

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques



Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en “Mathématiques Appliquées”

Option : Analyse

Par Charif Fattoum

Titre :

Approximation des moindres carrés et applications

Devant le Jury :

Dr. Radjeh Fouzia MCB U. Biskra Encadreur

Dr. Laadjal Baya MCB U. Biskra Président

Dr. Hamdi Soumia MAA U. Biskra Examineur

Soutenu Publiquement le 28/06/2022

Dédicace

*J*e tiens c'est avec grande plaisir que je dédie ce travail à celle qui m'a arrosé de tendresse et d'espoir à la source du respect mon encadreur Radjeh Fouzia.

A ma mère qui ne m'a pas mis au monde, qui m'a appris la patience et la lutte
Charif Karima.

A ma grande mère paix à son âme.

A celui qui m'a fait de moi une femme, mon père Mohamed lakhdar.

A l'être le plus cher de ma vie, ma mère Ghalloudji Nedjma.

A mon âme sœur, mon mari Debabeche Ishak.

A mes frères : Mustapha et Ahmed et mes sœurs : Nadia, Malek et Meriem.

A mon neveu Islam et ma nièce Djihane. *A* ma belle mère Samia et mon beau père Ali. *A* ma belle sœur Djamila et mes beaux frères Ahmed et Madani.

A la tante de mon mari Fadhila et mes oncles Hocine et Abderrazek, sa femme Fatima, et sa fille Nour El Houda.

A mes professeurs respectés, celles qui se tenaient à mes Côtés, Berkane Khaoula, Hassiba, Koraichi et Menacer.

A mes chères copines : Sabrina, Amina, Wissem, Anfel, Rahma, Chafia, Hayet.

*F*inalement, je dédie ce travail à tous ceux qui connaissent Fattoum charif et à tous mes collègues de la promotion 2022.

Remerciements

Avant tout, je tiens à remercier ALLAH le toute puissant qui m'a aidée et donnée la santé et le courage afin de termine mes études.

Mes remerciements à Mme Radjeh Fouzia pour m'avoir encadré, je suis heureuse d'avoir travaillé avec elle.

Je tiens à remercier les membres du Jury : Laadjal Baya et Hamdi Soumia pour examiner et juger mon travail.

Je tiens aussi à remercier ma chère karima charif, sabrin, Berkane et hayat pour leurs aides et conseils.

Je n'oublie pas l'ensemble de mes amies proches et aussi mes camarades d'études.

Merci à vous tous.

Notations et symboles

β	:	La boule ouverte
$\bar{\beta}$:	La boule fermée
S	:	La sphère
O	:	Les ouverts
d	:	La distance
$\ \cdot\ $:	La norme
$\langle \cdot, \cdot \rangle$:	Le produit scalaire
V	:	Le sous espace vectoriel
(E, d)	:	L'espace métrique
(E, O)	:	L'espace topologique
$(E, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$:	L'espace préhilbertien
C_b	:	L'espace des fonctions bornées
\mathcal{P}_n	:	L'espace des fonctions polynômiales
B_n	:	La suite de polynômes de Bernstein
φ^*	:	La meilleure approximation
ω	:	La fonction poids
P_n^*	:	La meilleur approximation polynômiales
T	:	La température (k où c°)

- t : Le temps (s)
- Δ_t : La taille de l'étape du temps (s)
- λ : La conductivité thermique
- J : Le critère de déviation

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Notations et symboles	iii
Table des matières	v
Introduction	1
1 Généralités sur l'approximation	3
1.1 Quelques notions de base	3
1.2 Existence d'une meilleure approximation	5
1.3 Théorème d'approximation de Weirstrass	7
2 Approximation des moindres carrés	10
2.1 Meilleure approximation dans un espace préhilbertien	11
2.2 Construction de φ^*	14
2.2.1 Approximation continue des moindres carrés	16
2.2.2 Approximation discrète des moindres carrés	16

2.3 Meilleure approximation polynômiale	17
2.4 Algorithme d'orthogonalisation de Schmidt :	20
3 Applications des moindres carrés	22
3.1 Régression linéaire	22
3.2 Etude numérique de la conductivité thermique	26
Conclusion	30
Bibliographie	31

Introduction

Dans nombreux domaines scientifique, on ne peut pas trouver explicitement et exactement les solutions de ses problèmes parce que la fonction à étudier est très compliquée ou bien elle a donnée sous forme des données expérimentales.

Donc, en analyse numérique on substitue très souvent cette fonction par un polynôme à partir des méthodes de calculs existantes : Interpolation et Approximation polynômiale. On trouve après que l'approximation est la plus utilisée puisque elle n'a pas une relation entre le degré du polynôme qu'approche la fonction et le nombre des points (des abscisses) de l'expérience ; en plus, l'interpolation reste toujours un cas particulier de l'approximation des moindres carrées discrète dans le cas où $N = n$.

A la grande importance et l'utilité de l'approximation des moindres carrées on la proposée comme un sujet d'étude de notre mémoire. L'une des idées les plus efficaces de cette notion est de minimiser l'erreur commise entre la fonction exacte et le polynôme approchant cette fonction.

La méthode des moindres carrés est une méthode de base et elle est extrêmement importante à plusieurs domaines (physique, mécanique, électronique,...) parce qu'elle nous permet de donner des modèles mathématiques à notre expérience. Cette méthode est découverte par Johan Carl Friedrich Gauss, mathématicien, as-

tronome et physicien allemand, il a été découvert en 1809 et elle est apparue dans le volume 2 de son travail en mécanique céleste.

