République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme **:**

MASTER en Mathématiques

Option : **Probabilités**

Par

Boubeche Hassiba

Titre :

Equations différentielles stochastiques et processus de diffusion

Membres du Comité d'Examen :

Dr.	MANSOURI BADEREDDINE	UMKB	Président
Dr.	ZOUZOU AKILA	UMKB	Encadreur
Dr.	LABED SALOUA	UMKB	Examinateur

juin 2021

Dédicace

Je dedie ce modeste travail :

À mes chèrs parents, pour tous leurs sacrifices , leurs amour , leurs tendresse , leurs soutien et leurs prières tout au long de mes études .

À mes chères soeur **Nadjwa,Ahlem** pour leur présences à mes cotés , qui n'a jamais cessé de m'éppauler et de me soutenir inconditionnellement.

À mes chèrs frères **Youcef,khemessi** et **Alla** pour leurs appui et leurs encouragement .

À mes ami(e)s :**Imen** , **Donia** , **Rania** qui ont si bien su m'encourager et me soutenir et .

À tous ceux qui m'aiment .

REMERCIEMENTS

En Préambule de ce mémoire , je remercie Dieu qui ma donné le souffle pour la réalisation de cette mémoire .

Louange à Dieu pour Sa Grâce et Sa Bonté.

Un énorme merci à mes parents, ma soeur et mes frères pour leurs soutien et encouragement et pour l'infini patience tout au long de mon parcours scolaire.

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur,Madame **Zouzou Akila** *pour ses remarques, ses conseils judicieux et sa disponibilité .*

*Je voudrais également remercier tous les membres du jury :***Mansouri badereddine** *de m'avoir honorée en acceptée de présider le jury,* ***Lebed saloua*** *d'avoir acceptée d'éxaminer ce modeste travail, merci pour toutes leurs remarque et critique .*

Merci à vous tous

Table des matières

Dédicace i

Remerciements ii

Table des matières iii

Introduction 1

1 Processus aléatoire et Mouvement Brownien 2

1.1 Les variables aléatoires 2

1.2 Notions élémentaires sur les processus 3

1.2.1 vecteur aléatoire gaussien 5

1.2.2 Chaine de Markov 5

1.2.3 probabilités de transition 5

1.2.4 Processus de Markov 6

1.3 Mouvement Brownien et Martingalale 6

1.3.1 Mouvement brownien 6

1.3.2 Construction du Mouvement Brownien 8

1.3.3 Existence du Mouvement Brownien 8

1.3.4 Construction hilbertienne du Mouvement Brownien 9

1.3.5 processus de Wiener 10

1.3.6 Variation quadratique du Mvt-Brownien 11
1.3.7 Martingales 11
1.3.8 Processus d'Itô 13
1.3.9 Intégrale par rapport à un processus d'Itô 14
1.3.10 Formule d'itô 14

2 Equations différentielles stochastiques et processus de diffusion 17

2.1 Equation différentielle stochastique 17
2.2 Existence et unicité de solution 18
2.3 Solutions fortes :compléments 23
2.4 Solution faible 25
2.5 Absolue continuité de la loi de diffussions par changement de dérivée 30
2.6 Approximation Diffusion 32

Conclusion 35

Bibliographie 36

Annexe B : Abréviations et Notations 37

Introduction

Une équation différentielle stochastique (EDS) est une généralisation de la notion d'équation différentielle prenant en compte un terme de bruit blanc. Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels des cours de bourse ou les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion. Elles permettent aussi de traiter théoriquement ou numériquement des problèmes issus de la théorie des équations aux dérivées partielles.

Les domaines d'application des EDS sont vastes : physique, biologie, dynamique des populations, écologie, mathématiques financières, traitement du signal, théorie du contrôle.

Nous avons choisi de structuré notre manuscrit selon le plan décrit ci-dessous :

Le premier chapitre est consacré aux notions générales de processus stochastique, on a présenté des définitions de notion comme la filtration, temps d'arrêt, martingales,Mouvement Brownien...etc.

Dans le deuxième chapitre, on présentera les équations différentielles stochastiques.On commence par les propriétés de la solution d'une EDS.On citera ensuite le théoréme d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS .Ensuite on définira c'est quoi une solution fort et faible d'une EDS On introduit les solutions d'EDS appellées diffusion ainsi que des outils importants pour leur étude .

Chapitre 1

Processus aléatoire et Mouvement Brownien

Ce chapitre regroupe quelque définitions de base utilisées : processus stochastique,filtration,temps d'arrêt,martingales,...etc, qui sont indispensables pour la suite.

1.1 Les variables aléatoires

Pour démontrer quelques résultats d'existence dans l'analyse stochastique et le contrôle stochastique, nous rappelons quelques résultatsconcernant les mesures de probabilité .

Soit $(U.d)$ un éspace métrique séparable $B(U)$ la tribu borélienne . $P\left(U\right)$ l'ensemble des toutes les mesures deprobabilité sur U.

Convergence faible

la suite $\{P_i\} \subseteq P(U)$ converge faiblement vers $P \in P(U)$ si pour toute f continue bornée $(f \in C_b(U))$.

$$\lim_{n\to\infty} \int_U f\left(U\right) dP_x(U) = \int_U f dP(U)$$

Proposition 1.1.1 *Soit la métrique ρ sur $P(U)$ telle que :*

$$P_i \text{ converge faiblement vers } P \iff \rho(P_i, P) = 0 \text{ quand } i \to \infty.$$

Corollaire 1.1.1 *Si (U, d) un compact alors toute fammille $A \subseteq P(U)$ est tendu si elle est relativement compacte*

En particulier P(u) est un compact.

Proposition 1.1.2 *Soit $A \subseteq P(U)$ un ensemble*

1)A est relativement compact si toute suite $\{P_n\} \subseteq A$ contient une sous suite converge faiblement.

2)A est compact si A est relativement compact et fermé

3)A est tendu po ur tout $\varepsilon \succ 0$ il ya un compact $K \subseteq U$ telle que :$\inf\limits_{p \in A} P(K) \geq 1 - \varepsilon$.

Proposition 1.1.3 *Soit $X_i, X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (U, d), i = \overline{1, n}$ des variable aléatoires :*

$$X_i \overset{p.s}{:\to} X si : \lim_{i \to \infty} d(X_i, X) = 0$$

$X_i \overset{en\ brob}{:\to} X$ si pour tout $\varepsilon > 0 \lim_{i \longrightarrow \infty} \{W / d(X_i(W), X(W)) > \varepsilon\} = 0$

Corollaire 1.1.2 *Si $(U.d)$est un compact ,alors toute partie $A \subseteq P(U)$ est tendue est relativement compact ,en particulier $P(U)$est compact.*

Proposition 1.1.4 *Soit $A \subseteq P(U)$ donc*

1)si $(U.d)$ est complet$(ie.esppolonait)$; A est tendu si elle relativement compact.

2)A est relativement compact si elle est tendu

1.2 Notions élémentaires sur les processus

Définition 1.2.1 *Soit $(\Omega, F, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(T, Q)\, t$ est un espace quelconque*

Q :*tribu des évènement de* T

On appelle processus aléatoire l'application :

$$(\Omega, F,) \times (T, Q) \longrightarrow \left(\acute{\Omega}, \acute{F}\right)$$

$$(w, t) \longrightarrow X(w, t)$$

encord noté :$X_t(w)$ .telle que :$\forall t$ fixé,$X_t$est une variable aléatoire sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$

Définition 1.2.2 *"Espace filtré"*

Soit la famille F_t*de sous tribu de* F :

$$F_t \subset F, t \in [0, T] \tag{1.1}$$

Définition 1.2.3 F_t *croissante*$\upharpoonright$ "$F_{t_1} \subset F_{t_2}, 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t$" "*filtration*". $(\Omega, F, F_t, \mathbb{P})$ *est un espace filtré*

La filtratin d'un processus $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *est donné par :*

$(F_n^x, n \in \mathbb{N})$ *oû* :

$$F_n^x = \sigma(X_i, 0 \leq i \leq n)$$

Définition 1.2.4 *Soit* (Ω, F, F_t) *espace mesurable filtré,* $X(t)$ *un processus à valeur dans un espace métrique* (U, d) *i.e* :

$$X : \left([0, T] \otimes \Omega, B_{[0,T]} \otimes F\right) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} (U, B(U))$$

$$(w, t) \longrightarrow X(w, t)$$

Définition 1.2.5 *1)*$X(t)$ *est dit mesurable si* :$X(w, t)$ *est* $\left(B_{[0,T]} \otimes F\right) - B(U) -$*mesrable*

