



Université Mohamed Khider de Biskra  
FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA  
VIE  
Département : Sciences de la Matière

# MÉMOIRE DE MASTER

Domaine des Sciences de la Matière  
Filière de Physique  
Spécialité Physique énergétique et énergies renouvelables

Réf. :

---

Présenté et soutenu par :

Bendjama Omar et Brighet Abdennour

## La mécanique Quantique Supersymétrique, Concepts et méthodologie

---

Jury :

Mme	Nedjoudj Bensalah	MCB	encadreur
Mr	Mokhtar Falek	MCA	Président
Mr	Idir Alyan	MCB	examineur

Année universitaire : 2020-2021

## Table des matières

Introduction.....	4
Chapitre 1 : La Mécanique Quantique de la supersymétrie.....	7
1-1- Introduction .....	7
1-2- Le Modèle Standard et le quark top .....	8
1-2-1- Description du Modèle Standard.....	9
1-2-2- Déficit du modèle standard .....	9
1-3- Pourquoi la supersymétrie?.....	11
1-4- L'algèbre de SUSY:.....	14
1-5- Formulation hamiltonienne de la MQSUSY.....	16
1-5-1- Commutation et anticommutation .....	16
1-6- Equation de Schrödinger stationnaire .....	16
1-7- La SUSY pour l'étude de potentiels à une dimension : .....	18
1-8- Factorisation et Hiérarchies d'Hamiltoniens .....	23
1-9- Brisure de la Supersymétrie.....	26
1-9-1- La brisure de la supersymétrie et les masses des partenaires supersymétriques .....	26
1-9-2- Les modes de brisure de la supersymétrie .....	27
1-9-3- Brisure de SUSY induite par la gravitation .....	28
Chapitre 02 : Invariance de forme .....	32
2-1- Définition.....	32
2-2- Invariance de forme et hiérarchie de potentiels superpartenaires .....	33
2-3- Invariance de forme des potentiels superpartenaires dans l'exemple $\Phi(x) = \tanh \beta x$ .....	36
Chapitre 3 : Exemples de l'utilisation de la MQSUSY dans des problèmes physique. ....	
3-1- Introduction.....	39
3-2- Exemple 1 : Détermination des énergies et des états liés d'un potentiel de type $V(r) = ar^2 + br - 4 + cr - 6$ .....	39
3-2-1- Etude analytique .....	40
Les relations entre les paramètres de cette équation satisfont les définitions de la SUSY .....	41
3-2-2- Conclusion .....	51
3-3- Exemple 2 : La supersymétrie en mécanique quantique relativiste .....	52
3-3-1- Introduction.....	52
3-3-2- La supersymétrie et l'équation de Dirac.....	52
3-3-3- La supersymétrie et l'équation de Klein-Gordon .....	53
3-3-4- L'équation de Klein-Gordon tridimensionnelle.....	54

3-3-5- Les états d'une particule de Klein-Gordon dans des potentiels scalaire et vectorielle du type exponentiel..	55
3-3-6- Spectre d'énergie de l'équation de Klein-Gordon avec le potentiel de Titz-Wei .....	57
3-3-7- Les Fonctions d'onde .....	59
Conclusion Générale.....	61
Bibliographie.....	62

# Introduction

Au début de 20<sup>ème</sup> siècle, de nombreux travaux ont été effectués sur une nouvelle théorie connue par la mécanique quantique. Cette dernière dont le domaine est très vaste a été développée dans le but de mettre au point des formalismes décrivant la structure fine de la matière. Des efforts considérables ont été consacrés par les théoriciens dans ce sens afin d'apporter des explications aux nombreux problèmes physiques soulevés à l'époque [1,2,3]. Inspiré par l'idée de Louis de Broglie, d'Einstein et de Max Planck, Erwin Schrödinger a établi sa célèbre équation ondulatoire de l'électron [4]. Par la suite, Dirac réécrit la forme relativiste de cette équation [5,6] et introduit une méthode de factorisation de l'oscillateur harmonique en 1928.

Dès lors, Schrödinger note certaines symétries de son équation et fournit une méthode de factorisation des Hamiltoniens [4]. Après une décennie, Infeld et Hull [7] généralisent cette méthode pour d'autres systèmes quantiques.

Au début des années quatre-vingt, la physique des particules élémentaires a tenté de faire une conception de la structure fondamentale de la matière en vue d'unifier les quatre forces de la nature. Cette théorie suggère d'utiliser l'hypothèse de partenaire pour chaque particule où chaque fermion a comme partenaire un boson et vice versa. Cette symétrie entre ces deux derniers est connue par la supersymétrie et abrégée par l'appellation SUSY [9,10,11,12]. Appliquée au départ aux systèmes à haute énergie [8,9] dont l'analyse expérimentale ne paraît pas évidente, le concept de la supersymétrie a rencontré des difficultés critiques pour s'imposer.

Afin de contourner cette contrainte, les physiciens ont pensé à tester cette supersymétrie en mécanique quantique 'SUSYQM' [10,11] où des exemples d'application sont accessibles. En fait, le recours à la mécanique quantique était dans le but de traiter des systèmes de dimension (3D) où le test de la brisure de symétrie est possible. Au cours de ces essais via la SUSYQM, une mise au point de la propriété de l'invariance de forme suggérée par Gendenshtein en 1983 [13] a montré qu'il est possible de trouver des solutions algébriques à certains potentiels qui n'ont pas de solutions analytiques. En effet, cette méthode attribuée à des systèmes quantiques a fait l'objet de beaucoup d'études [13, 21]. Leur particularité de factorisation a permis de construire le formalisme général de cette théorie servant comme outil de base pour traiter d'autres cas plus compliqués [22,23]. Le formalisme a contribué dans l'étude des systèmes

quantiques et qui a conduit les physiciens à établir un nouveau domaine qui est connu maintenant par le nom de la mécanique quantique supersymétrique .

Les idées de la SUSY ont contribué à la naissance de plusieurs nouvelles approches dans différentes branches de la physique; physique atomique, moléculaire, nucléaire, statistique, physique de solide et bien sur la mécanique quantique.

Dès le début des recherches sur la SUSY, il a été clair qu'elle n'était pas seulement un modèle pour tester les méthodes de la théorie des champs, mais aussi un outil intéressant et puissant par ses propres idées. Pour la première fois, les idées de la SUSY ont été appliquées en mécanique quantique non relativiste (SUSYQM) par Nicolai en 1976, et ensuite en 1981 par Edward Witten qui a proposé une classe de grands modèles unifiés au sein du cadre théorique de terrain. Plus précisément, il a considéré des modèles (en Moins de quatre dimensions) dans lesquelles SUSY pourrait être brisée dynamiquement .Cela a conduit à la découverte remarquable de SUSY en quantum Mécanique traitant de systèmes inférieurs ou égaux à trois dimensions. Nicolai et Witten [24] ont montré le lien avec la méthode de factorisation, proposée pour la première fois par Schrödinger pour résoudre algébriquement le problème de l'atome d'hydrogène ; Ces travaux ont été généralisés par la suite par Infeld et Hull qui ont obtenu une large classe de potentiels exactement solubles en considérant six formes différentes de factorisation.(thèses état lié) Un développement considérable a été donné à ces travaux par plusieurs auteurs , et notamment après l'introduction du concept d'invariance de forme en 1983 par Gendenshtein [25]. Ce concept est à l'origine de la découverte d'une large classe de potentiels analytiquement (algébriquement) solubles.

Cette nouvelle approche est devenue très célèbre par sa simplicité à obtenir le spectre des potentiels supersymétriques algébriquement et avec un moindre coût. Elle est maintenant généralisée et appliquée à la résolution de problèmes avec potentiels non hermitiens.

Ce mémoire comporte trois chapitres, est organisé comme suit :

Le première chapitre est consacré à un rappel succinct de l'algèbre et la formulation de la supersymétrie en mécanique quantique en insistant particulièrement sur la méthode de factorisation.

Le sujet principal dans le deuxième chapitre est l'étude de l'invariance de forme avec translation des paramètres qui nous permettent de déterminer le spectre d'énergie et les fonctions d'onde du système quantique.

le troisième chapitre concerne des exemples pour introduit de manière directe la détermination des états liés en utilisant la méthode SUSY et aussi on va étudier l'équation Klien-Gordon, nous allons voir que pour quelque problème physique ont été étudiés par la méthode SUSY QM, nous transformons l'équation de Klien-Gordon en forme de l'équation de Schrödinger afin de résoudre ce problème par la structure de la supersymétrie.

Nous terminons ce travail par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## La Mécanique Quantique de la supersymétrie

### 1-1- Introduction

Nous allons parler du modèle standard et ses limites dans un premier temps, nous allons rappeler les éléments essentiels du modèle standard en montrant qu'ils peuvent être compris comme étant les reliquats à basse énergie d'une théorie plus fondamentale décrivant la physique aux très hautes énergies. On précisera ensuite les limites du modèle standard en insistant sur le problème le plus quantitatif celui de la hiérarchie de masse [26].

Et puis vint la supersymétrie qu'est tout simplement une nouvelle symétrie, l'effet d'une transformation supersymétrique est de transformer un état bosoniques en un état fermioniques et vice-versa, avec  $\Delta s = \pm 1/2$  où  $S$  est le spin. Si nous appelons  $Q$  le générateur de la supersymétrie qui réalise la transformation, alors très schématiquement.

$$Q | \text{boson} \rangle = | \text{fermion} \rangle \quad (1.1)$$

$$Q | \text{fermion} \rangle = | \text{boson} \rangle \quad (1.2)$$

On cherchait à combiner les symétries externes (d'espace-temps, comme les translations) et internes (surtout globales) c'est-à-dire à étendre le groupe de Poincaré par des transformations internes. Il y a eu plusieurs essais dans les années 1960 mais en 1967, Coleman et Mandula montrèrent de façon formelle qu'il est impossible de combiner les deux types de symétries. C'est leur fameux théorème no-go. En fait, il était sous-entendu que c'était impossible en utilisant des générateurs bosoniques (donc de spin entier) habituels. Mais en 1971, Golfand et Likhtman réussirent l'extension du groupe de Poincaré en utilisant des charges fermioniques, donc de spin demi-entier. C'est la supersymétrie. La même année, Neveu, Schwarz puis Ramond proposèrent des modèles supersymétriques à 2 dimensions pour obtenir des cordes supersymétriques qui expliqueraient l'origine des baryons. Quelques années plus tard, en 1973, Volkov et Akulov appliquèrent la supersymétrie aux neutrinos (ils voulaient en faire le fermion de Goldstone) mais il fut montré un peu plus tard que leur théorie, à 4 dimensions, du neutrino ne décrivait pas correctement les interactions de basse énergie observées expérimentalement. La même année, Wess et Zumino

proposèrent la première théorie des champs supersymétrique à 4 dimensions de vrai intérêt du point de vue phénoménologique. Puis, ensemble avec Iliopoulos et Ferrara, ils montrèrent que la supersymétrie permettait de supprimer beaucoup de divergences des théories des champs usuelles. Ceci a rendu la supersymétrie très attractive et pendant un temps donné, elle fut beaucoup utilisée pour tenter d'unifier les bosons et les fermions. Par exemple pour unifier les particules de matière de spin  $1/2$  avec les particules de jauge de spin  $1$ , ou les particules de matière et les champs de Higgs, dans les mêmes super multiplets. Puis en 1976, deux groupes découvrirent que la supersymétrie locale (la transformation de supersymétrie dépend alors des coordonnées dans l'espace-temps) incluait une description de la gravitation. C'est ce que l'on a appelé la supergravité [27].

## **1-2- Le Modèle Standard et le quark top**

Le Modèle Standard est une théorie de jauge locale offrant une description des particules et de leur interaction en termes de champs de matière et de champs de jauge. Il offre ainsi une description cohérente des phénomènes des hautes énergies en termes d'interactions forte, faible et électromagnétique. Développé à partir de découvertes expérimentales et théoriques dès les années 40, il est apparu sous sa forme actuelle dans les années 70. Il a permis des avancées majeures dans la description des phénomènes de haute énergie, et a fait preuve aujourd'hui encore d'un remarquable pouvoir de prédiction. Encore aujourd'hui, le secteur des neutrinos excepté, il n'a toujours pas été mis en défaut dans les mesures du secteur électrofaible. Le quark Top constitue un exemple du pouvoir prédictif du Modèle Standard. Membre de la troisième famille de quarks, sa masse a été prédite avec une remarquable acuité à partir des mesures de précision effectuées à la résonance du Z, bien avant sa découverte par les deux expériences du TeVatron en 1994. La première section de ce chapitre présente le Modèle Standard et ses composantes. La section 2 décrit la production du quark top auprès de collisionneurs hadroniques, TeVatron et LHC. Enfin la section 3 présente la phénoménologie du quark top, avec les processus de fonds de signature voisine. La dernière partie met en perspective la mesure de section efficace du quark top, et évoque notamment l'intérêt de cette mesure dans le cadre de la recherche de nouvelle physique [28].



## 1-2-1- Description du Modèle Standard

Le Modèle Standard décrit la dynamique des interactions électromagnétiques, faibles et fortes ainsi que le comportement des particules élémentaires soumises à ces champs d'interaction. Les forces sont transmises par des particules de spin entier (bosons) alors que les champs de matière sont des particules de spin demi-entier (fermions). A chaque interaction correspond une symétrie de jauge locale et la conservation d'une quantité (ou d'un nombre quantique). Le Modèle Standard est invariant sous l'action du groupe de symétrie  $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . IL possède aussi d'autres symétries internes discrètes (combinaison des symétries de parité, conjugaison de charge, renversement du temps) et continues (rotations et translations d'espace-temps, boosts de Lorentz). Les théories composant le Modèle Standard sont des théories relativistes : elles doivent être, au minimum, invariantes sous le groupe de Lorentz-Poincaré. Après avoir décrit les différentes particules élémentaires du Modèle Standard et leurs nombres quantiques, je présenterai la dynamique des différentes interactions [28].