Dans notre travail, le premier chapitre contient trois sections : la première section présente quelques notions de base et quelques définitions et remarques qui seront utilisées dans le reste du travail. Dans la deuxième et la troisième section, on présente le théorème de base d'existence d'une meilleure approximation ; ensuite, on donne le théorème de Weierstrass qui joue un rôle très important dans l'approche d'une fonction continue par un polynôme.

Au deuxième chapitre, on va voir en détail la méthode des moindres carrés, on mentionne ses caractéristiques les plus importantes. On va préciser que cette notion est dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (espace préhilbertien). Pour la construction de la meilleure approximation polynomiale, on va donner la condition nécessaire et suffisante et on va terminer ce chapitre par l'algorithme d'orthogonalisation de Schmidt pour faciliter les calculs.

Le troisième chapitre est consacré à l'application de la méthode des moindres carrés dans la régression linéaire et nous abordons également un exemple des moindres carrés utilisé en dehors du domaine des Mathématiques ; exactement en mécanique (Identification des variations thermique).

Enfin, nous concluons par une conclusion générale.

Chapitre 1

Généralités sur l'approximation

Le premier chapitre est toujours un chapitre introductif ; donc, on essaye de donner les notions de base qu'on aura besoin dans notre sujet.

Dans notre étude, on va approcher une fonction continue par une autre facile à calculer et garde les mêmes propriétés que la première à condition que cette dernière fonction est la plus proche que la première.

1.1 Quelques notions de base

Mathématiquement, pour mesurer la précision de cette approximation ou bien la distance entre la fonction exacte et la fonction approchée, il faut présenter quelques définitions nécessaires.

Définition (1.1) : *On appelle une distance sur un ensemble E toute application :*

$$\begin{aligned}d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\(x, y) &\longrightarrow d(x, y)\end{aligned}$$

vérifie les propriétés suivantes :

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y; \forall x, y \in E$.
2. $d(x, y) = d(y, x); \forall x, y \in E$ (symétrie).
3. $\forall x, y, z \in E$; on a : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$; (inégalité triangulaire).

L'espace métrique est tout ensemble E muni d'une distance d ; c'est-à-dire : le couple (E, d) . [1]

Définition (1.2) : Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On dit que l'application : $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme sur E , si elle vérifie les conditions :

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$; pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; pour tout $x, y \in E$.

Si on munit l'ensemble E par la norme $\|\cdot\|$ définie précédemment ; $(E, \|\cdot\|)$; on trouve alors un espace vectoriel normé.

Définition (1.3) : Si (E, d) est un espace métrique; pour $x \in E$ et $r > 0$, on définit :

1. La boule ouverte de centre x et de rayon r : $\beta(x, r) = \{y \in E : d(y, x) < r\}$
2. La boule fermée de centre x et de rayon r : $\bar{\beta}(x, r) = \{y \in E : d(y, x) \leq r\}$
3. Le sphère de centre x et de rayon r : $S(x, r) = \{y \in E : d(y, x) = r\}$. [6]

Définition (1.4) : On appelle espace topologique toute couple (E, O) ; avec E est un ensemble et O est une famille de partie de E appelée les ouverts vérifiant :

1. E, \emptyset sont des ouverts.
2. Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

3. *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

On a cité précédemment, qu'on veut approcher une fonction continue f dans un espace E par P^* dans l'espace V ; où $V \subset E$ et on essaye de minimiser la distance qui sépare f et P^* . Si on travaille dans un espace métrique, on a alors :

$$d(f, P^*) = \min_{q \in V} d(f, q)$$

P^* est appelé la meilleure approximation de la fonction f dans l'espace V au sens de la distance d et comme abréviation on peut prendre (*M.A*). C'est exactement la même chose si on travaille dans un espace vectoriel normé muni d'une norme $\|\cdot\|$. On dit que P^* est la meilleure approximation de f (dans V); si :

$$\|f - P^*\| = \min_{q \in V} \|f - q\|.$$

Cette fois P^* est la *M.A* de f au sens de la norme $\|\cdot\|$.

1.2 Existence d'une meilleure approximation

Dans cette section, on expose le Théorème de base qui nous donne les conditions d'existence et d'unicité de la meilleure approximation d'une fonction continue.

Théorème (1.1) : *Si E est un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} et V est un sous espace vectoriel de dimension finie de E ; alors : $\forall f \in E$; il existe au moins un $P^* \in V$; tel que :*

$$\|f - P^*\| = \min_{q \in V} \|f - q\|. \quad \diamond$$

D'après ce théorème, il est clair que la condition d'existence d'une meilleure approximation est que le sous espace V soit de dimension finie.

Avant de commencer la démonstration de ce théorème, il est nécessaire de vous rappeler que dans un espace de dimension finie, les boules sont compactes ; ce qui nous permet de conclure que : pour toute suite bornée on peut extraire une sous suite convergente.

Démonstration : En effet, on pose : $g = \min_{q \in V} \|f - q\|$ comme $q = 0$ est dans V , on a : $g \leq \|f\|$.

