République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

BEN BELABBAS Sounya

Titre :

Dérivées Fractionnaires : Théorie et Exemples

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**OUAAR Fatima**	UMKB	Président
Dr.	**ADOUANE Saida**	UMKB	Encadreur
Dr.	**GHODJMIS Fatiha**	UMKB	Examinateur

2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à ma chère mère et père,

que dieu lui accorde une longue vie,

qui m'ont aide à affronter les difficultés.

À tous mes enseignants pour leurs utiles conseils, leurs patience, leur persévérance.

À toutes mes sœurs et mes frères Linda, Khaoula, Donia, Ibrahim Khalil, Moatasim Bialah.

À toute ma précieuse famille.

À mes chères amis Khadija, Ruwnuq, Fatiha, Ibtisam, malak Al Frdaous, Souad, Zinab, Abir, Nour, Fatima, Siham, Djouhaina...

À tous la promotion 2021 de $2^{\text{ème}}$ master mathématique de l'université Mohamed Khider - Biskra.

À tous.

REMERCIEMENTS

Je remercie **mon Dieu** qui m'aidé pour finir mon mémoire.

Je remercie ma encadreuse **Adouane Saida**, qui m'a dirigé et m'a dit touts les conseils importants et les indications utiles.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers les membres de jury. Merci **Dr. Ouaar Fatima** et **Dr. Ghodjmis Fatiha** qui ont accepté d'évaluer mon travail.

Mes sincères remerciements à l'ensemble des enseignants de notre département.

Enfin, je remercier ma famille et toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

MERCI

Table des matières

Table des figures

Introduction

L'analyse fractionnaire est une branche de l'analyse mathématique qui étudie la possibilité de définir des puissances non entières des opérateurs de dérivation et d'intégration. Ces dérivées ou intégrations fractionnaires rentrent dans le cadre plus général des opérateurs pseudo-différentiels.

Calcul fractionnaire fait également partie de l'analyse mathématique et traite de l'intégration et des applications dérivées et est une généralisation du calcul classique et comme préservé beaucoup de propriétés de base, qui est une théorie de l'intégration, des dérivés système arbitraires réels et complexes, et le but du calcul partiel est de généraliser les dérivés conventionnels, quant à ce différenciation fractionnaire, il nous aide à trouver le nombre dérivé moitié ou $0,3$ ou $0,7$...etc.

Les origines de cette tendance ont commencé au XVIIe siècle lorsque Newton et Leibniz ont jeté les bases du calcul, Leibniz a mis le célèbre symbole $\frac{d^n y}{dx^n}$ pour désigner la n^{ième} dérivée de la fonction f, Leibniz a envoyé un message à L'Hopital lui indiquant ce nouveau symbole, mais L'Hopital a répondu au message par une question déroutante : «Et si $n = 1/2$?». Cette lettre de l'Hopital, écrite en 1695, est aujourd'hui la première apparition du dérivé fractionnaire.

Et comme le mathématicien Liouville a commencé à enquêter et de recherche sur le sujet, il a publié une série d'articles et un guide en 1832-1837, où il a connu le premier opérateur d'intégration fractionnaire, et Riemann a rompu avec ce sujet et a développé ce qui est maintenant connu comme la définition de Riemann, un intérêt et un développement sans précédent dans ce domaine, à la fin les années 1960 ont nécessité une révision qui a conduit de nombreux auteurs, dont Caputo, à trouver une nouvelle définition de la dérivation fractionnaire en raison de problèmes appliqué à la flexibilité optique et la mécanique, quant Grünwald-Letnikov. L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraire. Des dérivés fractionnaires et intégrales sont également utilisés dans certains domaines tels que la physique impliquant des phénomènes aussi divers que la consommation d'électricité ou la chaleur.

Nous citons la liste des scientifiques qui ont contribué de façon importante à des calculs fractionnaire au milieu du XXe siècle :

P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-1867), A.K. Grunwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy et J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl(1917), P. Levy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Amour (1938-1996), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz(1949).

Ce travail est divisé en deux chapitres : dans le premier chapitre, nous avons mentionné quelques concepts et définitions de fonctions utiles spécifiques : la fonction Gamma, la fonction Bêta et la fonction Mittag-Leffler. Nous avons ensuite introduit la définition des dérivés fractionnaires, puis étudié les trois plus populaires approches fractionnaires, à savoir le Grunwald-Litnikov, Riemann Liouville et Caputo, ainsi que leurs propriétés. Nous avons parlé de la relation entre l'approche Riemann Liouville et celle de Caputo.

Dans le second chapitre, nous avons donné quelques exemples des dérivés fractionnaires comme la fonction $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ et la fonction constante. Les dérivées fractionnaires au sens de **Grünwald-Letnikov**, **RiemannLiouville** et **Caputo** de ces fonctions sont étudiées.

