

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par

**Ahlam Bekhoucha**

Titre :

**Contrôle feedback d'un système chaotique d'ordre  
fractionnaire**

Membres du Comité d'Examen :

Dr. <b>Hassouna Houda</b>	UMKB	Président
Dr. <b>Senouci Assia</b>	UMKB	Encadreur
Dr. <b>Bouziane Nadjette</b>	UMKB	Examinatrice

Juin 2021

## Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

A mes très chers parents

Aucune dédicace, aucun mot ne pourrait exprimer à leur juste valeur la gratitude et

l'amour que je vous porte.

Je mets entre vos mains, le fruit de longues années d'études, de longs mois de

distance de votre Amour de votre tendresse, de longs jours d'apprentissage.

Grâce à vous, votre soutien et votre encouragement m'ont toujours donnée de la

force pour persévérer et pour prospérer dans la vie.

Chaque ligne de cette recherche, chaque mot et chaque lettre vous exprime la

reconnaissance, le respect, l'estime et le merci d'être mes parents.

A vous chers mes frères et sœurs : Seddam , Amel , Iman , Nour ,Kods , Balkiss .

A les enfants de ma sœur Mmd Djad Acil et Djouri , et leur père Mossadegh.

A toute ma famille, et tous mes amis, qui de près ou de loin m'ont supporté,

soutenu et encouragé tout au long de ces années.

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah, le tout puissant de m'avoir donné la santé,  
la volonté et la patience pour mener à terme ce travail.

A mes chers parents, pour leur amour, leur sacrifices, leur tendresse, leur soutien  
tout au long de mes étude.

A ma encadratrice Dr : **Senouci Assia**

Votre compétence ,votre encadrement ont toujours suscité mon profond respect.

Je vous remercie pour votre à cueille et vos conseils.

Veillez trouver ici ,l'expression de mes gratitudes et de ma grand estime.

Aux membres du jury

Président du jury : **Hassouna Houda**

Examineur : **Bouziane Nadjette**

Messieurs les jurys , vous nous faites un grand honneur.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>vi</b>
<b>Liste des tables</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Calcul fractionnaire</b>	<b>3</b>
1.1 Outils de base . . . . .	4
1.1.1 Fonction Gamma . . . . .	4
1.1.2 Fonction Bêta . . . . .	5
1.1.3 La fonction Mittag-leffler . . . . .	5
1.1.4 Formule de Dirichlet . . . . .	6
1.1.5 Formule de Riemann . . . . .	6
1.2 Intégrale fractionnaire . . . . .	7
1.2.1 l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville . . . . .	7
1.3 Approche de dérivées fractionnaire . . . . .	9

1.3.1	Approche de dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov	9
1.3.2	Approche de dérivée de Riemann-liouville	10
1.3.3	Propriétés d'approche de R-L	11
1.3.4	Lient entre les dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov et de Riemann-Liouville	12
1.3.5	Approche de dérivée de Caputo	13
1.3.6	Propriétés d'approche de Caputo	13
1.3.7	Lien entre dérivée fractionnaire de R-L et de Caputo	14
<b>2</b>	<b>Système dynamique chaotique</b>	<b>15</b>
2.1	Système dynamique	15
2.2	Flot ou système dynamique	16
2.3	Trajectoire, Orbite et <i>point d'équilibre</i>	16
2.4	Théorie des bifurcation	17
2.4.1	Bifurcation noeud-col	17
2.4.2	Bifurcation transcritique	18
2.4.3	Bifurcation fourche(Pitchfork)	19
2.4.4	Bifurcation Hopf	21
2.5	Définition de chaos	22
2.6	Attracteurs	23
2.6.1	Les différents types d'attracteurs	23
2.7	Caractérisation du comportement chaotique	24
2.7.1	Caractérisation par des outils numériques quantitatifs	25
2.7.2	Caractérisation par des outils graphiques qualitatifs	25

<b>3</b>	<b>Contrôle feedback d'un système de Jerk d'ordre fractionnaire</b>	<b>28</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>28</b>
3.1	Modèles de systèmes contrôlés . . . . .	28
3.2	L'objectif de contrôle du chaos . . . . .	29
3.3	Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire . . . . .	31
3.4	<b>Contrôle feedback</b> . . . . .	32
3.5	Système de Jerk d'ordre fractionnaire . . . . .	33
3.5.1	la stabilité de point d'équilibre . . . . .	34
3.5.2	Contrôle feedback du système de Jerk . . . . .	35
	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>39</b>
	<b>Annexe A : Critère de Routh-Hurwitz dans le cas fractionnaire</b>	<b>42</b>

# Table des figures

1.1	L'allure de la fonction Gamma . . . . .	4
2.1	Bifurcation noeud-col . . . . .	18
2.2	Bifurcation transcritique . . . . .	19
2.3	Bifurcation fourche . . . . .	21
2.4	Bifurcation Hopf . . . . .	22
2.5	Attracteurs réguliers . . . . .	24
3.1	<i>Région de stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire</i> . . . . .	32
3.2	Le système 3.6 stable pour $\alpha = 0.8$ . . . . .	34
3.3	Le système 3.6 chaotique pour $\alpha = 0.88$ . . . . .	35
3.4	Les trajectoires du système contrôlé 3.7 stabilisé au point d'équilibre $E_2$ pour $\alpha = 0.98$ . . . . .	37
3.5	Les trajectoires du système contrôlé 3.7 nonstabilisé au point d'équi- libre $E_2$ pour $\alpha = 1$ . . . . .	38

# Liste des tableaux

2.1	Résumé des différents cas rencontrés . . . . .	25
2.2	Tableau récapitulatif des différents scénarios de transition vers le chaos	26

# Introduction

La théorie des systèmes dynamiques désigne couramment la branche des mathématiques qui s'efforce d'étudier les propriétés d'un système dynamique. Cette recherche active se développe à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités. La nature de cette étude est conditionnée par le système dynamique étudié et elle dépend des outils utilisés (analytiques, géométriques ou probabilistes).

Le chaos était considéré comme un phénomène n'intéressant que les mathématiciens, avec l'émergence du concept de chaos dans le comportement et la littérature scientifique, et après avoir découvert l'existence du chaos dynamique dans tous les domaines, qu'ils soient scientifiques ou techniques, dans divers systèmes mécaniques ou chimiques et autres systèmes, en plus de la biologie et de la médecine. ....etc, qui peuvent être utiles ou dangereux.

Depuis la découverte du chaos, il a été considéré comme un comportement incontrôlable et imprédictible en raison de l'effet des perturbations et à la sensibilité aux conditions initiales. L'article d'Ott, Grebogi et York (1990) est le premier article apporté de nouvelles idées et techniques qui utilisent la nature même du chaos pour le contrôler.

Les origines du calcul fractionnaire remontent à la fin du 17ème siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de définir des puissances non-entières des opérateurs d'intégration et de dérivation d'ordre non entier.

**Dans ce mémoire on introduit trois chapitres :**

Dans le premier chapitre, nous consacrons aux notions de l'intégrale fractionnaire et l'approche des dérivée fractionnaires. Les plus populaires et les plus pratiques (l'approche de Grünwald-Letnikov et de Riemann Liouville et celle de Caputo).

Nous présentons dans le deuxième chapitre est dédié au phénomène chaotique. Il introduit les définitions du chaos et ses outils de détection suivies par la présentation numérique et chémas.

Dans le troisième chapitre sommes nous donner, on étudie de problème de stabilisation des points d'équilibre, en plus de le contrôle de chaos du système de Jerk dans cas d'ordre fractionnaire.

# Chapitre 1

## Calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire à 300 ans d'existence mathématique, tout le long de ces années connaît les contributions de nombreux mathématiciens qui ont donné plusieurs approches et définitions.

Le calcul fractionnaire, décrit comme une extension du concept de l'opérateur de dérivation d'ordre entier  $n$  à un ordre arbitraire  $\alpha$  (réel ou complexe), a une longue histoire qui a débuté le 30 septembre 1695 quand la dérivée d'ordre  $\alpha = 1/2$  a été mentionnée par Leibniz. Depuis, nombreux sont les mathématiciens qui ont fourni des contributions importantes à ce sujet, citons entre autres L. Euler, P.S. Laplace, J. Fourier, J. Liouville, B. Riemann...., chacun utilisant ses propres méthodes et notations pour proposer différentes définitions de l'intégrale et/ou la dérivée fractionnaires. Les plus célèbres définitions sont celles de Riemann-Liouville et Caputo.

