République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : Probabilités

Par

Talbi Ayoub

Titre :

Equations Différentielles Stochastiques

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	CHIGHOUB Farid	UMKB	Président
MCA.	YAKHLEF Samia	UMKB	Encadreur
MAA.	BENABBA Fadhila	UMKB	Examinatrice

juin 2021

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à :

Mes trés chers parents pour leurs sacrifices et leur soutien moral tout le long de mon cursus, ma chére mére qui m'a t conseillée, mon pére qui m'a encouragé.

A mes très frères et sœurs à qui je souhaite une grande réussite dans leurs vies.

A'toute la famille Talbi.

Tous mes amis.

A' tous ceux qui ont contribué, de loin ou de prés, à la réalisation de ce projet

Talbi Ayoub

.

REMERCIEMENTS

Je tiens premièrement à me prosterner, remerciant Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience pour terminer ce modeste travail.

Je remercie mon encadreur de mémoire Madame ***Yakhelef Samia*** *pour son suivi pour ses directives, ses lectures, et ses critiques constructives.*

Je tiens aussi à remercier tous les membres du jury qui vont certainement enrichir cette recherche et la rendre plus performante.

Je remercie également tous mes enseignants durant toutes mes années d'études.

Je remercie également tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je n'oublie pas de remercier toute ma famille et tous mes amis pour leur support.

Talbi Ayoub

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles (standard) gouvernent de nombreux phénomènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des « différentielles stochastiques » , ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (EDS). Les équations différentielles sont des équations

d'évolution du type

$$\dot{x}\left(t\right) = a\left(t, x\left(t\right)\right). \tag{1}$$

Ou l'inconnue est une fonction $x(t)$ qui doit vérifier une équation impliquant sa dérivée $\dot{x}$ et elle même. Les cas les plus simples sont les équations différentielles d'ordre 1 comme en (1) (seule la dérivée 1ère est impliquée) avec $a(t, x) = a + bx$ indépendant de t et affine par rapport a x. Symboliquement, l'équation (1) se réécrit

$$dx\left(t\right) = a\left(t, x\left(t\right)\right) dt \tag{2}$$

Cette équation modélise typiquement un système physique $(x(t))_{t\geq 0}$ qui évolue avec le temps de façon que x s'accroît, à la date t, selon le taux $a(t, x(t))$: Par exemple, avec $a(t; x) = a(t)x$, l'équation $dx(t) = a(t)x(t)dt$ modélise le cours d'un actif financier $x(t)$ soumis au taux d'intérêt variable $a(t)$ ou d'une population avec un taux de natalité $a(t)$. Il est bien connu que la solution est

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t a(s)\, ds\right).$$

Les EDS sont des généralisations des équations (2) où la dynamique déterministe d'évolution a est perturbée par un terme aléatoire (stochastique). On parle alors d'équation différentielle stochastique. En général la perturbation aléatoire est considérée comme un bruit, il est légitime de considérer que ce bruit est un processus gaussien et en général il est modélisé par un mouvement brownien B et une intensité de bruit $\sigma(t;x)$:

$$dx(t) = a(t, x(t))\, dt + \sigma(t, x)\, dB_t, \tag{3}$$

Où σ est une fonction du temps t et de l'inconnue au temps t (X_t) mais pourrait juste dépendre du temps (σ_t) ou de la valeur X_t en t $(\sigma(Xt))$ ou encore être constante. L'objectif de ce mémoire est de présenter la théorie des équations différentielles stochastique (EDS) et d'étudier l'existence et l'unicité de leur solution sous des conditions qui sont appliquées sur les coefficients a et σ .

Des liens importants existent entre les probabilités et les EDP via les processus stochastiques. Ceux-ci sont souvent relies à des opérateurs différentiels linéaires, ce qui permet d'exprimer les solutions de certaines EDP en termes de processus stochastiques. L'opérateur le plus simple est celui de Laplace $\triangle$ et il est directement relie au mouvement brownien. il ya plusieurs études sur les connexions entre le mouvement brownien et les équations liées au laplacien (équation de Laplace, problème de Dirichlet, équation de la chaleur, formule de Feynman-Kac).

Se mémoire est composée de deux chapitre :

- Le premier chapitre est consacrée a l'étude des EDS . On commence par étudie des cas simples d'EDS (i.e. linéaire et affine) où on donne la solution explicite pour ce type d'équations. Le cas affin est important car ces EDS apparaissent comme des linéarités d'EDS plus complexes qu'on ne sait pas toujours résoudre. Il y a beaucoup de résultats d'existence et d'unicité de solutions, on a choisi dans ce chapitre le théorème de Cauchy-Lipschitz qui traite le cas où les coefficients sont Lipchitzien et continus, on a donné une démonstration détaillé de ce théorème, la méthode utilisé provienne de la théorie des équations différentielles ordinaire (i.e. méthode de Picard) et pour finir on a étudié l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles linéaires uni et multidimensionnelles.

– Le deuxième chapitre est consacré au lien entre les EDS et les EDP. Dans ce chapitre on a donné le théorème (Formule de Feynman-Kac) L'intérêt d'une telle formule est de pouvoir donner une solution d'EDP sous forme d'espérance et comme application on a étudier les problèmes paraboliques et la connexion entre le mouvement brownien et les équations liées au laplacien (équation de la chaleur).

Chapitre 1

Equations Différentielles Stochastiques

1.1 Définitions et exemples

1.1.1 Motivation et définitions générales

Le but des équations différentielles stochastiques est de fournir un modèle mathématique pour une équation différentielle perturbée par un bruit aléatoire. Considérons une

équation différentielle ordinaire de la forme

$$X^{'} = b(X(t)),$$

soit encore sous la forme différentielle :

$$dX_t = b(X_t)dt.$$

Une telle équation est utilisée pour décrire l'évolution d'un système physique. Si l'on prend en compte les perturbations aléatoires, on ajoute un terme de bruit, qui sera de la forme σdB_t, où B_t désigne un Mouvement Brownien et σ est pour l'instant une constante qui correspond à l'intensité du bruit. On arrive à une équation différentielle "stochastique" de la forme :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma dB_t.$$

Ou encore sous forme intégrale, la seule qui ait un sens mathématique,

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \sigma B_t.$$

On généralise cette équation en autorisant σ à dépendre de l'état du système à l'instant t :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

Soit sous forme intégrale,

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s.$$

La solution d'une EDS, n'est pas en géneral aussi simple à déterminer. C'est pourquoi il existe des conditions sur les fonctions b et σ qui assurent l'existence et l'unicité de la solution de l'EDS. Pour être complétement général, on autorise b et σ à dépendre du temps t. On étudie donc l'EDS suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s. \tag{1.1}$$

Définition 1.1.1 *Soit d et m des entiers positifs, et soient b et σ des fonctions mesurables localement bornées définies sur $\mathbb{R}^+\times \mathbb{R}^d$ et à valeurs respectivement dans $M_{d\times m}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^d$,où $M_{d\times m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $d \times m$ à coefficients* *réel. On note* $\sigma(t,x) = (\sigma_{i,j}(t,x))_{1\leq i\leq d, 1\leq j\leq m}$ ***coefficient de diffusion*** *de l'EDS, et* $b(t,x) = (b_i(t,x))_{1\leq i\leq d}$ ***drift*** *de l'EDS.*

Une solution de l'équation

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \tag{1.2}$$

Définition 1.1.2 ***(Solution d'une EDS)*** *On appelle solution de l'EDS (1.2) la donnée de*

- *un espace de probabilité filtré* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, P\right)$ *satisfaisant les conditions habituelles ;*
- *un* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-mouvement brownien* $B = (B^1, ..., B^m)$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *défini sur cet espace de probabilité ;*
- *un processus* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$*-adapté continu* $X = (X^1, ..., X^d)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *tel que (1.1) soit vérifiée, c'est à dire, coordonnée par coordonnée, pour tout* $1 \leq i \leq d$ *:*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_i(s,X_s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sigma_{i,j}(s,X_s)dB_s^j.$$

Lorsque de plus $X_0 = x \in \mathbb{R}^d$*, on dira que le processus* X *est solution de (1.2)*

1.1.2 Exemples d'équations différentielles stochastiques

Les EDS affines admettent des solutions explicites qu'on peut obtenir comme dans le cas déterministe par la méthode de variation de la constante. Le cas affine est important car les EDS affines apparaissent comme des linéarisées d'EDS plus complexes qu'on ne sait pas toujours résoudre. On se place dans le cas réel, i.e. $d = m = 1$.

Exemple 1.1.1 *Supposons que* g *est une fonction continue (pas une Variable* *aléatoire). Puis la solution unique de*

$$\begin{cases} dX_t = g(t)\, X_t dB_t \\ X(0) = 1, \end{cases}$$

est

$$X_t = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t g^2(s)ds + \int_0^t g(s)dB_s},$$

pour $0 \leq t \leq T$.

Pour vérifier cela, notez que

$$Y_t = -\frac{1}{2}\int_0^t g^2(s)\, ds + \int_0^t g(s)\, dB_s$$

$$dY_t = -\frac{1}{2} g^2(t)\, dt + g(t)\, dB_t.$$

et donc $X_t = e^{Y_t}$.