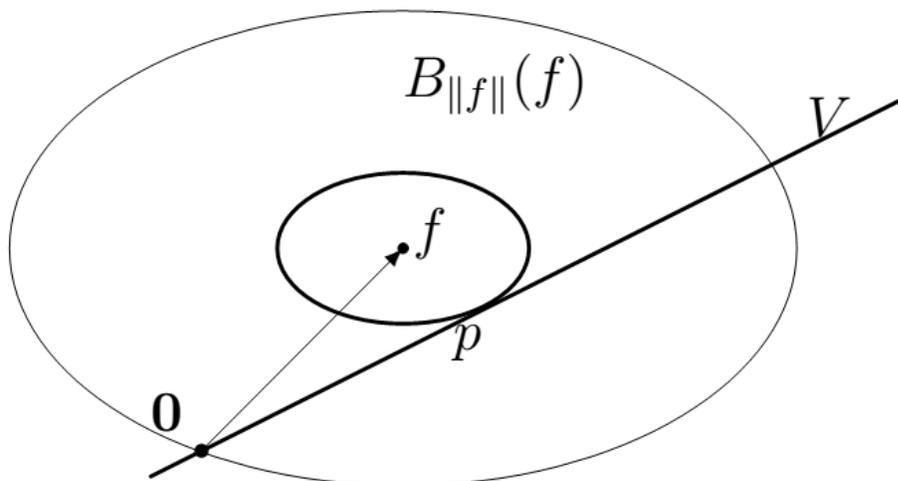
donc, il reste à étudier $\|f - q\|$ sur la partie fermée bornée $K = \beta_{\|f\|}(f) \cap V$ de V qui est de dimension finie ; la fonction continue $\|f - q\|$ atteint sa borne inférieure g en au moins un point $q = P^*$ du compact K .

Pour simplifier la compréhension, on présente la figure suivante laquelle, on a noté $\beta_{\|f\|}(f)$ qui contient 0 sur sa frontière et aussi $\beta_{\|f\|}(f)$ (en trait plus gras) qui touche V en P^* .

Cette démonstration peut se faire facilement par l'utilisation des composantes de q aux éléments de base de $V\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ et on considère $\|f - q\|$ comme une fonction continue de ces composantes réelles ou complexes, que l'on minimise après sur une partie compacte \bar{K} de \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n avec $\bar{K} = \{a_1, \dots, a_n : \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \in K\}$.

◆ [2]

En analyse numérique, On cherche souvent à approcher la fonction continue f par un polynôme ; (la plus simple fonction continue) ; on cherche alors d'une approximation polynomiale. Ce type d'approximation est très connue et elle est autorisée par un théorème extrêmement important ; c'est le théorème de *Weirstrass*.



1.3 Théorème d'approximation de Weirstrass

Ce théorème confirme que toute fonction continue est une limite d'une suite de polynômes, donc il confirme la densité de \mathcal{P} dans $C([a, b])$.

Théorème (1.2) : *L'espace \mathcal{P} des fonctions polynomiales est dense dans $C([a, b])$; l'espace des fonction continues sur l'intervalle $[a, b]$; muni de la topologie associée a la norme uniforme. \diamond*

Démonstration : Pour démontrer ce théorème, tout d'abord, on va supposer le cas particulier, où $a = 0$ et $b = 1$; c'est-à-dire : on considère $f \in C([0, 1])$ et on introduit la suite de polynômes de Bernstein B_n pour la fonction f

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right).$$

On applique la définition mathématique de la continuité uniforme d'une fonction f sur l'intervalle $[a, b]$, on a :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$; tel que :

$$x, y \in [0, 1]; \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Supposant un élément arbitraire $x \in [0, 1]$ et on effectue les calculs :

$$\begin{aligned} |B_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \left| f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x) \right| \\ &\leq \sum_{i: \left|\frac{i}{n}-x\right| \leq \delta} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \varepsilon + \sum_{i: \left|\frac{i}{n}-x\right| > \delta} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} 2|f|_\infty \\ &\leq \varepsilon + 2|f|_\infty \sum_{i: \left|\frac{i}{n}-x\right| > \delta} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \end{aligned}$$

Lorsque n est suffisamment grand, le terme $\sum_{i: \left|\frac{i}{n}-x\right| > \delta} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$ est très petit (plus petit qu'épsilon quel que soit x); ce qui nous permet de déduire la convergence uniforme vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. \blacklozenge

Maintenant, on revient au lemme que nous allons utiliser dans la démonstration du théorème :

Lemme (1.3) : Pour $\alpha \geq 0$, on introduit la fonction $U_\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $U_\alpha(x) = x^\alpha (1-x)^\alpha$. Cette fonction est strictement croissante sur $[0, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, 1]$.

En plus, si a et b sont donnés de sorte que : $0 \leq a \leq b \leq \alpha$ ou $\alpha \leq b \leq a \leq 1$; on trouve alors :

$$U_\alpha(x) \leq \exp^{-2(a-b)^2} U_\alpha(b). \quad \blacklozenge$$

Démonstration du lemme : Comme d'habitude, pour étudier la monotonie de U_α il suffit d'étudier le signe de sa dérivée pour la seconde partie.

Dans ce qui suit, il suffit d'étudier le cas où $0 \leq a \leq b \leq \alpha$ et le reste c'est exactement de la même manière.

