

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITE MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTE des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES**



Mémoire présenté par

**Messemeche Ahlam**

En vue de l'obtention du Diplôme de

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Statistique**

Titre

**Contrôle Statistique de la Qualité**

Membres du Comité d'Examen

<b>Pr. NECIR Abdelhakim</b>	UMKB	Président
<b>Pr. MERAGHNI Djamel</b>	UMKB	Encadreur
<b>Dr. ROUBI Afaf</b>	UMKB	Examineur

Juin 2021

## Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A la mémoire de celui qui a trempé la coupe vide pour m'arroser une goutte d'amour  
et qui a moissonné les épines de mon chemin pour m'ouvrir la voie du succès :

Mon très cher père.

A ma très chère mère qui a été mon soutien dans ma carrière académique  
et qui s'est tenue à mes côtés dans les crises de ma vie  
et a dédié mon diplôme à mes frères et sœurs et à l'esprit qui habitait mon âme.

A ma chère sœur Chahrazed et ma petite nièce Tesnim.

A mon cher frère Fethi et mon fiancé Anoir pour leur tendresse, leur complicité  
et leur présence toujours à mes côtés.

A mes tantes Faiza et Saida. A mes oncles et mes grands-parents.

A mes très chères amies les plus proches de mon cœur Amani, Amina, Insaf et Ramissa.

A tous les membres de mes première et deuxième familles Messemeche et Guidouam.

*Ahlam Messemeche*

## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie "Allah Le Tout Puissant" de m'avoir aidée  
et donné la santé et volonté pour arriver à ce stade.

Mes vifs remerciements sont adressés à mon encadreur Pr. **MERAGHNI Djamel**  
pour ses précieux conseils, ses orientations pertinentes et sa patience  
tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Je tiens à remercier Monsieur **Necir Abdelhakim** et Mademoiselle **Roubi Afaf**  
qui m'ont fait l'honneur de faire partie du jury de soutenance.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les enseignants du département de  
Mathématiques présidé par Monsieur **Lakhdari Imad Eddine**.

Finalement, je tiens remercier toute personne qui a contribué de près ou de loin,  
directement ou indirectement à l'accomplissement de ce travail.

*Ahlam Messemeche*

# Table des matières

<b>Dédicace</b>	<b>i</b>
<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>v</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>vi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Distributions de probabilité importantes pour le CSQ</b>	<b>3</b>
<b>1.1 Distribution Binomiale</b> . . . . .	3
<b>1.1.1 Distribution de probabilité</b> . . . . .	4
<b>1.1.2 Paramètres descriptifs</b> . . . . .	4
<b>1.1.3 Représentation graphique</b> . . . . .	5
<b>1.2 Distribution Normale</b> . . . . .	6
<b>1.2.1 Loi normale : cas général</b> . . . . .	7
<b>1.2.2 Paramètre descriptifs</b> . . . . .	8
<b>1.2.3 Propriétés</b> . . . . .	9
<b>1.2.4 Loi normale centrée réduite</b> . . . . .	10
<b>1.3 Distributions Student et de Pearson</b> . . . . .	11

1.3.1	Distribution de Pearson	11
1.3.2	Distribution de Student	12
<b>2</b>	<b>Cartes de contrôle</b>	<b>14</b>
2.1	Définition	14
2.2	Types de cartes	15
2.2.1	Cartes de contrôle par mesures	16
2.2.2	Cartes de contrôle par attributs	16
2.3	Conception des cartes	17
2.3.1	Étapes de mise en œuvre des cartes	17
2.3.2	Limites des décisions	17
2.4	Carte de Shewhart	18
2.4.1	Moyenne-étendue ( $\bar{X} - R$ )	18
2.4.2	Carte de la moyenne/écart type ( $\bar{X} - S$ )	22
2.4.3	Carte de la médiane/étendue ( $X - MR(2)$ )	23
2.5	Carte de la somme cumulée (CUSUM)	25
2.6	Carte des moyennes mobiles avec pondération exponentielle (EWMA)	28
	<b>Conclusion</b>	<b>31</b>
	<b>Annexe : Abréviations et Notations</b>	<b>33</b>

# Table des figures

1.1 Représentations graphiques de la loi binomiale pour différentes valeurs des paramètres $n$ et $p$ (source : [7]). . . . .	6
1.2 Densités de probabilité des lois normales générales (gauche) et centrée réduite (droite) . . . . .	8
1.3 Aires sous la courbe $\mathcal{N}(0, 1)$ (source : [7]). . . . .	9
1.4 Graphes des densités de probabilité des distributions de Pearson (gauche) et Student (droite) pour différentes valeurs du degré de liberté (dl) . . . . .	12
2.1 Éléments (droites et points) d'une carte de contrôle statistique (source : [1]).	15
2.2 Principe d'une carte de contrôle (source : [2]). . . . .	16
2.3 Probabilités de trouver un point entre les niveaux $1s$ , $2s$ et $3s$ (source : [2]).	18
2.4 Carte $\bar{X}$ pour les poids à la naissance de 100 bébés . . . . .	21
2.5 Carte $R$ pour les poids à la naissance de 100 bébés . . . . .	21
2.6 Carte $S$ pour les poids à la naissance de 100 bébés . . . . .	23
2.7 Carte $X$ pour les poids à la naissance de 100 bébés . . . . .	25
2.8 Carte $MR$ pour les poids à la naissance de 100 bébés . . . . .	26
2.9 Carte CUSUM pour les poids à la naissance de 100 bébés . . . . .	28
2.10 Carte EWMA pour les poids à la naissance de 100 bébés . . . . .	30

# Liste des tableaux

1.1 Synthèse des principales distributions importantes pour le CSQ . . . . .	13
2.1 Paramètres nécessaires à la construction des cartes de contrôle.( $k = 3$ ) . .	30

# Introduction

**L**e contrôle statistique de la qualité (CSQ) est apparu aux Etats Unis d'Amérique (USA) en 1924.

Le mot "*statistique*" signifie que l'on a affaire à des nombres qu'on traite pour en tirer des conclusions.

Le mot "*qualité*" ne signifie pas seulement qu'un produit est bon ou mauvais. Il concerne les caractéristiques d'un objet ou d'un processus qui est mis à l'étude.

Le mot "*contrôle*" signifie qu'on garde une chose entre certaines limites.

Quand ces trois mots sont mis ensemble, le contrôle statistique de la qualité, appliqué à une opération de fabrication, signifie qu'on étudie les caractéristiques du processus afin qu'il se comporte comme on le désire.

Un processus de production est un processus reprenant les personnes, l'équipement, les matières premières, les méthodes et l'environnement qui travaillent ensemble pour fabriquer un produit donné. On parle souvent des "5M" pour nommer les différentes composantes d'un procédé : Main d'œuvre, Machine, Matière première, Méthode et Milieu. On peut schématiser par l'équation suivante :

**Processus de production = Processus de fabrication + Processus de contrôle.**

En plus de cette introduction et d'une conclusion, ce mémoire est composé de deux chapitres :

- **Premier chapitre** : Distributions de probabilité importantes pour le CSQ

Ce chapitre est consacré à un rappel sur les distributions de probabilité importantes pour le contrôle statistique de la qualité et à leurs propriétés fondamentales.

- **Deuxième chapitre** : Cartes de contrôle

Dans ce chapitre, après un bref rappel sur les cartes de contrôle, on introduit les deux types les plus connus ; à savoir les cartes aux mesures et les cartes aux attribus. Ensuite, on présente avec plus de détails les différentes cartes aux mesures : shewhart, CUSUM et EWMA. Enfin, Les résultats numériques et les représentations graphiques sont obtenus à l'aide des packages "*qcc*" et "*qicharts*" du logiciel de traitement statistique **R** version 3.5.0.

# Chapitre 1

## Distributions de probabilité importantes pour le CSQ

**D**ans ce chapitre, on présente les principales distributions de probabilité qui interviennent dans le contrôle statistique de la qualité.

### 1.1 Distribution Binomiale

**Définition 1.1.1** *La loi binomiale est la loi de probabilité d'une variable aléatoire (v.a)  $X$  représentant le nombre de succès dans une série d'épreuves indépendantes de Bernoulli.*

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui donne lieu à deux éventualités exclusives, succès et échec, de probabilités respectives  $p$  et  $q = 1 - p$ . Cette loi est donc caractérisée par deux paramètres : le nombre d'épreuves  $n$  et la probabilité de succès  $p$ . L'ensemble des valeurs possibles pour  $X$  est  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ . On dit que  $X$  suit la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  et on écrit  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , (voir [9]).

**Remarque 1.1.1**  *$X$  peut être considérée comme la somme de  $n$  v.a de Bernoulli indépendantes de même paramètre  $p$  (voir [10], page 31 – 33).*

**Exemple 1.1.1** *On joue  $n$  fois à pile ou face (de façon indépendante) et on note par  $X_i$  le résultat du  $i^{\text{ème}}$  lancer avec*

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si on obtient Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

*On désigne par  $X$  le nombre de "Pile" obtenus. Si la pièce est équilibrée, alors*

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n, 0.5).$$

### 1.1.1 Distribution de probabilité

Pour déterminer les probabilités des événements élémentaires  $P(X = k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  d'une v.a binomiale, il faut tout d'abord déterminer le nombre de possibilités d'obtenir  $k$  succès au cours de  $n$  épreuves, puis de les multiplier par les probabilités de succès et d'échec  $p$  et  $q = 1 - p$  respectivement. La première est égale au nombre de combinaisons  $C_n^k$  de  $k$  objets parmi  $n$ .