Ainsi la formule d'Itô pour $u(x) = e^x$ *donne*

$$\begin{aligned} dX_t &= du(Y_t) = \tfrac{\partial u}{\partial x}(Y_t)\, dY_t + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(Y_t)\, g^2(t)\, dt \\ dX_t &= e^{Y_i}(\tfrac{-1}{2} g^2(t)\, dt + g(t)\, dB_t + \tfrac{1}{2} g^2(t)\, dt) \\ dX_t &= g(t)\, X_t dB_t. \end{aligned}$$

Exemple 1.1.2 (Equation de Langevin) *l'équation de Langevin, qui est sous la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t \\ X_0 = x\ . \end{cases} \tag{1.3}$$

Pour X_0 *donnée l'équation de Langevin possède une unique solution appelée processus Ornstein-Uhlenbeck est donnée par*

$$X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB_s.$$

Sans le terme σdB_t, l'équation (1.3) devient

$$dX_t = -\alpha X_t dt$$

$$\begin{aligned} dX_t = -\alpha X_t dt \;\Rightarrow \frac{dX_t}{X_t} &= -\alpha dt \\ \Rightarrow \int_0^t \frac{dX_s}{X_s} &= \int_0^t -\alpha ds \\ \Rightarrow \ln(X_t) &= -\alpha t \\ \Rightarrow X_t &= Ce^{-\alpha t}, \end{aligned}$$

d'où sa solution est

$$X_t = Ce^{-\alpha t}.$$

Pour tenir compte du terme B_t , on fait varier la constante C :

$$dC\left(t\right)e^{-\alpha t} - aC\left(t\right)e^{-\alpha t} = dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t,$$

d'où

$$dC\left(t\right)e^{-\alpha t} = \sigma dB_t$$

$$dC\left(t\right) = \sigma e^{\alpha t} dB_t$$

$$\int_0^t dC\left(t\right) = \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dB_s$$

$$C\left(t\right) = x_0 + \int_0^t \sigma e^{\alpha s} dB_s.$$

Alors la solution de l'équation (1.3) est

$$X_t = x_0 e^{-\alpha t} + \int_0^t \sigma e^{-\alpha(t-s)} dB_s.$$

Exemple 1.1.3 (Equation de Black et Scholes) *Soit l'EDS suivante*

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = x \ . \end{cases} \tag{1.4}$$

Sa solution est donnée par

$$X_t = X_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t) \ . \tag{1.5}$$

Cette équation est appelée équation de Black et Scholes.

Si X_t est le prix d'une action à l'instant t, il est possible de modéliser son évolution en supposant que $\frac{dX_t}{X_t}$ la variation relative du prix, évolue selon l'équation différentielle stochastique

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dB_t,$$

où μ et σ sont deux constantes appelées dérive et volatilité de l'action .

Alors

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad .$$

On suppose que $X_t > 0$

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dB_t.$$

On a

$$\int \frac{dX_t}{X_t} = \ln(X_t).$$

Posons $Y_t = \ln(X_t)$.

On applique la formule d'Itô on obtient

$$dY_t = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} G_t^2 dt,$$

tq $G_t = \sigma X_t$

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2} G^2 dt \\ &= \frac{1}{X_t}(\mu X_t dt + \sigma X_t dB_t\ ) - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}\sigma^2 X_t^2 dt \\ &= \mu dt + \sigma dB_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \\ &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Alors

$$d\ln(X_t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dB_t.$$

En intégrant et en reprenant l'exponentielle, on obtient donc

$$X_t = X_0 \exp((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t).$$

On obtient donc la solution (1.5).

Exemple 1.1.4 (Pont brownien) *La solution de l' EDS*

$$\begin{cases} dB_t = -\frac{B_t}{1-t} dt + dW_t \\ B_0 = 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

est

$$B(t) = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s, \qquad\qquad (0 \le t < 1).$$

Sans le terme dW_t, l'équation (1.6) devient $dB_t = -\frac{B_t}{1-t}dt$

$$\begin{aligned}
&dB_t = -\tfrac{B_t}{1-t}dt \\
&\Rightarrow \tfrac{dB_t}{B_t} = -\tfrac{1}{1-t}dt \\
&\Rightarrow \textstyle\int_0^t \tfrac{dB_t}{B_t} = \int_0^t -\tfrac{1}{1-t}dt \\
&\Rightarrow \ln(B_t) = \ln(1-t) \\
&\Rightarrow B_t = C(1-t),
\end{aligned}$$

d'où sa solution est

$$B_t = C(1-t).$$

Pour tenir compte du terme dW_t, on fait varier la constante C :

$$(dC(t))(1-t) - C(t) = dB_t = -\frac{B_t}{1-t}dt + dW_t \ ,$$

d'où

$$\begin{aligned}
&(dC(t))(1-t) = dW_t \\
&dC(t) = \tfrac{1}{1-t}dW_t \\
&\textstyle\int_0^t dC(t) = \int_0^t \tfrac{1}{1-s}dW_s \\
&C(t) = \textstyle\int_0^t \tfrac{1}{1-s}dW_s.
\end{aligned}$$

Alors la solution de l'équation (1.6) est

$$B(t) = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}dW, \qquad (0 \leq t < 1).$$

Exemple 1.1.5 (Processus Ornstein – Uhlenbeck) *Un meilleur modèle de brownien le mouvement est fourni par l'équation d'Ornstein – Uhlenbeck*

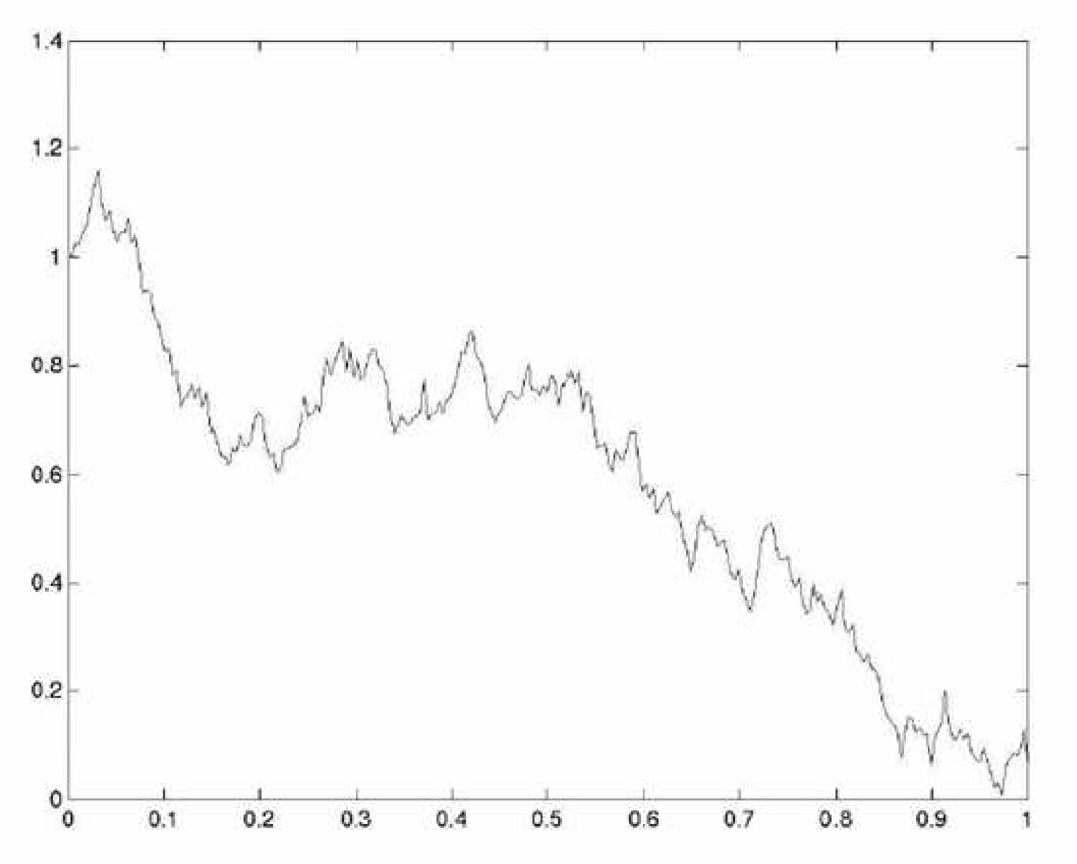
$$\begin{cases} Y_t^{''} = -bY_t^{'} + \sigma\xi_t \\ Y(0) = Y_0, \qquad Y^{'}(0) = Y_1 \end{cases}$$

où $Y(t)$ est la position de la particule brownienne au temps t, Y_0 et Y_1 sont donnés Variables aléatoires gaussiennes. Comme précédemment, $b > 0$ est le coefficient de frottement, σ est le coefficient de diffusion, et $\xi\ (.)$ comme d'habitude est «bruit blanc».

Alors $X = Y'$, le processus de vitesse, satisfait l'équation de Langevin

(Exemple 2 : Equation de Langevin)

$$\begin{cases} dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$



Une simulation de l'équation de Langevin

1.2 L'existence et l'unicité de la solution

Comme d'habitude pour les équations différentielles, les notions d'existence et d'unicité sont essentielles. Dans le contexte des EDS, il existe plusieurs types d'existence et d'unicité des EDS. Dans toute cette section, on considére l'EDS (1.2).

Notions d'existence et d'unicité

- 1.**Existence d'une solution faible** si (1.2) admet une solution X.
- 2. **Existence d'une solution forte** si (1.2) qui soit adaptée à la filtration du mouveemnt Brownien.
- 3. **Unicité faible** si tous les processus X solutions de (1.2) ont même loi.
- 4. **Unicité trajectorielle** si l'espace de probabilité et le Brownien étant fixés, deux solutions X et $X^{'}$ de (1.2) sont indistinguables

$$p(\exists t \in \mathbb{R} \mid X_t \neq X_t^{'}) = 0$$

L'exemple suivant montre que l'on peut avoir (1) et (3) (existence et unicité faible) mais ni (2) ni (4).

Exemple 1.2.1 *Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard. On considère le processus*

$$W_t = \int_0^t sgn(B_s)dB_s$$

où

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$$

puisque $sgn^2(x) = 1$ alors (W_t) est bien défini et (W_t) est une martingale continue de crochet t, par le théorème de Lèvy, (W_t) est un mouvement Brownien.