Le cas où $a = 0$ est évident parce que $U_\alpha(a) = 0$. Pour traiter les autres cas, on introduit la fonction logarithmique et on veut montrer que la fonction :

$$L(x) = \ln U_\alpha(x) - \ln U_\alpha(b) + 2(x - b)^2 \leq 0 \text{ sur }]0, b].$$

$$L'(x) = \frac{\alpha - x}{x(1-x)} + 4(x - b) \geq 4(\alpha - 1) + 4(x - b) \geq 0.$$

La deuxième inégalité est un résultat immédiat du fait que :

$$\forall x \in]0, 1] : 0 < x(1 - x) \leq \frac{1}{4}.$$

Si en constatant que $L(b) = 0$, en trouvant que $L(x) \leq 0$. Pour achever la démonstration du théorème, on divise la somme :

$$\sum_{i: \left| \frac{i}{n} - x \right| > \delta} \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-i}$$

en deux termes : $\sum_{i: \left| \frac{i}{n} \right| < x - \delta}$ et $\sum_{i: \left| \frac{i}{n} \right| < x + \delta}$. ♦

Chapitre 2

Approximation des moindres carrés

Dans ce chapitre, on va donner l'essentiel de notre thème qui est l'approximation au sens des moindres carrés qui a deux formes : la forme continue et la forme discrète.

Cette notion cherche toujours la meilleure approximation d'une fonction continue mais cette fois dans un espace préhilbertien. C'est-à-dire : un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

A cette raison et logiquement, on va commencer ce chapitre par la définition suivante :

Définition (2.1) : *Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E est une application de $E \times E$ à valeur dans \mathbb{R} ; $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0, \forall f \in E$ (définie).
2. $\langle f, f \rangle \geq 0, \forall f \in E$ (positive).

3. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle, \forall f, g \in E \times E$ (symétrique).

4. $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle, \forall f, g, h \in E$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (bilinéaire).

Donc $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est appelé un espace préhilbertien.

A titre d'exemple, on peut prendre les produits scalaires les plus connus et les plus utilisés comme :

Premièrement : sur $E = \mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i; \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Deuxièmement : $E = C_b([0, 1], \mathbb{R})$; espace des fonctions continues bornées :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

Dans ce chapitre, on aura besoin aussi de la définition d'un système orthogonal.

Définition (2.2) : Deux éléments f et g de l'espace E sont orthogonaux si : $\langle f, g \rangle = 0$. D'une manière générale, un système de vecteur $\{f_n\} \in E$ est orthogonal si $\langle f_n, f_m \rangle = 0$ pour $n \neq m$.

2.1 Meilleure approximation dans un espace préhilbertien

Dans ce qui suit, on donne une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$; $f \in E = C([a, b])$ et on essaye de trouver sa meilleure approximation au sens des moindres

carrés $\varphi^* \in V \subset C([a, b])$ et bien sûr vérifie la relation :

$$\|f - \varphi^*\|_E = \min_{\varphi \in V} \|f - \varphi\|_E; \quad f \in E.$$

On cherche cette fois l'élément $\varphi^* \in V$ le plus proche de $f \in E$ au sens de la norme : $\|\cdot\|_E = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. On peut dire ici que tout espace préhilbertien est un espace vectoriel normé par rapport à la norme précédente.

Donc, d'après ce que nous avons vu dans le premier chapitre, il existe la meilleure approximation φ^* si on prend tout simplement le sous espace vectoriel V de dimension finie.

Théorème (2.1) : *Une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi^* \in V$ soit une meilleure approximation de $f \in E$ dans un espace préhilbertien est que :*

$$\langle f - \varphi^*, \varphi \rangle = 0; \quad \forall \varphi \in V. \quad \diamond$$

Démonstration : On veut montrer ici que si $\langle f - \varphi^*, \varphi \rangle = 0$ pour tout $\varphi \in V$, alors φ^* est la meilleure approximation de f .

En effet, soit $\varphi \in V$ et on pose : $h = \varphi - \varphi^*$. Il est clair que :

$$\varphi = \varphi^* + (\varphi - \varphi^*) = \varphi^* + h;$$

$h \in V$ parce que V est un sous espace vectoriel :

$$\|f - \varphi\|^2 = \|f - (\varphi^* + h)\|^2.$$

On introduit le produit scalaire et on effectue les calculs :

$$\begin{aligned}\|f - \varphi\|^2 &= \langle f - (\varphi^* + h), f - (\varphi^* + h) \rangle \\ &= \langle (f - \varphi^*) + h, (f - \varphi^*) + h \rangle.\end{aligned}$$

On utilise les propriétés d'un produit scalaire :

$$\begin{aligned}\|f - \varphi\|^2 &= \langle (f - \varphi^*) + h, (f - \varphi^*) \rangle + \langle (f - \varphi^*) + h, h \rangle \\ &= \langle f - \varphi^*, f - \varphi^* \rangle + \langle h, f - \varphi^* \rangle + \langle f - \varphi^*, h \rangle + \langle h, h \rangle.\end{aligned}$$

Parce que $h \in V$, on a alors:

$$\langle h, f - \varphi^* \rangle = \langle f - \varphi^*, h \rangle = 0.$$

Ce qui implique que :

$$\|f - \varphi\|^2 = \|f - \varphi^*\|^2 + \|h\|^2.$$

On peut conclure ici que :

$$\|f - \varphi\|^2 \geq \|f - \varphi^*\|^2; \forall \varphi \in V.$$

Autrement, cette dernière inégalité, on peut l'écrire :

$$\|f - \varphi^*\| = \min_{\varphi \in V} \|f - \varphi\|_E; f \in V,$$

ce qui nous permet de dire que : φ^* est la meilleure approximation. \blacklozenge