## 1-2-2- Déficit du modèle standard

Malgré ses succès expérimentaux, le Modèle Standard n'est pas satisfaisant du point de vue théorique, et le mécanisme de brisure de la symétrie électrofaible n'a pas été découvert. Ce sont les motivations principales qui conduisent les théoriciens et les expérimentateurs à rechercher des signes de nouvelle physique, prédits par des modèles alternatifs. Voici les principales difficultés théoriques du Modèle Standard :

- le Modèle Standard n'explique pas la hiérarchie entre les différentes masses des particules ( $m_\nu \leq eV/c^2$  à  $m_{top} \approx 145 GeV/c^2$ ). Les termes de masses apparaissent en tant que paramètres libres dans la théorie ;
- il n'explique pas non plus l'écart entre les constantes de couplage qui, extrapolées à des énergies très élevées ( $\sim 10^{15} GeV$ ) semblent converger (sans toutefois y parvenir) autour d'une même valeur ;
- le Modèle Standard comporte 19 paramètres libres (plus 7 si on inclut les masses et les angles de mélange et de phase de violation de CP dans le domaine des neutrinos) ;
- le nombre de générations et leur arrangement aussi bien dans le domaine des quarks que des leptons ne sont pas compris ;

- la théorie de la Relativité Générale n'est pas compatible avec le Modèle Standard. Bien que négligeable aux échelles d'énergies considérées jusqu'à maintenant, elle entre en conflit avec la mécanique quantique au-delà de l'échelle de Planck ( $\approx 10^{19} \text{ GeV}$ ) ;
- Le mécanisme de la brisure spontanée de la symétrie électrofaible n'est pas expliqué ;
- L'évolution de certaines constantes de couplage, comme la constante de couplage du Higgs  $\lambda_H = \frac{m_H^2}{2v^2}$  semble diverger à haute énergie;
- Les corrections radiatives à la masse du boson de Higgs, quadratiquement divergentes, entraînent un ajustement de sa masse "nue" sur plus de trente ordres de grandeur pour que la masse du boson de Higgs reste proche du TeV. Ce problème de "naturalité" est un des problèmes fondamentaux du Modèle Standard.
- Les problèmes théoriques dont souffre le Modèle Standard ont suscité le développement de nombreuses théories alternatives. Elles essaient de résoudre certains des aspects cités ci-dessus. Parmi elles, nous présentons celles qui ont une incidence sur la production ou les désintégrations des quarks top :
- Les théories de grande unification proposent d'unifier les forces fondamentales à l'aide d'un unique groupe de jauge ( $SU(5)$ ,  $SO(10)$ ) ou de plusieurs groupes ( $SU(3)_c \times SU(2)_L \times SU(2)_R$  pour la symétrie entre fermions gauches et droits). Des nouveaux bosons de jauge neutres ou chargés (notés  $Z'$  ou  $W'^{\pm}$ ) apparaissent dans ces théories et peuvent donner lieu à la mise en évidence de désintégrations  $Z' \rightarrow t\bar{t}$  par exemple ;
- Les théories avec dimensions supplémentaires considèrent un espace à 4 dimensions plus  $n$  autres compacts fiés. Les conditions aux limites de ces nouvelles dimensions imposent des quantifications des niveaux d'énergies des particules du Modèle Standard. Dans notre espace à quatre dimensions, leurs états excités nous apparaissent sous la forme de nouvelles particules plus lourdes, appelées  $Z'$  ou  $W'^{\pm}$ . Comme précédemment, ces bosons peuvent se désintégrer en paires de fermions existantes, et la signature d'une résonance  $t\bar{t}$  constituerait un signe de ces théories ;
- La théorie dite de la "technicolor" introduit une nouvelle interaction, inspirée de la QCD, pour remplacer la brisure spontanée de la symétrie électrofaible par une brisure dynamique [29]. Le champ scalaire fondamental est remplacé par un champ composite formé de deux fermions réunis par cette nouvelle interaction de jauge. De nouvelles résonances peuvent être formées, comme par exemple des "technisions" est formés d'un quark top et d'un quark léger ;
- Les théories supersymétriques ou les modèles à deux doublés de Higgs utilisent le fait que le nombre de doublets de Higgs n'est pas contraint par l'expérience. Dans ces modèles, le mécanisme de brisure de la

symétrie électrofaible est expliqué de manière naturelle par l'évolution des couplages dans le superpotentiel de Higgs. A basse énergie, ces modèles sont caractérisés par cinq champs de Higgs : trois bosons scalaires neutres (notés  $A^0$ ,  $H^0$  et  $h^0$ ) et deux chargés ( $H^\pm$ ). Les bosons de Higgs se couplant préférentiellement aux fermions les plus lourds, la phénoménologie du quark top sera un laboratoire privilégié de recherche de ces nouveaux bosons, notamment dans le cas des bosons de Higgs chargés ;

- Certaines théories ajoutent au Modèle Standard une quatrième famille de particules. Les valeurs de la matrice  $V_{CKM}$  seraient modifiées, et en particulier le terme serait plus faible ;
- D'autres modèles exotiques introduisent des modifications des couplages entre les particules du Modèle Standard. Les courants neutres avec changement de saveurs sont très rares dans le Modèle Standard puisqu'ils n'apparaissent qu'à travers des boucles électrofaibles. Dans ces modèles, de tels courants ne seraient pas interdits à l'ordre dominant et coupleraient, par exemple, les quarks top et c à un  $Z/\gamma^*$  ou à un gluon

Tous ces modèles ont des implications sur la production et la désintégration du top. Par conséquent, la mesure des observables dans le secteur du quark top permet de sonder les principales théories au-delà du Modèle Standard.

### 1-3- Pourquoi la supersymétrie?

L'importance croissante des symétries internes en physique des particules dans les années 1960 ont conduit naturellement les physiciens à se poser la question de combiner de façon non triviale le groupe de symétrie d'espace-temps de Poincaré et les groupes de symétrie interne de la matrice de diffusion en théorie quantique des champs. Les efforts déployés trouvèrent leur épilogue dans un théorème no-go démontré par Coleman et Mandula , le résumé de l'article original [ 30].

Nous prouvons un nouveau théorème sur l'impossibilité de combiner espace-temps et symétries internes d'une manière triviale. Le théorème est une amélioration par rapport aux groupes de paramètres infinis, plutôt qu'au seuls groupes de Lie cette amélioration est obtenue en utilisant des informations sur le S matrice; les investigations précédentes utilisaient uniquement des informations sur le spectre des particules simples. Nous définissons un groupe de symétrie de la matrice S comme un groupe

d'opérateurs unitaires qui transforment les états à plusieurs particules comme s'il étaient des produits tensoriels et commutent avec la matrice  $S$ .

Soit  $G$  un groupe de symétrie connecté du  $S$  matrice, et admettons les cinq conditions suivantes :

1.  $G$  contient un sous-groupe localement isomorphe au groupe de Poincaré.
2. Pour tout  $M > 0$ , il n'y a qu'un nombre fini d'états à une particule avec une masse inférieure à  $M$ .
3. Les amplitudes de dilution élastique sont des fonctions analytiques de  $s$  et  $t$  [les variables de Mandelstam], dans un voisinage de la région physique.
4. La matrice  $S$  n'est pas triviale en ce sens que deux états momentum à une particule se dispersent (en quelque chose), sauf peut-être à des valeurs isolées de  $s$ .
5. les générateurs de  $G$  écrits comme des opérateurs intégraux dans l'espace de moment, ont des distributions pour leurs noyaux. Ensuite, nous montrons que  $G$  est nécessairement localement isomorphe au produit direct d'un groupe de Poincaré.

Le théorème de Coleman–Mandula montre donc que l'algèbre de Lie des symétries de la matrice de diffusion  $S$  en théorie quantique des champs contient uniquement l'algèbre de Poincaré (générateurs de Lorentz  $M_{\mu\nu}$  et générateurs des translations  $p_{\mu\nu}$ ) et un ensemble fini de générateurs  $T_A$  invariants de Lorentz d'une algèbre de Lie  $A$  [30]

En effet, la supersymétrie apporte quelque chose de très important dans les théories des champs. Dans les corrections radiatives à la masse du Higgs. Quand nous calculons la contribution d'une boucle fermioniques comme celle de la figure (1.1 a), nous obtenons :

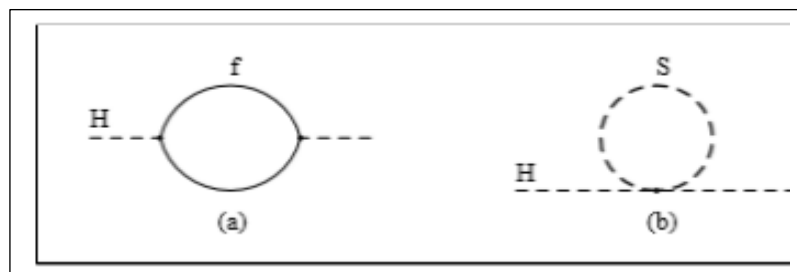


FIG. 1.1 – Corrections quantiques à une boucle à la masse-carrée du Higgs. (a) boucle de fermion, (b) boucle de boson scalaire.

$$\Delta m_H^2 = - \frac{y_f}{16\pi^2} \left[ 2\Lambda^2 + 6m_f^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{m_f}\right) + \dots \right] \quad (1.3)$$

où  $\Lambda$  est un cut-of ultraviolet utilisé pour restreindre les impulsions dans la boucle et qui est de l'ordre de l'échelle de la nouvelle physique au-delà du MS. Nous voyons que la masse du Higgs diverge et que si nous supposons le MS valable jusqu'à l'échelle de Planck,  $M_p \approx 10^{19}$  GeV, alors  $\Lambda = M_p$  et cette correction est  $10^{30}$  fois plus forte que la valeur raisonnable de la masse du Higgs au carré,  $(10^2 \text{ GeV})^2$ !

Cette constatation est la même si nous considérons plutôt une boucle d'un champ scalaire  $S$ .

$$\Delta m_H^2 = - \frac{\lambda_s}{16\pi^2} \left[ \Lambda^2 - 2m_s^2 \ln\left(\frac{\Lambda}{m_s}\right) + \dots \right] \quad (1.4)$$

Où  $\lambda_s$  est son couplage avec le boson de Higgs. Que nous apporte la supersymétrie dans ce cas ? .

Si nous regardons de plus près les 2 équations précédentes, les deux contributions divergentes (leur terme  $\propto \Lambda^2$ ) s'annulent si pour chaque fermion de notre théorie entrant dans la boucle nous avons aussi 2 scalaires avec  $\lambda_s = y_f$ . Nous verrons juste après que c'est exactement ce que la supersymétrie se propose d'apporter! Et de plus, à tous les ordres (c'est-à-dire quand nous considérons des corrections à plusieurs boucles) ceci est réalisé. Il nous reste alors une divergence logarithmique mais qui n'induit pas de problèmes d'ajustements fins. A ce jour, la supersymétrie fournit la résolution du problème de la hiérarchie la plus naturelle et la plus efficace.

- Les deux premiers arguments ne concernent que le Higgs.

Considérons maintenant les constantes de couplages qui caractérisent chaque force fondamentale. Si nous faisons évoluer les 3 couplages du Modèle Standard en fonction de l'énergie, nous observons qu'ils tendent tous à se croiser à la même échelle. En...n presque, c'est quand nous ajoutons la supersymétrie dans les calculs d'évolution que les couplages se croisent quasi exactement au même point (autour de  $2 \times 10^{16}$  GeV). Personne n'est obligé de croire en une "Grande Unification" qui repose sur cette uni...cation des couplages, mais il est très étonnant d'observer que la supersymétrie réalise l'unification aussi précisément.

- Il y a aussi un argument de ce type en faveur de l'existence de la supersymétrie dans la nature.

Les théories de cordes, qui fournissent à l'heure actuelle une des seules solutions au problème de la gravitation quantique (avec la gravité quantique à boucles), ne peuvent se passer de la supersymétrie sans

souffrir d'inconsistances physiques et mathématiques. Là aussi la supersymétrie semble un ingrédient essentiel pour construire des théories cohérentes à haute énergie.

- Enfin, la supersymétrie peut aussi jouer un rôle dans l'explication de la matière noire. C'est une des seules théories qui possèdent dans son spectre de particules des candidats sérieux. Ils ont pour nom, Neutra lino ou gravitino, et la supersymétrie prédit, dans un cadre plausible, leur stabilité. Ainsi, une fois créés, ils ne se désintègrent pas et ne peuvent pas être observés directement. Leur nombre peut donc contribuer à la masse manquante sous la forme de matière noire.

Cette discussion démontre que la supersymétrie est une symétrie très séduisante théoriquement, mais surtout très utile. Nous n'avons encore aucune preuve de son existence mais au vu de ce qu'elle apporte en physique des particules, il est difficile d'y rester insensible. Nous n'avons donné que des arguments qualitatifs dans cette partie, nous allons maintenant entrer beaucoup plus en détail.[30]

## 1-4- L'algèbre de SUSY:

Pour une description réaliste des interactions des particules élémentaires, la matrice S doit posséder plusieurs symétries :

Invariance de Poincaré sous les translations et les rotations de Lorentz; les générateurs de ces transformations notés respectivement  $P_{\mu}$  et  $M_{\mu\nu}$  vérifient l'algèbre:

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \tag{1.5}$$

$$[P_{\mu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho} P_{\sigma} - \eta_{\mu\sigma} P_{\rho}) \tag{1.6}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho}) \tag{1.7}$$

$\mu$  et  $\nu$  : des indices de Lorentz (ou indices vectoriels).

$\eta_{\mu\sigma}$  correspond au tenseur métrique plat de signature  $(-, +, +, +)$ .

Invariance sous des symétries internes en relation avec un nombre quantique conservé comme la charge électrique ou l'isospin.

Les générateurs  $T^a$  de ces symétries internes sont des scalaires de Lorentz et forment un groupe de Lie avec des constantes de structure  $C^{abc}$ .

$$[T^a, P_\mu] = 0 \quad (1.8)$$

$$[T^a, M_{\mu\nu}] = 0 \quad (1.9)$$

$$[T^a, T^b] = \iota C^{abc} T^c \quad (1.10)$$

A la fin des années 1960, Coleman et Mandula [30] démontrèrent que les symétries précédentes sont les seules symétries continues que peut admettre la matrice S.

Cela est vrai si l'on suppose une algèbre contenant uniquement des commutateurs.

Néanmoins, en 1975, Haag, Lopuszanski et Sohnius [31] montrèrent qu'il n'était pas indispensable de n'avoir que des commutateurs dans l'algèbre : une algèbre de Lie graduée, contenant des commutateurs et des anti commutateurs, est tout à fait acceptable. De plus, ils établirent que l'algèbre de supersymétrie est la seule algèbre de Lie graduée compatible avec les symétries de la matrice S.

L'algèbre supersymétrique la plus générale doit contenir le générateur des translations  $P_\mu$ , celui des rotations  $M_{\mu\nu}$ , et un certain nombre  $N$  de générateurs de symétries internes  $Q$ . Même si  $N$  peut valoir 1, 2, 4 ou 8, dans cette analyse on se restreindra désormais au cas  $N = 1$  car c'est l'unique cas dans lequel la théorie dispose de fermions chiraux. Ces générateurs sont des spineur de Weyl à deux composantes  $Q_\alpha$  et  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ , avec  $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$ .

L'algèbre de ces générateurs est : [32]

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu \quad (1.11)$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \quad (1.12)$$

$$[Q_\alpha, Q_\beta] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_\mu] \quad (1.13)$$

$$[Q_\alpha, M_{\mu\nu}] = 1 \quad (1.14)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^\beta Q_\beta \quad (1.15)$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, M_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}\bar{Q}_{\dot{\beta}}(\sigma_{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \quad (1.16)$$

D'après la première équation, on constate que les générateurs  $Q$  et  $\bar{Q}$  ont une dimension de masse 1/2.

Les  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu)$  de l'équation sont les générateurs du groupe  $SL(2, C)$ . les opérateurs  $Q_\alpha$  et  $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$  appartiennent respectivement aux représentations  $(1/2,0)$  et  $(0,1/2)$  du groupe de Lorentz :

- $Q_\alpha$  se transforme comme un spineur de Weyl gauche.
- $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$  comme un spineur droit.
- $\alpha$  et  $\beta$  : étant des indices spinoriels.

## 1-5- Formulation hamiltonienne de la MQSUSY

### 1-5-1- Commutation et anticommutation

Le commutateur de deux opérateurs A et B se calcule de la manière suivante [33]

$$[A, B] = AB - BA \quad (1.17)$$

On définit également leur anti commutateur

$$\{A, B\} = AB + BA \quad (1.18)$$

Sur ce principe et on se basant sur ce qui a été décrit précédemment, on peut également définir des opérateurs fermioniques de création et d'annihilation (que nous noterons respectivement  $f^+$  et  $f$ ). Ceux-ci satisfont les relations d'anticommutation.

$$\{f^+, f\} = 1, \{f^+, f^+\} = \{f, f\} = 0 \quad (1.19)$$

De la même manière que les opérateurs bosoniques  $b$  et  $b^+$  satisfont les relations de commutation.

$$\{b^+, b\} = 1, \{b^+, b^+\} = \{b, b\} = 0 \quad (1.20)$$

## 1-6- Equation de Schrödinger stationnaire

L'équation de Schrödinger pour l'évolution dans le temps de la fonction d'onde  $\psi(\vec{r}, t)$  d'une particule repérée par son vecteur position  $\vec{r}$  s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = H\psi(\vec{r}, t) \quad (1.21)$$



Où  $H$  est l'opérateur hamiltonien de la particule et  $\hbar$  la constante de Planck. Si la particule est en interaction avec un potentiel scalaire stationnaire et en l'absence de champ magnétique,  $H$  ne dépendra pas explicitement du temps et prendra la forme simple suivante :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \quad (1.22)$$

Où  $m$  est la masse de la particule, supposée constante,  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien et  $V(\vec{r})$  étant l'opérateur d'énergie potentielle associée au potentiel d'interaction. Les états physiques sont celles qui correspondent à des solutions pour lesquelles

$V(\vec{r})$  est normalisable sur tout l'espace de définition de  $(\vec{r})$ . Autrement dit  $V(\vec{r})$  appartient à l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable :

$$\int d\vec{r} |V(\vec{r})|^2 < \infty \quad (1.23)$$

Car  $|V(\vec{r})|^2$  représente la densité de probabilité de présence. Pour résoudre une équation du type dans le cas stationnaire, on utilise souvent la technique de séparation des variables d'espace et du temps. Ceci consiste à chercher les solutions sous la forme d'un produit d'une fonction de l'espace et d'une fonction du temps :

$$\psi(\vec{r}, t) = U(t) \varphi(\vec{r}) \quad (1.24)$$

En substituant dans, on obtient après séparation

$$\frac{i\hbar}{u(t)} \frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{\varphi(\vec{r})} H\varphi(\vec{r}) \quad (1.25)$$

Il s'agit d'une égalité entre deux expressions, dont l'une ne dépend que de l'espace et l'autre ne dépend que du temps, qui n'est satisfaite que si chaque membre est égal à la même constante. Ainsi, si on dénote cette constante par  $E$ ,  $u(t)$  et  $\varphi(\vec{r})$  seront donnés par :

$$\frac{du(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} E u(t) \quad (1.26)$$

dont la solution est simplement donnée par

$$u(t) = u(0) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E u(t)\right) \quad (1.27)$$

et

$$H\varphi(\vec{r}) = E\varphi(\vec{r}) \quad (1.28)$$

L'équation que doit satisfaire la fonction est une équation aux valeurs propres de l'opérateur  $\varphi(\vec{r})$  agissant dans l'espace de Hilbert. Par conséquent les valeurs propres  $E$  de l'Hamiltonien coïncident avec les énergies possibles que peut prendre la particule soumise aux interactions extérieures. Cette équation est appelée "équation de Schrödinger stationnaire".