Considérons l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = sgn(X_t)dB_t \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

(W_t) *est solution de cette équation. On voit que toutes les solutions de cette équation sont des mouvements Browniens et sont égaux en loi (on existence et unicité faibles), mais* (4) *n'est pas vérifiée. Le processus* $-(W_t)$ *est aussi solution de l'équation*

$$P[W_t \neq -W_t] = P[2W_t \neq 0] = 1,$$

de sorte que (W_t) *et* $-(W_t)$ *sont deux processus solutions qui ne sont pas indistinguables.*

Théorème 1.2.1 (Yamada-Watanabe) *Supposons que l'équation* (1.2) *admette une solution faible et que toutes ses solutions soient indistinguables. Alors* (1.2) *admet une unique solution forte*

Théorème 1.2.2 *Soit* b *et* σ *deux fonctions mesurables , et* $T > 0$

$b(.,.) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\sigma(.,.) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$

on suppose qu'il existe une constante $K > 0$ *telle que pour tout* $t \in [0, T], X, Y \in \mathbb{R}^n$*, on a :*

– ***(1) Condition de Lipschitz***

$$|b(t, X_t) - b(t, Y_t)| \leq K|X - Y|,$$

$$|\sigma(t, X_t) - \sigma(t, Y_t)| \leq K|X - Y|,$$

– ***(2) Croissance linéaire***

$$|b(t, X_t)| \leq K(1 + |X|),$$
$$|\sigma(t, X_t)| \leq K(1 + |X|),$$

– ***(3) Condition sur la valeur initiale***

$$E[|X_0|^2] < \infty.$$

Alors l'EDS (1.2) possédé une solution unique dans l'intervalle $[0, T]$*. De plus cette solution* $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ *vérifie :*

$$E(\sup_{0 \leq t \leq T}(|X_t|^2)) < \infty.$$

L'unicité signifie que si X_t *et* Y_t *sont deux solutions de (1.2), alors* $P(X(t) = Y(t)$ *pour tous* $0 \leq t \leq T) = 1$

$$\forall 0 \leq t \leq T \qquad X_t = Y_t \qquad p.s.$$

1.2.1 Cas lipschitzien

Dans toute la suite, on suppose remplies les conditions suivantes :

Hypothéses lipschitiziennes : Les fonctions b et σ sont continues sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ et lipschitziennes en x, i.e. il existe une constante $K \in]0; +\infty[$ telle que pour tout $t \geq 0$ et $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$|b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|$$
$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

et $\int_0^T (|b(t, 0)|^2 + |\sigma(t, 0)|^2)dt < +\infty$ pour tout T où $|b|$ et $|\sigma|$ représentent la norme du vecteur b et de la matrice σ : On a alors

Théorème 1.2.3 *(Cauchy-Lipschitz pour EDS) Sous les hypothèses lipschitziennes, il y a unicité trajectorielle pour (1.2). De plus, pour tout espace de probabilité filtré* $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, P)$ *et tout* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *-mouvement brownien* B*, il existe pour chaque* $x \in \mathbb{R}^d$ *une unique solution forte de (1.2).*

Remarque 1.2.1 *On peut affaiblir l'hypothèse de continuité en* t*, celle-ci n'intervient esentiellement que pour majorer* $\sup_{0\leq t\leq T}|\sigma(t,x)|$ *et* $\sup_{0\leq t\leq T}|b(t,x)|$ *pour* x *fixé : on peut 'localiser'l'hypothèse lipschitzienne sur* b *et* σ *se considérés. Il faut alors conserver une condition de croissance sous-linéaire :*

$$|b(t, X_t)| \leq K(1 + |X|) \quad |\sigma(t, X_t)| \leq K(1 + |X|).$$

Comme pour les équations différentielles (ordinaires), la croissance sous-linéaire prévient l'explosion de la solution de l'EDS.

Preuve. Unicité trajectorielle.

On considère deux solution X et $X^{'}$ de (1.2) avec $X_0 = X_0^{'}$, définies sur le même espace et avec le même mouvement brownien B, Pour $M > 0$ fixé, on considère le temps d'arrêt

$$\tau = \inf(t \geq 0 : |X_t| \geq M, |X_t'| \geq M).$$

D'après (1.2) , on a alors pour tout $t \geq 0$:

$$X_{t\wedge\tau} = X_0 + \int_0^{t\wedge\tau} \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} b(s, X_s)ds$$

$$X_{t\wedge\tau}' = X_0' + \int_0^{t\wedge\tau} \sigma(s, X_s')dB_s + \int_0^{t\wedge\tau} b(s, X_s')ds.$$

On considère $t \in [0, T]$, Par différence, comme $X_0 = X_0'$ et comme X, X' sont bornées par M sur $]0; \tau]$, l'expression de la variance d'une intégrale stochastique L^2 l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les hypothèses lipschitziennes et la majoration

$(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ donnent

$$\begin{aligned}
E[(X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau})^2] &\leq 2(E[(\textstyle\int_0^{t\wedge\tau}\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X'_s))dB_s)^2]) \\
&+2(E[(\textstyle\int_0^{t\wedge\tau}b(s,X_s)-b(s,X'_s))ds)^2]) \\
&\leq 2(E[(\textstyle\int_0^{t\wedge\tau}(\sigma(s,X_s)-\sigma(s,X'_s))^2ds)]) \\
&+2T(E[(\textstyle\int_0^{t\wedge\tau}(b(s,X_s)-b(s,X'_s))^2ds)]) \\
&\leq 2K^2(1+T)E[\textstyle\int_0^{t\wedge\tau}(X_s-X'_s)^2]ds \\
&\leq 2K^2(1+T)E[\textstyle\int_0^{t}(X_{s\wedge\tau}-X'_{s\wedge\tau})^2]ds.
\end{aligned}$$

Si on pose $h(t)=E[(X_{t\wedge\tau}-X'_{t\wedge\tau})^2]$ et $C=2K^2(1+T)$,alors on a établi que h vérifie pour $t\in[0,T]$:

$$h(t)\leq C\int_0^t h(s)ds.$$

De plus, par définition de τ, la fonction h est bornée par $4M^2$, l'inégalité de Gronwall (lemme Gronwall) s'applique avec $\alpha=0$ et $b=C$, On obtient $h=0$, c'est à dire $X_{t\wedge\tau}=X'_{t\wedge\tau}$ $p.s.$ Finalement, en faisant $M\to+\infty$, on a $\tau\to+\infty$ et donc $X_t=X'_t$ $p.s.$ Les processus X et X' sont des modification à trajectoires continues, ils sont donc indistinguables, ce qui prouve l'unicité trajectorielle.

Existence forte

On procède comme pour les équations différentielles avec une méthode d'approximation de Picard. Pour cela, on pose

$$\begin{aligned}
&X_t^0 = x \\
&X_t^1 = x+\textstyle\int_0^t\sigma(s,x)dB_s+\int_0^t b(s,x)ds \\
&X_t^2 = x+\textstyle\int_0^t\sigma(s,X_s^1)dB_s+\int_0^t b(s,X_s^1)ds \\
&\;...=... \\
&X_t^n = x+\textstyle\int_0^t\sigma(s,X_s^{n-1})dB_s+\int_0^t b(s,X_s^{n-1})ds.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Les intégrales stochastique ci-dessus sont bien définies puisque par récurrence, on constate que, pour chaque n , X_t^n est continu et adapté donc localement borné si bien que le processus $\sigma(s, X_s^n)$ l'est aussi (hypothèse lipschitzienne) et l'intégrale correspondante bien définie.

On fixe maintenant $T > 0$ et on raisonne sur $[0, T]$. On prouve par récurrence qu'il existe C_n tel que, pour tout $t \in [0, T]$.

$$E[(X_t^n)^2] \leq C_n. \tag{1.8}$$

En effet, (1.8) est immédiate si $n = 0$ avec $C_0 = x$. Puis, on suppose que (1.8) est vraie au rang $n - 1$ avec

$$|\sigma(s, y)| \leq C + K|y| \ ,$$
$$|b(s, y)| \leq C + K|y| \ , \qquad s \in [0, T] \ , \ y \in \mathbb{R}.$$

Noter que par la croissance sous-linéaire de σ et l'hypothèse de récurrence (1.8), on a

$$E[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) ds] < +\infty.$$

On a donc

$$E[(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s)^2] = E[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds].$$

Comme $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'isométrie

L^2, et les hypothèse lipschitziennes, on majore comme suit

$$\begin{aligned} E[(X_t^n)^2] &\leq 3(|x|^2 + E[(\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})dB_s)^2] + E[(\int_0^t b(s, X_s^{n-1})ds)^2]) \\ &\quad \text{(convexité)} \\ &\leq 3(|x|^2 + E[\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1})^2 ds] + tE[\int_0^t b(s, X_s^{n-1})^2 ds]) \\ &\quad \text{(isométrie } L^2\text{, Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq 3(|x|^2 + 2(1+T)E[\int_0^t ((K')^2 + K^2 (X_s^{n-1})^2) ds]) \\ &\quad \text{(hypothèses lipshitziennes)} \\ &\leq 3|x|^2 + 2T(1+T)((K')^2 + K^2 C_{n-1}), \end{aligned}$$

ce qui établit (1.8) par récurrence.