**Proposition 1.1.1** *Les probabilités élémentaires d'une v.a  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  sont données par*

$$p_k := P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

**Remarque 1.1.2** *En appliquant la formule du binôme de Newton, on a bien*

$$\sum_{k=0}^n p_k = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1.$$

### 1.1.2 Paramètres descriptifs

$$E(X) = np \text{ et } \text{Var}(x) = npq.$$

**Preuve.** D'après la remarque [1.1.1](#), on peut écrire

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

où les  $X_k \sim \mathcal{B}(p)$  indépendantes. Par la linéarité de l'espérance, on a

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) = nE(X_1) = np,$$

et par l'indépendance des  $X_k$ , on a

$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots + Var(X_n) = nVar(X_1) = npq.$$

C'est le résultat voulu. ■

### 1.1.3 Représentation graphique

Elle est habituellement présentée sous la forme d'un diagramme en bâtons, dont la forme varie selon les valeurs de  $n$  et  $p$  comme le montre la figure [1.1](#).

On peut faire les remarques suivantes concernant ces diagrammes :

- La forme de la distribution est symétrique si  $p = 1/2$  (pour tout  $n$ ), sinon elle est dissymétrique.
- La distribution tend à devenir symétrique lorsque  $n$  est grand. De plus, si  $p$  n'est pas trop voisin de 0 ou 1, elle s'approche de la distribution normale. C'est le théorème de De Moivre-Laplace ([10](#), 62-64).

**Proposition 1.1.2 (somme de deux v.a binomiales)** *La somme de deux v.a binomiales indépendantes est une v.a binomiale. Plus précisément, si  $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$  et  $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$  alors  $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$ .*

**Preuve.** Une façon simple de démontrer ce résultat utilise la fonction caractéristique (voir [10](#), page 58). ■

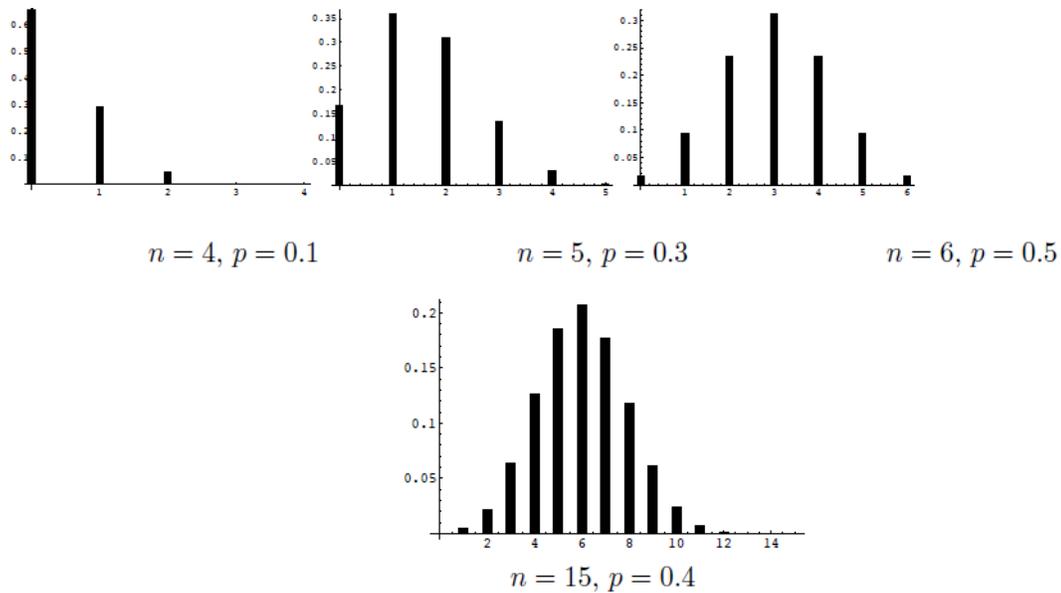


FIG. 1.1 – Représentations graphiques de la loi binomiale pour différentes valeurs des paramètres  $n$  et  $p$  (source : [7]).

## 1.2 Distribution Normale

C'est au début du XIX siècle que Carl Friedrich Gauss puis Simon Laplace donnent la forme définitive de cette loi. C'est la raison pour laquelle elle est aussi connue sous le nom de loi de Gauss, loi de Laplace ou loi de Laplace-Gauss. Auparavant, en 1773, Abraham de Moivre la considéra comme forme limite de la loi binomiale et en 1772 Simon Laplace l'étudia dans sa théorie des erreurs. Elle jouit d'une importance fondamentale car elle représente la base d'un grand nombre de méthodes statistiques. Ceci est lié au fait qu'elle intervient, en vertu du théorème centrale-limite (voir [10], page 65) comme loi limite dans des conditions très générales. Youden, du National Bureau of Standards, résume l'importance de cette comme suit (voir [7], page 30) :

La  
loi Normale  
des erreurs  
constitue l'une  
des généralisations  
les plus étendues de  
la philosophie naturelle  
dans l'histoire de l'humanité.

C'est un outil très précieux pour la  
recherche en sciences physiques et technologiques  
ainsi qu'en sciences sociales et sciences de la nature et la vie.

Elle est indispensable à toute sorte d'analyse statistique  
et à l'interprétation des données obtenues par l'observation ou l'expérience.

### 1.2.1 Loi normale : cas général

**Définition 1.2.1** Une v.a continue  $X$  suit une loi normale si sa fonction de densité de probabilité est de la forme

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x-m}{\sigma} \right)^2 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

où  $m \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$  sont appelés paramètres de la loi normale. On écrit  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$ .

#### Remarque 1.2.1

1. Pour montrer que  $\int_{\mathbb{R}} f(x) = 1$ , on utilise le fait que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ . (c'est l'intégrale de Gauss).
2. La loi normale étant tabulée (par rapport à sa fonction de répartition), l'utilité de l'expression (1.1) est minime.

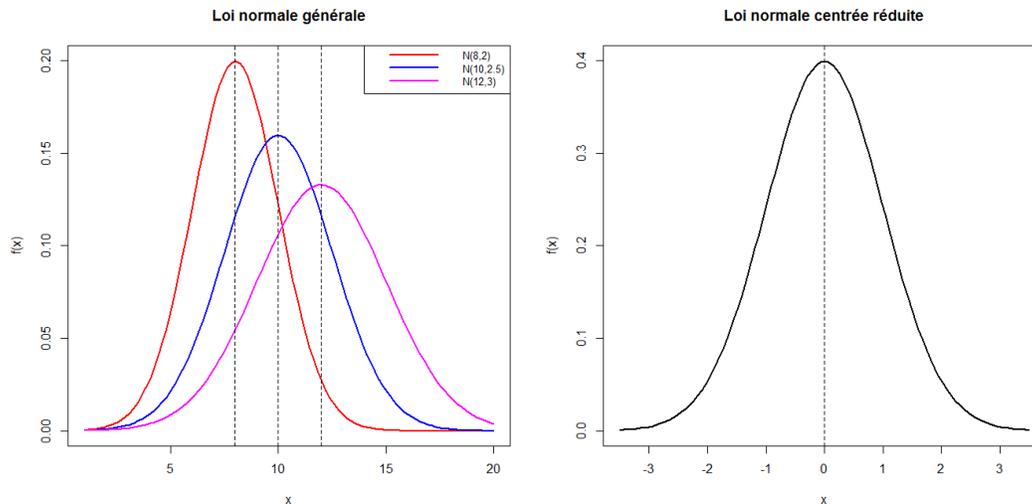


FIG. 1.2 – Densités de probabilité des lois normales générales (gauche) et centrée réduite (droite)

## 1.2.2 Paramètre descriptifs

En déduit, à l'aide de la formule qui exprime les moments d'une v.a partir des dérivées de la fonction caractéristique (voir [10], page 57), que

$$E(X) = m \text{ et } Var(X) = \sigma^2.$$

### Remarque 1.2.2

1. Les deux quantités ci-dessus peuvent être calculées directement (à partir de leurs définitions), en utilisant l'intégrale de Gauss.

2. On dit que la loi ou la v.a est  $\left\{ \begin{array}{l} \text{centrée} \text{ si } m = 0, \\ \text{réduite} \text{ si } \sigma = 1. \end{array} \right.$

Dans le cas où l'on a simultanément  $m = 0$  et  $\sigma = 1$ , la v.a est dite centrée réduite ou standard (voir le graphe de droite de la figure 1.2).

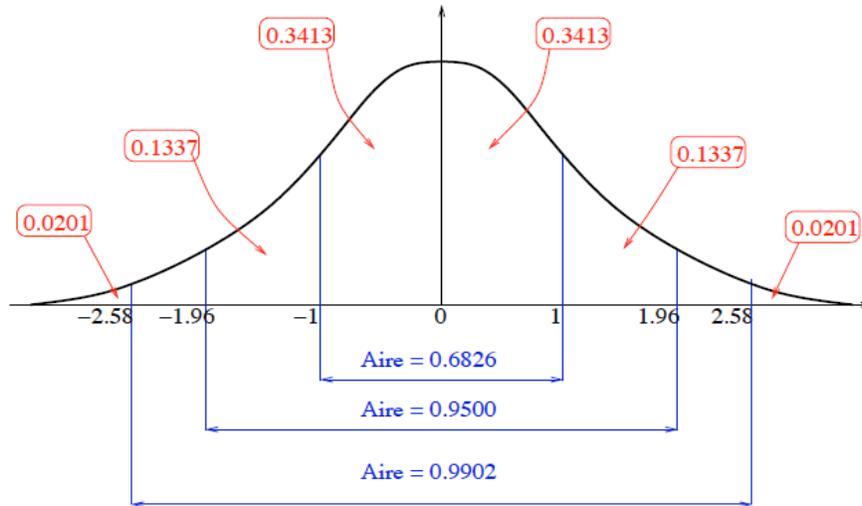


FIG. 1.3 – Aires sous la courbe  $\mathcal{N}(0, 1)$  (source : [7]).

### 1.2.3 Propriétés

La fonction de densité de probabilités de la loi normale a la forme d'une «courbe en cloche», comme le montre la figure [1.2].

