



Université Mohamed Khider de Biskra  
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie  
Département des Sciences de la Matière

# MÉMOIRE DE MASTER

Domaine des sciences de la matière  
Filière de physique  
Spécialité énergétique et énergie renouvelable

Réf. : Entrez la référence du document

---

Présenté et soutenu par :

**Noui Zineb Iman**

Le : 24/06/2021

## L'instabilité thermique dans un espace sphérique : Convection Mantellique

---

### Jury :

|                |       |                              |            |
|----------------|-------|------------------------------|------------|
| Heddar Mebarek | M.C.A | Université Med Khider-Biskra | Président  |
| Guergueb Saida | M.A.A | Université Med Khider-Biskra | Rapporteur |
| Mehamdi Farhet | Prof  | Université Med Khider-Biskra | Examineur  |

Année universitaire : 2020/2021

# Remerciement

A l'issue de ce modeste travail, nous tenons à remercier tout d'abord notre bon DIEU tout puissant, de m'avoir procuré patience et volonté.

La présentation de ce modeste travail m'offre l'occasion d'exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à mon encadreur Mme Guergueb Saida pour avoir bien voulu diriger ce travail et pour ses précieux conseils.

Enfin, je remercie mes parents et mon frère pour m'avoir facilité la vie et dont tout ce dans j'avais besoin pour réussir dans mes études.

# Didicace

Je dédie ce travail:

À ma mère et mon père, qui m'ont soutenu, et encouragé, durant toute ma vie.

À mes frères.

Brahim, Abdellah, Khadîdja

À ma tante Asma

À toutes mes amies.

Hadjer et Dalila

À mes cousines.

Mariem, Hanane, Yasmine, Nihel.

À mes professeurs.

À toutes les personnes que j'aime.

# SOMMAIRE

|   |           |
|---|-----------|
| <b>SOMMAIRE</b>   | <b>1</b>  |
| <b>INTRODUCTION GENERALE</b>  | <b>4</b>  |
| <b>Chapitre I : CONCEPTS DE BASE ET REVUE<br/>BIBLIOGRAPHIQUE</b>                                     | <b>6</b>  |
| <b>INTRODUCTION</b>   | <b>7</b>  |
| <b>I.1. CONCEPTS DE BASE</b>  | <b>7</b>  |
| I.1.1. La physique de la convection   | <b>7</b>  |
| I.1.2. La convection naturelle dans le manteau<br>terrestre   | <b>8</b>  |
| I.1.3 . Mise en évidence d'une source de chaleur interne  | <b>10</b> |
| I.1.4 . Origine de chaleur interne  | <b>10</b> |
| I.1.4 .1. La chaleur initiale ou la chaleur<br>d'accrétion  | <b>10</b> |
| I.1.4 .2. La désintégration des isotopes radioactifs  | <b>10</b> |
| I.1.4 .3. Autres sources de chaleur   | <b>10</b> |
| <b>I.2 . REVUE BIBLIOGRAPHIQUE</b>  | <b>14</b> |
| I.2.1. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DE LA<br>CONVECTION NATURELLE EN MILIEU<br>SPHERIQUE DANS UN LABORATOIRE | <b>15</b> |
| I.2.2. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA<br>CONVECTION NATURELLE EN GEOPHYSIQUE<br>ET ASTROPHYSIQUE        | <b>17</b> |
| <b>CHAPITRE II : NOTIONS FONDAMENTALES DE<br/>MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE<br/>CHALEUR</b>  | <b>19</b> |
| <b>INTRODUCTION</b>   | <b>20</b> |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>II.1. MODES DE TRANSFERT DE CHALEUR</b>  | <b>21</b> |
| II.1.1. La conduction   | <b>21</b> |
| II.1.2. Le rayonnement  | <b>22</b> |
| II.1.3. La Convection   | <b>22</b> |
| II.1.4. La convection naturelle   | <b>23</b> |
| <b>II.2. GRANDEURS SANS DIMENSIONS</b>  | <b>24</b> |
| <b>II.3. LES EQUATIONS DE BASE DE LA MECANIQUE DU FLUIDE ET TRANSFERT DE CHALEUR:</b> | <b>27</b> |
| II.3.1.L'équation de conservation de la masse:  | <b>27</b> |
| II.3.2.Equation de conservation de la quantité de mouvement                           | <b>28</b> |
| II .3.3. Equation de conservation de l'énergie  | <b>32</b> |
| <b>II.4. L'APPROXIMATION DE BOUSSINESQ</b>  | <b>34</b> |
| <b>CHAPITRE III: INSTABILITE THERMIQUE</b>  | <b>36</b> |
| <b>III.1.NOTIONS PRELIMINAIRES SUR LA THEORIE DE PERTURBATIONS</b>                    | <b>37</b> |
| <b>III.2. DEFINITION DU PROBLEME PHYSIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE</b>              | <b>38</b> |
| <b>III.3. MODELISATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME DE LA CONVECTION NATURELLE</b>        | <b>38</b> |
| III.3.1 Formulation mathématique de l'écoulement de basse                             | <b>38</b> |
| III.3.2 Les équations régissant l'écoulement perturbé                                 | <b>40</b> |

|   |           |
|---|-----------|
| III.3.3 Analyse de l'instabilité thermique d'un fluide dans une sphère: | <b>41</b> |
| III.3.3.1 Les conditions aux limites du problème considéré              | <b>45</b> |
| <b>III.4. ANALYSE DES PERTURBATIONS EN MODES NORMAUX</b>                | <b>46</b> |
| <b>III.5. PRINCIPE D'ECHANGE DE STABILITE</b>                           | <b>48</b> |
| <b>CHAPITRE IV: DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUES</b>                 | <b>52</b> |
| <b>INTRODUCTION</b>   | <b>53</b> |
| <b>IV.1. DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUE DE RAYLEIGH</b>             | <b>53</b> |
| <b>CONCLUSION</b>   | <b>62</b> |
| <b>BIBLIOGRAPHIE</b>  | <b>64</b> |
| <b>RESUME</b>   | <b>67</b> |

## INTRODUCTION GENERALE

Le phénomène de la convection naturelle dans un milieu sphérique a suscité l'intérêt d'innombrables chercheurs vu les applications diverses des méthodes mathématiques approfondies notamment la méthode spectrale ainsi que d'autres méthodes numériques.

Les recherches approfondies ont abouti à de remarquables résultats dans de nombreux domaines tels que la géophysique.

La convection mantellique est un domaine de recherche dont les travaux laborieux de certains chercheurs ne cessent de nous éblouir.

Les recherches théoriques sont là pour élucider les mystères des mouvements dans notre manteau terrestre et surtout les mouvements des plaques tectoniques, de subduction, des séismes, C'est un domaine fertile !

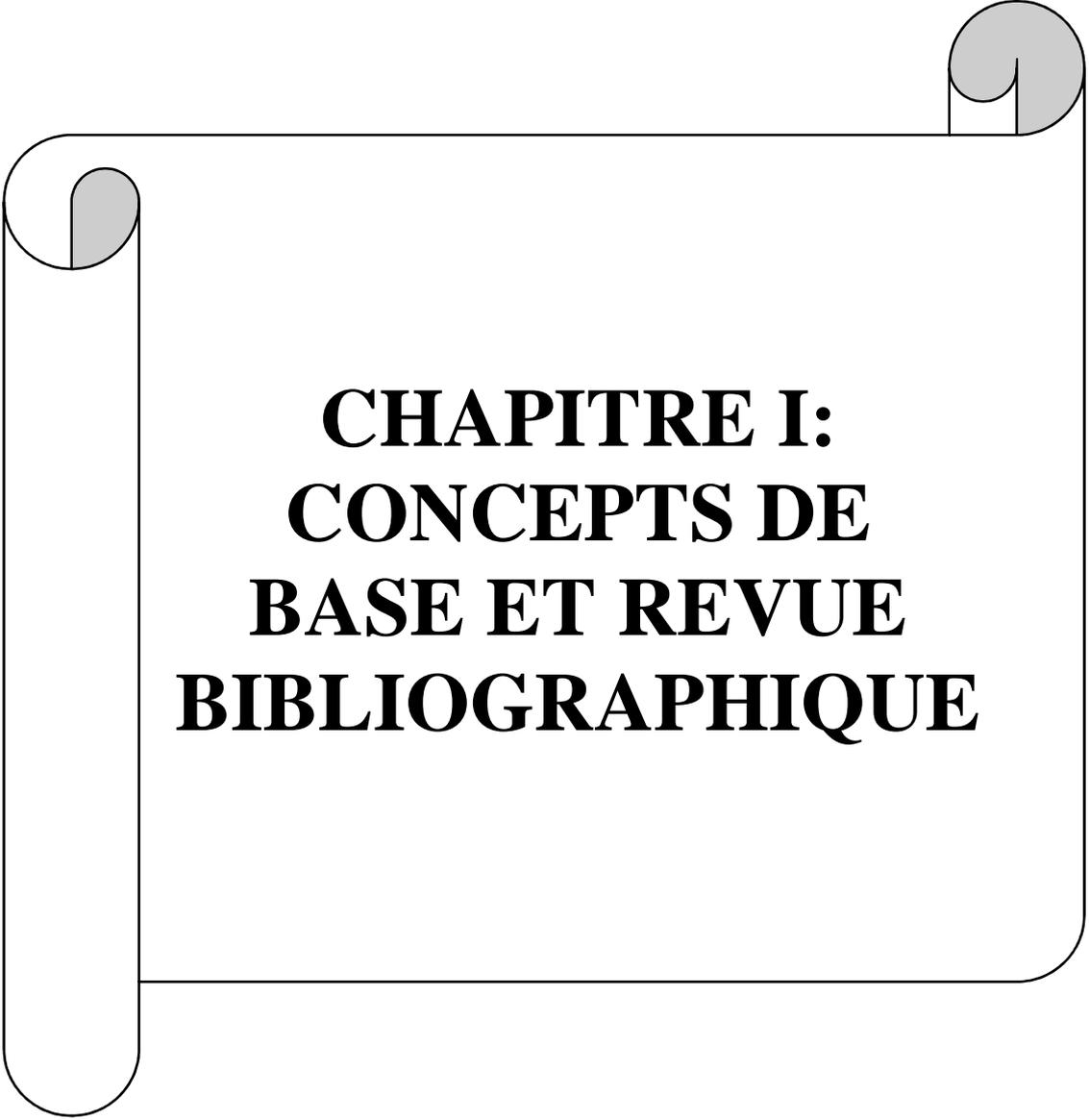
Ce mémoire n'est qu'une infime introduction à la théorie de la convection naturelle dans un fluide confiné dans une sphère. A tout Seigneur, tout honneur! C'est grâce aux travaux glorieux de l'éminent savant Chandrasekhar (prix Nobel 1961) que des études analytiques, expérimentales et numériques ont abouti à la détermination de l'écoulement dans une géométrie sphérique.

Dans ce présent travail, on introduit dans le premier chapitre un aperçu sur la convection mantellique et quelques notions simples de géophysique. Une revue bibliographique sur les travaux déjà publiés sur la stabilité de la convection naturelle en géophysique, et notamment une recherche bibliographique sur le modèle de la convection dans un laboratoire, dans un milieu sphérique sont présentées par la suite.

On aborde dans le deuxième chapitre des notions fondamentales d'hydrodynamique, et de transfert de chaleur qui sont importantes dans la compression de notre étude théorique.

Une étude analytique est consacrée dans le troisième chapitre à la théorie des perturbations infinitésimales, appliqué pour le modèle de la convection naturelle et particulièrement dans le manteau terrestre. Par une analyse du problème de la stabilité linéaire de la convection naturelle dans un fluide confiné dans une sphère, on établit le principe d'échange de stabilité. On démontre il Ya instabilité thermique.

Dans le quatrième chapitre, on procède au calcul des valeurs critiques de Rayleigh par la résolution du problème aux valeurs propres dans une sphère. Le but principal est de déterminer ces valeurs critiques où se manifeste l'instabilité thermique. On rappelle que notre système est soumis à un champ gravitationnel radial comme dans le phénomène de la convection dans le manteau terrestre. Il est intéressant de mettre en évidence l'influence des conditions aux limites sur les valeurs critiques de Rayleigh.



**CHAPITRE I:  
CONCEPTS DE  
BASE ET REVUE  
BIBLIOGRAPHIQUE**

## **INTRODUCTION :**

Dans le but de situer notre travail, nous présentons dans ce chapitre des concepts sur la physique de la convection et les travaux antérieurs en relation avec notre thème d'étude.

## **I.1 CONCEPTS DE BASE:**

### **I.1.1 La physique de la convection :**

Dans un corps opaque supposé non déformable, la chaleur se transmet par conduction. Les atomes des zones chaudes vibrent plus que les atomes des zones froides. Ces vibrations se transmettent de proche en proche des parties chaudes vers les froides ; il n'y a pas de mouvement macroscopique de matière. C'est ce qui se passe quand on pose une brique froide sur une plaque chauffante. Mais que se passe-t-il dans un corps déformable, l'eau d'une casserole par exemple ? Un corps se dilate quand sa température augmente et sa masse volumique devient plus faible. Si un corps est refroidi par le bas et chauffé par le haut (casserole d'eau chaude posée sur un tapis de glace), les zones denses seront en bas, les régions peu denses en haut. C'est une situation stable, qui n'engendrera aucun mouvement. Si par contre un corps est chauffé par le bas et refroidi par le haut (casserole d'eau froide posée sur une plaque chauffante), les zones denses seront en haut, et les légères en bas. Alors la matière froide du haut aura tendance à descendre et la matière chaude et un peu moins dense du bas aura tendance à monter. C'est la convection thermique [1].

Dans un système refroidi par le haut et chauffé par le bas, il peut donc y avoir convection (la casserole d'eau froide posée sur une plaque chauffante), ou simplement conduction (la brique froide posée sur le feu). Quels paramètres commandent un mode de transfert de la chaleur plutôt qu'un autre ? Ce problème a été formalisé par Lord Rayleigh en 1916. Le moteur de la convection thermique est la poussée d'Archimède, due à la différence de masse volumique  $\Delta\rho$  entre deux zones d'un même système. Le  $\Delta\rho$  d'un système dépend de l'écart de température  $\Delta T$  et du coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ . La poussée d'Archimède dépend de l'accélération de la pesanteur  $g$  et de  $\Delta\rho$  ; elle dépend en fait du produit  $\Delta T.\alpha.g$ . Deux paramètres physiques vont s'opposer à la convection thermique : la viscosité cinématique  $\nu$  qui s'oppose aux mouvements, et la diffusivité thermique  $\kappa$  qui limite les écarts de température. Plus un corps est visqueux, moins il se déformera. Et plus un corps a une diffusivité thermique élevée, moins il

## CHAPITRE I: CONCEPTS DE BASE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

pourra s'établir de gradients de température et de masse volumique importante car la diffusion de chaleur par conduction limitera les écarts de température. On peut aussi montrer que la hauteur  $h$  d'un système favorise la convection : plus un système est mince, mieux la chaleur s'évacue par conduction ; plus il est épais, plus les mouvements de convection « ont de la place » pour s'établir. Rayleigh a montré que la « convertibilité » d'un système dépend de ces 6 facteurs :  $\alpha$ ,  $\Delta T$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $k$  et  $\nu$ . Il a montré qu'elle dépendait du rapport  $Ra = \alpha \cdot \Delta T \cdot g \cdot h^3 / k \cdot \nu$ . Ce rapport est appelé depuis **nombre de Rayleigh** ( $Ra$ ). Si ce nombre de Rayleigh est inférieur à une valeur critique voisine de  $10^3$ , il n'y a pas de convection thermique mais seulement de la conduction ; si ce nombre est supérieur à cette valeur critique, il y a convection [1].

### I.1.2 La convection naturelle dans le manteau terrestre :

Même à l'échelle planétaire la convection naturelle est fort présente dans plusieurs phénomènes comme par exemple les cellules de Hadley qui représentent l'effet de la convection naturelle dans l'atmosphère représenté sur la figure [2] .

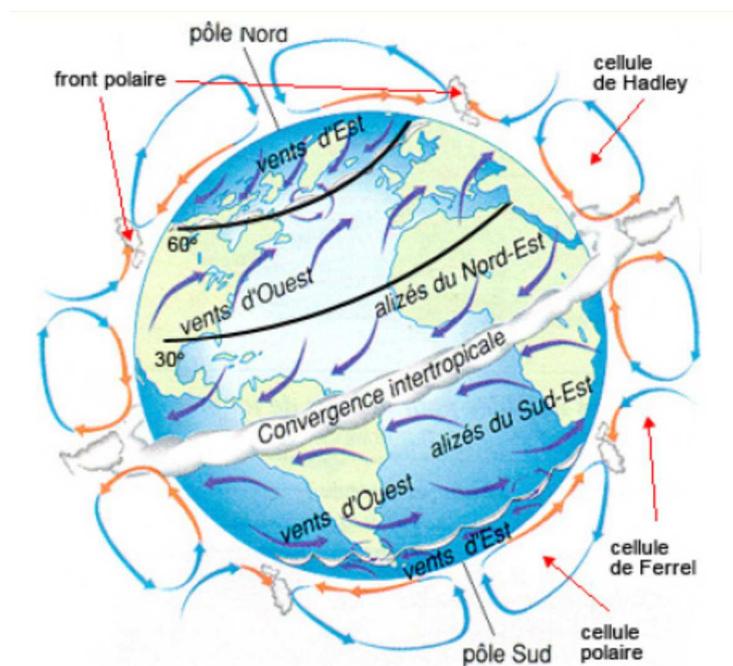


Figure (I.4): La circulation atmosphérique.

## ***CHAPITRE I: CONCEPTS DE BASE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE***

---

La convection du manteau est un phénomène physique qui se produit à l'intérieur de la terre. Il peut avoir lieu également sur d'autres planètes comme le soleil. La convection mantellique est une composante essentielle de la théorie de la tectonique des plaques responsable des éruptions des volcans.

Les plaques tectoniques ont la capacité de se déplacer car la lithosphère terrestre est plus forte que l'asthénosphère sur laquelle elle se trouve, et la densité du manteau change en raison des courants convectifs. C'est un élément essentiel dans la théorie des plaques tectoniques responsables des éruptions volcaniques, ainsi que du mouvement des océans et des fonds marins, ainsi que des marées et marées.

Géologiquement, les couches externes de la Terre sont divisées en lithosphère et asthénosphère, selon les changements de propriétés mécaniques et le mode de transfert de chaleur. Mécaniquement, la lithosphère est plus froide et plus solide, tandis que l'asthénosphère est plus chaude et plus facile à déplacer. En termes de transfert de chaleur, la lithosphère perd de la chaleur par conduction thermique, tandis que l'asthénosphère transfère de la chaleur par des courants de convection à un gradient thermique à peu près constant. Cette division diffère de la stratigraphie chimique qui divise la Terre en manteau et en croûte.

Le principe de base de la théorie de la tectonique des plaques est que la lithosphère est divisée en plaques tectoniques séparées et distinctes, au-dessus de l'asthénosphère, qui apparaît comme si elle était liquide (une couche solide à viscoélasticité). Le mouvement annuel de la plaque varie de 10 à 40 mm/an (comme dans la dorsale médio-atlantique, qui se déplace à la vitesse de croissance des ongles), à environ 160 mm/an (comme dans la plaque de Nazca, qui se déplace à la vitesse de croissance des cheveux) croissance.