Chapitre 1

Dérivation fractionnaire

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques notions et définitions des fonctions spécifiques utiles : la fonction Gamma, la fonction Béta et la fonction Mittag-Leffler. Ensuite, nous présenterons la définition d'une dérivée fractionnaire puis on étudie les trois approches des dérivés fractionnaires les plus populaires : l'approche de Grünwald-Letnikov, de Riemann-Liouville et de Caputo ainsi que leurs propriétés.

1.1 Fonctions spécifiques utiles

Dans cette section, nous présentons les fonctions : Gamma, Bêta et l'exponentielle de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses applications.

1.1.1 Fonction Gamma [4]

La fonction **Gamma d'Euler** $\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{z})$ est l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma* $\Gamma(z)$ *est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt; \tag{1.1}$$

pour $z \in \mathbb{C}$ *tq* $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Avec $\Gamma(1) = 1$ *;* $\Gamma(0_+) = +\infty$ *;* $\Gamma(z)$ *est une fonction monotone et strictement décroissante pour* $0 < z \leq 1$.

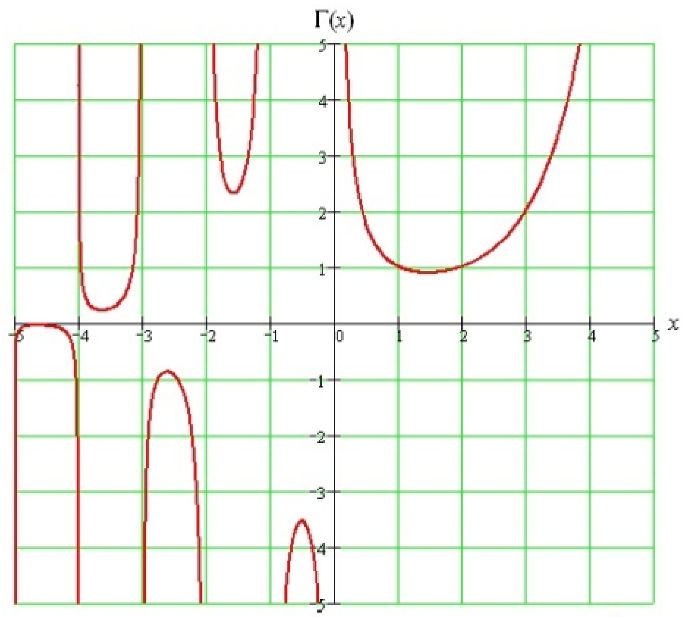

FIG. 1.1 – Courbe représentative de la fonction Gamma

Proposition 1.1.1 ***(de la fonction Gamma)***

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ *est la relation de récurrence suivante :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.2}$$

Preuve. Qu'on peut la démontrer par une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^{(z+1)-1}e^{-t}dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt \\
&= [-t^z e^{-t}]_{t=0}^{t=+\infty} + z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

■

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N};$$

En effet, $\Gamma(1) = 1$; et en utilisant la relation (1.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1.\Gamma(1) = 1!; \\
\Gamma(3) &= 2.\Gamma(2) = 2.1! = 2!; \\
\Gamma(4) &= 3.\Gamma(3) = 3.2! = 3!; \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
\Gamma(n+1) &= n.\Gamma(n) = n.\Gamma(n-1)! = n!
\end{aligned}$$

Exemple 1.1.1 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

De la définition (1.1.1), nous avons

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{(\frac{1}{2}-1)}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Si nous posons $t = y^2$ *; alors* $dt = 2ydy$ *; et nous obtenons maintenant*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy. \tag{1.3}$$

De façon analogue, on peut écrire :

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \tag{1.4}$$

Si nous multiplions ensemble (1.3) et (1.4) nous obtenons :

$$[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \tag{1.5}$$

L'équation (1.5) est une intégrale double, qui peut être évaluée en coordonnées polaires pour obtenir

$$[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} drd\theta = \pi.$$

Ainsi, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Exemple 1.1.2 $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On a : $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ *(de l'exemple précédent) et on a :* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,

alors

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2}+1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1.1.2 Fonction Bêta [3]

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.1.2 *La fonction Bêta est définie par :*

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt;\ \ \mathrm{Re}(p)>0;\ \ \mathrm{Re}(q)>0.$$

Proposition 1.1.2 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :*

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ \ \mathrm{Re}(p)>0,\ \ \mathrm{Re}(q)>0. \tag{1.6}$$

Propriété 1.1.1 *Il s'ensuit de (1.6), la fonction Béta est symétrique c'est-à-dire :*

$$B(p,q)=B(q,p),\ \ \mathrm{Re}(p)>0,\ \ \mathrm{Re}(q)>0.$$

1.1.3 Fonction Mittag-Leffler [4]

La fonction exponentielle e^z ; joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. Elle est aussi largement utilisée dans la recherche des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par G. M. Mittag-Leffler en 1903.

