$$\begin{aligned} P(\left|\frac{S_n-\mu_n}{a_n}\right| > \varepsilon) &\leq P(\left|\frac{S_n^{'}-\mu_n}{a_n}\right| > \varepsilon) + P(S_n \neq S_n^{'}) \\ &\leq \frac{1}{{a_n}^2\varepsilon^2} var(S_n^{'}) + \sum_{i=1}^{n} P(X_n \neq X_{i,n}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{{a_n}^2\varepsilon^2} var(S_n^{'}) + \sum_{i=1}^{n} P(X_n \neq X_{i,n}) \leq \frac{1}{{a_n}^2\varepsilon^2} var(X_{i,n}) + \sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > a_n),$$

$$X_{i,n} = X_i 1_{\{|X_i| \leq a_n\}} \Rightarrow X_{i,n} \neq X_i 1_{\{|X_i| \leq a_n\}} \Rightarrow \{|X_i| > a_n\}$$

donc, d'après les conditions de théorème

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\frac{S_n-\mu_n}{a_n}\right| > \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{{a_n}^2\varepsilon^2} var(X_{i,n}) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > a_n) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\frac{S_n-\mu_n}{a_n}\right| > \varepsilon) = 0$$

$(P(\left|\frac{S_n-\mu_n}{a_n}\right| > \varepsilon)$ est une quantité positive, il est impossible d'être inférieur à zéro. Alors,

$$\frac{S_n - \mu_n}{a_n} \xrightarrow{P} 0.$$

Corollaire 2.1.1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite des variable aléatoires définiés sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ deux à deux indépendantes de méme loi, admettent un moment d'ordre 1 fini. On pose*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad et \quad \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Alors, $\overline{X} \xrightarrow{P} E(X_1)$.

Preuve. Pour montrer le corollaire on va utilisé le théorème précedent avec $a_n = n$. On a

$$\sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > a_n) = nP(|X_1| > n)$$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suit le méme loi . On utilisant l'inégalite de Markov(1.3.3), on trouve

$$P(|X_1| > n) \leq \frac{E(|X_1|)}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > n) \leq E(|X_1|\, 1_{\{|X_1|>n\}})$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > n) = 0 \tag{2.3}$$

D'aprés le théorème de convergence dominée(1.3.1),

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_{i,n}) = \frac{1}{n} var(X_{1,n})$$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suit le méme loi,

$$\frac{1}{n} var(X_{1,n}) \leq \frac{1}{n} E[X_1^2 1_{\{|X_i|\leq n\}}]$$

$var(X) = E(X)^2 - E(X^2) \Rightarrow var(X) \leq E(X)^2$:

$$\frac{1}{n}E[X_1^2 1_{\{|X_i| \leq n\}}] = E[X_1 \frac{X_1 1_{\{|X_i| \leq n\}}}{n}] = E(X_1)E(\frac{X_1 1_{\{|X_i| \leq n\}}}{n}) \leq c\frac{c}{n}$$

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admettent un moment d'ordre 1 fini $\Rightarrow E(X) \leq c < \infty$. Alors,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=0}^{n} var(X_{i,n}) \leq \lim_{n\to\infty} c\frac{c}{n} = 0 \tag{2.4}$$

D'aprés (2.3), (2.4) et le théorème précedent. D'ou $\overline{X_n} \xrightarrow{P} E(X_1)$. ■

Exemple 2.1.2 *Soit X une variable aléatoire symétrique dont la loi est la suivante :*

$$P(|X| > t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si : t \in [0, e[\\ \frac{e}{2t\log(t)} & si : \quad t \geq e \end{cases}$$

Considérons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suit de variables aléatoires indépendantes de méme loi que X. On veut montrer que $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers 0. Remarquons que

$$E(X) = \int_{[0,+\infty[} P(|X| > t)d\lambda(t) = \frac{e}{2} + \int_{e}^{+\infty} \frac{e}{2t\log(t)} = \infty,$$

donc, on appliquant le théorème précedent avec $a_n = n$,

$$\sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > a_n) = nP(|X| > n) \leq E(|X_i|\, 1_{\{|X_i| \leq n\}}) \to 0$$

$E(|X_1|\, 1_{\{|X_1| \leq n\}}) = 0$ *car la loi de X est symétrique,donc $\mu_n = 0$*

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X 1_{\{|X_1| \leq n\}}) = \frac{1}{n}E(\left|X^2\right| 1_{\{|X| \leq n\}})$$

donc

$$E(X^2 1_{\{|X|<n\}}) = \int\limits_{[0,+\infty[} P(X^2 1_{\{|X|<n\}} > t) d\lambda(t)$$

$$= \int\limits_{[0,n^2[} P(X^2 1_{\{|X|<n\}} > t) d\lambda(t)$$

$$\leq \int\limits_{[0,n^2[} P(X > \sqrt{t}) d\lambda(t) \leq c + \int\limits_{e}^{n^2} \frac{e}{2\sqrt{t}\log(\sqrt{t})} dt$$

quand t tend vers l'infini, on a

$$\frac{1}{\sqrt{t}\log(\sqrt{t})} = o(\frac{1}{\sqrt{t}})$$

et $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{d\lambda(t)}{\sqrt{t}}$ *vaut* $+\infty$*. On déduit que* $E(X^2 1_{\{|X|<n\}}) = o(n)$*.*

2.2 Loi forte de grands nombres :

Théorème 2.2.1 (Contelli) *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite des variable aléatoires centrées et définiés sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *indépendantes de méme loi (iid) et admettant un moment d'ordre* 4 *fini. Alors,* $\overline{X_n} \overset{Ps}{\to} 0$*.*

Preuve. On a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(\{\left|\overline{X_n}\right| > \varepsilon\}) = P(\{S_n^4 > n^4\varepsilon^4\}) \leq \frac{E[S_n^4]}{\varepsilon^4 n^4} \leq \frac{E[S_n^4]}{n^4}$$

d'aprés l'inégaite de Markov(1.3.3), et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad E[S_n^4] = \sum_{1\leq i,j,k,l\leq n} E[X_i X_j X_k X_l] \tag{2.5}$$

d'aprés la linéarite de l'espérance. Remarquons maintenant que, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant indépandante et centrée tellque

$$E[X_iX_jX_kX_l] = 0$$

si :$(i \neq j \neq k \neq l\ )$, $(i = j = k \neq l)$, $(i = j = l \neq k)$, $(i = k = l \neq j)$, $(j = k = l \neq i)$

$$E[X_iX_jX_kX_l] = E[X_p^2X_q^2] = m_2^2$$

si :$(i = j$ et $k = l$ et $i \neq k)$, $(i = k$ et $j = l$ et $i \neq j)$, $(i = l$ et $j = k$ et $i \neq j)$ avec $1 \leq p < q \leq n$, il est clair qu'il y a $n(n-1)/2$ choix des couples (p, q) tels que $1 \leq p < q \leq n$ et il y a $\binom{4}{2} = 6$ facons possibles de choisir les deux indices auxquels nous attribuerons la valeur p parmi i, j, k, l

$$E[X_iX_jX_kX_l] = m_4$$

si :$(i = j = k = l)$.l'égalite (2.5)se simplifie donc en :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ E[S_n^4] = nm_4 + 3n(n-1)m_2^2.$$

Nous avons

$$E[S_n^4] = O(n^2) \quad et \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^4} < \infty$$

série convergente de Rieman. Alors,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{E[S_n^4]}{n^4} < \infty, \quad \text{ce qui implique que } \overline{X_n} \overset{Ps}{\to} 0.$$

■

Proposition 2.2.1 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suit des variable aléatoires réelles indépan-*

dantes,centrées et admettant un moment d'ordre deux. Si, $\sum_{n=1}^{\infty} var(X_n) < \infty$*. Alors,* $\sum X_n$ *de terme géneral* X_n *converge* $P - ps$ *et dans* L^2*.*

Preuve. Premierement, on va démontrer la converge $P - ps$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, notons :

$$S_m = \sum_{j=1}^{m} X_j, \quad A_m = \sup_{k \in \mathbb{N}^*} |S_{m+k} - S_m| \quad \text{et} \quad A = \inf_{m \in \mathbb{N}^*} A_m.$$

