République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option :**Analyse**

Par

Lebbar Narimane

Titre :

Quelque étude numérique sur les problèmes hyperboliques

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	**Tabrha Ouarda**	UMKB	Encadreur
Dr.	**Rezki Ibrahim**	UMKB	Président
Dr.	**Guidad Daradgi**	UMKB	Examinateur

Juin 2021

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chèrs, respectueux et magnifique parents

" *Mohammed* " et " *El-kamla* "

qui m'ont soutnus tout ou long de ma vie.

À mes chèrs frères " *Fouzi* " " *Toufik* "et " *Sami* "

À mes chèrs soeurs " *Salima* " et " *Hadjer* "

À mes chèrs les femmes de mes frères " *Manel* "et " *Imane* "

À mes chèrs les enfants " *Younes* " " *yahia* " " *Idris* " et " *Salsabil* "

À tous ma famille " *lebbar* "

À mes amies " *Ahlèm* " "*Nacira* " " *Khouloud* " " *Marwa* " et " *Marième* "

À toute la promotion de 2021 de 2 ème master mathématique.

À tous ce qui m'ont aidé de prét on loin pour la réalisation de ce travail.

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie DIEU, le tout puissant, pour m'avoire santé accordé, courage et patience afin d'accomplir ce travail.

Je tiens à remercier vivement mon encadreur **Dr.Tabrha Ouarda** d'avoir accepté de diriger ce projet de fin d'étude, sa gentillesse,sa disponibilité et ses précieux conseils.

Je voudrais remercier également les membres de jury **Dr.Rezki Ibrahim** et **Dr.Guidad Daradji** de m'avoir fait l'honneur en acceptant de jurer ce travail.

Je tiens à remercier tous ceux qui mon enseignés durant toutes mes années du primaire jusqu'à l'université.

Je tiens aussi à remercier touts les personnes qui m'ont encouragé pendant la réalisation de ce travail : mes parents, ma famille, mes amis et mes collègues

Lebbar Narimane

Table des matières

Introduction

La résolution des équations aux dérivées partielles occupe une place importante en ingénierie et en mathématiques appliquées. Chacun de ces disciplines apporte une contribution différente mais complémentaire à compréhension et la résolution de tels problèmes. Il y'a plusieurs techniques permettent de résoudre numériquement les problèmes relatifs aux équations aux dérivées partielles.

Mon mémoire intitulé "Quelque étude numérique sur les problèmes hyperboliques".Notre travail est divisé en deux chapitres, nous commençons par :

- Le premier chapitre est divisé en trois parties ; Rappels sur EDO et EDP, Developpement de Taylor, Méthodes numériques(on choisi les méthodes des différences finies et des éléments finis) et on donne les avantages et les incovénients de les deux méthodes.
- Dans le deuxième chapitre, on présente une étude détaille sur quelques applications de la méthode de différences finies sur les problèmes hyperboliques, on a l'équation de transport et l'équation des ondes, avec des conditions aux limites et des conditions initiales.

Chapitre 1

Généralités et Méthode numérique

Les équations différentielles décrivent l'évolution de nombreux phénomènes dans des domaines variés. Une équation différentielle est une équation impliquant une ou plusieurs dérivées d'une fonction inconnue si toutes les dérivées sont prises par rapport à une seule variable, on parle d'équation différentielle (EDO). Une équation mettant en jeu des dérivées partielles est appelée équation aux dérivées partielles(EDP).

1.1 Équations différentielles ordinaires

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $(t,\ y) \longrightarrow f(t,\ \theta y)$ une application.
Une équation différentielle du premier ordre est une équation de la forme

$$\frac{dy}{dt} = f(t,\ y)$$

On utilisera souvent la notification :

$$y' = f(t,\ y)$$

Le lecteur peut s'il le désire utiliser d'autres notations ainsi que d'autres variables par exemple :

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ y) \text{ ou } \frac{dy}{dx} = f(x,\ y); \ldots.$$

Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t , une fonction inconnue $t \to u(t)$ et ses dérivées u', u'', ..., $u^{(n)}$ au point t définie par :

$$F(t,\ u(t),\ u'^{(t)},\ u''^{(t)},\ \ldots,\ u^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $u^{(n)}$. On prendra t dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut etre $\mathbb{R}$ tout entier).

La solution u en générale sera à valeur dans $\mathbb{R}^N$, où $N \in \mathbb{N}^*$. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeur dans $\mathbb{R}$.

1.2 Équations aux dérivéees partielles

Le caractère particulier d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables

$$(x,\ y,\ z,\ \ldots) \longmapsto u(x,\ y,\ z,\ \ldots)$$

Une EDP est alors une relation entre les variables et les dérivées partielles de u.

Définition 1.2.1 ***"l'odre d'une EDP"*** *Lordre d'une EDP est l'ordre le plus élevé des dérivées partielles apparaissant dans l'EDP.*

Définition 1.2.2 ***"la dimension d'une EDP"*** *La dimension d'une EDP est le nombre de variables indépendantes de la fonction inconnue u.*

Remarque 1.2.1 *L'équation (1.1) est une EDP d'ordre n.*

Définition 1.2.3 ***"Les EDP's linéaire, quasi-linéaire, non linéaire"***

1. On dit qu'une EDP est linéaire si elle ne fait intervenir que des combinaisons linéaires des dérivées partielles de la variable dépendante.
2. On dit qu'une EDP est quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé.
3. En dehors des critères cités ci-dessus l'EDP est non linéaire.