- La distribution est symétrique par rapport à la droite d'équation  $x = m$ . Donc l'aire sous la courbe de part et d'autre de cette droite est égale à 0.5.
- Le paramètre  $\sigma$  représente la différence des abscisses entre le sommet de la courbe et le point d'inflexion. La distribution est d'autant plus étalée que  $\sigma$  est grand.
- L'axe des abscisses est une asymptote horizontale. On a

$$P(m - \sigma < X < m + \sigma) = 0.6826,$$

$$P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) = 0.9544,$$

$$P(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) = 0.9974.$$

De la dernière équation, on déduit que l'aire sous la courbe à l'extérieur de l'intervalle  $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$  est négligeable.

- Le graphique [1.3] montre les probabilités (aires) de quelques intervalles particuliers.

### 1.2.4 Loi normale centrée réduite

C'est le cas particulier de v.a normales correspondant à  $m = 0$  et  $\sigma^2 = 1$ . loi la plus importante son rôle est central dans de nombreux modèles probabilistes et dans toute la statistique. Elle possède des propriétés intéressantes qui la rendent agréable à utiliser (voir [8]).

**Définition 1.2.2** Une v.a  $Z$  suit une loi normale centrée réduite ou standard si sa densité  $f$  est donnée par

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

C'est un cas particulier de la formule (1.1). Sa courbe est illustrée par le graphe de droite de la figure 1.2.

#### Remarque 1.2.3

1. On Vérifie que  $f$  est d'intégrale 1. Si on note  $I = \int_{\mathbb{R}} f(z) dz$ ; alors

$$I^2 = \left( \int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right) \left( \int_{\mathbb{R}} f(y) dy \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) dx dy.$$

On fait changement de variables polaires :  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ , alors  $dx dy = r dr d\theta$ . On obtient

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \exp(-r^2/2) r d\theta dr = 1.$$

2. La v.a  $-Z$  suit encore une loi normale centrée réduite.

En effet, pour  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$ , on a

$$P[a \leq -Z \leq b] = P[-b \leq Z \leq -a] = \int_{-b}^{-a} f(z) dz.$$

Le changement de variable  $u = -z$  et la parité de la fonction  $f$  donnent

$$P[a \leq -Z \leq b] = \int_a^b f(-u)du = \int_a^b f(u)du = P[a \leq Z \leq b].$$

En d'autres termes, la loi de  $-Z$  est la même que celle de  $Z$ .

3. Toute v.a  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$  se transforme en une v.a  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  par le changement de variable

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}.$$

## 1.3 Distributions Student et de Pearson

### 1.3.1 Distribution de Pearson

Plus connue sous le nom de distribution du khi-deux, elle a été découverte en 1905 par le mathématicien britannique Karl Pearson (1857 – 1936). Cette distribution est très importante pour tester l'ajustement d'une loi théorique à une distribution expérimentale (test d'adéquation du khi-deux) et pour déterminer la loi de la variance empirique [7].

**Définition 1.3.1** Si  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  sont  $n$  v.a indépendantes qui suivent la loi normale centrée réduite, alors la v.a  $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2$  est une v.a distribuée selon la loi du khi-deux à  $n$  degrés de liberté.

#### Remarque 1.3.1

1. On écrit  $X \sim \mathcal{X}_n^2$ .
2. On a  $E(X) = n$  et  $Var(X) = 2n$  (voir [6], page 73).

La densité de probabilité n'est pas donnée ici car ayant une expression très compliquée (voir [6], page 72) et n'ayant pas d'intérêt particulier. La distribution du khi-deux est continue à valeurs positives et présente un étalement sur le côté supérieur. Elle ne dépend que du nombre de degrés de liberté, comme le montre le graphe de gauche de la figure 1.4.

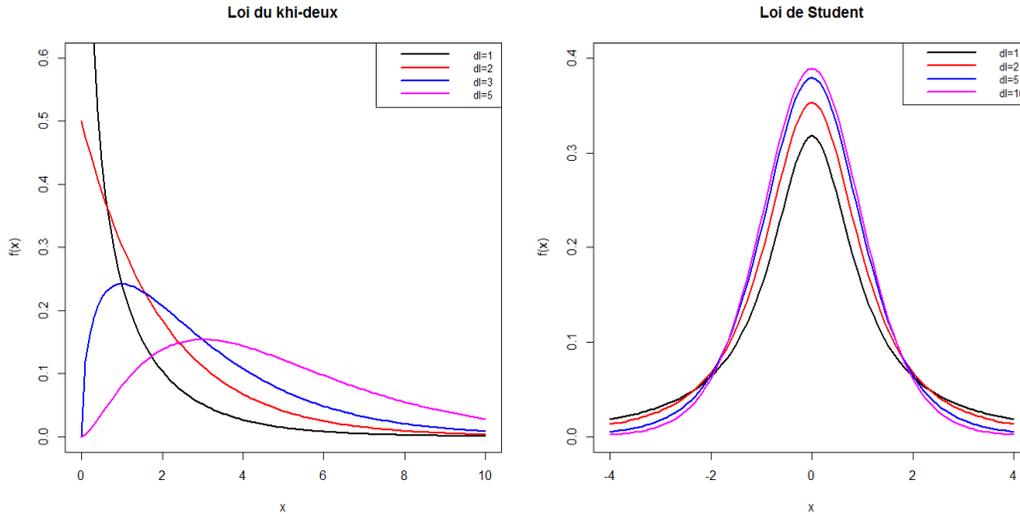


FIG. 1.4 – Graphes des densités de probabilité des distributions de Pearson (gauche) et Student (droite) pour différentes valeurs du degré de liberté (dl)

### 1.3.2 Distribution de Student

Student est le pseudonyme de V.S. Gosset, statisticien anglais, qui a découvert et développé cette distribution en 1908. Elle très utile pour la construction d’intervalles de confiance de la moyenne ainsi que dans les tests d’hypothèses relatifs à cette dernière.

**Définition 1.3.2** Soient  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y \sim \mathcal{X}_n^2$  deux v.a indépendantes. La v.a  $X$  définie par

$$X := \frac{Z}{\sqrt{Y/n}}$$

est une v.a de Student à  $n$  degrés de liberté.

#### Remarque 1.3.2

1. On écrit  $X \sim t_n$ .
2. Son espérance et sa variance n’existent pas pour  $n = 1$ , qui correspond à la loi de Cauchy (rapport de deux v.a normales centrées réduites). Plus précisément, on a

Nom	Paramètre descriptifs
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$E(X) = np, Var(X) = npq$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$	$E(X) = m, ar(X) = \sigma^2$
Khi-deux $\mathcal{X}_n^2$	$E(X) = n, Var(X) = 2n$
Student $t_n$	$E(X) = 0$ si $n \geq 2$ , $Var(X) = n/(n - 2)$ si $n \geq 3$

TAB. 1.1 – Synthèse des principales distributions importantes pour le CSQ

(voir [10], page 98)

$$E(X) = 0, \text{ si } n \geq 2 \text{ et } Var(X) = \frac{n}{n - 2}, \text{ si } n \geq 3.$$

3. On la convergence en loi suivante :

$$t_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Autrement dit, lorsque  $n$  devient grand, l'allure de la courbe de Student devient de plus en plus similaire à la cloche de Gauss, comme le montre le grahe de droite de la figure 1.4.

Cette distribution est symétrique par rapport à l'origine. Elle ne dépend que de la valeur du degré de liberté  $n$ , comme s'est illustré par le grahe de droite de la figure 1.4. Sa densité de probabilité n'est pas donnée ici, pour les mêmes raisons que pour la distribution du khi-deux. Sa courbe est un peu plus aplatie que celle de la distribution normale centrée réduite.

A la fin de ce chapitre, on résume, dans le tableau 1.1, les paramètres descriptifs des quatre lois vues ci-dessus.

# Chapitre 2

## Cartes de contrôle

Une carte de contrôle est un graphique qu'on utilise pour vérifier la qualité dans un processus de production. C'est un outil statistique essentiel dans le CSQ, qu'on peut généraliser à d'autres domaines de la vie socio-économique (sociologie, éducation, agriculture,...). Le but est de détecter des défauts de fabrication et acquérir une plus grande régularité dans les performances d'un processus afin de le maîtriser.

### 2.1 Définition

Une carte de contrôle, illustrée par les figures [2.1](#) et [2.2](#), est un diagramme composé de points et de droites horizontales qui matérialisent des zones de confiances. Ces lignes ne sont pas construites au hasard mais selon des critères bien précis. Si les points sont entre les droites, on déduit que tout est en règle, sinon il faut agir sur l'outil de fabrication en lui apportant l'ajustement nécessaire.