2)$X(t)$ *est dit* $F-$ *adapté si :*

$$\forall t \in [0, T] : w \longrightarrow^{X(t,.)} X(t, w)$$

est $F_t -$ *mesurable.*

3)$X(t)$ *est dit* $F_t - progressivement - messurable$ *si :*

$$\forall t \in [0,T] : (s,w) \longrightarrow X(s,w)$$

est $\left(B_{[0,T]} * F\right) - B(U) -$ *mesurable.*

4)$X(t)$ *est dit prévisible* (*par rapport à* F) *si l'application :*$(t,w) \longrightarrow X(s,w)$ *est mesurable sur* $T \times \Omega$ *muni de la tribu engendré par les processus* $F -$ *adapté et continues*

1.2.1 vecteur aléatoire gaussien

Définition 1.2.6 *un vecteur aleatoire :*$X = (X_1, ..., X_n)$*est gaussien si toute combinaison linéaire* $\sum a_i X_i$ $(a_i \epsilon \mathbb{R})$*de ses composantes est une variable gaussienne*

Remarque 1.2.1 *Si* X *est un vecteur gaussien d'ésperance* m *et de variance* n *,on note :*

$$X \rightsquigarrow N(m,n).$$

1.2.2 Chaine de Markov

est un processus aléatoire à temps discret $(X_n, n \geq 0)$ à valeurs dans E (ensemble fini ou dénombrable) telle que :

$P(X_{n+1} = j \,/ X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1 \,, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j \,/ X_n = i)$

$\forall n \epsilon \mathbb{N}; \forall j, i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i \epsilon \mathbb{E}$

1.2.3 probabilités de transition

Soit $p(s,x;t,A)$ la probabilité de transition d'un processus de Markov X.

Cette probabilité de transition a les propriétés suivantes :

$i)$ à s,t,A fixés, l'application $x \longrightarrow p(s,x;t,A)$ est mesurables, *ii)* à s, t, x fixés, l'application $A \longrightarrow p(s, x; t, A)$ définit une mesure sur l'espace probabilsable $\left(\mathbb{R}, \beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$,

iii) $\mathrm{p}(t, x; t, A) = 1_{A(x)}$

iv) $p(s, x; t, A)$ est solution de l'équation de Chapman-Kolmogrov

$$p(s, x; t, A) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} p(s, x; u, dy)\, p(u, y; t, A), \ \forall 0 \leq s < u < t.$$

1.2.4 Processus de Markov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité ,un processus $X(t)_t$ est appelé processus de Markov si

i) $\forall \alpha \epsilon \mathcal{F}$, $\forall \lambda > t, \lambda, t \epsilon T$

$$p\left(X_\lambda \epsilon \alpha \setminus \mathcal{F}_t\right) = p\left(X_\lambda \epsilon \alpha \setminus X_t\right)$$

ii)$p'(s, y; t; \alpha) = p\left(X_t \epsilon \alpha \setminus X_s = y\right)$ $\forall s \leq t \ s, t \epsilon T$

i.e : $p'(s, y; t; .)$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$,$p'(s, .; t; \alpha)$ est $\Omega - mesurable$.

1.3 Mouvement Brownien et Martingalale

1.3.1 Mouvement brownien

L'exemple important de processus est le Mouvement Brownien ,donné par le botaniste Robert Brown en 1827 pour d'écrire le mouvement irrégulier de particules de pollen dans un fluide .Le cadre d'application du Mvt-Brownien a largement débordé l'étude des particules microscopiques pour être utilisé en finance dans la modélisation des prix d'actions ,historiquement depuis Bachelier en 1990

Définition 1.3.1 *.Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité et* $B = (B_t)_{t \in \mathbb{T}}$ *un processus stochastique Le processus* B *est appelé Mouvement Brownien standard si :*

1. $B_0 = 0$ $\mathbb{P}.p.s$.

2. $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est à accroissements indépendants .

3. $\forall\ 0 \leq s \leq t$ la variable aléatoire $B_t - B_s$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, t-s)$.

4. L'application $t \to B_t$ est continue $\mathbb{P}.p.s$.

Proposition 1.3.1 *(B_t) est processus gaussien dont la fonction de covariance :*

$$cov\left(B_t, B_s\right) = \min\left(t, s\right).$$

Preuve. La covariance est égale à $\mathbb{E}\left(B_t B_s\right)$ car le processus B_t est centré $(i.e\,;\, \mathbb{E}\left[B_t\right] = 0)$ si $s \leq t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(B_t B_s\right) &= \mathbb{E}\left[\left(B_t - B_s\right) B_s + B_s^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left(B_t - B_s\right) \mathbb{E}\left(B_s\right) + \mathbb{E}\left(B_s^2\right) \\
&= 0 + s = \min\left(t, s\right) \ .
\end{aligned}$$

Car $(B_t - B_s)$ est B_s sont indépendant, de même pour $s < t$. ■

Définition 1.3.2 *On appelle Mouvement Brownien standard par rapport à une filtration $\left\{\mathcal{F}_t\right\}_{t\geq 0}$, un Mouvement Brownien standard $\left(B_t\right)_{t\geq 0}$ adapté à $\left\{\mathcal{F}_t\right\}_{t\geq 0}$ et tel que :*

$$\left(B_t - B_s\right) \perp \mathcal{F}_s \ \forall\ 0 \leq s \leq t \ .$$

Définition 1.3.3 ***(Mouvement Brownien avec dérive)*** *On appelle encore Mouvement Brownien issu de x et dérive (ou drift) μ et de coefficient de diffusion σ , le processus :*

$$X_t = x + \sigma B_t + \mu t \ .$$

Proposition 1.3.2 ***(Mouvement Brownien multidimensionnel)***

Soit $B_t = \left(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, B_t^{(3)}, ..., B_t^{(n)}\right)^T$ un processus $n - \dim ensionnel$ (l'exposant ^{T} note la transposition d'un vecteur) .

On dit que B est un Brownien multidimensionnel si le processus $\left(B^{(i)},\ i \leq n\right)$ sont des Brownien indépendants .

1.3.2 Construction du Mouvement Brownien

Il existe de nombreuses constructions du Mouvement Brownien mais toutes procédent en fait des mêmes idées, soit on le construit explicitement par une méthode hilbertienne à partir d'une suite de variables aléatoires normale indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$, soit on utilise le théorème de kolmogorov pour justifier son existence .

1.3.3 Existence du Mouvement Brownien

Théorème 1.3.1 *Il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur l'espace $\mathbb{R}^{[0,+\infty]}$ muni de la tribu produit $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}^{\otimes[0,+\infty[}$ tel que le processus$(X_t)_{t\geq 0}$ des applications coordonnées, soit un Mouvement Brownien naturel .*

Preuve. On vient de voir qu'un processus réel, gaussien centré partant de 0 et de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = \min(s,t)$ est un Mouvement Brownien . Il suffit donc d'après le théorème de prouver le résultat suivant : ■

Lemme 1.3.1 *Pour tout entier n et tous $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, la matrice $\Gamma = (\min(t_i, t_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est de type positif .*

Preuve. Par récurrence sur $n = 1$, le résultat est trivial . si $n = 2$, on a :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix},$$

et pour un vecteur $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ on a facilement $\langle u \mid \Gamma u\rangle = t_1u_1^2 + 2t_1u_1u_2 + t_2u_2^2 \geq t_1u_1^2 + 2t_1u_1u_2 + t_1u_2^2 = t_1(u_1 + u_2)^2 \geq 0$, d'où le résultat dans ce cas . On fait alors l'hypothèse de récurrence suivant : Pour $(n-1)$ instants , la matrice Γ correspondante est telle que pour tout vecteur $v=(v_1,...,v_{n-1})$ de $\mathbb{R}^{n-1}$, on a $\langle v \mid \Gamma v\rangle \geq t_1\left(v_1+...+v_{n-1}\right)^2$. Pou vérifier cette hypothése à l'ordre n, remarquons que la matrice Γ a sa première ligne et sa première colonne composées uniquement de la valeur t_1 et que le reste constitue une matrice Γ_{n-1} correspondant aux valeurs $t_2\leq ...\leq t_n$ pour tout vecteur $u=(u_2,...,u_n)$ on obtient alors :

$$\langle u \mid \Gamma u\rangle = t_1u_1^2+2t_1u_1\left(u_2+...+u_n\right)+\langle v \mid \Gamma_{n-1}v\rangle ,$$

où $v=(u_2,...,u_n)$. Mais on a $\langle v \mid \Gamma_{n-1}v\rangle \geq t_2\left(u_2+...+u_n\right)^2 \geq t_1\left(u_2+...+u_n\right)^2$, et l'hypothèse de récurrence est aussitôt vérifiée . D'où le résultat . ■

1.3.4 Construction hilbertienne du Mouvement Brownien

Soit $I=[0,T]$ $(ou\mathbb{R}_+)$ et $(e_n)_{n\in N}$ une base hilbertienne orthonormale de l'espace de Hilbert $\mathcal{L}^2\left(I,dt\right)$ des fonctions $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue sur I .On note $\langle f,g\rangle=\int\limits_0^T f\left(t\right)g\left(t\right)\,dt$ le produit scalaire des fonctions $f,g\in\mathcal{L}^2\left(I,dt\right)$.