Définition 1.1.3 *Pour $z\in\mathbb{C}$, la fonction Mittag-Leffler est définie par :*

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\quad \alpha>0$$

En particulier :

$$E_1(z)=e^z,\quad E_2(z)=\cosh\left(\sqrt{z}\right).$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette fonction a été introduite par Agarwal et Erdelyi *en 1953 - 1954 et elle est définie par un développement en série suivant :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0;\ \beta > 0)$$

En particulier :

$$\begin{aligned}
E_{\alpha,1}(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(z), \\
E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \\
E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \\
E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k + 1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z).
\end{aligned}$$

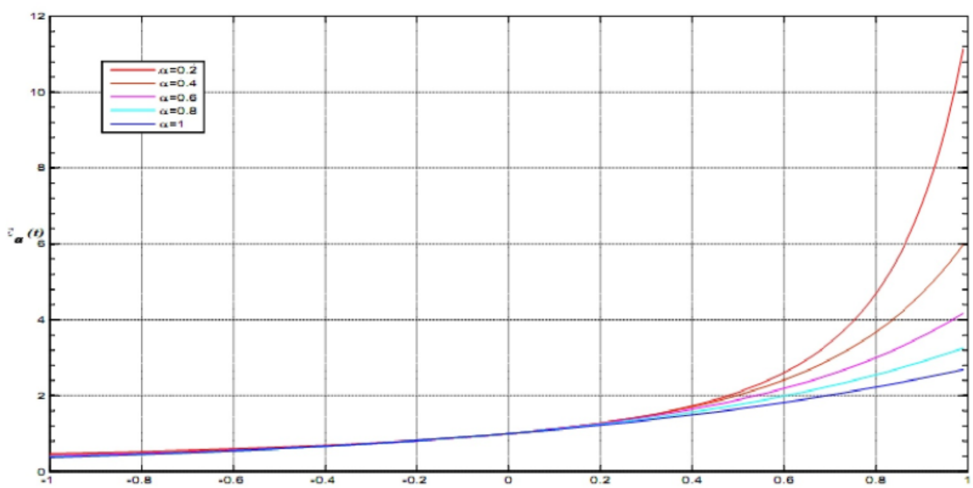

Fig. 1.2 – La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre

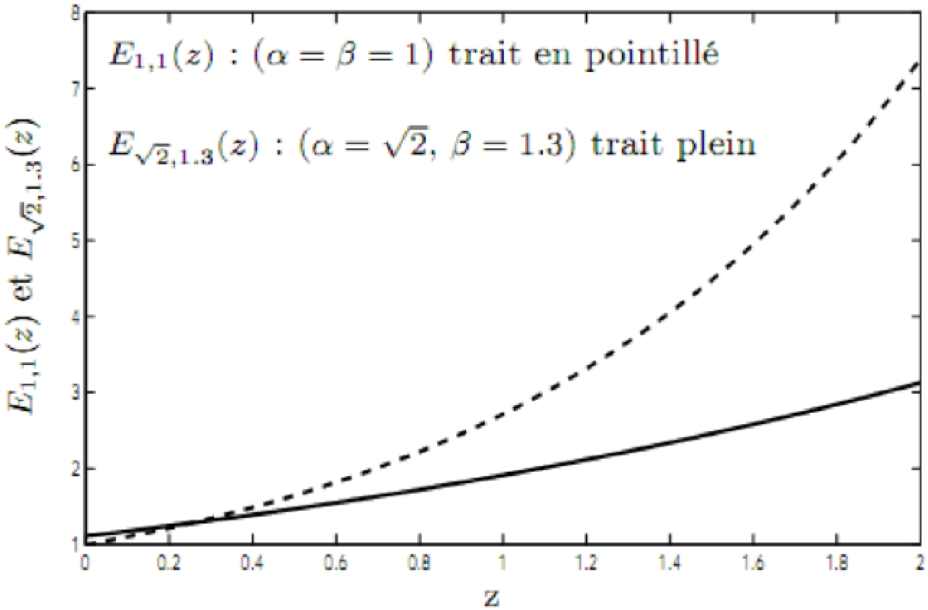

FIG. 1.3 – La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres

1.2 Quelques approches de dérivations fractionnaires

Connaissait les contributions de nombreux mathématiciens qui ont donné plusieurs approches de dérivations fractionnaires, dans cette section on va restreindre à trois approches les plus populaires et les plus praticable qui sont : l'approche de Grünwald Letnikov, de Riemann-Liouville et l'approche de Caputo.

1.2.1 Approche de Grünwald-Letnikov [2], [5]

L'idée principale de la dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov est de donner une généralisation de la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraire. Ce qui permet d'exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée (p) fois (si p est négatif), d'une fonction f comme ceci :

Pour une fonction f donnée, d'après la définition classique de la dérivation (la dérivée première (d'ordre 1) d'une fonction f) en un point t on a :

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{1.7}$$

L'application de cette définition deux fois nous donne la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2} &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\frac{f(t)-f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h)-f(t-2h)}{h}}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \tag{1.8}$$

En utilisant (1.7) et (1.8) nous obtenons :

$$f'''(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{1.9}$$

et, par récurrence pour n nous obtenons :

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t - rh), \tag{1.10}$$

où

$$\binom{n}{r} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1)} = \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{r!} \tag{1.11}$$

Remarque 1.2.1 *La formule (1.10) s'appelle dérivée d'ordre n à gauche, de même, en prenant les différences à droite, on obtient une dérivée d'ordre n (à droite)*

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} f(t + rh),$$

Pour la simplicité on va considérer que la dérivée (à gauche) dans tous ce qui suit.