2.2 Construction de φ^*

Comme V est un sous espace vectoriel de dimension finie de l'espace $E = C([a, b])$, on peut supposer que $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ forme une base de V ; c'est-à-dire les éléments $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ engendrent cet espace; ce qui nous permet d'écrire $\varphi^* \in V$ sous forme d'une combinaison linéaire de ces éléments :

$$\begin{aligned}\varphi^* &= a_0^* \varphi_0 + a_1^* \varphi_1 + \dots + a_n^* \varphi_n \\ &= \sum_{k=0}^n a_k^* \varphi_k.\end{aligned}$$

On commence la construction par la condition nécessaire et suffisante de la meilleure approximation :

$$\langle f - \varphi^*, \varphi \rangle = 0; \quad \forall \varphi \in V.$$

Pour chaque $j = 0, 1, \dots, n$; $\varphi_j \in V$; donc cette formule reste valable :

$$\langle f - \varphi^*, \varphi_j \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle f - \sum_{k=0}^n a_k^* \varphi_k, \varphi_j \rangle = 0,$$

on utilise la linéarité d'un produit scalaire pour trouver :

$$\langle f, \varphi_j \rangle - \left\langle \sum_{k=0}^n a_k^* \varphi_k, \varphi_j \right\rangle = 0,$$

ce qui implique :

$$\langle f, \varphi_j \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^n a_k^* \varphi_k, \varphi_j \right\rangle.$$

Toujours la linéarité du produit scalaire qui nous permet d'écrire :

$$\langle f, \varphi_j \rangle = \sum_{k=0}^n a_k^* \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle,$$

autrement :

$$\langle \varphi_j, f \rangle = \sum_{k=0}^n a_k^* \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle; \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

On peut traduire la dernière formule par points :

Pour $j = 0$:

$$\sum_{k=0}^n a_k^* \langle \varphi_0, \varphi_k \rangle = a_0^* \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle + a_1^* \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle + \dots + a_n^* \langle \varphi_0, \varphi_n \rangle = \langle \varphi_0, f \rangle$$

Pour $j = 1$:

$$\sum_{k=0}^n a_k^* \langle \varphi_1, \varphi_k \rangle = a_0^* \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle + a_1^* \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle + \dots + a_n^* \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle = \langle \varphi_1, f \rangle,$$

et ainsi de suite jusqu'à : $j = n$:

$$\sum_{k=0}^n a_k^* \langle \varphi_n, \varphi_k \rangle = a_0^* \langle \varphi_n, \varphi_0 \rangle + a_1^* \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle + \dots + a_n^* \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = \langle \varphi_n, f \rangle.$$

Finalement, on trouve le système des moindres carrés $Ha = b$ qu'on peut l'écrire matriciellement comme suit :

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle \varphi_0, \varphi_n \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle \varphi_n, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_0, f \rangle \\ \langle \varphi_1, f \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle \varphi_n, f \rangle \end{pmatrix}.$$

Il est très connu que l'approximation des moindres carrés est donnée en deux formes ou bien deux types (type continue ou discret) à partir de quelques données expérimentales d'un problème numérique.

2.2.1 Approximation continue des moindres carrés

On introduit ω une fonction poids positive et ne pouvant s'annuler qu'en un nombre fini de point $[a, b]$; telle que :

$$\int_a^b \omega(x) h(x) dx \text{ existe; } \forall h \in C([a, b]).$$

Dans ce cas, on définit le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx,$$

en substituant ce produit scalaire pour trouver le système linéaire suivant :

$$\sum_{k=0}^n a_k^* \int_a^b \omega(x) \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = \int_a^b \omega(x) \varphi_j(x) f(x) dx; \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

2.2.2 Approximation discrète des moindres carrés

Maintenant, f est une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ dont on connaît les valeurs $f(x_i)$ qu'elle prend en $(N + 1)$ points distincts x_0, x_1, \dots, x_N de $[a, b]$ (données discrètes) et $\omega(x)$ est une fonction poids positive. Dans ce type d'approximation, on considère le produit scalaire donné par :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^N \omega(x_i) f(x_i) g(x_i).$$

Alors, le système des moindres carrés s'écrit :

$$\sum_{k=0}^n a_k^* \left(\sum_{i=0}^N \omega(x_i) \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) \right) = \sum_{i=0}^N \omega(x_i) \varphi_j(x_i) f(x_i).$$

Remarque : Supposant que la base $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ du sous espace vectoriel V forme un système orthonormé; c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0 & \text{si } i \neq j \\ \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

donc on peut déduire directement la solution du système des moindres carrés par :

$$a_k^* = \langle f, \varphi_k \rangle,$$

ce qui donne :

$$\varphi^* = \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k.$$

En analyse numérique, on essaye de faciliter l'étude d'un problème donné; à cette raison, on approche la fonction continue f par un polynôme. Donc, dans la section suivante, on substitue le sous espace V par \mathcal{P}_n l'espace des polynômes de degré inférieure ou égal à n et les éléments de base $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ par les monômes x^0, x^1, \dots, x^n qui engendrent l'espace \mathcal{P}_n .