Les scientifiques pensent que les courants de convection rotationnelle sont à l'origine des forces dont dépend la théorie de la tectonique des plaques, ce qui explique le mouvement et la croissance des continents et la formation des montagnes et des bassins de sédimentation. Les plaques océaniques, qui sont relativement exemptes d'activité tectonique, car elles sont situées au-dessus de points chauds dans les régions supérieures du noyau terrestre, et la chaleur montante travaille à partir de ce point et ainsi la matière en fusion se précipite à la surface formant des îles volcaniques telles que les îles hawaïennes, situées au milieu de l'océan Pacifique.

## ***CHAPITRE I: CONCEPTS DE BASE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE***

---

### **I.1.3 Mise en évidence d'une source de chaleur interne:**

Dans les mines de charbon, on constate que la température augmente d'environ 1°C lorsque l'on descend de 30 m, soit environ 30°C pour une descente de 1 Km dans la croûte continentale. Cela définit le gradient géothermique.

La valeur de ce gradient géothermique est variable selon les régions, mais atteste de la perte de chaleur par le globe [3].

### **I.1.4 Origine de chaleur interne:**

Plusieurs sources de chaleur sont à l'origine de l'énergie interne du globe.

#### **I.1.4.1 La chaleur initiale ou la chaleur d'accrétion:**

Cette source de chaleur est liée à la constitution même de notre planète, il y a 4,5 milliards. Pendant les premières dizaines ou centaines de millions d'années, la terre est bombardée par des astéroïdes colossaux dont la taille peut atteindre dans certains cas, une fraction de celle de la lune, si ce n'est la taille de la lune. La chaleur dégagée par les impacts est phénoménale et peut entraîner la fusion des matériaux.

Au fur et à mesure que la terre grossit, cette chaleur n'a plus la possibilité d'être évacuée et s'accumule.

#### **I.1.4.2 La désintégration des isotopes radioactifs:**

L'essentiel de la chaleur interne est lié à la présence d'éléments radioactifs dans les matériaux constitutifs de la terre. Ces matériaux présents dès la formation du globe se désintègrent par radioactivité, mécanisme s'accompagnant d'une libération importante de chaleur.

L'étude de la composition chimique du globe permet d'accéder aux types d'éléments radioactifs présents ainsi qu'à leur localisation. Les isotopes participant le plus au dégagement de chaleur sont l'uranium 238 ( $U^{238}$ ), le thorium 232 ( $Th^{232}$ ) et le potassium 40 ( $K^{40}$ ).

Chaque isotope se désintègre à son propre rythme caractérisé par sa période ou demi-vie, définie comme le temps nécessaire à la disparition de la moitié des éléments radioactifs. Ces éléments se sont essentiellement répartis dans les couches superficielles du globe, croûte continentale notamment et manteau. De par son volume, le manteau constitue la plus grande source d'éléments radioactifs, bien que leur concentration y soit inférieure à celle de la croûte [3].

#### **I.1.4.3 Autres sources de chaleur:**

Dans les autres sources de qui libère de l'énergie, citons :

## CHAPITRE I: CONCEPTS DE BASE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

- **Les mouvements différentiels:** les enveloppes sous l'effet de la rotation de la Terre et de l'attraction lunaire entre en mouvements libérant ainsi de la chaleur (les retards engendrés par les mouvements des différentes couches les unes par rapport aux autres)
- **Les impacts de météorites:**(plusieurs milliers de tonnes par an provoquent un échauffement de la partie superficielle du globe).
- **Les processus tectoniques et les séismes:** engendrés par l'énergie interne, participent au réchauffement de la partie superficielle du globe.

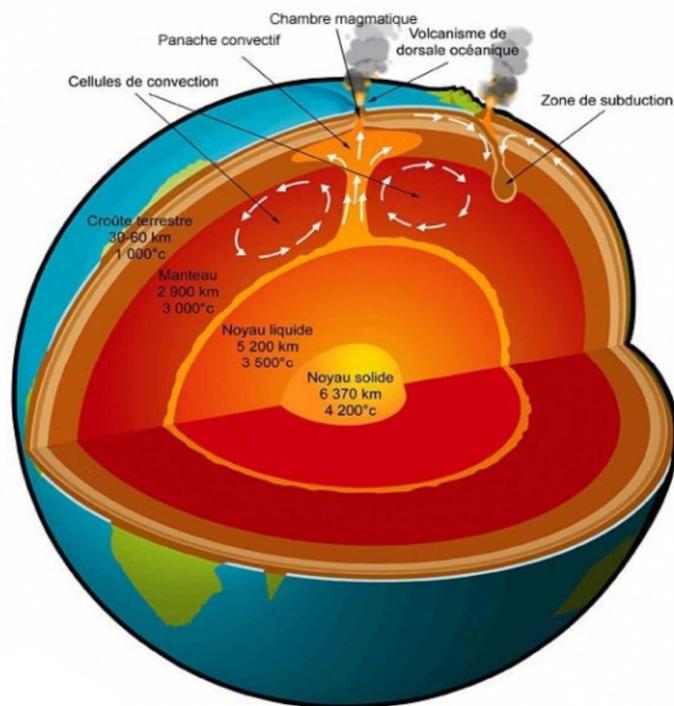
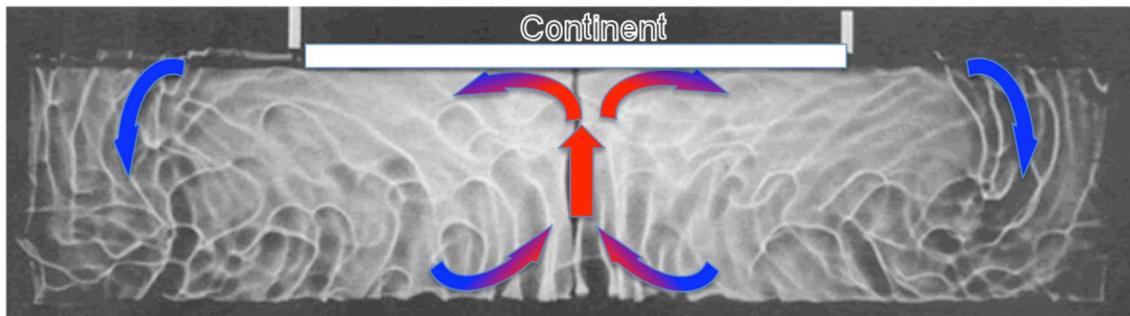


Figure (I.5): La convection du manteau de la terre.

## CHAPITRE I: CONCEPTS DE BASE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE



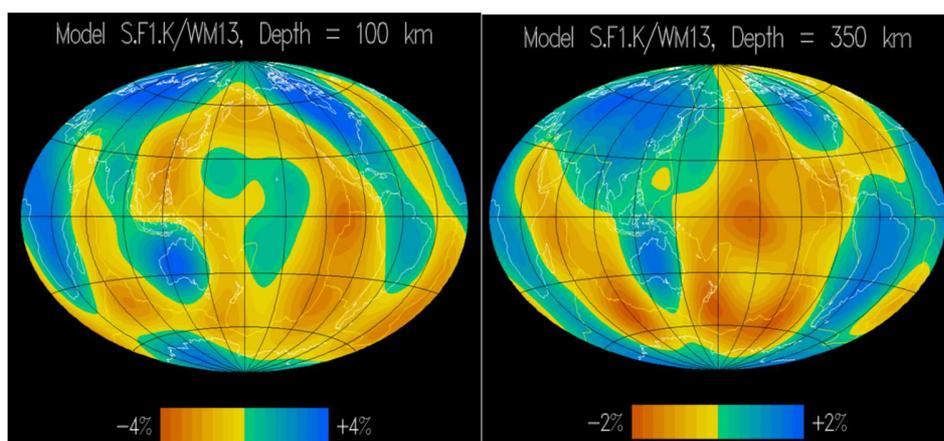
**Figure (I.6):** Expérience analogique de convection avec continent (plaque de plastique entre les marques blanches) à  $Rayleigh=2 \times 10^7$

Le globe terrestre est caractérisé par :

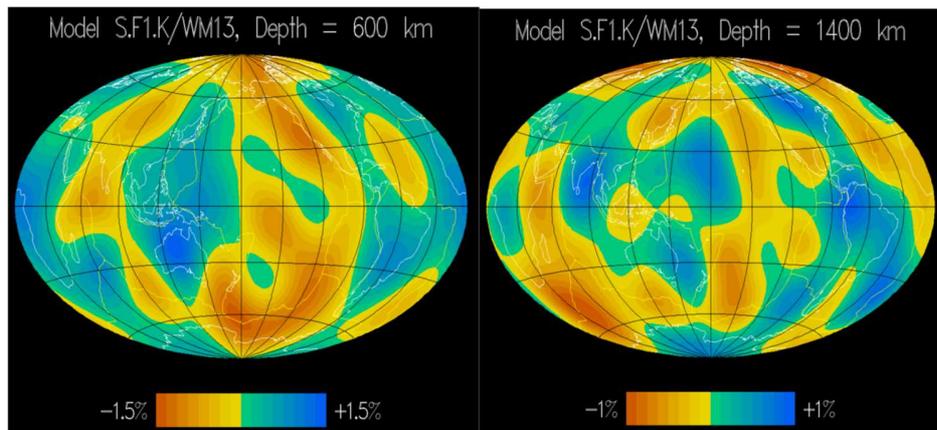
- Une production de chaleur au centre
- Un gradient géothermique qui se traduit en semi-profondeur par un gradient de densité inverse ( $d=3,30$  en moyenne dans le manteau lithosphérique  $d= 3,25$  pour la manteau asthénosphérique)
- La montée de matériel chaud, profond aux dorsales océaniques
- L'enfoncement de matériel froid, superficiel aux fosses océaniques
- Une translation de matière entre les dorsales et les fosses
- Une lithosphère océanique de plus en plus épaisse des dorsales aux fosses.

Le globe terrestre est identique au modèle physique, il est animé de mouvements de convections.

Une étude de tomographie sismique confirme l'existence de tels mécanismes à l'intérieur du manteau :



## CHAPITRE I: CONCEPTS DE BASE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

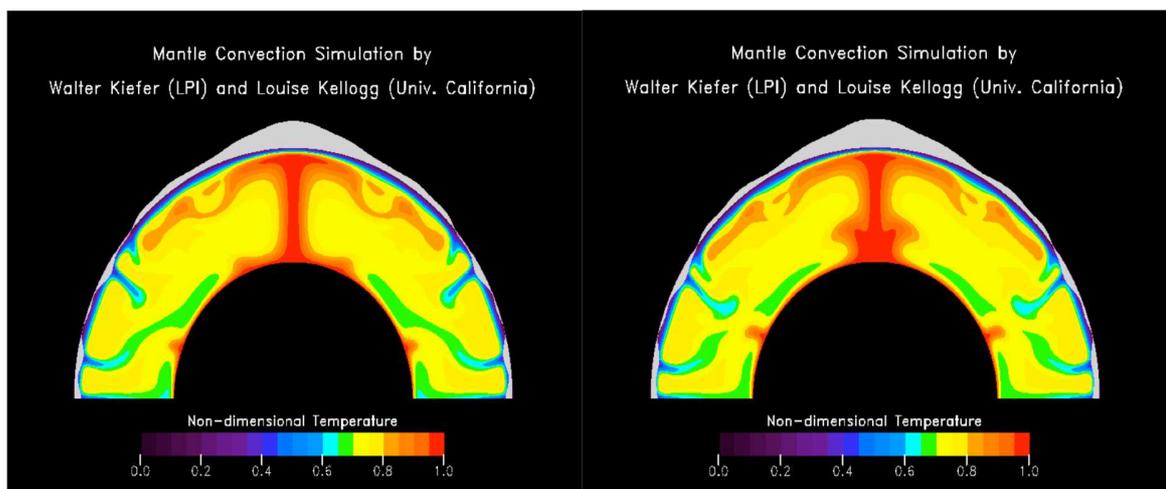


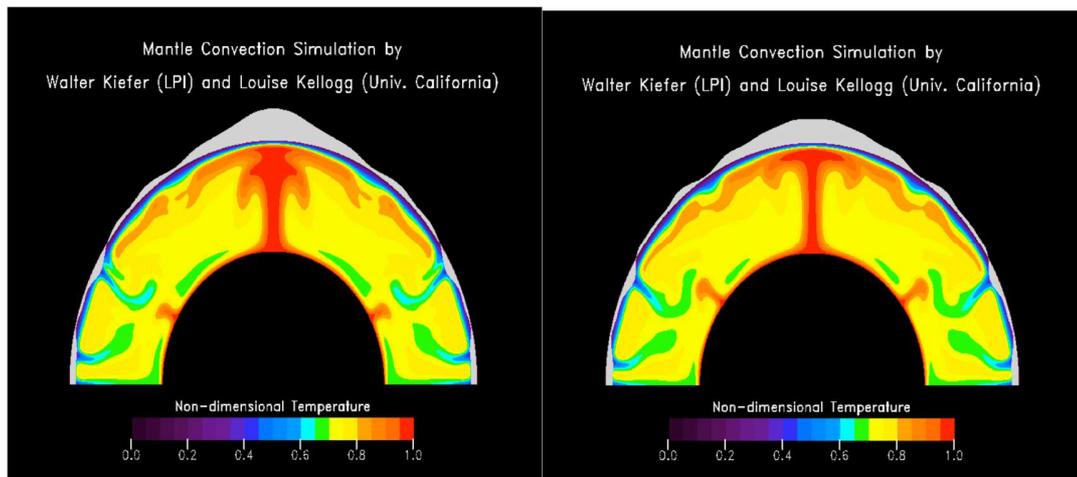
**Figure (I.7):** les zones chaudes par rapport au profondeur

La tomographie sismique verticale permet démettre en évidence :

- Des zones où la vitesse des ondes est inférieure à la vitesse du modèle. Ce sont des zones chaudes, où la matière ascensionnelle.
- Des zones où la vitesse des ondes est plus rapide par rapport au modèle. Ce sont des zones froides de descente de matière.

Les modèles de simulations numériques viennent confirmer ces mouvements de matières.





**Figure (I.8):** Les modèles de simulations numériques.

Des incertitudes demeurent en ce qui concerne la dynamique de ces cellules à l'intérieur du manteau.

Les modèles récents de tomographie sismiques profonde présentent une convection à deux étages, l'une située dans l'asthénosphère, l'autre dans le manteau inférieur, avec de manière intermittente, le franchissement de cette frontière.

Les conséquences de cette activité interne se manifestent en surface par :

- La fabrication de lithosphère au niveau des remontées de matière dans les zones d'accrétion océanique.
- La disparition de plaques lithosphériques couplées aux zones de descente de matière
- Le couplage entre le mouvement des plaques et les mouvements du manteau sous-jacent.

Le déplacement des plaques lithosphériques en surface est une manifestation des déplacements de matières dans le manteau. Les mesures des déplacements absolus des plaques montrent que les vitesses maximales sont atteintes par les plaques ayant une zone de subduction.

La traction exercée par ce matériel froid, plus dense, serait la force motrice principale des cellules de convection [3].

## I.2 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

### I.2.1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DE LA CONVECTION

#### NATURELLE EN MILIEU SPHERIQUE DANS UN LABORATOIRE:

## **CHAPITRE I: CONCEPTS DE BASE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE**

---

Des études expérimentales et numériques ont déterminé les modèles d'écoulement et les caractéristiques du transfert de chaleur, pour des rapports donnés de rayons, de nombre de Prandtl et de Rayleigh. **Bishop et al.** [4] ont réalisé une expérimentation première de la convection naturelle dans un fluide confiné entre deux sphères concentriques isothermes. Ils ont rapporté des écoulements permanents d'air ayant des structures cellulaires sous forme de croissant ou d'haricot.

En poursuivant cette recherche expérimentale, **Scalan et al.** [5] ont étudié l'influence du nombre Pr (Pr variant de 4.7 à 4148), de  $\Delta T$  (Différence de température entre les deux sphères), de l'épaisseur de l'espace sphérique ( $\eta = \frac{r_o}{r_i}$ : rapport des rayons extérieur et intérieur), allant de 1.09 à 2.81. Les auteurs se sont préoccupés seulement des caractéristiques du transfert de chaleur. Pour plus d'information sur l'écoulement, **Scalan et al.** [6] complètent les premières études expérimentales, en essayant de visualiser l'écoulement laminaire de l'eau et l'air. Le rapport ( $\frac{r_o}{r_i}$ ) allant de 1.09 à 2.17, les structures de l'écoulement sont photographiées pour les valeurs de Rayleigh variant de  $1.4 \cdot 10^3$  à  $10^7$ . Les divers types de figures d'écoulement stationnaires, formes de croissant ou d'haricot, pour l'air et pour  $\frac{r_o}{r_i} = 1.78$ , l'écoulement permanent reste non perturbé jusqu'à une valeur critique de Grashof égale à  $2.46 \cdot 10^5$  où l'écoulement devient instable et transitoire.

Des efforts considérables ont été fournis pour approcher numériquement le problème de la convection naturelle dans une géométrie sphérique. Des modèles numériques ont été élaborés dans ce but.

**Caltagirone et al.** [7] ont simulé par la méthode des différences finies le problème de la convection naturelle dans un fluide confiné entre deux sphères isothermes où une différence de température  $\Delta T$  est maintenue. Le fluide répond au modèle de Boussinesq et est soumis à la force gravitationnelle verticale. Les auteurs présentent leurs résultats en termes de fonction de courant et distribution de température pour des valeurs de Ra variant de 100 à  $10^6$ . Pour une épaisseur donnée de l'espace, ils trouvent deux structures d'écoulement différentes pour une épaisseur donnée de paramètres, une structure unicellulaire et une autre multicellulaire pour l'air ( $Pr=7$ ),  $\frac{r_o}{r_i} = 2$ , et  $Ra=5 \cdot 10^4$ . Les auteurs pensent que cette diversité des solutions est due à l'hypothèse de l'écoulement axisymétrique qui paraît restrictive.

## **CHAPITRE I: CONCEPTS DE BASE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE**

---

**J.L. Wright et al.** [8] ont traité par la méthode des perturbations le problème de la convection naturelle dans une cavité sphérique relativement étroite, la surface extérieure étant la plus chaude. Ils établissent l'influence apparente des nombres de  $Pr$ ,  $Gr$ ,  $\frac{r_0-r_i}{r_i}$  et la présence d'une source de chaleur volumétrique interne, sur la distribution de température et l'écoulement. La variation de  $Pr$  (0.01; 0.1, ...) influe sur l'allure des isothermes. Les courbures indiquent une favorisation de la convection. Pour un  $Pr$  et  $\frac{r_0-r_i}{r_i}$  donnés, l'augmentation du  $Ra$  se traduit par la multiplicité cellulaire. Pour un  $\frac{r_0-r_i}{r_i}$  relativement petit, la convection est faible, tandis que la variation de la source de chaleur affecte seulement les isothermes où des courbures prononcées sont observées, La structure cellulaire n'est pas influencée.

**David. R. Gardner et al.** [9] Ont étudié la stabilité linéaire de la convection naturelle dans un fluide admettant un écoulement de base axisymétrique permanent dont ils déterminent les caractéristiques. Le problème de bifurcation initial qui correspond à une transition d'un régime stable (Grashof faible) à un autre instable (au Grashof critique), est résolu en considérant le problème linéarisé des équations des perturbations. Les solutions sont approchées à l'aide de la méthode spectrale. Elles sont étroitement liées à l'épaisseur de l'espace et du nombre  $Pr$  allant de 0 à 0.7, les auteurs calculent les valeurs critiques de  $Ra$ , la partie imaginaire du complexe  $\sigma$ , le nombre d'onde  $m$  et le nombre de Nusselt  $Nu$ . Ils trouvent que pour  $0 \leq Pr < 0.31$ , la bifurcation est axisymétrique et dépend périodiquement du temps. Elle est stationnaire et tridimensionnelle pour  $Pr > 0.31$ .

**Douglass et al.** [10] ont présenté une analyse de l'effet du nombre de  $Pr$ , allant de 1 à 100, sur la stabilité des perturbations axisymétriques. Pour un  $Pr$  donné, la valeur de  $Ra$  critique croît quand les sphères sont rapprochées. Il y a une décroissance du  $Ra$  critique pour les valeurs élevées de  $Pr$  (la diffusivité thermique diminue).

**Garg et al.** [11] Présentent des résultats d'écoulement et de température pour un rapport  $\frac{r_0}{r_i}$  égale à 2, pour des valeurs de  $Pr$  égales à 0.02 (métal liquide), 0.7 (air), 6 (eau) en variant le nombre de  $Ra$  ( $Ra = 9 \cdot 10^4, 2 \cdot 10^5$ ).

La discrétisation du modèle mathématique est faite par différences finies en bidimensionnel en utilisant la formulation de fonction de courant et de vorticité. Deux structures d'écoulement sont possibles, le modèle passe de la forme d'un crossant à la forme d'un haricot (ou rien) quant  $Ra$  augmente. Les auteurs précisent la formation de cellules secondaires en bas de l'espace annulaire (dans la région stagnée).

**Hsin Sen Chu et al.** [12] ont résolu numériquement le problème de transition et axisymétrique de la convection laminaire dans l'air confiné entre deux sphères concentriques, la

## **CHAPITRE I: CONCEPTS DE BASE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE**

---

sphère intérieure étant la plus chaude. En formulant le modèle mathématique à l'aide de la vorticité et fonction de courant, les équations globales sont discrétisées grâce aux différences finies et sont r solv es par la technique des sur-relaxations successives de Gauss (S.O.R). Les résultats de calcul sont donnés pour des rapports de rayons égales à 1.2, 1.5, et 2. L'écoulement et les caractéristiques du transfert thermique sont déterminés graphiquement pour des valeurs de  $Ra$  de  $10^3$ ,  $10^5$ , et  $5.10^5$ , la solution initiale correspond au régime de conduction pure. Les courbures d'isothermes et le déplacement des vortex vers le haut de l'enceinte illustrent d'une façon remarquable la dominance du régime convectif.

### **I.2.2 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LA CONVECTION NATURELLE EN GEOPHYSIQUE ET ASTROPHYSIQUE :**

Le phénomène de la convection naturelle en milieu sphérique a stimulé largement la recherche dans les sciences géophysiques et astrophysiques. La motivation principale de la recherche dans cet horizon réside particulièrement dans le processus de la convection dans le manteau terrestre et dans d'autres planètes, telles que **Mars et Vénus** [13]. La tectonique des roches, le visage changeant de la terre, les études s ismiques, et aussi la génération du champ magnétique ont poussé à fond les recherches dans le domaine fertile de la convection liminaire en cavité sphérique. Dans la littérature, des modèles mathématiques ont été élaborés pour approcher la convection dans un fluide soumis à un potentiel gravitationnel radial (cas de la convection mantellique)

**S. Chandrasekhar** [14] établit les bases de la théorie linéaire des perturbations du phénomène de la convection naturelle dans un fluide sphérique et dans un fluide confiné entre deux sphères concentriques, soumis à un champ gravitationnel radial. La chaleur est générée par une source volumétrique uniforme. Il démontre que l'instabilité thermique a lieu pour une valeur critique de Rayleigh qu'il calcule pour  $\left(\eta = \frac{r_0}{r_i}\right)$  donné. Il établit aussi l'influence de la géométrie et des conditions aux limites de surfaces rigides et libres sur les valeurs critiques de  $Ra$ .

**Busse et al.** [15], par une étude analytique, analysant des perturbations infinitésimales à l'aide de la méthode spectrale, donnent les solutions du problème linéaires correspondant à l'état perturbé. En tenant compte des effets non linéaires qui ont été négligés dans la théorie de **Chandrasekhar** [14], et ceci dans le but de lever la dégénérescence, Busse dérive une condition de stabilité. Des solutions stationnaires indépendantes sont calculées pour les valeurs paires du nombre d'onde  $l$  (degré de l'harmonique sphérique). Dans la deuxième partie, **Busse et al.** [16]

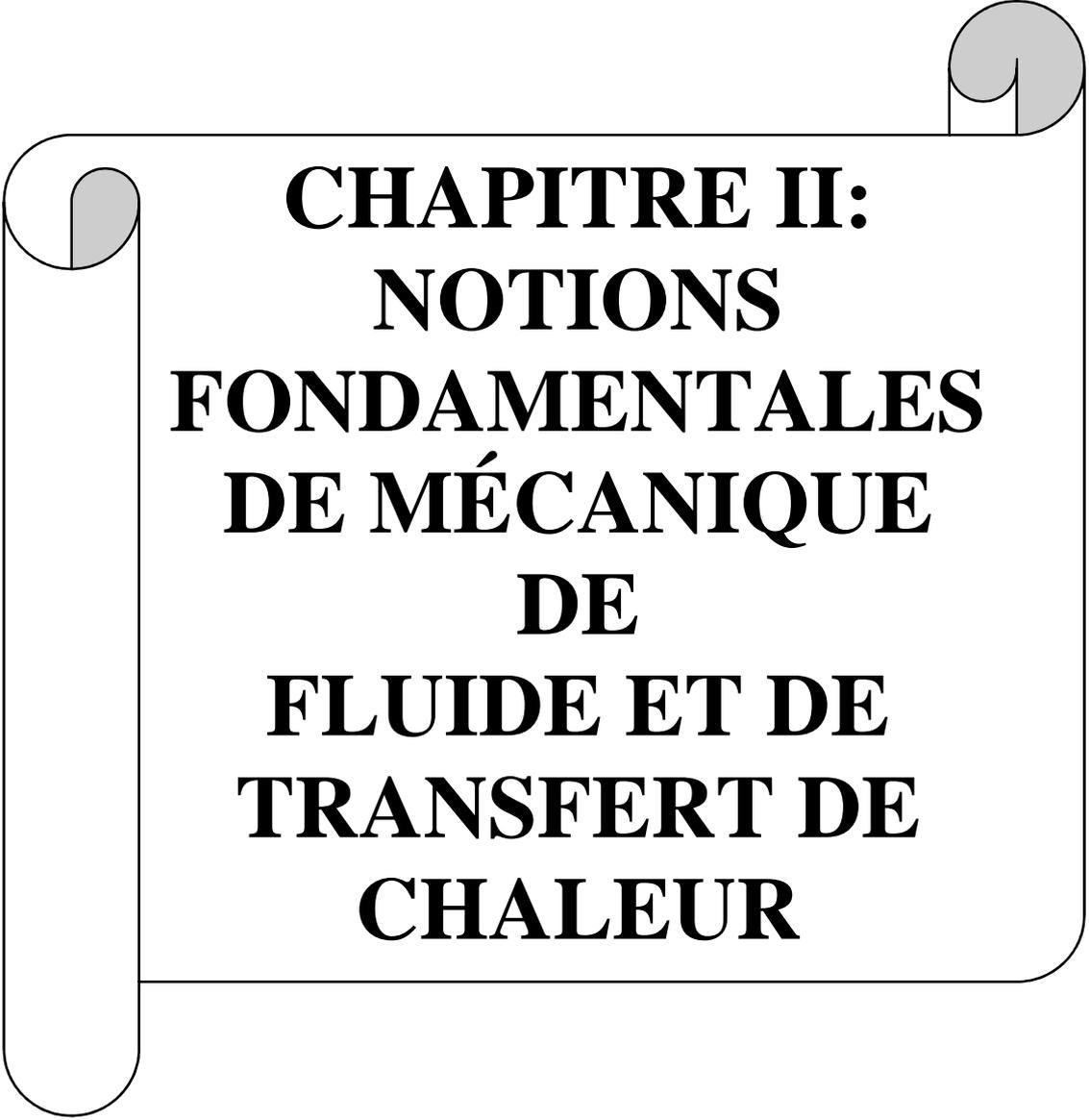
## ***CHAPITRE I: CONCEPTS DE BASE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE***

---

déterminent les modèles d'écoulement du problème linéaire de la convection naturelle en se basant sur les solutions correspondant aux valeurs impaires de  $l$  (1,2,3). Ils discutent la stabilité des solutions en résolvant le problème aux valeurs propres  $\sigma$  (amplitude des perturbations). Le mode correspondant à  $l=3$ , est étudié en détail. Il lui correspond trois modèles d'écoulement parmi lesquels un écoulement axisymétrique mais instable et un autre tridimensionnel à symétrie tétra hydrique. Par l'analyse de stabilité, ce dernier s'avère stable. Il est à noter que la seule restriction remarquable dans cette étude est qu'elle est faite pour les valeurs de  $Ra$  proche de  $Ra$  critique.

En géophysique, le modèle de convection naturelle dans un fluide à  $Pr$  infini (fluide extrêmement visqueux) a été intensivement étudié. En effet, **Zebib et al.** [17-20] ont étudié le problème axisymétrique permanent de la convection dans un fluide newtonien répondant au modèle de Boussinesq. En adoptant la technique de Galerkin (méthode spectrale), ils déterminent les valeurs critiques de  $Ra$  pour lesquelles démarre la convection ainsi que les structures pour différents modes d'échauffement du fluide convectant dans l'état perturbé. La détermination des solutions est suivie par une étude de stabilité de ces derniers envers des perturbations tridimensionnelles. Ces auteurs ont trouvé qu'il y avait deux classes de solutions pour le modèle d'écoulement : des solutions dites 'paires', qui sont des cellules symétriques par rapport au plan équatorial et des solutions 'impaires', dont correspond des cellules non symétriques. L'analyse de stabilité démontre que les solutions impaires sont les préférables et ceci pour leur stabilité.

**Bercovici et al.** [21-22] présentent les solutions du modèle tridimensionnelle de la convection naturelle dans un fluide à  $Pr$  infini, dans un champ gravitationnel radial (cas du manteau terrestre). Ils déterminent les structures de l'écoulement perturbé (perturbations à amplitudes finies), à symétrie cubique et tétrahydrique, pour les valeurs de  $Ra$  égales à cent fois la valeur critique. Les auteurs comparent les résultats de deux codes différents, l'un conforme au modèle de Boussinesq et l'autre suit un modèle approximant l'écoulement compressible, proche du cas réel.

A decorative graphic of a scroll with a black outline and rounded corners. The scroll is partially unrolled, with the top and bottom edges curving upwards. The interior of the scroll is white, and the text is centered within it. The scroll is positioned in the upper half of the page.

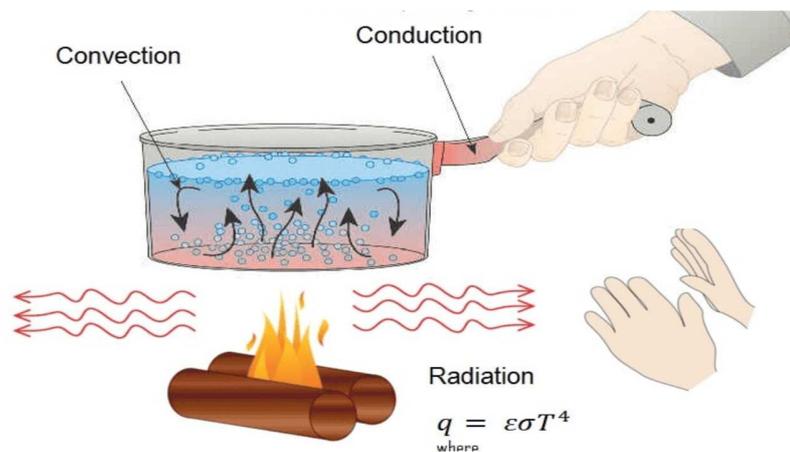
**CHAPITRE II:  
NOTIONS  
FONDAMENTALES  
DE MÉCANIQUE  
DE  
FLUIDE ET DE  
TRANSFERT DE  
CHALEUR**

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

### INTRODUCTION

Lorsque deux systèmes sont à des températures différentes, le système le plus chaud cède de la chaleur au plus froid. Il y a échange thermique ou encore transfert thermique entre ces deux systèmes. Ce processus se rencontre dans de nombreuses situations industrielles (moteurs thermiques ou même électriques, centrales électriques au fuel au gaz...etc.) ou domestique (chauffage de l'habitat). Un transfert d'énergie donne lieu à un flux de chaleur qui correspond à un déplacement de l'énergie du plus chaud vers le plus froid. Comme on le verra par la suite, le flux de chaleur dont la densité locale est notée  $\phi$  est une grandeur vectorielle, ce qui signifie qu'un flux de chaleur est caractérisé non seulement par son intensité mais aussi par sa direction. Il est défini en chaque point de l'espace et à l'unité d'une densité surfacique de puissance ( $W/m^2$ ). Il existe trois modes essentiels d'échange de chaleur, le transfert par conduction, par rayonnement et par convection.

Dans de nombreux problèmes de transformation d'énergie thermique, les trois modes de transfert de chaleur coexistent mais parfois, au moins un des trois modes pourra être négligé ce qui simplifiera le traitement mathématique du processus de transfert.



**Figure (II.1) :** Illustration des différents types de transferts thermiques.

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

---

### II.1. Modes de transfert de chaleur :

Le transfert de chaleur l'un des modes communs d'échange d'énergie. Il intervient entre deux systèmes dès qu'il existe une différence de température entre eux. Même s'ils sont séparés par le vide.

A la base de l'étude des transferts thermiques. Nous utilisons deux variables :

La quantité de chaleur ou plutôt puissance calorifique échangée, qu'on appellera flux de chaleur ( $\Phi$  en watt): ou encore la densité de flux qui est la puissance échangée par unité de surface ( $\phi$  en W/m<sup>2</sup>). La différence de température ( $\Delta T$  en kelvin).

L'énergie thermique correspond à l'énergie cinétique des constituants du milieu qui échangent une partie de cette énergie par interaction directe ou par l'intermédiaire de rayonnement électromagnétique. « On considère généralement trois modes d'échanges fondamentaux » [2] .

#### II.1.1. La conduction :

La conduction est définie comme étant le mode de transfert de la chaleur au sein d'un milieu sans déplacement de la matière en présence d'un gradient de température. Dans les solides transparents, une partie de l'énergie peut être transmise par rayonnement et dans le cas des fluides (gaz ou liquides), la convection et le rayonnement peuvent se superposer à la conduction.

Ce transfert de chaleur obéit à la loi de Fourier exprimée par l'équation (I.1) :

$$dQ = -\lambda \cdot S \cdot \frac{dT}{dx} dt \quad (\text{II.01})$$

$dQ$ : Quantité de chaleur transmis par conduction (J).

$\lambda$ : Conductivité thermique du milieu ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ).

$S$ : Aire de la section de passage du flux de chaleur ( $m^2$ ).

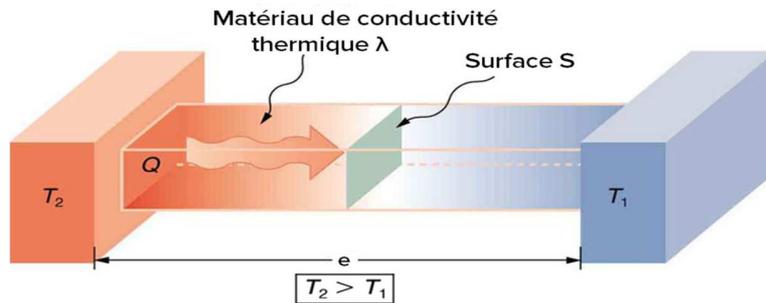
$\frac{dT}{dx}$ : Gradient de température en ( $K \cdot m^{-1}$ ).

$$\phi = \frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot S \frac{dT}{dx} \quad (\text{II.02})$$

Ainsi que la densité de chaleur  $\phi$  en ( $W \cdot m^{-2}$ )

$$\phi = \frac{\phi}{S} = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx} \quad (\text{II.03})$$

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR



**Figure (II.2) :** Transfert thermique par conduction à travers une barre rectangulaire.

### II.1.2. Le rayonnement :

Le rayonnement est considéré comme un transfert d'énergie électromagnétique d'un milieu à température élevée vers un autre milieu à faible température sans aucun support matériel. Cette énergie est transportée sous forme d'une onde électromagnétique, ce type de transport de chaleur est analogue à la propagation de la lumière [2] .

Dans ce cas nous avons la relation suivante :

$$\phi = \varepsilon \cdot \sigma \cdot S(T_s^4 - T_a^4) \quad (\text{II.04})$$

Avec :

$\phi$ : Flux de chaleur transmis par rayonnement (W).

$\sigma$ : Constante de Boltzmann ( $=5.67 \cdot 10^{-8} (w \cdot m^{-2} \cdot K^{-4})$ ).

$\varepsilon$ : Facteur d'émission de la surface.

$T_s$ : Température de la surface (K).

$T_a$ : Température du milieu environnant la surface (K).

$S$ : Aire de la surface ( $m^2$ ).

### II.1.3 La Convection :

La convection consiste essentiellement au transfert de l'énergie thermique par le mouvement ou le déplacement macroscopique au sein du fluide. On distingue trois types de convection, la convection naturelle où le mouvement des particules est dû à la différence de température qui est imposée au fluide, cette différence de température implique une différence de masse volumique, par contre la convection forcée est le résultat du mouvement des particules qui résulte de la différence de pression appliquée au fluide par l'intermédiaire des moyens mécaniques et la convection mixte qui est la combinaison des deux dernières [2] .

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

Quel que soit le type de convection (libre ou forcée) et quel que soit le régime d'écoulement du fluide (laminaire ou turbulent), le flux de chaleur  $\Phi$  extrait par le fluide froid de température  $T_f$  au voisinage d'une paroi de surface  $S$  et de température  $T_p$  telle que  $T_p > T_f$ , est donnée par la loi de Newton :

$$\Phi = h \cdot S \cdot (T_p - T_f) \quad (\text{II.05})$$

$\Phi$ : Flux de chaleur transmis par convection (W).

$h$ : Coefficient de transfert de chaleur par convection ( $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ).

$T_p$ : Température de surface du solide (K).

$T_f$ : Température du fluide froid (K).

$S$ : Aire de la surface de contact entre le solide et le fluide ( $\text{m}^2$ ).

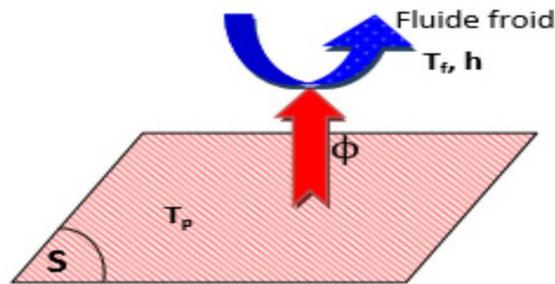


Figure (II.4) : Illustration de la loi de Newton.

### II.1.4 La convection naturelle :

La convection naturelle est le mouvement qui résulte d'un gradient de température ou/et de concentration qui engendre un gradient de masse volumique dans le fluide (poussée d'Archimède). Considérons le cas de la convection naturelle. Soit une particule fluide (plus généralement un objet) immergé dans un fluide, comme le montre la figure (II.5) nous appelons  $T_f$ : la température caractéristique du bain de fluide et  $T_p$  celle de la particule fluide. Le mouvement de la convection naturelle prend naissance dès lors que la particule de fluide de température  $T_p$  est supérieure à  $T_f$ : avec une masse volumique inférieure à celle du fluide. Elle est soumise à une poussée d'Archimède, qui la met en mouvement.

La convection naturelle résulte donc de variations de masse volumique avec la température. C'est pourquoi les vitesses de convection naturelle sont en général modérées, par rapport à celles que l'on rencontre en convection forcée. En 1903, à l'époque même où Rayleigh s'intéresse à la

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

---

convection, Boussinesq propose une simplification de ces équations de façon à ne conserver que les ingrédients nécessaires et suffisants à la convection thermique.



**Figure (II.5):** Comportement d'une particule fluide.

### II .2 .GRANDEURS SANS DIMENSIONS :

Ces grandeurs sans dimension (ou grandeurs adimensionnelles) interviennent particulièrement en mécanique des fluides et pour la description de phénomènes de transfert lorsqu'on utilise la similitude de modèles réduits ou théorie des maquettes et construit l'interprétation des résultats d'essais. Elles portent le nom de nombres sans dimension, nombres adimensionnels, ou encore des nombres caractéristiques. Les nombres adimensionnels les plus utilisés dans le domaine de convection sont [23] :

#### Le Nombre de Reynolds $Re$ :

Il représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en dimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit comme suit :

$$Re = \frac{LU}{\nu} \quad (\text{II.06})$$

Où :

$U$ : vitesse caractéristique du fluide [m/s]

$L$ : dimension caractéristique [m]

$\nu$ : viscosité cinématique de fluide [m<sup>2</sup>/s], où :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{II.07})$$

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

---

Avec:

$\rho$ : masse volumique du fluide [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]

$\mu$ : viscosité dynamique du fluide [ $\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$ ]

### Le Nombre de Prandtl $Pr$ :

Un nombre de Prandtl compare la rapidité des phénomènes thermiques et des phénomènes hydrodynamiques dans un fluide. Un nombre de Prandtl élevé indique que le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. C'est le rapport de la viscosité cinématique  $\nu$  et diffusivité thermique  $\kappa$ , ce nombre porte le nom de Ludwig Prandtl, physicien allemand :

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad (\text{II.08})$$

### Le Nombre de GRASHOF $Gr$ :

Le nombre de Grashof est un nombre sans dimension, nommé d'après Franz Grashof. Le nombre de Grashof est défini comme étant le rapport entre la force de flottabilité et la force visqueuses agissant sur un fluide dans la couche limite de vitesse. Son rôle dans la convection naturelle est à peu près identique à celui du nombre de Reynolds en convection forcée. La convection naturelle est utilisée si ce mouvement et ce mélange sont causés par des variations de densité résultant de différences de température dans le fluide. Habituellement, la densité diminue en raison d'une augmentation de la température et entraîne la montée du fluide. Ce mouvement est provoqué par la force de flottabilité. La force majeure qui résiste au mouvement est la force visqueuse. Le nombre de Grashof est un moyen de quantifier les forces en présence. Le nombre de Grashof est défini comme suit :

$$Gr = \frac{\text{forces de flottabilité}}{\text{forces visqueuses}} = \frac{g\beta(T_{\text{mur}} - T_{\infty})L^3}{\nu^2} \quad (\text{II.09})$$

Où :

$g$ : est l'accélération due à la gravité terrestre.

$\beta$ : est le coefficient de dilatation thermique.

$T_{\text{mur}}$ : est la température du mur.

$T_{\infty}$ : est la température de masse.

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

---

$L$ : est la longueur verticale.

$\nu$ : est la viscosité cinématique.

Pour les gaz,  $\beta = 1/T_0$  où la température est exprimée en Kelvin. Pour les liquides, il est possible de calculer  $\beta$  si la variation de la masse volumique avec la température à pression constante est connue. Le nombre Grashof est étroitement lié au nombre de Rayleigh, qui est défini comme le produit du nombre Grashof, qui décrit la relation entre la flottabilité et la viscosité dans un fluide, et le nombre de Prandtl, qui décrit la relation entre la diffusivité du moment et la diffusivité thermique.

### Le Nombre de Rayleigh $Ra$ :

C'est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides et caractérisant le transfert de chaleur au sein d'un fluide : inférieur à une valeur critique de 2000, le transfert s'opère essentiellement par conduction, tandis qu'au-delà de cette valeur c'est la convection naturelle qui devient importante. On peut le définir comme étant le produit du nombre de Grashof, reliant les effets de la force gravifique à la viscosité du fluide, et du nombre de Prandtl. Ce nombre porte le nom de Lord Rayleigh, physicien anglais. On le définit de la manière suivante :

$$Ra = Gr * Pr \quad (II.10)$$

Il faut nécessairement mentionner Rayleigh qui est un ajout à la température en chauffant ou soustrayant la température en refroidissant, quant au Rayleigh il n'y a pas de fraction entre les particules de fluide et la surface, aussi la température affecte clairement le flux. Il est donné par la formule suivante:

$$Ra = \frac{\Delta\rho g L^3}{D\mu} \quad (II.11)$$

Où:

$\Delta\rho$ : est la différence de densité entre les deux parcelles de matériau qui se mélangent

$g$ : est l'accélération gravitationnelle locale

$L$ : est l'échelle de longueur caractéristique de la convection

$D$ : est la diffusivité de la caractéristique qui cause la convection

$\mu$ : est la viscosité dynamique.

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

---

### Vorticité:

C'est la qualité de ce qui tourbillonne pour un débit d'eau, un écoulement liquide. La vorticité est définie comme le rotationnel de la vitesse : (On verra une autre définition tensorielle ultérieurement)

$$\vec{\omega} = \text{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \quad (\text{II.12})$$

### Viscosité :

La viscosité est une caractéristique physique du fluide se manifestant par une résistance de celui-ci aux déformations et plus particulièrement aux vitesses de déformation. Deux grandeurs physiques caractérisent la viscosité [23] :

#### Viscosité dynamique :

Lorsque deux couche de fluide glissent, il existe une force de frottement inversement proportionnelle à la distance  $\Delta z$  et proportionnelle à la vitesse des couches  $\Delta v$  et à la surface  $S$

$$F = \frac{\mu \cdot S \Delta v}{\Delta z} \quad (\text{II.13})$$

Le facteur de proportionnelle est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

Dimension :

$$[\mu] = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1} \quad (\text{II.14})$$

#### Viscosité cinématique :

La viscosité cinématique est le rapport de la viscosité dynamique  $\mu$  et la masse volumique  $\rho$ .

$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{II.15})$$

$$[v] = L^{-2} \cdot T^{-1} \quad (\text{II.16})$$

## II.3. Les équations de base de la mécanique du fluide et transfert de chaleur:

### II.3.1. L'équation de conservation de la masse:

Considérons un volume matériel  $V_{m(t)}$ . La masse contenue dans ce volume est:

$$m = \int_{v_m} \rho dV \quad (\text{II.17})$$

Où:  $\rho$  est la masse volumique du milieu fluide.

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

---

Si la volume matériel ne contient ni puits ni source, la masse qui se trouve dans  $V_{m(t)}$  est constante et on peut écrire :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_{m(t)}} \rho dV = 0 \quad (\text{II.18})$$

En appliquant le théorème de transport au volume  $V_{m(t)}$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{m(t)}} \rho dV = \int_{V_{m(t)}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (\text{II.19})$$

Et d'après l'équation (II.18) devient:

$$\int_{V_{m(t)}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{A_m(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (\text{II.20})$$

Si le volume  $V_{m(t)}$  ne contient pas de surface de discontinuité, l'intégrale sur la surface  $A_m$  peut être remplacée par une intégrale de volume et le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'écrire:

$$\int_{A_m(t)} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \int_{V_{m(t)}} \vec{\nabla} \rho \vec{v} dV \quad (\text{II.21})$$

Dans ces conditions, l'équation (II.20) devient :

$$\int_{V_{m(t)}} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \vec{v} \right) dV = 0 \quad (\text{II.22})$$

Le volume d'intégration est arbitraire et par conséquent l'intégrand doit être identiquement nul :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \vec{v} = 0 \quad (\text{II.23})$$

### II.3.2 . Equation de conservation de la quantité de mouvement :

Considérons à nouveau un volume de control matériel  $V_{m(t)}$ . La quantité de mouvement contenue dans ce volume est :

$$\int_{V_{m(t)}} \rho \vec{v} dV \quad (\text{II.24})$$

Le principe fondamental de la dynamique indique que la variation de quantité de mouvement de ce système matériel est égale à la toute les forces extérieures qui lui sont appliquées.

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

---

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{m(t)}} \rho \vec{v} dV = \vec{F}_{ext} \quad (\text{II.25})$$

Dans la plupart des situations (classiques), deux types de forces agissent sur le fluide contenu dans  $V_m$ :

(1) les forces de volume que l'on peut exprimer sous la forme :

$$\int_{V_{m(t)}} \rho \vec{g} dV \quad (\text{II.26})$$

(2) les forces de surface qui agissent par l'intermédiaire de la surface  $A_m(t)$ . Nous écrivons ce type de force sous la forme :

$$\int_{A_m(t)} \vec{t}(\vec{n}) dA \quad (\text{II.27})$$

Dans cette expression,  $\vec{n}$  désigne la normale extérieure et :

$$\delta \vec{f} = \vec{t}(\vec{n}) dA \quad (\text{II.28})$$

Qui représente la force élémentaire qui s'exerce sur l'élément de surface  $dA$  de normale  $n$  et  $\vec{t}(\vec{n})$  est le vecteur contrainte agissant sur  $dA$ .

L'expression (II.25) peut donc s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{m(t)}} \rho \vec{v} dV = \int_{V_{m(t)}} \rho \vec{g} dV + \int_{A_m(t)} \vec{t}(\vec{n}) dA \quad (\text{II.29})$$

Pour simplifier cette première présentation des équations de la mécanique des fluides, nous allons projeter l'équation précédente sur les axes d'un système cartésien fixe.

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{m(t)}} \rho v_i dV = \int_{V_{m(t)}} \rho g_i dV + \int_{A_m(t)} t_i(\vec{n}) dA \quad (\text{II.30})$$

Dans cette expression,  $t_i(\vec{n})$  désigne la projection sur l'axe  $i$  du vecteur contrainte. Pour continuer, il faut écrire  $t_i(\vec{n})$  de façon plus explicite. On a besoin pour cela de résultats fondamentaux de la mécanique des milieux continus.

Une analyse détaillée de l'état des contraintes est effectuée à l'annexe A. cette analyse conduit aux résultats suivants :

$$t_i(\vec{n}) = T_{ij} n_j \text{ (La notation d'Einstein est utilisée ici)}$$

$$\text{Et } T_{ij} = T_{ji} \text{ (} i=1,2,3 \text{ et } j=1,2,3 \text{)} \quad (\text{II.31})$$

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

---

La première expression indique que la composante  $i$  du vecteur contrainte est donnée par le produit scalaire du tenseur des contraintes  $T$  dont les composantes sont  $T_{ij}$  et du vecteur normale  $\vec{n}$  de composantes  $n_j$ . La seconde expression indique que le tenseur  $T_{ij}$  est symétrique. Pour fixer les idées, nous donnons ci-dessous les expressions des trois composantes du vecteur contraintes sous forme totalement explicite :

$$\begin{aligned} t_1(\vec{n}) &= T_{11}n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3 \\ t_2(\vec{n}) &= T_{21}n_1 + T_{22}n_2 + T_{23}n_3 \\ t_3(\vec{n}) &= T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + T_{33}n_3 \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

D'un point de vue physique, il est intéressant de décomposer la contrainte en deux parties :

- La contrainte associée à la pression
- La contrainte associée aux forces visqueuses

La pression agit de façon isotrope et sa valeur ne dépend que de l'état thermodynamique du fluide. Les contraintes visqueuses sont au contraire essentiellement liées à l'état de déformation du fluide. On peut écrire dans ces conditions :

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{II.33})$$

$T_{ij}$  : Tenseur des Contraintes.

$-p\delta_{ij}$  : Tenseur des Contraintes associées à La pression.

$\tau_{ij}$  : Tenseur des Contraintes visqueuses.

La projection du vecteur contraintes sur l'axe  $i$  est alors donnée par :

$$t_i(\vec{n}) = (-p\delta_{ij} + \tau_{ij})n_j \quad (\text{II.34})$$

Soit encore :

$$t_i(\vec{n}) = -pn_i + \tau_{ij}n_j \quad (\text{II.35})$$

Cette expression s'écrit manière extensive :

$$\begin{aligned} t_1(\vec{n}) &= -pn_1 + \tau_{11}n_1 + \tau_{12}n_2 + \tau_{13}n_3 \\ t_2(\vec{n}) &= -pn_2 + \tau_{21}n_1 + \tau_{22}n_2 + \tau_{23}n_3 \\ t_3(\vec{n}) &= -pn_3 + \tau_{31}n_1 + \tau_{32}n_2 + \tau_{33}n_3 \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

En rapportant l'équation (II.34) dans l'équation (II.30), on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho v_i dV = \int_{V_m(t)} \rho g_i dV + \int_{A_m(t)} (-p\delta_{ij} + \tau_{ij})n_j dA \quad (\text{II.37})$$

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

---

D'après le théorème de Green-Ostrogradsky, on écrit :

$$\int_A b_j n_i dA = \int_V \frac{\partial b_j}{\partial x_j} dV \quad (\text{II.38})$$

L'expression (II,37) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{m(t)}} \rho v_i dV = \int_{V_{m(t)}} \rho g_i dV + \int_{V_{m(t)}} \frac{\partial}{\partial x_j} (-p \delta_{ij} + \tau_{ij}) dV \quad (\text{II.39})$$

Soit encore :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{m(t)}} \rho v_i dV = \int_{V_{m(t)}} \rho g_i dV - \int_{V_{m(t)}} \frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \int_{V_{m(t)}} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV \quad (\text{II.40})$$

D'après le théorème de Leibnitz, l'équation devient :

$$\int_{V_{m(t)}} \rho \frac{dv_i}{dt} dV = \int_{V_{m(t)}} \left[ \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right] dV \quad (\text{II.41})$$

Le volume de contrôle  $V_{m(t)}$  étant arbitraire et les intégrantes apparaissant dans les deux membres doivent être identiques, alors:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II.42})$$

La signification physique de cette équation apparaît clairement :

$$\left( \begin{array}{l} \text{Quantté} \\ d'accélération \\ \text{par unité} \\ \text{de volume} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \text{Forces associées} \\ \text{à la pression par} \\ \text{unité de} \\ \text{volume} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{Forces} \\ \text{de volume} \\ \text{par unité} \\ \text{de volume} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \text{contraintes} \\ \text{visqueuses} \\ \text{par unité} \\ \text{de volume} \end{array} \right) \quad (\text{II.43})$$

Pour fixer les idées, nous allons maintenant écrire l'équation (II,42) sous forme explicite et pour les trois composantes :

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial x_1} + \rho g_1 + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{dv_2}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial x_2} + \rho g_2 + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3} \\ \rho \frac{dv_3}{dt} &= \frac{\partial p}{\partial x_3} + \rho g_3 + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

---

### *Fluide newtonien:*

On assume que pour un fluide newtonien, chaque élément du tenseur des contraintes est relié au taux de déformation par la relation :

$$\tau_{ij} = -\frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial x_k}v_k + 2\mu\frac{\partial}{\partial x_i}v_j$$

Donc, nos équations de conservation de mouvement deviennent :

$$\rho\left(\frac{dv_i}{dt} + v_i\frac{\partial}{\partial x_j}v_j\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + 2\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}v_j\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}v_i\right) \quad (\text{II.45})$$

Enfin, les équations précédentes données par (II,45) sont celles de Navier-Stokes exprimant la conservation de quantités de mouvement.

### **II .3.3. Equation de conservation de l'énergie :**

Pour établir une équation locale exprimant la conservation de l'énergie, nous partons de l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un volume matériel  $V_{m(t)}$  l'énergie contenue dans le volume  $V_{m(t)}$  a pour expression :

$$\int_{V_{m(t)}} \rho \left( e + \frac{1}{2}v^2 \right) dV \text{ où } e: \text{ est l'énergie interne.}$$

Le taux de variation de cette énergie est donné par :

$$\int_{V_{m(t)}} \rho \left( e + \frac{1}{2}v^2 \right) dV = W + Q \quad (\text{II.46})$$

Le travail par unité de temps  $W$  qui apparaît au second membre est celui des forces de volume et des contraintes appliquées à la surface du volume :

$$W = \int_{V_{m(t)}} \rho \vec{g} \vec{v} dV + \int_{A_m(t)} \vec{t}(\vec{n}) \vec{v} dA \quad (\text{II.47})$$

Nous supposons ici qu'il n'y a pas de source de chaleur à l'intérieur du volume et nous désignons par  $q$  le flux de chaleur par conduction. Ainsi,  $-q \cdot \vec{n}$  représente la chaleur qui passe par unité de surface et de temps à travers la surface de contrôle  $A_m(t)$ :

$$Q = - \int_{A_m(t)} q \cdot \vec{n} dA \quad (\text{II.48})$$

En substituant les expressions (II,31) et (II,32) dans l'équation (II,30) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{m(t)}} \rho \left( e + \frac{1}{2}v^2 \right) dV = \int_{V_{m(t)}} \rho \vec{g} \vec{v} dV + \int_{A_m(t)} \vec{t}(\vec{n}) \vec{v} dA - \int_{A_m(t)} q \cdot \vec{n} dA \quad (\text{II.49})$$

Pour déduire une équation locale de cette relation, il faut transformer les premier, troisième et quatrième termes.

D'après le théorème de Leibnitz et Green Ostrogradsky, elle devient:

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{m(t)}} \rho \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_{V_{m(t)}} \rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \int_{V_{m(t)}} \rho g_i v_i dV + \int_{V_{m(t)}} \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} (p v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho (\tau_{ij} v_i) \right] dV - \int_{V_{m(t)}} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV \quad (\text{II.50})$$

Avec:

$$\int_{A_m(t)} \vec{t}(\vec{n}) \vec{v} dA = \int_{A_m(t)} t_i(n) v_i dA = \int_{V_{m(t)}} \left[ -\frac{\partial}{\partial x_i} (p v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho (\tau_{ij} v_i) \right] dV$$

Et :

$$\int_{A_m(t)} q \cdot \vec{n} dA = \int_{V_{m(t)}} \rho \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV$$

Le volume  $V_{m(t)}$  est arbitraire et par conséquent:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho g_i v_i - \frac{\partial}{\partial x_j} (p v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho (\tau_{ij} v_i) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (\text{II.51})$$

L'équation d'énergie peut être écrite sous d'autres formes :

### 1. l'équation d'énergie mécanique :

Elle est dérivée à partir de l'équation de quantité de mouvement, au multipliant par  $\vec{V}$ . En notation symbolique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{1}{2} V^2 \right) + \nabla^2 \left( \rho \vec{V} \frac{1}{2} V^2 \right) = \vec{V} \vec{\nabla} p + \vec{V} \vec{\nabla} \vec{\tau} + \rho \vec{V} \vec{F} \quad (\text{II.52})$$

### 2. l'équation d'énergie thermique :

C'est l'équation résultant de la différence de l'énergie totale et de l'énergie mécanique :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j e) = -p \frac{\partial}{\partial x_j} v_j + \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} v_i - \frac{\partial}{\partial x_i} q_i \quad (\text{II.53})$$

On a :  $e = C_V T$  (énergie interne)

Et en tenant compte de l'équation de continuité :

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (C_V T) + \rho v_j \frac{\partial}{\partial x_j} (C_V T) = -\frac{\partial}{\partial x_i} q_i + \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} v_j - p \frac{\partial}{\partial x_j} v_j \quad (\text{II.54})$$

Où :

$$\tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \tau_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right) = \left[ -\frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} v_i \right) + 2\mu \left( \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) \right] \left( \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right)$$

$$\phi_v = \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = -\frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial}{\partial x_i} v_i \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} v_i$$

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

---

$\tau_{ij}$ : est le tenseur de contraintes visqueuses.

$\mu$ : est la viscosité dynamique.

Le transfert de chaleur le plus dominant est la conduction :  $q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_j}$

Enfin, les équations (II,23), (II,45) et (II,54) sont les équations de base d'un écoulement compressible, visqueux et newtonien [24], [25]

### II.4. L'APPROXIMATION DE BOUSSINESQ :

Elle est appliquée aux situations physiques où la densité du fluide et les autres propriétés thermodynamiques subissent de faibles variations pour de faibles variations de température (de l'ordre de  $10^\circ$ ) et où le coefficient d'expansion  $\alpha$  est petit. Alors, les propriétés thermodynamiques sont prises constantes sauf dans le terme gravitationnel ( $\rho F_i$ ) qui ne peut être ignoré relativement au terme d'inertie. La variation de  $\rho$  en fonction de la température est donnée comme suit :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (\text{II.55})$$

Où :

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{\delta \rho}{\Delta T}$$

$T_0$ : Température de référence, pour notre cas  $T_0 = T_c$  (température de la paroi froide).

$\alpha$ : Le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

$\rho_0$ : Masse volumique du fluide à  $T_0$ .

Et :  $\rho - \rho_0 = \delta \rho$  (petite variation).

Avec cette approximation de BOUSSINESQ, les équations de base sont simplifiées, en effet:

**L'équation de continuité devient :**

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i) = 0 \quad (\text{II.56})$$

$$\text{ou encore : } \frac{\partial}{\partial x_i} v_i = 0 \quad (\text{II.57})$$

relation équivalente à  $\text{div} \vec{V} = 0$  (deux indices se répètent : c'est une somme).

**Les équations de mouvement de Navier-Stokes deviennent :**

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} v_i + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) = \rho g_i - \frac{\partial}{\partial x_i} p + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right) \quad (\text{II.58})$$

## CHAPITRE II: NOTIONS FONDAMENTALES DE MÉCANIQUE DE FLUIDE ET DE TRANSFERT DE CHALEUR

---

Où :  $\frac{\partial}{\partial x_i} v_i = 0$  ( équation de continuité)

En remplacement dans l'équation de mouvement (dans le terme gravitationnel)

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho$$

Et dans les autres termes  $\rho$  par  $\rho_0$ :

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} v_i + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} p + (\rho_0 + \delta\rho) g_i + \nu \nabla^2 v_i \quad (\text{II.59})$$

Ou :  $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 = \Delta$  et  $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$

$\nu$  : est viscosité cinématique.

$\mu$  : est viscosité absolu ou dynamique.

Donc :

$$\rho_0 \left( \frac{\partial}{\partial t} v_i + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} v_i \right) = - \frac{\partial}{\partial x_i} p + \left( 1 + \frac{\delta\rho}{\rho_0} \right) g_i + \nu \nabla^2 v_i \quad (\text{II.60})$$

**L'équation d'énergie devient :**

$$\rho C_V \frac{DT}{Dt} = \rho C_V \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \frac{\partial}{\partial x_j} v_j + \phi_v \quad (\text{II.61})$$

Ici :  $\phi_v = 2\mu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} v_i$  (dissipation visqueuse)

Donc :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = C \nabla^2 T + \phi_v \quad (\text{II.62})$$

Où :  $C = \frac{k}{\rho C_V}$

La dissipation visqueuse, dans l'approximation de Boussinesq et en comparaison avec le terme conductif, peut être ignorée.

Ainsi, l'équation de conduction de chaleur devient :

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = C \nabla^2 T \quad (\text{II.63})$$

Enfin les équations (II,57), (II,60) et (II,63) sont les équations de base de Boussinesq, instantanées décrivant l'écoulement.



**CHAPITRE III:  
INSTABILITE  
THERMIQUE**

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

---

### III.1. NOTIONS PRELIMINAIRES SUR LA THEORIE DE PERTURBATIONS :

Dans cette analyse, on démontre en premier, la validité du principe d'échange de stabilité et par suite la résolution du problème aux valeurs propres. On détermine les valeurs critiques du paramètre Rayleigh  $Ra$  pour lesquelles se manifeste la première bifurcation. On parle de théorie de stabilité linéaire car en fait, elle traite des perturbations qui sont infinitésimales comparées à l'état initial du système linéaire, elle n'est valable et applicable que dans un domaine restreint du paramètre  $Ra$ . En effet, ces perturbations qui augmentent exponentiellement avec le temps, dans les conditions favorables, atteignent rapidement une amplitude telle que le produit de ces termes cessent d'être négligé.

Dans le problème linéaire, les produits des termes des perturbations infinitésimales d'un ordre supérieur à un seront négligeables. Ainsi, les équations des perturbations seront linéarisées. En revanche, dans la théorie non linéaire, les perturbations ont une amplitude finie et les effets non linéaires sont pris par conséquence en considération.

La théorie de stabilité linéaire de la convection naturelle nécessite la connaissance de quelques concepts de base essentiels. Un système hydrodynamique est dans un état stable si toutes les variables physiques le décrivant sont indépendantes du temps, dans le cas contraire, il est instable. Un système soumis à des perturbations infinitésimales relativement à ses variables physiques dans son état de base est dit stable, si ces fluctuations disparaissent graduellement. Il est instable si leurs amplitudes progressent dans le temps, et le système ne revient plus à son état initial.

On définit un état de stabilité neutre séparant les deux états stables. Le passage de l'état stable à l'état instable se fait à travers cet état neutre, quand le paramètre  $Ra$  atteint une certaine valeur critique. On dira que l'instabilité est établie à cette valeur critique. Les perturbations peuvent évoluer périodiquement, alors l'écoulement présentera des cellules stationnaires. Dans le cas où elles évoluent par des oscillations croissantes ou décroissantes, les mouvements sont alors oscillatoires avec des fréquences caractéristiques définies.

## **CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE**

---

### **III.2. DEFINITION DU PROBLEME PHYSIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE:**

Un fluide newtonien, obéissant à l'approximation de Boussinesq, visqueux est confiné dans un espace sphérique. Un gradient de température est y maintenu par une source de chaleur uniforme, le fluide étant soumis seulement au champ gravifique. Si la distribution de la densité était régulière, la force de pesanteur appliquée à un élément de volume extrait du fluide serait équilibrée par la force d'Archimède d'expulsion et pourrait ne pas être prise en compte. Cependant, à cause du gradient de température maintenu dans le fluide, la distribution de la densité est irrégulière, en d'autre terme, la densité dépend de la température du fluide. L'action de la pesanteur n'étant pas alors équilibrée par la force d'Archimède. Par expansion thermique, le fluide sera le siège d'une circulation à courant ascendant dans la partie la plus chaude et à courant descendant dans la partie de l'espace à température la plus basse. Ces deux courants s'expliquent par l'effet du potentiel gravitationnel, le fluide le plus léger et donc le plus chaud monte tandis que le fluide dans la partie froide et donc lourd, aura tendance à se redistribuer lui-même pour combler le manque de masse provoqué par le fluide chaud.

Ainsi le principe de conservation de masse n'est pas violé. Cependant, cette tendance naturelle est contrôlée par la viscosité du fluide. Ceci conduit à dire que le gradient de température maintenu par la source de chaleur devrait atteindre une certaine valeur avant que l'instabilité ou la convection ne se manifeste.

### **III.3. MODELISATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME DE LA CONVECTION NATURELLE:**

#### **III.3.1. Formulation mathématique de l'écoulement de basse :**

Le traitement mathématique du problème de la stabilité de la convection naturelle dans un milieu sphérique passera par les étapes suivantes :

- Déterminer l'écoulement de basse du fluide dans son état initial, les équations de base étant les équations de conservation de masse, de mouvement et d'énergie.
- L'état initial est soumis à de faibles perturbations, mathématiquement parlant, des quantités infinitésimales seront ajoutées aux variables physiques indépendantes décrivant l'écoulement telles que la vitesse, la température et la pression.

Les équations régissant l'écoulement et le transfert de chaleur sont réécrites pour cet état perturbé. L'étude analytique de la stabilité de la convection naturelle dans une enceinte sphérique

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

ou dans un espace annulaire sphérique fait intervenir des notions mathématiques d'un niveau supérieur.

Pratiquement, on assume que la perturbation est une superposition de certains modes et la stabilité du système sera examinée envers chaque mode. Ainsi, la stabilité du système dépend en particulier de sa stabilité envers toutes les perturbations infinitésimales en termes de modes normaux.

Pour le fluide newtonien visqueux, confiné dans l'espace sphérique une distribution de chaleur est supposée maintenue par une source de chaleur volumétrique uniforme notée  $\varepsilon$ , dans un état initial. Le fluide est supposé au repos, le champ d'écoulement est alors nul. Dans la littérature [7 - 8], le fluide, initialement, peut être en mouvement, autrement dit, il admet un écoulement de base non nul, qu'on se doit de calculer, ce qui s'avère encore plus compliqué.

Pour l'analyse de la stabilité, les perturbations s'ajouteront aux valeurs moyennes de l'écoulement calculé.

Les équations de mouvement de l'état statique pour un élément de fluide soumis à une seule force de volume qui est la pesanteur en plus des forces de viscosité et de pression, sont écrites en notation tensorielle. On a opté pour cette formulation mathématique pour les simplifications qu'elles peuvent engendrer grâce à certaines propriétés des tenseurs. On ne fera pas allusion à la valeur de Prandtl, qu'elle soit finie ou infinie, et donc pas de restrictions.

Les équations de mouvement projetées sur les axes des coordonnées en notation tensorielle sont réduites à :

$$\partial_i p = \rho X_i \quad (\text{III.01})$$

Où :

$$\partial_i p = -\rho g(r) \quad i=1,2,3 \quad (\text{III.02})$$

La distribution de température est donnée par l'équation de conduction de chaleur en régime stationnaire où la dissipation visqueuse est négligeable :

$$K \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\varepsilon \quad (\text{III.03})$$

Où  $K = \frac{k}{\rho C_p}$  est la diffusivité thermique.

L'équation (III.3) admet comme solution exacte dans un système de coordonnées sphériques:

$$T(r) = \beta_0 - \beta_2 r^2 + \frac{\beta_1}{r} \quad (\text{III.04})$$

Où  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont des constantes à déterminer par les conditions aux limites et :

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

---

$$\beta_2 = \frac{\varepsilon}{6k} \quad (\text{III.05})$$

Le champ de température ne dépend que de la position radiale. Les variations de température n'étant pas large, l'approximation de Boussinesq est appliquée, en prenant la densité du fluide constante excepté dans le terme gravitationnel. La densité du fluide est approchée par un développement en séries de Taylor en fonction de la température :

$$\rho = \rho_0 - \alpha(T - T_0) \quad (\text{III.06})$$

$\alpha$  : étant l'expansion thermique du fluide à pression constante exprimée par :

$$\alpha = \left| \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_p \quad (\text{III.07})$$

$\rho_0$  : étant la densité du fluide correspondant à une température de référence  $T_0$ .

Les propriétés thermodynamique telles que la viscosité, la chaleur spécifique, la diffusivité sont considérées constantes.

### III.3.2 Les équations régissant l'écoulement perturbé:

Dans cet état perturbé, comme il a été signalé précédemment, chaque variable physique moyenne subit une perturbation infinitésimale. En notant par  $\acute{u}_i, \acute{T}, \acute{p}$  et  $\acute{\rho}$  la vitesse, la température, la pression et la densité du fluide dans l'état perturbé et par  $u_i, \theta, \delta p$  et  $\delta \rho$  les quantités infinitésimales des perturbations de vitesse, de température, de pression et de densité, alors :

$$\acute{u}_i = v_i + u_i \quad (\text{III.08})$$

$$\acute{T} = T + \theta \quad (\text{III.09})$$

$$\acute{p} = p + \delta p \quad (\text{III.10})$$

$$\acute{\rho} = \rho + \delta \rho \quad (\text{III.11})$$

Où:

$$\acute{\rho} = \rho(1 + \alpha\theta) \quad (\text{III.12})$$

Avec ces nouvelles variables, on réécrit les équations régissant l'écoulement de l'état perturbé.

- **L'équation de conservation de masse :**

$$\partial_i(v_i + u_i) = 0 \quad (\text{III.13})$$

Qui devient:

$$\partial_i(u_i) = 0 \quad (\text{III.14})$$

- **Les équations de conservation de quantité de mouvement :**

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

$$\rho\{\partial_0(v_i + u_i) + (v_j + u_j)\partial_j(v_i + u_i)\} = -\partial_i(p + \delta p) + (\rho + \delta\rho)F_i + \mu\nabla^2(v_i + u_i) \quad (\text{III.15})$$

Par application de l'approximation de Boussinesq et en développant :

$$\partial_0 u_i + u_j \partial_j (u_i) + \partial_0 v_i + v_j \partial_j v_i = -\partial_i \left( \frac{p}{\rho} \right) - \partial_i \left( \frac{\delta p}{\rho} \right) + \left( \frac{\rho + \delta\rho}{\rho} \right) F_i + \nu \nabla^2 v_i + \nu \nabla^2 u_i \quad (\text{III.16})$$

On peut remplacer  $\rho$  par  $\rho_0$  sauf dans le terme gravitationnel. En retranchant les équations de base des équations de l'état perturbé, on obtient l'équation suivante :

$$\partial_0 u_i + u_j \partial_j u_i = -\partial_i \left( \frac{\delta p}{\rho_0} \right) + \left( \frac{\delta\rho}{\rho} \right) F_i + \nu \nabla^2 u_i \quad (\text{III.17})$$

Où  $u_j \partial_j (u_i) = 0$  (les termes non linéaires sont négligeables).

L'évolution de la densité  $\delta\rho$  causée par la perturbation  $\theta$  de la température est donnée par :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\alpha\theta$$

Et:

$$F_i = -g e_i$$

Où :  $e_i$  est un vecteur unitaire dans la direction de la force gravitationnelle.

Ainsi, les équations de mouvement des perturbations linéaires sont :

$$\partial_0 u_i = -\partial_i \left( \frac{\delta p}{\rho_0} \right) + \alpha\theta g e_i + \nu \nabla^2 u_i \quad (\text{III.18})$$

• **L'équation de conservation d'énergie:**

$$\partial_0 T + \partial_0 \theta + v_j \partial_j T + v_j \partial_j \theta + u_j \partial_j T = C\nabla^2 T + C\nabla^2 \theta \quad (\text{III.19})$$

En retranchant les équations de base des équations de l'état perturbé, on obtient alors :

$$\partial_0 \theta = -u_j \partial_j T + C\nabla^2 \theta - v_j \partial_j \theta \quad (\text{III.20})$$

Où :  $v_j \partial_j \theta = 0$  car les termes non linéaires sont négligeables.

Donc:

$$\partial_0 \theta = -u_j \partial_j T + C\nabla^2 \theta \quad (\text{III.21})$$

Finalement, les équations (III.14) (III.18) et (III.21) sont les équations de perturbation gouvernant la convection dans le fluide.

### III.3.3. Analyse de l'instabilité thermique d'un fluide dans une sphère:

Pour étudier la stabilité de cet état initial, en rapportant ces variables dans les équations de base et tenant compte de l'approximation de Boussinesq, on ignore les produits du premier ordre

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

et plus des perturbations. On obtient les équations suivantes pour cet état perturbé, dans l'espace sphérique :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\delta p}{\rho} \right) + \alpha g(r) x_i \theta + v \nabla^2 u_i \quad (\text{III.22})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + k \nabla^2 \theta \quad (\text{III.23})$$

ici  $x_i g(r)$  est l'accélération terrestre.

$x_i$  représente une des coordonnées spatiales sphériques; dans le terme exprimant la force ascensionnelle,  $x_i$  est  $r$ .

On a:

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -2 \left( \beta_2 + \frac{\beta_1}{2r^3} \right) r \quad (\text{III.24})$$

Ou encore

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -2 \left( \beta_2 + \frac{\beta_1}{2r^3} \right) x_i \quad (\text{III.25})$$

Soit: 
$$\beta(r) = \beta_2 + \frac{\beta_1}{2r^3}$$

Donc :

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = -2\beta(r) x_i \quad (\text{III.26})$$

En rapportant  $\frac{\partial T}{\partial x_i}$  dans l'équation de conduction et en écrivant:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\delta p}{\rho} \right) + \gamma(r) x_i \theta + v \nabla^2 u_i \quad (\text{III.27})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 2\beta(r) u_i x_i + k \nabla^2 \theta \quad (\text{III.28})$$

Où:

$$\gamma(r) = \alpha g(r) \quad (\text{III.29})$$

Il est plus commode d'éliminer les termes de pression  $\left( \frac{\delta p}{\rho} \right)$  et d'obtenir les équations de mouvement en termes de vorticité. En prenant le rotationnel de l'équation (III.27) on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{ijk} \partial_j u_k) = \varepsilon_{ijk} \partial_j \gamma(r) \theta x_k + v \nabla^2 \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \quad (\text{III.30})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w_i = \gamma(r) \varepsilon_{ijk} \partial_j \theta x_k + v \nabla^2 w_i \quad (\text{III.31})$$

(j et k : indices de sommation).

$w_i$  : est la composante de la vorticité définie par:

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

$$\vec{w} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \quad (\text{III.32})$$

En notation tensorielle, la composante  $w_i$  est:

$$w_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k \quad (\text{III.33})$$

Le tenseur  $\varepsilon_{ijk}$  est le tenseur unitaire alternateur antisymétrique défini par:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk = 123, 231, 312 \\ 0 & \text{si deux indices sont égaux} \\ -1 & \text{si } ijk = 321, 213, 132 \end{cases}$$

Un résultat important est obtenu en prenant le rotationnel une seconde fois de l'équation (III.22):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l u_m) = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \gamma(r) \partial_l \theta x_m + v \nabla^2 (\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l u_m) \quad (\text{III.34})$$

Sachant que :

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (\text{III.35})$$

Où le terme de gauche devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l u_m) = \frac{\partial}{\partial t} (\partial_j \partial_i u_i - \partial_j \partial_j u_i) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_i \quad (\text{III.36})$$

Car :  $\partial_i u_i = 0$

Et après développement:

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \gamma(r) \partial_l \theta x_m = \partial_j \gamma(r) (x_j \partial_i \theta - x_i \partial_j \theta) \quad (\text{III.37})$$

Et :

$$v \nabla^2 (\varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l u_m) = -v \nabla^4 u_i \quad (\text{III.38})$$

Ainsi, l'équation (III.31) devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_i = \partial_j \gamma(r) (x_j \partial_i \theta - x_i \partial_j \theta) + v \nabla^4 u_i \quad (\text{III.39})$$

Et en se servant des propriétés du tenseur alternateur, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_i = -O_i \theta + v \nabla^4 u_i \quad (\text{III.40})$$

Où :  $O_i$  est un opérateur différentiel défini par:

$$O_i = \partial_j \gamma(r) (x_j \partial_i - x_i \partial_j) \quad (\text{III.41})$$

L'opérateur ( $O_i$ ) après développement s'écrit:

$$O_i = \gamma(r) (\partial_i + \partial_i x_j \partial_j - x_i \nabla^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial(\gamma(r))}{\partial r} (r^2 \partial_i - x_i x_j \partial_j) \quad (\text{III.42})$$

Où :  $\frac{1}{r} \frac{\partial(\gamma(r))}{\partial r} = \frac{1}{x_j} \partial_j (\gamma(r))$  du fait que  $\gamma \equiv \gamma(r)$  seulement, donc  $x_j$  correspond ici  $r$ .

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

---

$$\text{Et : } \partial_i x_j \partial_j = x_j \partial_i \partial_j - (\partial_i x_j) \partial_j$$

$$\text{On a aussi : } x_i x_i = x_j x_j = r^2$$

En revenant à l'équation de vorticité et en multipliant l'équation (II.31) par la coordonnée spatiale  $x_i$ , on obtient l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_i \omega_i) = \gamma(r) \varepsilon_{ijk} \partial_j \theta x_k x_i + v x_i \nabla^2 \omega_i \quad (\text{III.43})$$

Sachant que le produit d'un tenseur symétrique et antisymétrique est identiquement nul, l'équation (III.43) est réduite à:

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_i \omega_i) = v x_i \nabla^2 \omega_i \quad (\text{III.44})$$

On démontre que le champ de vorticité étant solénoïdale ( $\text{div} \omega_i = 0$ ) alors:

$$x_i \nabla^2 \omega_i = \nabla^2(x_i \omega_i) \quad (\text{III.45})$$

On a alors:

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_i \omega_i) = v \nabla^2(x_i \omega_i) \quad (\text{III.46})$$

C'est en fait l'équation de transport de vorticité.

L' quation (III.40) peut être réduite sous une autre forme. En multipliant les deux membres de l'équation (III.40) par  $x_i$ , un résultat important est obtenu, en effet:

$$\nabla^2 \left( v \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) (x_i u_i) = \gamma x_i O_i \theta \quad (\text{III.47})$$

O  :

$$x_i O_i = \gamma (x_i \partial_i - x_i \partial_i x_j \partial_j - r^2 \nabla^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \gamma(r) (r^2 x_i \partial_i - r^2 x_j \partial_j) \quad (\text{III.48})$$

Et qui devient:

$$x_i O_i = \gamma (x_i \partial_i - x_i \partial_i x_j \partial_j - r^2 \nabla^2) \quad (\text{III.49})$$

Donc :

$$x_i O_i = \gamma L^2 \quad (\text{III.50})$$

On définit l'opérateur cinétique du carré du moment angulaire par:

$$L^2 = x_i \partial_i - x_i \partial_i x_j \partial_j - r^2 \nabla^2 \quad (\text{III.51})$$

En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ ,  $L^2$  devient alors:

$$L^2 = r \frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - r^2 \nabla^2 \quad (\text{III.52})$$

Ou encore:

$$L^2 = r^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \nabla^2 \right)$$

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

Sachant que:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{III.53})$$

L'équation (III.47) devient alors:

$$\nabla^2 \left( v \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) (x_i u_i) = \gamma L^2 \theta \quad (\text{III.54})$$

On voudrait éliminer la perturbation de température de l'équation (III.54) en multipliant à gauche par l'opérateur  $(k \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t})$  déduit de l'équation d'énergie (III.28). On obtient alors:

$$\left( k \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \gamma^{-1} \nabla^2 \left( v \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) (x_i u_i) = -2L^2 \beta(r) u_i x_i \quad (\text{III.55})$$

Finalement, les équations développées (III.28) (III.46) (III.55) forment l'ensemble du problème de l'écoulement perturbé.

### III.3.3.1. Les conditions aux limites du problème considéré:

Les conditions aux limites sont celles des surfaces imperméables, les particules fluides ne peuvent traverser les frontières, donc leur impulsion normale à la frontière est nulle

( $u_r = 0$ ). Cette condition est imposée pour tout type de frontière, qu'elle soit rigide ou libre.

Une équation correspondant à ce cas, est dérivée à partir de l'équation de continuité. Celle-ci étant:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{III.56})$$

**Sur la surface rigide** : la surface sphérique ( $r = \text{constante}$ )  $u_\theta$  et  $u_\varphi$  sont nulles, c'est une condition de non glissement. Étant donné que  $u_\theta = u_\varphi = 0$  :

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{III.57})$$

On obtient alors:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = 0 \quad (\text{III.58})$$

**Sur une surface libre**: les contraintes tangentielles s'annulent, ici:  $\tau_{r\theta}$  et  $\tau_{r\varphi}$  sont nulles.

En coordonnées sphériques, ces contraintes s'écrivent:

$$\tau_{r\theta} = \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right] = 0 \quad (\text{III.59})$$

$$\tau_{r\varphi} = \mu \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right] = 0 \quad (\text{III.60})$$

Puisque en:  $r = \text{constante}$ ,  $u_r = 0$  alors:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right] u_\theta = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) = 0 \quad (\text{III.61})$$

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right] u_\varphi = r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\varphi}{r} \right) = 0 \quad (\text{III.62})$$

En revenant à l'équation de continuité et en appliquant l'opérateur  $(r \frac{\partial}{\partial r})$  sur l'équation, et en tenant compte des conditions(III.61) et(III.62), on aura après développement des calculs:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r u_r) = 0 \quad (\text{III.63})$$

Aussi, sur les frontières du système sphérique, il n'y a pas de perturbations de température, les surfaces sont isothermes.

### III.4 ANALYSE DES PERTURBATIONS EN MODES NORMAUX:

On assume qu'une perturbation est une superposition de certains modes. La stabilité du système sera examinée envers chaque mode. En observant les équations déjà établies des perturbations, l'opérateur  $L^2$ , carré du moment angulaire, admet comme fonctions propres des fonctions harmoniques sphériques.

En effet, l'opérateur  $L^2$  est défini par:

$$L^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{III.64})$$

Les harmoniques sphériques, notés par  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  indépendantes de  $r$ , sont définies par:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad m \leq l \quad (\text{III.65})$$

Les fonctions  $P_l^m(\cos \theta)$  sont les polynômes de Legendre, de degré  $l$ , et d'ordre  $m$ , associés à  $Y_l^m$ ,  $e^{im\varphi}$  est la dépendance azimuthale, caractérisée par le nombre d'onde  $m$ . Les valeurs proposées de l'Opérateur  $L^2$  sont telles que:

$$L^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{III.66})$$

$l(l+1)$  étant la valeur propre,  $l$  est un entier ( $l = 1, 2, 3, \dots$ )

Les fonctions harmoniques sphériques  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  sont normalisées et la norme est définie comme suit:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = N_l^m \quad (\text{III.67})$$

Où :

$$N_l^m = \frac{4\pi(l-m)!}{(2l+1)(l-m)!} \quad (\text{III.68})$$

Les solutions indépendantes du problème linéaire des perturbations formulées par les équations (III.28) (III.46) (III.54) et (III.55) sont représentées par les formes suivantes, dans le système de coordonnées sphériques:

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

$$x_i w_i \equiv r w_r = Z(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{pt}$$

$$x_i u_i \equiv r u_r = W(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{pt}$$

$$\theta = \theta(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{pt}$$

$Z(r), W(r)$  et  $\theta(r)$  : sont des fonctions exprimant la dépendance radiale de la vorticité, de la vitesse et de la température.

$p$ : est un nombre complexe dépendant des variables de l'écoulement de base, c'est aussi le taux d'amplification des perturbations.

Il reste maintenant à rapporter ces expressions dans les équations gouvernant les perturbations déjà établies.

En rapportant les expressions de  $x_i w_i$ ,  $x_i u_i$  et  $\theta$  dans les équations du problème:

L' quation (III.28) devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta(r) Y_l^m e^{pt}) = 2\beta(r) W(r) Y_l^m e^{pt} + \kappa \nabla^2 \theta(r) e^{pt} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{III.69})$$

Sachant que:

$$\nabla^2 Y_l^m(\theta, \varphi) f(r) = Y_l^m(\theta, \varphi) D_l f(r) \quad (\text{III.70})$$

O   $D_l$  est un opérateur indépendant de  $\theta$  et  $\varphi$ , déduit de l'expression de  $L^2$  tel que:

$$D_l = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (\text{III.71})$$

Donc l'équation (III.28) devient:

$$\theta(r) Y_l^m p e^{pt} = 2\beta(r) W(r) Y_l^m e^{pt} + \kappa D_l \theta(r) e^{pt} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{III.72})$$

Et qui devient:

$$\left( D_l - \frac{p}{\kappa} \right) \theta(r) = 2 \frac{\beta(r)}{\kappa} W(r) \quad (\text{III.73})$$

En prenant l'unité de mesure de longueur  $R_1$  (rayon de la sphère) et en multipliant l'équation par  $R_1^2$  où:

$$D_l = \frac{d^2}{d\left(\frac{r}{R_1}\right)^2} + \frac{2}{\left(\frac{r}{R_1}\right)} \frac{d}{d\left(\frac{r}{R_1}\right)} - \frac{l(l+1)}{\left(\frac{r}{R_1}\right)^2} \quad (\text{III.74})$$

Et encore:

$$D_l = \frac{d^2}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d}{dR} - \frac{l(l+1)}{R^2} \quad (\text{III.75})$$

O :  $R = \frac{r}{R_1}$

Et l'équation (III.73) devient:

$$\left( D_l - \frac{p}{\kappa} R_1^2 \right) \theta(r) = -2 \frac{\beta(r)}{\kappa} R_1^2 W(r) \quad (\text{III.76})$$

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

En multipliant et en divisant par  $v$ :

$$(D_l - \sigma Pr)\theta(r) = -\left(\frac{2\beta(r)R_1^2}{\kappa}\right)W(r) \quad (\text{III.77})$$

Ici  $\sigma = \frac{p}{v}R_1^2$  est un nombre complexe exprimant, comme  $p$ , le taux de progression ou de diminution des perturbations.

Et  $Pr$  : nombre de Prandtl étant défini par:  $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$

D'où, L'équation (III.46) de vorticité devient:

$$\frac{\partial}{\partial t}(Z(r)Y_l^m(\theta, \varphi)e^{pt}) = \nu \nabla^2(Z(r)Y_l^m(\theta, \varphi)e^{pt}) \quad (\text{III.78})$$

$$pZ(r) = \nu D_l Z(r) \quad (\text{III.79})$$

$$\left(D_l - \frac{p}{\nu}R_1^2\right)Z(r) = 0 \quad (\text{III.80})$$

$$(D_l - \sigma)Z(r) = 0 \quad (\text{III.81})$$

L'équation (III.54) s'écrit encore:

$$\nabla^2 \left( \nu \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) (W(r)Y_l^m e^{pt}) = \gamma L^2 [\theta(r)Y_l^m e^{pt}] \quad (\text{III.82})$$

Et :

$$D_l(\nu D_l - p)W(r) = \gamma l(l+1)\theta(r) \quad (\text{III.83})$$

$$D_l \left( D_l - \frac{R_1^2 p}{\nu} \right) W(r) = \gamma \frac{R_1^4}{\nu} l(l+1)\theta(r) \quad (\text{III.84})$$

Et enfin:

$$D_l(\nu D_l - \sigma)W(r) = \gamma \frac{R_1^4}{\nu} l(l+1)\theta(r) \quad (\text{III.85})$$

L'ensemble des équations(III.77), (III.81), (III.85) adimensionnelles, décrit l'état perturbé en termes de fonctions  $W(r)$ ,  $Z(r)$ ,  $\theta(r)$ .

Les conditions aux limites s'écrivent avec ces nouvelles variables:

$$W(r) = 0, \frac{dW(r)}{dr} = 0 \text{   } r = \eta, 1 \text{ si les surfaces sont rigides}$$

$$W(r) = 0, \frac{d^2W(r)}{dr^2} = 0 \text{   } r = \eta, 1 \text{ si les surfaces sont libres}$$

### III.5. PRINCIPE D'ECHANGE DE STABILITE:

Par l'analyse des perturbations, on voudrait démontrer qu'il y a réellement échange de stabilité à travers un état de stabilité neutre. En effet, dans l'expression des solutions du

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

problème, et plus précisément dans la fonction temporelle exponentielle, c'est la valeur du nombre complexe  $\sigma$  qui détermine si l'état du fluide est stable, neutre ou instable. En particulier, il y a échange de stabilité si la partie imaginaire du taux d'amplification des

perturbations  $\sigma$  est nulle. Dans ce qui suivra, on considère le cas d'une source de chaleur uniforme et accélération gravitationnelle telles que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta(r) = \frac{\epsilon}{6k} = \text{constante} \\ \gamma(r) = \alpha g(r) = \text{constante} \end{array} \right\}$$

On considère les équations de l'énergie, de vorticité et de mouvement, déjà établies en termes de  $\theta(r)$ ,  $W(r)$  et  $Z(r)$ :

$$(D_l - \sigma Pr) \theta(r) = - \left( \frac{2\beta(r)R_1^2}{\kappa} \right) W(r) \quad (\text{III.86})$$

$$(D_l - \sigma) Z(r) = 0 \quad (\text{III.87})$$

$$D_l(D_l - \sigma) W(r) = \gamma \frac{R_1^4}{\nu} l(l+1) \theta(r) \quad (\text{III.88})$$

En éliminant la température entre l'équation (III.86) et (III.88) en appliquant l'opérateur  $(D_l - \sigma Pr)$  sur l'équation (III.89):

$$(D_l - \sigma Pr) D_l(D_l - \sigma) W(r) = \gamma \frac{R_1^4}{\nu} l(l+1) (D_l - \sigma Pr) \theta(r) \quad (\text{III.89})$$

$$(D_l - \sigma Pr) D_l(D_l - \sigma) W(r) = \gamma \frac{R_1^4}{\nu} l(l+1) \left( - \frac{2\beta(r)R_1^2}{\kappa} \right) W(r) \quad (\text{III.90})$$

L'équation devient:

$$D_l(D_l - \sigma Pr) (D_l - \sigma) W(r) = -l(l+1) R\alpha_l W(r) \quad (\text{III.91})$$

Les valeurs  $R\alpha_l$  (nombre de Rayleigh) sont définies par:

$$R\alpha_l = \frac{2\beta(r)\gamma R_1^6 \gamma}{\kappa \nu} \quad (\text{III.92})$$

L'indice  $l$  met en évidence la dépendance de  $Ra$  avec le mode de perturbation. Pour chaque valeur de  $l$ , correspond une valeur de  $R\alpha_l$ . Tout de même, la valeur de  $l$  qui sera prise en considération est celle qui correspondra à la valeur minimale de  $R\alpha_l$  ou valeur critique.

Dans l'équation (III.85), On pose:

$$F = l(l+1) \frac{\gamma R_1^4}{\nu} \theta(r) \quad (\text{III.93})$$

Où:  $F$  est une fonction proportionnelle à  $\theta(r)$

L'équation (III.85) devient:

$$D_l(D_l - \sigma) W(r) = F \quad (\text{III.94})$$

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

En rapportant l'équation (III.94) dans l'équation (III.86) on obtient:

$$(D_l - \sigma Pr)F = -l(l+1)R\alpha_l W(r) \quad (III.95)$$

La fonction F est radiale et s'annule aux frontières comme  $W(r)$  (frontières imperméables).

Soit  $F^*$  le conjugué complexe de  $F$ . en multipliant l'équation (III.95)  $r^2 F$  et en intégrant sur le domaine des valeurs de  $r$ , de  $\eta$  à 1 ( $\eta$  étant le rapport des rayons), on obtient:

$$\int_{\eta}^1 r^2 F^* (D_l - \sigma Pr) F dr = -l(l+1)R\alpha_l \int_{\eta}^1 r^2 F^* W(r) dr \quad (III.96)$$

$$\int_{\eta}^1 (r^2 F^* D_l F - r^2 F^* F \sigma Pr) dr = -l(l+1)R\alpha_l \int_{\eta}^1 r^2 F^* W(r) dr \quad (III.97)$$

On a:

$$\int_b^a r^2 \phi^*(r) D_l \phi(r) dr = - \int_b^a \left\{ r^2 \left| \frac{d\phi(r)}{dr} \right|^2 + l(l+1) |\phi(r)|^2 \right\} dr \quad (III.98)$$

En appliquant ces propriétés à l'équation (III.97) on obtient:

$$\int_{\eta}^1 \left\{ r^2 \left| \frac{dF}{dr} \right|^2 + l(l+1) |F|^2 + r^2 \sigma Pr |F|^2 \right\} dr = l(l+1)R\alpha_l \int_{\eta}^1 r^2 F^* W(r) dr \quad (III.99)$$

On a:

$$\int_{\eta}^1 r^2 F^* W(r) dr = \int_{\eta}^1 r^2 W(r) D_l^2 W^*(r) - \sigma^* \int_{\eta}^1 r^2 w(r) D_l W^*(r) dr \quad (III.100)$$

On met:

$$I_1 = \int_{\eta}^1 r^2 D_l (D_l W^*(r)) dr = \left[ -r^2 \frac{dw}{dr} D_l W^*(r) \right]_{\eta}^1 + \int_{\eta}^1 r^2 [D_l w(r)]^2 dr \quad (III.101)$$

$$I_2 = -\sigma^* \int_{\eta}^1 r^2 w(r) D_l W^*(r) = \sigma^* \int_{\eta}^1 \left\{ r^2 \left| \frac{dw}{dr} \right|^2 + l(l+1) |W(r)|^2 \right\} dr \quad (III.102)$$

En revenant à  $I_1$  Où:

$$|D_l W^*(r)|_{\eta}^1 = \left| \frac{d^2}{dr^2} W^*(r) \right|_{\eta}^1 + \left| \frac{2}{r} \frac{d}{dr} W^*(r) \right|_{\eta}^1 - \left| \frac{l(l+1)}{r^2} W^*(r) \right|_{\eta}^1 \quad (III.103)$$

Si, la limite est rigide, alors:

$$\frac{d}{dr} w(r) = 0$$

$$\text{Et tout le terme: } \left[ -r^2 \frac{d}{dr} w(r) D_l W^*(r) \right]_{\eta}^1 = 0$$

Si non, la limite est libre et:

$$\frac{d^2}{dr^2} W^*(r) = 0$$

Ainsi:

$$|D_l W^*(r)|_{\eta}^1 = \left[ \frac{2}{r} \frac{d}{dr} W^*(r) \right]_{\eta}^1$$

Et donc:

$$I_1 = -2 \left[ r \left| \frac{d}{dr} w(r) \right|^2 \right]_{\eta}^1 + \int_{\eta}^1 r^2 |W(r)|^2 dr \quad (III.104)$$

## CHAPITRE III : INSTABILITE THERMIQUE

---

L'équation (III.99) devient:

$$\int_{\eta}^1 \left\{ r^2 \left| \frac{dF^2}{dr} \right| + l(l+1)|F|^2 + r^2 \sigma Pr |F|^2 \right\} dr - l(l+1)R\alpha_l \left\{ -2 \left[ r \left| \frac{dw}{dr} \right|^2 \right]_{\eta}^1 + \int_{\eta}^1 r^2 |W(r)|^2 dr + \sigma^* \int_{\eta}^1 \left\{ r^2 \left| \frac{dw}{dr} \right|^2 + l(l+1)|W(r)|^2 \right\} dr \right\} = 0 \quad (\text{III.105})$$

$\sigma^*$ : étant le complexe conjugué de  $\sigma$ .

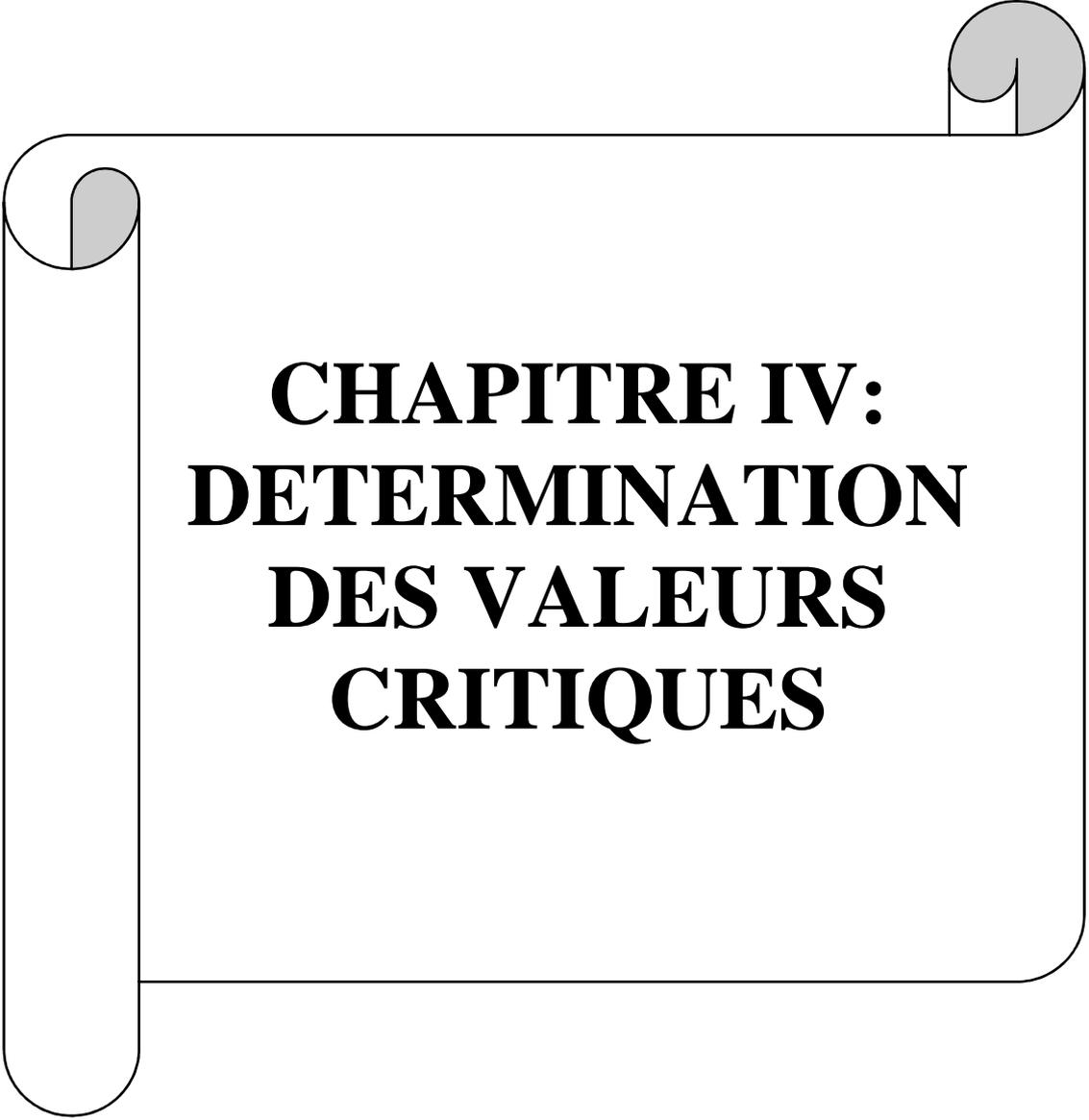
Le membre de gauche de l'équation (III.105) est un nombre complexe qui ne s'annule que si ses parties réelle et imaginaire sont nulles simultanément, la partie imaginaire étant:

$$\text{Im}g(\sigma) \left\{ Pr \int_{\eta}^1 r^2 |F|^2 dr + l(l+1)R\alpha_l \int_{\eta}^1 \left\{ r^2 \left| \frac{dw}{dr} \right|^2 + l(l+1)|W(r)|^2 \right\} dr \right\} = 0 \quad (\text{III.106})$$

Les termes entre les grandes accolades étant la somme de carrées (positifs), l'équation (III.106) est vérifiée que si:

$$\text{Im}g(\sigma) = 0 \quad (\text{III.107})$$

Le taux d'amplification des perturbations est ainsi réel. On a prouvé qu'avec les conditions du problème, fluide newtonien répondant à l'approximation de Boussinesq, confiné dans un espace sphérique soumis à une distribution de chaleur volumétrique uniforme, il y a possibilité d'échange de stabilité ou convection. (Il y a instabilité).



**CHAPITRE IV:  
DETERMINATION  
DES VALEURS  
CRITIQUES**

## CHAPITRE IV: DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUES

### INTRODUCTION:

Le principe d'échange de stabilité étant validé, on se propose de déterminer les valeurs critiques et minimales pour lesquelles se manifeste la convection. Le fluide convectant homogène est confiné dans une sphère de rayon  $R_1$ , les conditions aux limites sont les même qu'auparavant. L'instabilité se manifeste à travers un état de stabilité neutre (état marginal).

Les équations de perturbation gouvernant cet état correspondant à  $\sigma = 0$  (état stationnaire):

$$D_l Z(r) = 0 \quad (\text{IV.01})$$

$$D_l^2 W(r) = F(r) \quad (\text{IV.02})$$

$$D_l F(r) = -l(l+1)Ra_l W(r) \quad (\text{IV.03})$$

Le Laplacien ne permet pas d'avoir des solutions non nulles et qui s'annulent sur les frontières fermées

En  $r = 1$  ou  $\eta$ ,  $Z = 0$ .

L'équation (IV.01) doit avoir pour solution  $Z = 0$  (identiquement nulle), le champ de vitesse  $\vec{u}$  étant un champ poloidal.

Les équations (IV.02) et (IV.03) avec les conditions aux limites précisées déjà, constituent un problème à valeur caractéristique  $Ra_l$ .

En effet, pour une valeur donnée de  $l$ , on doit déterminer la valeur caractéristique de  $Ra_l$  minimale : c'est la valeur critique où se manifeste l'instabilité.

### IV.1. DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUE DE RAYLEIGH :

En posant  $\sigma = 0$  dans l'équation (III.105), on obtient :

$$l(l+1)Ra_l = \frac{\int_{\eta}^1 \left\{ r^2 \left| \frac{\partial F}{\partial r} \right|^2 + l(l+1)F^2 \right\} dr}{-2 \left[ r \left( \frac{\partial W(r)}{\partial r} \right)^2 \right]_{\eta}^1 + \int_{\eta}^1 r^2 (D_l W(r))^2 dr} \quad (\text{IV.04})$$

Par le principe variationnel, on démontre que la valeur minimale de  $Ra_l$  est le minimum absolue de la quantité du membre de droite de l'équation (IV.04).

On a pour une harmonique sphérique d'ordre (pour un mode normal, qui crée l'instabilité), la solution radiale  $F$  peut être écrite comme suit :

$$F = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_j A_j J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) \quad (\text{IV.05})$$

$A_j$  étant des coefficients constants. ( $\sqrt{r}$  vient d'un changement de variable).

La fonction  $F$  est un développement en séries de fonctions de Fourier-Bessel du premier type.

## CHAPITRE IV: DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUES

$J_{l+\frac{1}{2}}$  est la fonction de Bessel du premier type d'ordre  $(l + \frac{1}{2})$

$\alpha_{l,j}$  étant la  $j^{\text{ème}}$  racine de  $J_{l+\frac{1}{2}}$ ; pour  $j = 1, 2, \dots$

Toute cette étude se fera pour un  $l$  donné (un mode normal de perturbation).

La solution  $F$  ainsi écrite vérifie la condition au limite en  $r = 1, F = 0$ .

En effet, en  $r = 1, F = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_j A_j J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}) = 0$

Car:  $J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}) = 0$

On démontre que les  $J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r)$  forment une base orthogonale et:

$$\int_0^1 r J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r) \cdot J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}r) dr = \frac{1}{2} \delta_{jk} \left[ J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}) \right]^2 \quad (\text{IV.06})$$

$\delta_{jk}$  est le symbole de cronecker =  $\begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$ .

L'équation (IV.02) devient:

$$D_l^2 W(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_j A_j J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r) \quad (\text{IV.07})$$

Où:  $j$  varie en principe de 1 à  $\infty$  mais physiquement on ne prend que quelques valeurs.

La solution  $W$  de cette équation peut elle aussi être prise comme combinaison linéaire de fonctions  $W_j$  telle que:

$$W(r) = \sum_j A_j W_j \quad (\text{IV.08})$$

Les  $W_j$  sont solutions de l'équation:

$$D_l^2 W_j(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r) \quad (\text{IV.09})$$

Et qui satisfont les conditions aux limites du problème.

On démontre que:

$$D_l \left( \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r)}{\sqrt{r}} \right) = -\frac{\alpha_{l,j}^2}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r) \quad (\text{IV.10})$$

$$D_l \left( D_l W_j(r) \right) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r) \quad (\text{IV.11})$$

Et encore:

$$D_l \left( D_l W_j(r) \right) = -\frac{1}{\alpha_{l,j}^2} \left( -\frac{\alpha_{l,j}^2}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r) \right) \quad (\text{IV.12})$$

En utilisant le résultat précédent dans l'équation (IV.10):

## CHAPITRE IV: DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUES

---

$$D_l \left( \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r)}{\sqrt{r}} \right) = -\alpha_{l,j}^2 D_l (D_l W_j(r)) \quad (\text{IV.13})$$

$$\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r)}{\sqrt{r}} = -\alpha_{l,j}^2 D_l W_j(r) \quad (\text{IV.14})$$

Et donc:

$$D_l W_j(r) = -\frac{1}{\alpha_{l,j}^2} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r)}{\sqrt{r}} \quad (\text{IV.15})$$

Ou encore:

$$D_l W_j(r) = -\frac{1}{\alpha_{l,j}^4} \frac{\alpha_{l,j}^2}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r) \quad (\text{IV.16})$$

Et:

$$W_j(r) = \frac{1}{\alpha_{l,j}^4} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r)}{\sqrt{r}} \quad (\text{IV.17})$$

Une solution complémentaire à  $W_j(r)$  est  $B^{(j)}r^l + C^{(j)}r^{(l+2)}$ .

Ainsi:

$$W_j(r) = \frac{1}{\alpha_{l,j}^4} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r)}{\sqrt{r}} + B^{(j)}r^l + C^{(j)}r^{(l+2)} \quad (\text{IV.18})$$

Où:  $B^{(j)}$  et  $C^{(j)}$  sont déterminés par les conditions aux limites.

En effet: en  $r = 1, W_j(r) = B^{(j)} + C^{(j)} = 0$

C'est à dire  $B^{(j)} = -C^{(j)}$

Et donc:

$$W_j(r) = \frac{1}{\alpha_{l,j}^4} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r)}{\sqrt{r}} + B^{(j)}(r^l - r^{(l+2)}) \quad (\text{IV.19})$$

Et:

$$\frac{dW_j(r)}{dr} = \frac{1}{\alpha_{l,j}^4} \frac{d}{dr} \left( \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}r)}{\sqrt{r}} \right) + B^{(j)}(lr^{l-1} - (l+2)r^{(l+1)}) \quad (\text{IV.20})$$

Sur la surface rigide:  $\left( \frac{dW_j(r)}{dr} = 0 \right)$  (à  $r = 1$ ), on obtient :

$$\frac{1}{\alpha_{l,j}^4} \left[ \frac{1}{\sqrt{r}} \alpha_{l,j} \frac{d}{d(\alpha_{l,j}r)} J_{l+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2r^{3/2}} J_{l+\frac{1}{2}} \right] \Bigg|_{r=1} + B^{(j)}(l - l - 2) = 0 \quad (\text{IV.21})$$

Ou encore

## CHAPITRE IV: DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUES

$$\frac{1}{\alpha_{l,j}^3} J'_{l+\frac{1}{2}} - 2B^{(j)} = 0 \quad (\text{IV.22})$$

Donc:

$$B^{(j)} = -\frac{1}{2\alpha_{l,j}^3} J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j}) \quad (\text{IV.23})$$

Sur la surface libre,  $\left(\frac{d^2 W_j(r)}{dr^2} = 0\right)$  (en  $r = 1$ ), on obtient :

$$B^{(j)} = -\frac{1}{(2l+1)} \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j})}{\alpha_{l,j}^3} \quad (\text{IV.24})$$

Soit donc:

$$B^{(j)} = -\frac{1}{4} q \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j})}{\alpha_{l,j}^3} \quad (\text{IV.25})$$

Tel que:

$$q = \left\{ \begin{array}{l} 2 \quad \text{pour surface rigide en } r = 1 \\ -\frac{4}{(2l+1)} \quad \text{pour surface libre en } r = 1 \end{array} \right\} \quad (\text{IV.26})$$

On rapporte le tout dans l'équation:

$$D_l F(r) = -l(l+1) R a_l W(r)$$

On obtient:

$$D_l \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_j A_j J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) = \sum_j A_j D_l \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r)}{\sqrt{r}} \quad (\text{IV.27})$$

Ou encore

$$\sum_j A_j D_l \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r)}{\sqrt{r}} = \sum_j A_j \left( -\frac{\alpha_{l,j}^2}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) \right) \quad (\text{IV.28})$$

Et donc

$$\sum_j A_j \frac{\alpha_{l,j}^2}{\sqrt{r}} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) = -l(l+1) R a_l \sum_j A_j \left\{ \frac{1}{\alpha_{l,j}^4} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r)}{\sqrt{r}} + B^{(j)} (r^l - r^{l+2}) \right\} \quad (\text{IV.29})$$

On multiplie l'équation de part et d'autre par  $r^{3/2} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r)$  et on intègre sur  $[0,1]$ :

$$\int_0^1 \sum_j A_j \alpha_{l,j}^2 r J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r) dr = l(l+1) R a_l \left\{ \int_0^1 A_j \frac{r}{\alpha_{l,j}^4} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j} r) J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r) dr + \int_0^1 \sum_j A_j B^{(j)} r^{3/2} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r) (r^l - r^{l+2}) dr \right\} \quad (\text{IV.30})$$

En utilisant les propriétés des fonctions de Bessel, on trouve:

## CHAPITRE IV: DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUES

$$\alpha_{l,k}^2 A_k \frac{1}{2} \left[ J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r) \right]^2 \Big|_0^1 = l(l+1) R a_l \left\{ \frac{1}{2} A_k \frac{1}{\alpha_{l,k}^4} \left[ J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}) \right]^2 + \sum_j A_j \int_0^1 B^{(j)} J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r) \left( r^{l+\frac{3}{2}} - r^{l+\frac{7}{2}} \right) dr \right\} \quad (IV.31)$$

On pose:

$$\left( \frac{k}{j} \right) = B^{(j)} \int_0^1 \left( r^{l+\frac{3}{2}} - r^{l+\frac{7}{2}} \right) J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r) dr \quad (IV.32)$$

Où :  $\left( \frac{k}{j} \right)$  est un élément de la matrice à  $k$  lignes et  $j$  colonnes.

$$\sum_j A_j \left( \frac{k}{j} \right) = \sum_j A_j B^{(j)} \int_0^1 \left( r^{l+\frac{3}{2}} - r^{l+\frac{7}{2}} \right) J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k} r) dr \quad (IV.33)$$

Dans l'évaluation de l'élément de matrice  $\left( \frac{k}{j} \right)$ , le groupe intégral  $\left( \frac{k}{j} \right)$  peut-être apparent si les diverses relations récursives validées par la fonction de Bessel sont utilisées de manière appropriée. On a:

$$\left( \frac{k}{j} \right) = 2B^{(j)} \frac{J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k})}{\alpha_{l,k}^2} \quad (IV.34)$$

**Relations de récurrence reliant les fonctions de Bessel:**

- a)  $J_{v-1}(z) + J_{v+1}(z) = \frac{2v}{z} J_v(z)$
- b)  $-J_{v+1}(z) + \frac{v}{z} J_v(z) = J'_v(z)$
- c)  $J_{v-1}(z) - J_{v+1}(z) = 2J'_v(z)$
- d)  $J_{v-1}(z) - \frac{v}{z} J_v(z) = J_v(z)$

En utilisant davantage les relations de récurrence satisfaites par les fonctions de Bessel et en se rappelant que  $\alpha_{l,k}$  est un zéro de  $J_{l+\frac{1}{2}}(x)$ , on trouve que:

$$J_{l+\frac{5}{2}}(\alpha_{l,k}) = \frac{2(l+\frac{3}{2})}{\alpha_{l,k}} J_{l+\frac{3}{2}}(\alpha_{l,k}) \quad (IV.35)$$

Et encore :

## CHAPITRE IV: DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUES

$$J_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}) = -\frac{2(l+\frac{3}{2})}{\alpha_{l,k}} J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}) \quad (\text{IV.36})$$

Et donc, l'élément  $\binom{k}{j}$  s'écrit:

$$\binom{k}{j} = \frac{2B^{(j)}}{\alpha_{l,k}^2} \left( \frac{-2(l+\frac{3}{2})}{\alpha_{l,k}} J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}) \right) \quad (\text{IV.37})$$

Ou encore :

$$\binom{k}{j} = -4 \frac{(l+\frac{3}{2})}{\alpha_{l,k}^3} J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}) B^{(j)} \quad (\text{IV.38})$$

Et

$$B^{(j)} = \frac{1}{4} q \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j})}{\alpha_{l,j}^3} \quad (\text{IV.39})$$

Donc:

$$\binom{k}{j} = -q \left( l + \frac{3}{2} \right) \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}) J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j})}{\alpha_{l,k}^3 \alpha_{l,j}^3} \quad (\text{IV.40})$$

Ainsi:

$$\frac{1}{2} \left[ J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}) \right]^2 \alpha_{l,k}^2 A_k = l(l+1)Ra_l \left\{ \frac{\frac{1}{2} \left[ J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}) \right]^2}{\alpha_{l,k}^4} A_k + \sum_j \left( -q \left( l + \frac{3}{2} \right) \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}) J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j})}{\alpha_{l,k}^3 \alpha_{l,j}^3} \right) A_j \right\} \quad (\text{IV.41})$$

Qui est manifestement symétrique en  $k$  et  $j$ . On divise l'équation (IV.30) par  $l(l+1)Ra_l$  et on réutilise  $\delta_{jk}$ . On obtient:

$$\frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j})}{\alpha_{l,j}^3} \sum_j \left\{ \frac{1}{2} J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,k}) \left( \frac{\alpha_{l,k}^5}{l(l+1)Ra} - \frac{1}{\alpha_{l,k}} \right) \delta_{jk} + q \left( l + \frac{3}{2} \right) \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j})}{\alpha_{l,j}^3} \right\} A_j = 0 \quad (\text{IV.42})$$

On divise l'équation (IV.42) par  $q \left( l + \frac{3}{2} \right)$ , on aura:

$$\sum_j \left\{ \left( \frac{\alpha_{l,k}^3}{q(2l+3)l(l+1)Ra_l} - \frac{\alpha_{l,k}^2}{q(2l+3)} \right) \delta_{jk} + 1 \right\} \frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j})}{\alpha_{l,j}^3} A_j = 0 \quad (\text{IV.43})$$

On pose:

$$\frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(\alpha_{l,j})}{\alpha_{l,j}^3} A_j = \mathcal{A}_j$$

On aura:

## CHAPITRE IV: DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUES

$$\sum_j \left\{ \left( \frac{a_{l,k}^8}{q(2l+3)} \right) \left[ \frac{1}{l(l+1)Ra_l} - \frac{1}{a_{l,k}^6} \right] \delta_{jk} + 1 \right\} \mathcal{A}_j = 0 \quad (\text{IV.44})$$

Un élément de la diagonale ( $j = k$ ):

$$\left\{ \left( \frac{a_{l,k}^8}{q(2l+3)} \right) \left[ \frac{1}{l(l+1)Ra_l} - \frac{1}{a_{l,k}^6} \right] + 1 \right\} \quad (\text{IV.45})$$

On obtient ainsi un problème aux valeurs propres qui impose un déterminant nul pour éviter la solution triviale nulle.

La première approximation de la valeur de  $Ra_l$  est obtenue en définissant l'élément (1,1) de la matrice .Le déterminant se réduit donc à un seul élément égale à zéro. C'est-à-dire:

$$\frac{a_{l,1}^8}{q(2l+3)} \left[ \frac{1}{l(l+1)Ra_l} - \frac{1}{a_{l,1}^6} \right] + 1 = 0 \quad (\text{IV.46})$$

Donc:

$$l(l+1)Ra_l = \frac{a_{l,1}^8}{a_{l,1}^2 - q(2l+3)} \quad (\text{IV.47})$$

Où  $a_{l,1}$ : est une première racine de  $J_{l+\frac{1}{2}}$

Mais avant de calculer la valeur de  $Ra_l$ , il faudrait déterminer approximativement les premières racines  $a_{l,j}$ , il est très utile d'user des relations de récurrence et des propriétés de dérivation des fonctions de Bessel. On approche numériquement les racines pour chaque modèle. Par exemple, on a pour  $l = 1$  :

$$2Ra_1 = \frac{a_{1,1}^8}{a_{1,1}^2 - q(2+3)} \quad (\text{IV.48})$$

$\alpha_{1,1}$  est la première racine de  $J_{\frac{3}{2}}(x)$ , où:

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( \frac{\sin x - x \cos x}{x} \right)$$

Les relations de récurrence utilisées pour la détermination des fonctions de Bessel appropriées sont:

$$J_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$J_{l+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} J_l(x)$$

## CHAPITRE IV: DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUES

---

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} J_0(x)$$

Dans le cas  $l = 2$

$$6Ra_2 = \frac{a_{2,1}^8}{a_{2,1}^2 - q(4+3)} \quad (\text{IV.49})$$

$\alpha_{2,1}$  est la première racine de  $J_{\frac{5}{2}}(x)$ , où:

$$J_{\frac{5}{2}}(x) = \frac{2 \left(\frac{3}{2}\right)}{x} J_{\frac{3}{2}}(x) - J_{\frac{1}{2}}(x)$$

Et dans le cas  $l = 3$ :

$$12Ra_3 = \frac{a_{3,1}^8}{a_{3,1}^2 - q(4+3)} \quad (\text{IV.50})$$

$\alpha_{3,1}$  est la première racine de  $J_{\frac{7}{2}}(x)$ , où:

$$J_{\frac{7}{2}}(x) = \frac{2 \left(\frac{5}{2}\right)}{x} J_{\frac{5}{2}}(x) - J_{\frac{3}{2}}(x)$$

Les valeurs du nombre Ra sont rapportées dans les tableaux suivants selon le type de frontière considérée.

| $l$  | 1                    | 2                    | 3                    |
|------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $Ra$ | $3.0940 \times 10^3$ | $5.2274 \times 10^3$ | $8.7786 \times 10^3$ |

**Tableau 1:** les valeurs critiques de Rayleigh pour le cas de surface libre.

## CHAPITRE IV: DETERMINATION DES VALEURS CRITIQUES

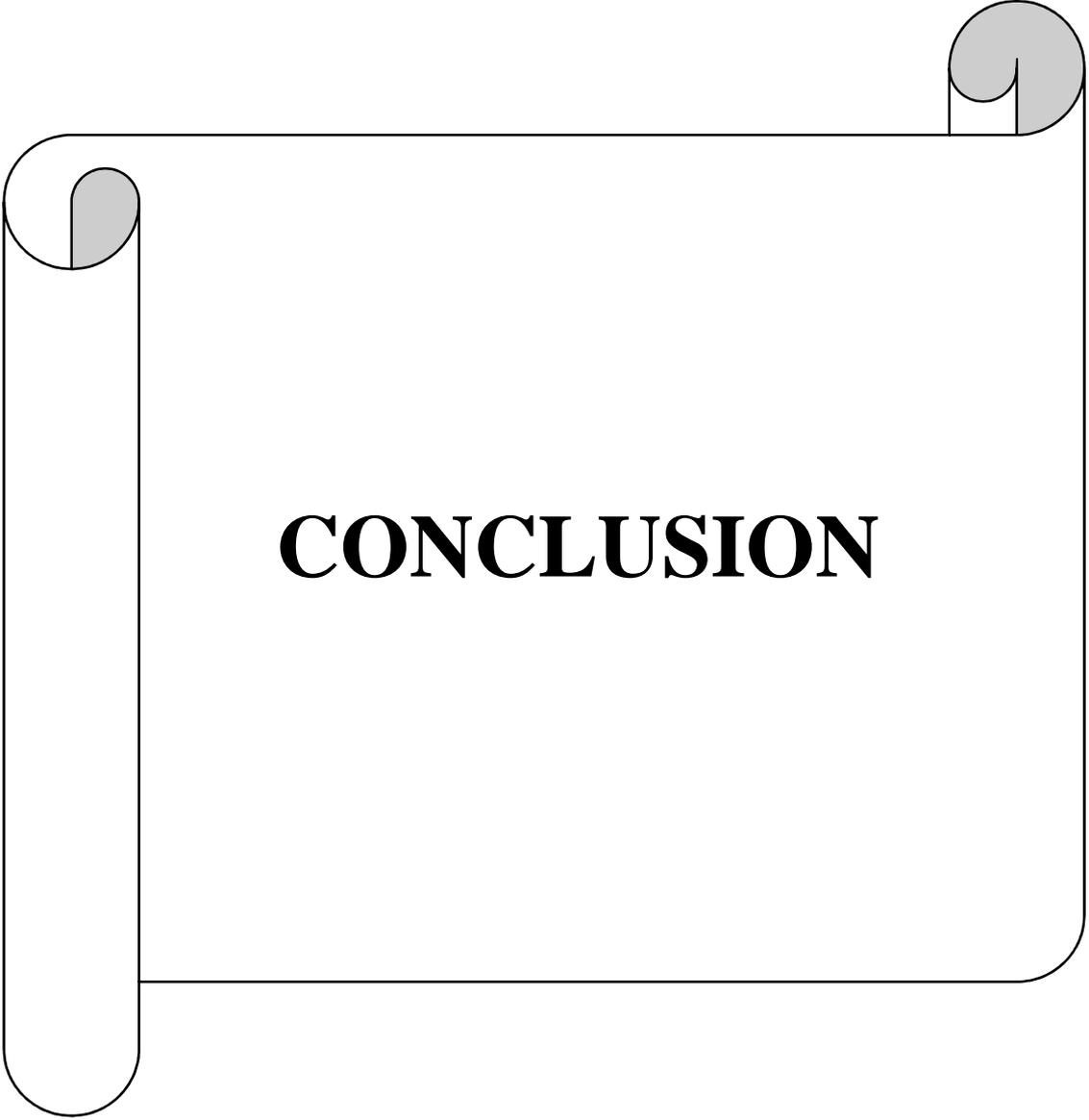
---

| $l$  | 1                    | 2                    | 3                    |
|------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $Ra$ | $8.1540 \times 10^3$ | $1.0559 \times 10^4$ | $1.5368 \times 10^4$ |

**Tableau 2:** les valeurs critiques de Rayleigh pour le cas de surface rigide.

On note que la valeur  $Ra_1$  critique est la valeur minimale. Dans notre cas, c'est celle qui correspond à  $l = 1$ .

Les valeurs de  $Ra_1$  critiques pour les cas de la surface libre sont inférieures à celles de la Frontière rigide. Ceci mène à dire que les surfaces rigides freinent le mouvement convectif.

A graphic of a scroll with a black outline and a light gray fill. The scroll is partially unrolled, with the top and bottom edges curled up. The word "CONCLUSION" is written in a bold, black, serif font in the center of the unrolled portion.

**CONCLUSION**

## Conclusion

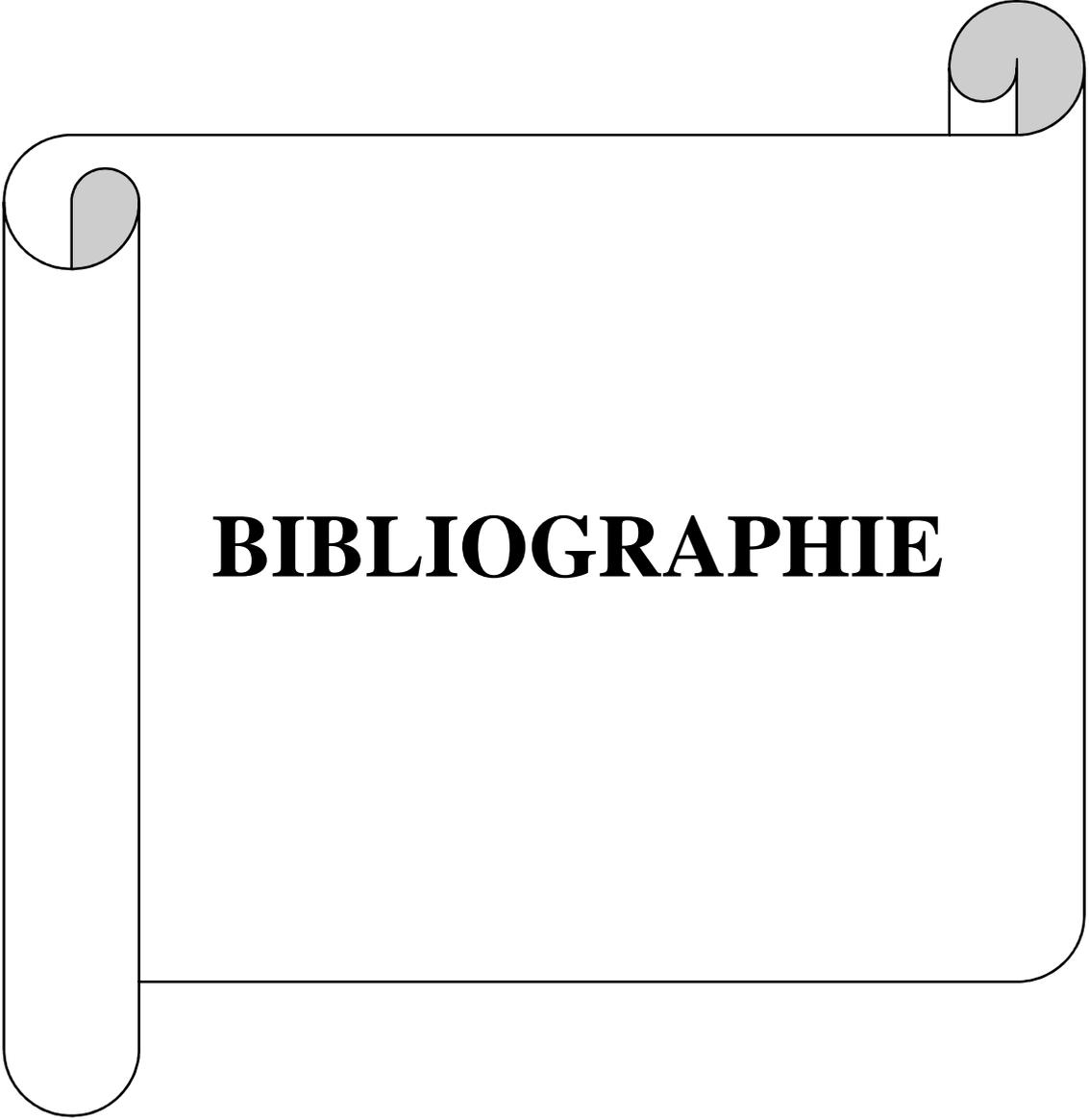
Le travail présenté dans ce mémoire est une étude analytique du transfert de chaleur par convection naturelle dans le manteau terrestre soumis à un champ gravitationnel radial a été présentée.

Le modèle mathématique est représenté par les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie dans les coordonnées cartésiennes puis aux coordonnées sphériques.

L'approximation de Boussinesq et des hypothèses simplificatrices sont adopté afin de simplifier le système d'équations. La discrétisation des équations est réalisée par a méthode de la théorie des perturbations infinitésimales.

Le but principal de notre étude est de démontrer qu'il y a instabilité thermique. On se propose alors de calculer les valeurs critiques du nombre adimensionnel Ra pour lesquelles se manifeste les premières bifurcations, qui correspondent au seuil de démarrage de la convection dans le fluide confiné dans un espace sphérique.

A la fin, on démontre que l'instabilité dépend de la nature de la frontière aux conditions limites.



# **BIBLIOGRAPHIE**

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Labrosse · D. d'Éric et Y.Ricard, 'frontière\_noyau\_manteau' n°67, avril-juin\_2010
- [2] M.Debih· M. Brahimi· 'Etude numérique de la convection naturelle au sein d'une cavité carrée', Mémoire. Université de Msila.(2019/2020).
- [3] la machine thermique de la terre ' <https://docplayer.fr/8267329-Chapitre-14-la-machinerie-thermique-de-la-terre.html> ' consulte le 05-05-2021.
- [4] E.H.Bishop, R.S.Koflat, L.R.Mach J.A. Scanlan, 'Convection heat transfer between concentric spheres', Proc.1964, Heat transfer fluid Mech. Inst., Berkley, p.69-80( 1964).
- [5] J.A.Scanlan, E. Bishop, 'Natural convection heat transfer between concentric spheres', J. Heat Transfer, 13, p.1857-1872(1970).
- [6] J.A.Scanlan, S.H.Yin, R.E.Powe and E.H.Bishop, 'Natural convection flow patterns in spherical annuli', J. Heat Mass Transfer, 16, p.1785-1795(1973).
- [7] J.P.Caltagirone, M.Combarous, M. Mojtabi, 'Natural convection between two concentric spheres :Transition toward a multicellular flow', J. Numerical heat transfer, 3, p.107- 119(1980).
- [8] J.L.Wright, R.W.Douglass, 'Natural convection in narrow-gap spherical annuli', Int. J. Heat Mass Transfer, 29, p.725-739(1986).
- [9] David R.Gardner, R.W. Douglass, 'Linear stability of natural convection in spherical annuli', J. Fluid Mechanics, 221, p. 105-129(1990).
- [10] Rod. W. Douglass, Steven.A.Trogdon and David R.Gardner, 'Prandtl number effects on the stability of natural convection between spherical shells', Int. Heat Mass Transfer, 33, N°11, p.2533-2544(1990).
- [11] Vijay.k.Garg, 'Natural convection between concentric spheres', Int.J. Heat Mass Transfer, 35, N°8, p.1935-1945(1992).

- [12] Hsin Sen Chu and Tzong Shing Lee, 'Transient natural convection heat transfer between concentric spheres ', *Int.J. Heat Mass Transfer*, 36, N°13, p.3159-3170(1993).
- [13] G. Schubert, D. Bercovici and G.A.Glatzmairer, , 'Mantle dynamics in mars and Venus: Influence of an immobile lithosphere on three-dimensional mantle convection', *J. Geophysical research*, 95, N°B9, p.105-129(1990).
- [14] S.Chandrasekhar, 'hydrodynamique and hydromagnetic stability', ch.II and ch.VI. Clarendon press, Oxford (1961).
- [15] F.H.Busse, 'Patterns of convection in spherical shells', *J. Fluid Mech*, 72, p.67-85(1975).
- [16] F.H.Busse and M.Riahi, 'Patterns of convection in spherical shells', *J. Fluid Mech*, 123, p.283-301(1980).
- [17] A.Zebib and G. Schubert, 'Infinite Prandtl number thermal convection in a spherical shells', *J. Fluid Mech*. 97, p.259-277(1980).
- [18] A.Zebib and G. Schubert, 'Thermal convection of a internally heated infinite Prandtl number fluid in a spherical shells', *Geophys. Astrophy. Fluid Dyn.* 15, pp.65-90(1980).
- [19] A.Zebib and G. Schubert, 'Character and stability of axisymmetric thermal convection in spheres and spherical shells', *Geophys. Astrophy. Fluid Dyn.* 23, p.1-42(1983).
- [20] A.Zebib and Atulk. Goyal, 'convection motions in spherical shells', *J. Fluid Mech*. 152, p.39-48(1985).
- [21] D.Bercovici, G.Schubert, G.A.Glatzmairer and A.Zebib, 'Three dimensional thermal convection in a spherical shells', *J. Fluid Mech*. 206, p.75-104(1989).
- [22] D.Bercovici, G.Schubert, and G.A.Glatzmairer, 'Three dimensional thermal convection of an infinite Prandtl number, compressible fluid in a basally heated spherical shells', *J. Fluid Mech*. 239, p.683-719(1992).
- [23] S.Boughali, 'Transfert de chaleur par conduction', *Mémoire*.(2013\2014).

## Résumé

Ce travail concerne une étude analytique de la stabilité linéaire de la convection naturelle pour un fluide répondant au modèle de Boussinesq, soumis au champ gravitationnel radial, dans une géométrie sphérique (cas du manteau terrestre) et en présence d'une source de chaleur interne. Par la théorie des perturbations infinitésimales, on démontre qu'il y a instabilité thermique. On se propose de calculer les valeurs critiques du nombre adimensionnel Ra (Rayleigh) qui correspondent au seuil de démarrage de la convection dans le fluide confiné dans une sphère. On trouve que ces valeurs critiques dépendent de la géométrie et de la nature des frontières qu'elles soient rigides ou libres.

## ملخص

يتعلق هذا العمل بدراسة تحليلية للاستقرار الخطي للحمل الطبيعي. لسائل مطابق لنموذج بوسينسك يخضع لحقل الجاذبية الشعاعي، في هندسة كروية (غلاف الأرض) وبوجود مصدر حرارة داخلي من الناحية النظرية اضطرابات متناهية الصغر، نشبت أن هناك عدم استقرار حراري. نقترح حساب القيم الحرجة للرقم رايلي (Rayleigh) بلا أبعاد والتي تتوافق مع عتبة بداية الحمل الحراري في السائل المحصور في كرة. نجد أن هذه القيم الحرجة تعتمد على الهندسة وطبيعة الحدود، سواء كانت صلبة أو حرة.