Considérons maintenant l'expression suivante généralisant (1.10)

$$f^{(p)}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \tbinom{p}{r} f(t-rh), \tag{1.12}$$

où p et n sont deux entiers arbitraire, remarquons que pour $p \leq n$ on a :

$$\begin{aligned} f^{(p)}(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \tbinom{p}{r} f(t-rh) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \tbinom{p}{r} f(t-rh) + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=p+1}^{n} (-1)^r \tbinom{p}{r} f(t-rh) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \tbinom{p}{r} f(t-rh), \end{aligned}$$

en tenant compte du fait que $\binom{p}{p+j} = 0$ pour tout $j = 1, ..., n$.

On remarquant que :

$$\begin{aligned} (-1)^r \tbinom{\alpha}{r} &= (-1)^r \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\alpha-r+1)} \\ &= (-1)^r \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-r+1)}{r!} \\ &= (-1)^r \frac{\alpha.(\alpha-1)...(\alpha-r+1)(\alpha-r)!}{r!(\alpha-r)!} \\ &= \frac{-\alpha.(-\alpha+1)...(-\alpha-r+1)}{r!} \\ &= \frac{\Gamma(r-\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha)}. \end{aligned}$$

alors

$${}^{GL}D^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(r-\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-rh).$$

L'intégrale fractionnaire se traduit par l'expression suivante :

$${}^{GL}I^{\alpha} f(t) = {}^{GL}D^{-\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\alpha)} f(t-rh).$$

Cas particuliers :

cas pour $\alpha = 1$ on a :

$$\begin{aligned} {}^{GL}I^{1}f(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{-1}} \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(1)} f(t-rh) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{-1}} \sum_{r=0}^{+\infty} f(t-rh). \end{aligned}$$

En tenant compte de $t - nh = a$ et f est continue alors :

$$ {}^{GL}I^{1}f(t) = \int_{0}^{t-a} f(t-y)dy = \int_{a}^{t} f(\tau)d\tau. \tag{1.13}$$

cas pour $\alpha = 2$ on a :

$$\begin{aligned} {}^{GL}I^{2}f(t) &= \lim_{h\to 0} h \sum_{r=0}^{n} \frac{\Gamma(r+2)}{\Gamma(r+1)\Gamma(2)} f(t-rh) \\ &= \lim_{h\to 0} h \sum_{r=0}^{n} (r+1) f(t-rh). \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $t - h = z$, on déduit que :

$$ {}^{GL}I^{2}f(t) = \lim_{h\to 0} h \sum_{r=0}^{n+1} (rh)\, f(z-rh) = \int_{0}^{t-a} z f(t-z)dz = \int_{a}^{t} (z-\tau)\, f(\tau)d\tau. \tag{1.14}$$

Et par récurrence on peut généraliser les formules (1.13) et (1.14) sous la forme suivante :

$$ {}^{GL}I^{\alpha}f(t) = \lim_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{r=0}^{n} \tbinom{\alpha}{r} f(t-rh) = \frac{1}{(\alpha-1)!} \int_{a}^{t} (z-\tau)\, f(\tau)d\tau.$$

1.2.2 Approche de Riemann-Liouville [6]

Dans cette section nous présentons la définition de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaires au sens de Riemann-Liouville d'une fonction.

1) L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et $-\infty < a < x < b < +\infty$.

Une primitive de f est donnée par l'expression :

$$I^{(1)} f(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Pour une primitive seconde et d'après le théorème de Fubini on aura :

$$\begin{aligned} I^{(2)} f(x) &= \int_a^x I^{(1)} f(u) du \\ &= \int_a^x \left(\int_a^u f(\tau) d\tau \right) du \\ &= \int_a^t f(u) du \int_a^x dt \\ &= \int_a^x (x - t) f(t) dt \end{aligned}$$

et pour une primitive troisième on aura :

$$\begin{aligned} I^{(3)} f(t) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \int_a^{x_2} f(x_3) dx_3 \\ &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} (x_1 - x_2) f(x_2) dx_2 \\ &= \frac{1}{(3-1)!} \int_a^x (x - t)^{(3-1)} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2!} \int_a^x (x - t)^2 f(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^x (x - t)^2 f(t) dt. \end{aligned}$$

Dans le cas général pour tout entier n et par récurrence on a la formule de Cauchy :

$$I^{(n)} f(t) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \tag{1.15}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x - t)^{(n-1)} f(t) dt. \tag{1.16}$$

Depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$; Riemann s'est rendu compte que le second membre de (1.16) pourrai avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il a définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

2) L'intégrale de Riemann-Liouville

Définition 1.2.1 *si $f(x) \in C[a,b]$ et $x \in [a,b]$.*

On appelle intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α de f l'intégrale définie par la formule suivante :

$$I_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt, \ \ \alpha \in \left]-\infty, +\infty\right[.$$