2.3 Meilleure approximation polynômiale

On cherche cette fois un polynôme qui est le «plus proche» de f au sens de la norme $\|\cdot\|_E = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$. Cette meilleure approximation polynômiale on le notera

par : P_n^* qui est égal à $P_n^*(x) = \sum_{k=0}^n a_k^* x^k$.

Comme on a vu précédemment, pour déterminer les coefficients a_k^* ; pour k entre 0 et n et pour lesquels P_n^* réalise la minimalité; on utilise toujours le système des moindres carrés $Ha = b$; en tenant compte les substitutions nécessaires.

En effet, étant donnés N points (x_0, x_1, \dots, x_N) distincts deux à deux et N valeurs $(f(x_i))_{i=1}^N$ associées, où N est en général très grand par rapport à n .

Géométriquement, on essaye de passer la courbe approchée de P_n^* le plus près possible; c'est-à-dire : on cherche à minimiser l'erreur entre la fonction exacte f et la fonction approchée sous la forme d'un polynôme P_n^* . Dans ce cas, la matrice associée au système $Ha = b$ et le second membre b sont respectivement :

$$H = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^N 1 & \sum_{i=0}^N x_i & \cdots & \cdots & \sum_{i=0}^N x_i^n \\ \sum_{i=0}^N x_i & \sum_{i=0}^N x_i^2 & \cdots & \cdots & \sum_{i=0}^N x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^N x_i^n & \sum_{i=0}^N x_i^{n+1} & \cdots & \cdots & \sum_{i=0}^N x_i^{2n} \end{pmatrix} \quad \text{et } b = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^N f(x_i) \\ \sum_{i=0}^N f(x_i) x_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^N f(x_i) x_i^n \end{pmatrix}.$$

Il est clair que la matrice $H \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$.

Dans la suite, on introduit une matrice très connue c'est la matrice de Vandermonde, on la notera par W et elle définie par :

$$W = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (n+1)}.$$

La matrice associée au système des moindres carrés est une multiplication matri-

cielle d'une matrice de Vandermonde pas sa transposée; c'est-à-dire :

$$H = W^T W \text{ et } b = W^T y$$

avec $y = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_N))^T$, donc $W^T W a = W^T y$. [5]

Cas particulier : *Le problème d'interpolation polynômial; qui est très connu en analyse numérique; est un cas particulier de l'approximation polynômiale des moindres carrés dans le cas où N et n sont identiques, c'est-à-dire : $N = n$. Dans ce cas, la matrice de Vandermonde W est une matrice carrée de déterminant :*

$$\det(W) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \neq 0.$$

Algébriquement W^T est inversible, donc $(W^T)^{-1}$ existe. Par une prémultiplication des deux membres de l'équation $W^T W a = W^T y$ par $(W^T)^{-1}$, on obtient une équation plus simple et facilement calculable : $W a = y$; c'est également le système d'interpolation polynômial. [4]

On a cité précédemment qu'on n'a pas besoin de résoudre le système des moindres carrés si la base de l'espace est orthonormée parce que la solution est immédiate. Heureusement, on peut toujours construire une famille orthonormale à partir d'une famille de vecteurs linéairement indépendants grâce à la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

2.4 Algorithme d'orthogonalisation de Schmidt :

Dans cette section, on présente une procédure extrêmement importante dans notre étude qui consiste à transformer la base canonique de l'espace des polynômes \mathcal{P}_n ; $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ en une base des polynômes $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ orthogonaux par l'algorithme récursif suivant :

Initialisation :

$$\varphi_0(x) = 1 \text{ et } \varphi_1(x) = x - \alpha_1$$

pour $j \geq 2$:

$$\varphi_{j(x)} = (x - \alpha_j) \varphi_{j-1}(x) - \beta_j \varphi_{j-2}(x), \text{ où}$$

$$\alpha_j = \frac{\langle x\varphi_{j-1}, \varphi_{j-1} \rangle}{\|\varphi_{j-1}\|^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

et

$$\beta_j = \frac{\langle x\varphi_{j-1}, \varphi_{j-2} \rangle}{\|\varphi_{j-2}\|^2}, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Alors, on construit les polynômes :

$$\varphi_{j(x)} = x^j + \varphi_{j-1}^*(x),$$

où φ_{j-1}^* est un polynôme de degré inférieure à j ; tel que :

$$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = 0 \text{ pour tout } j \neq k,$$

de plus, si on écrit φ_n^{**} sous la forme :

$$\varphi_n^{**} = \sum_{k=0}^n \sigma_k^* \varphi_k,$$

on a alors :

$$\sigma_k^* = \langle f, \varphi_k \rangle / \|\varphi_k\|^2 \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Chapitre 3

Applications des moindres carrés

Dans ce chapitre, on va présenter quelques applications de la méthode des moindres carrés afin de démontrer la grande utilité de cette notion dans les domaines scientifiques.

On applique souvent la méthode des moindres carrés pour identifier les paramètres des modèles mathématiques d'un système, à partir des données expérimentales.

Pour mesurer la performance de cette méthode, il faut minimiser l'erreur commise ; C'est-à-dire : on minimise la somme des carrés de la différence entre les valeurs exactes et les valeurs approchées.

3.1 Régression linéaire

La première application qu'on va voir est très utilisée et elle est la plus simple et la plus classique.

App 1 : A partir d'une expérience, on trouve les valeurs expérimentales suivantes

qui ont le même poids $\omega_i = 1$:

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y_i	-0.5	0.2	0.6	1.2	1.3

On cherche ici la plus proche droite au nuage de ces points. L'approximation des moindres carrés minimise l'erreur entre les valeurs exactes et les valeurs approchées ; donc, elle minimise la quantité :

$$\min_{(a^*, b^*) \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=0}^4 (y_i - a^* x_i - b^*)^2,$$

où $y = a^* x + b^*$ est la droite cherchée.

Pour atteindre ce minimum, on applique ce que nous avons vu dans le deuxième chapitre, alors : on considère le système des moindres carrés $Ha = b$ et le système équivalent :

$$W^T W a = W^T y.$$

Dans notre cas, on a : $N = 4$ et $n = 1$:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0.1 \\ 1 & 0.2 \\ 1 & 0.3 \\ 1 & 0.4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.2 \\ 0.6 \\ 1.2 \\ 1.3 \end{pmatrix}$$

et le vecteur cherché qui réalise le minimum des moindres carrés est :

$$a = \begin{pmatrix} b^* \\ a^* \end{pmatrix}$$

qui forme une solution du système :

$$W^T W a = W^T y \iff \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^* \\ a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 1.02 \end{pmatrix}.$$

Après la résolution de ce système linéaire; on trouve : $a^* = 4.6$ et $b^* = -0.36$.
Donc la droite qui est la meilleurs approximation au sens des moindres carrés de ces résultats expérimentaux est : $y = 4.6x - 0.36$.

App 2 : On applique une fois une expérience et on pose les données qu'on a trouvées dans le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
y_i	3.1	2.5	2.4	2.3	2	1.7	1.6	1.5	1.2	1.3

La courbe de la fonction associée à ces données expérimentales est de la forme :
 $y = \beta \exp^{-\alpha x}$; où α et β sont deux paramètres réels à déterminer.

Le but ici est de déterminer la droite la plus proche de cette fonction ; c'est-à-dire : la droite qui réalise la meilleure approximation au sens des moindres carrés sous forme d'un polynôme de degré 1. Pour aboutir à notre but, il est clair que :

$$\log(y) = -\alpha x + \log(\beta) = a^* x + b^*.$$

En tenant compte cette nouvelle fonction, on trouve alors des nouveaux résultats :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
$\log(y_i)$	1.13	0.92	0.88	0.83	0.69	0.53	0.47	0.41	0.18	0.26

En effet, dans cette expérience, on a $N = 9$ et $n = 1$.

Au début, on considère toujours le système des moindres carrés : $W^T W a = W^T y$;

avec :

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 & 1.5 & 2 & 2.5 & 3 & 3.5 & 4 & 4.5 \end{pmatrix}^T$$

et

$$y = \begin{pmatrix} 1.13 & 0.92 & 0.88 & 0.83 & 0.69 & 0.53 & 0.47 & 0.41 & 0.18 & 0.26 \end{pmatrix}^T.$$

Par quelques calculs algébriques simples, on trouve le système :

$$W^T W a = W^T y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 22.5 \\ 22.5 & 71.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^* \\ a^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.3 \\ 10.025 \end{pmatrix}.$$

On peut facilement résoudre ce système linéaire pour trouver la solution :

$$a^* = -0.2012 \text{ et } b^* = 1.0827.$$

Enfin, pour déterminer les paramètres α et β de la première fonction, il suffit de prendre : $\alpha = -a^* = 0.2012$ et $\log(\beta) = b$, ce qui donne : $\beta = \exp^b = \exp^{1.0827}$.

Dans la section suivante, on présente une étude sur le problème d'identification des variations thermique dépendant de la température dans l'équation de la chaleur non stationnaire et non linéaire. (Voir [3])

3.2 Etude numérique de la conductivité thermique

Pour décrire le transfert de la chaleur dans la charge du four occupé par un matériau poreux homogène, on aura besoin : d'abord de l'équation de la chaleur et le problème inverse qui consiste à trouver le paramètre de conductivité thermique dépendant des températures mesurées en points fixes du matériau ; ensuite, On introduit quelques méthodes numériques : la première basée sur le schéma aux différences finies et la deuxième c'est la méthode des moindres carrés pour la résolution numérique des problèmes directs et inverses qui a été développé.

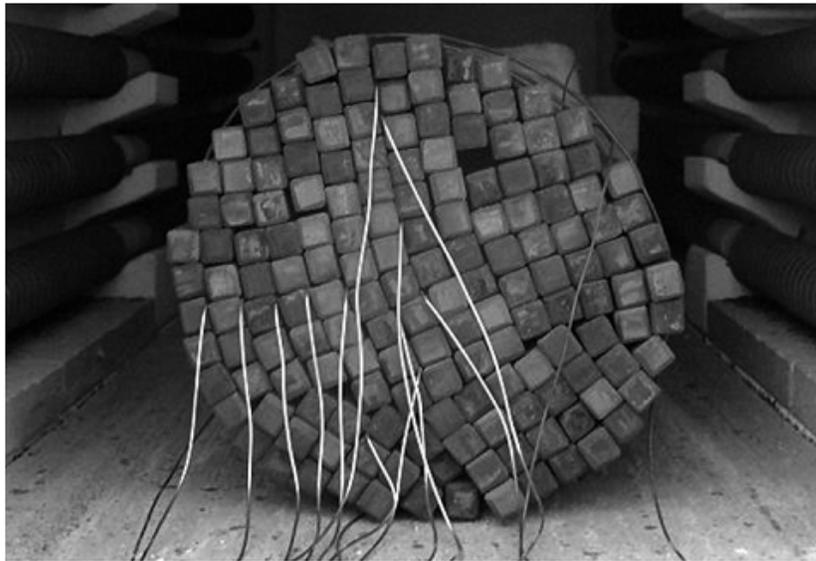


Figure1 : appareil de mesure de Température dans la charge.