On a

$$\left\{ \sum X_n \text{ converge} \right\} = \{A = 0\}$$

Il en résulte du critère de Cauchy pour les sèries numériques, mais on a :

$$\{A \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{ A > \frac{1}{n} \right\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \left\{ A > \frac{1}{n} \right\} \subset \bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} \left\{ A_m > \frac{1}{n} \right\}$$

ce qui implique que :

$$\{A \neq 0\} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{m \in \mathbb{N}^*} \left\{ A_m > \frac{1}{n} \right\} \tag{2.6}$$

Alors,

$$\left\{ A_m > \frac{1}{n} \right\} = \bigcup_{r \in \mathbb{N}^*} \left\{ \sup_{1 \leq k \leq r} |S_{m+k} - S_m| > \frac{1}{n} \right\} \tag{2.7}$$

Puisque

$$\sup_{k \in \mathbb{N}^*} |S_{m+k} - S_m| = \lim_{r} \nearrow \sup_{1 \leq k \leq r} |S_{m+k} - S_m|,$$

la suite d'ensemble $\left\{ \sup_{1 \leq k \leq r} |S_{m+k} - S_m| \right\}$ est croissante, donc d'aprés l'inégalite de Kolmogorov(1.3.5) :

$$P\left(\sup_{1 \leq k \leq r} |S_{m+k} - S_m| > \frac{1}{n} \right) \leq n^2 \sum_{j=m+1}^{r} var(X_j)$$

et

$$P\left\{A_m > \frac{1}{n}\right\} = \lim_r P(\sup_{1\leq k\leq r}|S_{m+k} - S_m| > \frac{1}{n}) \leq n^2 \sum_{j=m+1}^{\infty} var(X_j)$$

l'égalite (2.7) faisant intervenir une suite croissante. Il en résulte que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,ona

$$0 \leq P\left[\bigcap_{p\in\mathbb{N}^*}\left(A_p > \frac{1}{n}\right)\right] \leq P(A_m > \frac{1}{n}) \leq n^2 \sum_{j=m+1}^{\infty} var(X_j)$$

$\sum\limits_{j=m+1}^{\infty} var(X_j)$ reste d'une série convergente alors convergent vers 0 quand m tend vers l'infini (reste d'un série convergente) et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il vient que $P\left(\bigcap\limits_{p\in\mathbb{N}^*}(A_p > \frac{1}{n})\right) = 0$,il résulte alors l'inclusion (2.6) que $P(A \neq 0) = 0$, c'est dire que la série de terme général X_n converge $P - ps$.

Il y a aussi convergent dans L^2 puisque la suite des sommes partielles est de Cauchy pour la norme L^2. En effet, les variable aléatoires X_n centrées et indépandantes, ona si $m < n$:

$$E[(S_n - S_m)^2] = \sum_{j=m+1}^{\infty} var(X_j)$$

Ce qui démontre le résultat, la série des variances étant convergente.

Lemme 2.2.1 (lemme de kronecker) *Soient une série de terme général réel X_n convergent et une suite croissant $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels tendant vers l'infini avec n. On a alors,*

$$\lim_n \frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n} b_j X_j = 0.$$

■

Théorème 2.2.2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suit de variable aléatoires définiés sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, indépandantes et admettant un moment d'ordre deux. On sup-*

pose que $E(X_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} m$ *et*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} var(X_i) < \infty$$

Alors,

$$\overline{X_n} \xrightarrow{Ps} m \qquad et \;\; \overline{X_n} \xrightarrow{L^2} m.$$

Preuve. On a, d'après le lemme de Cesàro(1.3.8)

$$E(\overline{X_n}) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} m \tag{2.8}$$

On note,

$$Y_n = \frac{X_n - E(X_n)}{n}$$

On remarque que Y_n sont indépandantes et centrées et

$$var(Y_n) = var(\frac{X_n - E(X_n)}{n}) = var(\frac{X_n}{n}) = \frac{1}{n^2} var(X_n).$$

donc,

$$\sum_{i=1}^{\infty} var(Y_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} var(X_i) < \infty.$$

On applique la proposition précedente, on trouve que la série de terme général Y_n converge $P-ps$. Le lemme de Kronecker(2.2.1) assure alors que la suite des moyennes arithmétique des variables aléatoires nY_n converge $P-ps$ vers 0 et donc la suite des variables aléatoires $\overline{X_n}$ converge $P-ps$ vers m.

Pour la convergence en L^2, remarquons que par indépandances des variables aléatoires $X_n - EX_n$ on a

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - EX_i) \right\|_2^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_i).$$

Le lemme de Kronecker(2.2.1), conjointement à l'hypothése, assure que

$$\lim_n \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} var(X_i) = 0$$

puisque l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\overline{X_n} - m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i) + \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i - m\right]$$

La relation (2.8) et l'inégalite triangulaire conduisent à la convergence L^2 vers m de la suite de terme général $\overline{X_n}$. ■

Théorème 2.2.3 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite des variable aléatoires définiés sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ deux à deux non corrélées, de carré intégrable et telles que*

$$\sup_{n\geq 1} var X_n < \infty$$

Alors,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \overset{Ps}{\to} 0.$$

avec $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. Posons

$$C = \sup_{n\geq 1} var X_n < \infty$$

et on remplace X_i par $X_i - E[X_i]$, on suppose que les X_i sont centrée

$$var(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} var X_k \leq \frac{C}{n}$$

avec l'inégalité de Tchebitchev(1.3.4)

$$\forall \varepsilon > 0 : P(\left|\frac{S_n - E[S_n]}{n}\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} \leq \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

$$P(\left|\frac{S_n{}^2}{n^2}\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{C}{n^2\varepsilon^2}$$

$$\sum \frac{C}{n^2\varepsilon^2} = \frac{C}{\varepsilon^2}\sum \frac{1}{n^2}$$

(série convergente de Rieman) avec (la loi du 0-1 de Borel)(1.3.2),donc

$$\frac{S_n{}^2}{n^2} \xrightarrow{Ps} 0$$

Soit mainteant $n \geq 4$ *et notons* $p = p(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$ *, d'où* $n - p \leq 2\lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq 2\sqrt{n} \leq \frac{n}{2}$ *ce qui entraine également* $n - p \leq p$ *. Notons aussi :* $D_{n,p} = X_{p+1} + ... + X_n$*. Alors,*

$$\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n} = \frac{S_p}{p} - \frac{S_p + D_{n,p}}{n} = (\frac{1}{p} - \frac{1}{n})S_p - \frac{1}{n}D_{n,p}$$

comme S_p *et* $D_{n,p}$ *sont non-corrélés, alors*

$$\begin{aligned} var(\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n}) &= var((\frac{1}{p} - \frac{1}{n})S_p - \frac{1}{n}D_{n,p}) \\ &= (\frac{1}{p} - \frac{1}{n})^2 var(S_p) + \frac{1}{n^2} var(D_{n,p}) \\ &\leq (\frac{1}{p} - \frac{1}{n})^2 Cp + \frac{C(n-p)}{n^2} = \frac{C(n-p)}{n^2}(\frac{(n-p)}{p} + 1) \leq \frac{4C}{n^{3/2}} \end{aligned}$$

alors

$$P(\left|\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} \leq \frac{4C}{n^{3/2}\varepsilon^2}$$

$$\sum \frac{4C}{n^{3/2}\varepsilon^2} = \frac{4C}{\varepsilon^2}\sum \frac{1}{n^{3/2}}$$

(série convergente de rieman) avec (Loi 0-1 de Borel)(1.3.2), donc :

$$\frac{S_n}{n} - \frac{S_{p(n)}}{p(n)} \xrightarrow{Ps} 0$$

comme $\lim p(n) = +\infty$ *et que* $\frac{S_{p(n)}}{p(n)}$ *a les mémes termes que* $\frac{S_n{}^2}{n^2}$ *,* $\frac{S_{p(n)}}{p(n)}$ *tend éga-*

lement presque surement vers 0*, d'où* $\frac{S_n}{n}$ *tend presque surement vers* 0*.*