Selon la forme de l'interaction, les solutions physiques peuvent être de deux natures différentes. Les solutions étendues dans l'espace, c'est-à-dire qui ne s'annulent qu'à l'infini, représentent les états de diffusion et sont associées à des énergies appartenant au spectre continu de la particule. Par contre, les solutions localisées dans l'espace, c'est-à-dire qui s'annulent à l'extérieur d'un domaine fermé et borné, représentent les états liés [34,35] et correspondent à des énergies discrètes appartenant au spectre quantifié. Un système physique peut avoir uniquement des états de diffusion ou uniquement des états liés comme il peut avoir les deux à la fois. Pour un hamiltonien du type (1.22), on peut avoir une idée sur la nature du spectre directement à partir de la forme du potentiel si ce dernier est à une dimension de l'espace  $V(\vec{r}) \equiv V(x)$ , ou central,  $V(\vec{r}) \equiv V(x)$ . Dans ces cas particuliers, comme en mécanique classique [36], l'existence d'un minimum pour le potentiel est une signature de l'existence d'états localisés et par conséquent d'un spectre d'énergies quantifiées dont le nombre dépend de la profondeur du minimum. Par ailleurs, on montre que dans ces cas le spectre n'est pas dégénéré [35], de sorte qu'à chaque niveau d'énergie quantifiée correspond une seule fonction propre caractérisée par le nombre de zéro qu'elle possède sur l'intervalle de définition du potentiel [37]; la plus basse énergie lui correspond une fonction d'onde qui n'a aucun zéro et est appelée niveau fondamental, celle du premier niveau excité possède un seul zéro, et ainsi de suite, c'est à dire de façon générale la fonction d'onde du nième niveau excité possède exactement  $n$  zéro. Toutes les solutions ne satisfaisant pas ces conditions ne peuvent pas représenter des états physiques.

## 1-7- La SUSY pour l'étude de potentiels à une dimension :

Cette section peut être considérée comme une première étape importante pour la

Découverte de nouveaux potentiels analytiquement solubles. Nous y verrons comment, à partir d'un potentiel donné, générer ses superpartenaires. Il est connu maintenant que l'Hamiltonien

Supersymétrique HS d'un système de combinaison de bosons et fermions est écrit comme la somme de l'hamiltonien bosoniques  $HB$  et fermioniques  $HF$  [38] .

$$HS = HB + HF \quad (1.29)$$

En substituant les superpartenaires hamiltoniens  $H_+$  et  $H_-$  [39].

$$H_S = \begin{pmatrix} H_- & 0 \\ 0 & H_+ \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

Pour l'Hamiltonien à une dimension  $H_I$  , il est redéfini comme  $H_+$  dans l'eq (1.30) Un des ingrédients principaux pour la résolution exacte des problèmes d'un potentiel dimensionnel est le raccordement entre les fonctions d'onde et le potentiel.

Ce n'est pas toujours évident de connaître exactement le potentiel (jusqu' à une constante) juste en connaissant la fonction d'onde de l'état fondamental (ou toute autre fonction d'onde d'un autre état). Le nom donné à ces opérateurs n'est pas dépourvu de sens car celui de création augmente les valeurs propres, et d'annihilation les diminue.

Soit l'Hamiltonien d'une particule :

$$H_1 = -\frac{\hbar^2 d^2}{2mdx^2} + V_1(x) \quad (1.31)$$

On va voir ici qu'il est possible de déterminer le potentiel  $V_1(x)$  si l'on connaît l'état fondamental [22]. Si  $\psi_0(x)$  (l'état fondamental) tend vers zéro pour  $x \rightarrow \pm\infty$  et ne possède aucun nœud, et si on choisit l'énergie de l'état fondamental de l'Hamiltonien  $H_1$  comme étant zéro ( $E_0^{(1)} = 0$ ). Alors on a l'équation de Schrödinger de la fonction d'onde de l'état fondamental  $\psi_0(x)$  :

$$H_1\psi_0(x) = -(\hbar^2 d^2\psi_0)/2mdx^2 + V_1(x)\psi_0(x) = 0 \quad (1.32)$$

A partir de cette équation, on trouve facilement une expression de  $V_1$

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} \quad (1.33)$$

Une fois que nous réalisons ceci, il est maintenant très simple de factoriser l'hamiltonien en utilisant :

$$H_1 = A^\dagger A \quad (1.34)$$

Où

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (1.35)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation  $A^\dagger$  et  $A$  sont une généralisation des opérateurs  $b^\dagger$  et  $b$  que nous avons cité précédemment.

Ceci nous permet d'identifier.

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \dot{W}(x) \quad (1.36)$$

Cette équation est l'équation bien connue de Riccati. Où  $W(x)$  est généralement connu sous le nom de "superpotentiel" en littérature de la MQ SUSY. La solution pour  $W(x)$  en termes de fonction d'onde d'état fondamental est :

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0^{(1)'}(x)}{\psi_0^{(1)}(x)} \quad (1.37)$$

Cette solution est obtenue à condition que  $A\Psi_0 = 0$  est satisfaite, nous avons automatiquement une solution

$$H_1\Psi_0 = A^\dagger A\Psi_0 = 0. \quad (1.38)$$

La prochaine étape en construisant la théorie SUSY liée à l'hamiltonien original  $H_1$  est de définir l'opérateur  $H_2 = AA^\dagger$  obtenu en renversant l'ordre de  $A$  et de  $A^\dagger$ . Une peu de simplification prouve que l'opérateur  $H_2$  est en fait la correspondance hamiltonienne à un nouveau potentiel  $V_2(x)$

$$H_2 = -\frac{\hbar^2 d^2}{2m dx^2} + V_2(x) \quad (1.39)$$

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \dot{W}(x) \quad (1.40)$$

Les potentiels  $V_1(x)$  et  $V_2(x)$  sont connus en tant que les potentiels partenaires supersymétriques ou encore les potentiels "SUSY-partenaires". Notez que les valeurs propres d'énergie de  $H_1$  et de  $H_2$  sont semi-définies positifs ( $E^{(1,2)} \geq 0$ ). Pour  $n > 0$ , l'équation de Schrödinger pour  $H_1$

$$H_1\psi_n^{(1)} = A^\dagger A\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)} \quad (1.41)$$

Implique

$$H_2(A\psi_n^{(1)}) = AA^+A\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}(A\psi_n^{(1)}) \quad (1.42)$$

De la même façon, l'équation de Schrödinger pour  $H_2$

$$H_2\psi_n^{(2)} = A^+A\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}\psi_n^{(2)} \quad (1.43)$$

Implique

$$H_1(A^+\psi_n^{(2)}) = A^+AA^+\psi_n^{(2)} = E_n^{(1)}(A^+\psi_n^{(2)}) \quad (1.44)$$

D'après les éqs (1.37) et (1.44) et du fait que  $E_0^{(1)} = 0$ , il est clair que les valeurs propres et les fonctions propres des deux hamiltoniens  $H_1$  et  $H_2$  sont reliées par

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \quad (1.45)$$

$$E_0^{(1)} = 0 \quad (1.46)$$

$$\psi_n^{(2)} = \frac{A\psi_{n+1}^{(1)}}{\sqrt{E_{n+1}}} \quad (1.47)$$

$$\psi_{n+1}^{(1)} = \frac{A^+\psi_n^{(2)}}{\sqrt{E_n^{(2)}}} \quad (1.48)$$

( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) Notez que si  $\psi_{n+1}^{(1)}$  ( $\psi_n^{(2)}$ ) de  $H_1$  ( $H_2$ ) est normalisé alors la fonction d'onde  $\psi_n^{(2)}$  ( $\psi_{n+1}^{(1)}$ ) dans les éqs. (1.47) et (1.48) est également normalisé. De plus, ces relations nous montrent que si l'on connaît toutes les fonctions propres de  $H_1$ , on peut déterminer les fonctions propres de  $H_2$  en appliquant l'opérateur  $A$ , et si l'on connaît toutes les fonctions propres de  $H_2$ , on peut déterminer les fonctions propres de  $H_1$  (mis à part l'état fondamental, qui n'a pas de SUSY-partenaire) en appliquant l'opérateur  $A^\dagger$ . L'opérateur  $A$  ( $A^\dagger$ ) convertit non seulement une fonction propre de  $H_1$  ( $H_2$ ) à une fonction propre de  $H_2$  ( $H_1$ ) avec la même énergie, mais elle détruit également (crée) un nœud supplémentaire dans la fonction propre. Puisque la fonction d'onde de l'état fondamental de  $H_1$  est annihilée par l'opérateur  $A$  cet état n'a aucun partenaire de SUSY. Ainsi l'image que nous obtenons est que en sachant toutes les fonctions propres de  $H_1$  nous pouvons déterminer les fonctions propres de  $H_2$  en utilisant l'opérateur  $A$  et vice versa

en utilisant  $A^\dagger$  nous pouvons reconstruire toutes les fonctions propres de  $H_1$  de ceux de  $H_2$  excepté l'état fondamental. Ceci est illustré dans la figure (1-2) [28]:

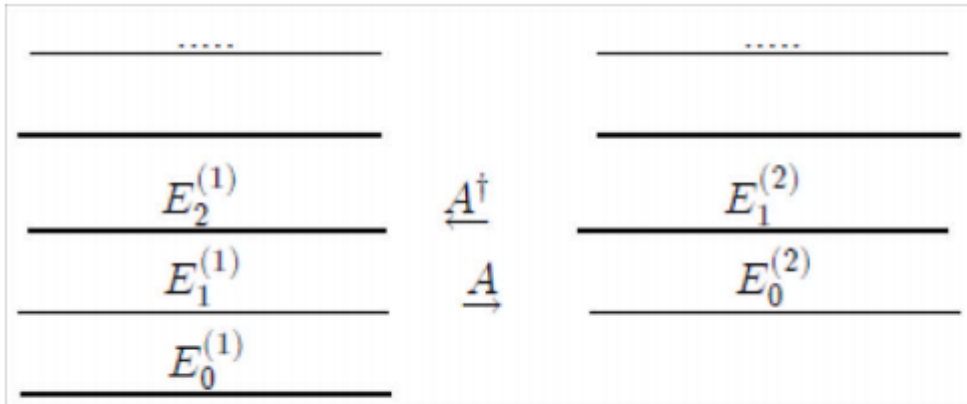


Figure (1-2) : Action des opérateurs  $A$  et  $A^\dagger$

La raison fondamentale de la dégénérescence des spectres de  $H_1$  et de  $H_2$  peut être comprise très facilement des propriétés de l'algèbre de SUSY. On peut maintenant écrire et considérer une matrice hamiltonienne SUSY de la forme

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

Cette matrice hamiltonienne fait partie d'une algèbre fermée qui contient les opérateurs bosoniques et fermioniques avec des relations de commutation et d'anticommutation (voir l'algèbre précédemment). Nous considérons les opérateurs supercharges  $Q$  et  $Q^\dagger$  (déjà rencontrés lors de l'étude de l'algèbre SUSY) sous la forme  $Q = Af^\dagger$  et  $Q^\dagger = A^\dagger f$  dans un cadre général, ce qui est équivalent à :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

$$Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

De par la généralisation des opérateurs de création et d'annihilation. Dans ce contexte, l'effet de  $Q$  et de  $Q^\dagger$  est de relier les fonctions d'onde de  $H_1$  et  $H_2$ : Les relations suivantes de commutation et d'anticommutation décrivent la superalgèbre fermée  $sl(1/1)$  :

$$[H, Q] = [H, Q^\dagger] = 0, \{Q, Q^\dagger\} = H, \{Q, Q\} = \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \quad (1.52)$$

Le fait que les supercharges  $Q$  et  $Q^\dagger$  commutent avec  $H$  c'est le responsable de la dégénérescence. Les opérateurs  $Q$  et  $Q^\dagger$  peuvent être interprétés comme opérateurs qui changent des degrés de liberté bosoniques au fermioniques et vice versa. Ceci est élaboré au plus loin dans les exemples de l'oscillateur harmonique de SUSY [41,42].

## 1-8- Factorisation et Hiérarchies d'Hamiltoniens

Dans ce qui précède nous avons trouvé qu'une fois qu'on connaît la fonction d'onde de l'état fondamental qui correspond à  $H_1$ , on peut trouver le superpotentiel de l'éq (1.37) . On sait aussi que la fonction d'onde de l'état fondamental du partenaire hamiltonien  $H_2$  est déterminée par le premier état excité  $H_3$  en appliquant l'opérateur  $A_1$ , donc on vient de voir qu'on peut déterminer  $H_2$  si l'on connaît  $H_1$ . On peut dès lors aussi refactoriser  $H_2$  pour déterminer son partenaire  $H_3$ , puis refactoriser  $H_3$  pour déterminer son partenaire  $H_4$ , et ainsi de suite. Chaque nouvel Hamiltonien a un état lié de moins que le précédent.

Pour simplifier on prend  $\hbar = 2m = 1$

$$H_1 = A_1^\dagger A_1 + E_{(0)}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (1.53)$$

Où

$$A_1 = \frac{d}{dx} + W_1(x), \quad A_1^\dagger = -\frac{d}{dx} + W_1(x), \quad W_1 = -\frac{d \ln(\psi_0^{(1)})}{dx} \quad (1.54)$$

Le partenaire SUSY Hamiltonien est donné alors

$$H_2 = A_1^\dagger A_1 + E_{(0)}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (1.55)$$

Où

$$V_2(x) = W_1^2 + w_1' + E_{(0)}^{(1)} = V_1(x) + 2w_1' = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(1)} \quad (1.56)$$

On doit introduire la notion  $E_n^{(m)}$ , n est le niveau d'énergie et (m) refert le m'ème hamiltonien  $H_m$ . Les valeurs propres et les fonctions propres des deux hamiltoniens

$H_1$  et  $H_2$

$$E_{(n+1)}^{(1)} = E_{(n)}^{(2)}, \psi_n^{(2)} = (E_{(n+1)}^{(1)} - E_{(0)}^{(1)})^{-1/2} A_1 \psi_{n+1}^{(1)} \quad (1.57)$$

Maintenant commençant par  $H_1$  dont l'énergie fondamentale est  $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$

On peut simuler généralement le troisième hamiltonien  $H_3$  comme le partenaire SUSY de  $H_2$ , d'après ceci nous pouvons écrire  $H_2$  sous la forme

$$H_2 = A_1 A_1^\dagger + E_{(0)}^{(1)} = A_2^\dagger A_2 + E_1^{(1)} \quad (1.58)$$

Où

$$A_2 = \frac{d}{dx} + W_2(x), \quad A_2^\dagger = \frac{d}{dx} + W_2(x), \quad W_2(x) = -\frac{d \ln(\psi_0^{(2)})}{dx}$$

$$H_3 = A_2 A_2^\dagger + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x) \quad (1.59)$$

$$V_1(x) = W_2^2 + w_2' + E_1^{(1)} = V_2(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi_0^{(2)} = V_1(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^1, \psi_0^2) \quad (1.60)$$

En outre

$$E_n^3 = E_{n+1}^2 = E_{n+2}^1 \quad (1.61)$$

$$\psi_n^3 = (E_{n+1}^1 - E_0^2)^{-1/2} A_2 \psi_{n+1}^2 \quad (1.62)$$



$$= (E_{n+1}^{(1)} - E_1^{(1)})^{-1/2} (E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1/2} A_2 A_1 \psi_{n+2}^1$$

De cette manière, c'est clair que si l'Hamiltonien d'origine  $H_1$  a un nombre  $p$  d'états liés, aux valeurs propres  $E_n^{(1)}$  et aux fonctions propres  $\psi_n^{(1)}$  avec  $0 \leq n \leq (p-1)$  alors on peut toujours générer une hiérarchie de  $(p-1)$  Hamiltoniens  $H_1, H_2 \dots H_p$

Tel que  $H_m$  (où  $m = 2, 3, \dots, p$ ) a le même spectre de valeurs propres que  $H_1$  [22], à part que  $H_m$  n'a pas les  $(m-1)$  premières valeurs propres de  $H_1$  pour  $m = 2, 3, 4, \dots, p$ .