Les points représentés sur une carte de contrôle peuvent être des valeurs individuelles, des moyennes, des étendues, des écarts-types, des proportions de défauts. En général, ce sont des statistiques relatives à une certaine caractéristique calculée à partir d'échantillons successifs prélevés dans une fabrication. Chacun de ces points a pour abscisse le numéro de l'échantillon ou le temps de prélèvement de chaque échantillon (toutes les 20 minutes,

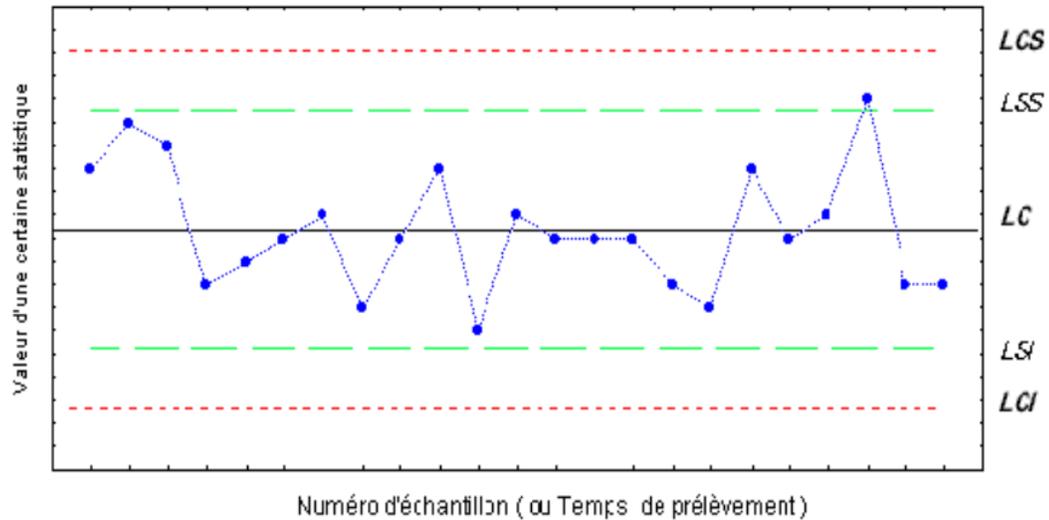


FIG. 2.1 – Éléments (droites et points) d'une carte de contrôle statistique (source : [1]).

toutes les heures, tous les jours,...) et pour ordonnée la valeur empirique correspondante de la statistique.

Les droites horizontales d'une carte de contrôle représentent :

- Une limite de contrôle supérieure ( $LCS$ ).
- Une limite de surveillance supérieure ( $LSS$ ).
- Une ligne centrale ( $LC$ ).
- Une limite de surveillance inférieure ( $LSI$ ).
- Une limite de contrôle inférieure ( $LCI$ ).

## 2.2 Types de cartes

Il y a deux types de cartes de contrôle : cartes aux attributs et cartes aux mesures. Dans ce chapitre, on s'intéresse surtout à ces dernières (sections [2.4](#), [2.5](#) et [2.6](#)).

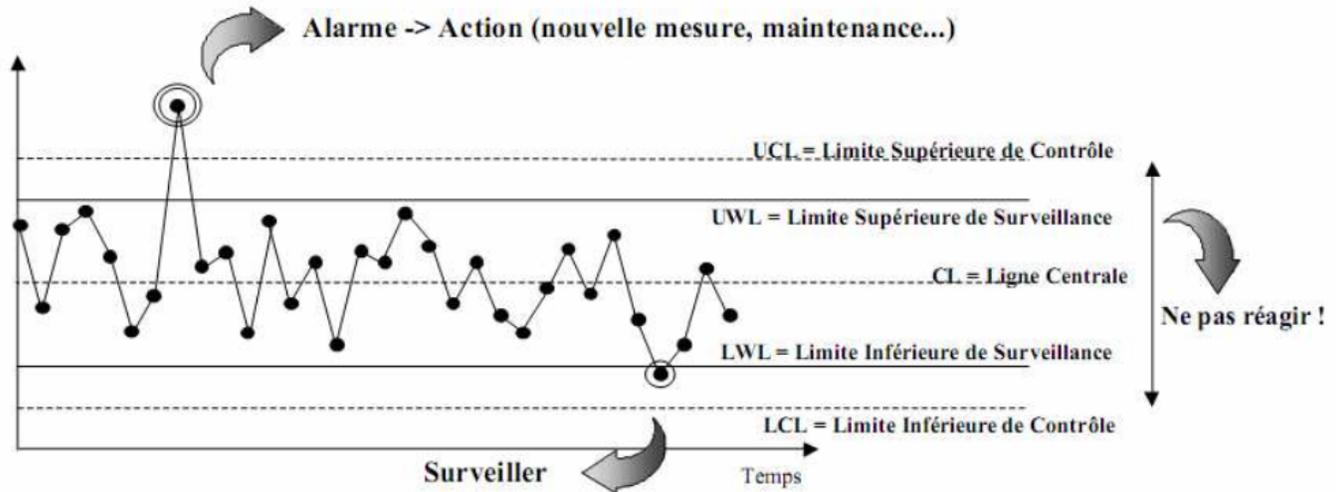


FIG. 2.2 – Principe d'une carte de contrôle (source : [2]).

### 2.2.1 Cartes de contrôle par mesures

Ce type de cartes est réservé aux caractéristiques mesurables telles la température, le diamètre, le poids, la longueur,... En d'autres termes, ces cartes s'appliquent au contrôle de variables quantitatives continues. Il en existe plusieurs formes qui diffèrent les unes des autres selon la statistique utilisée. On distingue, à titre d'exemple :

- Cartes de Shewhart : basées sur les moyennes, étendues (ranges), écarts-types, valeurs individuelles et étendues mobiles (moving ranges).
- Cartes des sommes cumulées : CUSUM.
- Cartes des moyennes mobiles pondérées exponentiellement : EWMA.

### 2.2.2 Cartes de contrôle par attributs

Ces cartes sont utilisées quand le produit ne peut être caractérisé par une propriété mesurable sur une échelle continue. Autrement dit, elles sont conçues lors du contrôle de variables quantitatives discrètes (nombre ou proportion d'objets défectueux dans une production). Elles permettent aussi de contrôler des variables qualitatives (décider si un certain produit est conforme ou non, bon ou mauvais,...).

Les principales cartes de contrôle aux attributs sont :

- La carte  $p$  pour la proportion de défectueux.
- La carte  $np$  pour le suivi du nombre de défectueux.
- La carte  $c$  pour le suivi du nombre de défauts par unité.
- La carte  $\mu$  pour le nombre moyen de défauts par unité.

## 2.3 Conception des cartes

### 2.3.1 Etapes de mise en œuvre des cartes

La réalisation d'une carte de contrôle se fait à travers les étapes suivantes (voir [5]) :

1. Choix de la caractéristique d'intérêt.
2. Choix du type de contrôle (par mesures ou par attributs).
3. Choix du type de carte (en fonction de la rapidité du dérèglement).
4. Prélèvement de l'échantillon en précisant sa taille et la fréquence d'échantillonnage.
5. Etude préliminaire du processus (détermination des paramètres de la caractéristique).
6. Etablissement des règles de décision.

### 2.3.2 Limites des décisions

Les limites définies pour les résultats individuels sont habituellement fondées sur les valeurs de l'écart type  $s$  (voir la figure [2.3]). Elles peuvent être fixées à (voir [2]) :

- $\pm 3s$  : situation hors contrôle. Dans ce cas, on a deux limites (supérieure et inférieure) de contrôle  $LSC$  et  $LIC$  (ou  $LCS$  et  $LCI$  comme dans la figure [2.1]) au delà desquelles le résultat n'est pas accepté et les unités produites correspondantes sont rejetées.
- $\pm 2s$  : déviation du procédé d'analyse. On a deux limites (supérieure et inférieure) d'alerte (ou surveillance)  $LSA$  et  $LIA$  (ou  $LSS$  et  $LSI$  comme dans la figure [2.1]).

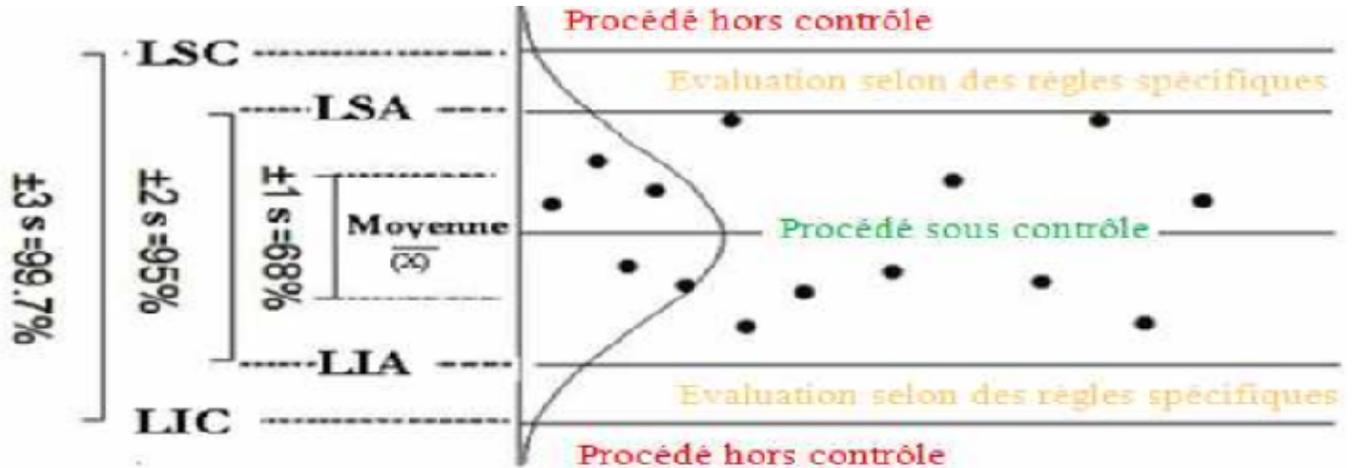


FIG. 2.3 – Probabilités de trouver un point entre les niveaux  $1s$ ,  $2s$  et  $3s$  (source : [2]).

Les points qui se trouvent entre les limites d’alerte et les limites de contrôle permettent au responsable de prendre les précautions nécessaires avant qu’il ne soit trop tard.

## 2.4 Carte de Shewhart

C’est sûrement la carte la plus utilisée pour contrôler un procédé de fabrication. C’est une carte de contrôle par mesures permettant de suivre la justesse (carte à la moyenne) et la fidélité (carte à l’écart type ou à l’étendue) d’une méthode. Sa réalisation consiste à faire une série de  $n$  mesures d’une v.a  $X$ , que l’on suppose de distribution normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ , c-à-d  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . On détermine la moyenne  $\bar{X}$  et les dispersions  $R$  et  $S$  correspondantes.