Dans ce chapitre nous parlerons de la généralisée du calcul fractionnaire.

## 1.1 Outils de base

### 1.1.1 Fonction Gamma

**Définition 1.1.1** Pour  $x \in \mathbb{C}$ , la fonction Gamma est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \exp^{-t} dt \quad / \operatorname{Re}(x) > 0.$$

Cette fonction généralise la factoriel  $n!$  à tous les nombre réels.

l'une des propriétés de base de la fonction  $\Gamma(x)$  est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

La fonction Gamma présente une variété de propriétés et relations avec différentes fonctions spéciales qui pouvant être consultées dans différents ouvrages traitant les fonctions spéciales. L'allure de la fonction Gamma est donnée par la figure

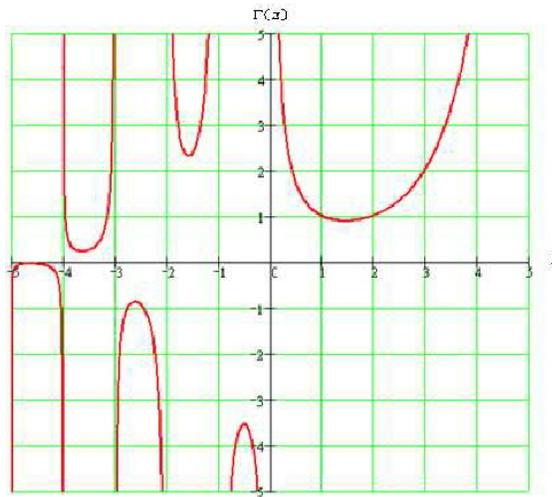


FIG. 1.1 – L'allure de la fonction Gamma

### 1.1.2 Fonction Bêta

**Définition 1.1.2** La fonction de Bêta est une type d'intégrale d'Euler définie pour tout complexes  $x$  et  $y$  par :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad / \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Elle est liée à fonction Gamma par la relation :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad / \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0, \quad (1.1)$$

il s'ensuit de 1.1 que

$$B(x, y) = B(y, x) \quad / \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0.$$

### 1.1.3 La fonction Mittag-leffler

**Définition 1.1.3** Pour  $x \in \mathbb{C}, \alpha \in ]0, 1[$  la fonction  $E_\alpha(x)$  définie par :

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad / \operatorname{Re}(x) > 0.$$

Si  $\alpha = 1$

$$E_1(x) = e^x,$$

si  $\alpha > 0, \beta > 0$

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

### 1.1.4 Formule de Dirichlet

**Définition 1.1.4** Soient  $h(x, y)$  une fonction continue et  $\alpha$  et  $\beta > 0$ , la formule de Dirichlet définie :

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} h(x, y) dy = \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} h(x, y) dx. \quad (1.2)$$

On a certains cas particuliers de la formule de Dirichlet sont d'un intérêt particulier.

Par exemple ,si on prend :

$$h(x, y) = g(x)f(y),$$

et

$$g(x) \equiv 1.$$

Alors :

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} \int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(y) dy = B(\alpha, \beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) dy.$$

avec  $B$  est la fonction Bêta.

### 1.1.5 Formule de Riemann

**Définition 1.1.5** La fonction  $f$  est intégrable si ses somme de Riemann convergent. L'intégrale de  $f$  est alors aussi la limite des sommes de Riemann.

Souvent, on prend la subdivision uniforme et  $\int_a^b f(x) dx$  est vue comme limite des sommes de Riemann classiques :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx.$$

Car le pas de la subdivision uniforme est  $\frac{b-a}{n}$  qui tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

## 1.2 Intégrale fractionnaire

Dans cette section on va définir l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

### 1.2.1 l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

**Définition 1.2.1** *Pour l'expression de la définition de Riemann-Liouville, nous considérons le Riemann-Liouville intégrale répétée  $n$ -fois définie par :*

$$\int_a^t \int_a^{t_n} \int_a^{t_{n-1}} \dots \int_a^{t_3} \int_a^{t_2} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-1} dt_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(t) (x-t)^{n-1} dt. \quad (1.3)$$

#### l'intégrale fractionnaire de R-L à droite

**Définition 1.2.2** *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha$  pour la fonction peut être exprimée comme :*

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^a (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b \text{ pour } \alpha, a \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0.$$

#### l'intégrale fractionnaire de R-L à gauche

**Définition 1.2.3** *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha$  pour la fonction peut être exprimée comme :*

$$I_b^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, x > b \text{ pour } \alpha, a \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0,$$

et on peut écrire  $I_a^{(\alpha)}$  comme :

$$I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x-1} t^{\alpha-1} f(x-t) dt.$$

**Propriétés 1.2.1** On a pour toute fonction continue  $f$  :

•  $I_a^{(\alpha)} [I_a^{(\beta)} f(x)] = I_a^{(\alpha+\beta)} f(x)$ , avec  $\alpha, \beta > 0$ .

•  $\frac{d}{dx} [I_a^{(\alpha)} f(x)] = I_a^{(\alpha-1)} f(x)$ ,  $\alpha > 1$ .

**Preuve.** On va montre l'égalité suivante : ■

$$\begin{aligned} I_a^{(\alpha)} [I_a^{(\beta)} f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} [I_a^{(\beta)} f(t)] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \left[ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds \right] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \int_a^t (t-s)^{\beta-1} ds. \end{aligned}$$

D'après la formule de Dirichlet 1.2, on a :

$$\begin{aligned} I_a^{(\alpha)} [I_a^{(\beta)} f(x)] &= \frac{B(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= I_a^{(\alpha+\beta)} f(x). \text{D'où la première égalité.} \end{aligned}$$

On va montre maintenant la deuxième égalité :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [I_a^{(\alpha)} f(x)] &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \left[ \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right] \end{aligned}$$

puisque  $f(t)$  et  $(x-t)^{\alpha-1}$  sont continue donc l'application

$$t \rightarrow (x-t)^{\alpha-1} f(t)$$

est continue, et on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [I_a^{(\alpha)} f(x)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [(x-t)^{\alpha-1} f(t)] dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (\alpha-1)(x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \\ &= I_a^{(\alpha-1)} f(x). \end{aligned}$$

## 1.3 Approche de dérivées fractionnaire

Dans cette partie, nous vous présenterons trois approches Riemann-liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov et en particulier Riemann-liouville.

### 1.3.1 Approche de dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généralisation la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

**Définition 1.3.1** : Soit la fonction continue  $f(x)$ , la dérivée première de la fonction  $f(x)$  est définie par :

$$f'(x) = D^{(1)} f(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad (1.4)$$

Et la dérivée seconde

$$\begin{aligned} D^{(2)} f(x) &= \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Le premier niveau de la généralisation à un ordre entier  $n$  est donné par :

$$D^{(n)} f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x-jh) \quad (1.6)$$

$n$  étant un nombre entier, la notation  $\binom{n}{j}$  représente la combinaison de  $j$  élément parmi  $n$  dont l'expression est donnée par :

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$$

Pour des valeurs fractionnaires  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , l'équation 1.6 peut être écrite comme  
L'extension

$$D^{(\alpha)}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(x - jh)$$

La notation  $\binom{\alpha}{j}$  désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres réels :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{j! \Gamma(\alpha - j + 1)}$$

### 1.3.2 Approche de dérivée de Riemann-liouville

**Définition 1.3.2** Soit  $\alpha \in ]n - 1, n[$  avec  $\alpha \in \mathbb{N}$ , la dérivée fractionnaire de R-L d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{aligned} {}^R D^\alpha f(t) &= D^n [I_a^{(n-\alpha)} f(t)] \\ &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n [I_a^{(n-\alpha)} f(t)], t \in ]a, b[. \end{aligned}$$

avec  $x \in ]a, b[$

D'après 1.3

$${}^R D^{(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t - x)^{n-\alpha-1} f(x) dx, n = [\alpha] + 1.$$

avec le partie entier d'un nombre réel est  $[\cdot]$ .

•si  $0 < \alpha < 1$

$${}^R D^{(\alpha)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-x)^{-\alpha} f(x) dx.$$

•si  $f \in C^n [a, b]$ , d'après l'intégrations par partie et des dérivations répétées on a :

$${}^R D^{(\alpha)} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x) dx.$$

### 1.3.3 Propriétés d'approche de R-L

#### Composition avec l'intégrale fractionnaire

Soit  $\alpha, \beta > 0$ , telle que  $\alpha \in [n-1, n], \beta \in [m-1, m]$ .

•L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

$${}^R D^{(\alpha)} [I_a^{(\beta)} f(x)] = f(x),$$

en général on a :

$${}^R D^{(\alpha)} [I_a^{(\beta)} f(x)] = {}^R D^{(\alpha-\beta)} f(x).$$

•Si  $\alpha > \beta > 0$  :

$${}^R D^{(\alpha)} [I_a^{(\beta)} f(x)] = {}^R D^{(\alpha-\beta)} f(x).$$

#### Composition avec les dérivées d'ordre entier

Pour  $n$  un nombre entier et  $\alpha$  non entier.

La dérivation fractionnaire et la dérivation conventionnelle (d'ordre entière) ne commutent que si :  $f^{(k)}(a) = 0$  pour tout  $k = 0, n - 1$ .

$$\frac{d^n}{dx^n} [{}^R D^{(\alpha)} f(x)] = D^{(n+\alpha)} f(x)$$

mais :

$${}^R D^{(\alpha)} \left[ \frac{d^n}{dx^n} f(x) \right] = D^{(n+\alpha)} f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}.$$

### Composition avec les dérivées fractionnaires

pour  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres non entiers tel que  $\alpha \in [n - 1, n]$  et  $\beta \in [m - 1, m]$ , alors :

$${}^R D^{(\alpha)} ({}^R D^{(\beta)} f(x)) = {}^R D^{(\alpha+\beta)} f(x) - \sum_{k=1}^n [{}^R D^{(\alpha-k)} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma(-\alpha-k+1)}.$$

et

$${}^R D^{(\beta)} ({}^R D^{(\alpha)} f(x)) = {}^R D^{(\alpha+\beta)} f(x) - \sum_{k=1}^m [{}^R D^{(\alpha-k)} f(x)]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(-\beta-k+1)},$$

par la suite deux opérateurs de dérivation fractionnaire  ${}^R D^{(\alpha)}$  et  ${}^R D^{(\beta)}$  ( $\alpha \neq \beta$ ), ne commutent que si  $[{}^R D^{(\beta-k)} f(x)]_{x=a}$  pour tout  $k = 1, n$ , et  $[{}^R D^{(\alpha-k)} f(x)]_{x=a}$  pour tout  $k = 1, m$ .

### 1.3.4 Lient entre les dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov et de Riemann-Liouville

On obtient des intégrations selon des parties récurrentes et des différentiels récurrents, si  $f \in C^n$ .

$$\begin{aligned} {}^R D^\alpha f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} + \frac{1}{n-\alpha} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt \\ &= {}^G D^\alpha f(x) \end{aligned}$$

Dans ce cas, l'approche de Grünwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

### 1.3.5 Approche de dérivée de Caputo

**Définition 1.3.3** Soit  $f$  une fonction de classe  $C^n([a, b])$ , et soient  $\alpha \in ]n-1, n[$  et  $N \in \mathbb{N}^*$  la dérivée de Caputo d'ordre  $\alpha$  est définie par :

$$\begin{aligned} {}^C D^{(\alpha)} f(t) &= I_a^{(n-\alpha)} (D^{(n)} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

### 1.3.6 Propriétés d'approche de Caputo

#### Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si  $f(x)$  est une fonction continue on :

$${}^C D^{(\alpha)} [I^{(\alpha)} f(x)] = f(x)$$

et

$$I^{(\alpha)}[{}^C D^{(\alpha)} f(x)] = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}.$$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, mais par contre il n'est pas un inverse à droite.

### 1.3.7 Lien entre dérivée fractionnaire de R-L et de Caputo

$${}^R D_x^\beta f(x) = {}^C D_b^\beta f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(-\alpha-k+1)} f^{(k)}(a).$$

$${}^R D_b^\beta f(x) = {}^C D_x^\beta f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \sum \frac{(b-x)^{k-\alpha}}{\Gamma(-\alpha-k+1)} f^{(k)}(b).$$

# Chapitre 2

## Système dynamique chaotique

Le système chaotique est un système dynamique déterministe présentant des comportements aléatoires. Deux trajectoires d'un système chaotique commençant à proximité l'une de l'autre divergent après un certain temps (soi-disant «dépendance sensible aux conditions initiales»). Les systèmes mathématiquement chaotiques sont caractérisés par une instabilité locale et une délimitation des trajectoires. Puisque l'instabilité locale d'un système linéaire implique l'illimité (croissance infinie) de ses solutions, le système chaotique devrait être nécessairement non linéaire, c'est-à-dire qu'il doit être décrit par un modèle mathématique non linéaire.

### 2.1 Système dynamique

**Définition 2.1.1** *Les systèmes dynamiques sont les notions mathématiques qui permettent de modéliser des phénomènes évoluant dans le temps, ces phénomènes pouvant provenir de la physique, la mécanique, l'économie, la biologie, la chimie...*

*Un système dynamique est constitué d'un espace de phases, l'espace des états possibles du phénomène convenablement paramétré, muni d'une loi d'évolution qui décrit la variation temporelle de l'état du système.*

La modélisation mathématique de cette évolution nous permet de définir une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \quad (1.1)$$

Ou de la forme généralisées :

$$\frac{d^\alpha X}{d^\alpha t} = F(X, t), \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad (1.2)$$

si dans le cas continu, ou une iterration de la forme :

$$X_{k+1} = F(X_k, k), k \in \mathbb{Z}, \quad (1.3)$$

si dans le cas discret .

## 2.2 Flot ou système dynamique

Soit  $M$  un ensemble quelconque et  $G$  un groupe additif ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ ). Considérons  $\{\varphi_t\}_{t \in G}$  un group à un paramètre d'applications  $M$  dans  $M$  indexées par le groupe  $G$ . On appelle flot ou système dynamique le couple  $(M ; \{\varphi_t\}_{t \in G})$

L'ensemble  $M$  précédent constitue l'espace des phases du flot. Tout point  $x$  de cet espace représente un état du système dynamique.

## 2.3 Trajectoire, Orbite et *point d'équilibre*

On appelle *trajectoire* d'un point  $x$  de  $M$  l'application définie sur  $G$  et à valeurs dans  $M$  par :

$$\varphi : G \rightarrow M$$

$$t \rightarrow \varphi_t(x)$$

On appelle *orbite* d'un point  $x$  l'image de la trajectoire issue de  $x$  c'est à dire le sous ensemble  $\gamma(x)$  de l'espace des phases défini par :

$$\gamma(x) = \varphi_t(x)$$

Un élément  $x$  de  $\Omega$  est dit *point fixe*, ou *point d'équilibre* du système dynamique son orbite est  $\{x\}$ .

## 2.4 Théorie des bifurcation

La théorie des bifurcations est un aspect fondamental de l'étude des systèmes dynamiques, ses origines se situent dans les travaux de H.Poincaré. Les systèmes que nous considérons sont en général fonction de paramètres de contrôle. Un point de bifurcation est un point de l'espace de contrôle où le portrait de phase du système change de façon qualitative présenter sur quatre cas simples.

### 2.4.1 Bifurcation noeud-col

**Définition 2.4.1** *Un système dynamique présentant un point fixe stable a subit une bifurcation noeud-col en  $\mu = \mu_c$  si une valeur propre réelle du système linéarisé autour de  $a$  traverse l'axe imaginaire pour  $\mu = \mu_c$ . Pour  $\mu$  voisin de  $\mu_c$  :, le comportement du système est alors gouverné, après éventuellement un changement de variable, par*

l'équation suivante, appelée forme normale de la bifurcation noeud-col :

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2$$

La figure présente le diagramme de bifurcation correspondant

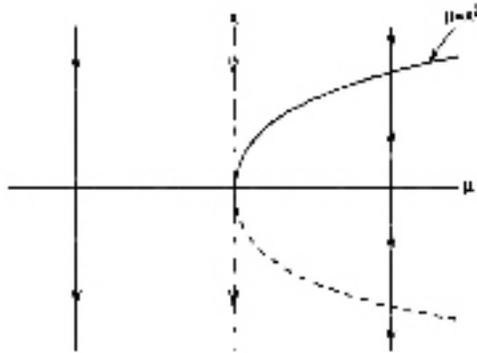


FIG. 2.1 – Bifurcation noeud-col

## 2.4.2 Bifurcation transcritique

Si  $f$  est contrainte à ne pas avoir de terme constant, le développement limité mène à la forme normale d'une bifurcation transcritique, qui est la dernière bifurcation stationnaire dans une dimension :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^2 \tag{1.6}$$

Qui s'appelle équation générique de la bifurcation transcritique . On a alors

$$\begin{aligned} \mu x - x^2 = 0 &\iff x(\mu - x) = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \mu \end{array} \right. \end{aligned}$$

Par conséquent on a deux points fixes

$$f'(x) = \mu - 2x = \begin{cases} \mu \text{ pour } x = 0 \\ -\mu \text{ pour } x = \mu \end{cases}$$

par suite :

- Si  $\mu < 0$ , le point fixe  $x = 0$  est stable, mais  $x = \mu$  est instable .
- Si  $\mu > 0$ , le point fixe  $x = 0$  est instable, mais  $x = \mu$  est stable .

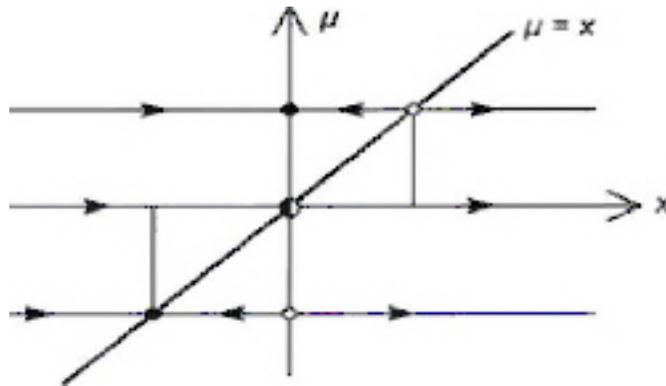


FIG. 2.2 – Bifurcation transcritique

### 2.4.3 Bifurcation fourche(Pitchfork)

Au point de bifurcation fourche la stabilité d'un point fixe change au profit de la naissance d'une paire de point fixes. L'équation générique d'une bifurcation fourche

(sur-critique) est

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3$$

Et pour sous -critique :

$$\frac{dX}{dt} = \mu x - x^3$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche sur-critique on a  $F(x, \mu) = \mu x - x^3$

$$\begin{aligned} \mu x - x^3 = 0 &\iff x(\mu - x^2) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ \mu - x^2 = 0 \iff x^2 = \mu \end{cases} \end{aligned}$$

Alors si  $\mu < 0$  on a un seul point fixe  $x = 0$ .

Si  $\mu > 0$  on a trois point fixes :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{\mu} \\ x = -\sqrt{\mu} \end{cases}$$

$$\frac{dF(x, \mu)}{dx} = \mu - 3x^2 \text{ alors } \left. \frac{dF(x, \mu)}{dx} \right|_{x=0} = \mu \text{ et } \left. \frac{dF(x, \mu)}{dx} \right|_{x=\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu \text{ par suite :}$$

\*Si  $\mu < 0$ , le seul point fixe  $x = 0$  est instable.

\*Si  $\mu > 0$ , le point fixe  $x = 0$  est stable, mais  $x = \pm\sqrt{\mu}$  sont instables.

On remarque un échange dans le nombre des points fixes est dans la stabilité en  $\mu = 0$ .

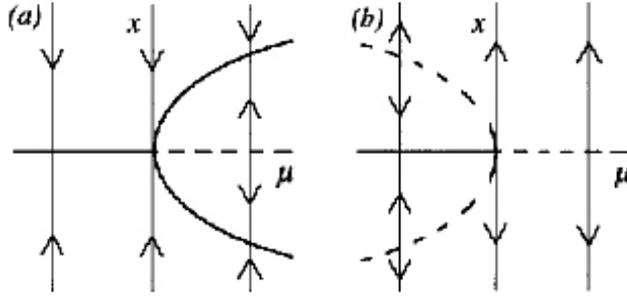


FIG. 2.3 – Bifurcation fourche

### 2.4.4 Bifurcation Hopf

La bifurcation de Hopf correspond à la présence de deux valeurs propres complexes conjuguées ; elle est modélisée par :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega y + x(\mu - (x^2 + y^2)) & x \in \mathbb{R} \quad \mu \in \mathbb{R} \\ \frac{dy}{dt} &= \omega x + y(\mu - (x^2 + y^2)) & y \in \mathbb{R} \quad \omega = cste \end{aligned}$$

Cette équation, en coordonnées polaires, devient  $\frac{dr}{dt} = r(\mu - r^2)$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ . Ces deux équations sont découplées, la première correspondant à une bifurcation fourche (variable seulement pour  $r$  positif). On en déduit que  $\mu_0 = 0$  est une valeur de bifurcation et qu'il y a création d'une orbite fermée asymptotiquement stable et perte de stabilité pour l'origine lorsque  $\mu$  devient positif. Origine : asymptotiquement stable ( $\mu < 0$ )  $\rightarrow$  instable ( $\mu > 0$ ). Orbite ( $r = \sqrt{\mu}$ ) : n'existe pas ( $\mu < 0$ )  $\rightarrow$  existe et est asymptotiquement stable ( $\mu > 0$ ). Le diagramme de bifurcation de Hopf a été donné

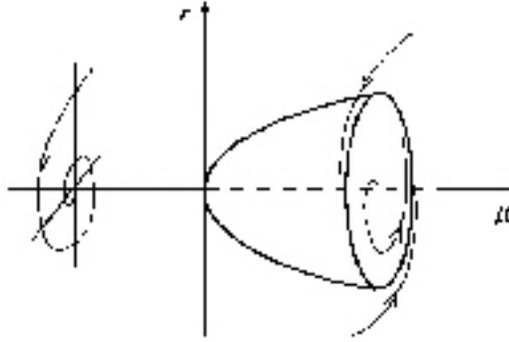


FIG. 2.4 – Bifurcation Hopf

## 2.5 Définition de chaos

### Chaos dans le sens de Devaney

Devaney proposa la définition suivante du chaos : un système dynamique est chaotique si et seulement si :

- il est topologiquement transitif.
- il possède un ensemble dense d'orbites périodiques,
- il présente le phénomène de sensibilité aux conditions initiales.

La transitivité signifie simplement que si l'on considère deux voisinages quelconques de deux états distincts d'un système dynamique, il existe une trajectoire qui passe de l'un à l'autre.

Notons que les deux premières hypothèses impliquent la troisième sans que la réciproque soit vraie.

### Chaos dans le sens de Li-Yorke

Li et Yorke ont introduit la première définition mathématique du chaos. Ils ont établi un critère très simple "La présence de trois périodes implique le chaos". Ce critère joue un rôle très important dans l'analyse des systèmes dynamiques chaotiques.

**Définition 2.5.1** *Un système dynamique est appelé un système chaotique s'il a au*

*moins un attracteur chaotique.*

## 2.6 Attracteurs

**Définition 2.6.1** *Soit  $A$  un ensemble compact, fermé de l'espace des phases. On s'appose que  $A$  est un ensemble invariant (i. e.  $\phi_t(A) = A$  pour tout  $t$ )*

On dit que  $A$  est stable si pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $x(x_0, t) = \phi_t(x_0)$  restera dans  $U$  si  $x_0 \in V$ . Si de plus :

$$\bigcap_{t \geq 0} \phi_t(V) = A$$

et s'il existe une orbite dense dans  $A$ , alors  $A$  est un **attracteur**.

### 2.6.1 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

#### Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

**Un point fixe** : la trajectoire du pendule dissipatif simple (dans l'espace des phases représentant son altitude et sa vitesse), par exemple, tend vers l'origine du repère, quelles que soient la position et la vitesse initiales.

**Un cycle limite** : il représente la trajectoire du pendule idéal dans ce même espace des phases.

**Un tore :** qui correspond à l'attracteur obtenu par les mouvements résultant de deux oscillations indépendantes, par exemple : les oscillateurs électriques.

Pour tous les attracteurs réguliers, c'est à dire pour tous les systèmes non chaotiques, des trajectoires qui partent de points proches l'un de l'autre dans l'espace des phases restent indéfiniment voisines. On sait donc prévoir l'évolution à long terme de ces systèmes, à partir d'une situation connue.

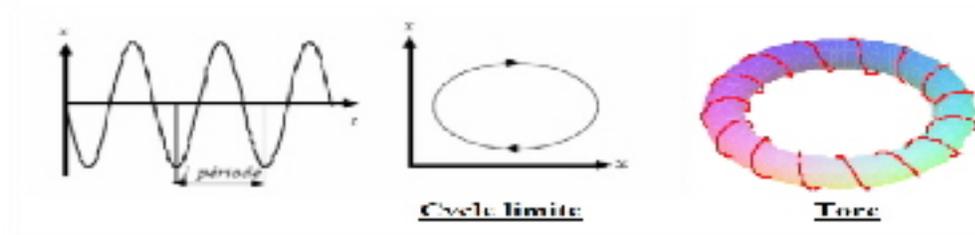


FIG. 2.5 – Attracteurs réguliers

### Attracteurs étranges

Sont bien plus complexes que les autres, ils seront défini ultérieurement. Un attracteur étrange représente en quelque sorte la signature de l'ordre qui est sous-jacent dans le chaos déterministe. Ceton parle d'attracteur étrange lorsque la dimension fractale n'est pas entière.

## 2.7 Caractérisation du comportement chaotique

Généralement, la caractérisation des systèmes non linéaires peut se faire à partir d'observations grâce à des outils issus du domaine des dynamiques non linéaires tels que : le diagramme de bifurcation, la section de Poincaré, l'espace des phases, ou bien par des outils mathématiques tels que les exposants de Lyapunov.

### 2.7.1 Caractérisation par des outils numériques quantitatifs

Lyapunov et al. ont découverts des outils mathématiques tels que le calcul de la dimension de corrélation et les coefficients de Lyapunov qui vont permettre d'exclure ou d'affirmer que le système va suivre une dynamique non linéaire imprédictible à long terme. Dans la littérature, les paramètres les plus significatifs permettant une estimation des systèmes dynamique non linéaires sont :

**Dimension fractale** : Une dimension non entière est considérée comme un critère d'existence d'un comportement chaotique. Les attracteurs chaotiques sont donc des fractales car ils possèdent une dimension fractionnaire.

**Les exposants de Lyapunov (EL)** constituent une généralisation des valeurs propres d'un système dynamique. Ils mesurent l'attraction ou la séparation exponentielle dans le temps de deux trajectoires adjacentes dans l'espace des phases.

TAB. 2.1 – Résumé des différents cas rencontrés

Etat stable	Flot	dimension	<b>exposants de Lyapunov</b>
point d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$
périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0$ et $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 < 0$
quasi - périodiques	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 < 0$
chaotique	complexe-irruglier	non entière	$\lambda_1 > 0$ et $\sum \lambda_i < 0$

### 2.7.2 Caractérisation par des outils graphiques qualitatifs

Les phénomènes chaotiques que l'on observe sont souvent dus aux non-linéarités que présentent les systèmes, dans des domaines très variés. L'identification des caractéristiques de ses systèmes par des outils d'observation facilite la distinction du comportement.

**Espace de phase** On peut décrire de façon précise le comportement d'un système dynamique en le projetant dans l'espace paramétrique des phases. Dans l'espace des phases de dimension 2, une ellipse ou un cercle ou toute autre forme géométrique

fermée (on parle d'attracteurs périodiques) représente une trajectoire périodique.

- Dans un espace des phases de dimension 3, des surfaces bidimensionnelles bornées (c'est - à - dire des tores ou attracteurs quasi - périodiques) représentent un comportement quasi - périodique.

- Dans un espace des phases de dimension 2 ou 3, des trajectoires irrégulières et relativement complexes (on parle d'attracteurs étranges) représentent un comportement chaotique.

**La sensibilité aux conditions initiales (SCI)** La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique.

**Section de Poincaré** Faire une section de Poincaré revient à couper la trajectoire d'un système dans l'espace des phases.

TAB. 2.2 – Tableau récapitulatif des différents scénarios de transition vers le chaos

Attracteur dans l'espace des phases	<b>Section de Poincaré</b>
cycle limité	1 point
tore	courbe fermé
Attracteur étrange (chaos)	nuage de points

**Le diagramme de bifurcation** Le diagramme de bifurcation est un tracé repérant la nature des différentes solutions du système et leur stabilité lorsqu'un paramètre varie. Le diagramme portera les valeurs du paramètre en abscisse et des valeurs particulières d'une des variables d'état en ordonnée, lorsque le régime asymptotique est atteint.

- Un seul point sur une verticale indique un fonctionnement périodique fondamental.

- Un ensemble de points distincts est la marque d'un régime sous - harmonique.

- Lorsque les points se répartissent densément sur un segment de la verticale, on peut en déduire que la solution est apériodique mais il n'est pas possible de préciser si

elle est quasi - périodique ou chaotique. Seul le tracé de la section de Poincaré peut clarifier le phénomène.

# Chapitre 3

## Contrôle feedback d'un système de Jerk d'ordre fractionnaire

Le contrôle du chaos, ou le contrôle des systèmes chaotiques, est le champ frontière entre le contrôle théorie et théorie des systèmes dynamiques étudiant quand et comment il est possible de contrôler systèmes présentant un comportement irrégulier et chaotique. Le contrôle du chaos est étroitement lié à contrôle non linéaire, et de nombreuses méthodes de contrôle non linéaire sont applicables au contrôle chaotiques systèmes. Cependant, le contrôle des systèmes chaotiques présente certaines caractéristiques spécifiques.

### 3.1 Modèles de systèmes contrôlés

La formulation mathématique des problèmes de contrôles des systèmes chaotiques les plus célèbres sont précédés par la présentation des modèles de base des systèmes chaotiques qui sont souvent utilisés. Les modèles mathématiques les plus connus rencontrés dans la littérature pour le contrôle de chaos sont représentés par des

systèmes des équations différentielles ordinaires ou les équations d'état :

$$\dot{x} = F(x, \mu) \tag{3.1}$$

Où  $x = x(t)$  Est le vecteur des variables d'état de dimension  $n$ ,  $\mu = \mu(t)$  est le vecteur des entrées (les commandes) de dimension  $m$  et  $F(x, u)$  est le vecteur fonction qui est supposé continu. Dans la présence de perturbations externes, le modèle non stationnaire est défini par :

$$\dot{x} = F(x, \mu, t)$$

### 3.2 L'objectif de contrôle du chaos

Un objectif de contrôle typique lors du contrôle de systèmes chaotiques est de transformer un système chaotique trajectoire en une trajectoire périodique. En termes de théorie du contrôle, cela signifie la stabilisation d'une orbite ou équilibre périodique instable. Une caractéristique spécifique de ce problème est la possibilité d'atteindre l'objectif au moyen d'une action de contrôle arbitrairement petite. D'autres objectifs de contrôle comme la synchronisation et la chaotisation peuvent également être atteints par de petits contrôles dans de nombreux cas.

**Stabilisation** Un objectif typique pour le contrôle des systèmes chaotiques est la stabilisation d'une solution périodique instable (orbite)

Soit  $x^*(t)$  est une trajectoire oscillatoire périodique du système 3.1 sous la condition initiale  $x^*(0)$  tel que,

$$x^*(t + T) = x^*(t)$$

Pour stabiliser ce mouvement on doit ramener la solution  $x(t)$  vers  $x^*(t)$  c.à.d. :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x^*(t)) = 0$$

Où conduire la sortie du système  $y(t)$  vers une fonction donnée  $y^*(t)$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y^*(t)) = 0 \tag{3.2}$$

Pour tout solution  $x(t)$  de système 3.1 sous l'état initial  $x_0 \in \Omega$ , où  $\Omega$  est un ensemble des conditions initiales donné, le problème se réduit à déterminer une fonction de contrôle soit comme :

- une commande en boucle ouverte :  $\mu(t) = U(x_0, t)$ .
- une commande de sortie en boucle fermé :  $\mu(t) = U(y(t))$ .

**Chaotisation** Une deuxième classe d'objectifs de contrôle correspond aux problèmes d'excitation ou génération d'oscillations chaotiques (également appelées chaotisation, chaotification ou anticontrôle). Parfois, ces problèmes peuvent être réduits à la forme 3.2, mais le but trajectoire  $x^*(t)$  n'est plus périodique, alors que l'état initial est l'équilibre. Le but la trajectoire ne peut être spécifiée que partiellement. Sinon, l'objectif peut être d'atteindre certains critères formels de chaos, par exemple la positivité du plus grand exposant de Lyapunov.

**Synchronisation** La troisième classe importante d'objectifs de contrôle correspond à la synchronisation (plus précisément, synchronisation contrôlée par opposition à l'autosynchronisation ou à l'auto-synchronisation). De manière générale, la synchronisation est comprise comme une concordance ou changement simultané des états de deux ou plusieurs systèmes ou, peut-être, changement simultané de certaines grandeurs liées aux systèmes. Si la synchronisation n'existe pas dans le système sans contrôle ( $\mu = 0$ ) le problème de synchronisation contrôlée suivant peut se poser :

trouver une fonction de contrôle ( $\mu(t) = 0$ ) ut assurer la synchronisation dans le système en boucle fermée. Dans ce cas, la synchronisation est l'objectif de contrôle.

### 3.3 Région de stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire

La stabilité des systèmes fractionnés a été étudiée à fond si nécessaire et des conditions scientifiques ont été obtenues en Il a été démontré que la région de stabilité d'un ensemble linéaire d'équations d'ordre fractionnaire  $\alpha$

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) \quad x(0) = x_0$$

où  $x(t) = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ ,  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  et  $\alpha \in (0, 1)$ , est délimitée par un cône, avec un sommet à l'origine, et qui s'étend dans la moitié droite du plan s de telle sorte qu'il enferme un angle de  $\pm\alpha\pi/2$  comme le montre la figure 1. Ainsi, quand un  $\alpha = 1$ , nous obtenons la région de stabilité toute familière du système d'ordre entier, i.e. le demi-plan gauche où l'axe imaginaire devient la frontière de la région de stabilité.

Par conséquent, si les valeurs propres de la matrice jacobienne du système sont placées n'importe où en dehors du cône dans la Fig. 1, le système d'ordre fractionnaire sera stable.

Pour le système d'ordre fractionnaire proportionnel non linéaire tridimensionnel suivant :

$$D^\alpha x(t) = f(x(t)) \quad x(0) = x_0 \tag{3.3}$$

où  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une fonction vectorielle non linéaire en termes de  $x$ . Soit  $J(x^*) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij} \Big|_{x=x^*}$  être la matrice jacobienne à point d'équilibre  $x^*$ .

**Lemme 3.3.1** *Le point d'équilibre  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  du système 3.3 est localement*

FIG. 3.1 – *Région de stabilité des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire*

*asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres  $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3$  de la matrice jacobienne  $J$  satisfont aux conditions*

$$\arg(\lambda_i) > \alpha \frac{\pi}{2} \quad i = 1, 2, 3$$

### 3.4 Contrôle feedback

Considérons le système fractionnaire

$$D^\alpha x(t) = f(x, \mu, t) \tag{3.4}$$

Où  $x(t)$  est le vecteur d'état de système et  $\mu(t)$  le vecteur de contrôle. Le problème est de déterminer le contrôle

$$\mu(t) = g(x, t)$$

$g$  est un vecteur non linéaire (inclus le cas linéaire) de telle manière que le système contrôlé

$$D^\alpha x(t) = f(x, g(x, t), t)$$

peut être conduit par le contrôle de rétroaction  $g(x, t)$  pour atteindre l'objectif de suivi de la cible, nous devons donc avoir

$$\lim \|x(t) - \tilde{x}(t)\| = 0$$

Soit  $\tilde{x}(t)$  une orbite périodique ou un point fixe du système donné 3.4 avec  $\mu = 0$ ,

alors nous obtenons l'erreur de système

$$D^\alpha e(t) = f(e, t) \quad (3.5)$$

**Proposition 3.4.1** *Si 0 est un point fixe du système 3.5 et les valeurs propres de la matrice jacobienne  $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_0$  satisfait la condition*

$$\min_i \arg(\lambda_i) > \alpha \frac{\pi}{2} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

alors la trajectoire  $x(t)$  du système 3.4 converge vers  $\tilde{x}(t)$ .

### 3.5 Système de Jerk d'ordre fractionnaire

Le terme «**Jerk**» vient du fait que dans un système mécanique dans lequel  $x$  est le déplacement est la vitesse, et  $\ddot{x}$  est l'accélération, la quantité  $\ddot{\ddot{x}}$  est appelé «jerk» (Schot, 1978). C'est la dérivée la plus basse pour laquelle une **ODE** avec Les fonctions peuvent créer le chaos.

Le modèle mathématique du système de jerk considéré dans ce travail est exprimé par la ensemble suivant de trois équations différentielles non linéaires de premier ordre couplées

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = y \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = z \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = -\mu z - y - \sigma(x^2 - 1) \end{cases}, \quad (3.6)$$

où les paramètres  $\mu, \sigma$  sont des réels positifs et  $\alpha$  est l'ordre fractionnaire du système 3.6 admet deux points d'équilibres  $E_1(-1, 0, 0)$ ,  $E_2(1, 0, 0)$ .

### 3.5.1 la stabilité de point d'équilibre

Pour les valeurs des paramètres  $\mu = 0.5$  et  $\sigma = 1$ , la forme entière du système 3.6 présente un comportement chaotique, le plus grand exposant de Lyapunov calculé numériquement étant  $LE = 0.057$ , et son équilibre  $E_1$  est instable et  $E_2(1, 0, 0)$  est localement asymptotiquement stable lorsque  $\alpha < 2/3$  et ses valeurs propres sont données par :  $E_1 : \lambda_1 = -1.1475, \lambda_{2,3} = 0.32374 \pm 1.2799i, E_2 : \lambda_1 = 0.8921, \lambda_{2,3} = -0.69605 \pm 1.3257i$ . Le point d'équilibre est un point de selle d'index 2, donc la condition nécessaire pour que le système d'ordre fractionnaire 3.6 reste chaotique est  $\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{|\lambda_{2,3}|}{\text{Re } \lambda_{2,3}}\right)$  Par conséquent, l'ordre fractionnaire le plus bas  $\alpha$ , pour lequel le système d'ordre fractionnaire montre le chaos dans les paramètres ci-dessus, est donné par l'inégalité  $\alpha > 0.84691$ , La figure montre que le système 3.6 est chaotique pour  $\alpha = 0.88$  et est stable pour  $\alpha = 0.80$

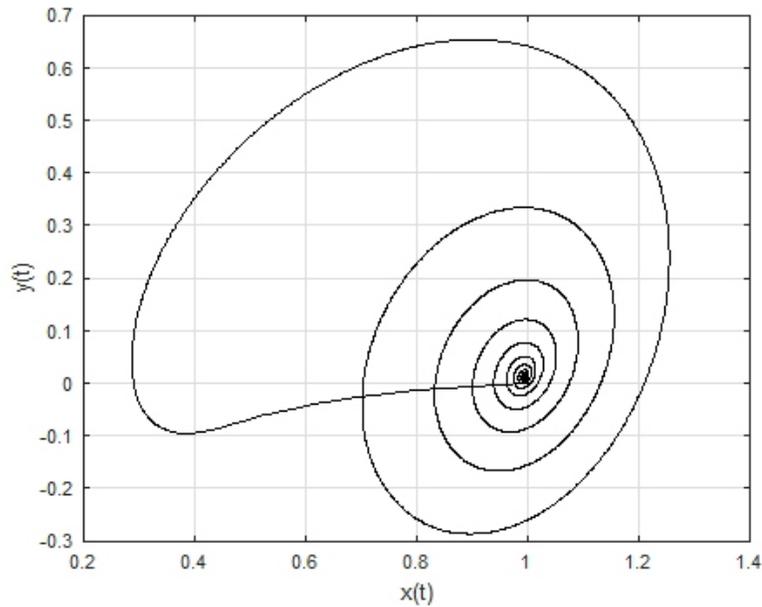
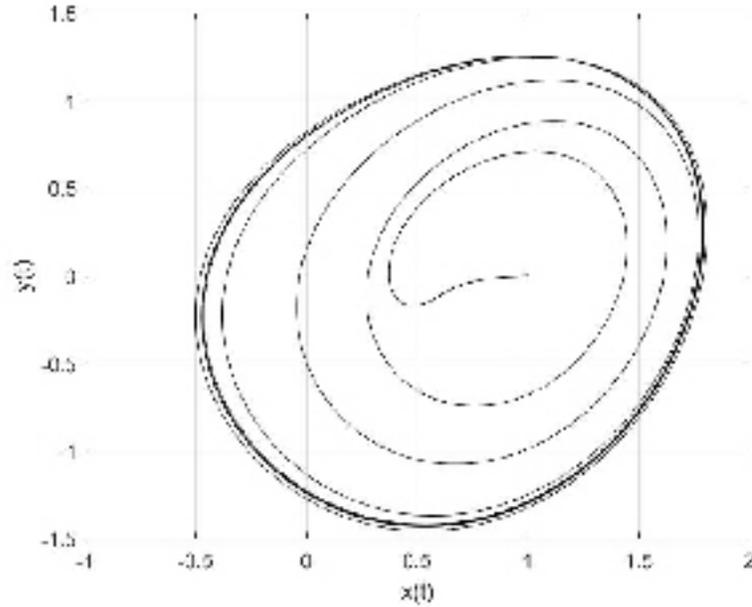


FIG. 3.2 – Le système 3.6 stable pour  $\alpha = 0.8$


 FIG. 3.3 – Le système 3.6 chaotique pour  $\alpha = 0.88$ 

### 3.5.2 Contrôle feedback du système de Jerk

Le système d'ordre fractionné contrôlé associé au système 3.6 est donné par

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = y - k_1(x - x^*) \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = z - k_2(y - y^*) \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = -\mu z - y - \sigma(x^2 - 1) - k_3(z - z^*), \end{cases} \quad (3.7)$$

où  $(x^*, y^*, z^*)$  représente un point d'équilibre arbitraire du système 3.6. Le but est de conduire les trajectoires du système vers l'un des deux points d'équilibre instables  $E_1$  et  $E_2$ . Comme dans le modèle précédent, nous avons choisi les gains de feedback  $K = \text{diag}(0, k_2, 0)$ . Pour simplifier, nous allons choisir les la condition suffisante de la stabilisation de contrôle de chaos est donnée par la proposition suivante

**Proposition 3.5.1** *Les trajectoires du système 3.7 ne sont pas entraînées vers le point d'équilibre instable  $E_1$ .*

si  $k_2 = \frac{-1}{2\mu} \left( -\sqrt{-2\mu^2 + \mu^4 + 4\mu\sigma + 1} + \mu^2 + 1 \right)$  et  $\sigma > 0$  alors les trajectoires des contrôlés système 3.7 sont conduits vers l'écurie point d'équilibre  $E_2$  pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ .

**Preuve.** Le polynôme caractéristique du point d'équilibre  $E_1$  est donné par

$$\lambda^3 + (\mu + k_2) \lambda^2 + (\mu k_2 + 1) \lambda - \sigma = 0.$$

On trouve  $a_3 = -\sigma$ , par appliquer la 4<sup>ième</sup> condition de critère Routh-Hurwitz d'ordre fractionnaire le système contrôlés 3.7 ne peut pas être stable.

Choisissez le paramètre  $\sigma > 0$  et le gain de contrôle feedback,  $k_2 = \frac{-1}{2\mu} \left( -\sqrt{-2\mu^2 + \mu^4 + 4\mu\beta + 1} + \mu^2 + 1 \right)$  et en supposant que  $D(p) < 0$ , la condition de stabilité (3) de critère Routh-Hurwitz d'ordre fractionnaire est satisfaite et les trajectoires de

le système contrôlé 3.7 est conduit au point d'équilibre stable  $E_2$  pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$

■

### Simulation numérique :

Dans cette sous section, nous proposons des résultats de simulation numérique obtenus par critère de Routh-Hurwitz dans le cas fractionnaire pour résoudre système 3.7. Les paramètres de système chaotique  $\mu = 0.5$ ,  $\sigma = 1$  et l'ordre fractionnaire  $\alpha = 0.98$ .

Par proposition précédente, nous prenons  $k_2 = 0.35078$ ,  $k_1 = k_3 = 0$ . Il s'ensuit que  $D(p) < 0$ ,  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_1 a_2 = a_3$ . Cela implique que les trajectoires du système d'ordre fractionnaire contrôlé 3.7 convergent vers le point d'équilibre  $E_2$  comme le montre la Fig..Mais dans le cas de l'ordre entier, il existe deux valeurs propres imaginaires pures de l'équation caractéristique. Cela signifie que la forme d'ordre entier du système contrôlé 3.7 n'est pas stabilisée au même point d'équilibre  $E_2$  lors

du choix des valeurs de paramètres et des gains de contrôle en retour mentionnés ci-dessus.

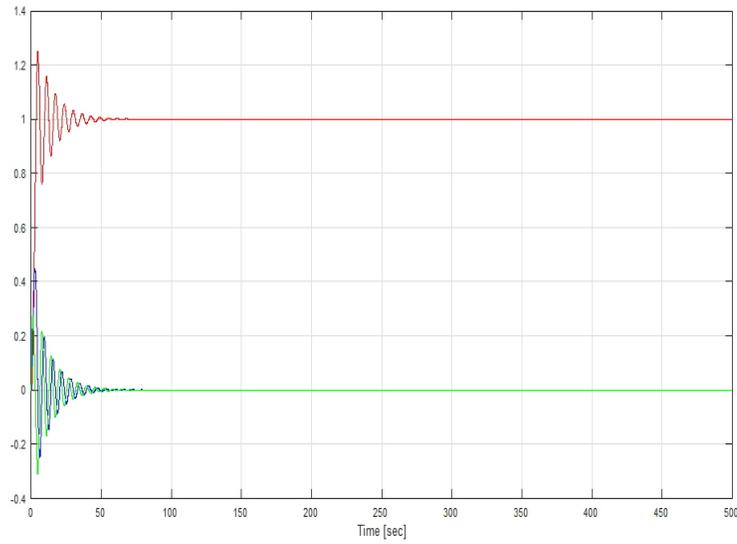


FIG. 3.4 – Les trajectoires du système contrôlé 3.7 stabilisé au point d'équilibre  $E_2$  pour  $\alpha = 0.98$

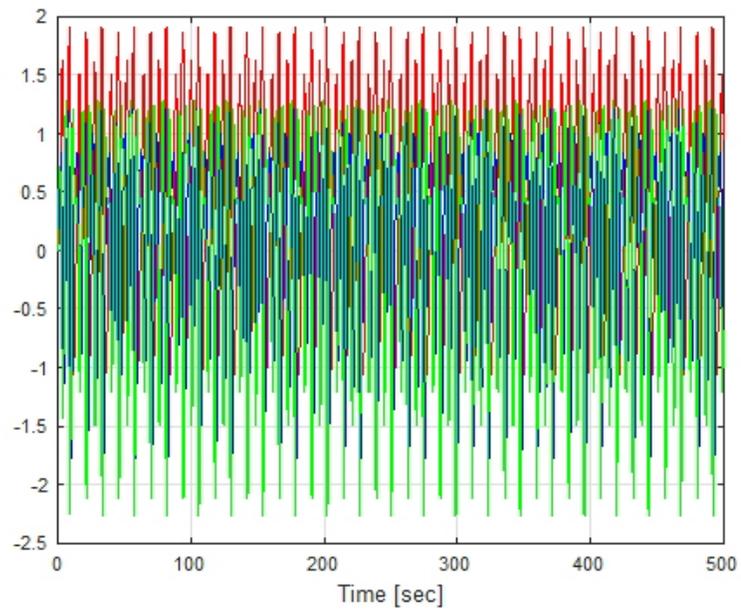


FIG. 3.5 – Les trajectoires du système contrôlé 3.7 nonstabilisé au point d'équilibre  $E_2$  pour  $\alpha = 1$

# Conclusion

L'objectif de ce travail est l'étude de la synchronisation et du contrôle des systèmes dynamiques chaotiques dans le cas fractionnaire et pour arriver aux buts visés, Nous avons étudié la stabilité locale de l'équilibre du système fractionnaire en utilisant les conditions fractionnaires de Routh-Hurwitz pour contrôler également le chaos dans les systèmes proposés par le choix de régulateurs linéaires spécifiques vers son équilibre. Nous avons montré que les systèmes d'ordre fractionnaire sont contrôlés en plus des points d'équilibre, mais pas en plus des homologues d'ordre complet. Ce fait donne aux systèmes de commande fractionnés un avantage sur leurs homologues avec des commandes entières.

# Bibliographie

- [1] Abd-Elouahab, M. S., Hamri, N. E., & Wang, J. (2010). Chaos control of a fractional-order financial system. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010.
- [2] Bouzid, N., & Merad, M. (2017). Traitement de certains problèmes relativistes et non relativistes avec dérivées fractionnaires.
- [3] Chen, G., & Dong, X. (1993). On feedback control of chaotic continuous-time systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Fundamental Theory and Applications*, 40(9), 591-601.
- [4] Devaney, R. (2008). *An introduction to chaotic dynamical systems*. Westview press.
- [5] Fradkov, A. L., & Evans, R. J. (2005). Control of chaos : Methods and applications in engineering. *Annual Reviews in Control*, 29(1), 33-56.
- [6] Guessas, M. L. (2012). *Backstepping Backstepping adaptatif pour le contrôle la poursuite et la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques*. Université de Biskra.
- [7] Menacer, T. (2014). *Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires*.
- [8] Müllhaupt, P. (2009). *Introduction à l'analyse et à la commande des systèmes non linéaires*. PPUR Presses polytechniques

- [9] Petráš, I. (2011). Fractional-order nonlinear systems : modeling, analysis and simulation. Springer Science & Business Media.
- [10] Senouci, A., & Menacer, T. (2019). Control, Stabilization and Synchronization of Fractional-Order Jerk System. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 19(4).
- [11] Senouci, A. (2020). Systèmes dynamiques chaotiques et synchronisation (Doctoral dissertation, Université Mohamed Khider–BISKRA).

# Annexe A : Critère de Routh-Hurwitz dans le cas fractionnaire

On a le système fractionnaire suivante :

$$D^\alpha x(t) = f(x, t) \quad (3.8)$$

où  $f = \mathbb{R} * \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Nous avons vu ci-dessus la condition nécessaire et suffisante pour que le système soit asymptotiquement stable(local) :

$$\arg |(\lambda_i)|_{i=1,n} > \alpha \times \frac{\pi}{2}. \quad (3.9)$$

avec  $\lambda_i$  est les valeurs propres de la matrice Jacobienne de  $f$ .

Pour toutes  $\lambda_i$ , la condition 3.9 pose une question intéressante à savoir quelles sont les conditions pour lesquelles toutes les racines de polynome (avec les coefficients, sont tous réels) :

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n. \quad (3.10)$$

vérifient :

$$\arg |(\lambda_i)|_{i=1,n} > \alpha \times \frac{\pi}{2}$$

• Si  $\alpha = 1$ , La condition 3.9 signifie que toutes les valeurs propres ont des parties réelles négatives et ça équivaut à la condition de Routh-Hurwitz :

$$a_1 > 0, \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \dots \quad (3.11)$$

• Si  $\alpha \in ]0, 1[$  la condition de Routh-Hurwitz classiques est suffisante, mais pas nécessaires, donc nous avons besoin d'une nouvelle version de ce critère qui sera adoptée dans le dernier cas.

**Définition 3.5.1** *La discriminant  $D(P)$  du polynôme*

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n.$$

est défini par :

$$D(P) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R(P, P'), \quad (3.12)$$

où  $P'$  est la dérivée de  $P$  avec  $R(P, P')$  est le résultat de  $(2n - 1) \times (2n - 1)$  de  $P(\lambda)$  est son dérivée  $P'(\lambda)$  donnée par :

$$R(P, P') = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_n & 0 \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ n(n-1)a_1 & (n-1)a_1 & \cdots & a_n - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & (n-1)a_1 & \cdots & a_n - 1 & 0 \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & n & (n-1)a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Pour  $n = 3$  on a :

$$D(P) = 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3(a_1)^3 - 4(a_2)^3 - 27(a_3)^3 \quad (3.13)$$

Notant que si  $D(P) > 0, (< 0)$ , il y a un nombre pair (impair) de paires de racines complexes de l'équation  $P(\lambda) = 0$ . Pour  $n = 3$ ,  $D(P) \geq 0$  implique que toutes les racines sont réelles et  $D(P) < 0$  implique qu'il n'y a qu'une seule racines réelles et une paire de racines complexes conjuguées.

**Proposition 3.5.2** 1. Pour  $n = 1$ , la condition 3.9 sera  $a_1 > 0$ .

2. Pour  $n = 2$ , la condition 3.9 soit les conditions de Routh-Hurwitz ou les conditions :  $a_1 < 0, 4a_2 > (a_1)^2, \left| \tan^{-1}(\sqrt{(4a_2 - (a_1)^2})/a_1) \right| > \alpha \times \frac{\pi}{2}$ .

3. Pour  $n = 3$ , si le discriminant  $D(P)$  du polynôme  $P(\lambda)$  est positif dans ce cas la condition du Routh-Hurwitz sera équivalente a la condition 3.9  $\forall \alpha \in ]0, 1]$ , i.e.

$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_1a_2 > a_3 \text{ si } D(P) > 0.$$

4. Si  $D(P) < 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 > 0, a < (\frac{2}{3})$  alors la condition 3.9 est satisfaite.  
Aussi, si  $D(P) < 0, a_1 < 0, a_2 < 0, a > (\frac{2}{3})$  alors toutes les racines du  $P(\lambda)$   
Vérifient  $\arg |(\lambda_i)|_{i=1,n} > \alpha \times \frac{\pi}{2}$ .
5. Si  $D(P) < 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_1 a_2 = a_3$  alors 3.9 est satisfaite pour tous  
 $\alpha \in [0, 1[$ .
6. Pour tout  $n, a_n > 0$  est une condition nécessaire pour 3.9 .
7. Si  $\forall \lambda, P(\lambda) = P(-\lambda)$  puis définir  $x = \lambda^2$  et les conditions du Routh-Hurwitz  
sont nécessaires pour le polynôme résultant en  $x$  pour 3.9  $\forall \alpha \in [0, 1[$ .
8. Pour  $n > 1$ , la condition nécessaire et suffisante pour 3.9 est :

$$\int_0^\infty \frac{dz}{P(z)} |_{C_2} + \int_\infty^0 \frac{dz}{P(z)} |_{C_1} = 0.$$

où,  $C_1$  est la courbe  $z = x(1 - i \tan \frac{\alpha\pi}{2})$  et  $C_2$  est la courbe  $z = x(1 + i \tan \frac{\alpha\pi}{2})$ .

## RÉSUMÉ

Dans ce travail nous avons traité le problème de contrôle feedback d'un système dynamique chaotique d'ordre fractionnaire.

Nous avons commencé par notions de base sur le calcul fractionnel, ensuite nous donnons quelques préliminaires sur les systèmes dynamiques et la théorie du chaos. Nous avons abordé les problèmes de contrôle de chaos dans le cas fractionnaire, nous avons proposé la méthode de contrôle feedback.

En fin, nous avons étudié le problème de stabilisation des points d'équilibre, contrôle de chaos d'un système de Jerk dans le cas fractionnaire. Les résultats théoriques sont validés par de simulations.

**Mot clé :** Systèmes dynamiques chaotiques, calcul fractionnel, critère de Routh-Hurwitz d'ordre fractionnaire, système de Jerk.

## ABSTRACT

In this work we have dealt with the feedback control problem of a chaotic dynamic system of fractional order.

We started with the basics of fractional calculus, then we give some preliminaries on dynamical systems and chaos theory. We have approached the chaos control problems in the fractional case, we have proposed the feedback control method.

Finally, we have studied the problem of stabilization of equilibrium points, chaos control of a Jerk system in the fractional case. Theoretical results are validated by simulations.

**Key word.** Chaotic dynamic systems, fractional computation, Routh-Hurwitz criterion of fractional order, Jerk system.

## المخلص

في هذا العمل ، تعاملنا مع مشكلة مراقبة ردود الفعل للنظام الديناميكي الفوضوي من النظام الكسري. بدأنا بأساسيات حساب التفاضل والتكامل الكسري ، ثم قدمنا بعض التمهيدات في الأنظمة الديناميكية ونظرية الفوضى. لقد اقترب من المشاكل سيطرة الفوضى في حالة كسور ، اقترحنا طريقة مراقبة ردود الفعل. أخيراً ، درسنا مشكلة استقرار نقاط التوازن ، والتحكم في فوضى نظام Jerk في الحالة الكسرية . يتم التحقق من صحة النتائج النظرية عن طريق المحاكاة.

الكلمة الرئيسية : الأنظمة الديناميكية الفوضوية ، حساب التفاضل والتكامل الكسري ، الترتيب الجزئي معيار روث-هورويتز ، نظام جيرك.