$H_m$  est alors donné par la relation suivante :

$$H_m = A_m^+ A_m + E_{m-1}^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_m(x) \quad (1.63)$$

Où

$$A_m = \frac{d}{dx} + W_m(x), \quad W_m(x) = -\frac{d \ln(\psi_0^{(m)})}{dx} \quad (1.64)$$

on a aussi les relations

$$E_n^{(m)} = E_{n+1}^{(m-1)} = \dots = E_{n+m-1}^{(1)} \quad (1.65)$$

$$\psi_n^m = [(E_{n+m-1}^{(1)} - E_{m-1}^{(2)})^{-1/2} \dots (E_{n+m-1}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1/2}] A_{m-1} \dots A_1 \psi_{n+m-1}^{(1)} \quad (1.66)$$

$$V_m(x) = V_1(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln(\psi_0^{(1)} \dots \dots \psi_0^{(m-1)}) \quad (1.67)$$

Dans ce chemin, connaître tout les valeurs propres et fonctions propres de  $H_1$  on sera directement tout les valeurs propres d'énergie et fonctions propres de la hiérarchie de  $p-1$  Hamiltonien.

# 1-9- Brisure de la Supersymétrie

## 1-9-1- La brisure de la supersymétrie et les masses des partenaires supersymétriques [45]

Le système simple de l'oscillateur harmonique nous a montré qu'une théorie supersymétrique impose aux partenaires d'un super multiplet d'avoir des masses identiques. Cependant, les partenaires supersymétriques du modèle standard n'ont pas été observés et la supersymétrie n'est donc pas une symétrie exacte aux échelles d'énergie auxquelles nous faisons nos expériences. La supersymétrie doit donc être brisée quitte à être rétablie aux très hautes énergies tout comme la symétrie  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  est rétablie à des échelles d'énergie très supérieures à  $\nu$  car on peut alors prendre  $\nu = 0$ . Dans toute extension supersymétrique du modèle standard, il faut donc inclure la brisure de cette symétrie et chaque mode de brisure constitue un modèle spécifique prédisant un certain spectre de masse. Le contenu minimal en champs de la partie purement supersymétrique ainsi que les couplages sont par contre spécifiés indépendamment du modèle. L'observation des partenaires supersymétriques dira si la supersymétrie est réalisée mais c'est la détermination précise de leur spectre qui discriminera entre les modèles.

Si les masses des partenaires supersymétriques sont relativement libres, elles ne peuvent cependant pas être trop grandes au risque de réintroduire le problème de la hiérarchie. En effet, la supersymétrie résout le problème de la hiérarchie car dans les boucles des graphes de la figure 1.2, pour chaque degré de liberté  $d_{ms}$  du modèle standard il y a un degré de liberté partenaire supersymétrique  $d_{susy}$  qui contribue avec un signe opposé. La contribution de  $d_{susy}$  ne compense exactement celle de  $d_{ms}$  que si les masses des partenaires sont égales. Si les masses des deux partenaires  $M_{susy}$  et  $M_{ms}$  ne sont pas égales, il y a une contribution à l'évolution de  $m_h^2$  avec l'échelle d'énergie qui est proportionnelle à  $(M_{susy}^2 - M_{ms}^2)$  comme l'indique un simple argument dimensionnel avec un coefficient de proportionnalité de l'ordre de la constante de couplage  $\alpha$  entre les deux champs et le boson de Higgs (à un facteur  $\frac{1}{\pi}$  près). L'évolution de la masse du boson de Higgs (ou plutôt des bosons de Higgs) est alors de la forme :

$$m_h^2(\Lambda) = m_h^2(\Lambda_2) + \frac{\alpha}{\pi}(M_{susy}^2 - M_{ms}^2) \quad (1.68)$$

où les termes d'évolution logarithmiques n'ont pas été écrits.

pour que le problème de la hiérarchie ne se pose pas c'est-à-dire que  $m_H$  soit naturellement de l'ordre de 1 TeV, il faut que les deux termes de droite soient du même ordre de grandeur et donc de l'ordre de grandeur du membre de gauche soit  $(1\text{TeV})^2$  on donc :

$$|M_{susy}^2 - M_{ms}^2| < (1\text{TeV})^2$$

Cette prédiction très forte est aussi à l'origine du succès de la supersymétrie. En effet, la supersymétrie ne prédit pas précisément le spectre de masse mais si l'on est capable de rechercher les particules supersymétriques jusqu'à des masses de l'ordre de 1 TeV, on pourra affirmer si c'est bien la supersymétrie qui résout le problème de la hiérarchie

## 1-9-2- Les modes de brisure de la supersymétrie

Il existe deux modes de brisure de la supersymétrie :

### 1- Brisure explicite

Ce mode de brisure consiste en fait à ne pas faire d'hypothèse précise sur le mode de brisure et à introduire à la main dans le lagrangien des termes qui ne sont pas supersymétriques. Cependant, ces termes ne doivent pas faire réapparaître le problème de la hiérarchie et ne doivent donc pas conduire à des divergences quadratiques, on dit alors que ces termes brisent la supersymétrie de façon douce. Bien que peu satisfaisant formellement, ce mode de brisure permet de construire des modèles phénoménologiquement viables. Les termes de brisure douce ont été recensés [43] et comprennent des termes de masse pour les scalaires, des termes de masse pour les fermions des multiplets vectoriels (c'est-à-dire les jauginos) mais pas pour les fermions chiraux, des couplages trilineaires proportionnels aux termes de Yukawa du superpotentiel ainsi que des couplages binaires (mais pas quartiques) entre scalaires. Le lagrangien de brisure peut alors s'écrire:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{brisure de susy}} = & \sum_{ij} m_{ij}^2 \phi_i^* \phi_j + \sum_{\alpha=1,2,3} M_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \\ & + \sum (A_u h_u \bar{Q}_L \bar{u}_R H_2 + A_d h_d \bar{Q}_L \bar{d}_R + A_e h_e \bar{L}_L \bar{e}_R) \end{aligned} \quad (1.69)$$

C'est dans cette partie du lagrangien que le nombre de nouveaux paramètres est le plus important (de l'ordre de la centaine). La phénoménologie de la supersymétrie est alors inextricable si l'on ne fait, pas quelques hypothèses simplificatrices. Nous verrons plus bas que ces hypothèses sont en fait des hypothèses d'unification à haute énergie.

## **2- Brisure spontanée**

Ce mode de brisure consiste à copier le mode de brisure de  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  dans le modèle standard en brisant la supersymétrie spontanément. Nous avons vu que le vide de la supersymétrie est d'énergie nulle et pour briser spontanément la supersymétrie il suffit donc que l'énergie du vide soit non nulle. Tout comme pour la brisure de  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , il faut alors s'attendre à la présence d'une particule de Goldstone. Lorsque c'est un groupe de Lie qui est brisé, il s'agit d'un boson de Goldstone, dans le cas de la supersymétrie les générateurs n'obéissent pas à les relations de commutation mais à des relations d'anticommutation et la particule de Goldstone est alors un fermion appelé goldstino, Ce goldstino fait partie d'un multiplet chiral ou vectoriel selon que la brisure a lieu dans la partie chirale (on parle alors de brisure de type F) ou dans la partie vectorielle (on parle alors de brisure de type D) Bien qu'esthétiquement plus satisfaisante que la brisure explicite, la brisure spontanée a plus de difficultés à produire des modèles phénoménologiquement viables. De plus, la brisure spontanée correspond à une énergie du vide non nulle et cette densité d'énergie du vide s'interprète en cosmologie comme une constante cosmologique. Un modèle complètement supersymétrique (densité d'énergie du vide nulle) est en accord avec les observations (la constante cosmologique  $\Lambda$  est limitée par  $\sqrt{\Lambda} = 10^{-42}$  GeV). Cependant., la supersymétrie est brisée et l'échelle de brisure est au moins de 100 GeV (compte-tenu des résultats du LEP nous savons qu'il faut aller à des énergies supérieures pour observer les partenaires supersymétriques), L'échelle naturelle de la densité d'énergie du vide est l'échelle de brisure elle-même et la constante cosmologique correspondante est 11) 50 fois plus grande que la limite observationnelle. Ce désaccord colossal est faible, 5e la plus importante du MSSM (et en fait de toutes les théories en physique des particules)

### **1-9-3- Brisure de SUSY induite par la gravitation**

#### **1- Le lagrangien de brisure et le rôle du secteur caché**

Nous venons de voir que sur les deux modes de brisure, le premier permettait de construire facilement des modèles viables mais n'était pas très satisfaisant esthétiquement alors que le second l'était davantage mais

qu'il n'est alors pas aise d'en déduire la phénoménologie a basse énergie. Dans le cadre même du MSSM, il existe de nombreux choix possibles mais la plupart des modèles se basent sur une brisure qui est un amalgame de ces deux modes.

L'ensemble des termes de brisure possible est réduit à un choix minimal incluant des termes de masse pour les scalaires et les jauginos et un terme quadratique pour les champs de Higgs proportionnel au terme qui apparaît dans le superpotentiel :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{brisure de MSSM}} = & \sum (A_u h_u \bar{Q}_L \bar{u}_R H_2 + A_d h_d \bar{Q}_L \bar{d}_R + A_e h_e \bar{L}_L \bar{e}_R) \\ & + B_\mu H_1 H_2 \\ & + \sum_{\alpha=1,2,3} M_\alpha \bar{\psi}_\alpha \psi_\alpha + \sum_i m_i^2 |\phi|^2 \end{aligned} \quad (1.70)$$

La raison pour laquelle les deux premières lignes de ce lagrangien de brisure sont simplement proportionnelles à des termes du superpotentiel (les termes de Yukawa pour la première ligne et le terme bilinéaire dans les champs de Higgs pour la seconde) trouve son origine dans la possibilité que la supersymétrie soit brisée dans le secteur de la gravite, Ce mode de brisure suppose qu'il existe des champs qui n interagissent avec ceux du MSSM que par l'intermédiaire de la gravitation (ce sont des singlets sous les différentes transformation de jauge du modèle standard) Ces champs interagissent très faiblement avec le secteur  $Su(3)_L \times Su(2) \times U(1)$  dès que l'échelle d'énergie est de quelques ordres de grandeurs inférieure à  $M_{\text{plank}}$  (il font alors partie du secteur caché) L'état fondamental du secteur caché n'est pas supersymétrique et le fermion de Goldstone., appelé gravtino, a un spin  $1/2$  car c'est le partenaire supersymétrique du graviton qui est de spin 2 (les champs de jauge de la gravitation sont tensoriels et décrivent donc des particules de spin 2). La supersymétrie est brisée si le graviton n'a pas la même masse que le gravitino puisqu'ils sont partenaires supersymétriques. Cette brisure est induite sur le secteur visible puisqu'il y a interaction gravitationnelle avec des termes de masse pour les scalaires et les jauginos et des termes d'interaction simplement proportionnels à ceux du superpotentiel d'où la forme du lagrangien de brisure. On peut remarquer que les termes ainsi introduits sont proches des termes introduits lorsqu'un mode de brisure explicite est choisi.

## 2- Les conséquences unificatrices (et simplificatrices)

Comme les interactions gravitationnelles ne voient pas la différence entre les saveurs, il faut s'attendre à ce que les particules aient des masses identiques a une échelle d'énergie entre l'échelle d'unification et l'échelle de Planck. Par contre, les scalaires et les jauginos n'ont pas de raison en général d'avoir la même

masse et on s'attend donc à ce que les scalaires d'une part et les jauginos d'autre part aient des masses identiques à l'échelle d'unification  $\Lambda_u$ :

$$\mathbf{m}_t(\Lambda_u) = m_0; M_1(\Lambda_u) = M_2(\Lambda) = M_3(\Lambda) = m_{1/2} \quad (1.71)$$

où  $m_0$  est la masse commune des scalaires à l'échelle d'unification et  $m_{1/2}$  celle des fermions (certains modèles réduisent encore les paramètres de masse en supposant  $m_0 = m_{1/2} = m_{3/2}$  la masse du gravitino) et  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  sont les masses des jauginos de  $U(1)_Y$ ,  $SU(2)_L$  et  $SU(3)_C$  respectivement. Les termes apparaissant dans le lagrangien de brisure qui sont proportionnels à ceux du superpotentiel auront un facteur de proportionnalité qui sera le même pour les différentes familles puisque la brisure de la supersymétrie est aveugle à la distinction entre les familles. On a alors l'unification des couplages trilineaires :

$$A_i(\Lambda_u) = A \quad (1.72)$$

Il faut remarquer que les bosons de jauge et les fermions restent pour l'instant de masse nulle, ils n'acquièrent une masse qu'après la brisure de  $SU(2)_L \times U(1)_Y$

On voit que l'intérêt du modèle est que tout en utilisant la brisure spontanée de SUSY, les termes de brisure restent relativement libres et permettent de construire des modèles viables (les détails du secteur caché ne jouent pas de rôle dans la forme générale des termes de brisure).

### 3- Les conséquences à l'échelle électrofaible

À basse énergie, les particules auront des masses différentes car elles évolueront différemment avec l'échelle d'énergie selon leurs couplages et il est ainsi possible de reproduire un spectre riche à basse énergie avec seulement quelques paramètres définis à haute énergie. La partie qui reproduit le spectre à basse énergie est assez dépendante du modèle et c'est l'expérience qui permettra de confirmer ou infirmer les modèles.

L'évolution  $M_1, M_2, M_3$

étant régie par les couplages des jauginos (qui sont aussi ceux des bosons de jauge) l'évolution des  $M_i$ , avec l'échelle d'énergie sera de la même forme que l'évolution du couplage  $g$ , du groupe de jauge correspondant :

$$\frac{M_i}{\alpha_i(\Lambda)} = \frac{m_{1/2}}{\alpha_i(\Lambda_u)} \quad (1.73)$$

Ce qui donne, si l'on applique cette relation à l'échelle électrofaible [44]

$$M_3 = \frac{\alpha_4}{\alpha} (\sin \theta_W)^2 M_2 = \frac{3}{5} \frac{\alpha_5}{\alpha} (\cos \theta_W)^2 M_1 \quad (1.75)$$

Où  $\alpha_5$  est la constante de couplage fort,  $\alpha$  la constante de structure fine et  $\theta_W$  l'angle de Wemberg avec SU(5) comme groupe d'unification

Numériquement., on a la relation approchée

$$M_3 \approx 4 M_2 \approx 8M_1$$

Pour la suite nous utiliserons le paramètre:

$$M \equiv M_2$$

qui sera un paramètre fondamental du secteur jauginos

Si les paramètres de masse des jauginos sont déterminés de façon relativement univoque des que l'on se place dans le cadre du MSSM avec brisure de supersymétrie dans le secteur gravitationnel, il n'en est pas de même pour les masses des scalaires qui sont très variables selon les modèles. Il est cependant possible d'avoir des prédictions pour l'ensemble du spectre à partir d'un lot réduit de paramètres et d'hypothèses raisonnables. Nous reviendrons sur ce point après avoir introduits les autres paramètres qui entrent dans la détermination du spectre des scalaires.

# Chapitre 2

## Invariance de forme

L'invariance de forme pour un potentiel stationnaire à une dimension a été introduite en 1983 par Gendshstein, cette propriété fondamentale, combinée aux résultats de la hiérarchie abordés dans la section précédente, permet d'obtenir toutes les énergies quantifiées de l'hamiltonien par une formule simple et unifiée. Les fonctions propres associées aux niveaux excités peuvent également être déduites directement de la fonction propre de l'état fondamental.