Théorème 2.2.4 *Soit* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite des variable aléatoires définiés sur l'espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *deux à deux indépendantes de méme loi* μ*.on suppose que* μ *admet un moment d'ordre 2. Alors,*

$$M_n \overset{Ps}{\to} EX_1$$

telles que :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$

Preuve. On a

$$E[S_n] = nEX_1$$

Utilisons la même preuve précedents et il est à noter que les variables indépendantes sont non corélées, remplacer X_i par $X_i - E[X_i]$, supposer sans perte de générallité que les X_i sont centrée, on a

$$\frac{S_n - E[S_n]}{n} \overset{Ps}{\to} 0$$

donc,

$$\frac{S_n - nEX_1}{n} \overset{Ps}{\to} 0$$

alors $M_n \overset{Ps}{\to} EX_1$.

$$var(M_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} varX_k = \frac{1}{n}varX_1$$

avec l'inégalité de Tchebitchev :

$$\forall\varepsilon > 0 : P(|M_n - EX_1| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(M_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{varX_1}{n\varepsilon^2}$$

et

$$P(\left|M_n{}^2\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{varX_1}{n^2\varepsilon^2}, \quad \sum \frac{varX_1}{n^2\varepsilon^2} = \frac{varX_1}{\varepsilon^2}\sum \frac{1}{n^2}$$

série convergente de Rieman et $varX_1 < \infty$. (loi du 0-1 de Borel)1.3.2, donc :

$$M_n{}^2 \xrightarrow{Ps} 0$$

comme S_p et $D_{n,p}$ sont indépandantes on a :

$$\begin{aligned} var(\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n}) &= var((\frac{1}{p} - \frac{1}{n})S_p - \frac{1}{n}D_{n,p}) = (\frac{1}{p} - \frac{1}{n})^2 var(S_p) + \frac{1}{n^2} var(D_{n,p}) \\ &= (\frac{1}{p} - \frac{1}{n})^2 pvarX_1 + \frac{varX_1(n-p)}{n^2} = \frac{varX_1(n-p)}{n^2}(\frac{(n-p)}{p} + 1) \\ &\leq \frac{4varX_1}{n^{3/2}} \end{aligned}$$

Alors,

$$P(\left|\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{4varX_1}{n^{3/2}\varepsilon^2}$$

$$\sum \frac{4varX_1}{n^{3/2}\varepsilon^2} = \frac{4varX_1}{\varepsilon^2} \sum \frac{1}{n^{3/2}}$$

par les séries convergentes de Rieman et la loi du zéro-un de Borel,

$$\frac{S_p}{p} - \frac{S_n}{n} \xrightarrow{Ps} 0$$

comme $\lim p(n) = +\infty$ et que $\frac{S_{p(n)}}{p(n)}$ a les mémes termes que $M_n{}^2$, $\frac{S_{p(n)}}{p(n)}$ tend également presque surement vers 0, d'ou on déduit que M_n tend presque surement vers 0. ■

Théorème 2.2.5 (Kolmogrov-Khintchine) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite des variable aléatoires définiés sur l'espace probabilisé $(\Omega, \digamma, P)$ deux à deux indépendantes de méme loi, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1) $\overline{X_n}$ converge p.s vers c $(c \in \mathbb{R})$.

2) $E(X_1) < \infty$.

Preuve. Si l'assertion (1) est vrai $c = E(X_1)$. On suppose que $\overline{X_n}$ converge p.s vers c et on va montrer que $E(X_1) < \infty$. On a

$$E(X_1) = \int_{\Omega} |X_1| \, dP = \int_{\mathbb{R}^+} P(|X_1| > x) d\lambda(x)$$

et

$$\forall \varepsilon > 0 : \int_{\Omega} |X_1| \, dP \ = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[n\varepsilon,(n+1)\varepsilon[} P(|X_1| > x) d\lambda(x).$$

donc

$$\varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} P(|X_1| > (n+1)\varepsilon) \leq \int_{\Omega} |X_1| \, dP \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} P(|X_1| > n\varepsilon)$$

(puisque $P(|X_1| > x)$ est une application décroissant), implique que :

$$E(X_1) = \int_{\Omega} |X_1| \, dP \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} P(|X_1| > n\varepsilon)$$

d'autre part

$$\frac{X_n}{n} = \overline{X_n} - \frac{(n-1)}{n} \overline{X}_{n-1} \underset{n \to \infty}{\overset{Ps}{\to}} c - c = 0$$

(d'aprés l'hypothèse) et aussi d'aprés la Théoreme (1.3.1).

$$\forall \varepsilon > 0 : P(\varlimsup_{n \to \infty} \{ \left| \frac{X_n}{n} \right| > \varepsilon \}) = 0$$

Donc, d'aprés la théoreme (1.3.2)

$$\forall \varepsilon > 0 : \sum_{n \in N^*} P(\{|X_1| > n\varepsilon\}) < \infty$$

On conclu que $E(X_1) < \infty$.

On suppose maintenant que $E(X_1) < \infty$ et on va montrer que $\overline{X_n}$ converge p.s vers

c. On a si $E(X_1) < \infty$

$$\forall \varepsilon > 0 : \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} P(|X_1| > (n+1)\varepsilon) < \infty$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0 : \ P(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{|X_n| > (n+1)\varepsilon\}) = 0$$

alors, $\mathbb{Q}^{+*}$ étant dénombrable,

$$P(\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^{+*}} \overline{\lim_{n\to\infty}}\{|X_n| > (n+1)\varepsilon\}) = 0$$

il s'en suit que (car $P(A) + P(A^c) = 1$) :

$$P(\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^{+*}} \underline{\lim_{n\to\infty}}\{\frac{|X_n|}{(n+1)} \leq \varepsilon\}) = 1$$

et

$$P(\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^{+*}} \underline{\lim_{n\to\infty}}\{\frac{|X_n|}{(n+1)} \leq \varepsilon\}) \leq P(\frac{X_n}{n} \to 0)$$

Par conséquent $P(\frac{X_n}{n} \to 0) = 1$. Alors, $\overline{X_n}$ converge p.s vers c. ■

Exemple 2.2.1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite des variable aléatoires telle que*

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n^2} \quad et \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$$

Il suffit de remarquer que la série de terme général $P(X_n \neq 0)$ converge. En effet, d'aprés le loi 0-1 de Borel , X_n est P.s. nulle a partir d'un certain rang, donc S_n est P.s.constante à partir d'un certain rang et S_n/n converge évidemment presque sûrement vers 0.

Théorème 2.2.6 (Etemadi) *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite des variable aléatoires définiés sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ deux à deux indépendantes de méme loi μ.on* *suppose que admet un moment d'ordre 1. Alors,* $\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} = M_n \overset{Ps}{\to} EX_1$.

Preuve. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite des variable aléatoires positives de méme loi deux à deux indépendantes,admettant admet un moment d'ordre 1. Considérons égalements les variables aléatoires tronquées :$X_i^* = X_i 1_{\{X_i \leq i\}}$ et les sommes et quotients associé :$S_n^* = \sum_{i=1}^{n} X_i^*$ et $M_n^* = \frac{S_n^*}{n}$. On a :

$$\begin{aligned} varS_n^* &= \sum_{i=1}^{n} varX_i^* \leq \sum_{i=1}^{n} E((X_i^*)^2) \leq \sum_{i=1}^{n} E[(X_i 1_{\{X_i\leq i\}})^2] \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} E[(X_i 1_{\{X_i\leq n\}})^2] = nE[(X_i 1_{\{X_i\leq n\}})^2] \end{aligned}$$