La borne (1.8) et la croissance sous-linéaire de σ assurent alors que, pour chaque n, la martingale local $\int_0^t \sigma(s, X_s^n)dB_s$ est une vraie martingale bornée dans L^2 pour tout n. On utilisera ceci pour majorer par récurrence

$$E[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2].$$

On a

$$X_t^{n+1} - X_t^n = \int_0^t (\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1}))dB_s + \int_0^t (b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1}))ds,$$

d'où

$$\begin{aligned} E[\sup_{0 \leq s \leq t} |X_t^{n+1} - X_t^n|^2] \; &\leq 2E[\sup_{0 \leq s \leq t} |\int_0^s (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1}))dB_u|^2 \\ &+ \sup_{0 \leq s \leq t} |\int_0^s (b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1}))du|^2] \end{aligned}$$

(convexité)

$\leq 2(4E[(\int_0^t(\sigma(u,X_u^n)-\sigma(u,X_u^{n-1}))dB_u)^2]+E[(\int_0^t(b(u,X_u^n)-b(u,X_u^{n-1}))du)^2])$

(inégalité de Doob)

$\leq 2(4E[(\int_0^t(\sigma(u,X_u^n)-\sigma(u,X_u^{n-1}))^2du]+TE[(\int_0^t(b(u,X_u^n)-b(u,X_u^{n-1}))^2du)])$

(isométrie L^2, Cauchy-Schwarz)

$\leq 2(4+T)K^2E[\int_0^t|X_u^n-X_u^{n-1}|^2du]$

(hypothèses lipschitziennes)

$$\leq C_TE[\int_0^t \sup_{0\leq r\leq u}|X_r^n-X_r^{n-1}|^2du]. \tag{1.9}$$

Avec $C_T=2(4+T)K^2$, posons

$$g_n(u):=E[\sup_{0\leq r\leq u}|X_r^n-X_r^{n-1}|^2].$$

Ainsi on vient de montrer que

$$g_{n+1}(t)\leq C_T\int_0^t g_n(u)du. \tag{1.10}$$

D'autre part, $\forall n$, g_n est bornée sur $[0,T]$.

En effet, pour $n\geq 1$:

$$\begin{aligned} g_n(u) &\leq E[\sup\nolimits_{0\leq r\leq u}\ |X_u^n-X_u^{n-1}|^2] \\ &\leq E[\sup\nolimits_{0\leq r\leq u}\ (2(X_u^n)^2-2(X_u^{n-1})^2)] \\ &\leq 2(C_n+C_{n-1}), \end{aligned} \tag{1.11}$$

d'aprés (1.11) on a $g_1(t)\leq 2(C_1+C_0)=C_T^{'}$ Une récurrence simple sur (1.10) donne :

$$g_n(t)\leq C_T^{'}(C_T)^{n-1}\frac{t^n}{n!}.$$

Et, en vertu du critère de D'alembert, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(T)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

comme

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|] \right\|_2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n|] \right\|_2 = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(T)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

cela entraîne que $p.s$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{n+1} - X_t^n| < \infty,$$

et donc $p.s$ la suite $(X_t^n)_{t\in[0,T]}$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus limite $(X_t)_{t\in[0,T]}$ qui est continu. Comme par réccurrence, chaque X^n est adapté par rapport à la filtration canonique de B, X l'est aussi Les estimations (1.9) établissent aussi que

$$E[\sup_{0\leq s\leq T} |X_s - X_s^n|^2] \leq (\sum_{k=n}^{\infty} g_k(T)^{\frac{1}{2}})^2 \to 0, \qquad \text{quand} \ \ n \to \infty,$$

et on en déduit que

$$\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s = \lim_{n\to+\infty} \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s \ , \qquad \text{dans } L^2,$$

et

$$\int_0^t b(s, X_s) ds = \lim_{n\to+\infty} \int_0^t b(s, X_s^n) ds \ , \qquad \text{dans } L^2.$$

En effet,

$$\begin{aligned} E[(\textstyle\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,X_s^n)) dB_s)^2] &= E(\textstyle\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,X_s^n))^2 ds) \\ &\leq E(K^2 \textstyle\int_0^t |X_s - X_s^n|^2 ds) \end{aligned}$$

$$\leq T^2K^2E[\sup_{0\leq s\leq T}|X_s - X_s^n|^2] \to 0,$$

et on procède de la même manière pour b.

En passant à la limite dans l'équation de récurrence pour X^n (1.7), on trouve que X est une solution (forte) de (1.2) sur $[0, T]$. ■

Exemple 1.2.2 *On considére l'EDS suivante :*

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

avec μ et $\sigma \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$, on montre l'existence et l'unicité de la solution. Pour cela nous allons vérifier les conditions du théoréme, alors :

On a

$$\begin{aligned} |\mu X_t - \mu Y_t| + |\sigma X_t - \sigma Y_t| &= |\mu(X_t - Y_t)| + |\sigma(X_t - Y_t)| \\ &\leq |\mu||X_t - Y_t| + |\sigma||X_t - Y_t| \\ &\leq (|\mu| + |\sigma|)(|X_t - Y_t|) \\ &\leq K|X_t - Y_t|. \end{aligned}$$

D'où la condition de Lipschitz.

Et

$$\begin{aligned} &|\mu X_t| + |\sigma X_t| \leq |\mu||X_t| + |\sigma||X_t| \\ &\leq (|\mu| + |\sigma|)|X_t| \\ &\leq K|X_t|. \end{aligned}$$

D'où la condition de linéarité

On a X_0 constant $E(|X_0|^2) < \infty$.

1.3 Equations différentielles Stochastiques linéaires

Comme avec des équations ordinaires linéaires, la solution générale d'une équation stochastique linéaire peut être trouvée explicitement. La méthode de solution implique également un facteur d'intégration ou une solution fondamentale d'une équation homogène associée.

La formule générale d'une équation stochastique linéaire scalaire est :

$$dX_t = (A(t)X_t + C(t))dt + (b(t)X_t + \sigma(t))dW_t. \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} A(.),\ C(.) \in L^{\infty}[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ , \\ b(.),\ \sigma(.) \in L^2[0,T] \times \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où A, C, b, σ sont des fonctions du temps t mesurable et borné sur un intervalle $0 < t < T$. Quand $C(t) \equiv 0$ et $\sigma(t) \equiv 0$,(1.12) réduire au équation différentielle stochastique linéaire homogène :

$$dX_t = A(t)X_t dt + b(t)X_t dW_t. \tag{1.13}$$

Evidament $X_t \equiv 0$ est une solution de (1.13).

.

1.3.1 E.D.S. linéaires : Bruit additif

Coefficients constants : homogènes.

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t,$$

$$X_t = e^{-\alpha t}(X_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s).$$

Coefficients constants : non homogènes

$$dX_t = (\alpha X_t + b)dt + cdW_t$$

$$X_t = e^{\alpha t}(X_0 + \frac{b}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + c \int_0^t e^{-\alpha s} dW_s).$$

Coefficients variables :

$$dX_t = (\alpha(t)X_t + b(t))dt + c(t)dW_t,$$

$$X_t = \Phi_{t,t_0}(X_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} b(s)ds + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} c(s)dW_s),$$

où la solution fondamentale est :

$$\Phi_{t,t_0} = \exp(\int_{t_0}^t \alpha(s)ds).$$

Exemple 1.3.1 *Soit*

$$dX_t = (\frac{2}{1+t} X_t + k(1+t)^2)dt + k(1+t)^2 dW_t,$$

$$b(t) = c(t) = k(1+t)^2.$$

La solution fondamentale est :

$$\begin{aligned} \Phi_{t,t_0} &= \exp(\textstyle\int_{t_0}^t \alpha(s)ds) = \exp(\int_{t_0}^t \frac{2}{1+s} ds) \\ &= \exp(2\ln(\frac{1+t}{1+t_0})) = [\frac{1+t}{1+t_0}]^2, \end{aligned}$$

et la solution générale est :

$$\begin{aligned}
X_t &= [\tfrac{1+t}{1+t_0}]^2(X_{t_0} + \textstyle\int_{t_0}^t [\tfrac{1+t_0}{1+s}]^2 b(s)ds + \int_{t_0}^t [\tfrac{1+t_0}{1+s}]^2 c(s)dW_s) \\
&= [\tfrac{1+t}{1+t_0}]^2(X_{t_0} + \textstyle\int_{t_0}^t [\tfrac{1+t_0}{1+s}]^2 k(1+s)^2 ds + \int_{t_0}^t [\tfrac{1+t_0}{1+s}]^2 k(1+s)^2 dW_s) \\
&= [\tfrac{1+t}{1+t_0}]^2(X_{t_0} + \textstyle\int_{t_0}^t k(1+t_0)^2 ds + \int_{t_0}^t k(1+t_0)^2 dW_s) \\
&= [\tfrac{1+t}{1+t_0}]^2(X_{t_0} + k(1+t_0)^2 \textstyle\int_{t_0}^t ds + k(1+t_0)^2 \int_{t_0}^t dW_s) \\
&= [\tfrac{1+t}{1+t_0}]^2(X_{t_0} + k(1+t_0)^2(t-t_0) + k(1+t_0)^2(W_t - W_{t_0})) \\
&= [\tfrac{1+t}{1+t_0}]^2(X_{t_0} + k(1+t_0)^2(W_t - W_{t_0} + t - t_0)).
\end{aligned}$$

1.3.2 E.D.S. linéaires : Bruit multiplicatif

Coefficients constants : homogènes

$$dX_t = \alpha X_t dt + bX_t dW_t,$$

$$X_t = X_0 \exp((\alpha - \frac{1}{2}b^2)t + dW_t).$$

Coefficients constants : non homogènes

$$dX_t = (\alpha X_t + c)dt + (bX_t + d)dW_t,$$

$$X_t = \Phi_t[X_0 + (c - db)\int_0^t \Phi_s^{-1} ds + d\int_0^t \Phi_s^{-1} dW_s],$$

avec la solution fondamentale est :

$$\Phi_t = \exp((\alpha - \frac{1}{2}b^2)t + bW_t).$$

Coefficients non constants : homogènes

$$dX_t = \alpha(t)X_t + b(t)dW_t$$

$$X_t = X_0 \exp(\int_0^t (\alpha(s) - \frac{1}{2}b^2(s))ds + \int_0^t b(s)dW_s)$$

Coefficients non constants : non homogènes

$$dX_t = (\alpha(t)X_t + c(t))dt + (b(t)X_t + d(t))dW_t,$$

$$X_t = \Phi_{t,t_0}(X_{t_0} + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1}(c(s) - b(s))ds + \int_{t_0}^t \Phi_{s,t_0}^{-1} d(s)dW_s],$$

avec

$$\Phi_{t,t_0} = \exp(\int_{t_0}^t (\alpha(s) - \frac{1}{2}b^2(s))ds + \int_{t_0}^t b(s)dW_s).$$

1.3.3 Equations linéaires scalaires générales

Soit $m \geq 1$ la solution de

$$\begin{cases} dX = (d(t)X + c(t))dt + \sum_{i=1}^m (f^i(t)X + e^i(t))dW_s, \\ X(0) = x_0, \end{cases}$$

est

$$X(t) = \Phi(t)(X_0 + \int_0^t \Phi(s)^{-1}(c(s) - \sum_{i=1}^m e^i(s)f^i(s))ds) + \int_0^t \sum_{i=1}^m \Phi(s)^{-1}e^i(s)dW_s^i, \tag{1.14}$$

où

$$\Phi(t) := \exp(\int_0^t d - \sum_{i=1}^m \frac{(f^i)^2}{2}ds + \int_0^t \sum_{i=1}^m f^i dW_s^i).$$

Produit de deux processus stochastiques

Soient X_t^1 et X_t^2 deux processus qui admettent les différentielles stochastiques :

$$dX_t^i = e_t^i dt + f_t^i dW_t^i \qquad \text{pour } i = 1,2 \tag{1.15}$$

Soit $U(t, x_1, x_2) = x_1 x_2$ La différentielle stochastique du produit $Y_t = X_t^1 X_t^2$ se repose sur l'indépendance et la dépendance des deux processus de Wiener W^1et W^2 Dans le premier cas la différentielle (1.15) peut être mise sous la forme vectorielle :

$$d\begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_t^1 \\ e_t^2 \end{pmatrix} dt + \begin{bmatrix} f_t^1 & 0 \\ 0 & f_t^2 \end{bmatrix} d\begin{pmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \end{pmatrix},$$

et grâce à la formule d'ITô la différentielle du produit sera :

$$dY_t = (e_t^1 X_t^2 + e_t^2 X_t^1)dt + f_t^1 X_t^2 dW_t^1 + f_t^2 X_t^1 dW_t^2,$$

ou plus explicitement

$$dY_t = X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1,$$

Lorsque $W_t^1 = W_t^2 = W_t$, la différentielle du vecteur $X_t = \binom{X_t^1}{X_1^2}$ est :

$$d\begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_t^1 \\ e_t^2 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} f_t^1 \\ f_t^2 \end{pmatrix} dW_t$$

Par conséquent, la formule d'ITô donne :

$$\begin{aligned} dY_t &= (e_t^1 X_t^2 + e_t^2 X_t^1 + f_t^1 f_t^2)dt + (f_t^1 X_t^2 + f_t^2 X_t^1)dW_t \\ &= X_t^1(e_t^2 dt + f_t^2 dW_t) + X_t^2(e_t^1 dt + f_t^1 dW_t) + f_t^1 f_t^2 dt \\ \Longrightarrow dY_t &= X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1 + f_t^1 f_t^2 dt. \end{aligned}$$

Le terme $f_t^1 f_t^2 dt$ est le terme correcteur qui fait la différence par rapport au calcul différentiel ordinaire.

Quelques Méthodes de Résolution de EDS linéaire :

Exemple 1.3.2 *On considére l'EDS suivante :*

$$\begin{cases} dX_t = d(t)X_t dt + f(t)X_t dW_t, \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

Nous essaierons de trouver une solution ayant la forme du produit

$$X(t) = X_1(t)X_2(t),$$

où

$$\begin{cases} dX_1 = f(t)X_1 dW_t \\ X_1(0) = x_0 \ , \end{cases} \tag{1.16}$$

et

$$\begin{cases} dX_2 = A(t)dt + B(t)dW_t \\ X_2(0) = 1 \ . \end{cases} \tag{1.17}$$

Puis la formule d'ITô donne

$$\begin{aligned} dX &= dX_1 X_2 \\ &= X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + f(t)X_1 B(t)dt \\ &= f(t)X dW + (X_1 dX_2 + f(t)X_1 B(t)dt), \end{aligned}$$

d'après (1.16). Maintenant nous essayons de choisir A, B pour ça

$$dX_2 + f(t)B(t)dt = d(t)X_2 dt.$$

Pour cela, $B \equiv 0$ *et* $A(t) = d(t)X_2(t)$*. Ainsi* (1.17) *lit*

$$\begin{cases} dX_2 = d(t)X_2dt \\ X_2(0) = 1 \end{cases}$$

Ceci n'est pas aléatoire : $X_2(t) = e^{\int_0^t d(s)ds}$ *Puisque la solution de* (1.16) *est*

$$X_1(t) = X_0 e^{\int_0^t f(s)dW - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s)ds},$$

nous concluons que

$$X(t) = X_1(t)X_2(t) = X_0 e^{\int_0^t f(s)dW + \int_0^t d(s) - \frac{1}{2}f^2(s)ds},$$

une formule notée plus haut.

Exemple 1.3.3 *Considérons ensuite l'équation générale*

$$\begin{cases} X_t = (d(t)X_t + c(t))dt + (f(t)X_t + e(t))dW_t \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

Comme ci-dessus, nous essayons une solution de la forme

$$X(t) = X_1(t)X_2(t),$$

où

$$\begin{cases} dX_1 = d(t)X_1dt + f(t)X_1dW_t \\ X_1(0) = 1, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} dX_2 = A(t)dt + B(t)dW_t \\ X_2(0) = X_0. \end{cases}$$

les fonctions A, B à choisir. Puis

$$\begin{aligned} dX &= X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + f(t)X_1 B(t)dt \\ &= d(t)Xdt + f(t)XdW + X_1(A(t)dt + B(t)dW) + f(t)X_1 B(t)dt. \end{aligned}$$

D'où

$$X_1(A(t)dt + B(t)dW) + f(t)X_1B(t)dt = c(t)dt + e(t)dW,$$

et cette identité tiendra si nous prenons

$$\begin{cases} A(t) := [c(t) - f(t)e(t)](X_1(t))^{-1} \\ B(t) := e(t)(X_1(t))^{-1}, \end{cases}$$

où $X_1(t) = e^{\int_0^t f dW + \int_0^t d - \frac{1}{2} f^2 ds}$ *on a* $X_1(t) > 0$ *presque sûrement*

par conséquent

$$X_2(t) = X_0 + \int_0^t [c(s) - f(s)e(s)](X_1(s))^{-1} ds + \int_0^t e(s)(X_1(s))^{-1} dW_s.$$

En utilisant ceci et l'expression ci-dessus pour X_1*, nous arrivons à la formule, un cas de* (1.14) :

$$\begin{aligned} X(t) &= X_1(t)X_2(t) \\ &= e^{\int_0^t f dW + \int_0^t d - \frac{1}{2} f^2 ds} \\ &\times (X_0 + \textstyle\int_0^t \exp(-\int_0^s d(r) - \frac{1}{2} f^2(r) dr - \int_0^s f(r) dW_r)(c(s) - e(s)f(s))ds \\ &+ \textstyle\int_0^t \exp(-\int_0^s d(r) - \frac{1}{2} f^2(r) dr - \int_0^s f(r) dW_r) e(s) dW_r. \end{aligned}$$

1.3.4 Cas où le mouvement Brownien est uni-dimensionnel

On considère l'EDS linéaire suivante :

$$\begin{cases} dX_t = [A(t)X_t + b(t)]dt + [C(t)X_t + \sigma(t)]dB_t \\ X(0) = x, \end{cases} \tag{1.18}$$

où B_t est un mouvement Brownien uni-dimentionnel et soit :

$$\begin{cases} A(.),\ C(.) \in L^\infty[0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ b(.),\ \sigma(.) \in L^2[0,T] \times \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

cette équation admet une solution forte unique $X(.)$ représentée par :

$$X_t = \Phi_t\ x + \Phi_t \int_0^t \Phi_s^{-1}[b(s) - C(s)\ \sigma(s)]\ ds + \Phi_t \int_0^t \Phi_s^{-1}\ \sigma(s)\ dB_s,\ \ t \in [0,T], \tag{1.19}$$

où $\Phi_t(.)$ est la solution unique de l'équation suivante :

$$\begin{cases} d\Phi_t = A(t)\ \Phi_t\ dt + C(t)\ \Phi_t\ dB_t, \\ \Phi_t(0) = I. \end{cases} \tag{1.20}$$

Elle admet un inverse $\Phi_t^{-1} = \Psi_t$ qui satisfait :

$$\begin{cases} d\Psi_t = \Psi_t[-A(t) + C(t)^2]\ dt - \Psi_t\ C(t)\ dB_t, \\ \Psi_t(0) = I. \end{cases} \tag{1.21}$$

Preuve. On voit que (1.20) admet une solution unique $\Phi_t(.)$. Pour montré que l'inverse Φ_t^{-1} existe, soit $\Psi_t(.)$ la solution unique de (1.21).

En appliquant la formule d'Itô à $\Phi_t\Psi_t$ on obtient :

$$\begin{aligned} d(\Phi_t\Psi_t) &= \Phi_t d\Psi_t + \Psi_t\ d\Phi_t + d < \Phi., \Psi. >_t \\ &= \Phi_t[\Psi_t(-A(t) + C(t)^2)\ dt - \Psi_t\ C(t)\ \Phi_t\ dB_t] \\ &+ \Psi_t[A(t)\ \Phi_t\ dt + C(t)\Phi_t\ dB_t] \\ &- \Phi_t\Psi_t C^2(t)\ dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc : $\Phi_t\Psi_t = I$; celà nous donne :

$$\Psi_t = \Phi_t^{-1}.$$

Maintenant, en appliquant la formule d'Itô à $\Psi_t X_t$ où X_t est la solution unique de (1.18) on aura :

$$\begin{aligned} d(\Psi_t X_t) &= \Psi_t\ dX_t + X_t\ d\Psi_t + d < \Psi., X. >_t \\ &= \Psi_t[(A(t)\ X_t + b(t))\ \ dt + (C(t)X_t + \sigma(t))\ \ dB_t] \\ &+ X_t[(-A(t) + C(t)^2)\Psi_t\ dt - \Psi_t\ C(t)\ dB_t] \\ &- C^2(t)\ \Psi_t\ X_t\ dt + \sigma(t)\ C(t)\ \Psi_t\ dt \\ &= \Psi_t(b(t) - C(t)\ \sigma(t))\ dt + \Psi_t\ \sigma(t)\ dB_t. \end{aligned}$$

On obtient alors (1.19) en utilisant le fait que : $\Psi_t = \Phi_t^{-1}$. ■

1.3.5 Le cas où le mouvement Brownien est d-dimentionnel

on va parler maintenant du cas où $B(.)$ est de dimention d.

Dans ce cas, on peut écrire l'équation différentielle comme suit :

$$\begin{cases} dX_t = [A(t)X_t + b(t)]\ dt + \sum_{j=1}^{d}[C^j(t)X_t + \sigma^j(t)]\ dB_t^j, \\ X(0) = x. \end{cases} \tag{1.22}$$

Soit Φ la solution de l'équation :

$$\begin{cases} d\Phi_t = A(t)\ \Phi_t\ dt + \sum_{j=1}^{d} C^j(t)\ \Phi_t\ dB_t^j, \\ \Phi(t_0, t_0) = I_d, \end{cases} \tag{1.23}$$

$$\Phi(t) := \exp(\int_0^t A(s) - \sum_{j=1}^{d} \frac{(C^j(s))^2}{2} ds + \int_0^t \sum_{j=1}^{d} C^j(s) dB^j).$$

La solution de (1.22) est donnée par

$$X(t) = \Phi(t)(x + \int_0^t \Phi(s)^{-1}(b(s) - \sum_{j=1}^{d} \sigma^j(s) C^j(s)) ds) + \int_0^t \sum_{j=1}^{d} \Phi(s)^{-1} \sigma^j(s) dB^j.$$

Similairement, on peut démontré que Φ^{-1} existe, et elle est la solution de :

$$\begin{cases} d\Psi_t = \Psi_t[-A(t) + \sum_{j=1}^{d} C^j(t)^2]\ dt - \sum_{j=1}^{d} \Psi_t\ C^j(t)^2\ dB_t^j, \\ \Psi(t_0, t_0) = I_d. \end{cases}$$

Cette équation (de l'inverse) a été obtenue par J.M. Bismut.

Chapitre 2

Lien entre les EDS et les EDP

2.1 Equations aux Dérivées Partielles

Le caractére particulier d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables

$$(x, y, ...) \mapsto u(x, y, ...).$$

Une EDP est alors une relation entre les variables et les dérivées partielles de u.

EDP

Dans le cas de deux variables, une EDP d'ordre 1 s'écrit

$$F(x, y, u(x, y), \partial_x u(x, y), \partial_y u(x, y)) = 0, \tag{2.1}$$

et une équation du second ordre' écrit

$$F(x, y, u(x, y), \partial_x u(x, y), \partial_y u(x, y), \partial_x^2 u(x, y), \partial_x \partial_y u(x, y)) = 0. \tag{2.2}$$

Plus généralement, on peut considérer des équations mettant en jeu des dérivées $\partial_x^{m_j}\partial_y^{n_j}u$. L'ordre d'une EDP est alors le plus grand ordre de dérivation $m_j + n_j$qui apparaît dans l'équation.

Résoudre une EDP dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ (d est le nombre de variables), c'est trouver une fonction suffisamment différentiable dans Ω telle que la relation (2.1), soit satisfaite pour toutes les valeurs des variables dans Ω.

Voici quelques exemples, trés simples a priori, d'EDP à deux variables. Certaines de ces EDP modélisent l'évolution au cours du temps de certains systémes, et il est d'usage de garder la notation t pour la variable temps.

- 1. $\partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = 0$ (une équation de transport);
- 2. $\partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = 0$ (une équation d'onde de choc) ;
- 3. $\partial_x\partial_y u(x,y) = 0$ (variante de l'équation des ondes) ;
- 4. $\partial^2_{xx}u(x,y) + \partial^2_{yy}u(x,y) = 0$ (l'équation de Laplace) ;
- 5. $\partial^2_{tt}u(t,x) = \partial^2_{xx}u(t,x)$ (l'équation des ondes ou des cordes vibrantes).

Comme pour les EDO, on parle d'EDP linéaires ou non-linéaires. Dans la liste ci-dessus, seule l'équation 3. est non-linéaire. Pour mieux comprendre de quoi il s'agit, il est commode de parler de l'opérateur aux dérivées partielles associé à une EDP. Il s'agit de l'application qui à une fonction u associe le membre de gauche de l'EDP. Par exemple l'opérateur associée à l'équation 1.

est $P_1 : u \mapsto \partial_x u + \partial_y u$, celui associée à l'équation (3) est $P_2 : u \mapsto \partial_x u + u\partial_y u$.

On dit que l'EDP est linéaire lorsque l'opérateur P qui lui est associé l'est, c'est à dire que, pour toutes fonctions u, v "gentilles" et

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, P(\alpha u + \beta v) = \alpha P(u) + \beta P(v).$$

C'est bien le cas pour P_1, et il est trés simple de vérifier que $P_3(\alpha u) \neq \alpha P_3(u)$ en général.

D'autre part on parle également d'EDP linéaire homogène lorsque la fonction nulle $u = 0$ est solution. En d'autres termes tous les termes de l'équation contiennent la fonction inconnue ou l'une de ses dérivées partielles. Toutes les équations linéaires ci-dessus sont homogènes, alors que l'EDP

$$\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u = f(x, y), \tag{2.3}$$

ne l'est pas ! Notons que l'opérateur aux dérivées partielles associé à (2.3) est $P_5 = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2$ comme pour l'équation 5. ci-dessus.

Comme pour les EDO, les EDP linéaires homogènes ont une propriété particulière, communément appelé principe de superposition : toute combinaison linéaire de solutions est encore une solution. Enfin lorsque l'on ajoute à une solution d'une EDP linéaire inhomogène une solution quelconque de l'EDP homogène associée, on obtient encore une solution de l'EDP inhomogène.

2.2 Lien avec les équations aux dérivées partielles

Remarque 2.2.1 *(formule d'Itô et générateur)*

On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *munit de la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$.

Soient $(W_t)_{t\in[0,T]}$ *un* $\mathcal{F}_t$ *processus de Wiener à valeurs dans* $\mathbb{R}^p$ *et* $(X_t)_{t\in[0,T]}$ *un processus d'Itô* $\mathcal{F}_t$ *mesurable à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *tel que*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i ds + \sum_{j=1}^{p} \int_0^t H_s^{i,j} dW_s^j \ , \qquad i \in \{1, ..., n\} \, .$$

En mettant sous forme différentielle avec $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$

$$df(t, X_t^1, ..., X_t^n) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t^1, ..., X_t^n)dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t^1, ..., X_t^n)dX_t^i$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t^1, ..., X_t^n) \sum_{m=1}^{p} H_t^{i,m} H_t^{j,m} dt.$$

Afin de se familiariser avec les notations qui seront utilisées plus tard, on considère que

$$dX = b(t, X)dt + \sigma(t, X)dW.$$

Ainsi sous forme intégrale on obtient

$$f(t, X_t^1, ..., X_t^n) = f(0, X_0^1, ..., X_0^n) + \int_0^t (\frac{\partial f}{\partial s} + \mathcal{L}f)ds + \int_0^t Df\sigma dW_s, \qquad (2.4)$$

avec $\mathcal{L}$ *le générateur tel que*

$$\mathcal{L}f = \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n} \alpha^{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{p} b^i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

où

$$\alpha^{i,j} = \sum_{m=1}^{p} \sigma^{i,m}\sigma^{j,m},$$

et

$$Df\sigma dW_s = \sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma^{i,m} dW_s^m.$$

Remarque 2.2.2 *si* $(X_t)_{t\in[0,T]} = (W_t)_{t\in[0,T]}$ *le processus de Wiener standard n-dimensionnel, on a*

$$\mathcal{L}f = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2}\triangle f,$$

où $\triangle f$ *est le laplacien de* f.

2.2.1 Problème de Cauchy

Théorème 2.2.1 *(Formule de Feynman-Kac)*

Soient $(W_t)_{t\in[0,T]}$ *un* $\mathcal{F}_t$*-processus de Wiener standard p-dimensionnelle sur un espace probabilisé* (Ω, F, P) *munit de sa filtration naturelle* $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ *et* $\{X_s^{t,x}, t \leq s \leq T\}$ *un processus d'Itô à valeur dans* $\mathbb{R}^n$ *partant de* x *à l'instant* t*, i.e la solution de l'EDS*

$$\begin{cases} dX_s^{t,x} = b(X_s^{t,x})ds + \sigma(X_s^{t,x})dW_s, & t \leq s \leq T, \\ X_t^{t,x} = x, \end{cases}$$

avec

$$b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
$$\sigma : \mathbb{R}^n \to M_{n\times p}(\mathbb{R}),$$

deux applications continues, lipschitziennes et à croissance sous linéaire. Alors pour $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *à support compact et* $c \in C(\mathbb{R}^n)$ *bornée,*

le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{L}_u + c(x)u = 0 & 0 \leq t < T, x \in \mathbb{R}^n \\ u(T,x) = g(x) \end{cases} \tag{2.5}$$

avec

$$\mathcal{L}_u = \sum_{i=1}^{p} b^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}^{n}(\sigma\sigma^T)^{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j},$$

admet une unique solution $u \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ *telle que*

$$u(t,x) := E[g(X_T^{t,x})e^{\int_t^T c(X_s^{t,x})ds}], \qquad 0 \leq t < T \;.$$

Ce théorème est applicable sous réserve que le problème (2.5) *admette une solution régulière satisfaisant la condition de croissance polynomiale*

(i.e u *est à croissance polynomiale si* $\exists M > 0, \exists \upsilon \geq 1$ *tels que*

$$\max_{0 \le t < T} |u(t,x)| \le M(1 + ||x||^{2v}).$$

Démonstration

On pose $Y_s = e^{Z_s}$ et $Z_s = \int_0^s c(X_r^{t,x})dr$, alors $dZ_s = c(X_s^{t,x})ds$ et d'après la formule d'Itô, $dY_s = c(X_s^{t,x})Y_s ds$. On va à présent calculer $d(u(s, X_s^{t,x})e^{Z_s})$, $s \in [t,T],$:

$$d(u(s, X_s^{t,x})e^{Z_s}) = d(u(s, X_s^{t,x})Y_s),$$

on a

$$\begin{aligned} d(u(s, X_s^{t,x})e^{Z_s}) &= Y_s du(s, X_s^{t,x}) + u(s, X_s^{t,x})dY_s \\ &= Y_s du(s, X_s^{t,x}) + u(s, X_s^{t,x})c(X_s^{t,x})Y_s ds. \end{aligned}$$

Il faut à présent calculer $du(s,X_s^{t,x})$. D'après l'égalité (2.4) mise sous forme différentielle, on a

$$du(s, X_s^{t,x}) = (\frac{\partial u(s, X_s^{t,x})}{\partial s} + \mathcal{L}u(s, X_s^{t,x}))ds + \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(s, X_s^{t,x})}{\partial x_i} \sigma^{im} dW_s^m.$$

Or, u est solution du problème (2.5) d'où $\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = -cu$, $t \le s \le T$. Donc

$$du(s, X_s^{t,x}) = -c(X_s^{t,x})u(s, X_s^{t,x})ds + \sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(s, X_s^{t,x})}{\partial x_i} \sigma^{im} dW_s^m,$$

on peut alors écrire que

$$d(u(s, X_s^{t,x})Y_s) = -c(X_s^{t,x})u(s, X_s^{t,x})Y_s ds + Y_s(\sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(s, X_s^{t,x})}{\partial x_i} \sigma^{im} dW_s^m) + u(s, X_s^{t,x})c(X_s^{t,x})Y_s ds,$$

d'où

$$d(u(s, X_s^{t,x})Y_s) = Y_s(\sum_{m=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(s, X_s^{t,x})}{\partial x_i} \sigma^{im} dW_s^m).$$

On intègre maintenant sur $[t, T]$, on obtient

$$u(T, X_T^{t,x})Y_T - u(t, X_t^{t,x})Y_t = \int_t^T Y_s(\sum_{m=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(s, X_s^{t,x})}{\partial x_i}\sigma^{im} dW_s^m).$$

Or, l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle et l'espérance de u existe de par sa croissance polynomiale. Alors

$$E[u(t, X_t^{t,x})] = E[\frac{u(T, X_T^{t,x})Y_T}{Y_T}],$$

et enfin, puisque $u(t, X_t^{t,x})$ est déterministe et que par définition $Y_t = \exp(Z_t)$, on a

$$u(t, x) = E[g(X_T^{t,x})e^{\int_t^T c(X_s^{t,x})ds}].$$

2.2.2 Problème parabolique

On considère l'opérateur

$$Af(t, x) = f_t^{'}(t, x) + \mathcal{L}f(t, x),$$

où $\mathcal{L}$ est le générateur infinitésimal du processus X solution de l'EDS

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)dS + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \ .$$

On cherche les solutions du problème parabolique suivant :

$$\begin{cases} Af(t, x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}, t \in [0, T] \\ f(T, x) = g(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.6}$$

où g est une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si f est une solution de (2.6) et si pour $u \geq t \geq 0$ on note $X_u^{t,x}$ une solution de

$$X_u^{t,x} = X_t^{t,x} + \int_t^u b(s, X_s^{t,x})ds + \int_t^u \sigma(s, X_s^{t,x})dB_s, \tag{2.7}$$

avec pour condition initiale $X_t^{x,t} = x$.

on applique la formule d'Itô

$$\begin{aligned}
df(s, X_s^{t,x}) &= \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^{t,x})ds + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s^{t,x})dX_s^{t,x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s^{t,x})\sigma(s, X_s^{t,x})^2 ds \\
&= \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^{t,x})ds + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s^{t,x})(b(s, X_s^{t,x})ds + \sigma(s, X_s^{t,x})dB_s) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s^{t,x})\sigma(s, X_s^{t,x})^2 ds \\
&= \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s^{t,x})ds + \mathcal{L}f(s, x) + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s^{t,x})\sigma(s, X_s^{t,x})dB_s \\
&= Af(s, x) + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s^{t,x})\sigma(s, X_s^{t,x})dB_s \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s^{t,x})\sigma(s, X_s^{t,x})dB_s,
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(u, X_u^{t,x}) = f(t, x) + \int_t^u f_x^{'}(s, X_s^{t,x})\sigma(u, X_u^{t,x})dB_s.$$

En faisant $u = T$ en particulier, on en déduit que :

$$g(X_T^{x,t}) = f(t, x) + \int_t^T f_x^{'}(s, X_s^{x,t})\sigma(s, X_s^{x,t})dB_s.$$

Si $f_x^{'}$ et σ vérifient des conditions d'intégrabilité suffisantes, alors l'intégrale stochastique est une vraie martingale.

On en déduit une importante représentation probabiliste de la solution de (2.6)

$$\begin{aligned}
f(t, x) &= E[g(X_T^{x,t})] \\
&= E_{x,t}[g(X_T)],
\end{aligned}$$

où X est solution de (2.7) prise sous la probabilité $P_{x,t}$ qui est telle que le processus

X prend la valeur x à l'instant t.

Problème plus général

$$\begin{cases} Af(t,x) = \alpha f(t,x), & \forall x \in \mathbb{R}, t \in [0,T],\ \alpha > 0, \\ f(T,x) = g(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.8}$$

Si f est solution de (2.8),la formule d'Itô entre t et T

$$\begin{aligned} df(s,X_s^{x,t})e^{-\alpha s} &= (\frac{\partial f}{\partial s}(s,X_s^{t,x})e^{-\alpha s} - \alpha f(s,X_s^{t,x})e^{-\alpha s})ds + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s^{t,x})e^{-\alpha s}\sigma(s,X_s^{t,x})^2 ds \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s^{t,x})e^{-\alpha s}dX_s^{t,x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial s}(s,X_s^{t,x})e^{-\alpha s}ds - \alpha f(s,X_s^{t,x})e^{-\alpha s}ds + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s^{t,x})e^{-\alpha s}\sigma(s,X_s^{t,x})^2 ds \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s^{t,x})e^{-\alpha s}(b(s,X_s^{t,x})ds + \sigma(s,X_s^{t,x})dB_s) \\ &= e^{-\alpha s}(\frac{\partial f}{\partial s}(s,X_s^{t,x})ds + \mathcal{L}f(s,x) - \alpha f(s,X_s^{t,x})ds + \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s^{t,x})\sigma(s,X_s^{t,x})dB_s) \\ &= e^{-\alpha s}\frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s^{t,x})\sigma(s,X_s^{t,x})dB_s, \end{aligned}$$

$$e^{-\alpha T}f(T,X_T^{t,x}) = e^{-\alpha t}f(t,x) + \int_t^T e^{-\sigma\alpha s}f_x'(s,X_s^{t,x})\sigma(s,X_s^{t,x})dB_s.$$

Sous des conditions d'intégrabilité sur f_x' et σ l'intégrale stochastique est une martingale et on en déduit la représentation probabiliste :

$$f(t,x) = E_{x,t}[e^{\alpha(t-T)}g(X_T)].$$

2.2.3 Equation de la chaleur et mouvement brownien

Définition 2.2.1 *Soit l'équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2} \triangle u = 0, & t \in]0; +\infty[, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.9}$$

où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On définit le noyau de la chaleur par

$$K(t, x) := \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \tag{2.10}$$

où $x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ est le produit scalaire de x avec lui même. Le noyau de la chaleur est une solution fondamentale (ou fonction de Green) de l'opérateur $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\triangle u$ de l'équation de la chaleur. Il permet de résoudre explicitement le problème (2.9). En effet, on a

$$u(t, x) := \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x - y) g(y) dy,$$

solution de (2.9).

Remarque 2.2.3 *Soit X une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et de densité f_x Pour toute fonction borélienne $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $\varphi \circ X \in L^1(\Omega, F, P)$, on rappelle que l'espérance de $\varphi \circ X$ est donnée par*

$$E[\varphi \circ X] = E[\varphi(X)] := \int_{\Omega} \varphi(X) dP.$$

Ou par le théorème de transfert

$$E[\varphi(X)] := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(X) dP_X(x),$$

$$E[\varphi(X)] := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(X) f_X(x) dx.$$

Exemple 2.2.1 *Soit X une v.a gaussienne à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de vecteur moyen m et de matrice de covariance Γ i.e $X \sim N_n(m, \Gamma)$. On rappelle que si Γ est inversible, X admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ noté*

$$f_x(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det \Gamma)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-1}{2}(x-m)^t\Gamma^{-1}(x-m)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Alors pour $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction borélienne, on a

$$E[\varphi(X)] := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) f_X(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det \Gamma)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-1}{2}(y-m)^t\Gamma^{-1}(y-m)} dy.$$

Notation 2.2.1 *Soit $(W_t)_{e\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement brownien standard n-dimensionnelle sur un espace probabilisé (Ω, F, P) munit de sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$. On note P_x la mesure correspondant à la condition*

$$B_0 = x + W_0 = x,$$

i.e P_x est la loi du processus $B_t = x + W_t$. On sait que W_t est d'espérance 0et de variance tI, alors $x + W_t$ est de moyenne x et de variance tI où I désigne la matrice identité de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.On considère à présent le problème (2.5)avec $c := 0$ et le processus d'Itô $(X_t)_{e\in\mathbb{R}^+} = (B_t)_{e\in\mathbb{R}^+}$. On a

alors d'après la remarque (2.2.2), le problème (2.5) qui est équivalent au problème (2.9) à la condition initiale près.

Proposition 2.2.1 *La solution $u \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ de l'équation de la chaleur (2.5) est donnée par*

$$u(t, x) := E_x[g(x + W_t)], \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Preuve. On a vu que la solution u_1 de (2.9) est donné par le noyau de la chaleur

$$u_1(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x-y) g(y) dy,$$

en utilisant l'expression (2.10) de k on a

$$u_1(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy.$$

Soit u_2 la solution donnée, en posant $x+W_t = B_t$ et d'après la remarque précédente, on a

$$u_2(t,x) = E_x[g(B_t)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det tI_n)^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{-1}{2}(y-x)^t tI_n^{-1}(y-x)} dy,$$

car $B_t \sim N_n(x; tI)$, ainsi

$$u_2(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} dy,$$

et donc

$$u_2(t,x) = u_1(t,x).$$

■

Conclusion

Ce travaille est consacré aux équations différentielles stochastiques (EDS), lien entre EDS et EDP.

on a donné quelques définitions de base concernant aux équations différentielles stochastiques, nous avons étudié en détaille le cas lipschitzien dans lequel des résultats forts d'existence et d'unicité des solutions peuvent être obtenus pour cet EDS, on a étudié des cas simples d'EDS (i.e linéaire) où on donne la solution explicite pour ce type d'équations, on a vu comment on pouvait donner la solution d'une EDP grâce à une EDS. Il est assez simple de concevoir que des phénomènes physiques concrets soient soumis à une part d'aléas couramment appelée bruit. En e et, pour des problèmes de la vie courante, les conditions réelles ne sont pas aussi "parfaites" que peuvent l'être les hypothèses d'un problème mathématique. Ainsi, lorsque qu'on étudie un phénomène, on modélise le bruit grâce au mouvement brownien pour se rapprocher aux mieux de la situation réelle.

Bibliographie

[1] Jeanblanc, M. Université d'Evry (2006).Cours de Calcul stochastique.

[2] Jean-Christophe Breton, Calcul stochastique M2 Mathématiques, Université de Rennes 1 Octobre–Décembre 2020

[3] Jeanblanc, M. et Simon, T. , Eléments de calcul stochastique, cours, IRBID, septembre (2005)

[4] Jeanblanc, M. , Exercices de calcul stochastique DESS IM Evry, option nance. Université d'EVRY octobre (2005)

[5] Helffer, B. Université Paris-Sud (2007). Introduction aux Equations aux Dérivées Partielles, P. 12-14.

[6] Lawrence C. UC Berkeley. Evans,An Introduction to Stochastic Differential Equations..

[7] Bernt Oksendal. Springer-Verlag. Stochastic differential equations.

[8] Fabien, C. Université de Provence. (1994), Processus de Diffusion, P. 57-75.

[9] Ikeda, N. Osaka University and Shinzo Watanabe, Kyoto University (1988).Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes, P. 159-189.

[10] MOHAMED, H. Memoire de Magister, Université Boumerdès (2009). Processus Stochastiques et Equations aux Derivees Partielles,P. 28-30.

[11] Ahmed, S. Memoire de Magister, Université Boumerdes (2007). Processus de Diffusion et Equations Diffrentielles Stochastiques – Aspects Theorique et Numerique -Applications , P. 39-52.

[12] Méléard, S. Université Paris 10, Modalx. Mouvement brownien et calcul stochastique, P. 12-21

[13] Mahieddine, Z. Mémoire de Magister, Université Boumerdès (2010). Discrétisations et résolutions numériques des équations différentielles stochastiques rétrogrades, P. 24-32

[14] Lawrence, C. Evans. University of California, Berkeley. An Introduction to Stochastic Differential Equations.

[15] Berglund, N.(2005).Introduction aux equations différentielles stochastiques.

[16] Abdelkader, A. Mémoire de Magister,Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (2008). Etude d'un Modèle d'Equations Différentielles Stochastiques Couplées - Application Actuarielle.

Annexe A :

Formule d'Itô

Théorème 2.2.2 (Formule d'Itô) *Un processus d'Itô réel X de décomposition*

$$dX_t = Fdt + GdB_t,$$

pour $F \in L^1(0,T), G \in L^2(0,T)$.

Supposons $u : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ est continue et que $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ existent et sont continus

$$Y(t) = u(X(t),t).$$

Alors Y est le différentiel stochastique

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{\partial u}{\partial t}(X(t),t)dt + \frac{\partial u}{\partial x}(X(t),t)dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X(t),t)G^2dt \qquad (2.11) \\ &= (\frac{\partial u}{\partial t}(X(t),t) + \frac{\partial u}{\partial x}(X(t),t)F + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(X(t),t)G^2)dt + \frac{\partial u}{\partial x}(X(t),t)GdB_t \end{aligned}$$

On appelle (2.11) la formule de Itô ou la règle de chaîne de Itô

Soit $X(.) = B(.), u(x) = x^m$. Ensuite $dX_t = dB_t$.

Par conséquent, la formule de Itô donne

$$d(B_t^m) = mB_t^{(m-1)}dB_t + \frac{1}{2}m(m-1)B_t^{(m-2)}dt$$

En particulier le cas $m = 2$

$$d(B_t^2) = 2B_t dB_t + dt$$

Cet intégré est

$$\int_s^r B_t dB_t = \frac{B_t^2(r) - B_t^2(s)}{2} - \frac{(r-s)}{2}$$

Lemme 2.2.1 (Gronwall) ***(Forme intégrale)*** *Soient* $T > 0$ *et* Φ *une fonction positive mesurable bornée sur* $[0, T]$, *On suppose qu'il existe des constantes* $\alpha \geq 0, b \geq 0$ *telles que pour tout* $t \in [0, T]$, *on a*

$$\Phi(t) \leq \alpha + b\int_0^t \Phi(s)ds.$$

Alors on a $\Phi(t) \leq \alpha \exp(bt)$ *pour tout* $t \in [0, T]$.

En particulier, si $\alpha = 0$ *et* $\Phi \geq 0$ *alors* $\Phi = 0$.

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soient f, g deux fonctions de carreés intégrable, alors on a

$$E(fg) \leq \left(E(f^2)E(g^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: espace de probabilité.

$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t\geq 0}, P\right)$: espace de probabilité filtré

$\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$: filtration

$\mathbb{R}^d$: l'espace réel euclidien de dimension d.

I_d : matrice identité $d \times d$.

$\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^d$: l'ensemble des matrices réelles $n \times d$.

$B^j(t)$: la $j^{ièm}$ composante de $B(t)$.

$\sigma^j(t, X)$: la $j^{ièm}$ colonne de $\sigma(t, X)$.

$P - p.s$: presque surement pour la mesure de probabilité P.

$E(.)$: L'espérence parrapport à la probabilté P.

$sign(a)$: $sign(x) = +1; 1; 0$ selon que a est positif, négatif, nul, respectivement.

$s \wedge t$: $\min(s; t)$

Résumé

Le but de ce travail est de présenter la théorie des équations différentielles stochastiques(EDSs) et leur lien avec les EDP. Nous avons exposé la démonstration du théorème Cauchy-Lipschitz qui assure l'existence et l'unicité des solutions concernant ce type d'équations. On a aussi donné la formule de Formule de Feynman-Kac dont L'intérêt est de pouvoir donner une interprétation probabiliste d'une solution d'EDP sous forme d'espérance et comme application on a étudié les problèmes paraboliques et la connexion entre le mouvement brownien et les équations liées au laplacien (équation de la chaleur).

Abstract

The aim of this work is to present the theory of stochastic differential equations (EDSs) and their link with PDEs. We have exposed the proof of the Cauchy-Lipschitz theorem which ensures the existence and the uniqueness of the solutions concerning this type of equations. We have also given the formula of Feynman-Kac Formula whose interest is to be able to give a probabilistic interpretation of a solution of PDE in the form of expectation and as an application we have to study the parabolic problems and the connection between the motion Brownian and Laplacian equations (heat equation).

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تقديم نظرية المعادلات التفاضلية العشوائية وارتباطها مع المعدلات ذات المشتقات الجزئية. ولقد قدمنا نظرية كوشي ليبشيتز التي تضمن وجود و وحدانية الحل بالنسبة لهذا النوع من المعادلات. لقد قدمنا أيضًا صيغة فاينمان كاك التي تتمثل اهتماماتها في أن تكون قادرًا على إعطاء تفسير احتمالي لحل المعدلات ذات المشتقات الجزئية في شكل توقع وكتطبيق درسنا المشكلات المكافئة والعلاقة بين الحركة البراونية ومعادلات لابلاس (معادلة الحرارة).