### 2-1- Définition

Considérons que le potentiel supersymétrique de départ dépend de certains paramètres qu'on dénote simplement par  $a_1$ , il s'écrit donc explicitement  $V_-(x, a_1)$ . Les équations de Riccati pour les potentiels partenaires associés  $V_+(x, a_2)$  s'écrivent donc comme suit :

$$V_-(x, a_1) = w^2(x, a_1) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w'(x, a_1) \quad (2.1)$$

$$V_+(x, a_2) = w^2(x, a_2) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} w'(x, a_2) \quad (2.2)$$

Donc la même forme et ne diffèrent que par un ensemble fini des paramètres, on dit que ce sont des "potentiels invariants de formes". Simplement, l'invariance de forme se caractérise par la relation suivante :

$$V_+(x, a_2) = V_-(x, a_1) + R(a_1) \quad (2.3)$$

Où  $R(a_1)$  est une fonction indépendante de  $x$ , appelée " Reste ".

où  $a_1$  et  $a_2$  sont deux jeux finis des paramètres, reliés par :

$$a_2 = f(a_1)$$

La fonction  $f$  peut être une fonction quelconque, mais jusqu'à présent toutes les études effectuées sur les différents potentiels connus qui sont analytiquement solubles, ont conduit seulement à trouver deux formes principales.



La première forme relie  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  par une relation de translation, de la forme:

$$a_2 = a_1 + \alpha$$

où est une constante finie arbitraire.

La plupart des potentiels que nous pouvons rencontrer dans les études des systèmes quantiques (non relativistes) appartiennent à la première catégorie.

La seconde forme relie  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  par un facteur d'échelle sous la forme :

$$\alpha_2 = q\alpha_1 \text{ avec } 0 < q < 1$$

Il existe, toutefois, d'autres possibilités pouvant, peut-être, conduire à d'autres classes des potentiels invariants de forme. L'une est une généralisation de la seconde forme, considérée ci-dessus :

$$a_2 = qa_1^p$$

avec

$$0 < q < 1 \text{ et } p = 2,3,4,\dots$$

Une autre relation est proposée sous la forme :

$$a_2 = \frac{qa_1}{1+pa} \text{ avec } 0 < q < 1 \text{ et } pa \ll 1$$

## 2-2- Invariance de forme et hiérarchie de potentiels superpartenaires

On peut dès lors appliquer le concept d'invariance de forme à la SUSY. supposons que les deux potentiels partenaires  $V_1$  et  $V_2$  déjà définis par, sont invariants de formes on peut donc écrire :

$$V_2(\alpha_1) = V_1(\alpha_2) + R(\alpha_1) \quad (2.4)$$

Les relations et entraînent que :

$$H_2(a_1) = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x, a_1) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_2) + R(a_1) \\
&= H_1(a_2) + R(a_1)
\end{aligned}$$

Qui signifie le spectre de  $H_2(a_0)$  est le même que celui de  $H_1(a_1)$  mais décalé d'un facteur constant  $R(a_0)$ . Ceci veut dire aussi que les fonctions propres  $\psi_n^{(2)}(x, a_1)$  et  $\psi_n^{(1)}(x, a_2)$  sont identiques, on écrit :

$$\begin{cases} \psi_n^{(2)}(x, a_1) = \psi_n^{(1)}(x, a_2) \\ E_n^{(2)}(a_1) = E_n^{(1)}(a_2) + R(a_1) \end{cases} \quad (2.6)$$

Maintenant cette relation Combinant sous la forme :

$$A_2^\dagger(a_1) A_2(a_1) + E_0^{(2)} = A_1^\dagger(a_2) A_1(a_2) + E_0^{(1)} + R(a_1) \quad (2.7)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{cases} E_0^{(2)} = E_0^{(1)} = R(a_1) \\ A_2(a_1) = A_1(a_2) \end{cases} \quad (2.8)$$

Appliquons encore une fois la condition d'invariance de forme aux deux partenaires  $V_2$  et  $V_3$ , On trouve :

$$\begin{aligned}
V_3(x, a_1) &= V_2(x, f(a_1)) + R(a_1) \\
&= V_1(x, f(f(a_1))) + R(f) + R(a_1) \\
&= V_1(x, a_3) + R(a_2) + R(a_1)
\end{aligned} \quad (2.8)$$

de même méthode on peut écrire  $H_3(a_0)$  en fonction  $H_1(a_2)$  sous la forme :

$$\begin{aligned}
H_3(a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x, a_2) + R(a_1) \\
&= H_2(a_2) + R(a_1) \\
&= H_1(a_2) + R(a_1) + R(a_2)
\end{aligned} \quad (2.9)$$

Nous avons exprimé les caractéristiques de  $H_3(a_0)$  en fonction de  $H_1(a_1)$  comme :

$$\begin{cases} \psi_n^{(3)}(x, a_1) = \psi_n^{(1)}(x, a_3) \\ E_n^{(3)}(a_1) = E_n^{(1)}(a_2) + R(a_0) + R(a_1) \end{cases} \quad (2.10)$$

Maintenant cette relation Combinant sous la forme :

$$A_2^+(a_1) A_3(a_1) + E_0^{(3)} = A_1^+(a_3) A_1(a_3) + E_0^{(1)} + R(a_1) + R(a_2) \quad (2.11)$$

Vient que :

$$\begin{cases} E_0^{(3)} = E_2^{(1)}(a_1) = R(a_1) = R(a_2) \\ A_3(a_1) = A_1(a_3) \end{cases} \quad (2.12)$$

On peut présent procéder à une généralisation en considérant deux potentiels partenaires successifs  $V_{m+1}$  et  $V_m$  de la hiérarchie. On peut écrire donc :

$$\begin{aligned} V_{m+1}(x, a_1) &= V_m(x, f(a_1)) + R(a_1) \\ &= V_{m-1}(x, f^2(a_1)) + R(f(a_1)) R(a_1) \\ &= V_{m-2}(x, f^3(a_1)) + R(f^{(2)}(a_1)) + R(f(a_1)) + R(a_1) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= V_1(x, f^{(m)}(a_1)) + \sum R(f^{(k)}(a_1)) \\ &= V_1(x, a_{m+1}) + \sum R(a_{k+1}) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ce qui conduira, par analogie :

$$\begin{aligned} H_{m+1}(x, a_1) &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_{m+1}(x, a_1) \\ &= A_m(a_1)A_m^+(a_1) + E_0^{(m)} \\ &= A_{m-1}^+(a_1) A_{m-1}(a_1) + E_0^{(m-1)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Par conséquent, on obtient finalement :

$$H_p(x, a_1) = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_p) + \sum_{k=0}^{p-1} R(a_k) \quad (2.15)$$

$$= H_1((a_p) + \sum_{k=0}^{p-1} R(a_k)$$

Où  $a_p = f^{(p-1)}(a_1)$  est la fonction  $f$  appliquée  $(p-1)$  fois.

$$\begin{cases} E_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{p-1} R(a_k) \\ \psi_n^{(p+1)}(x, a_1) = \psi_n^{(1)}(x, a_p) \text{ avec } n \geq 1 \\ A_{p+1}(a_0) = A_1(a_p) \end{cases} \quad (2.16)$$

$$E_0^{(p)} = \sum_{k=1}^{p-1} R(a_k)$$

Alors, on obtient les spectres et les fonctions propres de l'hamiltonien original  $H$  sous la forme :

$$\begin{cases} \psi_n(x, a_1) = \prod_{k=1}^n ([E_n(a_1) - E_{k-1}^{(1)}]^{-1/2} A_1^+(a_k - 1)) \psi_0^{(1)}(x, a_n) \text{ avec } n \geq 1 \\ E_n(a_1) = E_0 + \sum_{k=0}^{n-1} R(a_k) \end{cases} \quad (2.17)$$

Enfin, on arrive à un résultat très intéressante ; pour obtenir tous les niveaux excités de  $H_1$ , il suffit d'obtenir la fonction d'onde  $\psi_0^{(1)}(x, a_0)$  de son état fondamental par le biais de puis calculer  $\psi_0^{(1)}(x, a_n)$  et après on applique la condition d'invariance de forme pour trouver les restes  $(a_k)$ . [46]

## 2-3- Invariance de forme des potentiels superpartenaires dans l'exemple $\Phi(x) = \tanh\beta x$ [47] . [48] . [49]. [22]

L'exemple du superpotentiel  $\Phi(x) = \tanh\beta x$  a été traité dans le cadre de l'invariance de forme par Gendenshtein (1983). On suppose  $\beta > 0$  et  $\alpha > 0$

Si ce n'était pas le cas, on aurait en effet :

$$\Phi^2(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Phi'(x) > \Phi^2(x) + \frac{\hbar}{2m} \Phi'(x)$$

Ce qui conduirait à un hamiltonien  $\hat{H}_-$  dont le spectre en énergie serait supérieur à celui de  $\hat{H}_+$ , pour assurer un état fondamental d'énergie nulle à  $\hat{H}_+$ , on impose donc  $\alpha > 0$  :

$$\Phi^2(x) = \alpha^2 \tanh^2 \alpha x = \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 \beta x}\right) \quad (2.18)$$

$$\frac{\hbar^2}{\sqrt{2m}} \Phi'(x) = \frac{\alpha \hbar}{\cosh^2 \beta x} \frac{\beta}{\sqrt{2m}} \quad (2.19)$$

$$\text{D'où } V_-(x) = \alpha^2 - \alpha \left( \alpha + \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}} \right) \frac{1}{\cos \hbar^2 \beta x} \quad (2.20)$$

$$V_+(x) = \alpha^2 - \alpha \left( \alpha - \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}} \right) \frac{1}{\cos \hbar^2 \alpha x} \quad (2.21)$$

Ce potentiel super partenaires satisfont à la condition d'invariance de forme

$$\begin{aligned} V_+(x) &= \alpha^2 - \alpha \left( \alpha - \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}} \right) \frac{1}{\cos \hbar^2 \alpha x} = \alpha^2 - \alpha \left( \alpha + \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}} \right) \frac{1}{\cos \hbar^2 \beta x} + R(\alpha') \\ &= V_+(x, \alpha') + R(\alpha') \end{aligned} \quad (2.22)$$

En posant  $\alpha' = \alpha - \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}}$

$$\begin{aligned} R(\alpha') &= V_+(x, \alpha') - V_-(x, \alpha') \\ &= \alpha^2 - \left( \alpha + \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

En utilisant les notations u paragraphe précédent, ces expressions deviennent :

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha \\ a_1 &= \alpha - \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}} = a_0 - \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}} \\ a_k &= a_0 - \frac{k\beta\hbar}{\sqrt{2m}} \\ R(a_k) &= a_{k-1}^2 - a_k^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Les niveaux d'énergie de  $\widehat{H}_-$  sont données par :

$$\begin{aligned} E_2^{(-)}(\alpha) &= \sum_{k=1}^n (a_{k-1}^2 - a_k^2) = a_0^2 - a_n^2 \\ &= \alpha^2 - \left( \alpha + \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2 \end{aligned}$$

En laissant de côté la normalisation des fonctions d'onde , les premières d'entre elles s'écrivent :

$$\psi_1^{(-)}(x) \sim \exp - \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int a \tanh \beta dx \quad (2.24)$$

$$\sim \exp - \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{\alpha}{\beta} \ln n \cosh \beta x \quad (2.25)$$

On applique ensuite les opérateurs échelle :

$$\psi_1^{(-)}(x, a_0) \sim (a_0) \hat{A}^+ \psi_1^{(-)}(x, a_1) \quad (2.26)$$

$$\hat{A}^+ (a_0) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \psi_0 \tanh \hat{a} x \quad (2.27)$$

# Chapitre 3

## Exemples de l'utilisation de la MQSUSY dans des problèmes physique.

### 3-1- Introduction

Dans ce chapitre nous allons proposer deux exemples qui vont démontrer l'importance de cette méthode pour la détermination des énergies et des états liés au moyen de la MQSUSY

Le premier exemple est un travail de thèse de doctorat sur un potentiel du type  $V(r) = ar^2 + br^{-4} + cr^{-6}$ , ( $a > 0, c > 0$ ) dont les énergies et les fonctions d'onde sont disponibles comme référence par d'autre méthode d'investigation.

Le deuxième exemple mentionné est une transformation de l'équation de Klein Gordon en une forme similaire à l'équation de Schrödinger en utilisant la supersymétrie en mécanique quantique.

### 3-2- Exemple 1 : Détermination des énergies et des états liés d'un potentiel de type $V(r) = ar^2 + br^{-4} + cr^{-6}$

Nous allons maintenant introduire ce potentiel dans l'équation radiale de Schrödinger qui nous l'avons déjà prédit à la même forme que l'équation de Schrödinger unidimensionnelle. Ainsi nous pouvons essayer d'introduire les notions de la MQSUSY à ce système.

La solution de l'équation de Schrödinger avec le potentiel  $V(r)$  s'écrit comme suit :

$$U(r) = U_0(r)U_\infty(r)U_{susy}(r) \quad (3.1)$$

Où  $U_0(r)$  est la solution au comportement à l'origine ( $r \rightarrow 0$ ),  $U_\infty(r)$  est la solution au comportement asymptotique ( $r \rightarrow \infty$ ) et  $U_{susy}(r)$  la fonction inconnue que nous allons trouver par la méthode SUSY . Cette solution est liée aux paramètres  $a$ ,  $b$ , et  $c$  du potentiel.[40]

### 3-2-1- Etude analytique

On injecte l'expression du potentiel  $V(r)$ , il vient :

$$\left( -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (ar^2 + br^{-4} + cr^{-6} - E) \right) U(r) = 0 \quad (3.2)$$

La nécessité de prendre les unités :  $2m = \hbar = 1$  n'est qu'un choix de convenance

On pose :  $\lambda = E$  et  $\alpha^2 = a$

L'équation différentielle devient :

$$\left( -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \alpha^2 r^2 + br^{-4} + cr^{-6} - \lambda \right) U(r) = 0$$

En introduisant une nouvelle variable  $x$  telle que  $x = \sqrt{\alpha r}$ , on obtient [40]

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{l(l+1)}{x^2} + x^2 + b\alpha x^{-4} + c\alpha^2 x^{-6} - \frac{\lambda}{\alpha} \right) U(x) = 0$$

Après une étude asymptotique la solution générale se met sous la forme

$$U(r) = \left( \exp\left(-\frac{r^4 + 2\beta}{2r^2}\right) \right) U_{SUSY} \quad (3.3)$$

où  $\beta$ , est une paramètre .

L'expression (3.2), sera :

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} (E - r^2 + br^{-4} + cr^{-6}) \right) U(r) = 0 \quad (3.4)$$

On pose

$$-\frac{d^2}{dr^2} U(r) = (E - V(r)) U(r) \quad (3.5)$$

Selon la MQ SUSY l'hamiltonien sera  $H_1$

$$H_1 U(r) = (A_1^+ A_1 + E_0^{(1)}) U(r) = \left( -\frac{d^2}{dr^2} + V_1 \right) U(r) \quad (3.6)$$



$$H_1 = A_1^+ A_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dr^2} + V_1(r) \quad (3.7)$$

Le potentiel sera sous la forme :

$$V_1(r) = W_1^2(r) - W_1'(r) \quad (3.8)$$

de l'équation (3.4) et (3.7) il a été déduit :

$$V_1(r) = r^2 + br^{-4} + cr^{-6} - E_0^{(1)}$$

Le superpotentiel  $W_1(r)$  a été proposé sous la forme :

$$W_1(r) = Ar + \frac{B}{r} + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{r^3} \quad (3.9)$$

Les relations entre les paramètres de cette équation satisfirent les définitions de la SUSY

$$A = +1 \quad (3.10a)$$

$$B = -\frac{1}{2\sqrt{c}}(b + 3\sqrt{c}) \quad (3.10b)$$

$$C = 0 \quad (3.10c)$$

$$D = -\sqrt{c} \quad (3.10d)$$

$$E_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{c}}(b + 4\sqrt{c}) \quad (3.10e)$$

La contrainte entre  $b$  et  $c$  sera

$$\left(3c + 4b\sqrt{c} + b^2 - 8c^{\frac{3}{2}}\right) = 0 \quad (3.11)$$

le superpotentiel a été écrit comme

$$W_1(c) = r - \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{c}}(b + 3\sqrt{c})\right)}{r} - \frac{\sqrt{c}}{r^3}$$

Et suivant la relation (1.29) le potentiel admet une solution exacte

$$U_0^{(1)}(r) = N_0^{(1)} \exp \left( - \int_r \left( r - \frac{\left( \frac{1}{2\sqrt{c}} (b + 3\sqrt{c}) \right)}{r} - \frac{\sqrt{c}}{r^3} \right) dr \right) \quad (3.12)$$

Après intégration

$$U_0^{(1)} = N_0^{(1)} \left( \exp - \left( \frac{r^4 + \sqrt{c}}{2r^2} \right) \right) r^{\left( \frac{1}{2\sqrt{c}} + \frac{3}{2} \right)} = \left( \exp - \left( \frac{r^4 + 2\beta}{2r^2} \right) \right) U_{SUSY}(r) \quad (3.13)$$

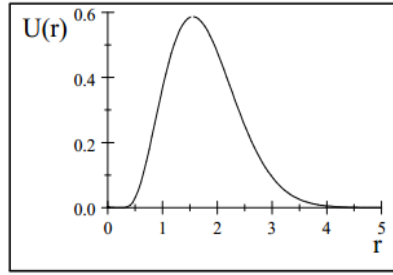
Où  $N_0^{(1)}$  est une constante de normalisation.

L'auteur a calculé les valeurs des énergies suivant l'équation (3.10) est présenté les fonctions d'onde correspondantes à ces énergies, n'oublions pas que les valeurs de b et c obéissent à la contrainte (3.11). Le tableau (3.1) illustre ce qui précède.

**Tableau (3.1)**

c	b	$E_0^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{c}}(b + 4\sqrt{c})$
1	1	5.0
1	-5	-1
2	2.1342	5.5091
2	-7.791	-1.5091
10	9.8921	7.1282
10	-22.541	-3.1281
100	70	11.0
100	-110	-7.0

Exemple 1.1 : La fonction d'onde radiale  $U_0^{(1)}(r)$  relative au cas  $E_0^{(1)} = 5$



**Figure (3.1)** : La fonction d'onde non normalisée  $U_0^{(1)}(r)$

Les courbes  $U_0^{(1)}(r)$  ne présentent aucun nœuds, donc elles correspondent à l'état fondamental, d'énergie  $E_0^{(1)}$ . Il a été conclu que pour  $n=0$  et  $l=0$ , la fonction d'onde radiale décrit seulement l'état fondamental [40]

La deuxième étape dans La MQ SUSY est de trouver les partenaires super symétriques de  $H_1$  et  $V_1$ ,  $H_2$ , et  $V_2$  et donc  $W_2$ . Dans cette seconde approche, il faut commencer par enlever l'état fondamental  $U_0^{(1)}$  d'énergie  $E_0^{(1)}$  pour le potentiel  $V_1(r)$ , afin de générer le potentiel SUSY partenaire  $V_2(r)$ . En combinant l'équation (1.30) et (1.31), on trouve [40]

$$H_2 = A_1 A^+ + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dr^2} + V_2(r)$$

Où :

$$V_2(r) = W_1^2 + W_1' + E_0^{(1)} = V_1(r) + 2W_1' = V_1(r) - 2\frac{d^2}{dr^2} \ln U_0^{(1)}$$

qui a les mêmes valeurs propres que  $V_1$ , sauf en ce qui concerne l'état lié d'énergie  $E_0^{(1)}$ .

Et en même temps l'auteur a proposé un nouveau super potentiel qui va déterminer  $V_2$

$$V_2(r) = W_2^2 + W_2' + E_0^{(2)} \quad (3.14)$$

Donc :

$$V_2(r) = V_1(r) + 2W_1' = r^2 + \frac{1}{\sqrt{c}r^2} (b + 3\sqrt{c}) + \frac{(b + 6\sqrt{c})}{r^4} + \frac{c}{r^6} + \left( 2 - \frac{1}{\sqrt{c}} (b + 4\sqrt{c}) \right)$$

L'auteur a proposé

$$W_2 = A_2 r + \frac{B_2}{r} + \frac{C_2}{r^2} + \frac{D_2}{r^3}$$

D'où

$$A_2 = 1$$

$$B_2 = -\frac{1}{2\sqrt{c}}(b + 9\sqrt{c})$$

$$C_2 = 0$$

$$D_2 = -\sqrt{c}$$

$$E_1^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{c}}(b + 19\sqrt{c})$$

$$3\frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{1}{4}\frac{b^2}{c} - 2\sqrt{c} + \frac{51}{4} = 0$$

$$W_2(r) = r - \frac{\frac{1}{2\sqrt{c}}(b + 9\sqrt{c})}{r} - \frac{\sqrt{c}}{r^3}$$

Alors

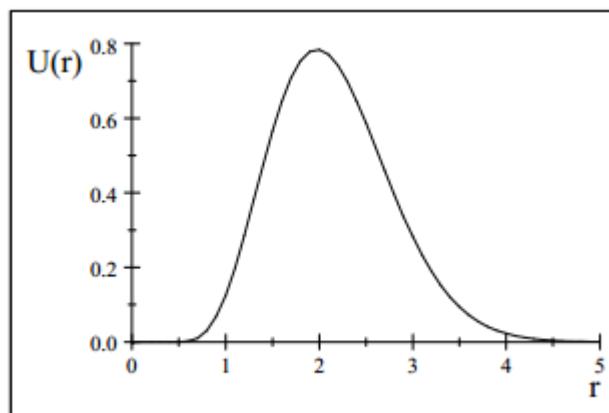
$$U_0^{(2)}(r) = N_0^{(2)} \exp\left(-\int^r \left(r - \frac{\frac{1}{2\sqrt{c}}(b + 9\sqrt{c})}{r} - \frac{\sqrt{c}}{r^3}\right) dr\right) = N_0^{(2)} \exp\left(-\left(\frac{r^4 + \sqrt{c}}{2r^2}\right)\right) r^{\left(\frac{1}{2\sqrt{c}} + \frac{9}{2}\right)}$$

Le tableau (3.2) contient quelque résultats de  $E_0^{(2)}$ , sans oublier la relation suivante  $E_0^{(2)} = E_1^{(1)}$

**Tableau (3.2)**

c	b	$E_0^{(2)} = E_1^{(1)} = \frac{1}{2\sqrt{c}}(b + 19\sqrt{c})$
10	-8.8256	8.104 6
10	-29.122	4.895 4
100	20.623	10.531
100	-140.62	2.469
200	55.245	11.453
200	-224.95	1.546 8
1000	298.10	14.213
1000	-677.57	-1.213 3
2000	559.65	15.757
2000	-1096.3	-2.757
3000	798.11	16.786
3000	-1455.4	-3.785 9

Exemple 2.1 : La fonction d'onde radiale  $U_0^{(2)}(r)$  relative au cas  $E_0^{(2)} = 8.104 6$



**Figure (3.2)** : La fonction d'onde non normalisée  $U_0^{(2)}(r)$

Les courbes  $U_0^{(2)}(r)$  ne présentent aucuns nœuds, donc elles correspondent à l'état fondamental, d'énergie  $E_0^{(2)}$ . Donc pour  $n = 0$  et  $l = 0$ , la fonction d'onde radiale décrit seulement l'état fondamental, n'oubliant pas qu'on parle du partenaire SUSY  $H_2$ . [40]

Maintenant il faut trouver la hiérarchie de  $H_1$ , pour chaque  $n = 0.1.2.3...$

Il a été trouvé que  $E_1^1 = E_0^2$  il reste à trouver la fonction d'onde correspondante  $U_1^{(1)}$ .

$$E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)} \quad , \quad U_n^{(2)} = \left(E_{n+1}^{(1)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} A_1 U_{n+1}^{(1)}$$

et

$$U_{n+1}^{(1)} = \left(E_n^{(2)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} A_1^+ U_n^{(2)}$$

$$n = 0 \quad , \quad U_1^{(1)} = \left(E_0^{(2)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} A_1^+ U_0^{(2)}$$

$$U_1^{(1)} = \left(E_0^{(2)} - E_0^{(1)}\right)^{-1/2} \left(-\frac{d}{dr} + W_1(r)\right) U_0^{(2)}$$

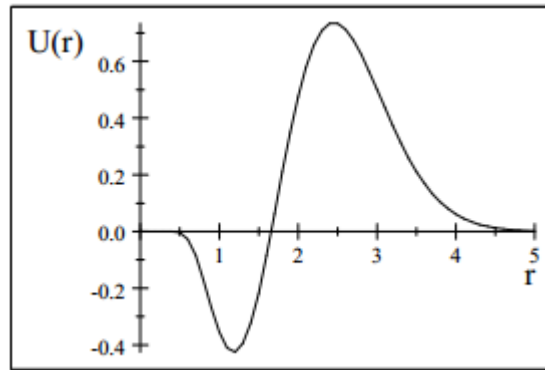
En remplaçant tous les termes par leurs équations correspondantes [40], alors

$$U_1^{(1)}(r) = -N_0^{(2)} \frac{1}{\sqrt{7c}} r^{\frac{1}{2\sqrt{c}}(b+3\sqrt{c})} \left(2c + br^2 + 6\sqrt{c}r^2 - 2\sqrt{c}r^4\right) \exp\left(-\left(\frac{r^4 + \sqrt{c}}{2r^2}\right)\right)$$

Où  $N_0^{(2)}$  est une constante de normalisation

Exemple 2.4 : La fonction d'onde radiale  $U_1^{(1)}(r)$  relative au cas  $E_1^{(1)} = 8.1046$

$$U_1^{(1)}(r) = 0.75593r^{\frac{513068764265112196047}{12500000000000000000}} \exp\left(-\frac{0.5}{r^2}(r^4 + 3.1623)\right) \\ - 1.2129r^{\frac{263068764265112196047}{12500000000000000000}} \exp\left(-\frac{0.5}{r^2}(r^4 + 3.1623)\right) \\ - 2.3905r^{\frac{13068764265112196047}{12500000000000000000}} \exp\left(-\frac{0.5}{r^2}(r^4 + 3.1623)\right)$$



**Figure (3.3)** : La fonction d'onde non normalisée  $U_1^{(1)}(r)$

Les  $U_1^{(1)}(r)$  présentent un nœud, donc elles correspondent au premier état excité, d'énergie  $E_1^{(1)}$ . Alors pour  $n = 1$  et  $l = 0$ , la fonction d'onde radiale décrit le premier état excité.

Maintenant on peut dès lors aussi factoriser  $H_2$  pour déterminer son partenaire SUSY  $H_3$  [40].

$$H_2 = A_2 A_2^+ + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dr^2} + V_3(r)$$

$$V_3 = V_1 - 2 \frac{d^2}{dr^2} \ln(U_0^1 U_0^2)$$

et en même temps

$$V_3 = W_3^2 - W_3' + E_0^3$$

où le super potentiel est proposé comme

$$W_3 = A_3 r + \frac{B_3}{r} + \frac{C_3}{r^2} + \frac{D_3}{r^3}$$

Après une manipulation mathématique[40]

$$A_3 = 1$$

$$B_3 = -\frac{1}{2\sqrt{c}}(b + 15\sqrt{c})$$

$$C_3 = 0$$

$$D_3 = -\sqrt{c}$$

$$E_0^3 = \frac{1}{2\sqrt{c}}(b + 35\sqrt{c})$$

$$W_3 = A_3 r + \frac{B_3}{r} + \frac{C_3}{r^2} + \frac{D_3}{r^3}$$

$$147c + 20b\sqrt{c} + b^2 - 8c^{\frac{3}{2}} = 0$$

Donc :

$$W_3(r) = r - \frac{\frac{1}{2\sqrt{c}}(b + 15\sqrt{c})}{r} - \frac{\sqrt{c}}{r^3}$$

N'oublions pas que :

$$E_0^{(3)} = E_1^{(2)} = E_2^{(1)}$$

**Tableau (3.3)**

C	b	$E_0^{(3)} = \frac{1}{2\sqrt{c}}(b + 35\sqrt{c})$
100	-42.554	15.372
100	-157.45	9.627 5
200	-26.411	16.566
200	-256.43	8.433 8
1000	137.62	19.676
1000	-770.08	5.324 0
2000	341.16	21.314
2000	-1235.6	3.685 6



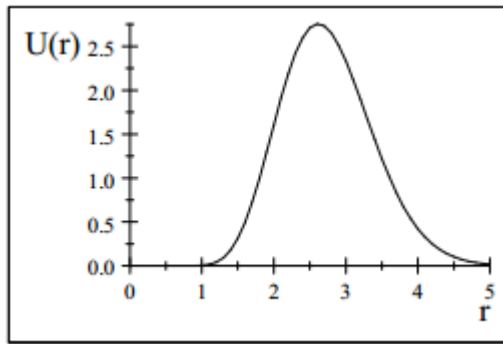
La détermination de la fonction d'onde  $U_0^{(3)}$  est telle que

$$U_0^{(3)}(r) = N_0^{(3)} \exp \left( - \int_r^r \left( r - \frac{1}{2\sqrt{c}} (b + 15\sqrt{c}) - \frac{\sqrt{c}}{r^3} \right) dr \right) = N_0^3 \exp \left( - \left( \frac{r^4 + \sqrt{c}}{2r^2} \right) \right) r^{\left( \frac{1}{2\sqrt{c}} + \frac{15}{2} \right)}$$

toujours  $N_0^3$  est une constante de normalisation

Exemple 3.1 : La fonction d'onde radiale  $U_0^{(3)}(r)$  relative au cas  $E_0^{(3)} = 15.372$

$$U_0^{(3)}(r) = \exp \left( - \left( \frac{r^4 + \sqrt{100}}{2r^2} \right) \right) r^{\left( \frac{1(-42.554)}{2\sqrt{100}} + \frac{15}{2} \right)}$$



**Figure (3-10)** : La fonction d'onde non normalisée  $U_0^{(3)}(r)$

Les courbes  $U_0^{(3)}(r)$  correspondent à l'état fondamental, d'énergie  $E_0^{(3)}$ . Il a été conclu cette fois aussi que pour  $n = 0$  et  $l = 0$ , la fonction d'onde radiale décrit seulement l'état fondamental, n'oubliant pas qu'on parle du partenaire SUSY  $H_3$ .

A présent il faut revenir à  $H_2$  puis  $H_1$ , ceci bien sûr pour calculer les fonctions d'onde  $U_0^{(2)}$  puis  $U_2^{(1)}$ .

$$U_n^{(3)}(r) = \left( E_{n+1}^{(2)} - E_0^{(2)} \right)^{-1/2} A_2 U_{n+1}^{(2)}$$

$$n = 0, \quad U_0^{(3)} = \left( E_1^{(2)} - E_0^{(2)} \right)^{-1/2} A_2 U_1^{(2)}$$

Et

$$U_{n+1}^{(2)} = \left( E_n^{(3)} - E_0^{(2)} \right)^{-1/2} A_2^+ U_n^{(3)}$$

Donc

$$n = 0, U_1^{(2)} = (E_0^{(3)} - E_0^{(2)})^{-1/2} A_2^+ U_0^{(3)}$$

$$U_1^{(2)} = (E_0^{(3)} - E_0^{(2)})^{-1/2} \left( -\frac{d}{dr} + W_2(r) \right) U_0^{(3)}$$

ceci est pour trouver le 2ème état excité  $U_1^{(2)}$  car

$$U_n^{(3)} = (E_{n+2}^{(1)} - E_1^{(1)})^{-1/2} (E_{n+2}^{(1)} - E_0^{(1)})^{-1/2} A_2 A_1 U_{n+2}^{(1)}$$

$$U_{n+2}^{(1)} = (E_n^{(3)} - E_1^{(1)})^{-1/2} (E_n^{(3)} - E_0^{(1)})^{-1/2} A_2^+ A_1^+ U_n^{(2)}$$

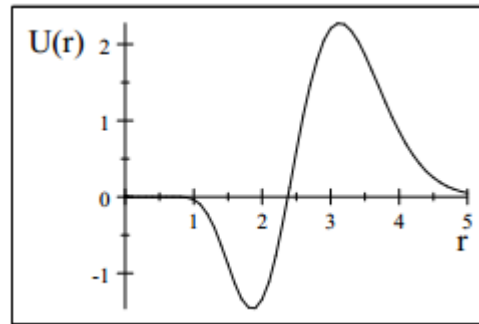
pour  $n = 0$  :

$$U_2^{(1)} = (E_0^{(3)} - E_1^{(1)})^{-1/2} (E_0^{(3)} - E_0^{(1)})^{-1/2} A_2^+ A_1^+ U_n^{(2)}$$

Alors l'équation qui décrit la fonction d'onde  $U_1^{(2)}(r)$

$$U_1^{(2)}(r) = -\frac{1}{2\sqrt{2c}} r^{\frac{1}{2\sqrt{c}}(b+9\sqrt{c})} (2c + br^2 + 12\sqrt{c}r^2 - 2\sqrt{c}r^4) \exp\left(-\frac{1}{2r^2}(r^4 + \sqrt{c})\right)$$

Exemple 3.4 : La fonction d'onde radiale  $U_1^{(2)}(r)$  relative au cas  $E_1^{(2)} = 15.372$



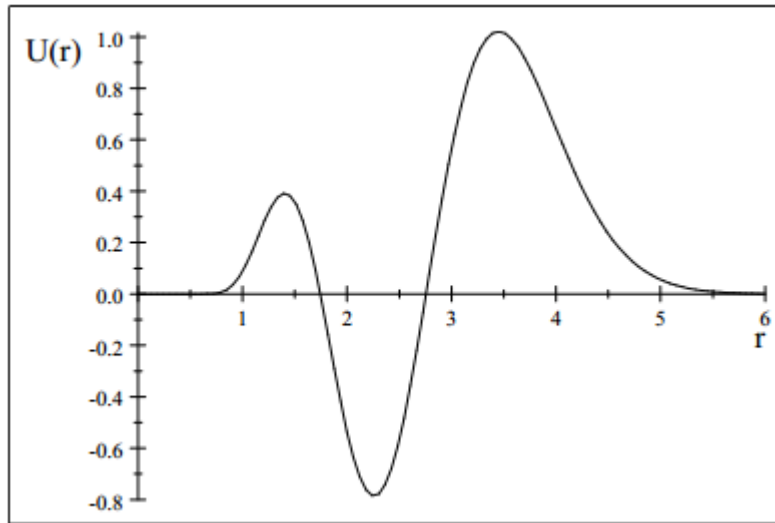
**Figure (3-13)** : La fonction d'onde non normalisée  $U_1^{(2)}(r)$

Les courbes  $U_1^{(2)}(r)$  présentent le premier état excité, d'énergie  $E_1^{(2)} = E_0^{(3)}$ .

En appliquant l'éq (3.32c) pour trouver la fonction d'onde  $U_2^{(1)}(r)$ ,

$$U_2^{(1)}(r) = \frac{1}{120} \frac{\sqrt{30}}{c} r^{\frac{1}{2\sqrt{c}}(b+3\sqrt{c})} \exp\left(-\frac{1}{2r^2}(r^4 + \sqrt{c})\right) \begin{pmatrix} 108cr^4 - 46cr^6 + 4cr^8 + b^2r^4 \\ +30c^{\frac{3}{2}}r^2 - 8c^{\frac{3}{2}}r^4 \\ +4c^2 + 4bcr^2 \\ +19b\sqrt{c}r^4 - 4b\sqrt{c}r^6 \end{pmatrix}$$

Exemple 3.7 : La fonction d'onde radiale  $U_2^{(1)}(r)$  relative au cas  $E_2^{(1)} = 15.372$



**Fig(3-16) :** La fonction d'onde non normalisée  $U_2^{(1)}(r)$

La courbe  $U_2^{(1)}(r)$  présente deux nœuds, donc elle correspond au deuxième état excité, d'énergie  $E_2^{(1)} = E_1^{(2)} = E_0^{(3)}$ . Ainsi si on persévère, on peut trouver la hiérarchie de  $H_1$  [40].

### 3-2-2- Conclusion

La notion de supersymétrie constitue un cadre élégant pour la résolution de l'équation de Schrödinger à une dimension. Elle donne une méthode systématique de factorisation de l'hamiltonien par l'introduction de la notion du superpotentiel, et qui peut fournir des résultats très satisfaisants.[40]

## 3-3- Exemple 2 : La supersymétrie en mécanique quantique relativiste

### 3-3-1- Introduction

Depuis la fondation de la mécanique quantique au début du siècle dernier, un développement considérable est réalisé dans la construction de modèles des potentiels pour décrire des interactions nucléaires en physique nucléaire ou des interactions interatomiques en physique atomique ou moléculaire et en chimie quantique grâce à de nombreuses méthodes de résolution des Equations d'onde employées dans le cadre non relativiste ou dans un contexte relativiste. En mécanique quantique, la SUSY est une nouvelle technique qui permet de résoudre une classe de potentiel en introduisant des superhamiltoniens qui permettent le passage d'un potentiel vers une autre. C'est une méthode assez puissante qui permet de retrouver presque tous les résultats déjà obtenus par les méthodes habituelles.

Dans la structure mathématique relative à la physique à deux dimensions, les solutions exactes, de l'équation de Dirac et l'équation de Klein-Gordon et leur spectre ont un intérêt particulier. Beaucoup d'études ont été faite sur le mouvement des particules de Klein-Gordon et de Dirac. Nous Utilisons ici des techniques standard de mécanique quantiques supersymétriques pour résoudre exactement l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Dirac. Dans ce travail, nous allons présenter un schéma généralisé de supersymétrie en mécanique quantique (SUSY MQ) pour obtenir des solutions exactes et les spectres d'énergie.

### 3-3-2- La supersymétrie et l'équation de Dirac [46]

L'équation de Dirac permet de décrire les problèmes mécaniques quantiques de façon relativiste. Une procédure matriciel unidimensionnel supersymétriques, du mime type que précédemment, a été utilisé entre les équations de Dirac et les équations de Schrödinger dans la physique des particules qui est décrit dans les limites générales. Par ce moyen, nous pouvons présenter le procédé qui est une prolongation du raccordement supersymétriques connu entre l'équation matricielle de Dirac et l'équation de Schrödinger [46]. Une discussion détaillée sur l'équation de Dirac par l'approche supersymétriques est fournie par Cooper et autres.

En 1988, qui a montré que l'équation de Dirac avec un potentiel scalaire de Lorentz est associée à une paire supersymétrique d'hamiltoniens de Schrödinger. Plusieurs aspects de l'équation de Dirac ont été également étudiés dans le formalisme de la MQ SUSY. Le problème célèbre de la particule de Dirac dans un champ coulombien a été également résolu algébriquement en employant les concepts de la SUSY et de l'invariance de forme. La SUSY de l'électron de Dirac dans un champ magnétique monopole a été également étudié [46].

### 3-3-3- La supersymétrie et l'équation de Klein-Gordon

#### 3-3-3-1- Introduction

Il est bien connu que la solution analytique de l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Dirac jouent un rôle important dans Mécanique quantique relativiste, car la fonction d'onde Contient toutes les informations ‡ la description d'un système quantique. Ces dernières années, il y a eu beaucoup de discussions sur l'équation de Klein Gordon avec les divers types de potentiels en utilisant des méthodes variées pour résoudre l'équation et obtenir le spectre du système. Seulement, quelques problèmes physiques ont été Etudiés par les méthodes de la MQSUSY. Il s'agit de transformer l'équation de Klein Gordon en une forme similaire à l'équation de Schrödinger utilisant la supersymétrie en mécanique quantique.

#### 3-3-3-2- La formulation de l'Hamiltonien de SUSY QM et la méthode de factorisation

En mécanique relativiste, la solution de L'équation de Klein-Gordon joue un rôle très important de la physique nucléaire et d'autres domaines. Cette équation relativiste contient deux objets, Le vecteur  $V(x)$  et le potentiel scalaire  $S(x)$  ( $c = \hbar = 1$ ). Alors cette équation avec les potentiels scalaires et vectoriels peut être écrite comme Suit:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + (E - V(r))^2 - (M + S(r))^2\right]\psi(x) = 0 \quad (3.15)$$

Avec  $M$  est la masse de la particule, et  $E$  l'énergie. Dans le cas où le potentiel vectoriel est égal au potentiel scalaire, c'est-à-dire  $V(x) = S(x)$ , donc l'équation (2.15) devient une équation de Schrödinger bien connue :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + E^2 - M^2 - 2(E + M)V(x)\right]\psi(x) = 0 \quad (3.16)$$

Avec

$$V_{eff}(x) = 2(E + M)V(x) \quad (3.17)$$

Alors l'équation (2.15) prend la forme suivante :

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + V_{eff}(x)\right]\psi(x) = \lambda\psi(x) \quad (3.18)$$

Où  $\lambda$  est le paramètre d'énergie donné par :

$$\lambda = M^2 - E^2 \quad (3.19)$$

Pour résoudre l'équation (3.18), Dans le cadre de la supersymétrie en mécanique quantique, la fonction d'onde réduite de l'état fondamental est définie par :

$$\psi_0(x) = N \exp[\int W(x) dx] \quad (3.20)$$

Où N est une constante de normalisation et  $W(x)$  est le superpotentiel défini par :

$$W^2(x) - W'(x) = V_{eff}(x) - \lambda_0 \quad (3.21)$$

Où  $\lambda_0$  est l'énergie de l'état fondamental. L'équation (3.21) est une équation de Riccati non-linéaire qui donne les fonctions d'onde du système.

### 3-3-4- L'équation de Klein-Gordon tridimensionnelle

En général, l'équation de Klein-Gordon pour un potentiel scalaire  $S(r)$  et un potentiel vectorielle  $V(r)$  à symétrie sphérique s'écrit dans le système d'unités naturelles  $\hbar = c = 1$  sous la forme suivante [46]:

$$[\nabla^2 + (V(r) - E)]^2 + (S(r) + M)^2 \psi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (3.22)$$

Où E est l'énergie, M est la masse de la particule,  $\psi(r, \theta, \varphi)$  est la fonction d'onde,  $\nabla^2$  est l'opérateur de Laplace.

Comme  $V(r)$  et  $S(r)$  sont des potentiels à symétrie sphérique, il convient de chercher les solutions particulières de l'équation (3.22) par séparation des variables en coordonnées sphériques [46].

L'expression de laplacien en coordonnées sphériques est :

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \quad (3.22a)$$

Si l'on utilise l'expression du carré du moment cinétique orbital  $\overline{L^2}$ , en coordonnées sphériques est :

$$\overline{L^2} = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$L_z = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

On voit que Laplacien peut se mettre sous la forme :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\overline{L^2}}{r^2}$$

Où

$$\begin{cases} H\psi = E\psi \\ L^2 = l(l+1)\hbar^2\psi \\ L_z = m\hbar\psi \end{cases} \quad (3.22b)$$

Finalement, l'équation de Klein-Gordon avec les coordonnées sphériques deviennent comme suite Réf ??? :

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\bar{L}^2}{r^2} - 2\{EV(r) + MS(r)\} + V^2(r) - S^2(r) + E^2 - M^2 \right] \psi(r, \theta, \varphi) = 0 \quad (3.23)$$

Si on attribue la fonction d'onde totale sphérique correspondante :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{R(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (3.24)$$

Où

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad (3.25)$$

Ensuite, L'équation (3.23) séparée en variables, les équations résultantes deviennent :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left[ E^2 - M^2 - 2\{EV(r) + MS(r)\} + V^2(r) - S^2(r) - \frac{\lambda}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \left( \lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta(\theta) = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0 \quad (3.28)$$

Où  $m^2$  et  $\lambda = l(l + 1)$  sont des constantes de séparation [46].

### 3-3-5- Les états d'une particule de Klein-Gordon dans des potentiels scalaire et vectorielle du type exponentiel [46]

Dans ce partie nous réexaminons la solution du problème d'une particule relativiste sans spin (spin = 0), de masse M qui se déplace sous l'action d'un champ à symétrie sphérique composé d'un potentiel scalaire  $S(r)$  et d'un potentiel vectorielle  $V(r)$  égaux. L'équation de Klein-Gordon décrit le mouvement d'une particule de Spin zéro .Les niveaux d'énergie et les valeurs propres de L'équation de Klein-Gordon a déterminé avec une simple Potentiel.

Il est clair que cette équation différentielle n'admet aucune solution exacte pour les états de moment cinétique orbital  $l$  différent de zéro à cause du terme centrifuge. Les solutions de cette équation peuvent être trouvées uniquement pour les ondes  $s(l = 0)$  dans le cas des potentiels de Hulthén ou de Woods-Saxon déformés [46].

En réalité, l'équation de Klein-Gordon dans le cas ( $l \neq 0$ ) est trop compliquée et ne se laisse pas traiter exactement. Il faut alors avoir recours à une résolution basée sur une méthode d'approximation qui permet d'obtenir analytiquement une solution approchée de l'équation.

Les potentiels de type exponentiel comme le potentiel de Titz Wei jouent un rôle très important en physique microscopique car ils sont largement utilisés comme une bonne approximation du potentiel

d'interaction dans de nombreux domaines de la physique et de la chimie notamment en physique nucléaire, physique atomique et moléculaire et en chimie quantique.

Le potentiel Titz-Wei est de la forme [46].

$$V(r) = \vartheta_0 \left( \frac{1-e^{-2\alpha r}}{1-qe^{-2\alpha r}} \right)^2 \quad (3.29)$$

Où  $\vartheta_0$  est une profondeur potentielle,  $\alpha$  paramètre de déformation ( $0 < q < 1$ ) l'introduction du paramètre peut servir comme un paramètre supplémentaire dans la description des interactions interatomiques).

Le but de ce travail est de résoudre approximativement l'équation de Klein-Gordon pour les états avec la méthode de SUSY et la symétrie de spin (dans l'équation de Klein Gordon et l'équation de Dirac la symétrie de spin :  $\Delta(r) = V(r) - S(r) = const$ , la symétrie de pseudo spin :  $\Sigma(r) = V(r) + S(r) = const$ .)

Pour expliquer les caractéristiques des noyaux déformés et la super déformation, les concepts des symétries de spin et de pseudo spin sont introduits dans la théorie nucléaire [46] dans les potentiels des types exponentiels. Donc la solution de l'équation de Klein-Gordon pour les états d'une particule dans des potentiels scalaire et vecteur du type exponentiel donne d'après la substitution de l'expression (3.29) dans l'équation (3.23). La Partie radiale de l'équation de Klein-Gordon pour la symétrie de spin, elle vient :

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left( E^2 - M^2 - 2(E + M)V_0 \left( \frac{1-e^{-2\alpha r}}{1-qe^{-2\alpha r}} \right)^2 - \frac{\lambda}{r^2} \right) R(r) = 0 \quad (3.30)$$

Nous savons bien que cette équation n'admet pas de solutions analytiques pour ( $l \neq 0$ ) à cause du potentiel centrifuge. Mais, à défaut de la résolution rigoureuse de cette équation, nous pouvons utiliser des méthode d'approximation qui permettent d'obtenir analytiquement des solutions approchées de l'équation (3.30).

Nous pouvons par exemple remplacer le potentiel centrifuge par une expression semblable aux termes du potentiel contenu dans l'équation (l'approximation de Pekeris). Il est commode de prendre [46].

$$\frac{1}{r^2} \cong 4\alpha^2 \left[ C_0 + \frac{e^{-2\alpha r}}{(1-qe^{-2\alpha r})^2} \right] \quad (3.31)$$

Où  $C_0$  est une constante sans dimension. Donc l'équation (3.30) devient une équation du type Schrödinger. En substituant l'expression (3.31) dans l'équation (3.30), il vient:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \left[ E^2 - M^2 - 2(E + M)V_0 \left( \frac{1-e^{-2\alpha r}}{1-qe^{-2\alpha r}} \right)^2 - \lambda 4\alpha \left( C_0 + \frac{e^{-2\alpha r}}{(1-qe^{-2\alpha r})^2} \right) \right] R(r) = 0 \quad (3.32)$$

On peut écrire l'équation (3.32) comme l'équation de Schrödinger:



$$\left[ -\frac{d^2}{dr^2} + V_1 \frac{e^{-2ar}}{(1-qe^{-2ar})^2} + V_2 \left( \frac{1-e^{-2ar}}{1-qe^{-2ar}} \right)^2 \right] R(r) = E_0 R(r) \quad (3.33)$$

Avec :

$$\begin{cases} V_1 = 4\alpha^2 \lambda \\ V_2 = 2(E + M)V_0 \\ E_0 = E^2 - M^2 - 4\alpha^2 \lambda C_0 \end{cases}$$

### 3-3-6- Spectre d'énergie de l'équation de Klein-Gordon avec le potentiel de Titz-Wei [46]

Nous appliquerons la supersymétrie en mécanique quantique et nous utiliserons l'approche de l'invariance de forme avec le potentiel du type exponentiel à six paramètres (SPEP) pour déterminer le spectre d'énergie du système.

Comparer l'équation. (3.33) avec l'équation (1.14), on obtient:

$$V_-(r) = W^2(r) - \frac{dW(r)}{d(r)} = V_1 \frac{e^{-2ar}}{(1-qe^{-2ar})^2} + V_2 \left( \frac{1-e^{-2ar}}{1-qe^{-2ar}} \right)^2 - E_0 \quad (3.34)$$

L'équation (3.34) équivalente à une équation de Riccati non-linéaire si en utilisant la méthode de SUSY nous pouvons mettre les superpotentiel comme suite:

$$\begin{aligned} W(r) &= W(x - x_e) \\ &= -\left( Q_1 + \frac{Q_2}{e^{b(x-x_e)} - qe^{bx_e}} \right) \\ &= -\left( Q_1 + \frac{Q_2 e^{-b(x-x_e)}}{(1 - qe^{-b(x-2x_e)})} \right) \end{aligned}$$

Avec  $r = x - x_e$  et  $x_e$  est constante sans dimension.

Donc

$$W^2(x) - W'(x) = Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 + \left( \frac{e^{-b(x-x_e)}}{1-qe^{-b(x-2x_e)}} \right) + \frac{(Q_2 e^{-b(x-x_e)})^2 - b e^{-b(x-x_e)}}{(1-qe^{-b(x-2x_e)})^2} \quad (3.35)$$

En identifiant les deux équations (3.34) et (3.35) on obtient :

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{1}{qQ_2} (q(2V_2(q-1)e^{bx_e} + V_1e^{bx_e}) + (V_2(q-1)^2e^{2bx_e} + V_1e^{2bx_e}) - Q_2^2) \\ Q_2 = q \left[ -\frac{b}{2} \pm \left[ \frac{b^2}{4} + \frac{1}{q^2} (V_2(q-1)^2e^{2bx_e} + V_1e^{2bx_e}) \right]^{\frac{1}{2}} \right] \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{cases} V_+(x-x_e) = W^2(x) + \frac{dW(x)}{dr} = \left( Q_1 + \frac{Q_2e^{-b(x-x_e)}}{(1-qe^{-b(x-2x_e)})} \right)^2 + \frac{bQ_2e^{-b(x-x_e)}}{(1-qe^{-b(x-2x_e)})^2} \\ V_-(x-x_e) = W^2(x) - \frac{dW(x)}{dr} = \left( Q_1 + \frac{Q_2e^{-b(x-x_e)}}{(1-qe^{-b(x-2x_e)})} \right)^2 - \frac{bQ_2e^{-b(x-x_e)}}{(1-qe^{-b(x-2x_e)})^2} \end{cases}$$

Les potentiels  $V_+(x, a_1)$  et  $V_-(x, a_2)$  satisfont la condition de l'invariance de forme:

$$V_+(x, a_1) = V_-(x, a_2) + R(a_1)$$

Alors les niveaux d'énergie donné comme suit :

$$E_n = V_2 - \frac{(1-q^2)b^2}{16q} \left[ \frac{V_2}{\frac{b^2}{4} \left( 2n+1 + \frac{1}{q} \sqrt{q^2 + \frac{4(q-1)}{b^2} V_2 + \frac{4q}{b^2} V_1} \right)} + \left( 2n+1 + \frac{1}{q} \sqrt{q^2 + \frac{4(q-1)}{b^2} V_2 + \frac{4q}{b^2} V_1} \right) \right]^2 \quad (3.36)$$

Avec  $n = 0; 1; 2; 3; \dots$

En remplaçant l'équation (3.36) dans l'équation (3.33) on trouve :

$$E^2 + M^2 - 4\alpha^2 \lambda C_0 = 2(E+M)V_0 - \frac{(1-q^2)b^2}{16q} \times \left[ \frac{2(E+M)V_0}{\frac{b^2}{4} \left( 2n+1 + \frac{1}{q} \sqrt{q^2 + \frac{8(q-1)}{b^2} (E+M)V_0 + \frac{16q}{b^2} \alpha^2 \lambda} \right)} + \left( 2n+1 + \frac{1}{q} \sqrt{q^2 + \frac{8(q-1)}{b^2} (E+M)V_0 + \frac{16q}{b^2} \alpha^2 \lambda} \right) \right]^2 \quad (3.37)$$

si  $(q = 0,1)$ ,  $(C_0 = 1/12)$  et  $(l = 1)$  en remplaçant les conditions précédentes dans l'équation (3.37):

$$E^2 - M^2 - \frac{2}{3}\alpha^2 = 2(E + M)V_0 - 2.475\alpha^2 \times \left[ \frac{2(E+M)V_0}{-\alpha^2 \left( 2n+1+10\sqrt{0.18+\frac{1.98}{\alpha^2}(E+M)V_0} \right)} + \left( 2n + 1 + 10\sqrt{0.18 + \frac{1.98}{\alpha^2}(E + M)V_0} \right) \right]^2 \quad (3.38)$$

### 3-3-7- Les Fonctions d'onde

Par le changement

$$y = e^{-2ar} \quad (3.39)$$

On réduit (3.33) à (3.39) on obtient :

$$\left[ -y^2 \frac{d^2}{d^2y} - y \frac{d}{dy} + \frac{1}{(2\alpha)^2(1-xy)^2} [(V_1 - 2V_2)y + V_2y^2 - E_0(1 - xy)^2 + V_2] \right] R(y) = 0 \quad (3.40)$$

Posons ensuite :

$$R(y) = y^{\frac{\mu}{2}}(1 - xy)^{\frac{1+\vartheta}{2}}(1 - 2xy)F(y) \quad (3.41)$$

Avec

$$\mu = 2i \sqrt{\frac{E_0}{4\alpha^2}}$$

$$\vartheta = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4\alpha^2}(E^2 - M^2) + \frac{E_0}{4\alpha^2} + \frac{V_1}{4\alpha^2}q^2 + \frac{V_2}{4q\alpha^2V_0}}$$

Ou bien

$$\mu = 2i \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2}(E^2 - M^2) - l(l+1)C_0}$$

$$\vartheta = \sqrt{\frac{1}{4} - l(l+1)(C_0 + q^2) + \frac{1}{2q\alpha^2}(E + M)}$$

Après quelques calculs on trouve F(y) vérifié, donc la solution de l'équation (3.5) comme une fonction de Legendre  $P_n$  :

$$R(y) = N(e^{-2ar})^{\frac{\mu}{2}}(1 - qe^{-2ar})^{\frac{1+\vartheta}{2}}P_n^{(\mu+\vartheta)} \times (1 - 2qe^{-2ar}) \quad (3.41)$$

N constant de normalisation.

Alors la fonction d'onde totale  $\psi(r, \theta, \varphi)$  pour le potentiel *Titz – Wei* sous la forme :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = N(e^{-2ar})^{\frac{\mu}{2}}(1 - qe^{-2ar})^{\frac{1+\vartheta}{2}}P_n^{(\mu+\vartheta)} \times (1 - 2qe^{-2ar})Y_{i,m}(\theta, \varphi) \quad (3.42)$$

En mécanique quantique la fonction d'onde contient tous les informations de description d'un système quantique. C'est pour cela qu'elle est très important dans plusieurs branches de la physique théorique ainsi qu'en chimie quantique.

# Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons essayé de faire une étude simple de la mécanique quantique supersymétrique, cette étude a clairement démontré que la mathématique supersymétrique fait de gros ajouts à la solution de l'équation de Schrödinger, et donne vraiment des solutions aux problèmes physiques qui n'ont pas de solution analytique pour des cas traditionnels de solution de l'équation de Schrödinger.

La notion de supersymétrie constitue un cadre élégant pour la résolution de l'équation de Schrödinger à une dimension. Elle est une méthode systématique de factorisation de l'hamiltonien par l'introduction d'opérateurs échelles. Ce formalisme repose entièrement sur la définition d'un superpotentiel. Des généralisations en dimension ont déjà été données ; ainsi qu'une extension aux solutions des équations relativistes Klein-Gordon et de Dirac.

Dans le domaine de la physique des particules élémentaires ; de charge  $\widehat{Q}$  et  $\widehat{Q}^+$  transforment un boson en un fermion de même énergie donc de même masse et inversement. Si la supersymétrie est une symétrie de la nature ; à toute particule doit donc correspondre un superpartenaire de même masse et dont le spin diffère de  $\frac{\hbar}{2}$ .

La perspective d'une pléthore de nouvelles particules à découvrir et l'enthousiasme des spécialistes de SUSY a conduit un moment à voir dans le neutrino le super partenaire du photon. Malheureusement, il n'existe qu'un seul photon et trois types de neutrino ; aussi ; à l'heure actuelle ; aucun superpartenaire n'a été identifié. Qu'à cela ne tienne il suffit de supposer que les super particules sont excessivement instables et qu'il n'en reste plus de nos jours ; ou encore la SUSY est ; brisée ; c'est-à-dire que le superpartenaire ont des masses différentes des particules initiales et qu'elles peuvent ainsi s'avérer si lourdes qu'elles s'échappent aux possibilités des accélérateurs de particules actuels.

En tout état de cause ; même si la supersymétrie n'est qu'une construction de l'esprit ; si elle n'existe pas dans la nature ; c'est tout de même une idée meilleure et séduisantes

De nombreux ouvrages ayant trait à la supersymétrie sont disponibles mais, dans ces derniers, les calculs sous-jacents, souvent techniquement longs et compliqués, ne sont jamais effectués en détail.

# Bibliographie

- [1] A. Messiah, Mécanique Quantique T2, Dunod, Paris (1960)
- [2] C.C. Tannoudji, B. Diu and F. Laloe, Mécanique Quantique T1, Hermann, Paris(1988). [3] M. Paty, La physique du XXe siècle. EDP science. September (2003).
- [4] E. Schrödinger. Further studies on solving eigenvalue problems by factorization,proc. R. Irish Acad, A 47, 53-54 (1941).
- [5] H.A. Bethe and E.E. Salpeter, Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms, Springer-Verlag, Berlin.Göttingen.Heidelberg (1957).
- [6] P. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, 3rd ed. Oxford : ClarendonPress(1947). [7] L. Infeld and T.E. Hull. The factorization methode, Rev. mod. 23. 21-68. (1951).
- [8] A. Neveu and J. Schwarz, Factorizable dual model of pions, Nucl. Phys. B 31 86 (1971). [9] P. Ramond, Dual theory for free fermions, Phys. Rev. D 3, 2415 (1971)
- [10] E. Witten, Dynamicalbreaking of symmetry, Nucl. Phys. B 188, 513 (1981).
- [11] D. Lancaster, Supersymmetry breakdown in supersymmetric quantum mechanics,NuovoCimento A 79, 28 (1984).
- [12] Advanced Series on Directions in High EnergyPhysics Vol. 21, Perspectives on Supersymmetry II, Editor Gordon L Kane (2010).
- [13] L. Gendenshtein, Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by mean of symmetry, JETP. lett.38, 356 (1983).
- [14] F. Cooper, B. Freedman, Aspects of symmetric quantum mechanics, Ann. Phys (NY) 146, 262 (1983).
- [15] L. Gendenshtein, I.V. Krive, Supersymmetry in quantum mechanics, Sov. Phys.Usp. 28, 654 (1985).
- [16] G. Stedman, Simple supersymmetry : factorisation methode in quantum mechanics,Euro. Jour. Phys. 6, 163 (1985).50

- [17] C.V. Sukmar, Supersymmetry, factorisation of the Schrödinger equation and a hamiltonian hierarchy, J. Phys. A 18, L57 (1985).
- [18] R. Hamaker and A.R. P. Rau, Supersymmetry in quantum mechanics, Am. Jour.Phys. 54, 928 (1986).
- [19] R. Dutt, A. Khare and U. Sukatme, Supersymmetry, shape invariance and exactly solvable potentials, Am. Jour. Phys. 56, 163 (1988).
- [20] A. Lahiri, P. Roy and B. Bagchi, Supersymmetry in quantum mechanics, Int. Jour.Mod. Phys. A 5, 1383 (1990).
- [21] O. L de Lange and R.E. Raab, Operator methods in quantum mechanics, Oxford University Press (1991).
- [22] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, Supersymmetry in quantum mechanics, Phy.Rep. 251, 267 (1995); Supersymmetry in quantum mechanics, World Scientific Publishings (2001).
- [23] A. Gangopadhyaya, J.V. Mallow, C. Rasinariu, Supersymmetric Quantum Mechanics : An Introduction, World Scientific Publishings (2011).
- [24] E.Witten, "Dynamical breaking of supersymmetry", J. Nucl. Phys. B 188(1981) 513.
- [25] L. Gendenshtein, "Derivation of exact spectra of the Schrödinger equation by mean of symmetry", JETP. lett. 38 (1983) 356.
- [26] Meriem Debab et Rimane Haffas .Initiation à la Supersymétrie.Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de master en physique, (2019).
- [27] Feryal Sadi et Imane Achi. Détermination des états liés et des énergies au moyen de la Mécanique Quantique SuperSymétrique. Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de master en physique, (2020).
- [28] Florent CHEVALLIER . Mesure de la section efficace de production de quarks top en paires dans le canal lepton+jets à  $D\theta$  et à ATLAS et interprétation en terme de boson de Higgs chargé dans ATLAS.Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de doctorat en physique, (2007).

- [29] L. Susskind, "Dynamics of spontaneous symmetry breaking in the Weinberg-Salam theory", *Phys. Rev D* 20, 2619 (1979).
- [30] S. Coleman, J. Mandula, All possible symmetries of the S-matrix, *Phys. Rev.* 159 (1967) 1251-1256.
- [31] R. Haag, J. T. Lopuszanski, and M. Sohnius, "All Possible Generators of Supersymmetries of the S Matrix", *Nucl. Phys. B* 88 (1975) 257
- [32] J. Wess and J. Bagger, "Supersymmetry and supergravity", Princeton, USA : Univ. Pr. (1992) 259 p
- [33] D. Baye. *Physique quantique et statistique*. Presses Universitaires de Bruxelles, 2003.
- [34] Y. Ayant and E. Belorizky, *Cours de mécanique quantique*, Edition Dunod (1980).
- [35] L. Landau and E. Lifchitz, *Mécanique quantique*, Edition Mir (1967).
- [36] H. Goldstein, *Classical mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company (1980).
- [37] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics, Volume 1, Chap. VI*, Wiley Classics Library (1989).
- [38] Ming-Tang Lee and Hsiang-Nan Li "Supersymmetric Quantum Mechanics with Spin-Orbit Couplings" The physical society of the republic of China, Univ of Chung-Cheng. 1996.
- [39] H. Yamagishi, *Phys. Rev. D* 29, 2975 (1984); I. Tamm, *Z. Phys.* 71, 141 (1931); T. T. Wu et C. N. Yang, *Nucl. Phys. B* 107, 365 (1976).
- [40] N. Bensalah. "Les états liés et de diffusions et l introduction du Superpotentiel" Thèse de Doctorat. Biskra, Algérie (2013).
- [41] M-Elise. Ernould. " La supersymétrie en mécanique quantique" projet de phys mathématique, 2005.
- [42] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, *Supersymmetry and Quantum Mechanics*, LAUR- 94-569. (2004).
- [43] U. Amaldi et al, *Phys Lett B* 260 (1991) 447
- [44] M Drees and S.P.. Martin, MADPH-95-S79 ou UM-TH-95-02 Implications of SUSY model building



[45] Abdelkrim BOUCHAM. Recherche de neutralinos avec le détecteur L3 au LEP et réalisation d'un calorimètre plomb - fibres scintillantes pour améliorer son herméticité électromagnétique .Thèse de Doctorat.l'université paris 6 ,France (1996).

[46] Bouchlaleg Ibtissem .Résolution de l'équation de Klein-Gordon pour des potentiels de forme exponentielle par la méthode de supersymétrie. .Thèse présentée pour l'obtention du diplôme de master en physique, (2017).