1.2.1 Classification d'EDP

Les équations aux dérivées partielles du $2^{\text{ème}}$ordre de la forme

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial u}{\partial x} + 2E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0 \tag{1.2}$$

Où A, B, C, D, E et F sont des constantes de x et y qui s'annulent pas simultanument, sont classés comme équation du types hyperbolique, elliptique ou parabolique.
On définie le discriminant

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

On dit alors que l'équation (1.2) sur un domaineD, est de type :

1. **Hyperbolique** : Si $\Delta > 0$ sur le domaine D.
2. **Elliptique** : Si $\Delta < 0$ sur le domaine D.
3. **Parabolique** : Si $\Delta = 0$ sur le domaine D.

Exemple 1.2.1 *Pour l'équation*

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1.3}$$

On a :

$\Delta = B^2 - 4AC = x^2y^2 - 4xy^2 = xy^2(x-4)$

1. L'équation (1.3) est *parabolique* dans

$$\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 /\ x = 0\} \cup \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 /\ y = 0\} \cup \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 /\ x = 4\}$$

2. L'équation (1.3) est *hyperbolique* dans

$$\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 /\ x\langle 0 \text{ et } y \neq 0\} \cup \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 /\ x\rangle 4 \text{ et } y \neq 0\}$$

3. L'équation (1.3) est *elliptique* dans

$$\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 /\ 0\langle x\langle 4 \text{ et } y \neq 0\}$$

1.2.2 Conditions sur l'ensemble des solutions

Pour trouver des solutions particulières d'EDP, à partir de la solution générale, on va imposer des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions.

Les conditions les plus fréquentes sont :

1. **Condition initiale :** Si u une fonction de $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, on donne $u(x, t_0) = \Phi_0(x)$ ou

$D^\alpha u(x, t_0) = \Phi_0(x)$, ce type de condition est appelé conditions de Cauchy. La notion de conditions aux limites est spécifique aux équations aux dérivées partielles. Elle consiste à donner des conditions au bord du domaine sur lequel est posée l'EDP.

1. **Condition aux bord :** Si u une fonction de $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, on a trois types de contraintes :

   (a) Condition de Dirichlet : Où u est fixé sur le bord de

   $$\Omega : u_{/\partial\Omega} = f$$

   Où f est une fonction donnée.

   (b) Condition de Neumann : Où la dérivée normale u est fixé

   $$\left(\frac{\partial u}{\delta \vec{n}}\right)_{/\partial\Omega} = g$$

   Où g est une fonction donnée.

   (c) Condition de Fourier ou Robin (ou mixte) :

   $$c(x) + \tilde{c}(x)\frac{\partial u}{\partial n} = h \text{ sur } \partial\Omega$$

   Où h est une fonction donnée.

Si f g et h sont toutes des fonctions nulles on dit que les conditions aux bord définies ci-dessus sont homogène.

1.2.3 Équation hyperbolique

L'équation hyperbolique est donné par :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

qui satisfait les conditions de Cauchy

$$\begin{cases} y(0,t) = a_1 y + b_1 \dfrac{\partial y}{\partial x} = f_1(t) & \text{en } x = 0, t \geqslant 0 \\ y(l,t) = a_2 y + b_2 \dfrac{\partial y}{\partial x} = f_2(t) & \text{en } x = l, t \geqslant 0 \end{cases}$$

et les conditions aux limites initiales

$$\begin{cases} y(x,0) = g_1(x) & \text{à } t = 0 \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = g_2(x) & \text{à } t = 0 \end{cases}$$

Cette deuxième condition est nécessaire car on une dérivée seconde en t dans l'équation d'onde.

1.3 Developpement de Taylor

Soit une fonction $f(x)$ est dite définie et continue sur $[a,\ b]$, ainsi que ses n premières dérivées, si elle admet dans l'intervalle $]a,\ b[$ une dérivée d'ordre $n+1$, alors il existe une valeur $c \in]a, b[$ pour laquelle

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Cette égalité peut encore s'écrire avec $h = b - a$

Définition 1.3.1 *La somme*

$$\sum_{k=0}^{N} = \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(x_0)$$

s'appelle le polynome de Taylor de f à l'ordre n au point x_0.

Par conversation, $0! = 1! = 1$.

1.4 Méthodes numériques pour un problème aux limites

Il existes plusieurs méthodes numériques de résolutions de problèmes que rencontres l'ingenieur, parmi ces méthodes, on a la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finies .
Dans cette chapitre on étudier la méthode des différences finies et la méthode des éléléments finis.

1.4.1 Méthode des différences finies

Méthode de D.F pour un problème aux limites en dimension un

On considère le problème unidimensionenel

$$-u''(x) + c(x)u(x) = f(x)\,; \quad \forall x \in]0,1[\tag{1.4}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{1.5}$$

Où $c \in C([0,\ 1],\ \mathbb{R}_+)$. Les conditions aux limites (1.5) sont dites de type Dirichlet homogène.
On se donne une subdivisionde $[0,\ 1]$, c'est à dire une suite de points $(x_k)_{k=0,\ \dots,\ N+1}$ tels que

$$x = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$$

On définie le "pas" du maillage par :

$$h = \frac{1}{N+1}$$

Le principe de la méthode des différences finies considère à l'équation aux dérivées partielles

(1.4) aux point de discrétisation x_i :

$$-u''(x_i) + c(x_i)u(x_i) = f(x_i)\,; \quad \forall i = 1, \ \dots, \ N$$

Puis à approcher l'opérateur différentielle (ici $-u''$) par un quotient différentielle, de manière à en déduire un séystème d'équations en fonction d'inconnues discrètes sensées représenter des approximations de u aux points de discrétisation.
Voici comment on procède pour l'équation de Poisson unidimensionnelle. Effectuons d'abord un développement de Taylor en x_i, en supposant que $u \in C^4([0,1])$:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_i)$$

et

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{6}u'''(x_i) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(\eta_i)$$

avec

$$\xi_i \in [x_i, \ x_{i+1}] \text{ et } \eta_i \in [x_{i-1}, \ x_i]$$

En additionnant, on obtient :