(les variable aléatoires $(X_i^*)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont deux à deux indépendantes, car elles sont fabriquées à partir des variable aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$qui sont elles mémes deux à deux indépendents). Soit $\beta > 1$.on note u_n l'entier le plus proche de β^n on va montrer que :$u_n \sim \beta^n$. On a pour tout n : $|u_n - \beta^n| \leq 1$. Comme β^n tend vers l'infini, $u_n - \beta^n = o(\beta^n)$, alors $u_n \sim \beta^n$ et :$\frac{1}{u_n} \sim \beta^{-n}$. Donc comme la série à termes positifs β^{-n} est convergence, on a l'équivalence des restes :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{u_n} \sim \sum_{n=N}^{\infty} \beta^{-n} = (1-\beta^{-1})^{-1}\beta^{-N} \sim (1-\beta^{-1})\frac{1}{u_N}$$

La suite $u_N \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{u_n}$ converge lorsque N tend vers l'infini, alors elle est bornée par une constante C. Donc, $\forall N \geq 1$: $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{u_n} \leq C\frac{1}{u_N}$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} var(M_{u_n}^*) &= \sum_{n=1}^{\infty} var(\frac{S_{u_n}^*}{u_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{u_n}^2} var(S_{u_n}^*) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{{u_n}^2} u_n E X_1^2 1_{\{X_1 \leq u_n\}} \leq E(X_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n} 1_{\{X_1\leq u_n\}}) = E(X_1^2 \sum_{n:u_n\geq X_1} \frac{1}{u_n}) \end{aligned}$$

donc
$$\sum_{n=1}^{\infty} var(M^*_{u_n}) \leq E(X_1^2 \frac{C}{u_{\inf\{n\in\mathbb{N};u_n\geq X_1\}}}) \leq E[X_1^2 \frac{C}{X_1}] = CEX_1 < \infty$$

Comme $\forall\varepsilon > 0$: $P(\left|M^*_{u_n} - EM^*_{u_n}\right| \geq \varepsilon) \leq \frac{var(M^*_{u_n})}{\varepsilon^2}$ (d'aprés Inégalité de Bienaymé-Tchebychev(1.3.4)) et :$\frac{\sum var(M^*_{u_n})}{\varepsilon^2} < \infty$. Alors, $P(\overline{\lim}\left\{\left|M^*_{u_n} - EM^*_{u_n}\right|\right\} \geq \varepsilon) = 0$ (d'aprés la loi 0-1 de Borel(1.3.2)). On remarque que $M^*_{u_n} - EM^*_{u_n} \stackrel{Ps}{\rightarrow} 0$ et en d'autre parte :
$$E(X_n^*) = E(X_n 1_{\{X_n\leq n\}}) = E(X_1 1_{\{X_1\leq n\}})(X_1 1_{\{X_1\leq n\}})$$

car X_1 et X_n ont la même loi. Comme la suite $(X_1 1_{\{X_1\leq n\}})_{n\geq 1}$ converge en croissant vers X_1, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que $E(X_n^*)$ converge vers $E(X_1)$. D'aprés lemme de Cesàro(1.3.8) $E(M_n^*)$ converge vers $E(X_1)$. On a alors,

$$M^*_{u_n} - E(X_1) = (M^*_{u_n} - E(M^*_{u_n})) + (E(M^*_{u_n}) - E(X_1))$$

$E(M^*_{u_n})$ est un sous-suite d'une suite (déterministe) qui converge vers $E(X_1)$, donc elle converge aussi vers $E(X_1)$. Comme $M^*_{u_n} - EM^*_{u_n}$ tend vers 0 presque sûrement et que la convergence presque sûre est compatible avec la somme , on en déduit que $M^*_{u_n}$ tend presque sûrement vers $E(X_1)$ et $P(X_n^* \neq X_n) = P(X_n > n) = P(X_1 > n)$.pour tout $n \geq 0$ ona,
$$P(X_1 > n) \leq \int_{]n-1,n]} P(X > t)d\lambda(t)$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n^* \neq X_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > n) \leq \int_{]0,\infty]} P(X > t)d\lambda(t) \leq E(X) < \infty$$

d'aprés la la loi 0-1 de Borel(1.3.2),$P(\overline{\lim_{n\to\infty}}\{X_n^* \neq X_n\} \geq \varepsilon) = 0$, ce qui équivaut à $P(\underline{\lim_{n\to\infty}}\{X_n^* = X_n\}) \geq \varepsilon) = 1$ pour presque tout w, on a $w \in \{X_n^* = X_n\}$ dès que $n \geq n_0(w)$,c'est à dire que les suites $(X_n(w))$ et $(X_n^*(w))$ coincident à partir du rang

$n_0(w)$ pour presque tout w, on peut écrire dès que $u_n \geq n_0(w)$: $M_{u_n} - EX_1 = \frac{S_{u_{n_0}-1} - S^*_{u_{n_0}-1}}{u_n} + (M^*_{u_n} - EX^*_1)$. Bien sûr, $\frac{S_{u_{n_0}-1} - S^*_{u_{n_0}-1}}{u_n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Quant au deuxième terme, il tend presque sûrement vers 0, déttaillons le raisonnement : Si $w \in (\varliminf_{n\to\infty} \{X^*_n = X_n\}) \bigcap \left\{M^*_{u_n} \to E(X_1)\right\}$, alors $w \in \left\{M_{u_n} \to E(X_1)\right\}$. Comme l'intersection de deux ensembles de mesure 1 est un ensemble de mesure 1, on déduit que $M_{u_n} \overset{Ps}{\to} E(X_1)$. Remarquons que si :$u_n \leq k \leq u_{n+1}$, alors $S_{u_n} \leq S_k \leq S_{u_{n+1}}$. Donc :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} M_{u_n} \leq \frac{u_n}{k} M_{u_n} \leq M_k \leq \frac{u_{n+1}}{k} M_{u_n+1} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} M_{u_n+1}$$

Si n_k désigne la partie entiére du logarithme de n base β, on a $\frac{u_{n_k}}{u_{n_k+1}} M_{u_{n_k}} \leq M_k \leq \frac{u_{n_k+1}}{u_{n_k}} M_{u_{n_k}+1}$. Comme $\lim_{k\to\infty} \frac{u_{n_k}}{u_{n_k+1}} = \frac{1}{\beta} > 0$ et $\lim_{k\to\infty} \frac{u_{n_k+1}}{u_{n_k}} = \beta > 0$, on en déduit

$$\frac{1}{\beta} E(X_1) \leq \varliminf_{k\to\infty} M_k \leq \varlimsup_{k\to\infty} M_k \leq \beta E(X_1) \qquad P.s.$$

on note

$$\Omega_\beta = \left\{ w \in \Omega; \frac{1}{\beta} E(X_1) \leq \varliminf_{k\to\infty} M_k(w) \leq \varlimsup_{k\to\infty} M_k(w) \leq \beta E(X_1) \right\}$$

Nous avons prouvé précédemment que pour tout $\beta > 1$, $P(\Omega_\beta) = 1$. En particulier, $\forall n \geq 1$: $P(\Omega_{1+1/n}) = 1$. Comme l'intersection d'une famille dénombrable d'événements de probabilité un est de probabilité un. Alors, $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{1+1/n}) = 1$. Soit $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{1+1/n}$, on a pour tout $n \geq 1$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} E(X_1) \leq \varliminf_{k\to\infty} M_k(w) \leq \varlimsup_{k\to\infty} M_k(w) \leq (1+\frac{1}{n}) E(X_1).$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$E(X_1) \leq \varliminf_{k\to\infty} M_k(w) \leq \varlimsup_{k\to\infty} M_k(w) \leq E(X_1).$$

Soit $\lim_{k\to\infty} M_k(w) = E(X_1)$. Comme $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_{1+1/n}) = 1$,on a bien $\lim_{k\to\infty} M_k = E(X_1)$ $P.s.$ le résultat demeure vrai si l'on ne supposer plus que $(X_n)_{n\in N^*}$ sont des variables positives. Si $(X_n)_{n\in N^*}$ est une suite de variables aléatoires iid, on peut poser $X_n^+ = \max(0, X_n)$ et$X_n^- = \max(0, -X_n)$, $X_n = X_n^+ - X_n^-$. Ainsi

$$\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k^+) - \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} X_k^-).$$