Théorème 1.3.2 *Soit* $\left(\mathcal{N}_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite de variables aléatoire i.i.d de loi* $\mathcal{N}\left(0,1\right)$ *définies sur un espace probabilisé* $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ *.Pour tout* $t\in I$, *on pose :*

$$B_t=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left\langle 1_{[0,t]},e_n\right\rangle\mathcal{N}_n\ . \tag{1.2}$$

Alors le processus $B=\left(B_t\right)_{t\in I}$ est bien défini et c'est un Mouvement Brownien naturel sur $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$.

Preuve. La série 1.2 converge dans $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. En effet si $S_t^{(n)}$ désigne sa somme partielle d'ordre n, comme les $\mathcal{N}_k$ sont non corrélées, pour tout $m\leq n$, on a :

$$\mathbb{E}\left(\left(S_t^{(n)}-S_t^{(m)}\right)^2\right)=\sum_{k=m+1}\left\langle 1_{[0,t]},e_k\right\rangle^2\longrightarrow 0\ .$$

quand $m, n \longrightarrow \infty$ comme reste de la série convergente qui s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\langle 1_{[0,t]}, e_k \right\rangle = \left\| 1_{[0,t]} \right\|_{\mathcal{L}^2(I)} \quad .$$

Ce qui montre que la suite $S_t^{(n)}$ est de Cauchy dans $\mathcal{L}^2$ donc elle converge . De plus comme les $S_t^{(n)}$ sont des variables aléatoires normales centrées, il en est de même pour leur limite B_t par le même argument, on voit aussi que toute combinaison linéaire $a_1 B_{t_1} + ... + a_N B_{t_N}$ est aussi une variable normale centrée donc les processus $(B_t)_{t \in I}$ est gaussien centré . De plus $B_0 = 0$ par définition et pour tout $s, t \in [0, I]$, grâce à l'indépendance des $\mathcal{N}_j$, on voit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(B_s B_t\right) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left\langle 1_{[0,s]}, e_k \right\rangle \left\langle 1_{[0,t]}, e_k \right\rangle \\ &= \left\langle 1_{[0,s]}, 1_{[0,t]} \right\rangle = \min\left(s, t\right) \quad . \end{aligned}$$

Par la formule de **Bessel-Perceval .** Le processus B est donc un Mouvement Brownien sur I ■

1.3.5 processus de Wiener

Le processus de Wiener est le modèle mathématique du Mouvement Brownien .

On appelle processus de Wiener standard $(W_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réeles un processus de diffusion homogène

On peut démontrer qu'un processus stochastique $(W_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Wiener si et seulement il vérifie les conditions :

$i)$ continuité : les fonctions $s \longrightarrow W_s(w)$ sont continues presque sûrement .

$ii)$ indépendance des accroissement : si $s \leq t$,$W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma\left(W_u\right)_{u \leq s}$.

$iii)$ stationnarité des accroissements : si $s \leq t$,la loi de $W_t - W_s$ est identique à celle de W_{t-s} .

La processus de Wiener à les deux propriétes suivants :

$i)$ les variables $W(t_0 + t) - W(t_0)$ normalement distribuées *ii)*

$$\mathbb{E}\left[X\left(t_0+t\right)-X\left(t_0\right)\right]=0$$

$$Var\left[X\left(t_0+t\right)-X\left(t_0\right)\right]=\sigma^2 t$$

1.3.6 Variation quadratique du Mvt-Brownien

Définition 1.3.4 *Soit $t>0$ et $\{0=t_0<t_1<...<t_p=t\}$ une subdivision de $[0,t]$, notons*

$$V_B\left(t_0,t_1,...,t_p\right)=\lim_{\Delta\longrightarrow 0}\sum_{j=1}^{p}\left|B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right|^2,\Delta=\max\left\{t_j-t_{j-1}\right\}$$

qui existe dans l'espace :$L^2\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}\right)$ et converge vers t.

1.3.7 Martingales

La notion des martingales joue un roule central dans la théorie des processus stochastique particulier dans le calcul stochastique .

Filtration et Martingales

Définition 1.3.5 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$*un espacce de probabilité muni d'une filtration* $\mathcal{F}_t$ *,*

$X=\left(X_t;t\geq 0\right)$*,est appellée une $\mathcal{F}$ martingale si elle est adaptée et intégrable et si :*

$$\mathbb{E}\left(X\left(t\right)\backslash\mathcal{F}_s\right)=X\left(s\right),P.p.s,\forall s<t$$

En particulier :

$$\mathbb{E}X\left(t\right)=\mathbb{E}X\left(0\right)$$

Définition 1.3.6 *Une famille de variables aléatoires $\left(X_t,t\in[0,\infty]\right)$ est une Sur-martingale (respective Sous-martingale) par rapport à la filtration $\left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}$ si :*

1- X_t est $\mathcal{F}_t - mesurable$ et intégrable pour tout t

2- $\mathbb{E}\left[X_t \backslash \mathcal{F}_s\right] \leq X_s, \forall s \leq t.$ (respectivement $\mathbb{E}\left[X_t \backslash \mathcal{F}\right] \leq X_s$)

Propriétés des martingales

1-Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} - martingale$,alors :

$$\mathbb{E}\left[X_s \backslash \mathcal{F}_s\right] = X_{t\cap s}, s \in \mathbb{R}_+.$$

2- Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingales (respectivement Sous-martingale ,Sur-martingale) ,la suite $\left(\mathbb{E}\left(X_t\right)_{t\geq 0}\right)$ est constante (i.e $\mathbb{E}\left(X_t\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right), t \geq 0)$, (respectivement croisante ,décroisante) .

Temps d'arrêt

La notion de temps d'arrêt intervient de facon essentielle dans l'étude des processus stochastique.

Définition 1.3.7 *Soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration de $\mathcal{F}$ au temps d'arrêt adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ pour tout $t \geq 0$*

Exemple 1.3.1 *:Tout temps d'éterministe est un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ temps d'arrêt.*

Définition 1.3.8 *Soit un $(F_t)_{t\geq 0}$ temps d'arrêt ,l'ensemble*

$$\mathcal{F}_t = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

est une tribu d'appellée tribu des évènement antérieures à τ;

Propriétés

1-Une constante positive est un temps d'arrêt.

2-Si T est un temps d'arrêt,T est $\mathcal{F}_T - mesurable.$

3-Si S et T deux temps d'arrêt ,$S \wedge T$ est un temps d'arrêt.

4-Si S et T deux temps d'arrêt tel que $S \leq T$,on a $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_T$.

5-Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus T temps d'arrêt fini, on définit

$X_T(w) = X_T(w)$.

6-Si un processus X est adapté ,X_T est $\mathcal{F}_T - mesurable$.

1.3.8 Processus d'Itô

Définition 1.3.9 *On appelle processus d'Itô, le processus X tel que p.s $\forall t \leq T$*

$$X_t = x + \int_0^t b_s \; ds + \int_0^t \sigma_s \; dB_s$$

où b est un processus adapté tel que $\int |b_s| \, ds$ existe (au sens Lebesgue) p.s pour tout t,et σ est un processus appartient à Λ.