### 2.4.1 Moyenne-étendue ( $\bar{X} - R$ )

La carte de contrôle pour moyennes et étendues ( $\bar{X} - R$ ) est en fait composée de deux cartes. Une carte des valeurs moyennes (carte  $\bar{X}$ ) et une autre carte des étendues (carte  $R$ ) des échantillons successifs prélevés du procédé. Les points correspondants sont reliés entre eux tout en préservant l’ordre chronologique de prélèvement.

Soit  $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$  un échantillon, de taille  $n_i \geq 1$ , prélevé au temps  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Les moyennes et étendues sont respectivement :

$$\bar{X}_i := \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \text{ et } R_i := \max_j X_{ij} - \min_j X_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

**Remarque 2.4.1**

1. *En général, les tailles  $n_i$  des différents échantillons sont égales. On note la taille commune par  $n$  :  $n_i = n, i = 1, 2, \dots, N$ .*
2. *En pratique, la taille  $n$  varie de 2 à 5.*

**Choix des limites de contrôle**

**1<sup>er</sup> Cas :  $\mu$  et  $\sigma$  connus**

Les limites de contrôle sur la carte  $\bar{X}$  sont calculées sur base de la distribution de la moyenne empirique  $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ . Elles sont définies (avec la ligne centrale) par

$$LCS := \mu_{\bar{X}} + k\sigma_{\bar{X}} = \mu + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad LC := \mu_{\bar{X}} = \mu \text{ et } LCI := \mu_{\bar{X}} - k\sigma_{\bar{X}} = \mu - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (2.1)$$

où  $k > 0$  désigne la fraction d'écart que l'on permet par rapport à la moyenne. En général, on prend  $k = 1, 2$  ou  $3$ .

Le calcul des limites de contrôle sur la carte  $R$  nécessite de connaître la distribution de probabilité de cette v.a. Plus précisément sa moyenne  $\mu_R$  et son écart-type  $\sigma_R$  respectivement égaux à

$$\mu_R = d_2\sigma \text{ et } \sigma_R = \frac{d_3}{d_2}\mu_R = d_3\sigma,$$

où les constantes  $d_2$  et  $d_3$  sont précisées dans la remarque 2.4.3. Les limites de contrôle de la carte  $R$  s'en déduisent comme suit :

$$LCS := d_2\sigma + kd_3\sigma, \quad LC := d_2\sigma \text{ et } LCI := d_2\sigma - kd_3\sigma.$$

**Remarque 2.4.2** *Bien que la distribution de  $R$  n'est pas symétrique autour de sa moyenne  $\mu_R$ , les limites ci-dessus sont placées symétriquement autour de cette dernière, juste pour simplifier les choses.*

**2<sup>eme</sup> Cas :  $\mu$  et  $\sigma$  inconnus**

Ils seront estimés par les statistiques suivantes :

$$\hat{\mu} = \bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n}{N} \text{ et } \hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} = \frac{1}{d_2} \times \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_N}{N}.$$

L'estimateur  $\hat{\sigma}$  de  $\sigma$  est préféré à l'écart type empirique  $s$  calculé sur tout l'échantillon car celui-ci risque de surestimer  $\sigma$  si le procédé n'est pas parfaitement sous-contrôle (il englobe les variabilité entre inter at intra échantillons). Les limites estimées deviennent donc pour la carte  $\bar{X}$  :

$$LCS := \bar{\bar{x}} + \frac{k}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}, \quad LC := \bar{\bar{x}} \text{ et } LCI := \bar{\bar{x}} - \frac{k}{d_2\sqrt{n}}\bar{R} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R}, \quad (2.2)$$

et pour la carte  $R$  :

$$LCS := \bar{R} + \frac{kd_3}{d_2}\bar{R} = D_4\bar{R}, \quad LC := \bar{R} \text{ et } LCI := \bar{R} - \frac{kd_3}{d_2}\bar{R} = D_3\bar{R},$$

où les constantes  $d_2, d_3, A_2, D_3$  et  $D_4$  sont précisées dans la remarque [2.4.3](#).

**Exemple 2.4.1** *Le poids (en grammes) à la naissance de bébés, pendant un certain mois de l'année, est supposé être une v.a normale de paramètres de 3400 et 600. On désire construire une carte de contrôle de Shewhart ( $\bar{X} - R$ ). Pour cela on dispose d'un échantillon de 100 mesures que l'on divise en 20 groupes de même taille. Les figures [2.4](#) et [2.5](#) représentent la carte ( $\bar{X} - R$ ).*

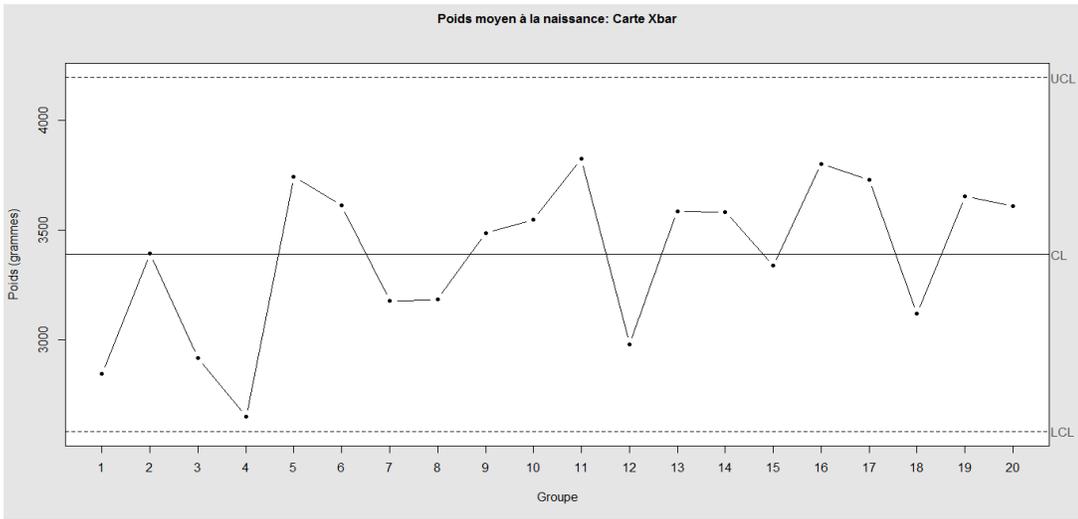


FIG. 2.4 – Carte  $Xbar$  pour les poids à la naissance de 100 bébés

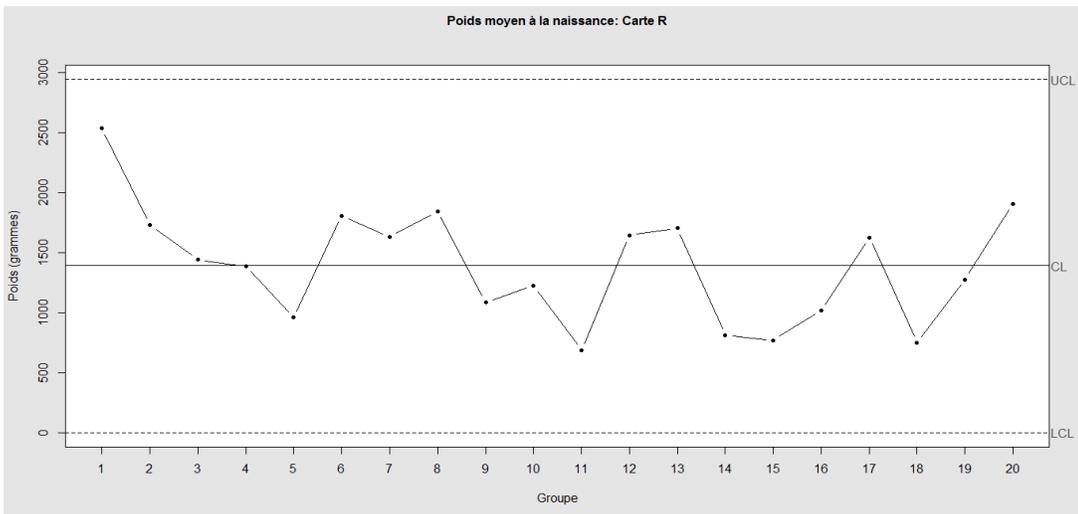


FIG. 2.5 – Carte  $R$  pour les poids à la naissance de 100 bébés

### 2.4.2 Carte de la moyenne/écart type ( $\bar{X} - S$ )

Une carte de contrôle du type ( $\bar{X} - S$ ) suit les mêmes principes que la carte ( $\bar{X} - R$ ) à la différence que l'étendue  $R_i$  calculée sur l'échantillon  $i$  est remplacée par l'écart type

$$s_i := \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n_i - 1}}, i = 1, \dots, N.$$

#### Choix des limites de contrôle

Les limites de la carte  $\bar{X}$  sont les mêmes que celles définies dans (2.1) et (2.2). Pour la carte  $S$ , on distingue aussi deux cas.