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2u''(x_i) + o(h^2)$$

Il semble donc raisonnable d'approcher la dérivée seconde $-u''(x_i)$ par le "quotient différentielle"

$$\frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1})}{h^2}$$

Définition 1.4.1 *On appelle erreur de consistance au point x_i la quantité R_i tels que*

$$R_i = u''(x_i) + \frac{2u(x_i) - u(x_{i-1}) - u(x_{i+1})}{h^2} = o(h^2)$$

L'approximation de $u''(x_i)$ par un quotient différentiel sugère de considèrer les équations discrètes suivantes :

$$\frac{1}{h^2}(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}) + c_i x_i = f_i, \quad i = 1, \ \ldots, \ N$$

dont les inconnues discrètes sont les u_i, $i = 1, \ldots, N$. Et on pose $u_0 = 0$ et $u_{N+1} = 0$.

Le système complet d'équations s'écrit donc :

$$\frac{1}{h^2}(2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}) + c_i x_i = f_i, \quad i = 1, \ \ldots, \ N \tag{1.6}$$

$$u_0 = 0, \, u_{N+1} = 0 \tag{1.7}$$

Condition de Dirichlet non homogènes

Supposons que les aux limites en 0 et en 1 soit maintenant de type Dirichlet non homogènes, c-à-d :

$$u_0 = a, \, u(1) = b$$

avec a et b pas forcément nuls.

Dans ce cas les équations discrètes du schéma aux différences finies (1.7) restent identiques, mais les valeurs u_0 et u_{N+1} sont maintenant données par : $u_0 = a$, et $u_{N+1} = b$.

Remarque 1.4.1 *On peut écrire le produit scalaire de deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^N$ avec ces notations :*

$$u.v = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i = u^t v = v^t u.$$

Proposition 1.4.1 *Soit $c = (c_1, \ \ldots, \ c_N) \in \mathbb{R}^N$ tel que $c_i \geq 0$ pour $i = 1, \ \ldots, \ N$, alors la matrice A_h est symetrique définie positive, et donc inversible.*

Proof. La matrice A_h est évidemment symetrique. Montrons qu'elle est définie positive. Soit $u = (u_1, \ \ldots, \ u_n)$, on pose $u_0 = u_{N+1} = 0$. Calculons le produit scalaire $A_h u.u = u^t A_h u$.

On a :

$$A_h u.u = \frac{1}{h^2}(u_1\, u_2\, \ldots\, u_N)\begin{pmatrix} 2+c_1h^2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & -1 \\ 0 & & -1 & 2+c_Nh^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

donc

$$A_h u.u = \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N} u_i(-u_{i-1} + (2+c_ih^2)u_i - u_{i+1}).$$

Et comme on posé

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{N+1} = 0$$

On peut écrire :

$$A_h u.u = \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(2+c_ih^2)u_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(-2u_iu_{i-1}),$$

Alors :

$$A_h u.u = \sum_{i=1}^{N} c_iu_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N}(-2u_iu_{i-1} + u_i^2 + u_{i-1}^2) + u_N^2.$$

On a donc finalement :

$$A_h u.u = \sum_{i=1}^{N} c_iu_i^2 + \frac{1}{h^2}\sum_{i=1}^{N+1}(u_i - u_{i-1})^2 \geq 0, \forall u = (u_1,\ \ldots,\ u_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Si on pose $A_h u.u = 0$, on a alors

$$\textstyle\sum_{i=1}^{N} c_ih^2u_i^2 = 0 \text{ et } u_i - u_{i-1} = 0, \quad \forall i = 1,\ \ldots,\ N+1$$

On a donc $u_1 = u_2 = \cdots = u_N = u_{N+1} = 0$.

Remarquons que ces égalités sont vérifiées même si les ce sont nuls . Ceci démontre que la matrice A_h est bient définie. ■

Théorème 1.4.1 *Si $c(x) > 0$ alors la matrice A_h du système linéaire est à diagonale dominante et le système admet une solution unique.*

Théorème 1.4.2 *On suppose que la fonction $c(x) > 0$, si la solution φ du problème aux limites vérifie :*

$$u \in C^4([0,\ 1]).$$

on a la majoration :

$$\max \mid u_i - u(x_i) \mid = \parallel u_h - u \parallel_\infty \leq \frac{1}{96} \parallel u^{(4)} \parallel_\infty h^2.$$

le schéma est donc convergent d'ordre 2.

Quelques schémas en 1D

	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}	u_{i+4}
$\Delta x u_i'$	-1	1			
$\Delta x^2 u_i''$	1	-2	1		
$\Delta x^3 u_i'''$	-1	3	-3	1	
$\Delta x^4 u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

TAB. 1.1 – Différences finies avant, ordre 1

	u_{i-4}	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i
$\Delta x u_i'$				-1	1
$\Delta x^2 u_i''$			1	-2	1
$\Delta x^3 u_i'''$		-1	3	-3	1
$\Delta x^4 u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

TAB. 1.2 – Différences finies arière, ordre 1

	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}
$2\Delta x u_i'$		-1		1	
$\Delta x^2 u_i''$		1	-2	1	
$2\Delta x^3 u_i'''$	-1	2	0	-2	1
$\Delta x^4 u_i^{(4)}$	1	-4	6	-4	1

Tab. 1.3 – Différences finies centré, ordre 2

	u_{i-3}	u_{i-2}	u_{i-1}	u_i	u_{i+1}	u_{i+2}	u_{i+3}
$12\Delta x u_i'$		1	-8	0	8	-1	
$12\Delta x^2 u_i''$		-1	16	-30	16	-1	
$8\Delta x^3 u_i'''$	-1	-8	13	0	-13	8	-1
$6\Delta x^4 u_i^{(4)}$	-1	12	-39	56	-39	12	-1

Tab. 1.4 – Différences finies centré, ordre 4

Méthode de D.F pour un problème aux limites en dimension deux

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On considère maintenant le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega. \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Considérons pour simplifier le problème de Dirichlet homogène suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) & \text{pour } (x,y) \in]0,1[\times]0,1[\\ u(x,y) = 0 & \text{pour } (x,y) \in \Gamma \end{cases}$$

Où f est une fonction donnée, continue sur Ω, Γ est le bord de Ω .