On utilise la notation suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ \qquad X_0 = x \end{cases}$$

Définition 1.3.10 *Le coefficient b est la dérive, σ est le coefficient de diffusion .*

La décomposition d'un processus d Itô est unique, c'est-à-dire si

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \quad = \tilde{b}_t dt + \tilde{\sigma}_t dB_t \quad alors$$

$$b = \tilde{b} \;\; et \;\; \sigma = \tilde{\sigma}$$

Définition 1.3.11 *En particulier, si X est une martingale locale alors $b = 0$ et réciproquement .On peut définir un processus d'Itô pour des coefficients de diffusion*

tels que $\int \sigma_s^2 ds < \infty$ p.s,mais on perd la propriété de martingale de l'intégrale stochastique .

La partie $x + \int b_s ds$ *est la partie à variation finie.*

Si un processus à variation finie est une martingale ,il est constant.

En effet,si $A_0 = 0, A_t^2 = 2\int\limits_0^t A_s dA_s$ *et* $\mathbb{E}\left(A_t^2\right) = 0$

Si $\sigma \in \Lambda$*,on a*

$$\mathbb{E}\left(X_t\right) = \mathbb{E}\left(X_0\right) + \int\limits_0^t \mathbb{E}\left(b_s\right) ds, et \forall t \geq s,$$

$$\mathbb{E}\left(X_t / \mathcal{F}\right) = X_0 + \int\limits_0^t b_s du + \int \sigma_s dB_s + \mathbb{E}\left(\int\limits_s^t b_s du / \mathcal{F}_s\right) donc$$

$$\mathbb{E}\left(X_t / \mathcal{F}\right) + X_s + \mathbb{E}\left(\int\limits_s^t b_s du / \mathcal{F}\right)$$

Si $b = 0$,le processus X est une martingale continue.

La réciproque est vraie sous certaines conditions d'intégrabilité et de mesurabilité, toute martingale continue s'écrit $x + \int \Phi_s dB_s$

1.3.9 Intégrale par rapport à un processus d'Itô

Soit X un processus d'Itô :

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$$

On a sous réserve de conditions d'intégrabilité :

$$\int\limits_0^t \theta_s dX_s \ \ def \ \int\limits_0^t \theta_s b_s ds + \int \theta_s \sigma_s dB_s$$

1.3.10 Formule d'itô

Dans cette sous -section ,nous présentons une version stochastique de formule de change-ment de variable ,appellée formule d'Itô ,qui joue l'un des rôles les plus importants dans le calcul stochastique

On se donne un processus d'Itô réel X de décomposition $(1,1)$ et une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ suffisamment régulière ,si on a :

$$dX(t) = b(t)\,dt + \sigma(t)\,dW(t)\,; X(0) = x.$$

Théorème 1.3.3 (*première formule d'Itô*)

supposant F de classe C^2 alors :

$$f(X(t)) = f(X) + \int_0^t f'(X(s))\,dx(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f'(X(s))\,\sigma^2(s)\,ds$$

cette formule s'écrit sous forme condensée :

$$df(X(t)) = f(X(t))\,b(t)\,dt + f(X(t))\,\sigma(t)\,dW(t) + \frac{1}{2}f(X(t))\,d\langle X\rangle_t$$

Théorème 1.3.4 (*Deuxiéme formule d'Itô*)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C_1 par rapport à t , de classe C^2 par rapport à X on a :

$$f(t;X(t)) = f(0,X(0)) + \int_0^t f'_t(s,X(s))\,ds + \int_0^t f'_x(s,X(s))\,dx(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f'_{xx}(s,X(s))\,\sigma(s)^2\,ds.$$

On peut écrire cette formule sous forme différentielle :

$$df(t;X(t)) = (f'_t(t;X(t))) + f'_x(t;X(t))\,b(t) + \frac{1}{2}f'(t;X(t))\,\sigma(t)^2\,dt + f'_x(t;X(t))\,\sigma(t)\,dW(t)$$

Théorème 1.3.5 (*3 éme formule d'*I*tô*)

Soient X et Y deux processus d'Itô issus de x et y .

sit f une fonction de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^2$ à dérivée on a :

$$f\left(X\left(t\right),Y\left(t\right)\right)=f\left(x;y\right)+\int\limits_{0}^{t}f_{x}'\left(X\left(s\right),Y\left(s\right)\right)dXs+\int\limits_{0}^{t}f_{y}'\left(X\left(s\right),Y\left(s\right)\right)dYs+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}f_{xx}'\left(X\left(s\right),Y\left(s\right)\right)d\langle X\rangle_{s}$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}f_{yy}'\left(X\left(s\right),Y\left(s\right)\right)d\langle Y\rangle_{s}+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}f_{xy}'\left(X\left(s\right),Y\left(s\right)\right)d\langle X,Y\rangle.$$

1- pour f indépendant de Y_t on trouve la 1 ére formule d'Itô .

2- pour $Y_t\left(t\right)=t$ on trouve la 2 éme formule d'Itô

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques et processus de diffusion

2.1 Equation différentielle stochastique

Définition 2.1.1 *Une equation différentielle stochastique est une équation différetielle ordinaire perturbée par un terme stochastique ,plus précisément,c'est une equation du type suivant :*

$$X_t = x + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s, \tag{2.1}$$

Définition 2.1.2 *ou sous une forme*

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \tag{2.2}$$

Le coefficient b s'appelle le drifft et la matrice $\sigma\sigma^t$ s'appelle la matrice de diffusion

L'inconnu est le processus X .Le problème est de montrere que sous certaines conditions sur b et σ,l'équation différentielle a une unique solution .(comme pour une équation différentielle ordinaire)

Donc la solution est un processus X continu $(\mathcal{F}_t)$ −adapté tel que les intégrales $\int\limits_0^t b(s, X_s)\, ds$ *et* $\int\limits_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$

ont un sens et l'égalité() est satisfaite pour tout t, avec

$$\int |(b_s, X_s)|\, ds < \infty et \int\limits_0^t |\sigma(s, X_s)|\, dB_s < \infty \quad p.s \tag{2.3}$$

2.2 Existence et unicité de solution

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré,et soit B un $(\mathcal{F})_t$ −Mouvement Brownien et une variable aléatoire X_0 définis sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, avec X_0 et B indépendants.L'équation

$$dX(t) = b(X(t))\, dt + \sigma(X(t)\, dB(t)) \quad , X(0) = X_0 \quad , \tag{2.4}$$

est appelée une équation différentielle stochastique .Les coefficients b et σ sont appelés respectivement dérive et coefficient de diffusion .Il s'agit d'une équation homogène,puisque ces coefficients ne dépendent pas du temps , mais on considérera aussi des équations .

La solution d'une équation différentielle stochastique est appellée processus de diffusion ,ou plus simplement **diffusion**.

Notons $\mathcal{F}_t$ la tribu engendré par $B(s), s \leq t$ et par X_0,complétée par les ensembles négligeables pour $\mathbb{P}$.

Définition 2.2.1 *On appelle* ***solution forte*** *de l'équation différentielle stochastique , toute fonction aléatoire $X = (X(t), t \geq 0)$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que*

1) X est adapté à la filtration $\mathcal{F}$;

2)$\int\limits_0^t \left[b(X(s))^2 + \sigma(X(s))^2 \right] ds < \infty$ $p.s$ pour tout t, et on a $\mathbb{P}$-p.s.

$$X(t) = X_0 + \int\limits_0^t b(X(s))\, ds + \int \sigma(X(s))\, dB(s), \ t \in [0, \infty). \tag{2.5}$$

La condition d'intégrale finie dans le point 2 de la définition est que les intégrants dans2.5 sont dans M_{loc}^2,si bien que X est un processus d'Itô.

Pour l'équation 2.1 ci dessus ,tandis que$X(t) = X(0)\exp\{\sigma B(t) + (\mu^2 - \sigma^2/2)t\}$ est une solution de 2.2.Le théorème ci-dessous montre que c'est l'unique solution

,dans chaque cas.

Théorème 2.2.1 *On suppose que les fonctions a et b sont localement lipschitziennes par rapport à la deuxiéme variable, c'est a dire , pour tout $n \in \mathbb{N}$, e il exist $\boldsymbol{K}_n$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout (x, y) vérifiant $|x| \leq n$ et $|y| \leq n$,on a :*

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K_n |x - y| \tag{2.6}$$

K

Alors ,si l'EDS admet une solution continue par rapport à la variable t ,elle est unique.