Le théorème démontré à la question précédente (loi des grands nombres pour les suites de variable aléatoire positives intégrables deux à deux iid, s'applique aux deux termes la différences, de sorte que $\overline{X_n}$ convergence presque sûrement vers $EX_1^+ - EX_1^- = EX_1$. ∎

Exemple 2.2.2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite des variables aléatoires iid telle que $P(X_1 = 1) = p$ et $P(X_1 = 0) = 1 - p$. Soit Y_k une variable aléatoire telle que :*

$$Y_k = \begin{cases} 0 \ si \ X_k = X_{k+1} \\ 1 \ si \ X_k \neq X_{k+1} \end{cases}$$

Posons $S_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$. D'abord on calculons l'espérance de la variable aléatoire M_n :

$$E(S_n) = E(Y_1 + Y_2 + ... + Y_n) = E(Y_1) + E(Y_2) + ... + E(Y_n)$$

par linéraite de l'espérance. Comme $Y_k = 1_{\{X_k \neq X_{k+1}\}}, Y_k$ suit un loi de Bernoulli de *paramètre* $q = P(X_k \neq X_{k+1})$ *et son espérance vaut*

$$\begin{aligned} E(Y_k) &= P(X_k \neq X_{k+1}) \\ &= P(X_k = 0, X_{k+1} = 1) + P(X_k = 1, X_{k+1} = 0) = 2p(1-p) \end{aligned}$$

X_k *et* X_{k+1} *sont indépendantes, on obtient* $E(Y_k) = 2p(1-p)$ *d'ou* $E(S_n) = nE(Y_1) = 2np(1-p)$*, alors :* $E(M_n) = 2p(1-p)$*. Posons :* $I_n = Y_1 + ... + Y_{2n-1}$ *et* $P_n = Y_2 + ... + Y_{2n}$*. Les variable aléatoires* $Y_1, Y_3, ..., Y_{2n-1}$ *étant indépendantes, d'aprés la loi forte des grands nombres,* I_n/n *converge presque sûrement vers* $E(Y_1) = 2p(1-p)$ *de même Les variable aléatoires* $Y_2, Y_4, ..., Y_{2n}$ *sont indépendantes,donc,d'aprés la loi forte des grands nombres,* P_n/n *converge presque sûrement vers* $E(Y_1) = 2p(1-p)$*, et la suite* $\frac{S_{2n}}{2n} = \frac{1}{2}\left(\frac{I_n}{n} + \frac{P_n}{n}\right)$ *converge presque sûrement vers* $E(Y_1) = 2p(1-p)$*. Comme*$|S_{2n+1} - S_{2n}| \leq 1$*,* $\frac{S_{2n+1}}{2n}$ *converge également vers* $2p(1-p)$ *et donc* $\frac{S_{2n+1}}{2n+1}$ *aussi. Ainsi,* M_n *converge presque sûrement vers* $2p(1-p)$*.*

Chapitre 3

Applications

3.1 Simulation pour quelques lois de probabilités

3.1.1 Loi normale

La loi normal est un loi de probabilité absolument continue qui dépend de deux paramètres μ et σ (μ : l'ésperance) et (σ : l'écart type). La densité de probabilité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma^2})^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des variable aléatoires indépandantes suit la loi normal, la figeur suivante explique la convergence de la moyenne émpirique de $(X_n)_{n\geq 1}$ vers l'ésperance μ pour différentes cas ($\mu = 0, 2$) et ($\sigma = 4, 1$)

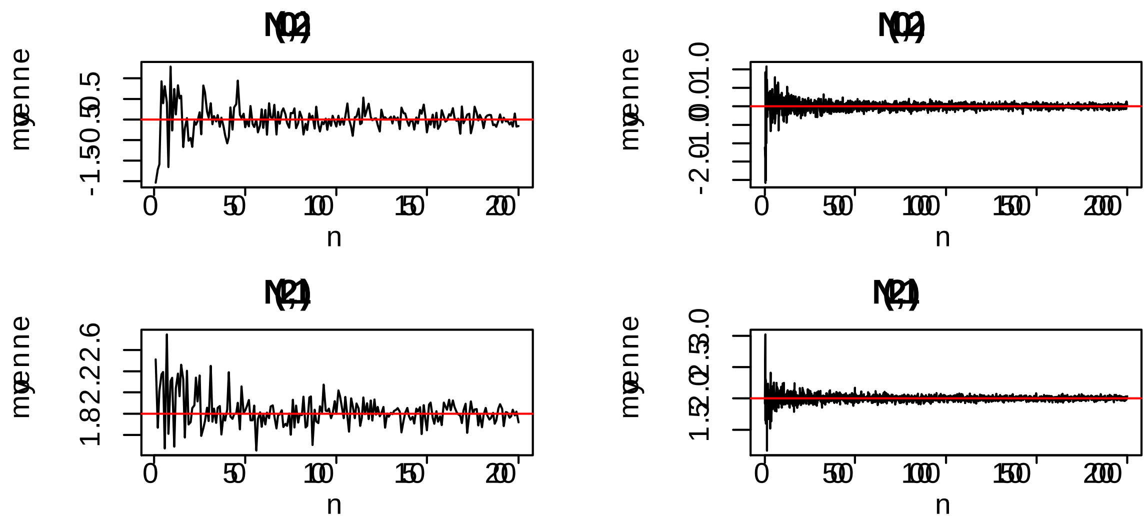

FIG. 3.1 – Loi des Grands Nombres vs $N(\mu, \sigma^2)$.

Les graphes en noir représentes la moyenne émpirique de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ qui suit la loi normal et la linge rouge qui représente l'espérance de cette loi. On remarque que quand n tend vers l'infini la moyenne de cette suite convegre vers son espérance.

3.1.2 Loi de Poisson

La loi de poisson est une loi de probabilité discrete qui dépend d'un seul paramètre $\lambda > 0$. Soit X un va suit la loi de Poisson notée $p(\lambda)$. La probabilité de la loi est donnée lorsque k le nombre de répitition par :

$$p(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathbb{N}$$

d'espérance $E(X) = \lambda$ et variance $var(X) = \lambda$.

Le graphe suivant explique la convergence de la moyenne émpirique de $(X_n)_{n\geq 1}$ vers $\lambda = 3$.

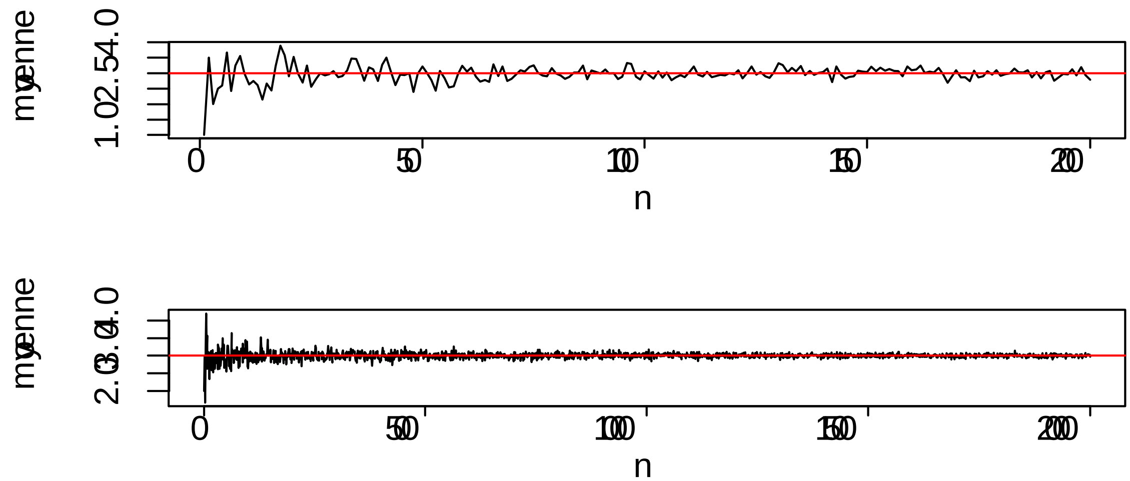

FIG. 3.2 – Convergence de la moyenne émpirique, cas d'une loi de $P(3)$.