Et on appelle intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α de f l'intégrale définie par la formule suivante :

$$I_{b^-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt, \ \ \alpha \in \left]-\infty, +\infty\right[.$$

Remarque 1.2.2 *Nous utiliserons l'intégration de la main (gauche) dans toute le chapitre.*

Théorème 1.2.1 *Pour $f(x) \in C([a,b])$, l'intégrale fractionnaire de Riemann -Liouville possède la propriété de semi-groupe*

$$I_a^{(\alpha)} \left[I_a^{(\beta)} f(x) \right] = I_a^{\alpha+\beta} f(x), \ \ \alpha > 0 \ \ et \ \beta > 0$$

Preuve. De la définition nous trouvons :

$$\begin{aligned} I_a^{(\alpha)} \left[I_a^{(\beta)} f(x) \right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} (I_a^{(\beta)} f)(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{(\alpha-1)} (t-u)^{(\beta-1)} f(u)dudt \end{aligned}$$

Or $f \in C([a,b])$ et d'après le théorème de Fubini on peut changer l'ordre de l'intégration, on pose $t = u + s(x-u)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
I_a^{(\alpha)}\left[I_a^{(\beta)} f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \left[\int_u^x (x-t)^{(\alpha-1)}(t-u)^{(\beta-1)} dt\right] du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \left[(x-u)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 s^{(\beta-1)}(1-s)^{(\alpha-1)} ds\right] du \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{(1-\alpha-\beta)}} du \\
&= \frac{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{(1-\alpha-\beta)}} du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \frac{f(u)}{(x-u)^{(1-\alpha-\beta)}} du = I_a^{\alpha+\beta} f(x)
\end{aligned}$$

telle que $B(\alpha,\beta)$ est la fonction Bêta. ■

3) Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Il existe plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville parmi eux, nous mentionnons :

Définition 1.2.2 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ est définie par :*

$${}_a^{RL}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left(I^{n-\alpha} f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds$$

avec ($\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$ et $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1 \in \mathbb{N}$, $t > a$) et $[.]$ dénote la fonction partie entière d'un nombre réel.

En particulier, pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha = n$ on a :

$${}_a^{RL}D_t^{0} f(t) = f(t),$$

$${}_a^{RL}D_t^{n} f(t) = f^{(n)}(t)$$

Définition 1.2.3 *Pour $0 < \alpha < 1$ et $t \in]a,b[$, on appelle dérivée fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville la formule*

$$ {}^{RL}_{a^+}D^{\alpha}_{t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds $$

en général pour $n-1 < \alpha < n$, donc $\alpha = n-1+\beta$ et $\beta \in]0,1[$

c'est à dire $(n-1)$ est la partie entière de α et β son reste.

Théorème 1.2.2

On prend $f \in C([a,b])$ et $(n-1) \leq \alpha < n$, de sorte que $f(x) \in I^{\alpha}_{a^+}([a,b])$. Il est nécessaire et suffisant que

$$ I^{n-\alpha}_{a^+} f \in C^n([a,b]) $$

et que

$$ \left(\frac{d^k}{dt^k} I^{n-\alpha}_{a^+} f \right)_{x=a} = 0; k = 0; 1; 2; ...; n-1 $$

Théorème 1.2.3

i) *Si $(n-1) \leq \alpha < n$*

$$ D^{\alpha}_{a} I^{\alpha}_{a^+} f(x) = f(x) \text{ pour toute fonction } f \in C([a,b]) $$

ii) *Si $(n-1) \leq \alpha < n$ et $f \in C^n([a,b])$ et de plus f vérifie la condition du théorème (1.2.2) alors :*

$$ I^{\alpha}_{a^+} D^{\alpha}_{a} f(x) = f(x) $$

Si non

$$ I^{\alpha}_{a^+} D^{\alpha}_{a} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}} (I^{n-\alpha}_{a^+} f(x)). $$

iii) *En particulier : pour $0 < \alpha < 1$*

$$ I^{\alpha}_{a^+} D^{\alpha}_{a^+} f(x) = f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (I^{1-\alpha}_{a^+} f(x)), $$

et pour $\alpha = n$ *on a :*

$$I_{a^+}^{n} D_{a^+}^{n} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}.$$

1.2.3 Approche de Caputo [4], [6]

La dérivation partielle dans le sens de Riemann-Liouville a joué un rôle actif dans le développement de micro-calcul en mathématiques pures et appliquées à la fin les années 1960 ont nécessité une révision qui a conduit de nombreux auteurs, dont Caputo, à trouver une nouvelle définition de la dérivation fractionnaire en raison de problèmes appliqué à la flexibilité optique et la mécanique.

Définition 1.2.4 *La dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'une fonction* $f(t)$ *donnée sur l'intervalle* $[a, b]$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *est définie par la relation suivante :*

$$ {}_{a}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds, \quad [\alpha] = n - 1. \tag{1.17}$$

avec $[\alpha]$ *désigne la partie entière de* α.