Donnons maintenant un résultat d'existence et d'unicité de solutions globales des EDS,il est à noter que les hypothéses ne sont pas optimales,mais la très forte analogie entre ce théorème et celui de Cauchy-lipschitz global tant au niveau des hypothèses qu'au niveau de la démonstration est intéressante.

Théorème 2.2.2 *On suppose qu'il existe deux constantes M_1, M_2 telles que les fonctions a et b satisfont*

$$|a(t,x)| + |b(t,x)| \leq M_1(1 + |x|), \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \tag{2.7}$$

et

$$|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq M_2 |x - y|, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \tag{2.8}$$

Alors ,il existe une unique solution (X_t) continue par rapport à la variable $t \in [0, \infty)$

qui vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^s |X_t|^2 \, dt\right] < \infty, \forall s \in [0, \infty)$$

Théorème 2.2.3 *Supposons que les coeffients $a(t,x)$ et $b(t,x)$ sont localement lipschitziens dans un espacevariable,i.e.pour tout $n \geq 1$ il existe une constante $K_n > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$, $\|x\| \leq n$ et $\|y\| \leq n$:*

$$\|a(t,x) - a(t,y)\| + \|b(t,x) - b(t,y)\| \leq K_n \|x - y\| \tag{2.9}$$

Alors l'unicité forte est assurée pour l'équation .

Remarque 2.2.1 *Il est important de noter que pour les équations différentielles ordinaires,la condition locale de Lipschitz n'est pas suffisante pour garantir l'existence d'une solution globale .Par exemple l'unique solution de l'équation*

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s^2 d$$

et

$$X_t = \frac{1}{1-t},$$

qui "explose "lorsque $t \longrightarrow 1$.

On doit donc imposer d'autres conditions plus fortes,on obtiendra le résultat suivant.

Théorème 2.2.4 *Supposons que les coefficients $a(t,x)$ et $b(t,x)$ vérifient les conditions de Lipschitz globales et la croissance linéaire suivantes*

$$\|a(t,x) - a(t,y)\| + \|b(t,x) - b(t,y)\| \leq K \|x - y\|, \tag{2.10}$$

$$\|a(t,x)\|^2 + \|b(t,x)\|^2 \leq K^2 \left(1 + \|x\|^2\right), \tag{2.11}$$

pour tout $0 \leq t < \infty, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$,où K est un constante positive .Dans un certain espace probabilisé(Ω, F, P) ,soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire indépendant du mouvement brownien

$n-$dimensionel $W = \{W_t, 0 \leq t < \infty\}$,et dont le moment d'ordre deux est fini

$$\mathbb{E}\left\|\varepsilon\right\|^2 < \infty.$$

Unicité

Preuve. Si X et $Y \in M^2$ sont deux solutions,

$$X(t) - Y(t) = \int_0^t \left[b(X(s)) - b(y(s))\right] ds + \int_0^t \left[\sigma(X(s)) - \sigma(y(s))\right] dBs,$$

et en utilisant $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$,l'inégalité de schwarz,la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique et la condition de Lipschitz,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X(t) - Y(t)\right]^2 &\leq 2\mathbb{E}\left(\int_0^t \left[b(X(s)) - b(Y(s))\right] ds\right)^2 + \\
&+ 2\mathbb{E}\left(\int_0^t \left[\sigma(X(s)) - \sigma(Y(s))\right] dBs\right)^2 \\
&\leq 2t\mathbb{E}\int_0^t \left[b(X(s)) - b(Y(s))\right]^2 ds + \\
&+ 2\mathbb{E}\int_0^t \left[\sigma(X(s)) - \sigma(Y(s))\right]^2 dBs \\
&\leq 2(T+1)K^2\mathbb{E}\int_0^t \left[X(s) - Y(s)\right]^2 ds, t \leq T
\end{aligned} \tag{2.12}$$

avec $X(0) = Y(0)$,le lemme de Gronwall implique que $\mathbb{E}\left(\left[X(t) - Y(t)\right]^2\right) = 0$ pour tout t. D'ou l'unicité dans le théoréme. ■

Existence

Preuve. On construit une suite de fonctions aléatoires $\{X_n(.)\}_{n\geq 0}$ par le procédé d'itération de

Picard,

$$X_0(t) = X_0, X_{n+1}(t) = X_0 + \int_0^t b(X_n(s))\, ds + \int_0^t \sigma(X_n(s))\, dB(s). \tag{2.13}$$

Alors ,$X_n \in M^2$,on a l'identité

$$X_{n+1}(t) - X_n(t) = \int_0^t [b(X_n(s)) - b(X_{n-1}(s))]\, ds + \int_0^t [\sigma(X_n(s) - \sigma(X_{n-1}(s)))]\, dB(s),$$

et on utilusant les mêmes arguments qui nous ont menés à, on obtient

$$\mathbb{E}\left|X_{n+1}(t) - X_n(t)\right|^2 \leq C_T \int_0^t \mathbb{E}\left|X_n(s) - X_{n-1}(s)\right|^2 ds, t \leq T,$$

avec $C_T = 2(T+1)K^2$.On vérifie alors par réccurence que

$$\mathbb{E}\left|X_{n+1}(t) - X_n(t)\right|^2 \leq aC_T^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},$$

où la quantité

$$a := \max_{t \leq T} \mathbb{E}\left|X_1(t) - X_1(t)\right|^2 \leq CstT^3 \mathbf{E}\left(X_0^2\right)$$

est finie. Finalement,

$$\|X_{n+1} - X_n\|^2_{M^2[0,T]} \leq a \frac{(C_T T)^n}{n!},$$

donc

$$\|X_{n+p} - X_n\|_{M^2[0,T]} \leq a^{\frac{1}{2}} \sum \left(\frac{(C_T T)^n}{K!}\right)^{\frac{1}{2}},$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini :la suite $\{X_n(.)\}_{n \geq 0}$ est de

Cauchy ,elle converge donc dans l'espace de Hilbert $M^2[0,T]$,pour tout $T > 0$,vers une limite $X = (X(t), t \geq 0)$ (d'après l'unicité dans 2.5,la limite ne dépend pas de T) .Avec l'hypothése de Lipschitz,on peut passer à la limite dans2.13 ,et on obtient2.5 .Les autres propriétés définissant les solutions fortes sont clairement satisfaites. ■

Exemple 2.2.1 *L'équation suivante admet une solution unique que l'on peut expliciter :*

$$dX(t) = \sqrt{1 + X(t)^2} dB(t) + \left(\sqrt{1 + X(t)^2} + X(t)/2 \right) dt. \tag{2.14}$$

Preuve. D'après le théorème ,on a existence et unicité de la solution.En fait ,la solution est donnée par

$$X(t) = \sinh\left[B(t) + t + \sinh^{-1}(X_0)\right],$$

comme on le vérifie en appliquant la formule d'Itô.le lecteur pourra réflechir à comment on peut deviner cette expression pour la solution. ■

2.3 Solutions fortes :compléments

Le premier résultat est que, sous l'hypothése que le coefficient de diffusion soit constant,(choisit égale à 1 dans l'énoncé ci-dessous) la solution est une fonctionnelle continue du Mouvement Brownien qui conduit l'équation différentielle sthochastique .

Proposition 2.3.1 *Si $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzien ,pour tout $T \in (0, \infty)$ et tout $x_0 \in \mathbb{R}$ l'application*

$$\Phi : C_T \longrightarrow C_T$$

$$B \mapsto \Phi(B) = X$$

qui au Mouvement Mrownien B associe la solution X de l'équation différentielle stochastique

$$X(t) = x_0 + B(t) + \int_0^t b(X(s))\, ds,$$

est Lipschitzienne pour la norme uniforme sur $[0, T]$.