La courbe en noir représente la moyenne émpirique de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ qui suit la loi de Poisson et la linge rouge représente l'espérance de cette loi. On prend dans cet exemple $\lambda = 3 = E(X)$. On remarque quand n tend vers l'infini le moyenne de cette suite convegre vers son espérance théorique.

3.1.3 Loi uniforme

La loi de uniforme est un loi de probabilité continue, elle est paramétrée par les plus petites et plus grandes valeurs a et b, on note ainsi, $X \sim U_{[a,b]}$. La densité de probabilité de la loi uniforme $U_{[a,b]}$ est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b$$

et la fonction de répartition de la uniforme $\boldsymbol{U}_{[a,b]}$ est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}$$

L'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et la variance vaut $var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des variable aléatoires indépandantes suit la loi uniforme $\boldsymbol{U}_{[a,b]}$. Le graphe suivant explique la convergence de la moyenne émpirique de X_n vers $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

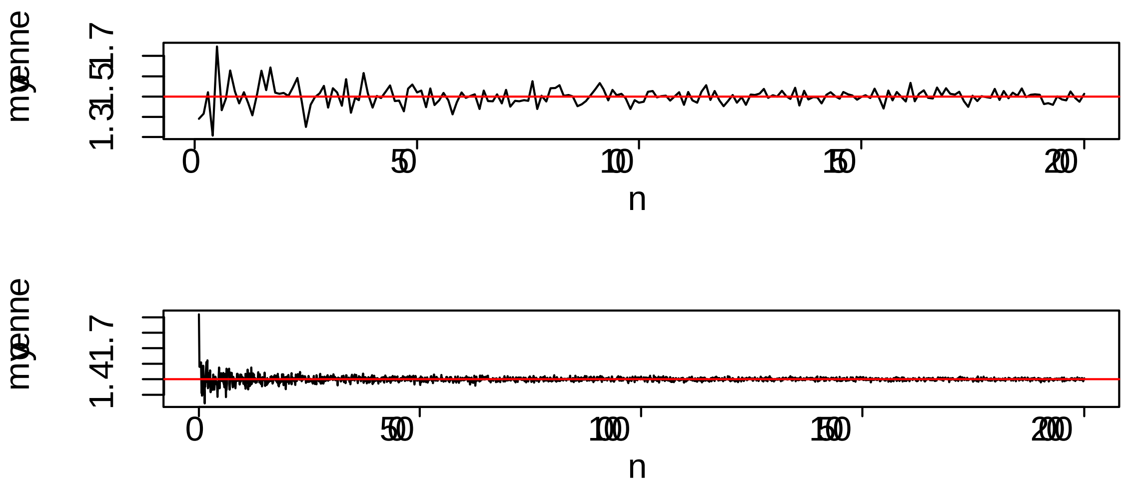

FIG. 3.3 – Convergence de la moyenne émpirique en fonction de n, $X \sim \boldsymbol{U}_{[1,2]}$.

La courbe en noir représente la moyenne émpirique de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ qui suit la loi de $\boldsymbol{U}_{[1,2]}$ et la linge rouge représente l'espérance de cette loi, dans cet exemple $a = 1$ et $b = 2$, alors $E(X) = 1/3$. On remarque que, quand n tend vers l'infini la moyenne empiique convegre vers la moyenne théorique $E(X) = 1/3$.

3.1.4 Loi de Gamma

La loi gamma est un loi de probabilité continue, elle est paramétrée par a et λ et notée $\Gamma(a, \lambda)$, c'est une loi de probabilité de densité :

$$f_{(a,\lambda)}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1},\ x \geq 0\ \ avec : \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

L'espérance de X et $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$ et la variance es $var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des variable aléatoires indépandantes suit la loi de gamma $\Gamma(a, \lambda)$.

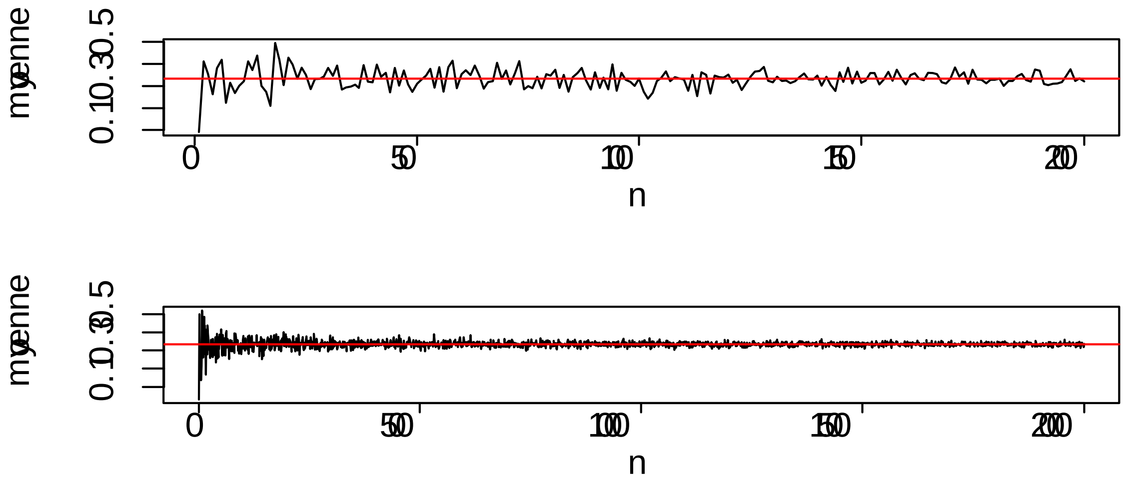

FIG. 3.4 – Convergence de la moyenne émpirique en fonction de n : $X_n \sim \Gamma(1, 3)$.

La courbe en noir représente la moyenne émpirique et en rouge l'espérance de cette loi $\Gamma(1, 3)$. On prend dans cet exemple $a = 1$ et $\lambda = 3$, alors $E(X) = 1/3$.

Remarque 3.1.1 *La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est un cas particulier de la loi gamma : on a $exp(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$. Le graphe suivant explique la convergence de la moyenne émpirique en fonction de n dans le cas exponentielle* : $X \sim Exp(2)$.

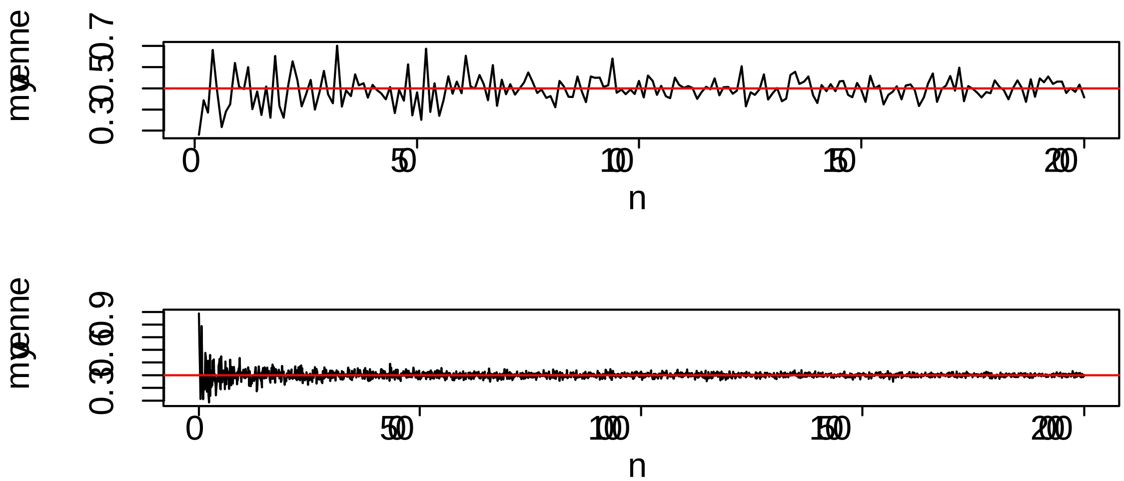

FIG. 3.5 – Convergence de la moyenne émpirique en fonction de n : $X \sim Exp(2)$.