Définition 1.2.5 *on appelle dérivée fractionnaire (à gauche) de Caputo d'une fonction* $f(t)$ *la relation suivante :*

$$ {}_{a^+}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds, \forall t > a.$$

Définition 1.2.6 *on appelle dérivée fractionnaire (à droite) de Caputo d'une fonction* $f(t)$ *la relation suivante :*

$$ {}_{b^-}^{C}D_t^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} (-1)^n \int_t^b \frac{f^{(n)}(s)}{(s-t)^{\beta+1-n}} ds, \forall t < b.$$

Théorème 1.2.4 *Pour* $n - 1 \leq \alpha \leq n$, *si* $f(x) \in C^n([a, b])$ *la dérivée* ${}_{a^+}^{C}D_t^{\alpha} f(t)$ *existe presque partout sur* $[a, b]$.

i) *Si* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *la dérivée* ${}_{a^+}^{C}D_t^{\alpha} f(t)$ *peut être représentée par :*

$$ {}_{a^+}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds = I_{a^+}^{n-\alpha} D^n f(t), \tag{1.18} $$

en particulier, si $0 < \alpha < 1$ *et* $f(t) \in C([a,b])$

$$ {}_{a^+}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds = I_{a^+}^{1-\alpha} D f(t). \tag{1.19} $$

ii) *si* $\alpha = n \in \mathbb{N}$ *:*

$$ {}_{a^+}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = f^{(n)}(t). $$

1.3 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo [6]

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville

Théorème 1.3.1 *Soit* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ *avec* $n-1 < \mathrm{Re}(\alpha) < n$, *(*$n \in \mathbb{N}^*$*), et soit* f *une fonction telle que les dérivées fractionnaires* ${}^{C}D^{\alpha} f(t)$ *et* ${}^{RL}D^{\alpha} f(t)$ *existent alors :*

$$ {}^{C}D^{\alpha} f(t) = {}^{RL}D^{\alpha} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}. \tag{1.20} $$

Preuve. On considère le développement limité en série de Taylor de la fonction f en $t = 0$

$$ \begin{aligned} f(t) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} t + \frac{f''(0)}{2!} t^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} t^{n-1} + R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} t^k + R_{n-1}, \end{aligned} $$

avec

$$R_{n-1} = \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(n-1)!}(t-\tau)^{n-1}d\tau.$$

En utilisant les propriétés d'intégration d'ordre n, on a :

$$R_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{n-1}d\tau = I^n f^{(n)}(t).$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur de Riemann-Liouville et la relation de la fonction $f(t) = t^{\beta}$ est donnée par :

$$^{RL}D^{\alpha}t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}t^{\beta-\alpha},$$

donc

$$\begin{aligned}
^{RL}D^{\alpha}f(t) &= \ ^{RL}D^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}t^k + R_{n-1}\right) \\
&= \ ^{RL}D^{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}t^k + \ ^{RL}D^{\alpha}R_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}\ ^{RL}D_a^{\alpha}t^k + \ ^{RL}D^{\alpha}R_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\alpha+1)}t^{k-\alpha} + \ ^{RL}D^{\alpha}I^n f^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}t^{k-\alpha} + I^{n-\alpha}f^{(n)}(t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}t^{k-\alpha} + \ ^{C}D^{\alpha}f(t).
\end{aligned}$$

donc

$$^{C}D^{\alpha}f(t) = \ ^{RL}D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)}t^{k-\alpha}.$$

D'où le résultat. ∎

Remarque 1.3.1 *Si* $f^{(k)}(0) = 0$ *pour* $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, *on aura*

$$^{C}D^{\alpha}f(t) = \ ^{RL}D^{\alpha}f(t).$$

1.4 Propriétés générales

Les principales propriétés des dérivées et intégrales fractionnaires sont les suivantes :

1/ Si $f(z)$ est une fonction analytique en z alors sa dérivée fractionnaire $D_z^{\alpha}f(z)$ est une fonction analytique en z et α.

2/ La dérivation et l'intégration fractionnaires sont des opérations linéaires

$$D_x^{\alpha}\left[\gamma f(x) + \delta g\left(x\right)\right] = \gamma D_x^{\alpha}f(x) + \delta D_x^{\alpha}g\left(x\right). \tag{1.21}$$

3/ Règle de Leibniz pour les dérivées fractionnaires

Prenons deux fonctions, $f(x)$ et $g(x)$, et commençons par la règle connue, de Leibniz, pour évaluer la n-ième dérivée de la produit $f(x) \times g(x)$:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x) \times g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x). \tag{1.22}$$

La généralisation de cette formule pour la dérivation fractionnaire est la suivante :

Si $f(t)$ est continue dans $[a, x]$ et $g(t)$ possède $(n+1)$ dérivées continues sur $[a, x]$, alors la dérivée fractionnaire du produit $f(x) \times g(x)$ est donnée par :

$$D^{\alpha}\left(f(x) \times g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} f^{(k)}(x) \times D^{(\alpha-k)}g(x) - R_n^{\alpha}(x). \tag{1.23}$$

Où $n \geq \alpha + 1$ et

$$R_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t)dt \int_t^x (t-\tau)^n g^{(n+1)}(\tau)d\tau. \tag{1.24}$$

La somme de (1.23) peut être considérée comme une somme partielle d'une série infinie et $R_n^\alpha(x)$ comme un reste de la série.