Preuve. Pour toute fonction continue $\mathbf{z} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$,la fonction $f_{\mathbf{z}}(t, x) = b(x + \mathbf{z}(t))$ est continue en (t, x) ,globalement lipschitzienne en x,de sorte que ,d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz

,l'équation différentielle ordinaire

$$y(t) = x_0 + \int_0^t f_z(s,, y(s))\, ds$$

admet une unique solution $y = (y(t), t \geq 0)$ .On définit alors

$$\Psi : \begin{cases} C_T \longrightarrow C_T \\ Z \longrightarrow \Psi(Z) = y + Z \end{cases}$$

avec y dépendant de z construit ci-dessus.Comme

$$\begin{aligned} \Psi(B)(t) &= x_0 + B(t) + \int_0^t f_B(s, \Psi(B)(s) - B(s))\, ds \\ &= x_0 + B(t) + \int_0^t b[\Psi(B)(s)]\, ds, \end{aligned}$$

On constate que

$$\Psi(B) = \Phi(B) = X.$$

Mais ,si $z, z' \in C$,

avec $\|z - z'\|_{\infty,[0,T]} := \max\{|z - z'|(t), t \in [0,T]\}$,et par le lemme de Gronwall

$$\|\Psi(z) - \Psi(z')\|_{\infty,[0,T]} \leq \|z - z'\|_{\infty,[0,T]} \exp\{KT\},$$

$$\begin{aligned} |\Psi(z) - \Psi(z')|(t) &\leq |z - z'|(t) + \int_0^t |b(\Psi(z)(s)) - b(\Psi(z')(s))|\, ds \\ &\leq \|z - z'\|_{\infty,[0,T]} + K \int_0^t |\Psi(z)(s) - \Psi(z)(s)|\, ds \end{aligned}$$

et Ψ est Lip^schitz-continue.

Théorème 2.3.1 *Supposons les coefficients b, σ globalement lipschitziens et à croissance au plus linéaire dans la variable d'espace,*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|, \tag{2.15}$$

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq K^2\left(1 + |x|^2\right), \tag{2.16}$$

pour $t \geq 0$,$x, y \in \mathbb{R}^d$,avec K une constante finie .Alors ,pour $X_0 \in L^2(\mathcal{F}_0)$,l'équation 2.4 admet une unique solution $X \in M^2$.

■

Théorème 2.3.2 *Supposons $\sigma : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, b : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ localement lipschitziens :$\forall N >$* $0, \exists K_N < \infty$

$$|\sigma(x) - \sigma(y)|^2 + |b(x) - b(y)|^2 \leq K_N |x-y|^2, |x|, |y| \leq N,$$

Alors il existe une unique solution forte (X, ς) à l'équation différentielle stocastique

$$dX(t) = b(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dB(t), X(0) = X_0, \text{pour tout } X_0 \in l^2(\mathcal{F}_0).$$

Si $\sup_N K_N <$,$\varsigma = \infty$,c'est-à-dire que la solution est définie en tout temps.

2.4 Solution faible

Quand à l'unicité faible ,ou "en loi",cela semble a priori bien difficile à obtenir puisque s'il existe une solution ,il en existe en générale une infinité,chacune étant définie sur un espace arbitaire.Il existe toute fois plusieurs critéres dunicité faible ,le plus utile est sans doute le suivant

Théorème 2.4.1 (*Yamada-Watanabe*)*Supposons que les coefficients a et b soient boréliens et localement bonées.L'unicité trajectorielle implique l'unicité faible ,et aussi que toute solution X_t*

sur un espace probabilisé quelconque $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*relativement à un Mouvement Brownien* $W_t, F_t -$ *mesurable,est en fait adaptée à la filtration* F_t *engendrée par ce Mouvement Brownien* W_t *(solution "forte")*.

Définition 2.4.1 *On appelle solution faible de l'équation différentielle stochastique ,tout triplet* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$,$(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$, $(B, X_0, X(.))$ *,constitué d'un espace de probabilité ,d'une filtration ,d'un* $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$*-Mouvement Brownien* B *indépendant de la variable aléatoire* X_0 *et d'un processus aléatoire* $X(.)$ *adapté a la filtration, tels que les points* 1)*et*2) *dz la définition*(5.1) *soient vérifiés*

Exemple 2.4.1 *(de Tanaka). la fonction signe :*

$sgn(x) = +1$ si $x \geq 0$, $sgn(x) = -1$ si $x < 0$.L'équation différentielle stochastique

$$X(t) = \int_0^t sgn(X(s))\, dB(s) \tag{2.17}$$

posséde une solution faible ,unique en loi ,mais elle n'admet pas de solution forte.

Preuve. l'unicité en loi résulte de ce que toute solution est nécessairement un Mouvement Brownien .En effet ,pour toute solution X ,on vériffie facilement que $\exp\{uX(t) - u^2t/2\}$ est une martingale ,et donc que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i\left[X(t_i) - X(t_{i-1})\right]\right\}\right] = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i^2\left[t_i - t_{i-1}\right]/2\right\}$$

pour toute suite croissante $(t_i, i \leq n)$ positive ,et toute suite $(u_i, i \leq n)$.

Existence :soit $(\Omega, \boldsymbol{A}, \mathbb{P})$un espace sur lequel est défini un Mouvement Brownien X,et $\mathcal{F} = \mathcal{F}^x$ la filtration propre de X. Par le même raisonnement que ci-dessus ,le processus B défini par

$$B(t) = \int_0^t sgn(X(s))\, dX(s), \tag{2.18}$$

est encore un Mouvement Brownien.Par différentiation ,$dB(t) = sgn(X(t))\, dX(t)$,et puisque $1/sgn(x)$,on a l'égalité 2.17 .On vient donc de construire une solution faible (Remarque : avec les notations précidentes ,le tripmet $(\Omega, A, \mathbb{P})), (\mathcal{F}_t; t \geq 0)$,

$(B, X_0 = 0, -X(.))$,est une autre solution faible .

Une solution faible de ne peut pas être solution forte :en effet ,pour toute solution faible on déduit comme ci-dessus la formule 2.18,qui implique,d'après la remarque ci-dessous ,que $B(t)$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t^{|X|} = \sigma(|X(s)|, s \leq t)$.

si X était solution forte ,$X(t)$ serait $\mathcal{F}_t^B-$mesurable ,et on aurait alors

$$\hat{\mathcal{F}}_t^X \subset \hat{\mathcal{F}}_t^B \subset \hat{\mathcal{F}}_t^{|X|},$$

$-\hat{\varsigma}$ désignant la complétion de la tribu $\varsigma-$,ce qui absurde car le signe du brownien X est une variable aléatoire qui contient beaucoup d'information. ■

Proposition 2.4.1 *On appelle temps local au point 0 du Mouvement Brownien* W *,la limite dans*

$$L^2 L_t = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} mesure \{s \in [0,t] ; |W(s)| \leq \varepsilon\}.$$

On a l'égalité suivante ,appellée formule de $Tanaka$:

$$|W(t)| = \int_0^t sgn(W(s)) \, dW(s) + L_t.$$

Remarque 2.4.1 *.En particulier ,*

$(i) \int_0^t sgn(W(s)) \, dW(s) = |W(t)| - L_t est \mathcal{F}_t^{|W|} - mesurable$,puisque L_o l'est par définition.
$(ii)\, |W(t)| - L_t$ est un Mouvement Brownien.

Le temps local L_t représente la densité (par unité de longueur)de temps passé au voisinage de l'origine jusqu'au temps t.

On peut tenter de justifier la formule de $Tanaka$ comme suit .La fonction $\Phi(x) = |x|$ vérifie $\Phi' = sgn, \Phi'' = 2\delta$ la masse de $Dirac$ en 0 (les dérivées sont à prendre au sens des distributions) ,Une utilisation audacieuse(et injustifiée !)de la formule $d'Itô$ méne donc àn

$$|W(t)| = \int_0^t sgn(W(s))\, dW(s) + \int_0^t \delta(W(s))\, ds;$$

en remaequant alors que

$$\delta = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} 1_{|x|\leq\varepsilon} dx$$

(limite pour la convergence étroite des mesures de probabikité) ,on interpréte le dernier terme comme le temps local L_t ,et on obtient la formule de $Tanaka$.Ce raisonnement ne tient pas ,car la formule $d'Itô$ ne s'applique pas à Φ,qui n'est pas continûment dérivable en 0.Nous donnons à présent une démenstration rigoureuse de la proposition 2.3.2,mais le lecteur pourra la sauter en premiére lecture .

Preuve. pour $\varepsilon > 0$ on définit la fonction

$$\Phi'_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x| \text{ pour } |x| \geq \varepsilon, \\ \frac{1}{2}\left(\varepsilon + x^2 /\right) \text{ pour } x \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \end{cases}$$

(On pourra s'aider d'un dessin .)Alors ,cette fonction Φ_ε est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{-\varepsilon, \varepsilon\}$,avec

$$> \Phi'_\varepsilon(x) = \begin{cases} sgn(x) \text{ pour } |x| \geq \varepsilon, \\ x/\varepsilon \text{ pour } x\epsilon[-\varepsilon, \varepsilon] \end{cases}, \text{ et } \Phi''_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\mathbf{1}_{]-\varepsilon,\varepsilon[}(x).$$

On peut lui appliquer la formule $d'Itô$ énoncée dans le lemme ,et on obtient que

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(W(t)) - \Phi_\varepsilon(W(0)) - \int_0^t \Phi'(W(s))\, dW(s) &= \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''_\varepsilon(W(s))\, ds \\ &= \frac{1}{2} mesure\{s \in [0,t]; |w(s)| \leq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Lorsque $\varepsilon \searrow 0, \Phi_\varepsilon(W(t))$ et $\Phi_\varepsilon(W(0))$ convergent respectivement vers $|W(t)|$ et $|W(0)|$ .Il suffit donc de montrer la convergence dand L^2 de l'integrale stochastique vers $\int_0^t sgn(W(s))\, dW(s)$ .On calcule

$$\left\| \int_0^t \Phi'_\varepsilon \left(W\left(s\right)\right) dW\left(s\right) - \int_0^t sgn\left(W\left(s\right)\right) dW\left(s\right) \right\|_2^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\int 1_{[-\varepsilon,\varepsilon]}\left(W\left(s\right)\right)\left(\Phi'\left(W\left(s\right)\right) - sgn\left(W\left(s\right)\right)\right) dW\left(s\right)\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^t 1_{[-\varepsilon,\varepsilon]}\left(W\left(s\right)\right)\left(\Phi'\left(W\left(s\right)\right) - sgn\left(W\left(s\right)\right)\right)^2 d\left(s\right)\right] \\
&\leq \int_0^t P\left[W\left(s\right) \in [-\varepsilon,\varepsilon]\right] ds \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quand $\varepsilon \searrow 0$ .On déduit à la fois l'existence de la limite L_t dans L^2 ,et la formule de $Tanaka$.

Le resultat qui vient montre que la notion de solution faible permet de donner une solution à beaucoup d'équations,même avec des coefficients de dérives très peu régu ■

Proposition 2.4.2 *soit* $b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ *borélienne ,avec*$\left|b\left(t,x\right)\right| \leq K\left(1+\left|x\right|\right)$.

Alors ,l'équation différentielle stochastique

$$dX\left(t\right) = b\left(t, X\left(t\right)\right) dt + dB\left(t\right), \quad X\left(0\right) = x_0,$$

admet une solution faible pour tout x_0 dans $\mathbb{R}^d$.

2.5 Absolue continuité de la loi de diffussions par changement de dérivée

Soient b_0, b_1, σ globalement lipschitziens sur $\mathbb{R}$,et X_0.Alors les deux équations différentielles stochastiques

$$dX(t) = \sigma(X(t))\, dB(t) + b_1(X(t))\, dt \ , \tag{2.19}$$

$$dY(t) = \sigma(Y(t))\, dB(t) + b_0(Y(t))\, dt \tag{2.20}$$

partant du même point $X(0) = Y(0) = X_0$,ont une unique solution forte.Dans cette section,que l'on rapprochera de la section ,on montre que les lois $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ de X et Y sur $C_T = C[0,T]$,sont équivalentes sous des hypothèses assez faibles .On se restreint au cas où les coefficients de diffusions sont égaux,popur la raison suivante .

Remarque 2.5.1 *.Pour* $0 < \tau \neq 1$ *et* $T \in]0, \infty[$ *,les lois de* B *et de* τB *sur*$[0,T]$ *sont étrangères.*

Preuve. .En effet,la variation quadratique du Mouvement Brownien

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n} \left[B\left(t_i^{(n)}\right) - B\left(t_{i-1}^{(n)}\right) \right]^2 = T \qquad \left(t_i^{(n)} = iT/n\right) \tag{2.21}$$

existe dans L^2.Puisque convergence dans L^2 entraîne convergence $p.s.$ pour une soussuite ,fixons une suite extraite $(n_k; k \geq 1)\,, n_k \longrightarrow \infty$ quand $k \longrightarrow \infty$,telle que la convergence 2.21 ait lieu presque sûrement le long de cette sous-suite $(n_k)_k$.

Définissant alors le borélien

$$A_\tau = \left\{ \mathbf{x} \in C([0,T], \mathbb{R})\,;\, \lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \left[\mathbf{x}\left(t_i^{(n_k)}\right) - \mathbf{x}\left(t_{i-1}^{(n_k)}\right) \right]^2 = \tau^2 T \right\}$$

pour $\tau > 0$,il s'en suit que

$$P(B \in A_1) = 1 \ , \ \ P(\tau B \in A_\tau) = 1,$$

ce qui montre bien que les lois de B et de τB sur$[0,T]$ sont étrangères puisque A_1 et A_τ sont disjoints.

Soient $\sigma(.) > 0$,et

$$h(y) = \frac{b_{1-}b_0}{\sigma}(y), z(t) = \exp\left\{\int_0^t h(Y(s))\,dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t h(Y(s))^2\,ds\right\}.$$

■

Proposition 2.5.1 .*On suppose que $\sigma(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$,et que $\mathbf{E}Z(T) = 1$.*

Alors ,les lois $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ sont équivalentes sur C_T,et

$$\frac{dP_X}{dP_Y}(y) = \exp\left\{\int_0^T \frac{b_1 - b_0}{\sigma^2}(\mathbf{y}(s))\,d\mathbf{y}(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{b_1^2 - b_0^2}{\sigma^2}(y(s))\,ds\right\}.$$

Preuve. .Soit $\mathbf{Q}$ la probabilité définie par $dQ = Z(T)\,dP$.D'après le théorème de $Girsanov$, $B(t) = B(t) - \int_0^t h(Y(s))\,ds$ est un $\mathbf{Q}-$Mouvement Brownien.

Comme

$$dY(t) = \sigma((Y(t)))\,dB(t) + b_1(Y(t))\,dt,$$

et comme la solution de cette équation différentielle stochastique et unique en loi ,on en conclut que

la loi de Y sous $\mathbf{Q}$ est égale à la loi de X sous P

On en déduit que ,pour $\Psi : C_T \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable positive,

$$\begin{aligned}\int_{C_T} \Psi dP_X &= \mathbb{E}^P\Psi(X)\\ &= \mathbb{E}^{\mathbf{Q}}\Psi(Y)\\ &= \mathbb{E}^P Z(T)\,\Psi(Y)\\ &= \mathbb{E}^P\left[\Psi(Y)\,\mathbb{E}^P[Z(T)/Y]\right].\end{aligned}$$

On exprime alors $Z(T)$ à l'aide de Y :puisque

$$dB(t) = \sigma^{-1}(Y(t))\left[dY(t) - b_0(Y(t))\,dt\right],$$

$$Z(T) = \exp\left\{\int_0^T \frac{b_1 - b_0}{\sigma^2}(Y(s))\,dY(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{b_1^2 - b_0^2}{\sigma^2}(Y(s))\,ds\right\} =: D(Y).$$

Ainsi,

$$\int_{C_T} \Psi dP_X = \mathbb{E}^{\mathbf{P}}\Psi(Y)\,D(Y) = \int_{C_T} D(\mathbf{y})\,\Psi(\mathbf{y})\,dP_Y(\mathbf{y}),$$

ce qui montre bien que $D(y)$ est la densité de P_X par rapport à P_Y. ∎

2.6 Approximation Diffusion

Comme le montre le principe d'invariance de Donsker,le Mouvement Brownien est une limite universelle .Ce court paragraphe ,qui est à mettre en parallèle avec le paragraph ,montre que les diffusions le sont aussi.