3.1.5 Loi Beta

La loi beta est un loi de probabilité continue, paramétrée par a et $b > 0$ et notée $\beta(a, b)$. Sa densité est

$$f_{(a,b)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha + b)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(b)}(1 - x)^{b-1}x^{\alpha-1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

avec $E(X) = \frac{\alpha}{a+b}, \quad var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite des variable aléatoires indépandantes qui suit la loi Beta $\beta(a = 1, b = 4)$. Représentons la moyenne empirique en fonction de n, le graphe suivant explique cette convergence. En noir c'est la moyenne émpirique et en rouge c'est l'espérance de cette loi :$E(X) = 0.2$.

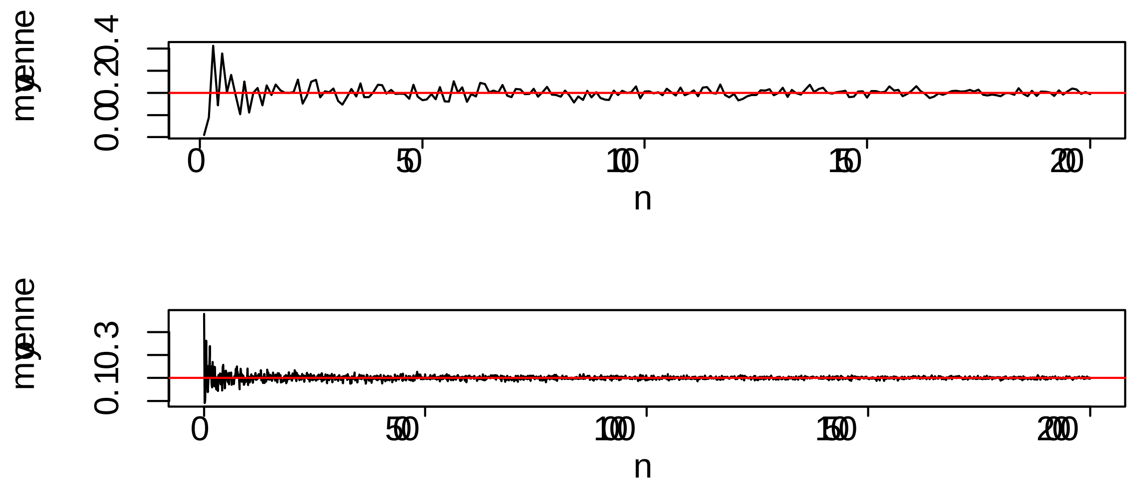

FIG. 3.6 – Convergence de la moyenne émpirique en fonction de n : $X \sim \beta(1,4)$.

3.2 Loi des grands nombres et fonction de répartition émpirique

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillion d'une variable aléatoire réels, définie sur un espace de probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de fonction de répartition F. La fonction de répartition émpirique F_n de l'échantillion $X_1, X_2, ..., X_n$ définit par

$$F_n(x) = \frac{Nbr(X_i \leq x)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}}.$$

Soit $(X_n)_n$ une suite de variable aléatoire réelles indépendantes et de même fonction de répartition F. fixons $x \in \mathbb{R}$ et considérons $Y_i = 1_{\{X_i \leq x\}}$. On remarque que les variables aléatoires Y_i sont iid et que $E(Y_i) = P(X_i \leq x) = F(X)$.

La loi des grands nombres assure la convergence de $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ vers l'espérance de Y_i.

C'est à dire :

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i \leq x\}} \xrightarrow{Ps} F(x).$$

Cette convergence est la convergence poncteul de la fonction de répartition émprique presque sûrement (conséquances direct de la loi des grands nombres), la figeur suivante explique mieu cette convergence poncteul de la fonction de répartition émprique :

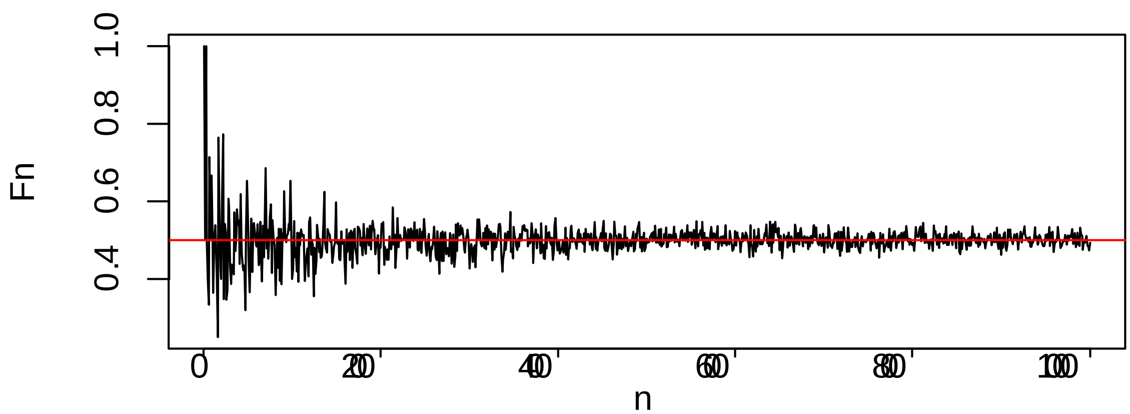

FIG. 3.7 – Convergence de la fonction $F_n(x)$ vers $F(x)$, cas de la loi $N(0,1)$

Le graphe en noir représente la fonction de répartition émprique $F_n(x)$ tellque X suit la loi normal et la linge en rouge qui représente l'espérance de la fonction représente $E(F_n(x)) = F(x) = F(0) = 0,5$.

Mais le théorème de Glivenko Contelli (théorème fondamental en satistique) peut faire mieu. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire réelles indépendantes et de même fonction de répartition F, définiés sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall w \in \Omega : F_n(x,w) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i(w)\leq x\}}$$

F_n converge uniformément vers la fonction de répartition F. Donc,

$$\underset{X\in\mathbb{R}}{sup}\,|F_n(x) - F(x)| \underset{n\to\infty}{\overset{Ps}{\to}} 0.$$

Le graphe suivant explique mieu la convergence uniforme de la fonction de répartition émprique :

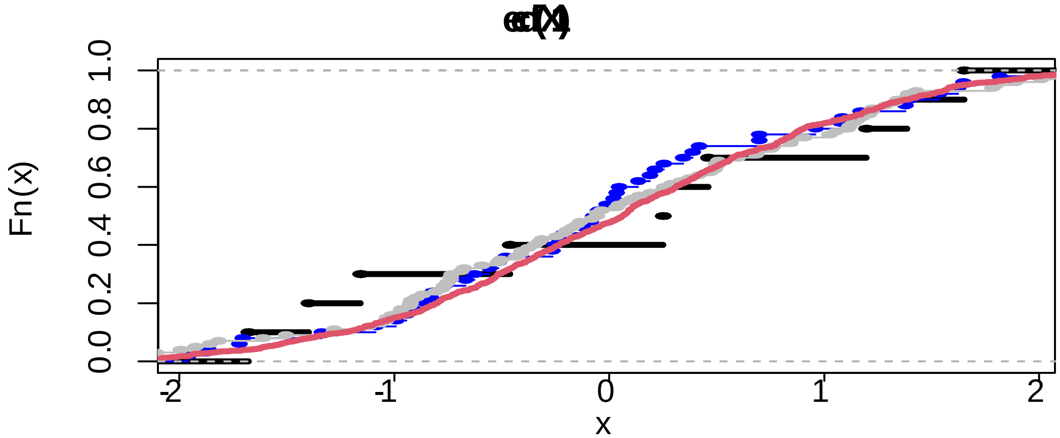

FIG. 3.8 – Convergence uniforme de $F_n(x)$ vers $F(x)$, cas $N(0,1)$

Les points en noir représentes la fonction de répartition émprique qui suit la loi normal de taille $n = 10$, les points en bleu représentes la fonction de répartition émprique qui suit la loi normal pour $n = 50$, les points en gris représente la fonction de répartition émprique qui suit la loi normal pour $n = 100$, la courbe en rouge représente la fonction de distribution de la loi normal $N(0,1)$. On remarque quand n est grand la convergence est plus clair.

3.3 Méthode de Monte Carlo

Proposition 3.3.1 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire réelles indépendantes de loi uniforme sur $[a,b]$, soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(X_1)+f(X_2)+...+f(X_n)}{n} = E(f(X_1) \quad P.s.$$

donc

$$\int_a^b f(X)dX = \lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)$$

Comme les X_i *de loi uniforme sur* $[a,b]$*, alors* $E(f(X_1) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(X)dX$.

Remarque 3.3.1 *Cette proposition est un corollaire immédiate de la loi des grands nombres qui permet de calculer et donner des valeurs approximatives pour certaines intégrales.*

Exemple 3.3.1 *Nous souhaitons calculer une valeur approchée de l'intégrale*

$$I = \int\limits_a^b f(X)dX.$$

Considérons le calcul de l'intégrale

$$I = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin(X)\exp(-X^2)dX$$

Par la méthode de Monte carlo, on trouve $\hat{I}_n = \frac{(b-a)}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(X_i)$.

Quand n *tends vers l'infini* $\hat{I}_n$ *est une approximation de* I. *Sous le logiciel **R**, on a*

```
u <- runif(10000, pi/2, pi)
I <- pi/2* mean(sin(u)*exp(-u^2))
f<-function(x){sin(x)*exp(-x^2)}
integrate(f,pi/2,pi)
```

alors, $I = 0.02207405$ *avec erreur* $< 2.5e - 16$.

Conclusion

Ce mémoire donne une idée générale sur la loi des grands nombres et leurs applications.

Nous donnons dans un premier chapitre quelques rappels de probabilités et des notions de bases permettant d'aborder le sujet.

En suite, dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons aux célèbres lois forte et faible de grands nombres. Les différentes applications théorique et empirique de cette loi est considérer dans le dernier chapitre.

En conclusion, la loi des grands nombres est de très grande importance du point de vue pratique comme pour les compagnies d'assurance et théorique pour le calcule des intégrales par la méthode de Monte Carlo, ou bien l'approximation de la moyenne, de la distribution et de la fonction de survie. . . .

Bibliographie

[1] Blanc-Lapierre, A., & Brard, R. (1946). Les fonctions aléatoires stationnaires et la loi des grands nombres. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 74, 102-115.

[2] Borel, E. (1909). *Éléments de la théorie des probabilités.* Librairie scientifiques A. Hermann & fils.

[3] Brancovan M., Jeulin T. (2006) *Probabilités Niveau M1*, Ellipses, France.

[4] Bosq D., Lecoutre J.-P. (1987) *Théorie de l'estimation fonctionnelle.* Collection «Economie et Statistiques Avancées», Economica.

[5] Champagne, P. (1994). La loi des grands nombres. *Actes de la recherche en sciences sociales*, 101(1), 10-22.

[6] Corteel, M. (2020). De la loi des grands nombres aux grands nombres qui font la loi. *Multitudes*, (1), 105-113.

[7] Desrosières, A. (2016). *La politique des grands nombres : histoire de la raison statistique.* La découverte.

[8] Foata D., Fuchs A. (1998) *Calcul des Probabilités.* Dunod.

[9] Garet O., Kurtzmann A. (2011) *De l'intégration aux probabilités* (Vol. 470). Ellipses, France.

[10] Heinkel, B. (1984). Une extension de la loi des grands nombres de Prohorov. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 67(3), 349-362.

[11] Khinchine, A. I. (1929). Sur la loi des grands nombres. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 189, 477-479.

[12] Kolmogorov, A. N., & Castelnuovo, G. (1929). *Sur la loi des grands nombres.* G. Bardi, tip. della R. Accad. dei Lincei.

[13] Ouvrard J. Y. (2004) *Probabilités : Tome II. Master-Agrégation*, Cassini.

[14] Poisson, S. D. (1836). Note sur la loi des grands nombres. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 2, 377-382.

[15] Revuz D. (1997) *Probabilités.* Hermann.

Annexe A : Logiciel R

• Le langage R est un langage de programmation et un environnement mathématique utilisés pour le traitement de données. Il permet de faire des analyses statistiques aussi bien simples que complexes comme des modèles linéaires ou non-linéaires, des tests d'hypothèse, de la modélisation de séries chronologiques, de la classification, etc. Il dispose également de nombreuses fonctions graphiques très utiles et de qualité professionnelle.

• R a été créé par Ross Ihaka et Robert Gentleman en 1993 à l'Université d'Auckland, Nouvelle Zélande, et est maintenant développé par la R Developement Core Team.

L'origine du nom du langage provient, d'une part, des initiales des prénoms des deux auteurs (Ross Ihaka et Robert Gentleman) et, d'autre part, d'un jeu de mots sur le nom du langage S auquel il est apparenté.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, p)$	:	Espace probablisé
ϕ	:	Ensemble vide
Ω	:	Univers des cas possibles
$A \cap B$	:	Intersection de A et B
$A \cup B$	:	Union de A et B
X	:	Variable aléatoire
$\mathbb{N}$	:	Ensemble des entiers naturels.
w	:	Evenement
$\mathbb{R}$	:	Ensemble des nombres réels
$E(X)$	:	Espérence mathématique de X
$E(X^k)$	:	Espérence mathématique d'ordre k de X
$Cov(X,Y)$	:	Covariance mathématique du couple (X,Y)
$var(X)$	:	Variance mathématiquede X
$\sigma(X)$	:	Ecart type de X
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$	:	Suite des variable aléatoire
$\overline{\lim}$	:	Limite supérieur

$\underline{\lim}$	:	Limite inférieur
$\overline{X_n}$	:	Moyenne empirique
$\xrightarrow{L^2}$	:	Convergence en moyenne Quadratique
$\beta(a,b)$	:	Loi Beta de paramètres a,b
$\xrightarrow{P.s}$	:	Converge presque sûrement
$\xrightarrow{p}$	:	Converge en probabilités
$\xrightarrow{L^k}$	:	Converge en moyenne d'ordre k
$\lVert . \rVert_2$	:	La norme L^2
iid	:	Indépandent et identiqument distrubée
va	:	Variablé aléatoire
$X_{i,n}$	:	Statistique d'ordre
$\binom{p}{n}$	:	Combinaison p,n
$Ber(p)$	:	Loi de Bernoulli de paramètre p
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	:	Loi Normale de moyenne μ et variance σ^2
$f(x)$	:	Fonction de ensité
$F_X(x)$	:	Fonction de répartiition de la va X
$O(n^2)$	:	Bornée par n^2
$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$	:	Partie entière de $\sqrt{n}$
$\mathbb{Q}$	:	Ensembles des quautions $\mathbb{Q}$
$p(\lambda)$	:	Loi de Poisson de paramètre λ
$\boldsymbol{U}_{[a,b]}$	:	Loi Uniforme sur $[a,b]$
$\Gamma(a,\lambda)$	:	Loi Gamma de paramètres a,λ
$exp(\lambda)$	:	Loi expontielle de paramètre λ

ملخـــــص

نقدم في هذه المذكرة لمحة عامة عن النتائج الرئيسية لقانون الأعداد الكبيرة. كم نقدم أيضًا بعض الأمثلة والتطبيقات لهذا القانون: نظرية جليفينكو كونتيلي، طريقة مونتي كارلو وتطبيقاتها على بعض القوانين المعتادة: الطبيعي وبواسون والمنتظم وجاما وبيتا.

Résumé

Nous présentons dans ce mémoire un aperçu sur les principaux résultats de la loi des grands nombres. Nous donnons aussi quelques exemples et des applications de cette loi : théorème de Glivenco-Contelli, méthode de Monte Carlo et applications aux quelques lois usuelles : Normal, Poisson, Uniforme, Gamma et Beta.

Abstract

We present in this memory a preview about the main results of the law of large numbers. We also give some examples and applications of this law: Glivenco-Contelli theorem, Monte Carlo method and applications to some usual laws: Normal, Poisson, Uniform, Gamma and Beta.