La méthode des différences finies consiste à recouvrir Ω par des petits rectangles élémentaires de taille $h = \dfrac{1}{N+1}$ dans la direction de l'abscisse x et $k = \dfrac{1}{M+1}$ dans la direction de l'axe y (maillage non uniforme).

On cherche pour chaque indice $i \in \{0, \ldots, N+1\}$, $j \in \{0, \ldots, M+1\}$ une approximation notée $u_{i,j}$ de $u(ih, jk)$.En approchant chacune des dérivées secondes par un schémat centré à 3 points décrit ci-dessus, en posant

$$u(x,\ .) \simeq \frac{u(x+h,\ .) - 2u(x,\ .) + u(x-h,\ .)}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \simeq \frac{u(.,\ x+k) - 2u(.,\ y) + u(.,\ y-k)}{k^2},$$

cela donne le schémat suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1,\ j} - 2u_{i,\ j} + u_{i-1,\ j}}{h^2} - \dfrac{u_{i,\ j+1} - 2u_{i,\ j} + u_{i,\ j-1}}{k^2} = f'(ih,\ jk), \\ i \in \{1,\ \dots,\ N\}, j \in \{1,\ \dots,\ M\}, \\ u_{i,\ j} = 0 \text{ pour } i \in \{0,\ N+1\} \text{ où pour } j \in \{0,\ M+1\}, \end{cases}$$

Ce schémat s'appelle usuellement "**schémat à 5 points du laplacien**". Il s'agit d'un schémat centré, où pour évaluer la valeur de u au point $q^{(l)} = (ih,\ jk)$, on utilise la valeur en cinq points centrés, autour du point $q^{(l)}$: le point $q^{(l)}$ lui même et les quatres points cardinaux suivants :

$$q_s^{(l)} = (ih,\ (j-1)k),\ q_N^{(l)} = (ih,\ (j+1)k),\ q_0^{(l)} = ((i-1)h,\ jk),\ q_E^{(l)} = ((i+1)h,\ jk)$$

Matriciellement, le schémat s'écrit sous la forme (on note $H = \max(h,\ k)$)

$$C_H u_H = b_H$$

Où la matrice C_H a une structure "**bloc**".

Par exemple si on choisit de numéroter les inconnues de la manière suivante $u_{1,\ 1}, \dots, u_{1,\ M}$, $u_{2,\ 1},\ \dots,\ u_{N,\ M}$ ie : En balayant le maillage ligne par ligne, la matrice C_H est formée de M^2 blocs, chacun de taille $N \times M$. Par ailleurs, elle a la structure creuse suivante

$$C_H = \begin{pmatrix} A & D & 0 & . & . & 0 \\ D & A & D & 0 & . & 0 \\ 0 & D & A & D & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & D & A & D \\ 0 & . & . & . & D & A \end{pmatrix}$$

Où A et D sont des matrice de taille $N \times M$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & -b & 0 & . & . & 0 \\ -b & a & -b & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & -b & a & -b \\ 0 & . & . & . & -b & a \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} -d & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -d & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & 0 & -d & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & -d \end{pmatrix},$$

Où on a posé

$$b = \frac{1}{h^2},\ d = \frac{1}{k^2} \text{ et } a = 2(b+d).$$

Comme en dimension 1, on montre que la matrice C_H est symetrique définie positive, monotone et qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de H telle que :

$$\| (C_H)^{-1} \| \leq C.$$

Ainsi la méthode est convergente d'ordre deux en h et k pour $u \in C^4$.

Plus précisement

$$\| u_H - \pi_H(u) \|_\infty \leq C(h^2 + k^2).$$

1.4.2 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finie est particulièrement bien adaptée aux problèmes d'équilibre. Elle permet de traiter des géometries complexes contraitement aux D.F mais elle demande un grand coût de temps de calcul et de mémoire.

Exemple simple de dimension un

En prenant l'équation différentielle suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \quad , \quad x \in]0,\ 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La présentation très succine faire sur cet exemple simple a pour but de donner les idées de base.L'approche repose sur la **méthode de Galerkin** qui permet d'écrire le système différentiel sous forme variationnelle dans un dimension finie.

Soit une fonction $v(x) \in C^1([0,\ 1])$, tels que $v(0) = v(1) = 0$. On peut écrire :

$$-\int_0^1 u''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

En intégrant par partie, il vient :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall\ v \in V \tag{1.8}$$

avec $V = \{v \in C^0([0,\ 1])\,;\, v(0) = v(1) = 0,\, v' \text{ continue par morceax}\}$ un S-E -V de $C^1([0,\ 1])$.

Une solution de la forme variationnelle (1.8) s'appelle **solution faible** du problème différentiel de départ.

On cherche alors à écrire un problème approché dans un S-E -V dimension finie.

Soit $\tilde{V}$ un S-E -V de V de dim $= N$ finie. Soient $\phi_1,\ \phi_2,\ \ldots,\ \phi_N$ N fonctions linéairement indépendantes de V. Ces fonctions constituent une base du S-E $\tilde{V}$. Ainsi, toute fonction

$\tilde{u}$ de $\tilde{V}$ peut se décomposer selon :

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j \phi_j(x)$$

Résourdre le problème diférentiel de départ revient alors à chercher une solution $\tilde{u} \in \tilde{V}$ telle que :

$$\int_0^1 \tilde{u}(x)\tilde{v}'(x)dx = \int_0^1 f(x)\tilde{v}(x)dx \quad \forall\ \tilde{v} \in \tilde{V}$$

C'est-à-dire chercher N réels $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_N$ vérifiant :

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_0^1 \phi_j'(x)\tilde{v}'(x)dx = \int_0^1 f(x)\tilde{v}(x)dx \quad \forall\ \tilde{v} \in \tilde{V}$$

Ou encore

$$\sum_{j=1}^{N} u_j \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx \qquad \forall\ \phi_i \in \tilde{V}$$

Soient A la matrice $N \times N$ d'élément courant $a_{i,j}$ et B le vecteur à N composantes b_i définies par :

$$a_{i,\,j} = \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)dx \quad \text{et} \quad b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx$$

Par définition, la matrice A est sumetrique. Notons U le vecteur des N inconnues $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_N$.

Le problème différentiel se ramène finalement à la résolution du système linéaire :

$$A.U = B \tag{1.9}$$

Il reste maintenant à choisir les N fonctions ϕ_i de façon à ce que le système soit simple à résou rdre numériqument.

Choix des fonctions ϕ_i : les éléments finis

L'intervalle $]0,\, 1[$ est discrétise en N points de coordonées x_i. Les fonctions $\phi_i(x)$ sont choisies comme fonctions polynomiales de degré 1 définies par :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si} \qquad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & \text{si} \qquad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ces fonctions sont appelées les éléments finis de degré 1. Avec ces éléments finies, la matrice A est tridiagonale.Il est aussi possible de choisir pour éléments finis des fonctions de degré 2 ou plus.

Le calcul de la matrice A fait intrvenir les dérivées $\phi_i'(x)$ simple à calculer :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i-x_{i-1}} & \text{si} \qquad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{x_i-x_{i+1}} & \text{si} \qquad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculons maintenant les éléments de la matrice A, tridiagonale et symetrique.Les trois termes des diagonales sont :

$$a_{i,\, i} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_i'(x)dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i}$$

$$a_{i,\, i+1} = \int_0^1 \phi_{i+1}'(x)\phi_i'(x)dx = \frac{-1}{x_{i+1} - x_i}$$

$$a_{i-1,\, i} = \int_0^1 \phi_i'(x)\phi_{i-1}'(x)dx = \frac{-1}{x_i - x_{i-1}}$$

Et calculons les composantes du vecteur B par une méthode des trapèzes (chaque intégrale sur un segment élémentaire sera évaluée comme l'aire du trapèze correspondant), soit :

$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx = f_i(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}), \ 1 \leq i \leq N$$

Le système linéaire à résourdre s'écrire donc, sous forme indicielle :

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_i} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} f_i, \ 1 \leq i \leq N$$

Principe de la méthode des Éléments Finis

La méthode des Éléments finis 1D consiste donc à :

– Choisir N points entre et et choisir des fonctions ϕ_i ;

– Construire la matrice A ;

– Déterminer le vecteur B (avec une méthode d'intégration) ;

– Résourdre le système linéaire (1.9) où U désigne le vecteur des inconnues.

1.4.3 Avantages et inconvénients de les deux méthodes

Dans le tableau (1.5) nous comparons les avantages et les inconvénients entre la méthodes des déférences finies et la méthode des éléments finis :

	Avantages	Inconvénients
Méthode de D.F	1) Méthode simple. 2) Rapidité et performance des algorithme. 3) Facilité de monter en ordre. 4) Grand nombre d'EDP approchable.	1) Forte régularité des solutions nécessaires. 2) Peu de souplesse de maillage. 3) condition de type Neumann difficiles à gérer.
Méthode des E.F	1) Existance d'une solution faible. 2) Maillage robuste et souple.	1) Coût de calcul très important. 2) EDP non-linéaire mal gérées.

TAB. 1.5 – Comparaison entre les méthodes : D.F et E.F

Chapitre 2

Méthode de D.F pour un problème hyperbolique

2.1 Résolution des problèmes hyperboliques

2.1.1 Formulation et le maillage

Le problème hyperbolique est donné par l'équation hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

qui satisfait les conditions de Cauchy

$$\begin{cases} u(0,\ t) = a_1 u + b_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} = f_1(t) & \text{en } x = 0,\, t \geq 0 \\ u(L,\ t) = a_2 u + b_2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = f_2(t) & \text{en } x = L,\, t \geq 0 \end{cases}$$

et les conditions aux limites initiales

$$\begin{cases} u(x,\ 0) = g_2(x) & \text{à } t = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = g_2(x) & \text{à } t = 0 \end{cases}$$

Cette deuxième condition est nécessaire car on a une dérivée seconde en t dans l'équation d'onde.

le maillage

Le domaine $\Omega_{x,\, t}$ est discritisé selon les relations connues

$$\Delta x = \frac{L}{M+1} \text{ et } \Delta t = \frac{T}{N+1}$$

Où T est la durée totale du phénomène étudié.

2.1.2 La méthode explicite

Formulation de la méthode explicite

Utilisant un schéma des différence finies centrées l'équation d'onde s'écrit :

$$c^2 \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{\Delta x^2} = \frac{u_i^{j-1} - 2u_i^j + u_i^{j+1}}{\Delta t^2}$$

Soit

$$u_i^{j+1} = r^2 u_{i-1}^j + 2(1-r^2)u_i^j + r^2 u_{i+1}^j - u_i^{j-1} \tag{2.1}$$

Où

$$r = c\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

L'équation (2.1) est l'équation explicite de résolution du problème hyperbolique.