#### 1<sup>er</sup> Cas : $\mu$ et $\sigma$ connus

Les limites de contrôle de la carte  $S$  sont

$$LCS := c_4\sigma + k\sigma\sqrt{1 - c_4^2} = B_6\sigma, \quad LC := c_4\sigma \quad \text{et} \quad LCI := c_4\sigma - k\sigma\sqrt{1 - c_4^2} = B_5\sigma.$$

#### 2<sup>eme</sup> Cas : $\mu$ et $\sigma$ inconnus

Ils sont estimés par les statistiques suivantes :

$$\hat{\mu} := \bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_N}{N} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma} := \frac{\bar{s}}{c_4} = \frac{1}{c_4} \times \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_N}{N}.$$

L'estimateur  $\hat{\sigma}$  de  $\sigma$  est préféré à la valeur de l'écart type empirique  $s$  calculée sur tout l'échantillon. Les limites deviennent donc pour la carte  $\bar{X}$  :

$$LCS := \bar{\bar{x}} + \frac{k}{c_4\sqrt{n}}\bar{s} = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s}, \quad LC := \bar{\bar{x}} \quad \text{et} \quad LCI := \bar{\bar{x}} - \frac{k}{c_4\sqrt{n}}\bar{s} = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s},$$

et pour la carte  $S$  :

$$LCS := \bar{s} + \frac{k\bar{s}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2} = B_4\bar{s}, \quad LC := \bar{s} \quad \text{et} \quad LCI := \bar{s} - \frac{k\bar{s}}{c_4}\sqrt{1 - c_4^2} = B_3\bar{s},$$

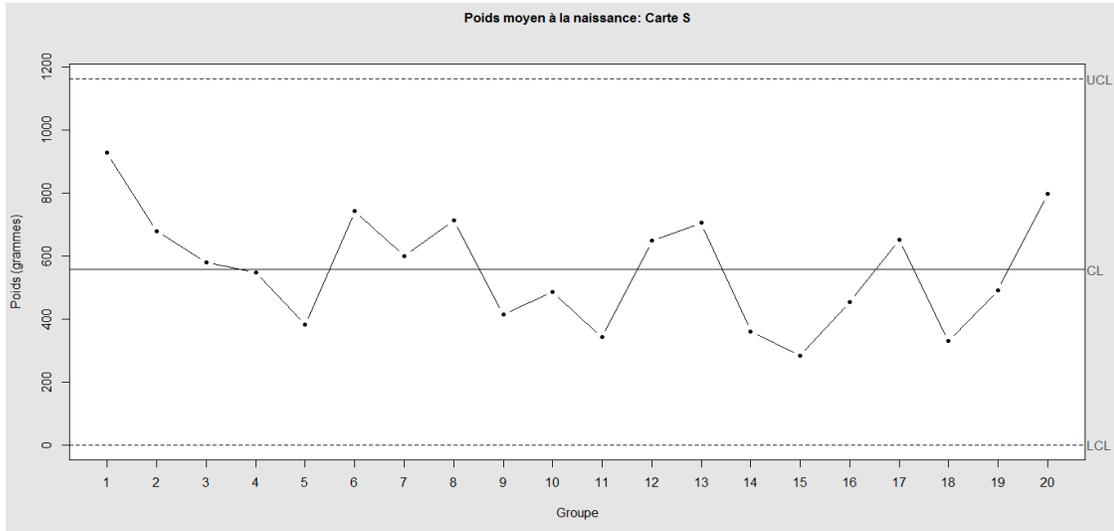


FIG. 2.6 – Carte  $S$  pour les poids à la naissance de 100 bébés

où les constantes  $c_4, A_3, B_3, B_4, B_5$  et  $B_6$  sont précisées dans la remarque [2.4.3](#).

**Exemple 2.4.2** On reprend l'exemple des bébés et on construit la carte  $S$  sur la figure [2.6](#).

### 2.4.3 Carte de la médiane/étendue ( $X - MR(2)$ )

**Définition 2.4.1** La carte du type  $(X - MR(2))$  est une carte de contrôle double sur laquelle sont représentées les valeurs individuelles (carte  $X$ ) et les étendues mobiles entre deux observations successives (carte  $MR(2)$ ).

Plus précisément, si  $X_i$  est la valeur d'une caractéristique mesurée sur un échantillon de taille 1 au temps  $i$ , les points représentés sur la carte  $(X - MR(2))$  sont les  $X_i, i = 1, 2, \dots, N$  (carte  $X$ ) et les  $MR(2)_i = |X_i - X_{i-1}|, i = 2, 3, \dots, N$  (carte  $MR(2)$ ).

**Choix des limites de contrôle** Les limites de contrôle de la carte  $(X - MR(2))$  se calculent de la même manière que pour la carte  $(\bar{X} - R)$  avec  $n = 1$ . La v.a

$$MR(2) = \max(X_i, X_{i-1}) - \min(X_i, X_{i-1}), i = 2, 3, \dots, N.$$

est une statistique qui mesure l'étendue entre deux observations. Ses moyenne et écart-type sont (d'après [1], page 25)

$$\mu_{MR(2)} = d_2\sigma \text{ et } \sigma_{MR(2)} = d_3\sigma.$$

Selon les cas, les limites de contrôle de la carte  $(X - MR(2))$  sont donc :

**1<sup>er</sup> Cas :  $\mu$  et  $\sigma$  connus**

Les limites sur la carte  $X$  sont

$$LCS := \mu + k\sigma, \quad LC := \mu, \quad \text{et} \quad LCI := \mu - k\sigma,$$

et sur la carte  $MR(2)$

$$LCS := \mu_{MR(2)} + k\sigma_{MR(2)}, \quad LC := \mu_{MR(2)}, \quad \text{et} \quad LCI := \mu_{MR(2)} - k\sigma_{MR(2)}.$$

**2<sup>eme</sup> Cas :  $\mu$  et  $\sigma$  inconnus**

Ils sont estimés, à partir d'un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  de données, par

$$\hat{\mu} = \bar{x} := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma} := \frac{\overline{MR(2)}}{d_2} = \frac{MR(2)_2 + MR(2)_3 + \dots + MR(2)_N}{d_2(N-1)}.$$

Par conséquent, les limites deviennent, pour la carte  $X$  :

$$LCS := \bar{x} + kd_2\overline{MR(2)}, \quad LC := \bar{x} \quad \text{et} \quad LCI := \bar{x} - kd_2\overline{MR(2)},$$

et pour la carte  $MR(2)$  :

$$LCS := \overline{MR(2)} + \frac{kd_3}{d_2}\overline{MR(2)} = D_4\overline{MR(2)}, \quad LC := \overline{MR(2)},$$

$$LCI := \overline{MR(2)} - \frac{kd_3}{d_2}\overline{MR(2)} = D_3\overline{MR(2)}.$$

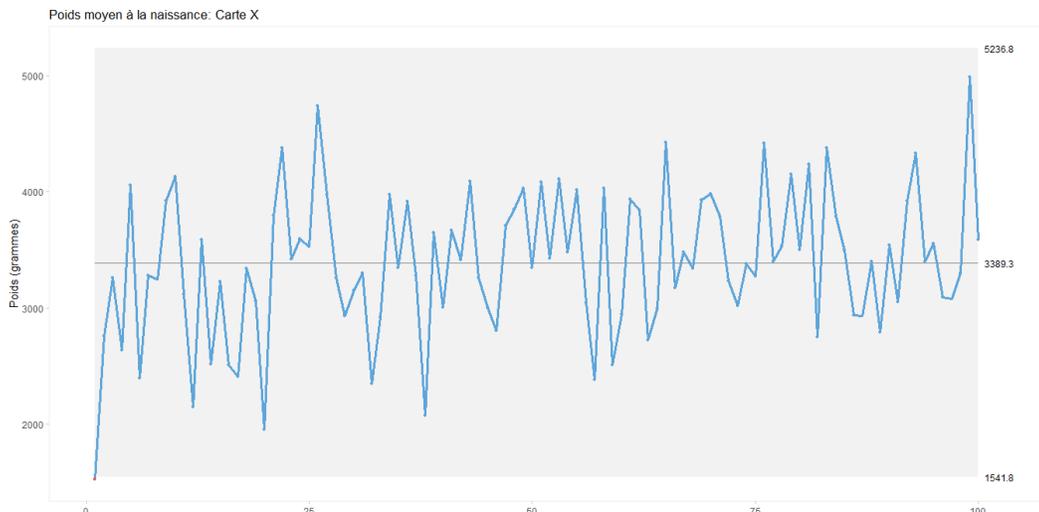


FIG. 2.7 – Carte  $X$  pour les poids à la naissance de 100 bébés

où les constantes  $d_2, d_3, D_3$  et  $D_4$  sont précisées dans la remarque [2.4.3](#)

**Remarque 2.4.3** Les quantités  $c_4, d_2, d_3, A_2, A_3, B_3, B_4, B_5, B_6, D_3$  et  $D_4$  sont des expressions mathématiques dépendant de  $n$ , dont les valeurs sont présentées dans le tableau [2.1](#) (source : [\[1\]](#), page 27).

**Remarque 2.4.4** Dans tous types des cartes de Shewhart, le calcul des limites de surveillance ( $LSS$  et  $LSI$ ) est le même que celui des limites de contrôle ( $LCS$  et  $LCI$ ) mais avec un facteur  $k' < k$ .

**Exemple 2.4.3** La carte ( $X - MR(2)$ ) de l'exemple des bébés est illustrée par les figures [2.7](#) et [2.8](#).

## 2.5 Carte de la somme cumulée (CUSUM)

Introduite par Page en 1954, la carte de CUSUM est parfois citée sous le nom de carte de Page-Hinkley. Elle est basée sur la somme cumulée (cumulative sum) des différences à la moyenne. Pour plus de détails, se référer à [\[3\]](#).