En faisant le changement de variable d'intégration comme le suivant

$$\tau = t - \zeta(x-t) \;\; \text{et} \;\; t = a + \eta(x-a),$$

on peut avoir :

$$\lim_{n \to +\infty} R_n^\alpha(x) = 0;$$

donc on peut déduire que si, $f(x)$ et $g(x)$ ainsi que tous ses dérivées sont continues dans $[a, x]$, sous cette condition, la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire prend la forme suivante :

$$D^\alpha\left(f(x) \times g(x)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \tbinom{\alpha}{k} f^{(k)}(x) \times D^{(\alpha-k)} g(x). \tag{1.25}$$

Chapitre 2

Exemples des dérivés fractionnaires

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques exemples des dérivés fractionnaires comme la fonction $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ et la fonction constante. Les dérivées fractionnaires au sens de **Riemann-Liouville**, **Grünwald-Letnikov** et **Caputo** de ces fonctions sont étudiées. [1], [4]

2.1 La fonction $f(t) = (t-a)^{\alpha}$

2.1.1 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$,

alors on a :

$$f^{(k)}(a) = 0 \text{ pour tout } k = 1, 2, ..., n-1,$$

et

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-n)}(\tau-a)^{\alpha-n},$$

donc

$${}_{a}^{GL}D_{t}^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n-p)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}\,d\tau$$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s\,(t-a)$ on aura :

$$\begin{aligned}
{}_{a}^{GL}D_{t}^{p}\,(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n-p)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}\,(\tau-a)^{\alpha-n}\,d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n-p)}\,(t-a)^{\alpha-p}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)B\,(n-p,\alpha+1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n-p)}\,(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1-n)}{\Gamma(\alpha+1-n)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1-p)}\,(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1-p)}\,(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

par exemple :

$${}_{0}^{GL}D_{t}^{1/2}t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)}\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}.$$

2.1.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > -1$, donc on a :

$${}_{a^{+}}^{RL}D^{p}\,(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}\,(\tau-a)^{\alpha}\,d\tau$$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s\,(t-a)$ on aura :

$$\begin{aligned}
{}_{a^{+}}^{RL}D^{p}\,(t-a)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}(t-a)^{n-p+\alpha}\int_{a}^{t}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha}ds \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)B\,(n-p,\alpha+1)}{\Gamma(n-p)}(t-\alpha)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n+\alpha-p+1)}(t-\alpha)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-\alpha)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

par exemple :

$${}_{0^{+}}^{RL}D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5).$$

2.1.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > n-1$, donc on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(t-\tau)^{\alpha-n}$$

d'où

$${}_{a}^{C}D_{t}^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n-p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}\, d\tau.$$

En effectuant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$ on aura :

$$\begin{aligned}
{}_{a}^{C}D_{t}^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n-p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}\, d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n-p)}(t-a)^{\alpha-p} \int_{0}^{1} (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p,\alpha+1-n)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

2.2 La fonction constante

2.2.1 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

En générale La dérivée fractionnaire d'une constante de Grünwald-Letnikov n'est pas nulle ni constante.

Soit $f(t) = c$ et soit p non entier.

On a donc :

$$f^{(k)}(t) = 0 \quad \text{pour } k = 1, 2, ..., n;$$

cependant dans le cas fractionnaire, on a :

$$
\begin{aligned}
{}_{a}^{GL}D^{p}f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(t-a)^{k-p} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau \\
&= \frac{c(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-p+1)}(t-a)^{k-p}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau}_{=0} \\
&= \frac{c(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)}.
\end{aligned}
$$

2.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Il est raisonnable d'avoir la dérivée fractionnaire d'une constante égale à zéro, et c'est du point de vue physique. Or comme, on l'a vu plus haut, pour l'opérateur de Riemann-Liouville on a :

$$
{}_{a}^{RL}D^{p}c = \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} \neq 0, \text{ tel que } c = const.
$$

En général la dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle ni constante.

2.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Du point de vue physique, il est raisonnable d'avoir la dérivée fractionnaire d'une constante égale à zéro.

Lemme 2.2.1 *La dérivée fractionnaire de Caputo pour la fonction constante est égale à zéro i.e :*

$$
{}^{C}D^{\alpha}c = 0, \textit{ tel que } c = const.
$$

Preuve. Soit $\alpha > 0$ et $\alpha \in]n-1, n[$, $n \in \mathbb{N}$, i.e $n \geq 1$, on applique la définition de la dérivée de Caputo

$$^{C}D^{\alpha}f(x) = I^{n-\alpha}f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}}ds, s > 0$$

et puisque la n-ième dérivée $c^{(n)}$ est égale à 0 avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$: Il suit

$$^{C}D^{\alpha}c = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t \frac{c^{(n)}}{(t-s)^{\alpha+1-n}}ds = 0.$$

■

Par conséquent la propriété suivante est un des avantages de la dérivée de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville.