La méthode consiste à déterminer à chaque étape de temps l'inconnue u_i^{j+1}, les 1 u_{i-1}^j, u_i^j, u_{i+1}^j et u_i^{j-1} dans le seconde membre de l'équation (2.1) sont connues.

Il existe cependant difficulté pour appliquer l'équation explicite à $t = 0$ c'est à dire en, $j = 1$. L'équation (2.1) s'écrit pour $j = 1(i = 2,\, m-1)$:

$$u_i^2 = r^2 u_{i-1}^1 + 2(1-r^2)u_i^1 + r^2 u_{i+1}^1 - u_i^0 \tag{2.2}$$

le terme u_i^0 n'est pas connu. On utilise la condition initiale $\dfrac{\partial u}{\partial t} = g_2(x)$ pour le déterminer. Utilisant une approximation de différences centrée de la dérivée première, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,\ 0) = \frac{u_i^2 - u_i^0}{2\Delta t} = g_2(x_i)$$

D'où

$$u_{i,\ 0} = u_{i,\ 2} - 2g_2(x_i)\Delta t$$

En utilisant cette valeur dans l'équation explicite à $j = 1$

$$u_i^2 = \frac{1}{2}(r^2 u_{i-1}^j + 2(1-r^2)u_i^j + r^2 u_{i+1}^j) + g_2(x_i)\Delta t \tag{2.3}$$

Analyse de la convergence

On montre que la solution obtenue par la méthode explicite converge si la condition suivante est réalisée

$$r = c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Dans le cas particulier où $r = 1$, l'équation explicite (2.1) s'écrit :

$$u_i^{j+1} = u_{i-1}^j + u_{i+1}^j - u_i^{j-1}, \quad j\rangle 1$$

De même l'équation (2.3) devient pour $r = 1$:

$$u_i^2 = \frac{1}{2}(u_{i-1}^1 + u_{i+1}^1) + g_2(x_i)\Delta t \quad i = 2,\ m-1$$

2.1.3 La méthode implicite

Formulation de la méthode implicite

La méthode implicite consiste à valeur la moyenne des dérivées en x (interpolation linéaire de la fonction dérivée seconde aux points $(i,\ j+-1)$ et $(i,\ j+1)$ de l'équation hyperbolique :

$$\frac{c^2}{2}\left(\frac{u_{i-1}^{j+1}-2u_i^{j+1}+u_{i+1}^{j+1}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i-1}^{j-1}-2u_i^{j-1}+u_{i+1}^{j-1}}{\Delta x^2}\right)=\frac{u_i^{j-1}-2u_i^{j}+u_i^{j+1}}{\Delta t^2}$$

Substituant $r=c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$,on obtient l'équation implicite et sa forme moléculaire :

$$r^2u_{i-1}^{j+1}-2(1+r^2)u_i^{j+1}+r^2u_{i+1}^{j+1}=-4u_i^j-r^2u_{i-1}^{j-1}+2(1+r^2)u_i^{j-1}-r^2u_{i+1}^{j-1} \tag{2.4}$$

Calcule implicite à t=0

Au temps $t=0$ correspondant à $j=1$, il apparaît dans le second membre de l'équation (2.4) le terme u_i^0

$$r^2u_{i-1}^{2}-2(1+r^2)u_i^{2}+r^2u_{i+1}^{2}=-4u_i^1-r^2u_{i-1}^{0}+2(1+r^2)u_i^{0}-r^2u_{i+1}^{0}. \tag{2.5}$$

Le terme u_i^0 est déterminé en utilisant la condition initiale

$$\frac{\partial u}{\partial t}=g_2(x)$$

On aura en utilisant le schéma de différences finies centrées entre les niveaux $j=0$ et $j=2$ la dérivée première.

$$u_i^0=u_i^2-g_2(x_i)\Delta t$$

En substituant u_i^0 dans l'équation (2.5), on obtient :

$$r^2u_{i-1}^2 - 2(1+r^2)u_i^2 + r^2u_{i+1}^2$$
$$= -4u_i^1 - r^2[u_{i-1,2} - 2g_2(x_{i-1})\Delta t] + 2(1+r^2)[u_i^2 - g_2(x_i)\Delta t] - r^2[u_{i+1}^2 - g_2(x_{i+1})\Delta t]$$

Soit

$$r^2u_{i-1}^2 - 4(1+r^2)u_i^2 + 2r^2u_{i+1}^2 \tag{2.6}$$
$$= -4u_i^1 + 2g_2(x_{i-1})\Delta t - 4(1+r^2)g_2(x_i)\Delta t + 2r^2g_2(x_{i+1})\Delta t \tag{2.7}$$

L'équation (2.6) est la forme implicite de l'équation hyperbolique à $t = 0$.

Convergence

La solution obtenue par la méthode implicite converge en tout temps quelque soit r.

2.2 Application

On va donner la résolution de l'équation de transport et l'équation des ondes par (différences finies, schéma explicite, schéma implicite,...).

2.2.1 L'équation de transport

On considère le problème hyperbolique de l'équation de transport

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in]0,\ 1[,\ t \in]0,\ T[\\ u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0 & t \in]0,\ T[\\ u(x,\ 0) = u_0(x) & x \in]0,\ 1[\end{cases}$$

où la vitesse de transport $c \in \mathbb{R}$ et la condition initiale $u_0 = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont données .

On se donne un ensemble des points t_j, $j = 0, 1, \ldots, M+1$ de $]0, T[$ et $x_i = 0, 1, \ldots, N+1$ de $]0, 1[$.
On considère un pas constant $h = \dfrac{1}{N+1}$ et $k = \dfrac{T}{M+1}$.
On pose $t_j = j\Delta t$ pour $j = 0, 1, \ldots, M+1$ et $x_i = ih$ pour $i = 0, 1, \ldots, N+1$
On cherche à calculer les solutions approchées de $u(x_i, t_j)$, $i = 0, 1, \ldots, N$ et $j = 0, 1, \ldots, M$. Les inconnues discrètes sont notés u_i^j, $i = 0, 1, \ldots, N$ et $j = 0, 1, \ldots, M$ avec $u_0^j = u_{N+1}^j = 0$ et $u_i^0 = u_0(x_i)$.

Schémas explicites

Nous allons établir différents explicites.

On approche la dérivée en temps.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,\ t_j) \simeq \frac{u(x_i,\, t_{j+1}) - u(x_i,\, t_j)}{\Delta t} + o(\Delta t)$$

En posant $r = c\dfrac{\Delta t}{h}$, pour la dérivée en espace on a plusieurs cas :

Schémas explicite décentré amont On prend l'approximation

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,\ t_j) \simeq \frac{u(x_i,\ t_j) - u(x_{i-1},\ t_j)}{h} + o(h).$$

Ce qui conduit au schéma suivant

$$\frac{u_{i,\,j+1} - u_{i,\,j}}{\Delta t} + c\frac{u_{i,\,j} - u_{i-1,\,j}}{h} = 0.$$

Nous aurons

$$u_{i,\,j+1} - u_{i,\,j} + r(u_{i,\,j} - u_{i-1,\,j}) = 0. \tag{2.8}$$

Schéma explicite décentré aval On pose

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,\ t_j) \simeq \frac{u(x_{i+1},\ t_j) - u(x_i,\ t_j)}{h} + o(h)$$

Alors le schéma s'écrit

$$\frac{u_{i,\ j+1} - u_{i,\ j}}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1,\ j} - u_{i,\ j}}{h} = 0.$$

Nous obtenons

$$u_{i,\ j+1} - u_{i,\ j} + r(u_{i+1,\ j} - u_{i,\ j}) = 0. \tag{2.9}$$

Schéma explicite centré On pose

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,\ t_j) = \frac{u(x_{i+1},\ t_j) - u(x_{i-1},\ t_j)}{2h} + o(h^2).$$

On obtient alors le schéma suivant

$$\frac{u_{i,\ j+1} - u_{i,\ j}}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1,\ j} - u_{i-1,\ j}}{2h} = 0.$$

Nous obtenons

$$u_{i,\ j+1} - u_{i,\ j} + \frac{r}{2}(u_{i+1,\ j} - u_{i-1,\ j}) = 0. \tag{2.10}$$

Remarque 2.2.1 *Dans le schéma explicite on a :*

1. Le schéma (2.8) **est** L^∞**_stable si** $c > 0$ et $r \leq 1$, L^∞**_instable si** $c < 0$.
2. Le schéma (2.9) **est** L^∞**_stable si** $c < 0$ et $\mid r \mid \leq 1$, L^∞**_instable si** $c > 0$.
3. Le schéma (2.10) **est toujours** L^∞**_instable.**

Schémas implicites

Nous pouvons établir différents schémas implicites, en approchant toujours la dérivée en temps comme suit

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,\ t_j) \simeq \frac{u(x_i,\ t_j) - u(x_i,\ t_{j-1})}{\Delta t} + o(\Delta t)$$

En posant $r = c\dfrac{\Delta t}{h}$ pour la dérivée en espace a plusieurs cas :

Schéma implicite décentré amount On pose

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,\ t_j) = \frac{u(x_i,\ t_j) - u(x_{i-1},\ t_j)}{h} + o(h)$$

Ce qui conduit au schéma suivant

$$\frac{u_{i,\,j} - u_{i,\,j-1}}{\Delta t} + c\frac{u_{i,\,j} - u_{i-1,\,j}}{h} = 0.$$

Nous aurons

$$u_{i,\,j} - u_{i,\,j-1} + r(u_{i,\,j} - u_{i-1,\,j}) = 0. \tag{2.11}$$

Schéma implicite décentré aval

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,\ t_j) = \frac{u(x_{i+1},\ t_j) - u(x_i,\ t_j)}{h} + o(h)$$

Ce qui conduit au schéma suivant

$$\frac{u_{i,\,j} - u_{i,\,j-1}}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1,\,j} - u_{i,\,j}}{h} = 0.$$

Nous obtenons

$$u_{i,\, j} - u_{i,\, j-1} + r(u_{i+1,\, j} - u_{i,\, j}) = 0. \tag{2.12}$$

Schéma implicite centré On pose

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,\ t_j) = \frac{u(x_{i+1},\ t_j) - u(x_{i-1},\ t_j)}{2h} + o(h^2).$$

Nous obtenons le schéma suivant

$$\frac{u_{i,\, j} - u_{i,\, j-1}}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1,\, j} - u_{i-1,\, j}}{2h} = 0.$$

Nous aurons

$$u_{i,\, j} - u_{i,\, j-1} + \frac{r}{2}(u_{i+1,\, j} - u_{i-1,\, j}) = 0. \tag{2.13}$$

Remarque 2.2.2 *Dans le schéma implicites on a :*

1. Le schéma (2.11) **est** L^∞**_stable si** $c > 0$ et L^∞**_instable si** $c < 0$.
2. Le schéma (2.12) **est** L^∞**_stable si** $c < 0$ et L^∞**_instable si** $c > 0$.
3. Le schéma (2.13) **est** L^∞**_stable si** $r \leq 1$.

2.2.2 L'équation des ondes

On propose de trouver u solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,\ t), & x \in]0,\ 1[, t \in]0,\ T[\\ u(0,\ t) = u(1,\ t) = 0, & t \in]0,\ T[\text{ (conditions aux limites)} \\ u(x,\ 0) = u_0(x), & x \in]0,\ 1[\text{ (condition initiale)} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0) = u_1(x), & x \in]0,\ 1[\text{ (condition initiale)} \end{cases}$$

Pour discritiser ce problème par une méthode de différences finies, en établissant un maillage de pas

$$h = \frac{1}{N+1}\,; \quad N : \text{entier} \geq 1,$$

Pour la variable x et de pas Δt pour la variable t.

Les pas h et Δt sont destinés à tendre vers .

Notons u_i^j une approximation de la solution au point.

$$(ih,\ j\Delta t).$$

Les considérons du chapitre 1 nous conduisent à approcher

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(ih,\ j\Delta t)$$

par :

$$\frac{-u_{i-1}^j + 2u_i^j - u_{i+1}^j}{h^2}$$
$$\text{et}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(ih,\ j\Delta t)$$

et par :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \text{ (schéma 1)}$$
$$\text{ou}$$
$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \text{ (schéma 2)}$$

Le problème discret associé au schéma 1 s'écrit : trouver des nombres

$$u_{i,\ j},\ 0 \leq i \leq N+1,\ j \geq 0$$

solution de

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2} + c^2 \left(\dfrac{-u_{i-1}^j + 2u_i^j - u_{i-1}^j}{h^2} \right) = f(x_i,\ t_j), & 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M \\ u_i^0 = u_0(x_i), & 1 \leq i \leq N \\ u_i^1 = u_0(ih) + \Delta t u_1(ih), & 1 \leq i \leq N \\ u_0^j = u_{N+1}^j = 0, & 0 \leq j \leq M+1 \end{cases}$$

Difinissons les vecteurs :

$$\begin{cases} u^j = (u_i^j)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N \\ f^j = f(ih, j\ \Delta t)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

Le problème discret s'écrit sous la forme matricielle : trouver des vecteurs u^j, $j \geq 0$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2} + c^2 A u^j = f^j, & j \geq 1 \\ u^0,\ u^1, & \text{donné} \end{cases}$$

où la matrice A d'ordre N est donné par l'expression :

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Schéma explicite

Soit encore, sous forme vectorielle

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2} + c^2 A u^j = f^j, & j \geq 1 \\ u^0, u^1, & \text{donné} \end{cases}$$

c'est le schéma explicite

Schéma implicite

Soit, sous forme suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2} + c^2 A u^{j+1} = f^j, & j \geq 1 \\ u^0,\ u^1, & \text{donné} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (I + c^2 \Delta t^2 A) u^{j+1} = c^2 \Delta t^2 f^j + 2u^j - u_i^{j-1} & j \geq 1 \\ u^0, u^1, & \text{donné} \end{cases}$$

Notation 2.2.1 *Dont la progression requiert la résolution d'une suite de système linéaire de même matrice*

$$(I + c^2 \Delta t^2 A)$$

tridiagonale symetrique définie positive.

Conclusion

En analyse numérique, la méthode des différences finies est une technique courante de recherche des solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les autres.

Pour résoudre les équations de transport et des ondes par la méthode des différences finies, ceci à l'aide d'un schéma numérique consistant, la stabilité du schéma est une condition nécessaire et suffisante pour assurer sa convergence.

Bibliographie

[1] Lasfari-A, Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles : cours et exercices corrigés, Paris, 2015.

[2] Tahar Abbas-M, Méthodes Numériques, Tome1 : Méthodes des différences finies, Méthodes integrales et variationnelles OPU, Alger, 2007,

[3] Jean-J-C & Jean-M-M, Formules de Taylor, Développements limités : Exercices corrigés avec rappels de cours, Toulouse (France).

[4] Zitouni-S & Zennir-K, Equatios aux Dérivées Partielles de nature physique : EDPs de nature physique, Édition universitaires européennes, 2018.

[5] Mehri-A, cours Master1 : Méthodes des différences finies pour les équations aux dérivées partielles, Université de Guelma (Algeria), 2019.

[6] Eric.G, RESOLUTION NUMERIQUE, DESCRITISATION DES EDP ET EDO, INSTITU NCHNATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, septembre 2005.

[7] Curtis F.Gerald & Patrick O.Wheathley, Numerical Analysis, California Polytechnique State University.

[8] Raphaèle.H, Analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Engineering school, Marseille, 2011, cel-00637008.

Annexe : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

EDO	Équation Différentielle Ordinaire.
EDP	Équation aux Dérivées Partielles.
$D.F$	Différences Finies.
$E.F$	Eléments Fini
$S.E.V$	Sous Espace Vectoriel
$\|.\|$	Norme usuelle
dim	Dimension
∂	Dérivées partielles
$\partial\Omega$	Frontière du domaine Ω
Δ	Différence

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude complète sur les équations aux dérivées partielles et nous concentrons sur les méthodes numériques pour résoudre les problèmes d'EDP (la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis).

Nous avons appliqué la méthode des différences finies sur les problèmes hyperboliques (équation de transport et l'équation des ondes).

Mots-clés : méthodes numériques, méthode des différences finies, méthode des éléments finis, problème hyperbolique.

الملخص

في هذا العمل نقوم بدراسة شاملة على المعادلات التفاضلية الجزئية و نركز على الطرق العددية لحل مشاكل المعادلات التفاضلية الجزئية (طريقة الفروق المنتهية و طريقة العناصر المنتهية).

نقوم بتطبيق طريقة الفروق المنتهية على مشاكل القطع الزائد (معادلة النقل و معادلة الموجات).

الكلمات المفتاحية : الطرق العددية، طريقة الفروق المنتهية، طريقة العناصر المنتهية, مشكلة القطع الزائد.

Abstract

In this work, we are interested in the complete study on the partial differential equations and we focus on the numerical methods of solving the problems of the PDE (finite difference method and finite element method).

Key words : numerical methods, finite difference method, finite element method, hyperbolic problem.