Pour chaque entier $n \geq 1$,on se donne une chaine de Markov homogéne $\left(Y_i^{(n)}, i \in \mathbb{N}\right)$ dans $\mathbb{R}^d$,de transition $\pi^{(n)}(x, dy)$ .En d'autre termes ,la loi de $Y_{i+1}^{(n)}$ conditionnelle en $Y_0^{(n)}, ...Y_i^{(n)}$ ne dépend que de $Y_i^{(n)}$ et de plus

$$P\left(Y_{i+1}^{(n)} \in .|\, Y_i^{(n)}\right) = \pi^{(n)}\left(Y_i^{(n)}, .\right)$$

presque sûrement .On définit ,pour $x \in \mathbb{R}^d$,

$$b^{(n)}(x) = n\int (y - x)\,\pi^n(x, dy), \tag{2.22}$$

$$a^{(n)}(x) = n\int (y - x)(y - x)^*\,\pi^{(n)}(x, dy), \tag{2.23}$$

$$k^{(n)}(x) = n\int |y - x|^3\,\pi^{(n)}(x, dy), \tag{2.24}$$

$$\triangle_\varepsilon^{(n)}(x) = n\pi^{(n)}(x, B(x, \varepsilon)^c), \tag{2.25}$$

avec $\mathbf{B}(x, \varepsilon)^c$ le complémentaire de la boule de centre x et rayon $\varepsilon > 0$.On imposera dans la suite que $a^{(n)}$ et $b^{(n)}$ convergent quand $n \longrightarrow \infty$,ce qui revient à dire que les sauts de $Y^{(n)}$ sont de moyenne et variance d'ordre $1 \backslash n$ .Comme dans le principe d'invariance ,renormalisations de sorte que la chaine $Y^{(n)}$ saute n fois plus souvent ,la ligne polygonale $X^{(n)}$ interpolant les points $\left(t = i\,/n\; x = Y_i^{(n)}\right)$,soit

$$X^{(n)}(t) = Y_{[nt]}^{(n)} + (nt - [nt]) \left(Y_{[nt+1]}^{(n)} - Y_{[nt]}^{(n)}\right).$$

Alors les coefficients $b^{(n)}, a^{(n)}$ ci-dessus s'interprètent comme la dérive et la varience (ou matrice de covarience) instantanées de $X^{(n)}$.

Théorème 2.6.1 (***Approximation diffusion***) *.On suppose qu'il existe des fonctions continues a, b telles que ,pour tout $R < \infty$,*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{|x| \leq R} \left|a^{(n)}(x) - a(x)\right| = 0$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{|x| \leq R} \left|b^{(n)}(x) - b(x)\right| = 0$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{|x| \leq R} \Delta_\varepsilon^{(n)}(x) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\sup_{|x| \leq R} K^{(n)}(x) < \infty \tag{2.26}$$

Avec σ une matrice vérifiant $\sigma(x)\sigma(x)^* = a(x), x \in \mathbb{R}^d$,on suppose aussi que l'équation différentielle stochastique

$$dX(t) = b(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dB(t), \qquad X(0) = x, \tag{2.27}$$

admet une solution faible unique en loi pour tout x;cela est réalisé en particulier si 2.27 admet une unique solution forte.

Alors ,pour toute suite de conditions initiales $Y_0^{(n)} \longrightarrow x$,la suite de processus aléatoires $X^{(n)}$

converge en loi vers la diffusion X donnée par 2.27,soit

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathbb{E}F\left(X^{(n)}\right) = \mathbb{E}F\left(X\right), \quad \forall F : C\left(\mathbb{R}_{+}, \mathbb{R}\right) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue bornée.}$$

Exemple 2.6.1 .***Modèle de diffusion gazeuse d'Ehrenfest***

Dans deux enceintes séparées par une paroi poreuse sont réparties $m = 2n$ molécules de gaz.À chaque unité de temps une molécule choisie au hazad change d'enceinte.Soit $Z_i^{(n)}$ le nombre de molécules au temps i dans l'enceinte gauche . $\Big($Alors ,il ya $2n - Z_i^{(n)}$ molécules dans l'enceinte de droite .$\Big)$ C'est une chaine de Markov ,de transition

$$\hat{\pi}^{(n)}\left(K, K+1\right) = \frac{2n-K}{2n}, \qquad \hat{\pi}^{(n)}\left(K, K+1\right) = \frac{K}{2n}$$

Sa probabilité invariante est la binomiale $\mathcal{B}\left(2n, 1\,/2\right)$,on s'attend donc à ce que typiquement ,$Z_i^{(n)} = n + n^{1/2} \times$ terme d'ordre 1,d'après le théorème de la limite centrale.On considère donc

$$Y_i^{(n)} = n^{-1/2}\left(Z_i^{(n)} - n\right),$$

qui est une chaine de Markov ,de transition $\pi^{(n)}\left(x, x \pm n^{-1/2}\right) = \frac{n^{1/2} \pm x}{2n^{1/2}}$.On a donc

$$b^{(n)}\left(x\right) = n\left(n^{-1/2}\frac{n-x}{2n^{1/2}} + n^{-1/2}\frac{n^{1/2}+x}{2n^{1/2}}\right) = -x =: b\left(x\right);$$

$$a^{(n)}\left(x\right) = n\left(n^{-1}\frac{n^{1/2}-x}{2n^{1/2}} + n^{-1}\frac{n^{1/2}+x}{2n^{1/2}}\right) = 1 =: a\left(x\right).$$

Les hypothèses du théorème sont vérifiées,puisque les sauts de $Y^{(n)}$ sont bornés par $n^{-1/2}$,et que les coefficients a , b sont réguliers :la limite X est le processus d'Orns $d'Ornstein - Uhlenbeck$ $dX\left(t\right) = -X\left(t\right)dt + dBt$

Conclusion

Les processus de diffusion sont des fonctions aléatoires très utilisées dans les modèles physiques, chimiques, biologiques, statistiques et financiers. Cet ouvrage est une introduction au calcul stochastique, c'est-à-dire au calcul différentiel et intégral spécifique au traitement théorique et numérique de ces processus. Le mémoie met l'accent sur les concepts essentiels et les applications. Les exercices et problèmes, assortis de corrigés détaillés, permettent d'acquérir la dextérité exigée par le calcul stochastique.

Bibliographie

[1] Belqadhi, A. (2008). Etude de calcule stochastique martingales,mouvement brownien et intégration d'Itô Ecole polytechnique Fédérale De lausanne .

[2] Berglund, N. (2012). Martingales et calcul stochastique université d'orléans.

[3] Chagny, G. construction du mouvement brownien.

[4] Gallardo, L. (2008) Mouvement brownien et calcul d'itô :cours et exercices corrigés.Herman.

[5] Mezerdi, B. (1988). Les conditions necessaire d'optimalté de diffusion

[6] Le Gall, J-F. (2010). Calcul stochastique et processus de markov. Université Paris-Sud.

[7] Le Gall, J-F. (2013). Mouvement Brownien,martingales et calcul stochastique. Université Paris-Sud. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{P}$	:	la mesure de probabilité
$B(t)$	:	le Movement Brownien standard
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	:	espace de probabilité
L^2	:	l'espace (des classes d'équivalence) des variables aléatoires de carré intégrable $(E\left\vert X\right\vert^2 < \infty)$
$\mathcal{B}(U)$	:	la tribu borélienne engendrée par les ouverts de U.
$\sigma(.)$	:	la tribu engendrée par .
$var(X)$	:	la variance de X
$M^2[0,T]$	:	l'ensemble des martingales de carré intégrable
$\mathbb{P}-p.s$	:	presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
EDS	:	équations différentielles stochastiques.
$i.e$	:	c'est à dire.
iid	:	indépendante et identiquement distribuée

ملخص

في هذا العمل ، درسنا خصائص معينة للحركة البراونية والمعادلات التفاضلية العشوائية وهي فكرة الحلول القوية والضعيفة ، ووجود حل المعادلة التفاضلية وتفردها ، تسمح المعادلات التفاضلية العشوائية بتجسيد مسارات عشوائية ، مثل سوق الأوراق المالية و حركات جسيمات تخضع لظواهر الانتشار

الكلمات المفتاحية

المعادلة التفاضلية العشوائية - مشكلة مارتينغال - عملية ماركوف - عملية وينر - عملية الانتشار

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous avons étudie certaines propriétés du mouvement Brownien et des équations différentielles stochastiques a savoir la notion des solutions fortes et faibles, existence et unicité de solution d'une équation différentielle, Les EDS permettent de modéliser des trajectoires aléatoires, tels des cours de bourse ou les mouvements de particules soumises à des phénomènes de diffusion.

Mots clés :

Equation différentielle stochastique – problème de martingale – processus de Markov - processus de Wiener - processus de diffusion.

ABSTRACT

In this work, we have studied certain properties of Brownian motion and stochastic differential equations namely the notion of strong and weak solutions, existence and uniqueness of solution of a differential equation, EDS allow modeling random trajectories, such as courses stock market or particle movements subjected to diffusion phenomena.

Keywords :

Stochastic differential equation - Martingale problem - Markov process - Wiener process - diffusion process.