Conclusion

L'objet de ce mémoire est l'étude des exemples des dérivés fractionnaires au sens de Grunwald-Latinkov, Riemann-Liouville et Caputo avec quelques propriétés.
Ce travail nous a permis de savoir l'importance du dérivée et Intégration fractionnaire dans le domaine des mathématiques.
Enfin, nous avons l'intention à l'avenir de rechercher de nouveaux exemples des dérivés fractionnaires autres que Grunwald-Latinkov, Riemann-Liouville, Caputo.

Bibliographie

[1] Aicha Harrat (2018). *Systèmes d'évolution abstraits d'ordres fractionnaires et leurs applications*. Thèse de Doctorat. Université 8 Mai 1945 Guelma.

[2] Ali Benlabbes (2016). *Sur des problèmes aux conditions aux limites et à dérivées fractionnaires*. Thèse de Doctorat. Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès.

[3] Ali Khalouta (2019). *Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques : extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire*. Thèse de Doctorat. Université Ferhat ABBAS SETIF1.

[4] Brahim Tellab (2018). *Résolution des équations différentielles fractionnaires*. Thèse de Doctorat. Université des Frères Mentouri Constantine1.

[5] Kamel Haouam (2007). *Existence et non-existence de solutions des équations différentielles fractionnaires*. Thèse de Doctorat. Université Mentouri Constantine1.

[6] Tidjani Menacer (2014). *Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires*. Thèse de Doctorat. Université Mentouri-Constantine1.

[7] Xia Yang , Haibo Gu (2014). *Complete controllability for fractional evolution equations. Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis.*

Annexe A : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\Gamma(z)$	:	La fonction Gamma de la variable z
$B(p,q)$	:	La fonction Bêta de variable p et q
$E_{\alpha}(z)$	:	La fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre
$E_{\alpha,\beta}(z)$	:	La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres
$I_a^{\alpha} f(x)$	:	Intégrale fractionnaire d'ordre α
${}^{GL}D^{\alpha} f$	:	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Grünwald-Letnikov de la fonction f
${}^{RL}D_a^{\alpha} f$	:	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Riemann-Liouville de la fonction f
${}^{C}D^{\alpha} f$	:	La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f
lim		Limite
$\frac{d^n}{dt^n}$	:	La dérivée partielle d'ordre n par rapport à la variable t
$C([a,b])$	:	L'espace des fonctions f continues sur $[a,b]$
$C^n([a,b])$	:	L'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre n continues sur $[a,b]$

Résumé

L'analyse fractionnaire est une branche de l'analyse mathématique qui étudie la possibilité de définir des puissances non entières des opérateurs de dérivation et d'intégration.

D'abord, Nous définissons certaines fonctions utiles telles que la fonction Gamma, la fonction Béta et la fonction de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire. Ensuite, nous présenterons la définition d'une dérivée fractionnaire puis on étudie les trois approches des dérivés fractionnaires les plus populaires: l'approche de Grünwald-Letnikov, de Riemann-Liouville et de Caputo ainsi que leurs propriétés.

Enfin, nous étudions quelques exemples des dérivés fractionnaires.

Mots clé: Dérivation fractionnaire, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo.

ملخص

التحليل الكسري هو فرع من فروع التحليل الرياضي الذي يدرس إمكانية تحديد قوى غير صحيحة للاشتقاق والتكامل.

أولاً، نعرّف بعض الدوال المفيدة مثل دالة جاما، دالة بيطا ودالة ميتاج-لافلار، هذه الدوال تلعب دورًا هامًا في نظرية حساب التفاضل ذو الدرجة الكسرية. بعد ذلك سوف نقوم بتعريف المشتق ذو الدرجة الكسرية ثم ندرس الطرق الثلاثة الأكثر شيوعًا للمشتقات ذو الدرجة الكسرية: طريقة جرونوالد-لاتينكوف، طريقة ريمان-ليوفيل وطريقة كابوتو بالإضافة إلى خصائصها.

أخيرًا ، ندرس بعض الأمثلة على المشتقات ذو الدرجة الكسرية.

الكلمات المفتاحية: الاشتقاق ذو الدرجة الكسرية، جرونوالد-ليتنيكوف، ريمان ليوفيل، كابوتو.

Abstract

Fractional analysis is a branch of mathematical analysis which studies the possibility of defining non-integer powers of derivative and integrating operators.

First, we define some useful functions such as Gamma function, Beta function and Mittag-Leffler function. These functions play a very important role in the theory of fractional order differential calculus. Next, we will present the definition of a fractional derivative and then we study the three most popular approaches to fractional derivatives: the Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo approaches as well as their properties.

Finally, we study some examples of fractional derivatives.

Keywords: Fractional derivation, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo.