



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des sciences et de la technologie
Département de génie mécanique

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Techniques
Filière : Génie Mécanique
Spécialité : Construction Mécanique

Réf. :

Présenté et soutenu par :
Abdelkader BOUDJEMLINE

Le : dimanche 4 juillet 2021

Contribution à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux composites à l'aide de la méthode des éléments finis multi-phases.

Jury :

Dr.	Tahar MASRI	MCA	Université de Biskra	Président
Dr.	Tarek DJOUDI	MCB	Université de Biskra	Examineur
Pr.	Lakhdar SEDIRA	Pr	Université de Biskra	Rapporteur

Année universitaire :2020 - 2021

Remerciement

Je dois tout d'abord remercier Le Dieu, pour m'avoir donné la santé et la force pour accomplir ce travail

En premier lieu, Je tiens à exprimer mes remerciements à mon encadreur **Pr. Lakhdar SEDIRA**, Professeur au département de génie mécanique, Université de Biskra. Je lui exprime ma profonde et pure reconnaissance pour son aide, ses orientations et l'intérêt qu'il a porté durant la réalisation de ce travail et pour ses conseils avertis et constructifs et surtout pour sa sympathie.

Je tiens très sincèrement à remercier Monsieur le **Pr. Semcheddine DERFOUF**, Professeur à l'université de Batna 2, pour ses conseils scientifiques, parentales et amicales durant les trois années précédentes. J'adresse mes remerciements à Monsieur **Dr. Kamel AOUES**, maître de conférences « A » au département de génie mécanique, université de Biskra, pour sa disponibilité. Je tiens à remercier également **Mr. Samir CHOUARFIA**, doctorant au laboratoire de génie mécanique (LGM) pour sa disponibilité et ses précieux conseils et orientations.

Aussi, Je tiens à remercier les membres du jury **Dr. Tahar MASRI** et **Dr. Tarek DJOUDI** pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Ainsi, j'adresse mes remerciements à tous mes enseignants qui ont fait partie de ma formation durant ce cycle.

Résumé

Le présent travail est une contribution à l'analyse et la caractérisation des matériaux composites. Il consiste à développer une nouvelle approche numérique d'homogénéisation basée sur l'analyse micrographique des matériaux en question. Des routines algorithmiques ont été implémentées dans un support de calcul par éléments finis afin de tenir en compte la variation graduelle des propriétés élastiques des matériaux. Un élément quadrangle à quatre nœuds Q4 est développé et validé par des tests standards. Des tests pour des composites structurés et à renfort aléatoire, ainsi qu'une analyse paramétrique ont été effectués. La méthode a fourni des résultats en excellent accord avec ceux expérimentaux et numériques. Un maillage au-delà de 200×200 éléments est généralement recommandé pour s'entreprendre n'importe quel calcul d'homogénéisation des matériaux composites. Des applications sur les matériaux à gradient fonctionnel ont confirmé également la fiabilité de la nouvelle approche ce qui élargit son domaine d'application.

Mots clés : Homogénéisation, analyse micrographique, matériaux composites, matériaux à gradient fonctionnel.

المخلص

يمثل هذا العمل مساهمة في تحليل المواد المركبة وتوصيفها. تتمثل هذه المساهمة في وضع نهج جديد للتجانس الرقمي يستند إلى التحليل الميكروغرافيكي للمواد المعنية. وقد تم تنفيذ العديد من الروتينات الخوارزمية في وسيط حاسوبي محدود يعتمد على طريقة العناصر المنتهية لحساب التباين التدريجي للخواص المرنة للمواد. ويتم تطوير عنصر رباعي مع أربع عقدات ويتم التحقق من صحته عن طريق الاختبارات القياسية. وأجريت اختبارات للمكونات المهيكلة والمعززة عشوائياً، فضلاً عن تحليل بارامتري. وأتاحت هذه الطريقة التوصل إلى اتفاق ممتاز مع الأساليب التجريبية والرقمية. يوصى عموماً بحجم شبكة يزيد على 200×200 عنصر لأي حساب لتجانس المواد المركبة. كما أكدت التطبيقات المتعلقة بمواد التدرج الوظيفي موثوقية النهج الجديد، وتوسيع نطاقه.

الكلمات المفتاحية: التجانس، التحليل الميكروغرافيكي، المواد المركبة، مواد التدرج الوظيفي.

Abstract

This work is a contribution to the analysis and characterization of composite materials. It consists in developing a new digital homogenization approach based on micrographic analysis of the materials in question. Algorithmic routines have been implemented in a finite element computing medium to account for the gradual variation of elastic properties of materials. A quadrangle element with four nodes Q4 is developed and validated by standard tests. Tests for structured and randomly reinforced composites, as well as parametric analysis were performed. The method provided results in excellent agreement with experimental and numerical ones. A mesh size of more than 200×200 elements is generally recommended for any calculation of homogenization of composite materials. Applications on functionally graded materials have also confirmed the reliability of the new approach, broadening its scope.

Keywords: Homogenization, micrographic analysis, composite materials, functionally graded materials.

Sommaire

Remerciement.....	I
Résumé.....	II
المخلص.....	II
Abstract.....	II
Liste des figures.....	V
Liste des tableaux.....	VII
Introduction générale :.....	2
Cadre et objectifs du mémoire :.....	2
Contribution personnelle :.....	2
Plan du mémoire :.....	3
Chapitre I : Recherche bibliographique sur les méthodes d’homogénéisations, lois de distribution et les conditions aux limites.....	5
Introduction.....	5
I.1. L’homogénéisation.....	5
I.1.1. Les méthodes d’homogénéisation.....	6
I.1.1.a. Les méthodes analytiques.....	6
I.1.1.b. Les méthodes numériques.....	9
I.2. Les lois de distribution.....	11
I.2.1. La loi normale.....	11
I.2.2. La loi de poisson.....	12
I.2.3. La méthode de Monte-Carlo.....	12
I.3 Les conditions aux limites.....	12
I.3.1. Conditions homogènes sur le contour en déformation (Kinematic Uniform Boundary Conditions-KUBC).....	13
I.3.2. Conditions homogènes sur le contour en contrainte (Stress Uniform Boundary Conditions-SUBC).....	13
I.3.3. Conditions aux limites périodiques (Periodic Boundary Conditions PBC).....	13

Conclusion :.....	14
Chapitre II : Calcul de rigidité de l'élément quadrilatère multi-phase	16
Introduction	16
II.1 Formulation de l'élément Q4.....	16
II.2. Matrice de rigidité par intégration numérique	20
II.3. Présentation de la nouvelle méthode élément fini multi-phase	22
Conclusion.....	24
Chapitre III : Application et validation numériques des résultats	26
Introduction	26
III.1 Tests de validation de la méthode des éléments multi phases.....	26
III.1.1 Etude de la convergence de la méthode multi phases (distribution aléatoire).....	26
III.1.2 Calcul des propriétés élastiques d'un matériau composite unidirectionnel (Polyamide 6/fibre de Verre E).....	32
III.1.3 L'effet du rayon d'inclusion sphérique sur les propriétés mécaniques du composite	34
III.1.4 Etude de l'effet de l'éclatement de la fibre (L/d) sur les propriétés mécaniques (E,v) ..	38
III.2.1. L'effet du gradient des propriétés mécaniques des constituants sur le module d'élasticité	41
III.2.1.1. Cas d'un gradient linéaire.....	41
III.2.1.2. Cas d'un gradient par couche	47
III.2.2. Cas d'un gradient exponentiel (E-FGM)	51
Conclusion :.....	55
Conclusion générale :	56
Références bibliographiques :	58
Annexes	60
Annexe	61
Algorithme de calcul élément fini multi-phase	61

Liste des figures

Figure 1: L'homogénéisation.....	5
Figure 2: Processus de stockage des pixels pour les voxels.....	9
Figure 3: La méthode de la fibre projetée : a) Aspect conceptuels et physiques de la méthode, b) Principe de l'Approche de la Fibre Projetée	10
Figure 4: Principe de découpage de la méthode PF	10
Figure 5: Courbe en cloche	12
Figure 6: Structure avec maillage de Q4.....	16
Figure 7: Element Q4	16
Figure 8: Les points de gauss	22
Figure 9: Description graphique de la nouvelle approche multi-phase.....	23
Figure 10: Conditions aux limites pour les matériaux FGM.....	24
Figure 11: SER d'un composite à renfort aléatoire PP/chanvre	26
Figure 12: Conditions aux limites appliqués sur la SER.....	27
Figure 13: Convergence de Module de Young en fonction de nombre d'éléments.	28
Figure 14: Convergence de coefficient de Poisson en fonction de nombre d'éléments.	28
Figure 15: Maillage du composite PP-Chanvre réalisé par le logiciel ANSYS 2021	29
Figure 16: Répartition des contrainte obtenue par : a) Le logiciel DIGIMAT 2021, b) la nouvelle technique multi-phase	30
Figure 17: Etat de déformation Epsilon11 obtenue par : a) Le logiciel DIGIMAT 2021, b) la nouvelle technique multi-phase.....	31
Figure 18: Illustration représente l'espacement.....	32
Figure 19: SER représente le composite unidirectionnel (Noir : fibre de verre/ Blanc : Polyamide 6).....	33
Figure 20: L'état de contrainte sigma11 dans le cas d'un matériau unidirectionnel.	34
Figure 21: Présentation des SER : a : R=25, b : R=50, c : R=100, d : R=250	35
Figure 22: Variation du module de Young en fonction du R.....	36
Figure 23: Variation du coefficient de Poisson en fonction du R.	36
Figure 24: Présentation de l'état de déformation pour les différentes tailles d'inclusion sphériques.....	37
Figure 25: Les microstructures étudiées : a : L/D=1, b : L/D=5, c : L/D=20.....	38
Figure 26: Variation du module de Young en fonction de L/D	39
Figure 27: Variation du coefficient de Poisson en fonction de L/D.....	39
Figure 28: Etat de déformation L/D :1	40

Figure 29: Etat de contrainte L/D :1.....	40
Figure 30: Etat de déformation L/D :5	40
Figure 31: Etat de contrainte L/D :5.....	40
Figure 32: Etat de déformation L/D :20.....	41
Figure 33: Etat de contrainte L/D :5.....	41
Figure 34: Image dégradée représente un matériau FGM.....	41
Figure 35: comparaisons de la variation du module de Young du matériau Al-Al ₃ Ni.....	42
Figure 36: comparaison de la variation du module de Young du matériau Cenosphere-Polyester	43
Figure 37: comparaison de la variation du module de Young du matériau Ni ₃ Al-TiC.....	43
Figure 38: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau Cenosphere- Polyester.....	44
Figure 39: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau AL ₃ Ni.....	45
Figure 40: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau Ni ₃ Al-TiC.....	46
Figure 41: Le gradient par couche.....	47
Figure 42: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau Cenosphere- Polyester.....	48
Figure 43: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau AL ₃ Ni.....	49
Figure 44: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau Ni ₃ Al-TiC.....	50
Figure 45: La variation du module de Young dans le cas de E-FGM.....	51
Figure 46: Etat de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau E-FGM Cenosphere-Polyester.....	52
Figure 47: Etat de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau E-FGM AL ₃ Ni.....	53
Figure 48: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau E-FGM Ni ₃ Al- TiC.....	54

Liste des tableaux

Tableau 1: Fonctions de formes et leurs dérivées	19
Tableau 2: Tableau de Gauss-Legendre	21
Tableau 3: Propriétés géométriques et mécaniques des constituants	27
Tableau 4: Les propriétés de la matrice et du renfort.....	34
Tableau 5: Comparaison entre les résultats obtenues de différentes méthodes	34
Tableau 6: Les propriétés des matériaux pour cette étude	35
Tableau 7: L'élanement de la fibre L/D	38
Tableau 8: Comparaison entre les résultats de module de Young (GPa) de cas de gradient linéaire et gradient par couche.....	47
Tableau 9: L'effet du gradient des propriétés mécaniques des constituants sur le module d'élasticité	51

Introduction générale

Introduction générale :

Cadre et objectifs du mémoire :

Les phénomènes multi-échelles font partie de notre vie quotidienne. Notre temps par exemple est un phénomène multi-échelle, on organise notre temps en jours, mois et années à la suite de la dynamique multi-échelle du système solaire.

Les os, les dents des animaux et les fibres végétales sont des matériaux naturels dont leurs propriétés évoluent dans la profondeur. On trouve dans l'industrie aussi des matériaux de ce genre, c'est le cas par exemple des matériaux à gradient fonctionnel (en anglais : *functionally graded materials –FGM-*), ce sont des matériaux capables de tenir à des températures élevées pour des applications spatiales.

Cependant, plusieurs théories et modèles numériques ont été adoptés pour la modélisation et l'analyse de leurs comportements mécaniques, entre autres, la méthode des éléments finis. Le problème c'est que le concept classique de la méthode des éléments finis présente certaines difficultés, par exemple nous nous trouverons face au dilemme du maillage/ temps de calcul, pour éviter les singularités des calculs, un nombre des éléments doit être suffisamment grand pour obtenir des résultats fiables, et par conséquent, un temps de calcul proportionnellement grand est nécessaire.

Contribution personnelle :

L'objectif de ce mémoire est de se familiariser avec l'application de la nouvelle approche élément fini multi phases dans la caractérisation des matériaux composites à renfort aléatoire ou structuré. A cet effet, plusieurs logiciels commerciaux ont été utilisés pour la génération de la distribution de renfort utilisé. La comparaison et la validation des résultats obtenus ont été effectuées par rapport à quelques résultats expérimentaux et numériques obtenus de la littérature spécialisée et à l'aide de quelques codes de modélisation. Notre travail consiste à développer et implémenter une routine algorithmique dans un support informatique afin de tenir en compte la variation graduelle des propriétés élastiques des constituants, que ce soit, linéaire ou exponentielle. L'approche est validée et comparé avec des résultats expérimentaux.

L'originalité de ce travail réside dans la méthode elle-même, lorsqu'elle présente une flexibilité d'utilisation dans le cas des matériaux composites classiques (à renforts aléatoires, distribution uniformes) et aux matériaux à gradient fonctionnel.

Plan du mémoire :

Ce mémoire se scinde en trois chapitres :

Le 1^{er} chapitre est consacré à la description des notions communément évoquées dans n'importe quelle démarche d'homogénéisation des matériaux composites. Nous commençons par une recherche bibliographique non exhaustive sur les différentes méthodes analytiques et numériques d'homogénéisation, puis nous présentons dans un contexte indéterministe les lois de distribution des inclusions dans les structures composites. La caractérisation des propriétés liées au comportement élastique des matériaux composites nécessite la simulation des conditions aux limites convenables aux tests expérimentaux. A cet effet, une liste de fameuses conditions aux limites et qui peuvent être appliquées à nos tests a été présentée.

Le 2^{ème} chapitre est dédié à la formulation théorique de l'élément quadrangle linéaire Q4 dans laquelle on a présenté la méthode d'obtention de la matrice de rigidité par intégration numérique et le passage à la nouvelle approche élément fini multi phase.

Le 3^{ème} chapitre a pour but d'examiner la nouvelle méthode par la comparaison et la discussion des résultats obtenus par le présent modèle et les résultats expérimentaux des travaux précédents.

Chapitre I:
Recherche bibliographique sur les
méthodes d'homogénéisation, lois
de distribution et les conditions
aux limites

Chapitre I : Recherche bibliographique sur les méthodes d'homogénéisations, lois de distribution et les conditions aux limites

Introduction

En effet, L'homogénéisation consiste à remplacer un milieu hétérogène par un milieu homogène ayant le même comportement macroscopique. Les modèles d'homogénéisation sont largement utilisés en raison de leur simplicité et de leur capacité à décrire efficacement le comportement des composites, en particulier dans le domaine élastique.[3]. On distingue des méthodes analytiques et d'autres numériques. Cependant, lors de la génération des microstructures d'un composite à renfort aléatoire, et surtout dans les méthodes numériques, on utilise des lois de distribution des inclusions. Le type des conditions aux limites appliquées sur la microstructure étudiée a un rôle important sur la qualité des résultats et la similitude de comparaison.

I.1. L'homogénéisation

L'homogénéisation est une méthode de modélisation qui permet de réaliser une transition d'échelles entre les effets induits par l'hétérogénéité à l'échelle microscopique, et le comportement de matériau à l'échelle macroscopique.

L'objectif de l'homogénéisation est de définir un milieu homogène équivalent au milieu hétérogène (figure 1) à partir d'informations sur les propriétés et la distribution spatiale des constituants du matériau hétérogène. Ce milieu homogène équivalent (MHE) doit présenter la même réponse macroscopique que le milieu hétérogène quand il est soumis aux mêmes

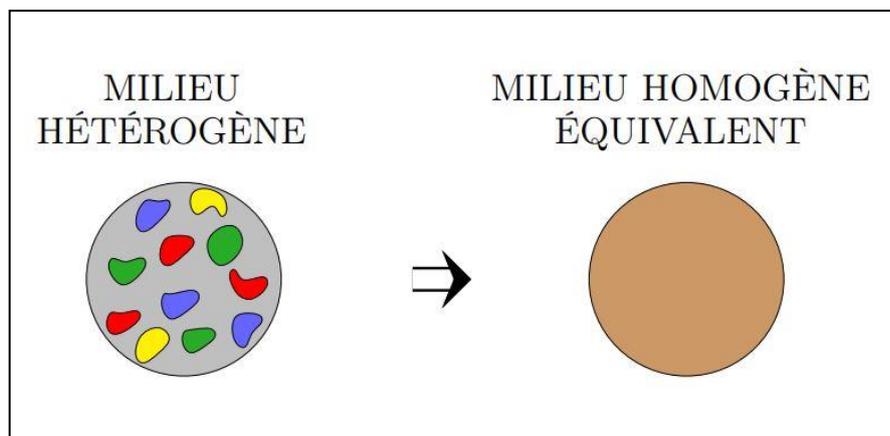


Figure 1: L'homogénéisation.

sollicitations.[4]

I.1.1. Les méthodes d'homogénéisation

Nous nous intéressons aux méthodes permettant d'évaluer le tenseur d'élasticité homogénéisé, On distingue deux types de méthodes :

- Les méthodes en champ moyen (Mean Field Methods) ;
- Les méthodes en champ complet (Full Field Methods).

Ces dernières nécessitent une connaissance complète de la microstructure, On parle d'approche numérique pour le calcul de tenseur d'élasticité homogénéisé, lorsque l'ensemble de la microstructure est identifié, les tenseurs des contraintes et des déformations peuvent alors être calculés en tout point de la microstructure via des méthodes basées sur les éléments finis ou la transformée de Fourier rapide (FFT). À l'aide d'une connaissance partielle de la microstructure, les méthodes en champs moyen s'applique dans le cas où les méthodes en champ complet ne peuvent s'appliquer (manque d'information sur la microstructure) Nous parlons alors d'approche analytique.[5]

I.1.1.a. Les méthodes analytiques

I.1.1.a.1) Le modèle de Mori-Tanaka

Le modèle de Mori-Tanaka présenté dans les références [5], [6] et [7], est décrit comme suit:

Si le milieu hétérogène est un composite de type matrice (indice 0) renforcée par plusieurs inclusions ($i=1$ à n), ces inclusions peuvent être alignées ou orientées aléatoirement dans la matrice, l'expression du tenseur de rigidité homogénéisé \mathbb{C}^{hom} est donnée par :

$$\mathbb{C}^{hom} = \sum_{i=0}^n f_i \mathbb{C}^i \mathbb{A}^i = \mathbb{C}^0 + \sum_{i=0}^n f_i (\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0) \mathbb{A}^i \quad (I.1)$$

Où : f_i est la fraction volumique de l'inclusion, \mathbb{C}^i le tenseur de rigidité et \mathbb{A}^i le tenseur de localisation des déformations.

L'approximation de Mori-Tanaka suppose que le renfort est noyé dans un milieu infini ayant les propriétés de la matrice, le tenseur \mathbb{A}^i s'écrit alors :

$$\mathbb{A}^i = \mathbb{T}^i (\sum_{j=0}^n f_j \mathbb{T}^j)^{-1} \quad (I.2)$$

Avec :

$$\mathbb{T}^i = [\mathbb{I} + \mathbb{S}_{esh}^i(\mathbb{C}^0)^{-1}(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0)]^{-1} \quad (\text{I.3})$$

Ou \mathbb{S}_{esh}^i représente le tenseur d'Eshelby

La substitution de (I.2) dans (I.1) nous permet d'obtenir le tenseur d'élasticité effective :

$$\mathbb{C}^{MT} = \mathbb{C}^0 + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0)\mathbb{T}^i(\sum_{j=1}^n f_j\mathbb{T}^j)^{-1} \quad (\text{I.4})$$

I.1.1.a.2) Le modèle auto-cohérent

Dans ce modèle, On suppose que le renfort est plongé dans un milieu homogène équivalent de propriété effective décrite par \mathbb{C}^{AC} :[5, 8]

De la même façon que le modèle de Mori-Tanaka, le tenseur de localisation des déformations pour le renfort i s'écrit au moyen du tenseur d'Eshelby :

$$\mathbb{A}^i = [\mathbb{I} + \mathbb{S}_{esh}^i(\mathbb{C}^{AC})^{-1}(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{AC})]^{-1} \quad (\text{I.5})$$

En remplaçant toujours dans l'équation (I.1), nous obtenons l'expression du tenseur \mathbb{C}^{AC} :

$$\mathbb{C}^{AC} = \mathbb{C}^0 + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^0)[\mathbb{I} + \mathbb{S}_{esh}^i(\mathbb{C}^{AC})^{-1}(\mathbb{C}^i - \mathbb{C}^{AC})]^{-1} \quad (\text{I.6})$$

Cette formulation de \mathbb{C}^{AC} est implicite. Une méthode usuelle est d'utiliser une méthode itérative de point fixe en initialisant \mathbb{C}^{AC} par les bornes de Voigt-Reuss ou bien par le modèle de Mori-Tanaka.

I.1.1.a.3) Les bornes de Voigt-Reuss

Les bornes de Voigt-Reuss [8, 9]. La borne de Voigt, dite borne supérieure, appelée encore approche en déformation, et la borne de Reuss (borne inférieure), aussi appelée approche en contrainte.

Ces bornes sont obtenues en supposant soit le tenseur des déformations soit le tenseur des contraintes uniforme dans le matériau. Dans le premier cas, nous obtenons la borne de Voigt et dans le second la borne de Reuss.

La borne de Voigt (\mathbb{C}^V) :

$$\mathbb{C}^V = \sum_{i=0}^n f_i \mathbb{C}^i \quad (\text{I.7})$$

Et la borne de Reuss ($\mathbb{C}^R = (\mathbb{S}^R)^{-1}$) :

$$\mathbb{C}^R = (\mathbb{S}^R)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^n f_i \mathbb{S}^i \right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^n f_i (\mathbb{C}^i)^{-1} \right)^{-1} \quad (\text{I.8})$$

Avec :

$$\mathbb{C}^R < \mathbb{C}^{hom} < \mathbb{C}^V \quad (\text{I.9})$$

Pour un matériau biphasé, homogène et isotrope, on trouve :

$$\begin{cases} K^V = f_1 K_0 + f_1 K_1 \\ \mu^V = f_0 \mu_0 + f_1 \mu_1 \\ \frac{1}{K^R} = \frac{f_0}{K_0} + \frac{f_1}{K_1} \\ \frac{1}{\mu^R} = \frac{f_0}{\mu_0} + \frac{f_1}{\mu_1} \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

Où : K et μ sont les modules de compressibilités et cisaillements respectivement.

1.1.1.a.4) Les bornes de Hashin-Shtrikman

Les bornes de Hashin-Shtrikman [10-14], Ce sont des bornes dites d'ordre 2, Hashin et Shtrikman ont développé leurs approximations, Ces bornes sont sensibles à la taille de VER et ne sont strictement valables que lorsque l'on suppose que le corps est infini et que la microstructure est isotrope.

Dans le cas d'un matériau biphasé (matrice de fraction volumique f_0 et inclusion de fraction volumique f_1), le comportement effectif est défini à partir du coefficient de compressibilité K^{hom} et du coefficient de cisaillement μ^{hom} encadrés de la façon suivante en supposant que $K_1 > K_0$ et que $\mu_1 > \mu_0$:

$$K^{HS-} < K^{hom} < K^{HS+} \quad (\text{I.11})$$

Avec :

$$\begin{cases} K^{HS-} = K_0 + \frac{f_1}{\frac{1}{K_1 - K_0} + \frac{3f_0}{3K_0 + 4K_0}} \\ K^{HS+} = K_1 + \frac{f_0}{\frac{1}{K_0 - K_1} + \frac{3f_1}{3K_1 + 4K_1}} \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

$$\mu^{HS-} < \mu^{hom} < \mu^{HS+} \quad (\text{I.13})$$

Avec :

$$\begin{cases} \mu^{HS-} = \mu_0 + \frac{f_1}{\frac{1}{\mu_1 - \mu_0} + \frac{6f_0(K_0 + 2\mu_0)}{5\mu_0(3K_0 + 4\mu_0)}} \\ \mu^{HS+} = \mu_1 + \frac{f_0}{\frac{1}{\mu_0 - \mu_1} + \frac{6f_1(K_1 + 2\mu_1)}{5\mu_1(3K_1 + 4\mu_1)}} \end{cases} \quad (I.14)$$

I.1.1.b. Les méthodes numériques

I.1.1.b.1. Méthode a base de pixels et voxels

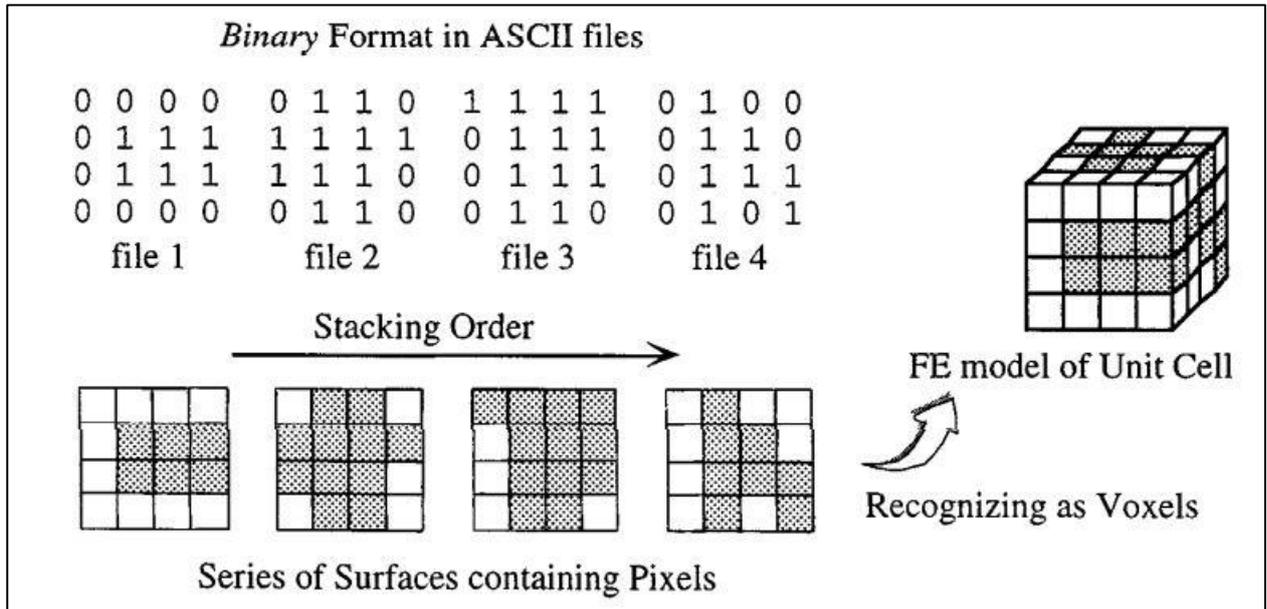


Figure 2: Processus de stockage des pixels pour les voxels [2]

La technique a base des pixels passe par cinq opérations nécessaires : les deux premiers sont : capturer l'image à traiter puis la numérisation et la quantification, l'étape de capture doit se fait correctement et avec les appareils les plus précisément possible. Pour la deuxième étape qui est la numérisation et la quantification ou l'image se transforme en une image numérisée. La numérisation est réalisée en partitionnant la zone de l'image en un tableau bidimensionnel composé de petites cellules uniformes (la résolution). La troisième étape, c'est de faire une sélection de SER pour la quatrième étape qui est le seuillage. Le seuillage est la méthode la plus simple de segmentation d'image, ce dernier peut créer une image comportant uniquement deux valeurs (noir ou blanc). La dernière étape est l'exportation d'image [2]. Si l'analyse est en 3D, donc nous allons passer à la technique de voxelisation qui consiste à discrétiser une géométrie volumique (tridimensionnelle) en éléments parallélépipédique.[15], ou bien on construit un modèle 3D à base de pixels, le passage de pixels vers voxels se fait comme il est présenté sur la figure (2) ci-dessus.

1.1.1.b.2. La méthode de la fibre projetée

La méthode de la fibre projetée (notée PF) considère la fibre comme une inclusion qui pourrait être représentée par un élément fini de barre 1D dans une première étape, La matrice de rigidité correspondante est projetée sur celle d'un élément fini 2D associé à l'espace de la résine. L'approche de la fibre projetée, utilise une condensation locale des degrés de liberté de l'élément de fibre[1, 16].

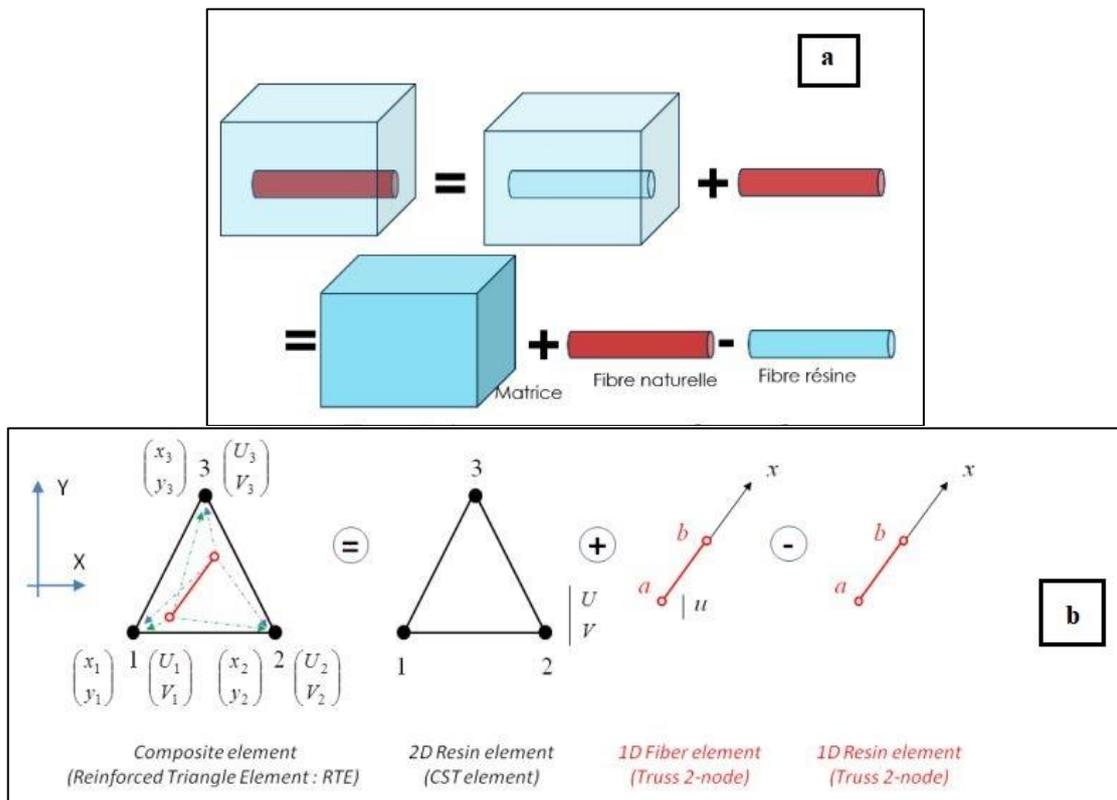


Figure 3: La méthode de la fibre projetée : a) Aspect conceptuels et physiques de la méthode, b) Principe de l'Approche de la Fibre Projetée [1]

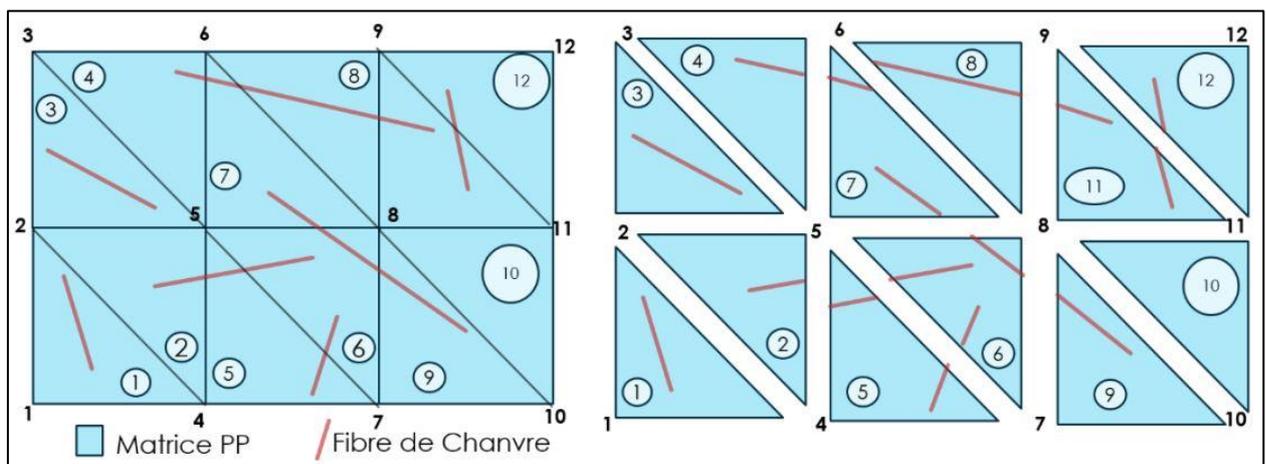


Figure 4: Principe de découpage de la méthode PF

I.1.1.b.3. La méthode des éléments finis

La mécanique du solide a permis d'établir deux types de conditions régissant l'équilibre d'un corps : les équations d'équilibre des forces et la compatibilité des déplacements. La formulation faible des résidus pondérés impose que le champ de déplacement doit être dérivable au moins une fois.[17, 18]

$$u(x) = \sum_i N_i(x)q_i \quad (\text{I.15})$$

L'intégration de ces équations n'étant pas aisée, une des méthodes les plus utilisées pour les résoudre est la méthode dite des éléments finis qui revient à remplacer le système continu par un système discret (des sous-domaines), chaque sous-domaine est un élément fini, la décomposition du domaine en sous-domaine est le maillage de la structure. Chacun des éléments est relié à ces voisins par des nœuds dont les degrés de liberté (DDL) constituent les inconnues du problème, Cela revient à rechercher la solution approchée pour chaque sous-domaine dans la base des fonctions N_i qui portent le nom de fonctions de formes (ou fonctions d'interpolations). Les inconnues du problème (les q_i) ont une interprétation physique directe : en mécanique, ce sont les déplacements des points qui délimitent les sous-domaines ; en thermique, leur température.[17, 18]

Il existe plusieurs familles d'éléments pour faire la discrétisation de la structure, il existe les éléments à base triangulaire, le triangle linéaire T3, triangle quadratique T6 et le tétraèdre linéaire T4, et les éléments à base quadrangulaire Q4 (Quadrangle bilinéaire 4 nœuds), Q8 (quadrangle quadratique incomplet 8 nœuds) et le Q9 (quadrangle quadratique complet 9 nœuds).

I.2. Les lois de distribution

I.2.1. La loi normale

Une variable aléatoire continue suit une loi normale si l'expression de sa fonction de densité de probabilités est de la forme :[19]

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad (\text{I.16})$$

La fonction de densité de probabilités de la loi normale a la forme d'une « courbe en cloche », un exemple ci-dessous avec des paramètres $\sigma = 2; m = 0$:

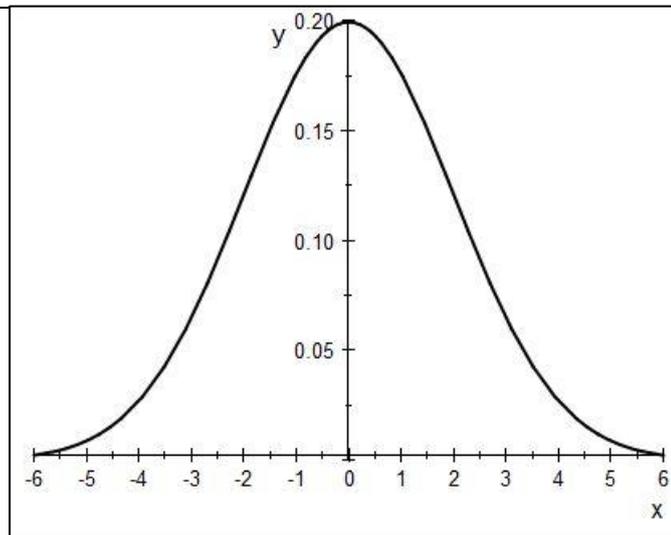


Figure 5: Courbe en cloche

I.2.2. La loi de poisson

La loi de Poisson [20] est une loi de probabilité discrète. Elle décrit la probabilité qu'un événement se réalise durant un intervalle de temps donné, lorsque la probabilité de réalisation d'un événement est très faible et que le nombre d'essais est très grand.

Si le nombre moyen d'événements dans un intervalle de temps fixé est λ , alors la probabilité qu'il existe exactement k événements (k entier = 0, 1, 2...) est donnée par, [20] :

$$p(K) = P(X = K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} \quad (\text{I.17})$$

I.2.3. La méthode de Monte-Carlo

La simulation de Monte-Carlo, en utilisant l'ordinateur, cette méthode consiste à reproduire avec un ordinateur de nombreux échantillons. Par nécessité, pour la simulation des échantillons artificiels de variables aléatoires et par cette méthode, une génération de variable aléatoire dans le domaine $[0 ; 1]$ est nécessaire [19].

L'un des cas les plus connus, c'est l'aiguille de Buffon, dont lequel on jette par exemple dix aiguilles et on calcule la probabilité de distribution sur le domaine pré mentionné.

I.3 Les conditions aux limites

Pour déterminer les propriétés effectives d'une microstructure de volume V , on impose des conditions aux limites sur sa frontière notée ∂V . Les trois types utilisés dans les calculs par éléments finis seront présentés dans ce qui suit :[21]

I.3.1. Conditions homogènes sur le contour en déformation (Kinematic Uniform Boundary Conditions-KUBC)

On applique sur tous les nœuds de la surface extérieure ∂V du volume V un déplacement u_i qui s'écrit à partir du tenseur des déformations homogénéisée E_{ij} correspondant à la moyenne des déformations locales dans le volume par :

$$\begin{cases} u_i = \varepsilon_{ij} \cdot x_j, & \forall x_j \in \partial V \\ E_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} \cdot dV \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

Par la moyenne des contraintes locales dans tout le volume V , on peut obtenir le tenseur des contraintes macroscopique :

$$\Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} \cdot dV \quad (\text{I.19})$$

I.3.2. Conditions homogènes sur le contour en contrainte (Stress Uniform Boundary Conditions-SUBC)

On applique sur la surface extérieure ∂V du volume V un effort volumique $\sigma \cdot n$ qui s'écrit à partir du tenseur des contraintes homogénéisée Σ_{ij} correspondant à la moyenne des contraintes locales dans le volume par :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} \cdot n = \Sigma_{ij} \cdot n \\ \Sigma_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} \cdot dV \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

Le tenseur des déformations macroscopiques est alors obtenu par la moyenne des déformations locales dans tout le volume :

$$E_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} \cdot dV \quad (\text{I.21})$$

I.3.3. Conditions aux limites périodiques (Periodic Boundary Conditions PBC)

On applique sur tous les nœuds de la surface extérieure ∂V du volume V un déplacement u_i qui s'écrit à partir du tenseur des déformations homogénéisée E_{ij} avec une fluctuation périodique v_i :

$$\begin{cases} u_i = \varepsilon_{ij} \cdot x_j + v_i \forall x_j \in \partial V \\ E_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} \cdot dV \end{cases} \quad (\text{I.22})$$

Avec v_i vecteur de fluctuations périodiques prenant la même valeur en deux points opposés de V .

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons introduit les méthodes d'homogénéisation analytiques et numériques largement utilisées, Un bref aperçu est donné sur les lois de distribution les plus connues surtout dans la génération des variables aléatoires (dans notre cas, la génération des microstructures à renfort aléatoire). Les conditions qui assurent l'équilibre de la structure et qui imitent les tests expérimentaux sont finalement présentées.

Chapitre II

Calcul de rigidité de l'élément quadrilatère multi-phase

Chapitre II : Calcul de rigidité de l'élément quadrilatère multi-phase

Introduction

L'utilisation d'éléments de membrane quadrangulaire pour discrétiser les structures permet de faire une analyse de structure avec une précision satisfaisante, Dans ce chapitre nous allons montrer en détails la formulation de l'élément quadrangle à 4 nœuds Q4, puis nous allons montrer la nouvelle technique élément fini multi phases.

II.1 Formulation de l'élément Q4

Les éléments membranes sont destinés à modéliser des structures planes travaillant uniquement dans leur plan. Leurs nœuds possèdent uniquement deux degrés de liberté u et v , Prenant la structure de la figure (6), l'élément utilisé dans le maillage est un quadrangle de type Q4 montrée dans la figure (7) dans un repère de référence (ξ, η) : [17, 18]

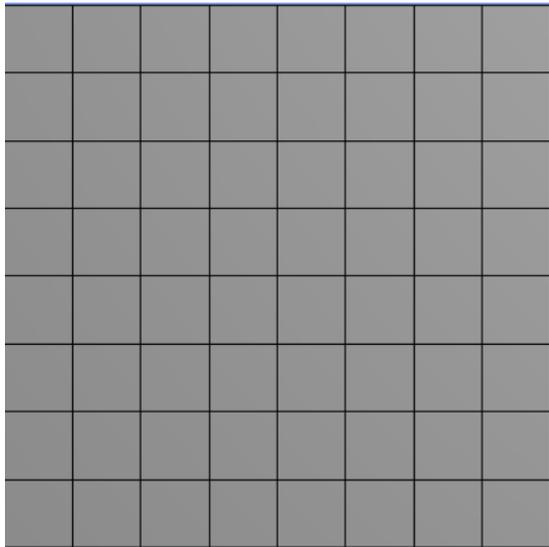


Figure 6: Structure avec maillage de Q4

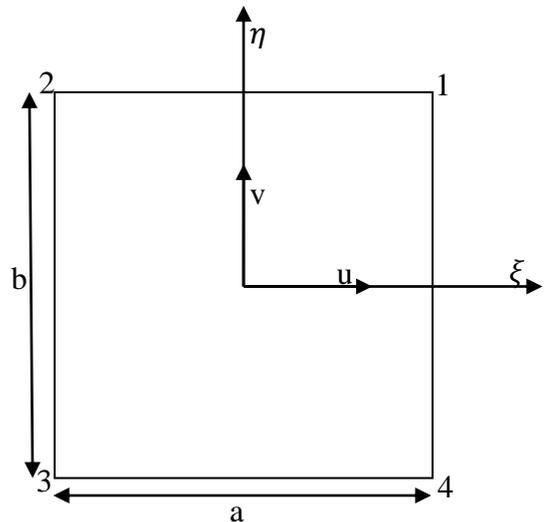


Figure 7: Element Q4

En utilisant une interpolation linéaire, on peut définir la géométrie de l'élément :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i \cdot x_i \\ \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i \cdot x_j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

Avec \bar{N}_i sont les fonctions de forme :

$$\begin{aligned}\bar{N}_1 &= \frac{1}{4}(1 + \xi) \cdot (1 + \eta), & \bar{N}_3 &= \frac{1}{4}(1 - \xi) \cdot (1 - \eta) \\ \bar{N}_2 &= \frac{1}{4}(1 - \xi) \cdot (1 + \eta), & \bar{N}_4 &= \frac{1}{4}(1 + \xi) \cdot (1 - \eta)\end{aligned}\quad (\text{II.2})$$

Le champ de déplacement est donné par une interpolation isoparamétrique linéaire ($N_i = \bar{N}_i$):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^4 N_i \cdot u_i \\ \sum_{i=1}^4 N_i \cdot v_i \end{Bmatrix}\quad (\text{II.3})$$

Et la relation contrainte-déformation peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [H]\{\varepsilon\}\quad (\text{II.4})$$

Dans le cas plan, le vecteur déformation peut s'écrire :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\partial] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}\quad (\text{II.5})$$

Pour l'obtention de la matrice $[B]$, on substitue les composants du champ de déplacement de l'équation (II.3) dans (II.5), on aura :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U_n\}\quad (\text{II.6})$$

Avec :

$$[B] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix}\quad (\text{II.7})$$

Les dérivées des fonctions de formes par rapport aux variables ξ et η sont données par les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix}\quad (\text{II.8})$$

$[J]$ C'est la matrice Jacobéenne de transformation.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}\quad (\text{II.9})$$

On peut aussi déduire les dérivées des fonctions de formes par rapport aux variables x et y :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (\text{II.10})$$

Avec $[J]^{-1}$ est la matrice Jacobéenne inverse définie par :

$$[J]^{-1} = [j] = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{12} & j_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

En utilisant l'écriture indicielle d'Einstein pour les dérivées des fonctions de formes :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{Bmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

On peut écrire l'équation II.10 sous cette forme indicielle, elle devient alors :

$$\begin{aligned} N_{i,x} &= j_{11} \cdot N_{i,\xi} + j_{12} \cdot N_{i,\eta} \\ N_{i,y} &= j_{12} \cdot N_{i,\xi} + j_{22} \cdot N_{i,\eta} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

La substitution de l'approximation géométrique de l'équation (II.1) dans (II.9) nous permet de calculer la matrice Jacobéenne :

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{12} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} \cdot x_i & \sum_{i=1}^4 N_{i,\xi} \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^4 N_{i,\eta} \cdot x_i & \sum_{i=1}^4 N_{i,\eta} \cdot y_i \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+\eta) & -(1+\eta) & -(1-\eta) & (1-\eta) \\ (1+\xi) & (1-\xi) & -(1-\xi) & -(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

$$[J] =$$

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + \eta(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + \eta(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + \xi(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) & y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + \xi(y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

En substituant les coordonnées des nœuds montrés dans la figure (7) et qui correspondent une forme rectangulaire :

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Le déterminant et l'inverse de $[J]$ sont donc respectivement égaux à :

$$\det[J] = \frac{a \cdot b}{4} \text{ et } [J]^{-1} = [j] = \frac{1}{\frac{a \cdot b}{4}} \begin{bmatrix} \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Les dérivées des fonctions de formes de l'équation (II.13) peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} N_{i,x} = \frac{2}{a} \cdot N_{i,\xi} \\ N_{i,y} = \frac{2}{b} \cdot N_{i,\eta} \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

i	N_i	$N_{i,\xi}$	$N_{i,\eta}$
1	$\frac{1}{4}(1+\xi) \cdot (1+\eta)$	$\frac{1}{2a}(1+\eta)$	$\frac{1}{2b}(1+\xi)$
2	$\frac{1}{4}(1-\xi) \cdot (1+\eta)$	$-\frac{1}{2a}(1+\eta)$	$\frac{1}{2b}(1-\xi)$
3	$\frac{1}{4}(1-\xi) \cdot (1-\eta)$	$-\frac{1}{2a}(1-\eta)$	$-\frac{1}{2b}(1-\xi)$
4	$\frac{1}{4}(1+\xi) \cdot (1-\eta)$	$\frac{1}{2a}(1-\eta)$	$-\frac{1}{2b}(1+\xi)$

Tableau 1: Fonctions de formes et leurs dérivées

La substitution des $N_{i,x}$ et $N_{i,y}$ dans (II.7) :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2a}(1+\eta) & 0 & -\frac{1}{2a}(1+\eta) & 0 & -\frac{1}{2a}(1-\eta) & 0 & \frac{1}{2a}(1-\eta) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2b}(1+\xi) & 0 & \frac{1}{2b}(1-\xi) & 0 & -\frac{1}{2b}(1-\xi) & 0 & -\frac{1}{2b}(1+\xi) \\ \frac{1}{2b}(1+\xi) & \frac{1}{2a}(1+\eta) & \frac{1}{2b}(1-\xi) & -\frac{1}{2a}(1+\eta) & -\frac{1}{2b}(1-\xi) & -\frac{1}{2a}(1-\eta) & -\frac{1}{2b}(1+\xi) & \frac{1}{2a}(1-\eta) \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

La matrice de rigidité égale a :

$$[K] = e \cdot \iint_S [B]^T [H] [B] \cdot dx \cdot dy = e \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [H] [B] \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (\text{II.20})$$

$$[K] = e \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} [B] \cdot \frac{a \cdot b}{4} \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (\text{II.21})$$

Pour le cas d'un élément carré $a=b$, la matrice de rigidité est donnée par :

$$[K] = \frac{E \cdot e}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{3-\nu}{6} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{-3-\nu}{12} & \frac{-1+3\nu}{8} & \frac{-3+\nu}{12} & \frac{-1-\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{1-3\nu}{8} \\ \frac{1+\nu}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{-1-\nu}{8} & \frac{-3+\nu}{12} & \frac{-1+3\nu}{8} & \frac{-3-\nu}{12} \\ \frac{-3-\nu}{12} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{-1-\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{-1+3\nu}{8} & \frac{-3+\nu}{12} & \frac{1+\nu}{8} \\ \frac{-1+3\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{-1-\nu}{8} & \frac{3-\nu}{6} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{-3-\nu}{12} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{-3+\nu}{12} \\ \frac{3-\nu}{12} & \frac{-1+3\nu}{8} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{-3+\nu}{12} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{-3-\nu}{12} & \frac{-1+3\nu}{8} \\ \frac{-3+\nu}{12} & \frac{-1-\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{3-\nu}{12} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{-3-\nu}{12} & \frac{-1+3\nu}{8} \\ \frac{1-3\nu}{8} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{-3-\nu}{12} & \frac{-1+3\nu}{8} & \frac{-3+\nu}{12} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{-3-\nu}{12} & \frac{-1+3\nu}{8} \\ \frac{\nu}{6} & \frac{-3+\nu}{12} & \frac{-1+3\nu}{8} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{-3-\nu}{12} & \frac{1-3\nu}{8} & \frac{3-\nu}{12} & \frac{-1-\nu}{8} \\ \frac{1-3\nu}{8} & \frac{-3-\nu}{12} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{-3+\nu}{12} & \frac{-1+3\nu}{8} & \frac{\nu}{6} & \frac{-1-\nu}{8} & \frac{3-\nu}{12} \\ \frac{3-\nu}{12} & \frac{-1+3\nu}{8} & \frac{-3+\nu}{12} & \frac{-1+3\nu}{8} & \frac{-3+\nu}{12} & \frac{1+\nu}{8} & \frac{-3-\nu}{12} & \frac{-1+3\nu}{8} \end{bmatrix} \quad (\text{II.22})$$

II.2. Matrice de rigidité par intégration numérique

Dans le cas général, la matrice de rigidité élémentaire peut être calculé par intégration numérique dans le domaine (ξ, η) , en utilisant par exemple la méthode de Gauss :

Soit une fonction f d'une seule variable ξ , l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$, pourra être évaluée numériquement par la méthode de Gauss en posant qui vient à remplacer l'intégrale de la fonction polynomiale $f(\xi)$ par une combinaison linéaire de valeurs de f aux points ξ_i (appelés points d'intégration) et de coefficients ω_i (appelés poids) :

$$\int_a^b f(\xi). d\xi = \sum_{i=1}^m \omega_i . f(\xi_i) \quad (\text{II.23})$$

Selon Gauss, l'utilisation de m points permet d'intégrer exactement des polynômes de degré :

$$n \leq 2m - 1$$

L'intégration numérique est alors de faire passer d'un polynôme $\Psi(\xi)$ par une certaine valeur de $f(\xi)$, on a donc :

$$f(\xi) \approx \Psi(\xi) = a_1 + a_2\xi + \dots + a_{2m}\xi^{2m-1} \quad (\text{II.24})$$

En substituant (II.24) dans (II.23) pour obtenir $\int_a^b \Psi(\xi). d\xi$ comme une approximation de $\int_a^b f(\xi). d\xi$, on obtient donc :

$$\int_a^b f(\xi). d\xi = a_1 \int_a^b d\xi + a_2 \int_a^b \xi. d\xi + \dots + a_{2m} \int_a^b \xi^{2m-1}. d\xi = a_1(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m) + a_2(\omega_1 \cdot \xi_1 + \omega_2 \cdot \xi_2 + \dots + \omega_m \xi_m) + \dots + a_{2m}(\omega_1 \cdot \xi_1^{2m-1} + \omega_2 \cdot \xi_2^{2m-1} + \dots + \omega_m \cdot \xi_m^{2m-1}) \quad (\text{II.25})$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \xi^\alpha d\xi = 0, & \text{si } \alpha \text{ est impair} \\ \int_{-1}^1 \xi^\alpha d\xi = \frac{2}{1+\alpha}, & \text{si } \alpha \text{ est pair} \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

L'équation (II.25) peut s'écrire alors sous la forme d'un système linéaire de $2m$ équations :

$$\begin{cases} 2 = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_r \\ 0 = \omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 + \dots + \omega_m \xi_m \\ \frac{2}{3} = \omega_1 \xi_1^2 + \omega_2 \xi_2^2 + \dots + \omega_m \xi_m^2 \\ \vdots \\ 0 = \omega_1 \xi_1^{2m-1} + \omega_2 \xi_2^{2m-1} + \dots + \omega_m \xi_m^{2m-1} \end{cases} \quad (\text{II.27})$$

Exemple de calcul des coefficients de Gauss à $m=2$ points, le polynôme est de degré inférieur ou égal à $2m - 1 = 3$, le nombre d'équation est alors $2m = 4$:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) \cdot d\xi = \sum_{i=1}^2 \omega_i \cdot f(\xi_i) = \omega_1 \cdot f(\xi_1) + \omega_2 \cdot f(\xi_2) \quad (\text{II.28})$$

Les coefficients ξ_i et ω_i sont obtenus en résolvant le système d'équations suivants :

$$\begin{cases} 2 = \omega_1 + \omega_2 \\ 0 = \omega_1 \xi_1 + \omega_2 \xi_2 \\ \frac{2}{3} = \omega_1 \xi_1^2 + \omega_2 \xi_2^2 \\ 0 = \omega_1 \xi_1^3 + \omega_2 \xi_2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \omega_2 = 1 \\ \xi_1 = -\xi_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (\text{II.29})$$

De même méthode, on peut construire le tableau de Gauss-Legendre suivant : [17]

M	ξ_i	ω_i	Degré maximum de polynôme à intégrer
1	0	2	1
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	3
3	0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$	5
4	$\pm \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{6/5}}{7}}$ $\pm \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$	7

Tableau 2: Tableau de Gauss-Legendre

La généralisation sur le plan se fera en posant que :

$$[K] = e \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [f(\xi, \eta)] d\xi \cdot d\eta, \quad \text{avec: } [f(\xi, \eta)] = [B]^T [H] [B] \det[J] \quad (\text{II.30})$$

Donc :

$$[K] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \omega_i \cdot \omega_j \cdot [f(\xi_i, \eta_j)] \quad (\text{II.31})$$

Pour le cas de notre élément Q4, considérant une intégration numérique à deux points suivants

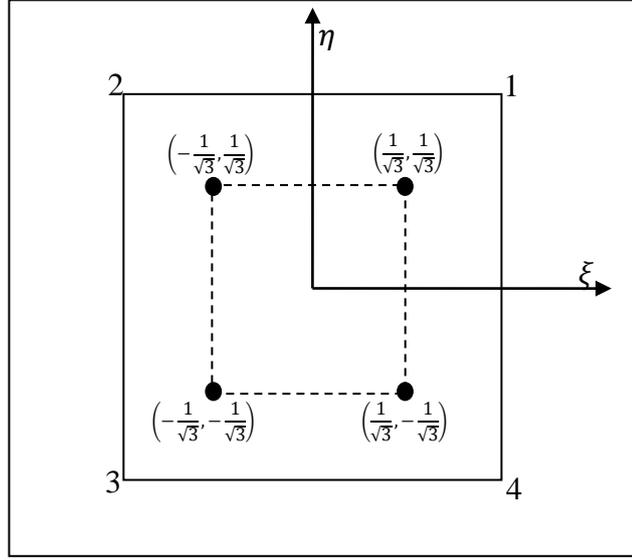


Figure 8: Les points de gauss

ξ et η , il y a donc quatre points de gauss situés aux coordonnées $\xi_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \eta_i = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$:

Pour faire un exemple, on calcule le premier terme k_{11} de la matrice (II.22) avec cette méthode de telle sorte $\omega_i = \omega_j = 1$:

$$k_{11} = \frac{E.e}{1-\nu^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\left(\frac{1+\eta}{4} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{1+\xi}{4} \right)^2 \right) d\xi \cdot d\eta \quad (\text{II.32})$$

$$k_{11} = \frac{E.e}{1-\nu^2} \left[1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1+1/\sqrt{3}}{4} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1+1/\sqrt{3}}{4} \right)^2 + 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1-1/\sqrt{3}}{4} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1+1/\sqrt{3}}{4} \right)^2 + \right. \\ \left. 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1-1/\sqrt{3}}{4} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1-1/\sqrt{3}}{4} \right)^2 + 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1+1/\sqrt{3}}{4} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1-1/\sqrt{3}}{4} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\nu = \frac{3-\nu}{6} \quad (\text{II.33})$$

II.3. Présentation de la nouvelle méthode élément fini multi-phase

Cette technique est basée principalement sur les points d'intégrations (les points de gauss), pour le cas de matériaux composites qui contiennent seulement deux phases, après la conversion de l'image en image binaire (le seuillage), nous générons un maillage régulier pour la discrétisation de la géométrie en éléments finis du type Q4 (Figure 9-a).

Maintenant, chaque élément contient quatre points de gauss, qui peuvent se coïncider avec deux valeurs de couleur. Soit la couleur blanche qui correspond à la matrice (valeur 1) ou la couleur noire liée au renfort (valeur 2) (Figure 9-étape b).

Ces valeurs sont assemblées et stockées dans un fichier (nommé readdata.txt) pour les exploiter dans notre code en Fortran. Si le point de Gauss correspond à la valeur 1 dans le fichier readdata.txt le point prend les propriétés élastiques de la matrice, si non, le point prend les propriétés du renfort. (Voir annexe « Algorithme de calcul élément fini multi-phase » P.61)

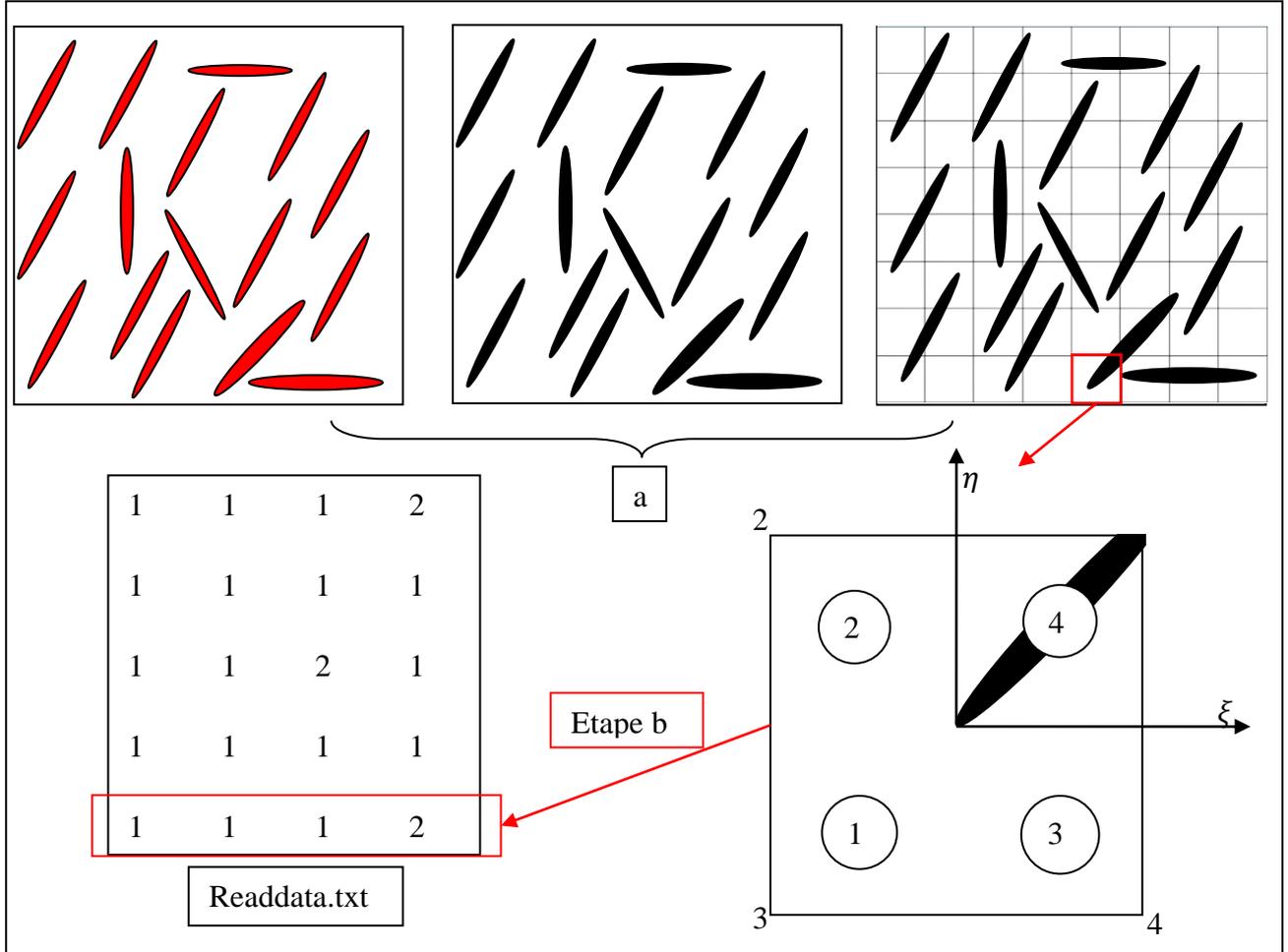


Figure 9: Description graphique de la nouvelle approche multi-phase

Pour les matériaux FGM, il existe plusieurs phases à cause de dégradé des couleurs (de phase 0 à phase 255). Nous avons introduit une nouvelle approche en utilisant des équations en fonction de couleur :

$$E(x) = ax + b \tag{II.34}$$

Avec

$$\begin{cases} b = E_0 \\ a = \frac{E_{255} - E_0}{255} \end{cases} \tag{II.35}$$

Donc l'équation (II.34) devient :

$$E(x) = \frac{E_{255} - E_0}{255}x + E_0 \quad (\text{II.36})$$

Dans la plupart des travaux réalisés sur les matériaux FGM, la fonction exponentielle est largement utilisée pour décrire les propriétés des matériaux FGM appelée (E-FGM) :

$$E(x) = ae^{bx} \quad (\text{II.37})$$

$$\begin{cases} a = E_0 \\ b = \frac{1}{255} \ln \left(\frac{E_{255}}{E_0} \right) \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

Donc (II.37) devient :

$$E(x) = E_0 e^{bx}, \text{ avec } b = \frac{1}{255} \ln \left(\frac{E_{255}}{E_0} \right) \quad (\text{II.39})$$

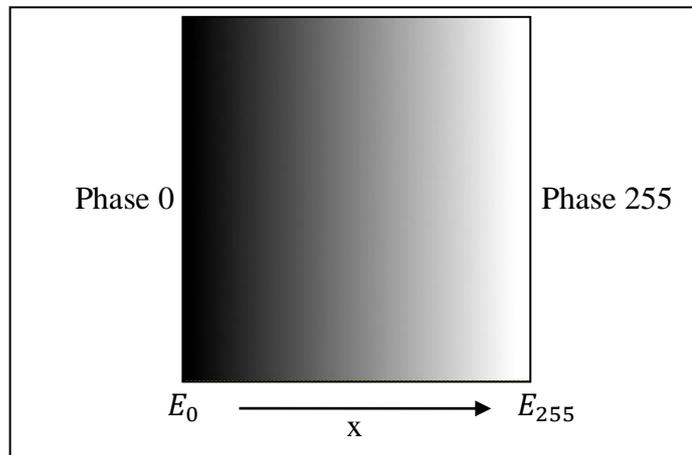


Figure 10: Conditions aux limites pour les matériaux FGM

Conclusion

Dans le présent chapitre, nous avons montré la démarche de la formulation de l'élément multi-phase Q4. La matrice de rigidité est calculée sur la base d'une interpolation isoparamétrique bilinéaire. La nouvelle technique est fondée sur l'affectation des propriétés élastiques des matériaux dans la technique d'intégration numérique au niveau des points d'intégration.

Chapitre III: Application et validation numériques des résultats

Chapitre III : Application et validation numériques des résultats

Introduction

Dans le présent chapitre, la fiabilité de la nouvelle approche dite éléments finis multi-phases sera évaluée, d'une part, à travers quelques tests de validation et appliquée à des structures à base de matériaux composites, d'autre part. Comme d'autre formulation éléments finis, un test de convergence sera établi sur un matériau à renfort aléatoire, un calcul des propriétés élastiques et l'état des contraintes et de déformation est envisagé. Des tests sur des composites à renfort structuré seront effectués afin d'approfondir la validité des résultats. Une autre série des tests concernant l'effet de la géométrie des inclusions sur les propriétés mécaniques des composites sera également entreprise. Dans une dernière partie, la répartition des propriétés élastiques, suivant le plan de la structure, sera examinée dans un contexte d'application sur des matériaux à gradient fonctionnel.

III.1 Tests de validation de la méthode des éléments multi phases

III.1.1 Etude de la convergence de la méthode multi phases (distribution aléatoire)

III.1.1.a) Présentation de la microstructure et le test étudiés

Il s'agit d'un matériau composite à renfort aléatoire (Polypropylène/chanvre) présenté dans la référence [16]. Un test de traction est simulé sur une SER de taille de 5×5mm. Les propriétés des constituants sont récapitulées dans le tableau (3). La structure est soumise à un déplacement constant. La géométrie et les conditions aux limites sont représentés sur les figures 11 et 12 respectivement.

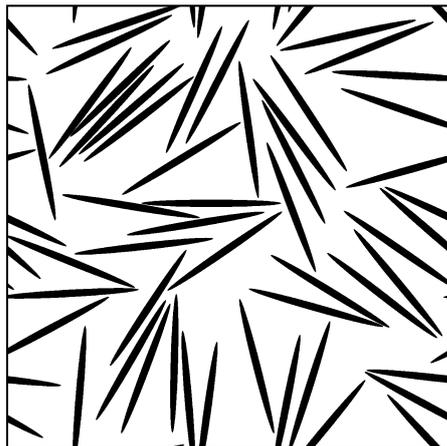


Figure 11: SER d'un composite à renfort aléatoire PP/chanvre

Dans notre cas, un choix optimal d'une résolution d'image de 2500×2500 pixels est pris en considération et un maillage par l'élément bilinéaire (Q4 de 50, 100, 200 et 300 éléments) a été utilisé. La génération de la distribution des inclusions dans la SER est effectuée par un code sous MATLAB (Figure 11) qui ne permet d'introduire les dimensions qu'en pixels. Pour cela, les dimensions de la géométrie en unité de longueur seront converties comme suit :

$$\frac{2500 \text{ pixels}}{5 \text{ mm}} = 500 \text{ pixels/mm}$$

Propriétés Géométriques	L	Fibre		Matrice
		Mm	0.786	
D	Pixels	393		
	Mm	0.042		
Propriétés mécaniques	E(GPa)	44.52	1.7346	
	v	0.12	0.4	

Tableau 3: Propriétés géométriques et mécaniques des constituants

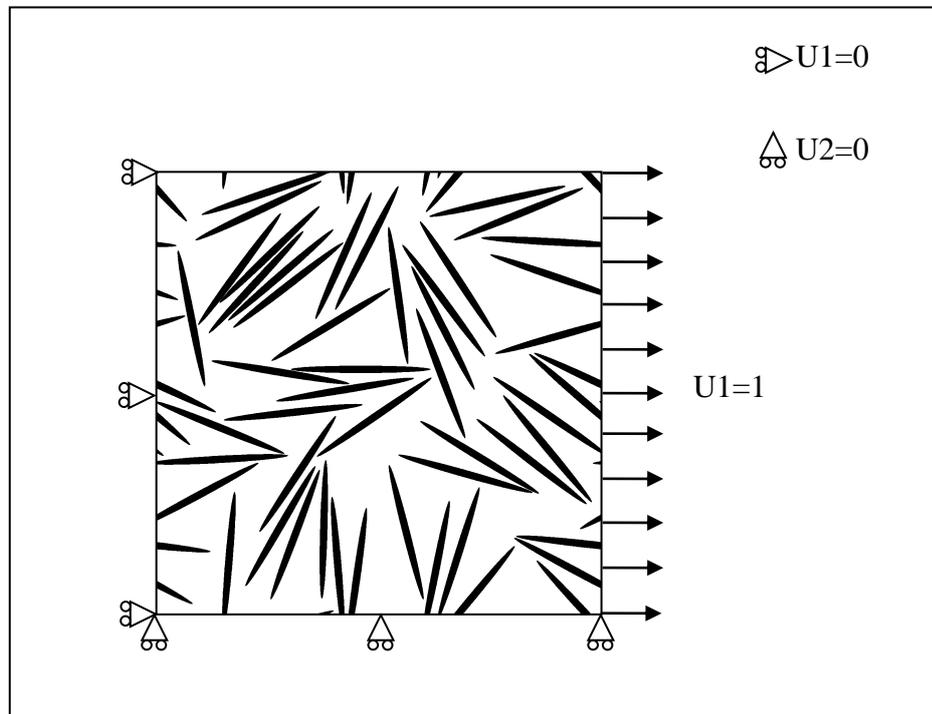


Figure 12: Conditions aux limites appliqués sur la SER

III.1.1.b) Présentation des résultats

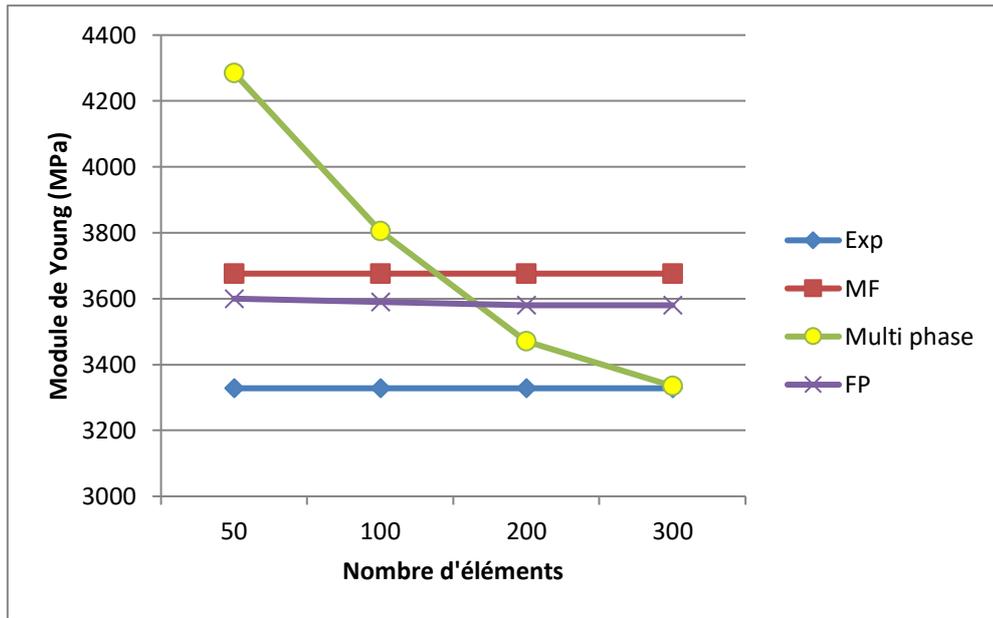


Figure 13: Convergence de Module de Young en fonction de nombre d'éléments.

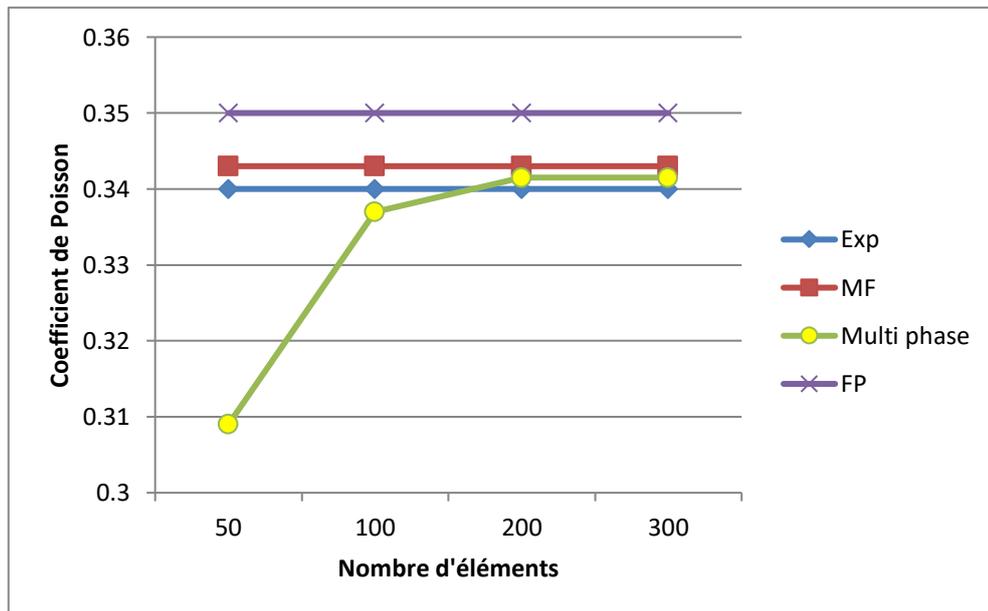


Figure 14: Convergence de coefficient de Poisson en fonction de nombre d'éléments.

Les résultats obtenus par notre élément multi-phase sont comparés à : i) ceux obtenus par le modèle analytique de Mori-Tanaka de 1er ordre obtenu par le code DIGIMAT-MF, ii) la méthode de la fibre projeté (FP) [16] et les résultats expérimentaux de [23]. Les convergences du module de Young et du coefficient de poisson vers les résultats expérimentaux sont présentées dans les figures 3 et 4.

Nous remarquons que la valeur du module de Young et de coefficient de poisson converge vers la valeur expérimentale d'autant que le maillage est raffiné. Au-delà de maillage 200×200 éléments, une bonne convergence de la méthode multi-phase est assuré.

III.1.1.c) Présentation de l'état de contrainte et de déformation

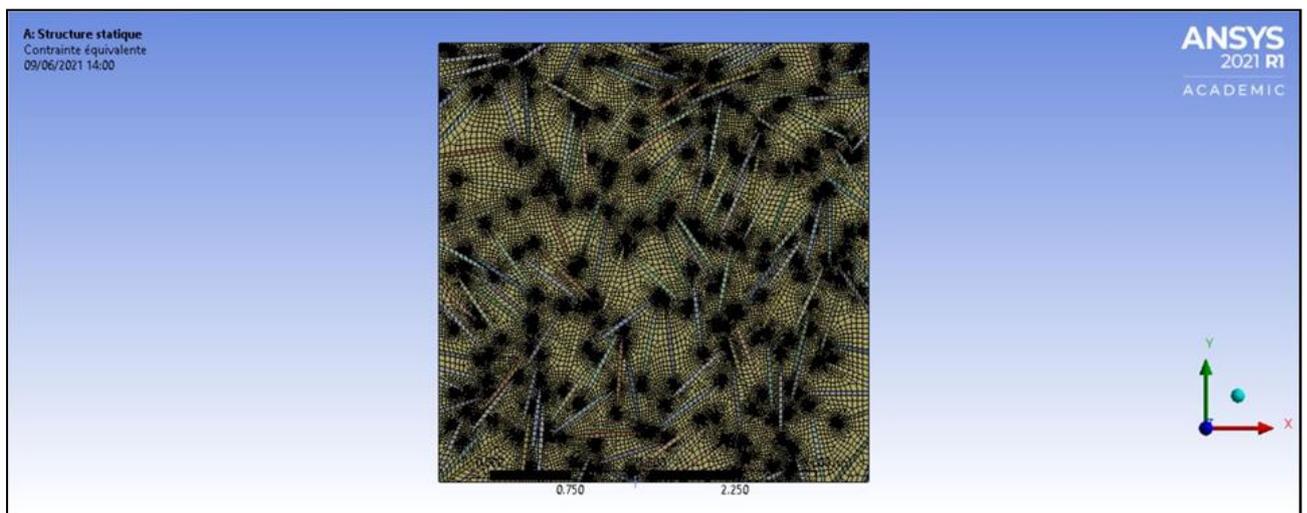


Figure 15: Maillage du composite PP-Chanvre réalisé par le logiciel ANSYS 2021

Dans ce qui suit, nous allons montrer l'effet de la technique numérique utilisée sur la représentation de l'état de contrainte et de déformation. Donc, de notre part, une grille de 200×200 éléments multi-phases est utilisée en comparant à un calcul standard par éléments finis réalisé par le code de calcul DIGIMAT. Ce dernier, se base sur un maillage séparé de tous les constituants de la structure. Le fait que la technique du maillage n'est pas la même. Un nombre de degré de liberté presque identique dans les deux approches est pris en considération (40401 nœuds sont utilisés pour des éléments triangulaires). Nous avons également exporté la géométrie générée par DIGIMAT vers le solveur de du logiciel ANSYS (Version 2021 licence étudiant académique).

L'image (Figure 15) montre le grand nombre d'éléments générés par l'ANSYS, le temps de génération du maillage est plus grand, ce qui prouve que le logiciel ANSYS n'est pas destiné pour l'étude des matériaux composites à renforts aléatoires.

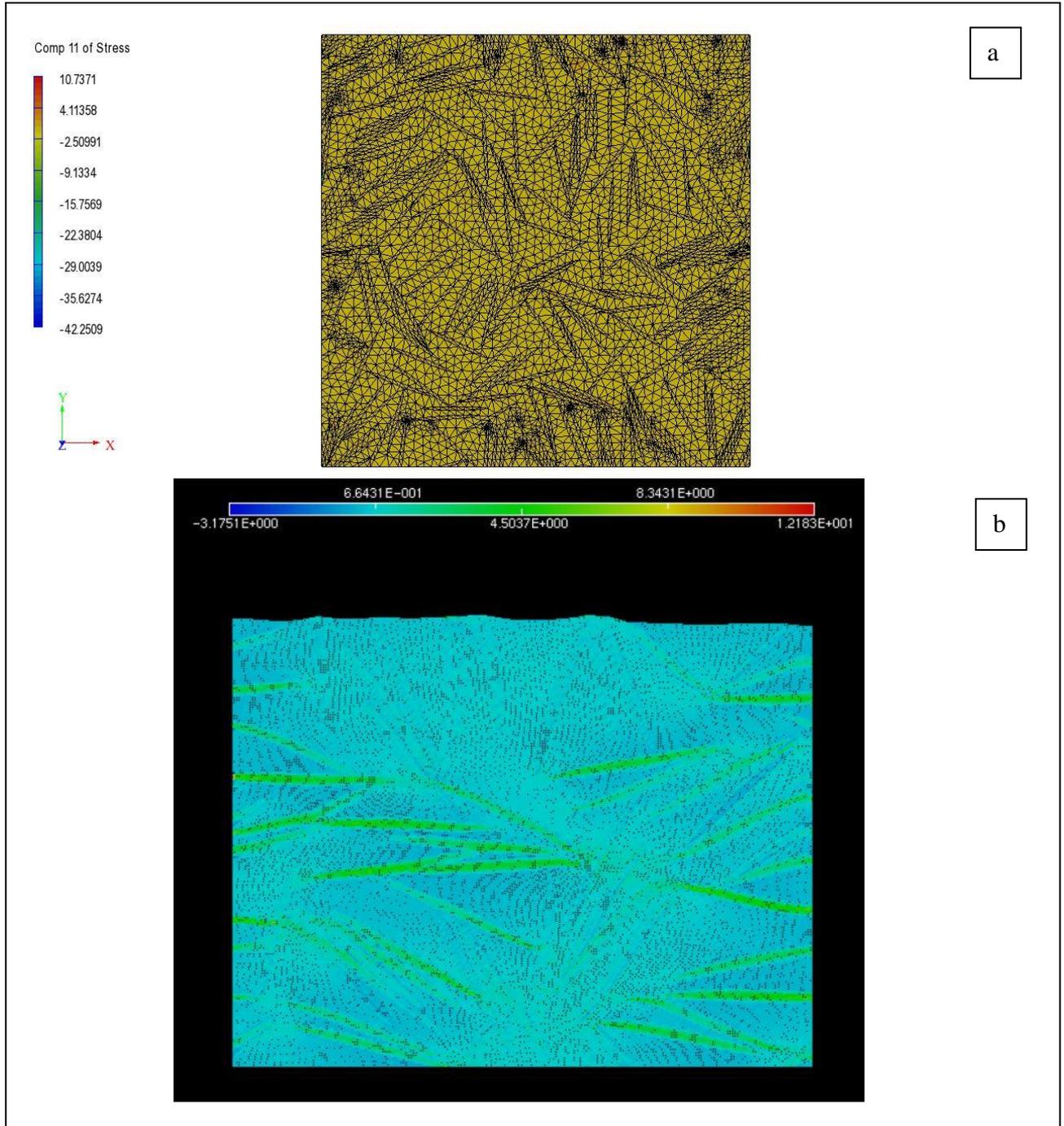


Figure 16: Répartition des contraintes obtenue par : a) Le logiciel DIGIMAT 2021, b) la nouvelle technique multi-phase

Nous remarquons que l'état de contrainte obtenue par le logiciel DIGIMAT 2021 ne reflète pas une représentation du phénomène de concentration des contraintes, contrairement à notre programme qui s'adapte bien à ce phénomène.

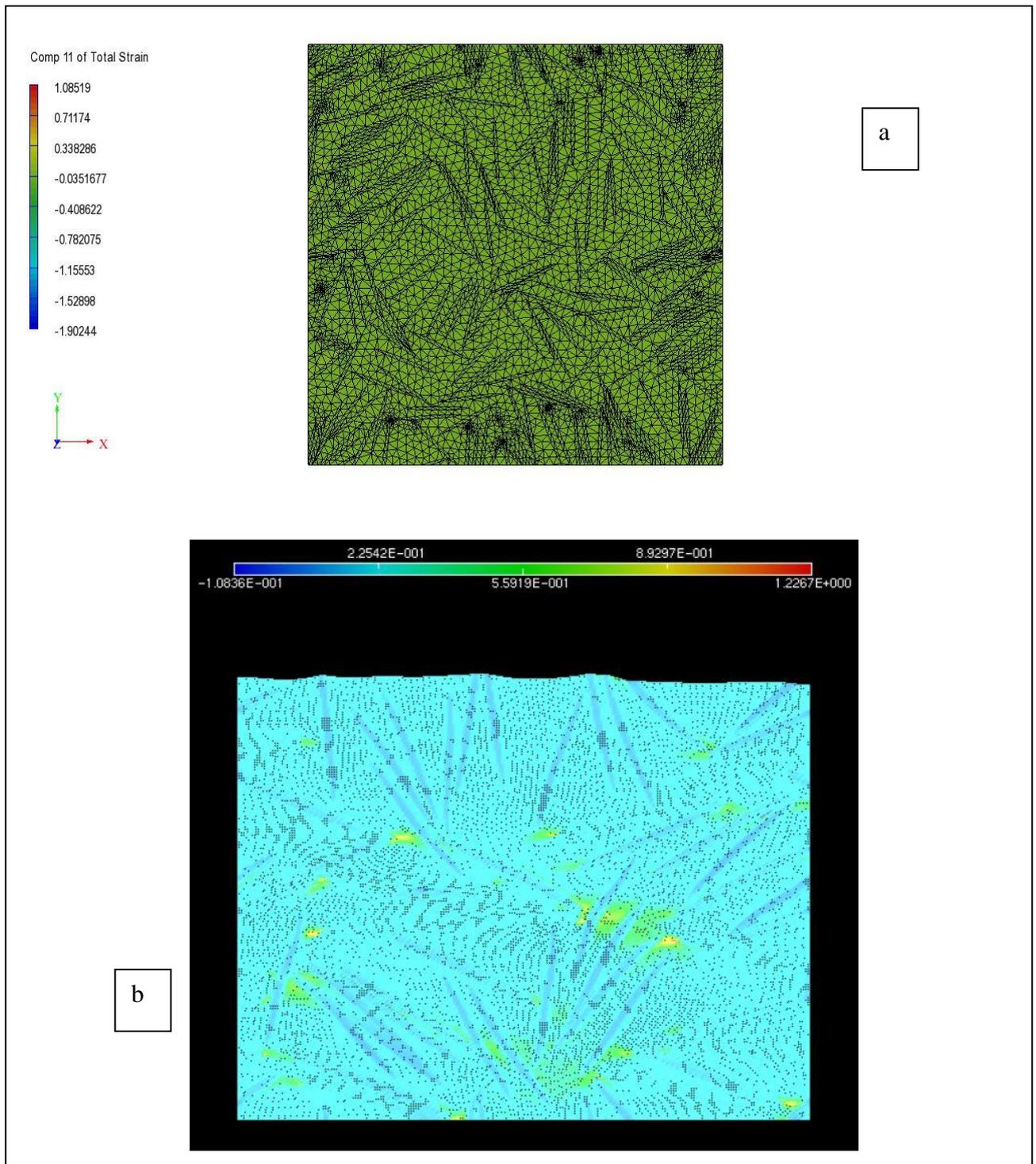


Figure 17: Etat de déformation Epsilon11 obtenue par : a) Le logiciel DIGIMAT 2021, b) la nouvelle technique multi-phase

La même remarque est notée pour l'état de déformation, une autre fois nous remarquons qu'il existe une petite différence entre les valeurs de contrainte et de déformations entre le logiciel et notre technique. Ça peut être référer aux conditions aux limites appliquées dans le logiciel DIGIMAT 2021, qui sont des conditions aux limites périodique avec une déformation égale a 0.01, par contre nous pouvons appliquer soit une contrainte ou bien un déplacement, pour obtenir des résultats similaires au code Zébulon sous Linux, nous avons appliqué un déplacement $U_2=1$ sur l'arrête droite.

III.1.2 Calcul des propriétés élastiques d'un matériau composite unidirectionnel (Polyamide 6/fibre de Verre E)

III.1.2.a) Présentation de la microstructure étudiée

Il s'agit d'un matériau composite unidirectionnel (Polyamide 6/fibre de verre E). Nous garderons la même taille du SER, la résolution d'image est toujours 2500x2500 pixels. Pour une fraction surfacique de $S_f = 20\%$, et les dimensions de la fibre sont : $L_f = 2500 \text{ pixels}$, $D_f = 100 \text{ pixels}$, on calcul le nombre de fibres qui doit être présent dans la SER :

$$S_f = \frac{S_f}{S_T} = 20\% \quad (\text{III.1})$$

La surface des fibres est :

$$S_f = L_f \times D_f \times \text{nombre}_f \quad (\text{III.2})$$

La surface totale est= $S_T = 2500 \times 2500$, donc :

$$\text{nombre}_f = \frac{2500 \times 2500 \times 20\%}{2500 \times 100} = 5 \text{ fibres} \quad (\text{III.3})$$

Pour faire une structure unidirectionnelle uniforme, l'espacement entre les fibres doit être constant, pour cela on a conclu une relation entre l'espacement (y), le nombre des fibres et le

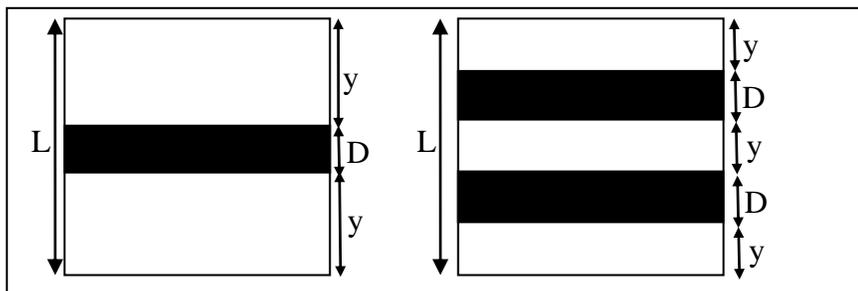


Figure 18: Illustration représente l'espacement

diamètre :

D'après l'illustration :

$$2y + D = L ; 3y + 2D = L \quad (\text{III.4})$$

Avec la même logique on aura :

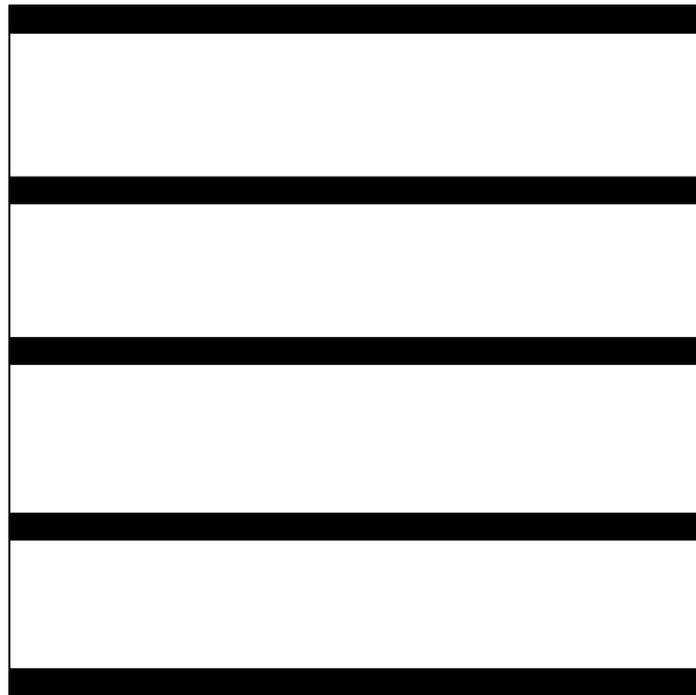
$$\text{nombre}_f \times y + (\text{nombre}_f - 1)D = L \quad (\text{III.5})$$

L'espacement est donc égale à :

$$y = \frac{L - (\text{nombre}_f - 1)D}{\text{nombre}_f} \quad (\text{III.6})$$

$$y = \frac{2500 - (5 - 1)100}{5} = 420 \text{ pixels} \quad (\text{III.7})$$

L'image ci-dessous a été générée par le logiciel « Adobe Illustrator » en utilisant les données ci-dessus.



**Figure 19: SER représente le composite unidirectionnel (Noir : fibre de verre/
Blanc : Polyamide 6)**

III.1.2.b) Présentation des résultats

Les propriétés des deux matériaux sont montrées dans le tableau ci-dessous :

Matrice : Polyamide 6		Renfort : Fibre de verre E	
E (GPa)	ν	E (GPa)	ν
3.2	0.38	73	0.3

Tableau 4: Les propriétés de la matrice et du renfort.

En utilisant un maillage de 100×100 éléments, les résultats obtenus par notre élément multi-phase sont comparés à celles de logiciel DIGIMAT-MF et la loi de mélange :

	Loi de mélange	DIGIMAT-MF	Élément multi-phase
E (Gpa)	17.16	17.164	17.16
ν	0.364	0.3613	0.3627

Tableau 5: Comparaison entre les résultats obtenues de différentes méthodes

III.1.2.c) Présentation de l'état de contrainte

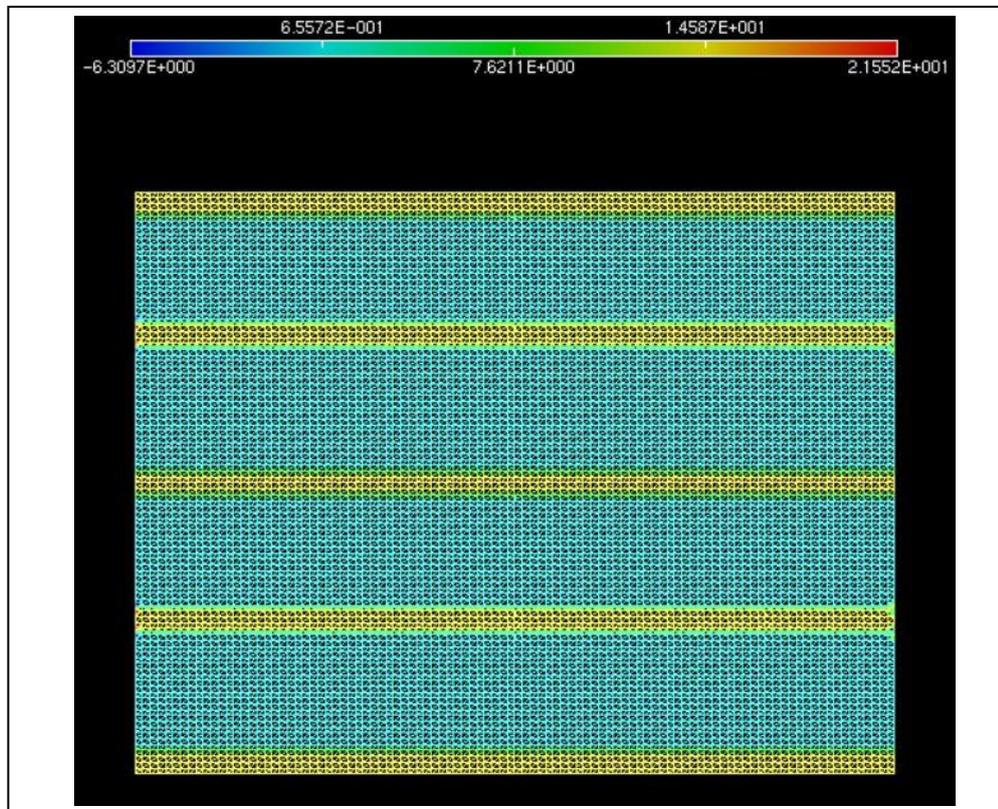


Figure 20: L'état de contrainte sigma11 dans le cas d'un matériau unidirectionnel.

III.1.3 L'effet du rayon d'inclusion sphérique sur les propriétés mécaniques du composite

III.1.3.a) Présentation de la microstructure

En ce cas, nous allons faire une étude comparative sur l'effet du rayon d'inclusion sphérique sur les propriétés mécanique (module de Young et coefficient de poisson). Nous prenons différents rayons : $R=25$, $R=50$, $R=100$, $R=250$ pixels, dont la taille du SER est toujours 2500×2500 pixels.

Les microstructures générées par le logiciel MATLAB sont présentées dans la figure (21)

III.1.3.b) Présentation des résultats

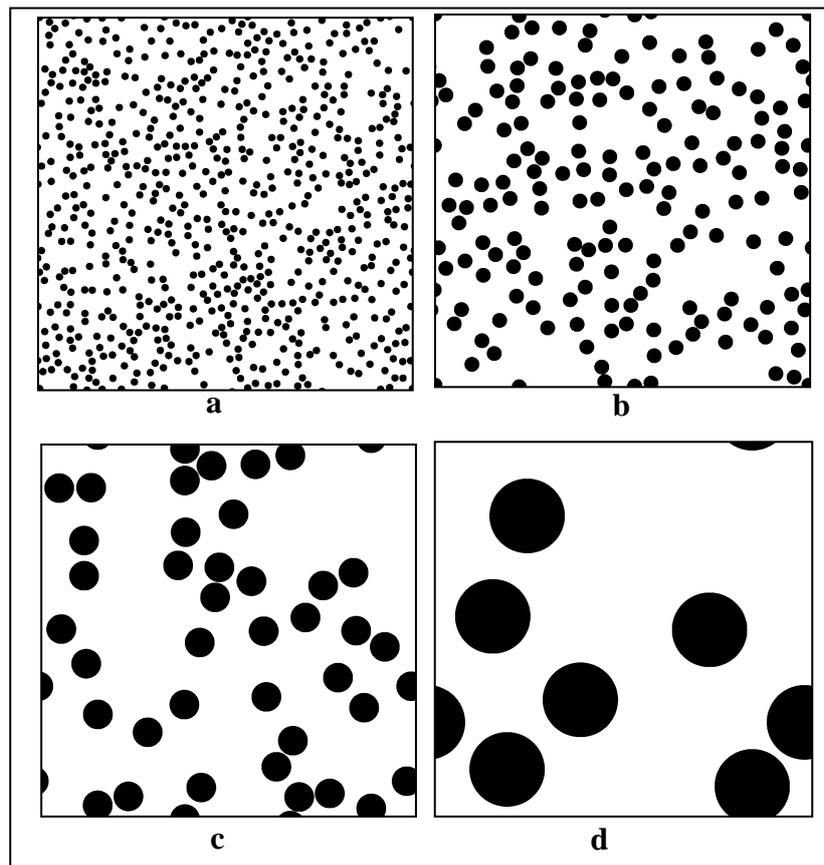


Figure 21: Présentation des SER : a : $R=25$, b : $R=50$, c : $R=100$, d : $R=250$

Avec un maillage de 200×200 éléments, la variation du module de Young et de coefficient de

Poisson sont présentés dans les figures 22 et 23 respectivement, dont les propriétés des matériaux utilisés sont présentées dans le tableau (6) ci-dessous :

Matrice : PP		Renfort : Fibre de verre E	
E (GPa)	ν	E (GPa)	ν
1.7346	0.4	73	0.3

Tableau 6: Les propriétés des matériaux pour cette étude

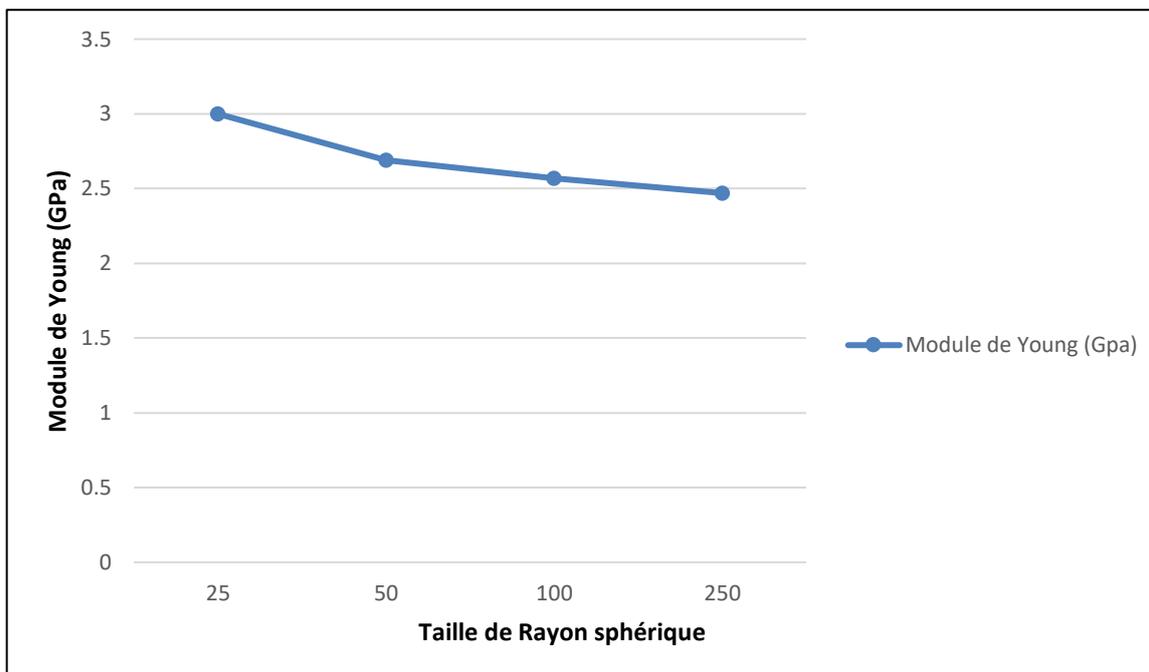


Figure 22: Variation du module de Young en fonction du R.

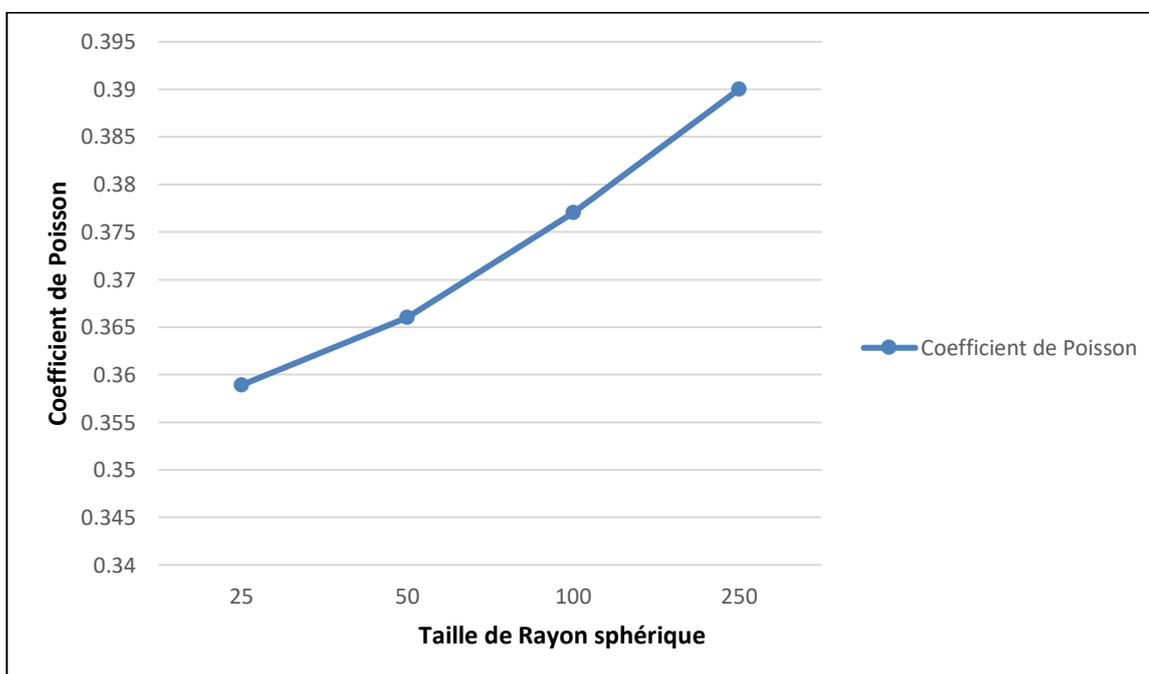


Figure 23: Variation du coefficient de Poisson en fonction du R.

Nous remarquons que d'autant le diamètre d'inclusion est grand, le module de Young diminue, et le coefficient de Poisson augmente.

III.1.3.b) Présentation de L'état de déformation

Dans ce qui suit nous allons montrer les résultats de l'état de contrainte et de déformation par la méthode multi-phase pour les différents rayons d'inclusions sphériques :

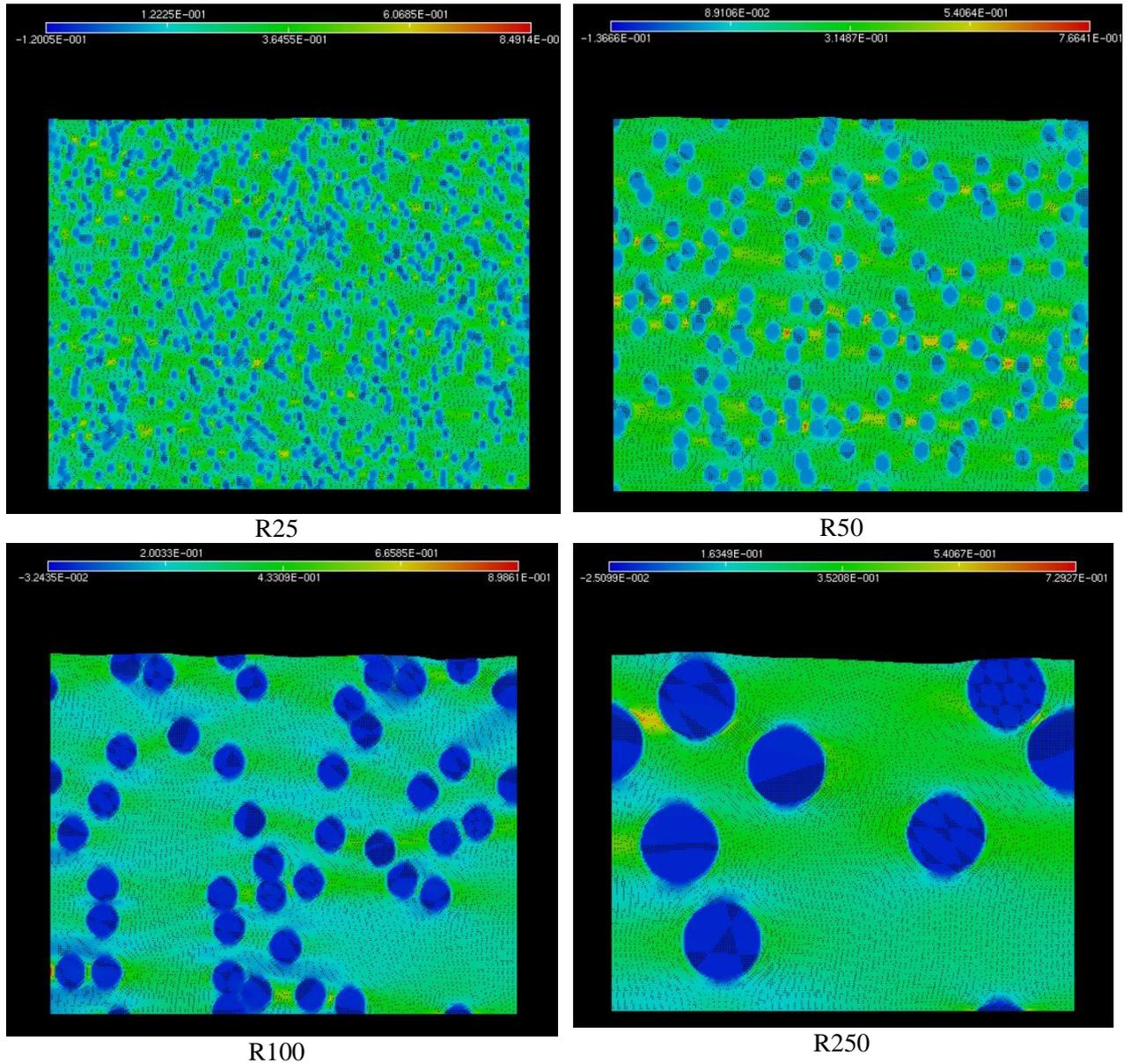


Figure 24: Présentation de l'état de déformation pour les différentes tailles d'inclusion sphériques.

III.1.4 Etude de l'effet de l'élongement de la fibre (L/d) sur les propriétés mécaniques (E,v)

III.1.4.1. Présentation de la microstructure

Avec un maillage de 200×200 éléments, nous allons étudier le composite à renfort aléatoire présenté dans le premier cas de ce chapitre (PP/Chanvre), avec une taille d'image de 2500x2500 pixels et une fraction volumique de 20%, les valeurs de la longueur L et le rapport d'élongement L/D sont présentés dans le tableau ci-dessous :

L (pixels)	Rapport L/D
21	1
105	5
420	20

Tableau 7: L'élongement de la fibre L/D

La figure ci-dessous présente les microstructures étudiées et générées par le logiciel MATLAB :

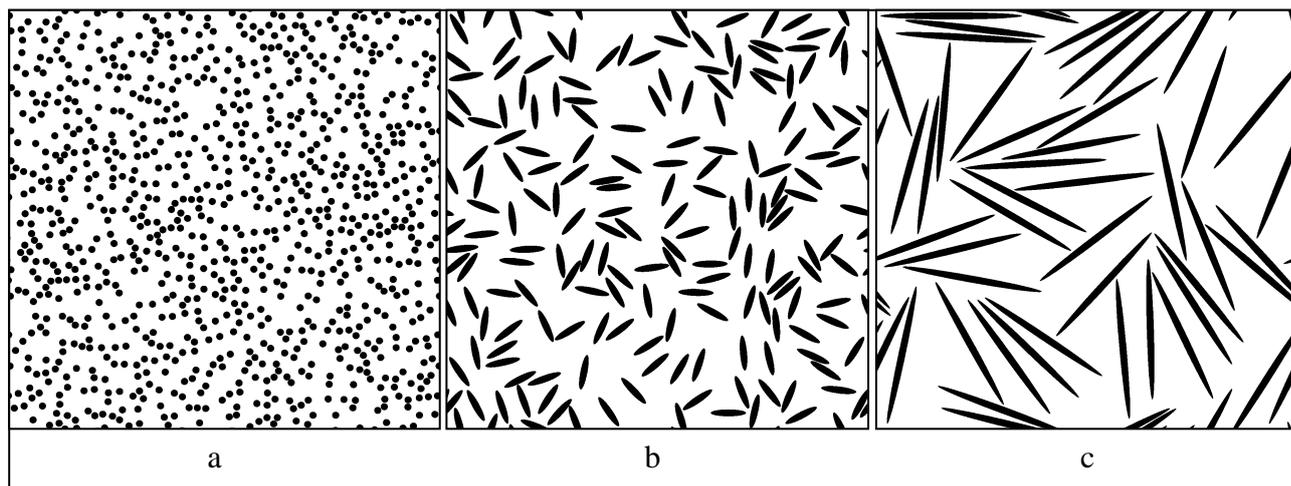


Figure 25: Les microstructures étudiées : a : L/D=1, b : L/D=5, c : L/D=20

III.1.4.2. Présentation des résultats

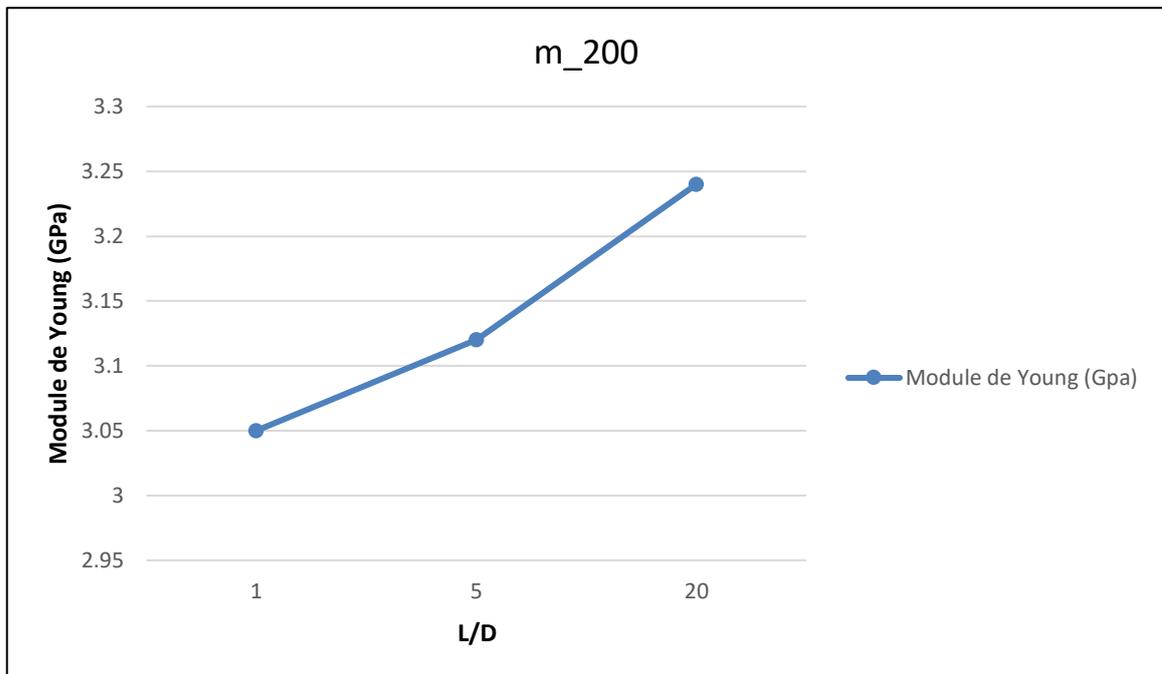


Figure 26: Variation du module de Young en fonction de L/D

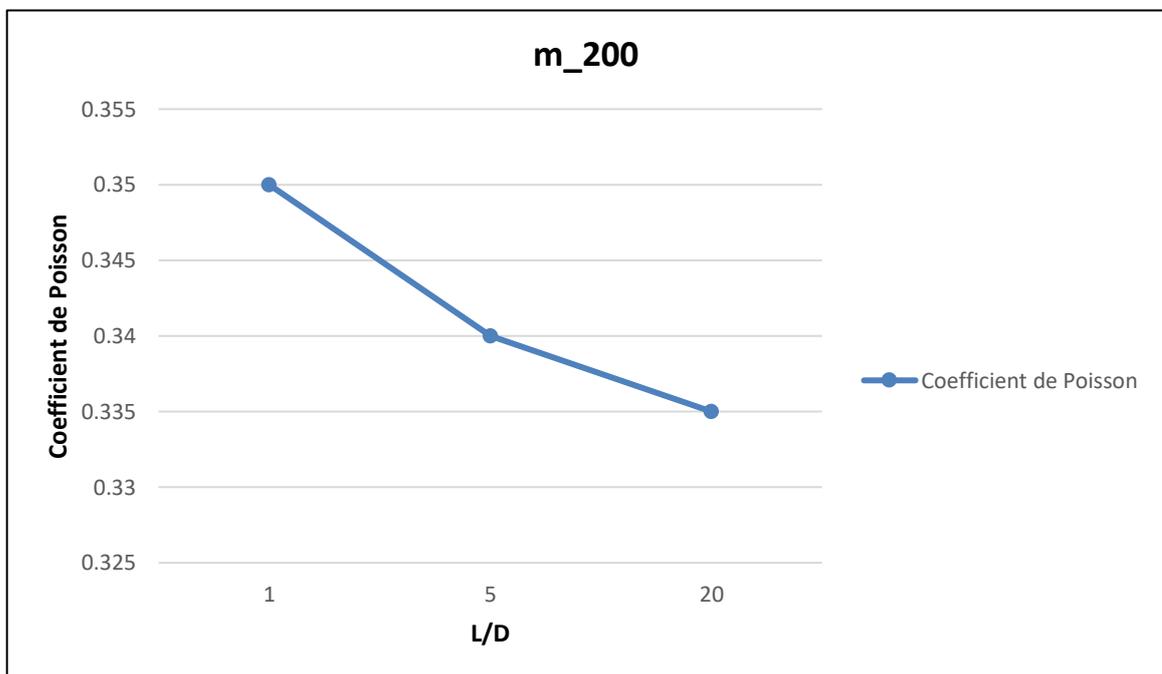


Figure 27: Variation du coefficient de Poisson en fonction de L/D

III.1.4.2. Présentation de l'état de contrainte et de déformation :

Les figures ci-dessous seront présenter l'état de contrainte et de déformation pour chaque cas :

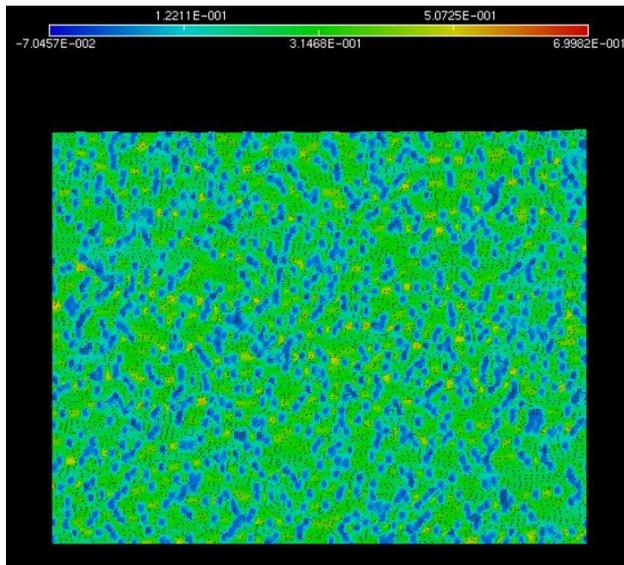


Figure 28: Etat de déformation L/D :1

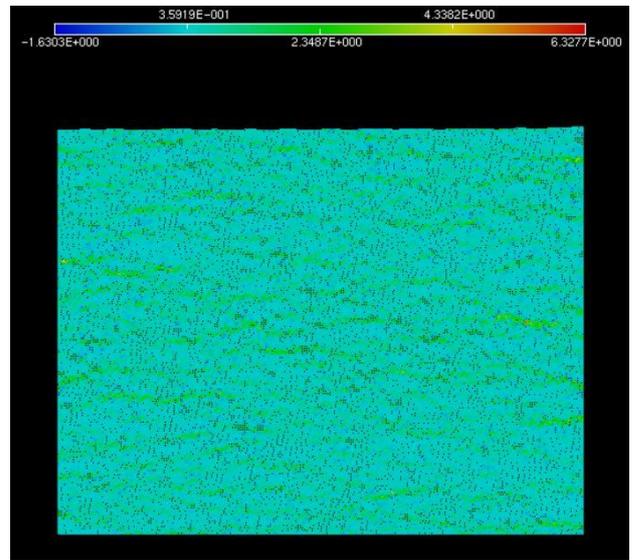


Figure 29: Etat de contrainte L/D :1

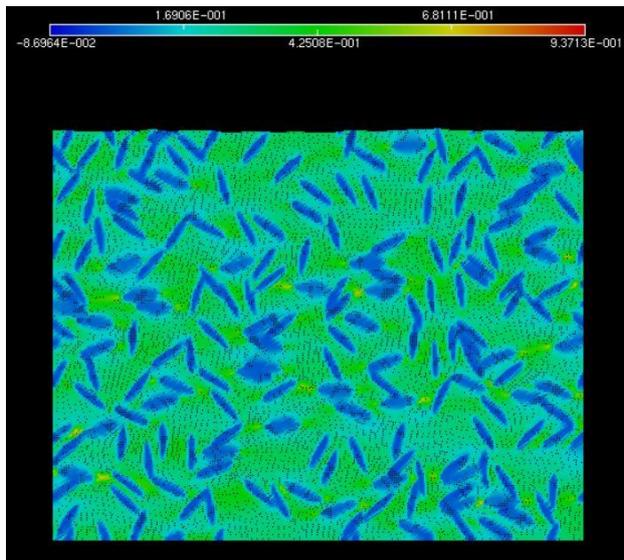


Figure 30: Etat de déformation L/D :5

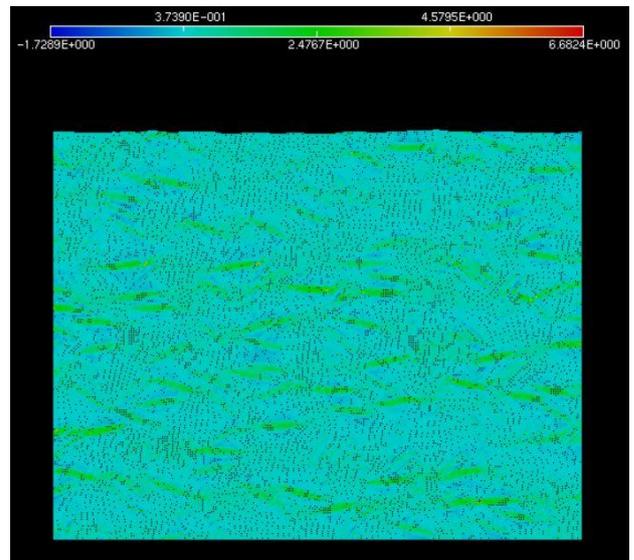


Figure 31: Etat de contrainte L/D :5

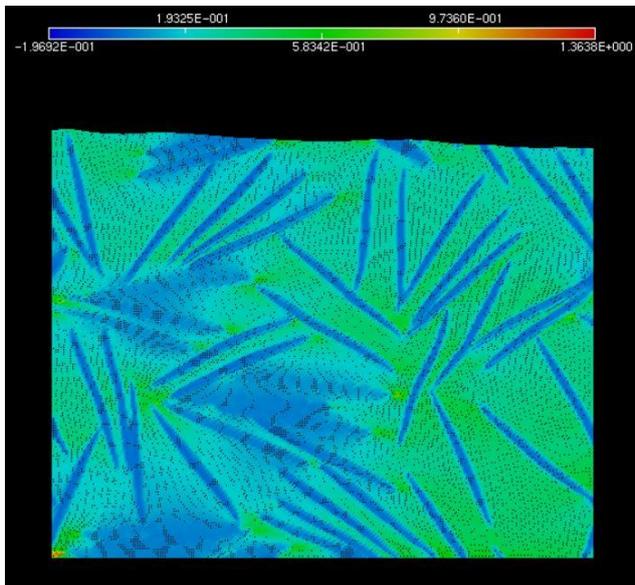


Figure 32: Etat de déformation L/D :20

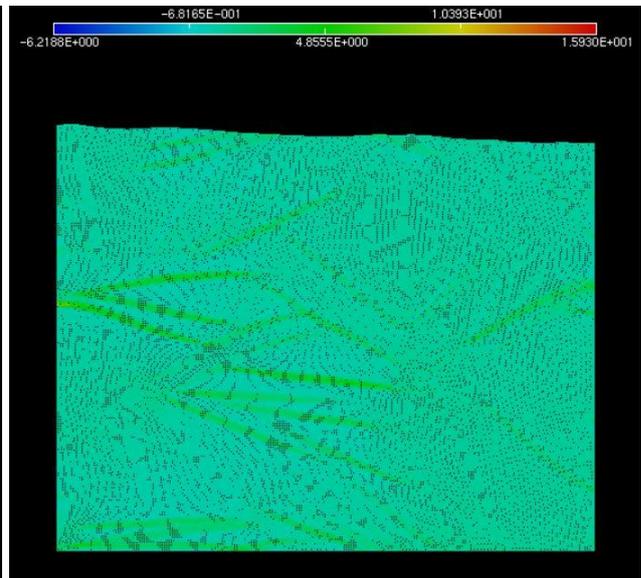


Figure 33: Etat de contrainte L/D :5

III.2.1. L'effet du gradient des propriétés mécaniques des constituants sur le module d'élasticité

III.2.1.1. Cas d'un gradient linéaire

III.2.1.1.a. Présentation de la microstructure étudiée

En utilisant le logiciel GIMP version 2.8, l'image ci-dessous est de composition de 50% couleur noire et 50% couleur blanche. La résolution d'image est toujours 2500 pixels, les conditions aux limites appliquées sont les mêmes conditions utilisées dans les tests précédents.

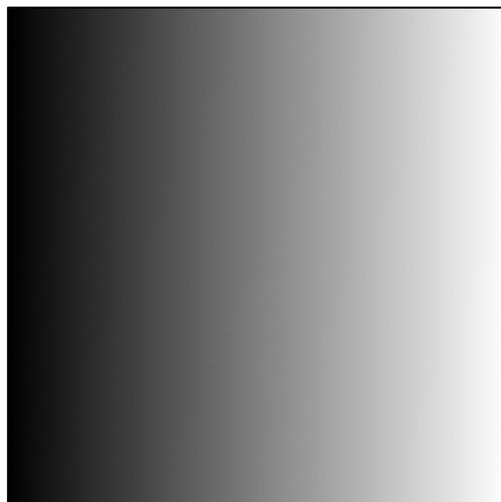


Figure 34: Image dégradée représente un matériau FGM

III.2.1.1.b. Présentation des résultats

Selon [22], Pour le matériau Al-Al₃Ni, les résultats d'après la loi de mélange se délimitent par les valeurs de l'intervalle 80-220 GPa, les résultats expérimentaux sont dans l'intervalle 131-152 GPa de différents pourcentages et épaisseurs, la valeur obtenue est 140 MPa, tel que le module de Young de la matrice Aluminium est de $E_{Al}=72\text{GPa}$. (Figure 36)

Une deuxième comparaison, pour le matériau Cenosphere-Polyester FGM, est présentée dans la référence [23]. Les résultats expérimentaux obtenus concernant le module de Young pour une composition entre 40 et 60% de renfort, sont comprises entre 4.5 et 5 GPa, le module de Young obtenu pour les différents maillages est égal à 4.7 GPa. (Figure 37)

La troisième test est décrit dans la même référence [23], le cas du matériau Ni₃Al-TiC FGM. Les résultats expérimentaux obtenus pour la composition entre 40 et 60% de renfort, le module de Young obtenu est dans l'intervalle de 300 et 350 GPa, le module de Young obtenu pour les différents maillages est égal à 312 GPa. (Figure 38)

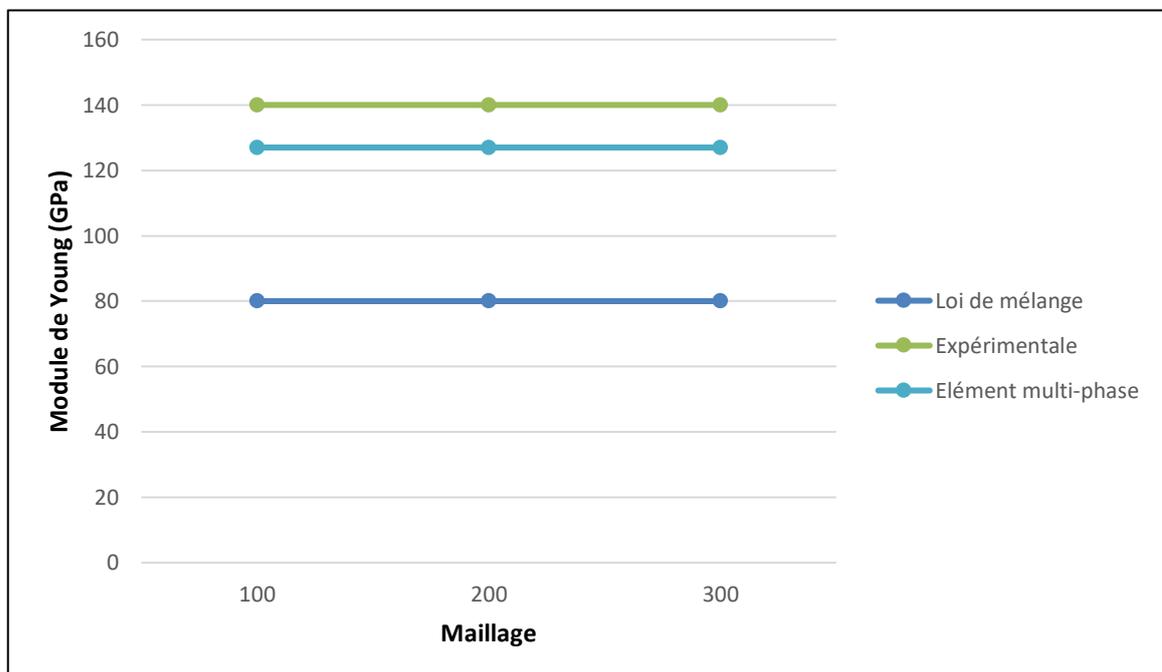


Figure 35: comparaisons de la variation du module de Young du matériau Al-Al₃Ni

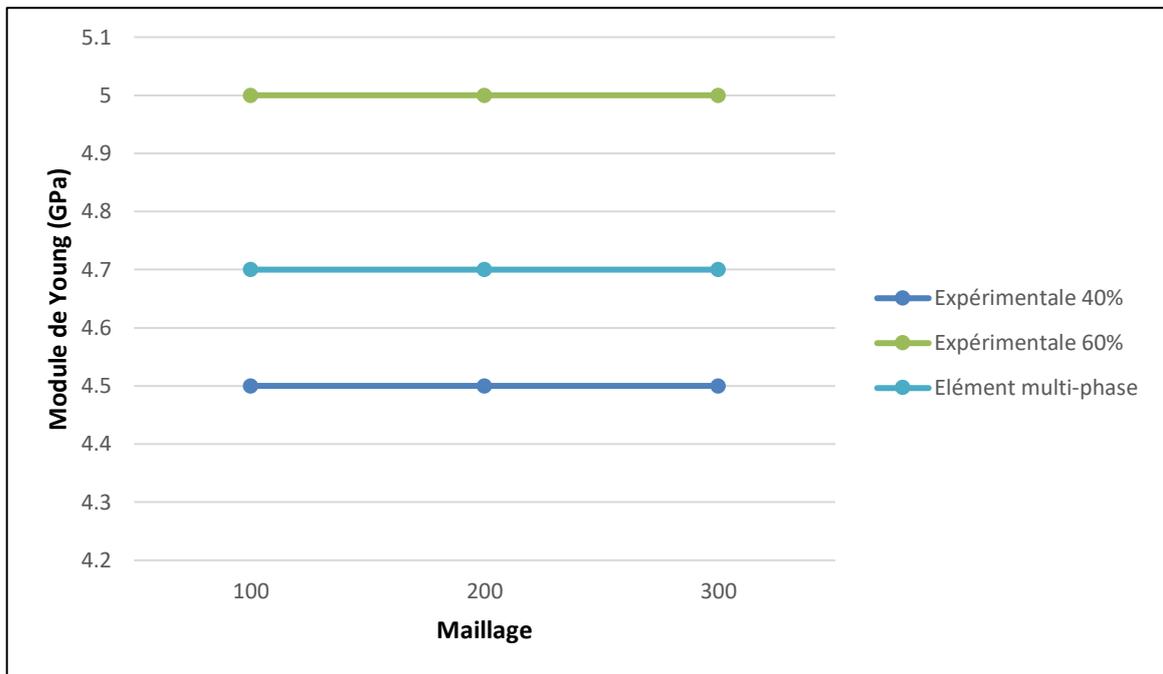


Figure 36: comparaison de la variation du module de Young du matériau Cenosphere-Polyester

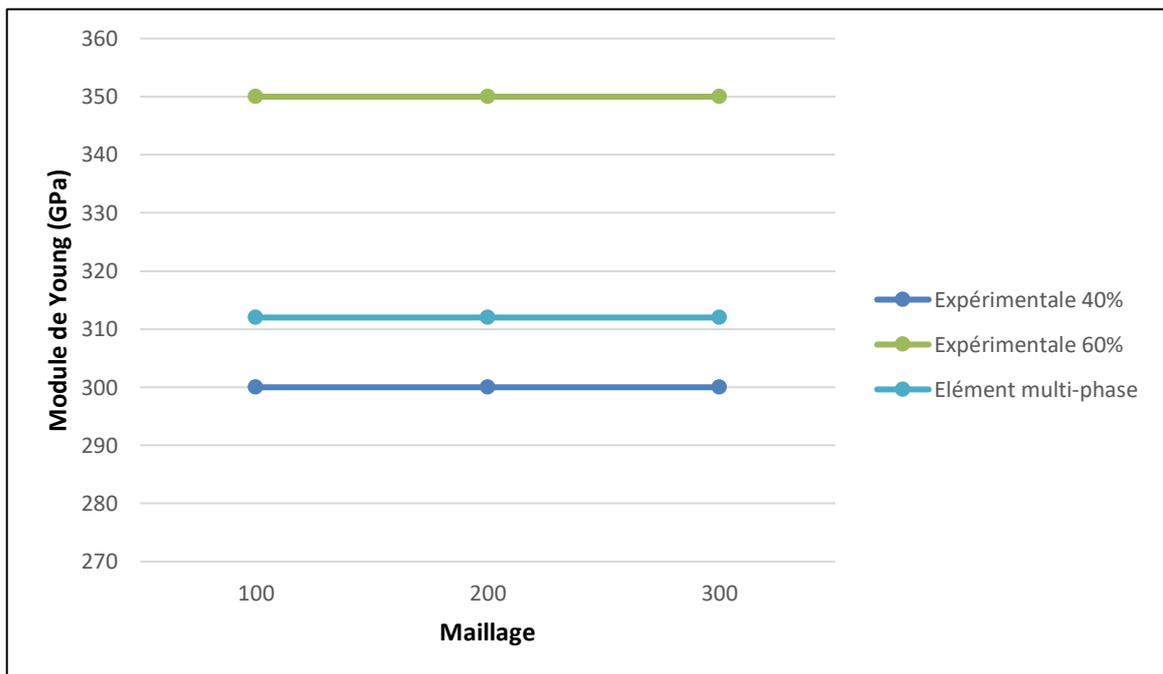


Figure 37: comparaison de la variation du module de Young du matériau Ni3Al-TiC

La convergence des résultats obtenus par notre méthode multi-phases est donc vérifiée avec une erreur assez acceptable. Également, dans le cas de ce type des matériaux, quel que soit le maillage le résultat final reste le même, donc pour un temps de calcul optimal, nous allons choisir le maillage 100×100 éléments dans la suite du travail.

III.2.1.1.c. Présentation de l'état de déformation et de contrainte

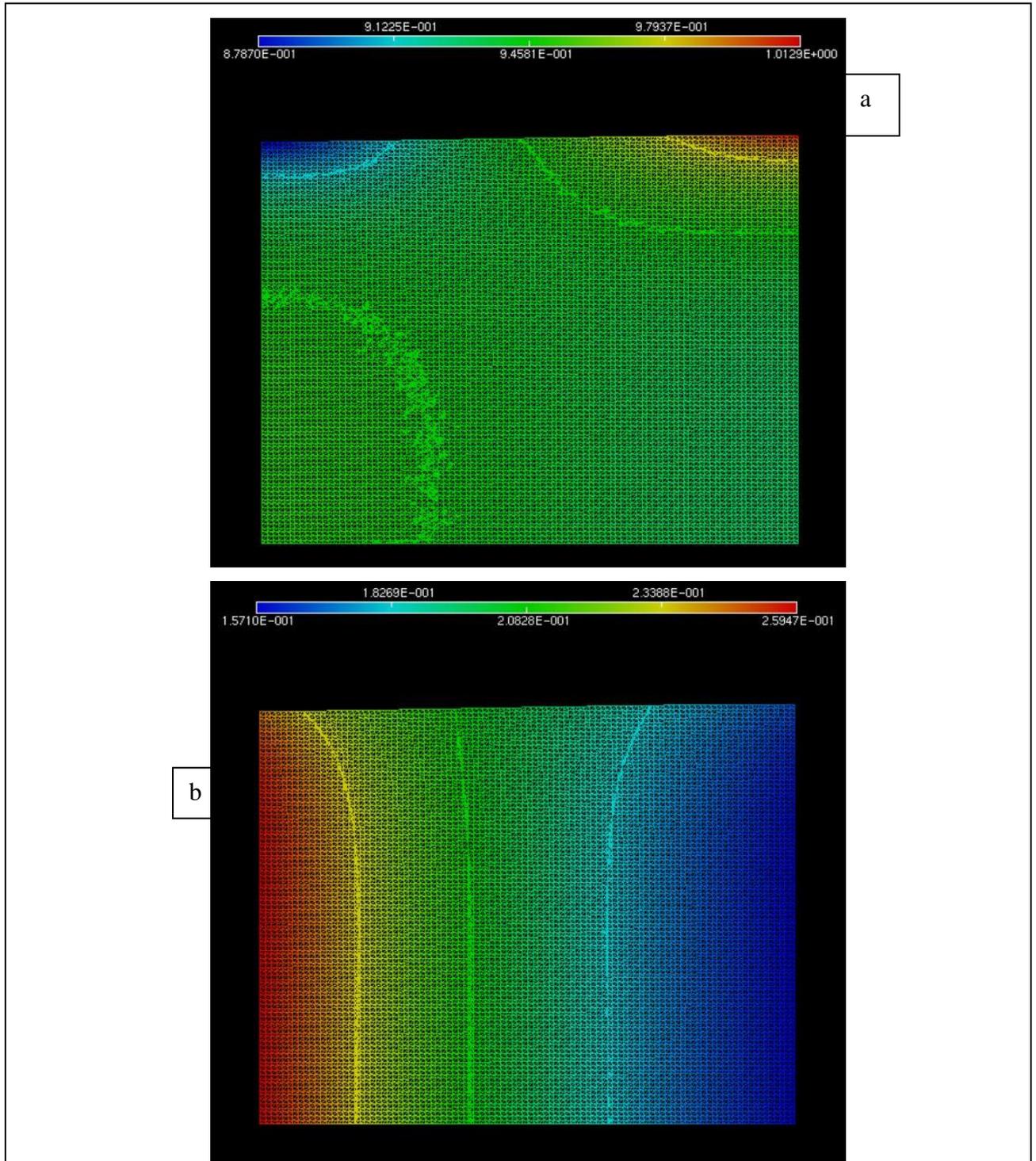


Figure 38: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau Cenosphere-Polyester

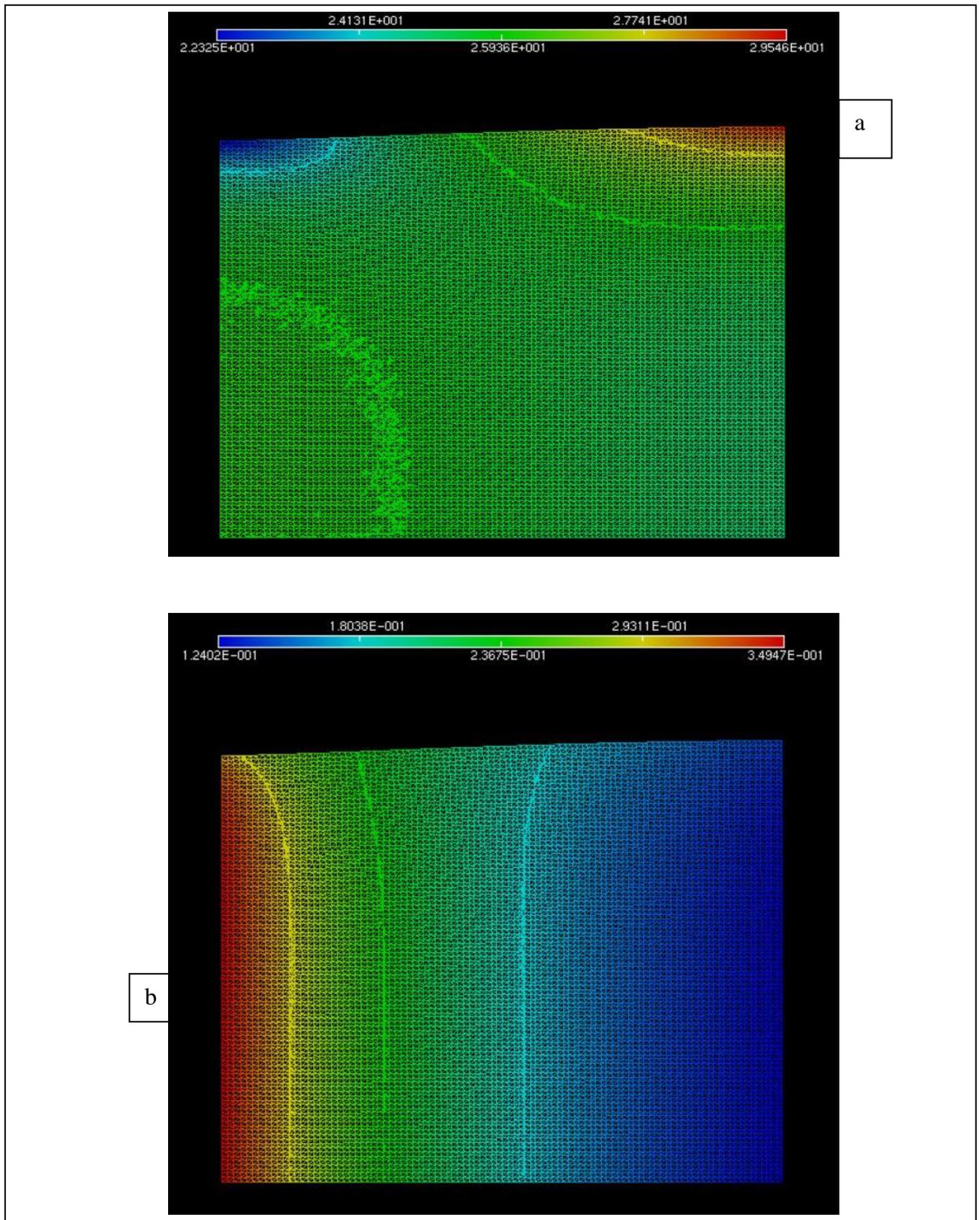


Figure 39: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau AL3Ni

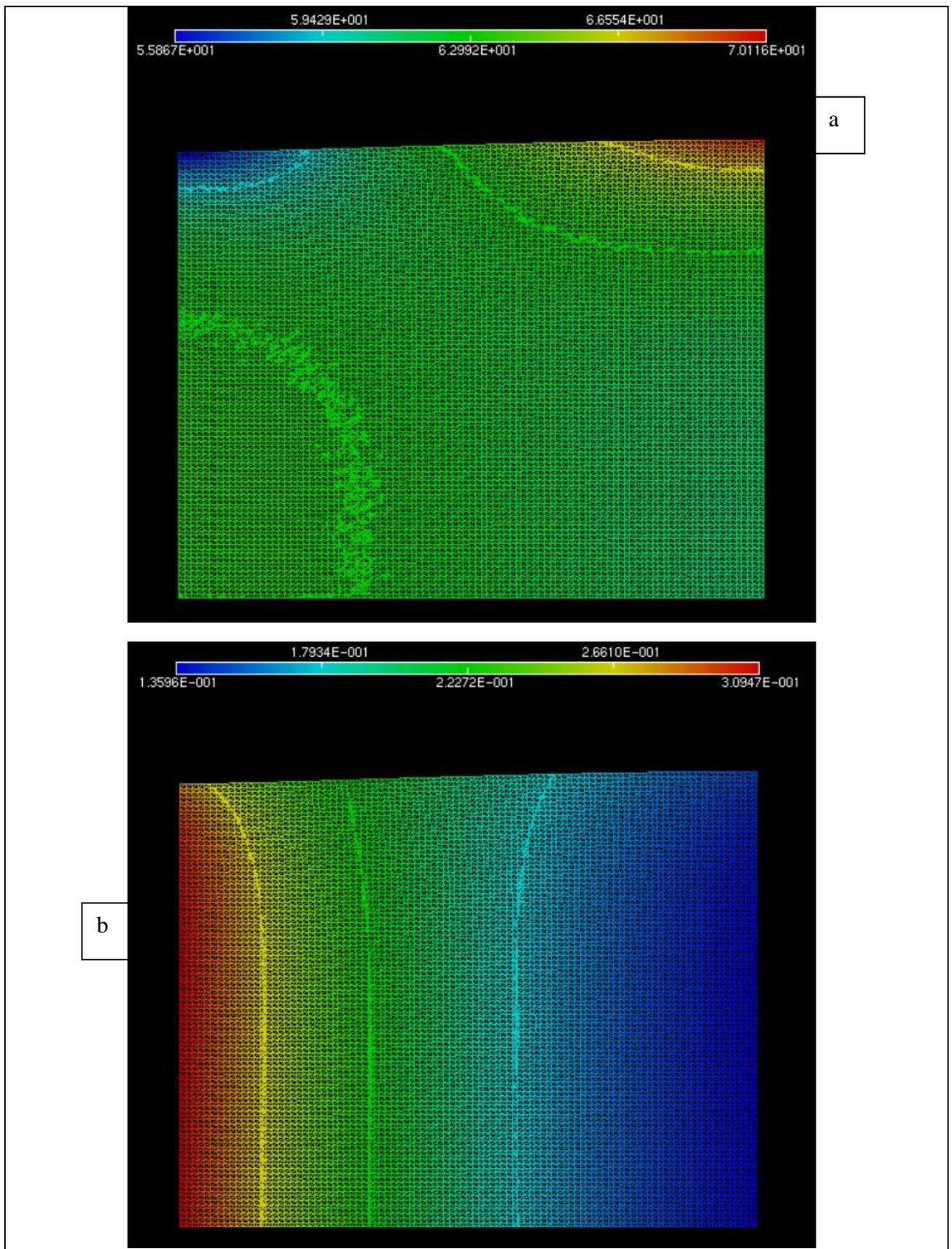


Figure 40: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau Ni₃Al-TiC

III.2.1.2. Cas d'un gradient par couche

III.2.1.2.a. Présentation de la microstructure étudiée

En utilisant le logiciel « Adobe Illustrator », on généré une image de 2500x2500 pixels qui contient 5 couleurs avec une dégradée de noir vers le blanc, les bandes de couleurs sont de largeur égale et qui vaut 500 pixels.

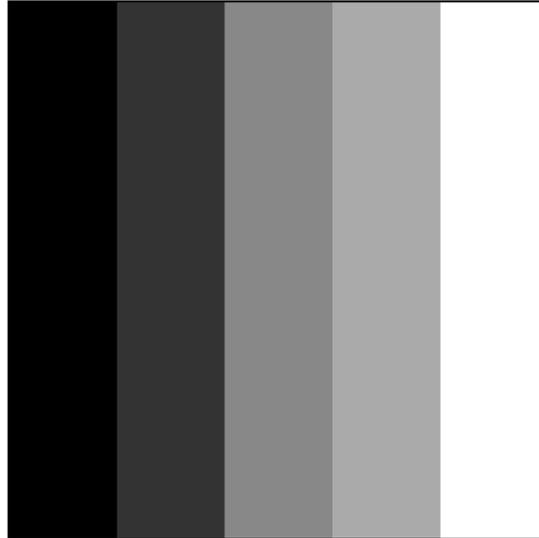


Figure 41: Le gradient par couche

III.2.1.2.b. Présentation des résultats

On prend les mêmes propriétés des matériaux précédents, et on fait une comparaison sur module de Young pour les différents cas des matériaux :

	Al₃-Ni	Cenosphere-Polyester	Ni₃Al-TiC
Gradient Linéaire	127.39	4.7	312.06
Gradient couche	119.69	4.6	298.03

Tableau 8: Comparaison entre les résultats de module de Young (GPa) de cas de gradient linéaire et gradient par couche

On remarque que le module de Young a été diminué dans ce cas, ça peut être à cause de la discontinuité entre les bandes des matériaux, contrairement au cas de gradient linéaire continue le contacte entre les particules est plus ou moins parfait.

III.2.1.2.a. Présentation de l'état de contrainte et de déformation

Dans ce qui suit, une représentation de l'état de contrainte et de déformation pour les différents cas des matériaux à gradient par bandes :

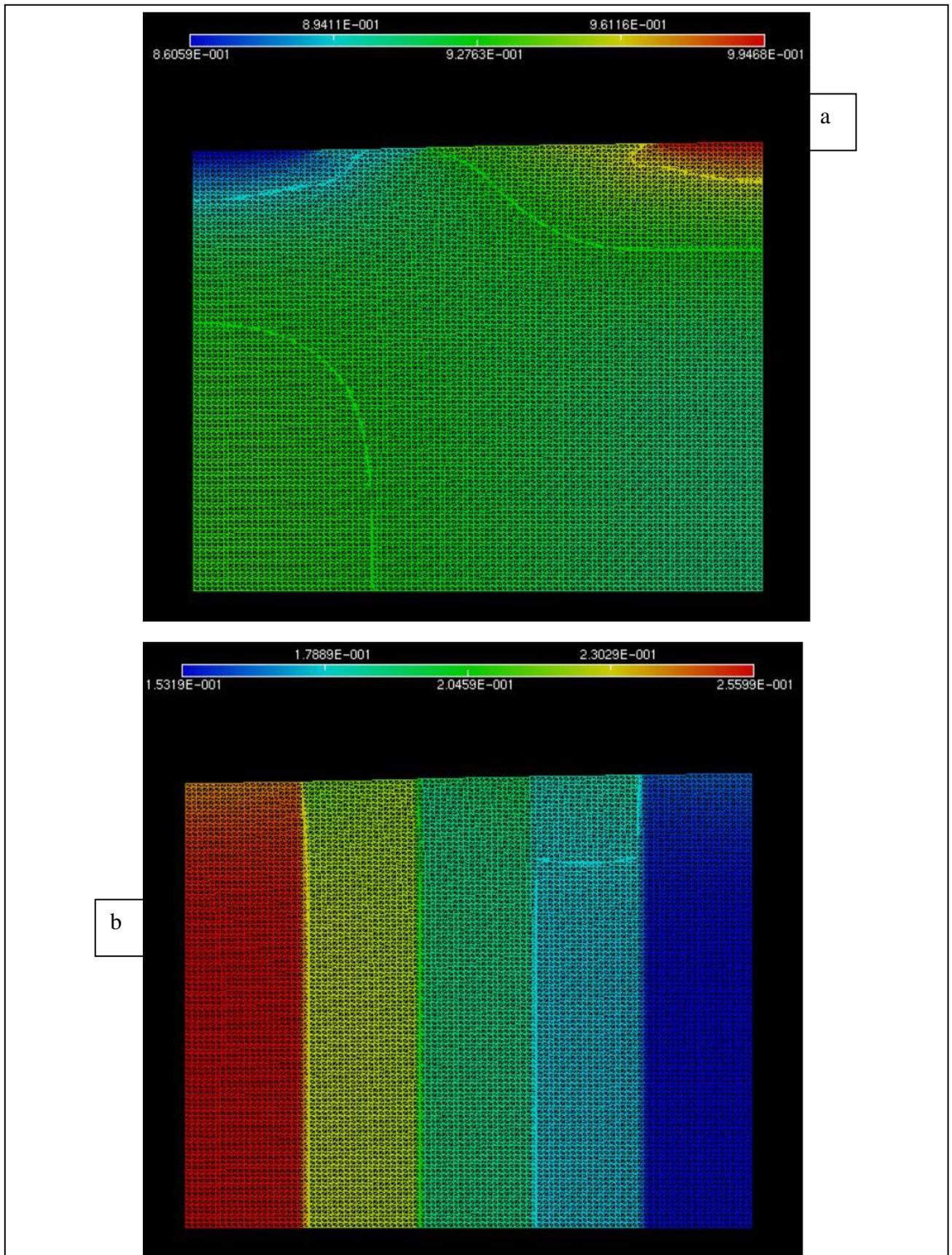


Figure 42: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau Cenosphere-Polyester

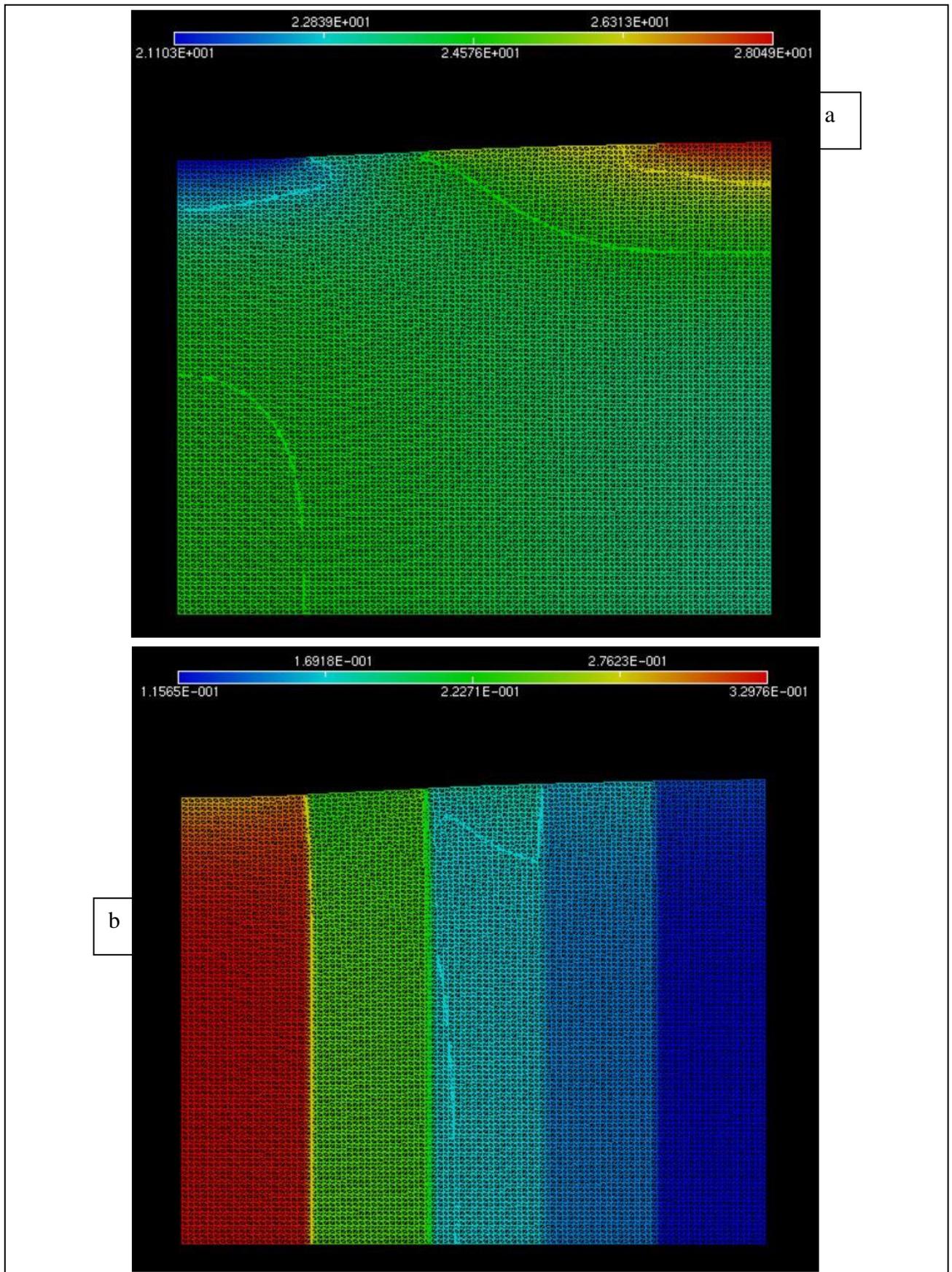


Figure 43: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau AL3Ni

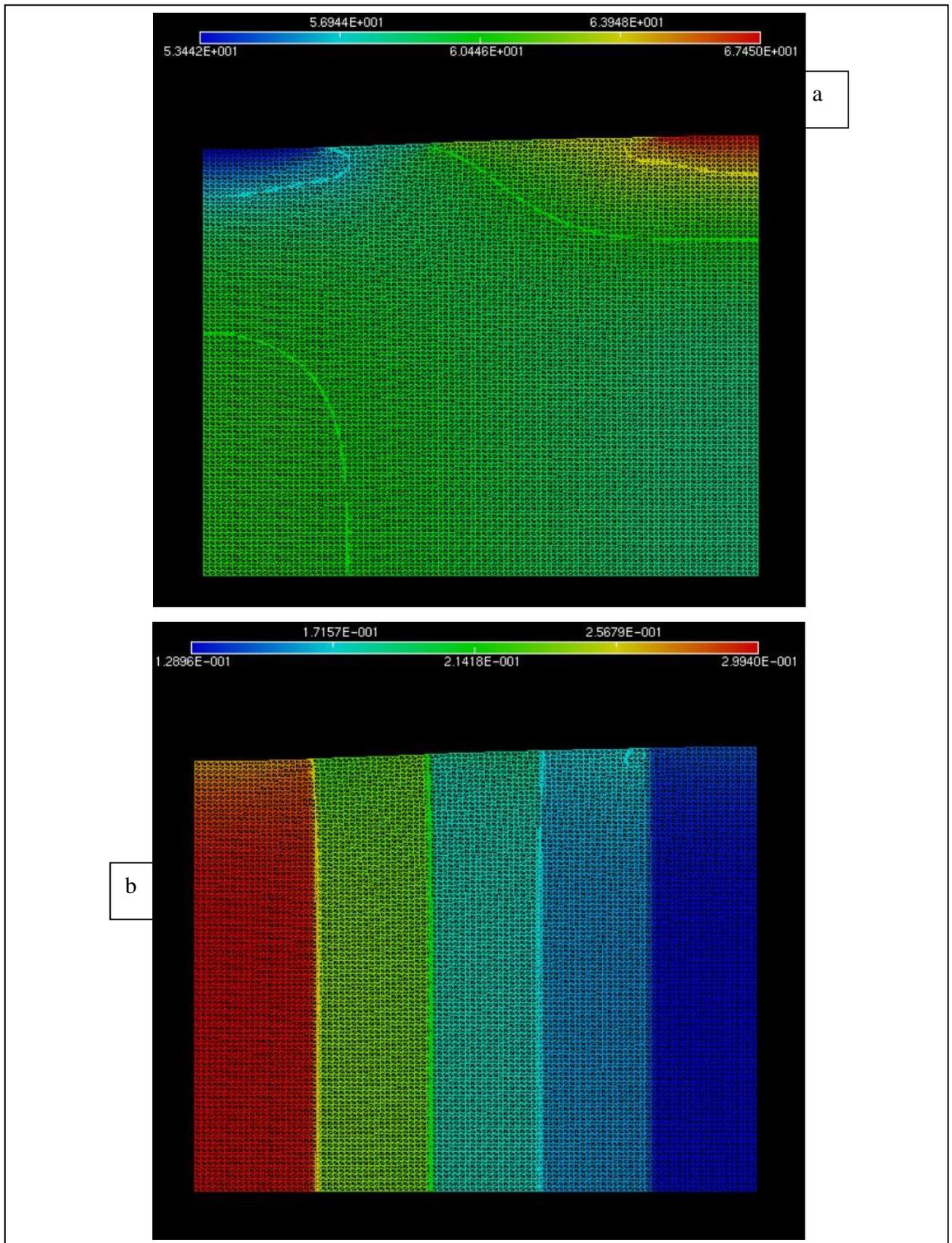


Figure 44: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau Ni₃Al-TiC

III.2.2. Cas d'un gradient exponentiel (E-FGM)

Pour ce cas des matériaux, nous allons introduire l'équation (II.39) dans notre code pour décrire la variation du module de Young dans la structure, la variation est donc présentée dans la figure qui suit :

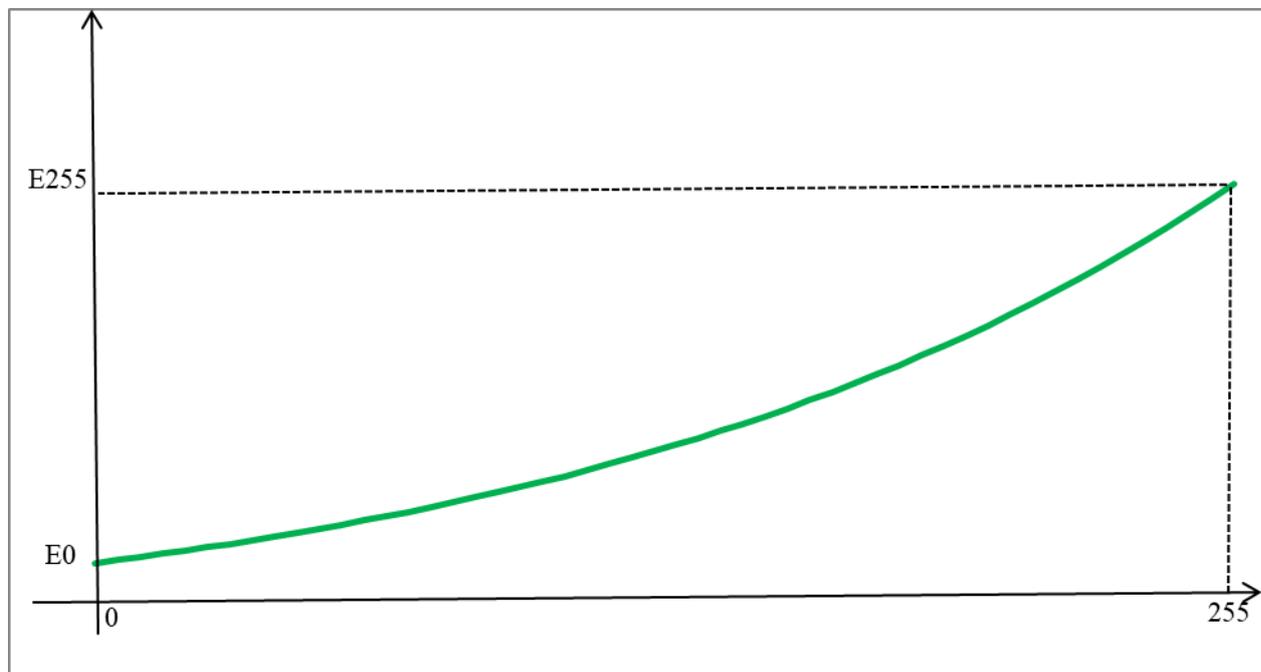


Figure 45: La variation du module de Young dans le cas de E-FGM

III.2.2.a. Présentation des résultats

Le tableau ci-dessous comprend une comparaison entre les résultats des trois cas des matériaux plus une comparaison avec le gradient linéaire et par couche.

Module de Young de FGM (GPa)			
	Al ₃ -Ni	Cenosphere-Polyester	Ni ₃ Al-TiC
Gradient exponentiel	245.14	7.98	566.86
Gradient Linéaire	127.39	4.7	312.06
Gradient couche	119.69	4.6	298.03

Tableau 9: L'effet du gradient des propriétés mécaniques des constituants sur le module d'élasticité

On remarque que le module de Young augmente.

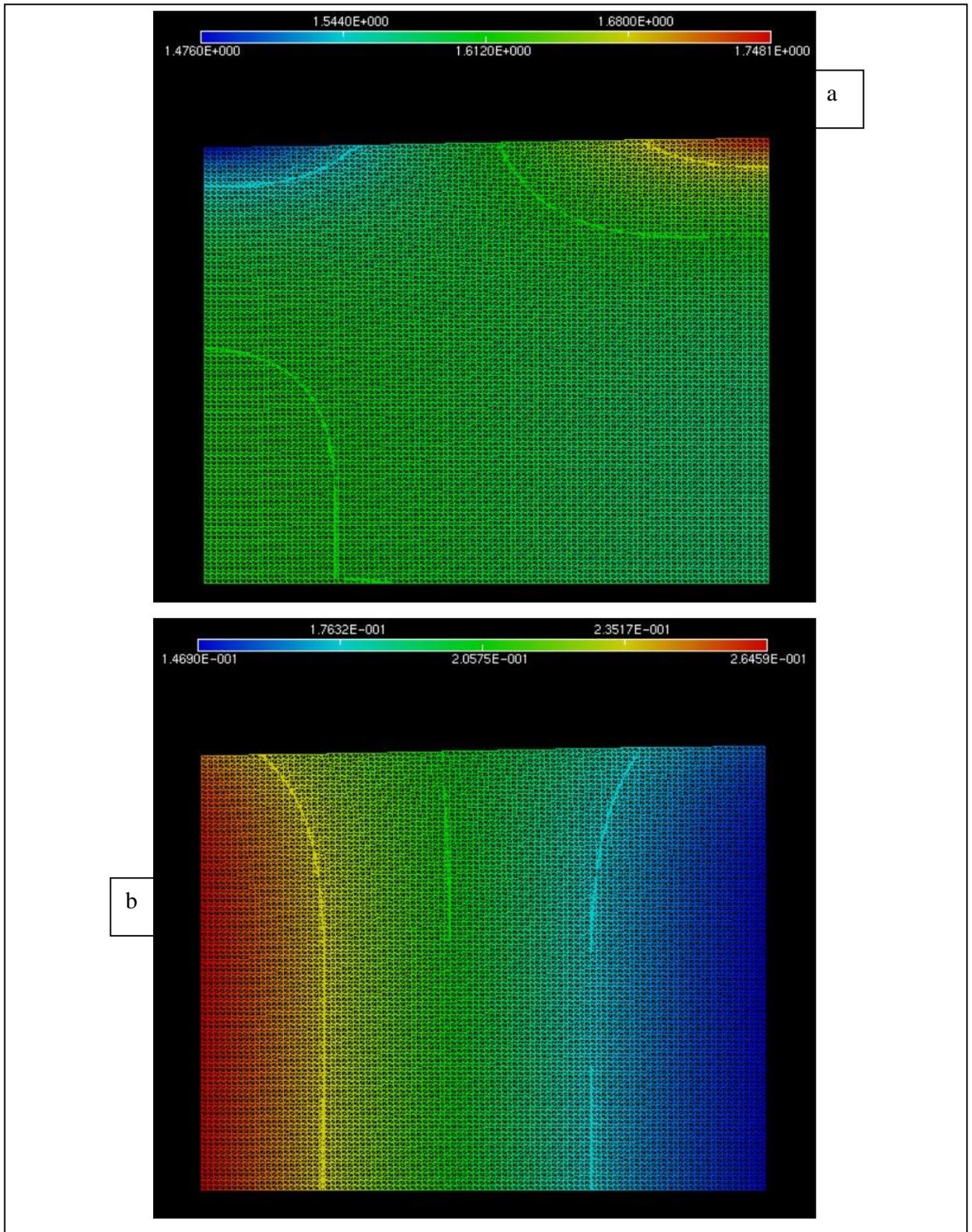


Figure 46: Etat de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau E-FGM Cenosphere-Polyester

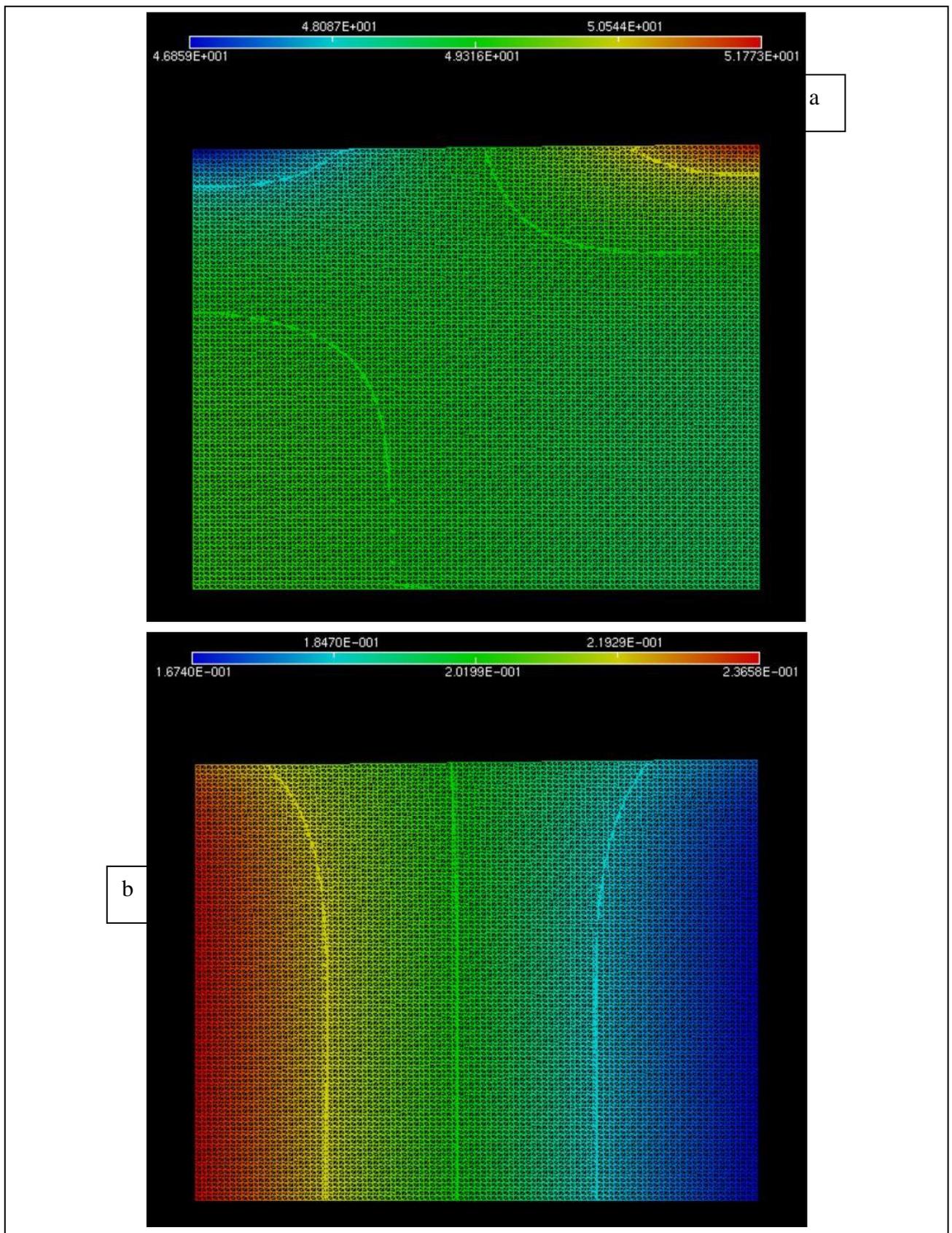


Figure 47: Etat de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau E-FGM AL3Ni

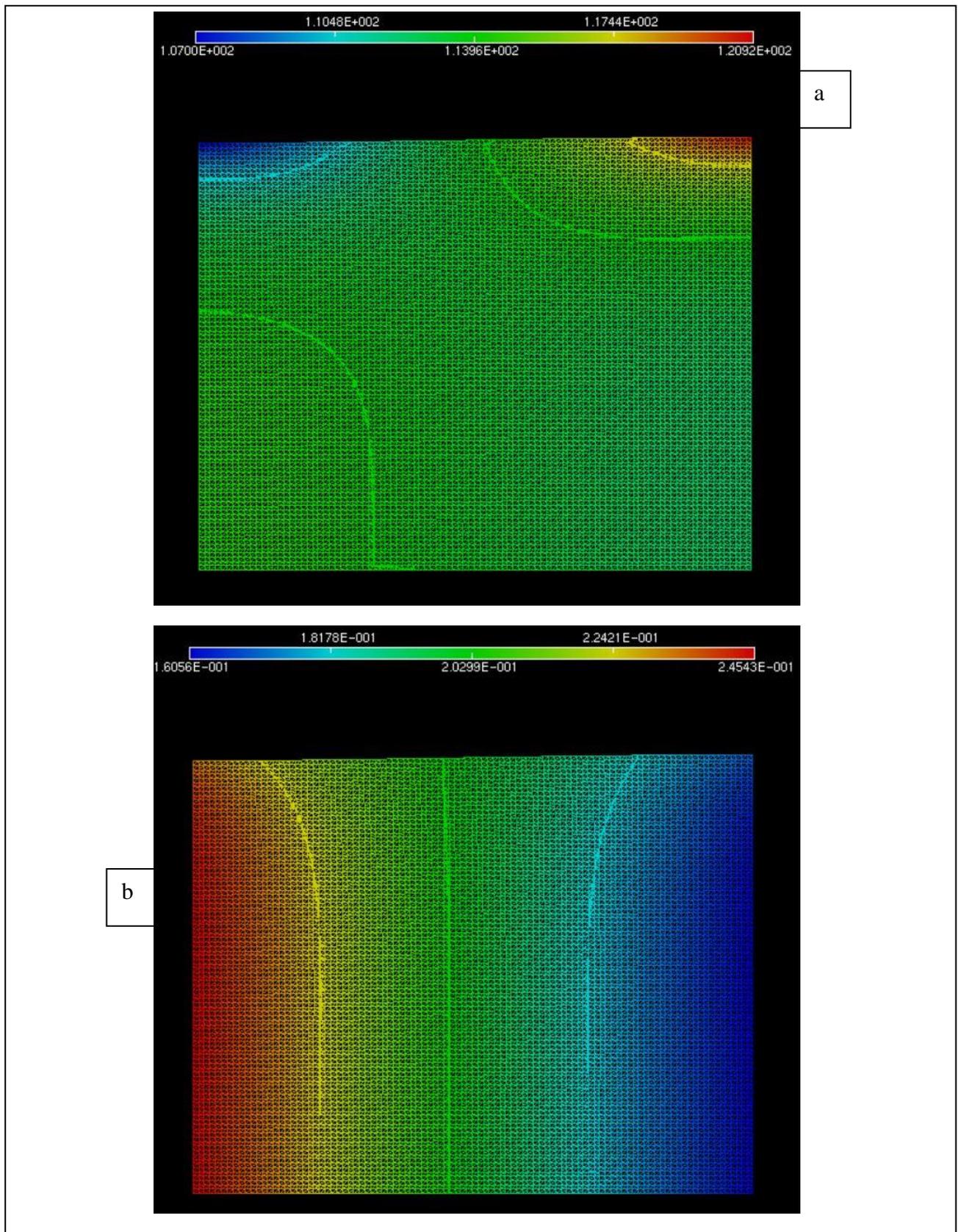


Figure 48: L'état de contrainte (a) et de déformation (b) pour le cas de matériau E-FGM Ni₃Al-TiC

Conclusion :

La méthode des éléments multi-phases a été validée et appliquée dans plusieurs cas tests tels que le cas des matériaux composites à renfort aléatoire. La méthode a montré une convergence monotone vers les valeurs de références à partir d'un maillage de 200×200 éléments, une excellente précision est constatée. D'autre part, la méthode de la fibre projetée a une convergence monotone avec moins de précision. Cette dernière est plus pratique pour des maillages grossiers. L'effet de la forme des inclusions sur les propriétés élastiques de composite a été analysé. Une forme élancée de la fibre donne plus de rigidité qu'une forme courte. Les petits diamètres des inclusions sphériques sont plus favorables à des composites plus homogénéisés et plus rigide.

Pour le cas des matériaux à gradient fonctionnel, du fait de la variation graduelle des propriétés des constituants de composite, la méthode des éléments finis à leur ne peut pas être appliquée. En revanche, la nouvelle technique multi-phase est capable de balayer tout le domaine de la structure et de tenir une rigidité infinitésimale des particules adjacentes. Différentes répartitions de module d'élasticité ont été examinées sur la base de la nuance de leurs couleurs dans la structure. Des résultats forts encourageants et exclusifs pour notre projet sont obtenus.

Conclusion générale :

Le but du présent travail est de développer et de valider une nouvelle approche de caractérisation de comportement mécanique des matériaux et de structures composites. La méthode dite des éléments multi-phases a été utilisée avec une approche de calcul de rigidité élémentaire étendue sur des sous-domaines de nature matérielle chevauchée. Il s'agit de discrétiser en premier lieu le domaine de la structure avec des éléments finis standards et d'assurer l'équilibre de la structure par la suite. En se basant sur la confrontation du maillage et d'une grille superposée sur toute la géométrie de la structure, les propriétés mécaniques sont définies dans un nombre fini des points d'intégration. La nuance des couleurs de l'image réelle ou simulée de la structure contribue crucialement à l'évaluation des propriétés mécaniques et par conséquent au calcul de la rigidité dans tous les éléments utilisés. Donc, cette approche nous permis de prendre en considération la discontinuité macroscopique des propriétés mécaniques des constituants de composite. La présente méthode nous a montré une bonne fiabilité de la technique, une excellente précision des résultats et un large domaine d'application.

Afin d'avoir arrivé à ces fins, on a présenté dans la première partie les différentes méthodes d'homogénéisation dans lesquelles nous avons évoqué les méthodes analytiques les plus connues telles que le modèle de Mori-Tanaka, le modèle auto-cohérent, les bornes classiques de Voigt et Reuss et les bornes de Hashin et Shtrikman, et les méthodes numériques qui sont basé généralement sur la méthode des éléments finis. Nous avons également présenté les lois de distribution de renfort dans un composite, dont la loi normale, la loi de Poisson et la méthode de Monte-Carlo sont discutées. Pour se familiariser avec le calcul d'homogénéisation des structures composites, le lecteur est ramené à se rappeler de différents types des conditions aux limites KUBC, SUBS et PBC.

La deuxième partie est dédiée à la formulation éléments finis. La démarche de calcul de la rigidité d'un élément quadrangle linéaire à quatre nœuds Q4 a été présentée. La méthode multi-phase et ensuite introduite comme extension à l'approche classique. Cependant, une technique micrographique a été utilisée et qui a donnée une vision plus détaillée de la surface de la structure et permet de détecter par exemple les propriétés élastiques du matériau en un nombre fini des points d'intégration.

La dernière partie a été consacrée à la validation et l'analyse de la nouvelle méthode dans des cas tests standards et d'autres appliqués. On a déduit que la convergence est assurée, avec une excellente précision, avec un maillage au-delà de 200×200 éléments. L'étude paramétrique a

conduit de privilégier les formes allongées des fibres afin d'obtenir une rigidité élevée de composite. Un bon usage des particules sphériques est limité aux tailles relativement petites par rapport à la taille de SER. D'autre part, la réussite de l'application de la présente méthode au calcul des matériaux FGM a montré encore une fois sa puissance et a permis d'élargir son domaine d'application avec n'importe quel type de matériau.

L'intérêt du travail se révèle dans la multidisciplinarité des sujets entamés : science des matériaux et analyse micrographique, calcul des structures, mathématique appliquée...etc. Donc, une synthèse de la formation de parcours est acquise et le but de ce travail est largement atteint. Réaliser une interface graphique qui regroupe toutes les routines de traitement d'image, de calcul éléments finis et de post traitement d'une part, et d'élargir le domaine d'application de la méthode multi-phase constituent sans doute nos futures perspectives.

Références bibliographiques :

1. GHOMARI T., A.R., KEBIR H., HAMADI F., *Caractérisation numérique des propriétés mécaniques des composites à fibres naturelles courtes orientées aléatoirement*, in *1ère Conférence EuroMaghrébine des BioComposites2016*: Marrakech.
2. Terada, K., T. Miura, and N. Kikuchi, *Digital image-based modeling applied to the homogenization analysis of composite materials*. Computational Mechanics, 1997. **20**(4): p. 331-346.
3. Guo, Z.X., *Multiscale materials modelling: Fundamentals and applications*2007: Elsevier.
4. Préault, V., *Méthodes d'homogénéisation pour la modélisation électromagnétique de matériaux composites. Application au blindage de boîtiers d'équipement électronique.*, in *Laboratoire de Génie Électrique de Paris (LGEP) 2013*, Université Paris Sud: Paris.
5. Lemaitre, S., *Modélisation des matériaux composites multiphasiques à microstructures complexes. Étude des propriétés effectives par des méthodes d'homogénéisation.*, 2017, Université de CAEN Normandie.
6. Djebbloun Y., H.M., Sedira L., Djoudi T., *Homogenization des propriétés mécaniques d'un matériau bio-sourcé par le modèle de Mori-Tanaka*, in *1ère Conférence EuroMaghrébine des BioComposites2016*: Marrakech. p. 1-6.
7. B. Klusemann, B.S., *Homogenization methods for multi-phase elastic composites: Comparisons and benchmarks*. TECHNISCHE MECHANIK, 2010. **30**(4): p. 374 – 386.
8. LARIBI, M.A., *Caractérisation et Modélisation micromécanique du comportement des matériaux composites SMC sous chargement thermomécanique de type quasi-statique et fatigue*, in *L'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers*2018, ParisTech.
9. Chalon, F., *MODELISATION DU COMPORTEMENT MECANIQUE D'UN MATERIAU CONTENANT DES CAVITES SOUS PRESSION ; CAS DU VIEILLISSEMENT D'UN TRITURE METALLIQUE*, INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE.
10. Hashin, Z., *Analysis of Composite Materials—A Survey*. Journal of Applied Mechanics, 1983. **50**(3): p. 481-505.
11. Hashin, Z. and S. Shtrikman, *A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials*. Journal of applied Physics, 1962. **33**(10): p. 3125-3131.

12. Hashin, Z. and S. Shtrikman, *On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1962. **10**(4): p. 335-342.
13. Hashin, Z. and S. Shtrikman, *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1962. **10**(4): p. 343-352.
14. Hashin, Z. and S. Shtrikman, *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1963. **11**(2): p. 127-140.
15. LEROUX, J., *Modélisation numérique du contact pour matériaux composites*, 2013, l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.
16. Kebir, H. and R. Ayad, *A specific finite element procedure for the analysis of elastic behaviour of short fibre reinforced composites. The Projected Fibre approach*. Composite Structures, 2014. **118**: p. 580-588.
17. Cazenave, M., *METHODE DES ELEMENTS FINIS Approche pratique en mécanique des structures*. 2eme edition ed2013, Paris: DUNOD.
18. Craveur, J.-C., *MODÉLISATION DES ÉLÉMENTS FINIS Cours et exercices corrigés*. 3eme edition ed2008: DUNOD.
19. SAPORTA, G., *Probabilités Analyse des données et statistique* 2eme ed2006, Paris: Technip. 631.
20. Dress, F., *LES PROBABILITÉS ET LA STATISTIQUE DE A à Z*: DUNOD.
21. BATACHE, D., *Déterminations des propriétés mécaniques effectives des milieux hétérogènes, approche par le modèle de n+1 phases et validation par l'approche numérique* in *departement de mécanique*2018, Université de Batna 2-Mostefa Ben Boulaid. p. 166.
22. Y. FUKUI, K.T., C. B. PONTON *Measurement of Young's modulus and internal friction of an in situ Al-Al₃Ni functionally gradient material* JOURNAL OF MATERIALS SCIENCE 1994. **29**: p. 2281-2288.
23. Elouaer A. *Contribution to the understanding and modeling of the mechanical behavior of composite materials reinforced with vegetal fibers*. [Ph.D. thesis]. University Of Reims Champagne-Ardenne; 2011.

Annexes

Annexe**Algorithme de calcul élément fini multi-phase**