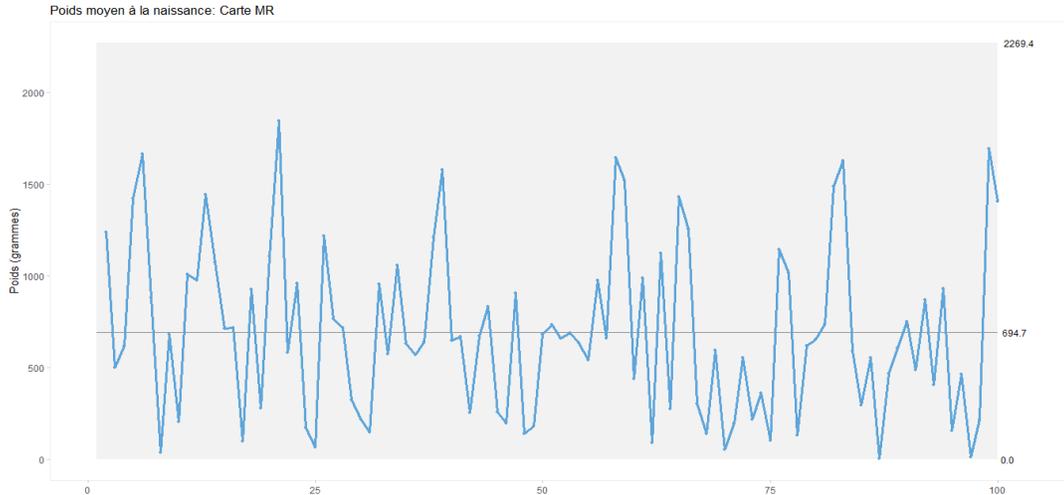


FIG. 2.8 – Carte  $MR$  pour les poids à la naissance de 100 bébés

### Description

Elle est formée à partir de  $i$  échantillons (de taille  $n \geq 1$ ) de moyennes  $\bar{X}_j$ ,  $j = 1, \dots, i$  et d'une valeur cible du procédé égale à la moyenne d'origine  $\mu$ . La somme cumulée représente la somme des déviations des  $\bar{X}_j$  par rapport à  $\mu$ . Elle est alors définie par

$$S_i := \begin{cases} \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu), & \text{carte non standard,} \\ \sum_{j=1}^i Z_j, & \text{carte standard,} \end{cases}$$

où  $Z_j$  est la statistique définie dans (2.3). En utilisant les deux statistiques  $S_i^+$  et  $S_i^-$ , représentant les déviations positives et les déviations négatives par rapport à la valeur cible respectivement, on peut écrire la somme cumulée comme  $S_i = S_i^+ + S_i^-$ .

### Construction de la carte

La construction de la carte CUSUM nécessite les deux hypothèses suivantes :

- Les mesures  $X_i$  (ou moyennes de mesures) sont des v.a de même loi.
- La variance  $\sigma^2$  du processus et valeur cible  $\mu$  sont connues.

Sous ces hypothèses, on a

$$E(X_i) = \begin{cases} \mu, & \text{avant dérèglement,} \\ \mu + \Delta, & \text{après dérèglement.} \end{cases}$$

avec une variance  $Var(X_i) = \sigma^2$  inchangée. On définit les déviations (par rapport à valeur cible) réduites par

$$Z_j := \frac{\bar{X}_j - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_j - \mu}{\sigma}, j = 1, \dots, i, \quad (2.3)$$

où les  $\bar{X}_j$  représentent les moyennes de  $n$  résultats individuels successifs. Si la loi commune des  $X_i$  est normale, alors on a, pour  $j = 1, \dots, i$ ,

$$\begin{cases} \bar{X}_j \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}), & \text{c-à-d } Z_j \sim \mathcal{N}(0, 1), & \text{avant dérèglement,} \\ \bar{X}_j \sim \mathcal{N}(\mu + \Delta, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}), & \text{c-à-d } Z_j \sim \mathcal{N}(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1), & \text{après dérèglement.} \end{cases}$$

Les deux statistiques  $S_i^+$  et  $S_i^-$  sont alors définies par

$$\begin{cases} S_i^+ := \max(0, S_{i-1}^+ + (Z_i - k)), & i \geq 1 \\ S_i^- := \min(0, S_{i-1}^- + (Z_i + k)), & i \geq 1 \\ S_0^+ = S_0^- = 0, & \text{(valeurs initiales)} \end{cases},$$

où  $k$  est une constante appelée coefficient de filtrage dont la valeur par défaut est égale à 0.5. Pour une description détaillée de la construction de cette carte, on réfère le lecteur à [\[4\]](#).

Les limites de contrôle pour la carte CUSUM sont définies par

$$LCS := \frac{h\sigma}{\sqrt{n}}, \quad LC := 0 \quad \text{et} \quad LCI := -\frac{h\sigma}{\sqrt{n}},$$

où  $h$  est une constante de décision prise par défaut entre 4 et 5.

On reporte les  $(i, S_i^+)$  et  $(i, S_i^-)$  sur un graphe avec les limites ci dessus. Tant que ces

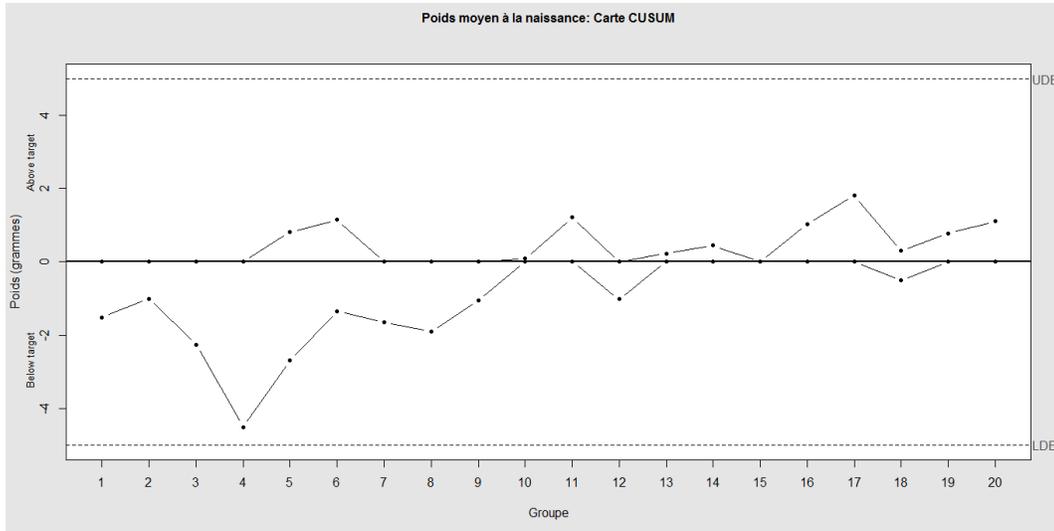


FIG. 2.9 – Carte CUSUM pour les poids à la naissance de 100 bébés

points sont entre les limites, alors le processus est sous contrôle, sinon il est hors contrôle.

**Exemple 2.5.1** *On applique cette méthode aux données de l'exemple des bébés et on obtient la figure 2.9 pour la carte CUSUM, avec  $h = 5$ .*

## 2.6 Carte des moyennes mobiles avec pondération exponentielle (EWMA)

Cette carte utilise les mêmes hypothèses que celles de la carte CUSUM. Elle est plus simple d'utilisation avec une efficacité similaire. Pour une revue détaillée sur cette carte, consulter [4].

### Principe de la carte

Elle est basée sur les moyennes (pondérées) du passé et du présent. De façon plus précise, on a

$$\begin{cases} z_i := \lambda \bar{x}_i + (1 - \lambda)z_{i-1}, \\ z_0 := \mu, \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $z_{i-1}$  et  $\bar{x}_i$  représentent les moyennes du passé et du présent respectivement et  $0 < \lambda \leq 1$ .

Le paramètre  $\lambda$  est un indicateur de l'importance du présent ou du passé :

- $\lambda$  petit : résultats du passé importants, les faibles dérives sont bien détectées.

- $\lambda$  grand : bonne réactivité aux dérèglages brusques et élevés.

**Remarque 2.6.1** La valeur  $\lambda = 1$  correspond à la carte de Shewhart.

### Détermination des limites de la carte

La formule peut être réécrite comme

$$z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j \bar{x}_{i-j} + (1-\lambda)^i \mu.$$

Autrement dit,  $z_i$  est une moyenne pondérée des  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i$ . La moyenne  $\bar{x}_k$  a un poids d'autant plus faible qu'elle est loin dans le passé. Sous l'hypothèse d'indépendance des  $\bar{X}_k$ , on a

$$\sigma_{Z_i}^2 := \text{Var}(Z_i) = \frac{\sigma^2 \lambda (1 - (1-\lambda)^{2i})}{n(2-\lambda)}.$$

Les limites de contrôle pour la carte EWMA sont définies par

$$LCS_i = \mu + L\sigma_{Z_i}, \quad LC = \mu \quad \text{et} \quad LCI_i = \mu - L\sigma_{Z_i},$$

où  $L$  est une constante proche de 3 ( $L \approx 3$ ).

**Remarque 2.6.2** On a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \text{Var}(Z_i) = \frac{\sigma^2 \lambda}{n(2-\lambda)}.$$

En pratique cette limite est considérée pour  $i > 10$ . Dans ce cas, les limites de contrôle s'écrivent

$$LCS = \mu + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}} \quad \text{et} \quad LCI = \mu - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{n(2-\lambda)}}.$$

**Exemple 2.6.1** La carte EWMA de l'exemple des bébés est donnée dans la figure [2.10](#), avec une valeur de  $\lambda$  égale à 0.4.

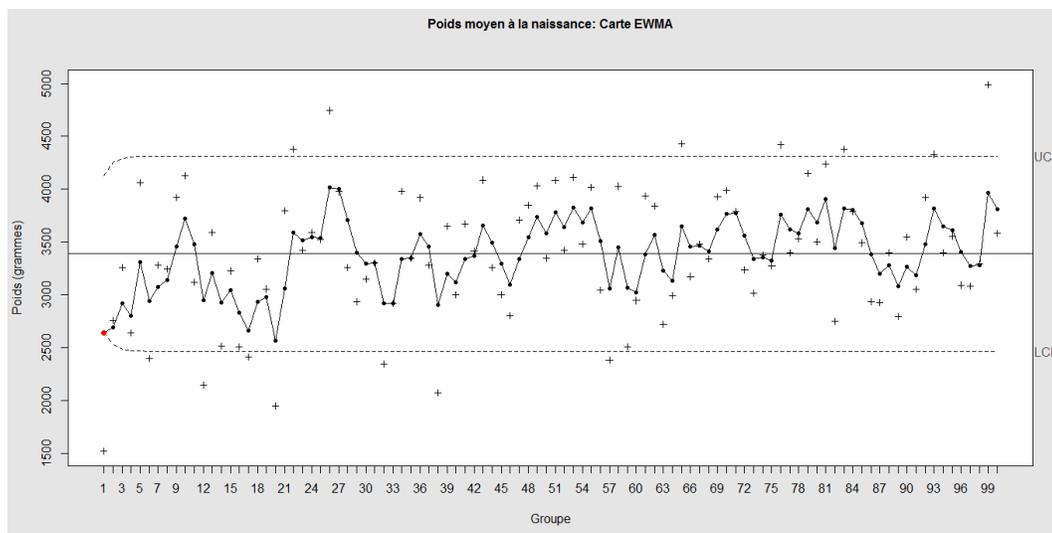


FIG. 2.10 – Carte EWMA pour les poids à la naissance de 100 bébés

$n$	$A_2$	$A_3$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$	$c_4$	$d_2$	$d_3$	$D_3$	$D_4$
2	1.880	2.659	0	3.267	0	2.606	0.798	1.128	0.853	0	3.267
3	1.023	1.954	0	2.568	0	2.276	0.886	1.693	0.888	0	2.575
4	0.729	1.628	0	2.266	0	2.088	0.921	2.059	0.880	0	2.282
5	0.577	1.427	0	2.089	0	1.964	0.940	2.326	0.864	0	2.115
6	0.483	1.287	0.030	1.990	0.029	1.874	0.952	2.534	0.848	0	2.004
7	0.419	1.182	0.118	1.882	0.113	1.806	0.959	2.707	0.833	0.076	1.924
8	0.373	1.099	0.185	1.815	0.179	1.751	0.965	2.847	0.820	0.136	1.864
9	0.337	1.032	0.239	1.761	0.232	1.707	0.969	2.970	0.808	0.184	1.816
10	0.308	0.975	0.284	1.716	0.276	1.669	0.973	3.078	0.797	0.223	1.777
11	0.285	0.927	0.321	1.679	0.313	1.637	0.975	3.173	0.787	0.256	1.744
12	0.266	0.886	0.354	1.646	0.346	1.610	0.978	3.258	0.778	0.283	1.717
13	0.249	0.850	0.382	1.618	0.374	1.585	0.979	3.336	0.770	0.307	1.693
14	0.255	0.817	0.406	1.594	0.399	1.563	0.981	3.407	0.763	0.328	1.672
15	0.223	0.789	0.428	1.572	0.421	1.544	0.982	3.585	0.756	0.347	1.653
16	0.212	0.763	0.448	1.552	0.440	0.526	0.984	3.585	0.750	0.363	1.637
17	0.303	0.739	0.466	1.534	0.458	0.511	0.985	3.585	0.744	0.378	1.622
18	0.194	0.718	0.482	1.518	0.475	1.496	0.985	3.640	0.739	0.391	1.608
19	0.187	0.698	0.497	1.503	0.490	1.483	0.986	3.689	0.734	0.403	1.597
20	0.180	0.680	0.510	1.490	0.504	1.470	0.987	3.735	0.729	0.415	1.585
21	0.173	0.663	0.523	1.477	0.516	1.459	0.988	3.778	0.724	0.425	1.750
22	0.167	0.647	0.534	1.466	0.528	1.448	0.988	3.819	0.720	0.434	1.566
23	0.162	0.633	0.545	1.455	0.539	1.438	0.989	3.858	0.716	0.43	1.557
24	0.157	0.619	0.555	1.445	0.549	1.429	0.989	3.895	0.712	0.451	1.548
25	0.151	0.606	0.565	1.435	0.559	1.420	0.990	0.979	0.708	0.459	1.541

TAB. 2.1 – Paramètres nécessaires à la construction des cartes de contrôle.(k = 3)

# Conclusion

L'objectif principal de ce travail est de passer en revue les cartes de contrôle, basées sur les distributions de probabilités importantes pour le contrôle statistique de la qualité (CSQ). Pour ce faire, ce mémoire est, en premier lieu, consacré aux définitions et propriétés fondamentales de ces distributions puis à la construction des cartes de contrôle. L'intérêt est surtout porté sur les cartes aux mesures.

Une carte de contrôle est un outil utilisé dans le domaine du CSQ afin de maîtriser un processus de production ou autre. Elle permet de déterminer le moment où apparaît une cause particulière de variation d'une caractéristique, entraînant un dérèglement du processus. Par exemple, un processus de fabrication peut être mis à l'arrêt avant de produire des pièces non conformes grâce aux limites de surveillance des cartes de contrôle.

Une étude de simulation, sous le logiciel d'analyse statistique **R** (packages `qcc` et `qicharts`), a permis de vérifier et illustrer numériquement et graphiquement les résultats théoriques. Mais, l'idéal aurait été d'aller sur le terrain et faire un stage dans une entreprise de production afin d'appliquer cette notion de CSQ sur un ou plusieurs de ses produits. Ceci était, en même temps impossible, en raison des circonstances exceptionnelles dues aux restrictions imposées par la pandémie du Covid-19 qui touche le monde entier.

# Bibliographie

- [1] Allal, S., Benkhelifa, L. (2006). Contrôle statistique de la qualité : Application sur un produit de l'ENICAB. Mémoire d'ingénieur en statistique. Université de Biskra.
- [2] Bedoui, K. (2009). Contrôle de qualité. Université de la Manouba.
- [3] Bertrand, P.R. (2007). Une introduction au contrôle de qualité. Université de Clermont-Ferrand 2.
- [4] Husson, F.H. Cartes de contrôle CUSUM et EWMA. UP mathématiques appliquées. Agrocampus Rennes. [https://husson.github.io/img/cours\\_carte4.pdf](https://husson.github.io/img/cours_carte4.pdf).
- [5] Jaibar, F. (2011). Maîtrise statistique des procédés et les carte de contrôle. Université Mohammed V, Agdal. <https://docplayer.fr/9617957-Maitrise-statistique-des-procedes-et-les-cartes-de-contrrole.html>.
- [6] Lejeune, M. (2010). Statistique : la Théorie et ses Applications. Springer.
- [7] Lenoir, J.P. (2008). Probabilités et statistiques. Université Paris-Sud. [https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pansu/web\\_ifips/proba\\_S5-IFIPS.pdf](https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pansu/web_ifips/proba_S5-IFIPS.pdf).
- [8] Perrut, A. (2010). Cours de probabilités et statistiques. IREM de Lyon. Université Lyon 1. [http://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/PolyTunis\\_A\\_Perrut.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/PolyTunis_A_Perrut.pdf).
- [9] Rau, C. Lois discrètes classiques en probabilités. Université de Toulouse. <https://www.math.univ-toulouse.fr/~rau/retro%20stat%20inf/c1.pdf>.
- [10] Saporta, G. (2006). Probabilités, Analyses des Données et Statistique. Technip, Paris.

# Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

<b>Notation</b>	<b>Signification</b>
$\mathcal{B}(n, p)$	loi Binomiale de paramètre $n$ et $p$
c-à-d	c'est à dire
CSQ	Contrôle Statistique de la Qualité
$E(X)$	espérance mathématique de $X$
$LC$	ligne centrale
$LCI$	limite de contrôle inférieure
$LCS$	limite de contrôle supérieure
$LSI$	limite de surveillance inférieure
$LSS$	limite de surveillance supérieure
$\mathcal{N}(0, 1)$	loi normale centrée réduite
$\mathcal{N}(m, \sigma)$	loi normale de paramètre $m$ et $\sigma$
$n$	taille de l'échantillon
$S^2$	variance empirique
$t_n$	loi de student
v.a	variable aléatoire
$Var(X)$	variance de $X$
$X_i$	$i^{\text{ème}}$ élément de l'échantillon

$\bar{X}$	moyenne empirique
$\chi_n^2$	loi du khi-deux
$\xrightarrow{\text{loi}}$	convergence en loi
$\sim$	suit la loi
$:=$	égalité par définition

## ملخص

الهدف من هذه الدراسة هو تحقيق ضبط إحصائي للجودة باستخدام مخططات التحكم في القياس (شيفارت، المجموع المتراكم، المتوسطات المتحركة الموزونة أسيا).

تعد مخططات التحكم أداة وقائية، فهي تجعل من الممكن التنبؤ بجودة العملية الإنتاجية. يتعلق الأمر باكتشاف العيوب وتصحيحها أثناء عملية الإنتاج بالإضافة إلى التحقق من جودة المنتج. لذلك فإن مخططات التحكم تمثل فحصا صحيا للعملية.

**الكلمات المفتاحية:** التحكم الإحصائي، الجودة، المتوسطات المتحركة الموزونة أسيا، المجموع المتراكم، شيفارت، عملية الإنتاج، مخطط التحكم.

## Abstract

*The aim of this study is to achieve statistical quality control of a process using measurement control charts (Shewhart, CUSUM, EWMA).*

*Control charts are a preventive tool, they make it possible to predict the quality performance of the process. It is about detecting and correcting defects during the production process, as well as checking product quality. Thus, control charts represent a process validation check.*

**Key words :** Control charts; CUSUM; EWMA; Quality; Production process; Shewhart; Statistical control.

## Résumé

*L'objectif de cette étude est de réaliser un contrôle statistique de la qualité d'un procédé, en utilisant les cartes contrôles aux mesures ( Shewhart, CUSUM, EWMA).*

*Les cartes de contrôle sont un outil de prévention, elles permettent de prévoir la qualité de la performance d'un procédé. Elles permettent de découvrir et de corriger les défauts au cours du processus de production, en plus de vérifier la qualité du produit. Les cartes de contrôle représentent un bilan de santé du processus.*

**Mots clés:** Carte de contrôle; Contrôle statistique; CUSUM; EWMA; Processus de production; Qualité; Shewhart.