L'étude qui faite par [3] consiste à mesurer la température dans la zone du faisceau de barres d'acier carré ($10mm$) qui a été chauffé.

dans cette expérience, on utilise une chambre électrique du laboratoire, un four de puissance : $16kW$. Le processus de chauffage a été effectué pour une température t_f passant de la température ambiante à la température finale de $750^{\circ}C$ qui a été atteint après 55 min.

On considère huit points de mesures de 0 à 7 et les températures associées de t_0 à t_7 . les mesures qu'on a trouvées, on les posées dans le tableau ci dessus et les étapes nécessaires pour les calculs sont réduites dans l'algorithme suivant.

Le processus de chauffage du faisceau jusqu'à la dernière température pour les conditions adoptées a duré environ 200 *min*.

Les dates recueillies au cours de l'essai ont été utilisées pour d'autres calculs de la conductivité thermique du faisceau. On traite la matrice obtenue en utilisant les moindres carrés en supposant que le polynôme de degré $p = 0$.

Par suite, on résout le problème direct avec le paramètre identifié ; ensuite, nous comparons les résultats de la solution au problème direct avec des mesures réelles.

Algorithme : Identification par mesure réelle

Initialisation : Le degré initial du polynôme $p = 0$ et la valeur initiale du temps.

Tant que : $J(\lambda)$ s'améliore pour plusieurs degrés polynomiaux, alors :

1 : Lire les données de mesure.

2 : Choisir la valeur de Δ_t (un multiple du pas de temps) pour le problème inverse.

3 : On applique la méthodes des différences finies sur l'équation de la chaleur pour calculer une matrice $\lambda_{i,j}$ correspondante à un certain température $T_{i,j}$

$$\frac{(T_{i+1,j} - T_{i,j})}{\Delta_t} = \lambda_{i,j+1} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) + \lambda_{i,j} (T_{i,j-1} - T_{i,j}) \left(1 - \frac{1}{j}\right).$$

4 : On introduit la méthode des moindres carrés pour traiter les valeurs de $\lambda_{i,j}$ et les températures correspondantes $T_{i,j}$ (pour le polynôme de degré p).

5 : Résoudre le problème P_D avec le polynôme λ de degré p à la place de la thermique conductivité.

6 : Calculez la valeur de $J(\lambda)$ selon l'équation.

7 : Définir : $p = p + 1$.

8 : Définir : $T = T + \text{pas de temps}$.

Si non arrêter. [3]

p	0	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta_t = 300$ et $\varepsilon = 1$	4845.8	3893.4	5137.7	4872.0	4403.2	4433.3	4432.3	4467.6

Tableau : valeurs fonctionnelles des coûts pour les mesures réelles.

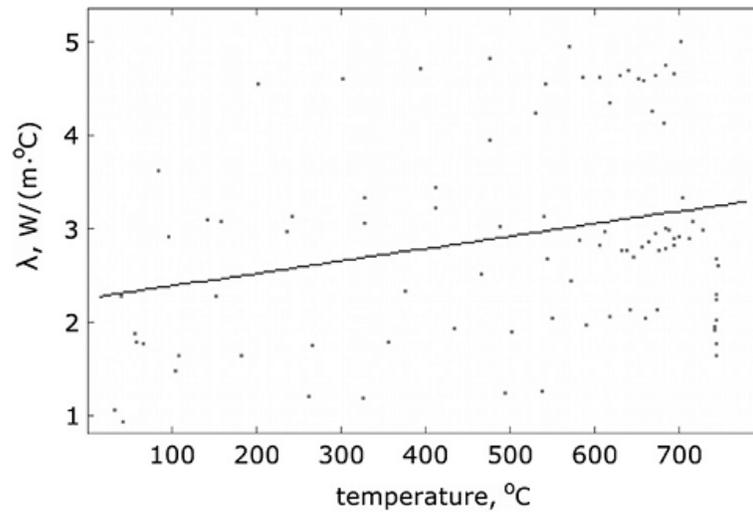


Figure 2 Basée sur l'identification sur mesures réelles.

Conclusion

En analyse numérique, on peut approximer n'importe quelle fonction continue par un polynôme en se basant sur le théorème de Weierstrass et pour trouver la meilleure approximation, on a appliqué la méthode des moindres carrés. Cette dernière méthode est basée sur la minimisation de la somme des carrés de la différence entre les valeurs exactes et les valeurs approchées.

les résultats de cette technique; comme on a vu au chapitre trois; sont très intéressants ce qui nous permet de remarquer que la méthode des moindres carrés est la meilleure méthode pour minimiser l'erreur commise entre la fonction et son approximation.

Bibliographie

- [1] Alain Faisant .novembre 1996. *TP et TD de topologie générale; Imprimé en France. Dépôt légal .*
- [2] Alphonse Magnus. *Analyse numérique; approximation, interpolation et intégration. Institut de Mathématiques Pure et Appliquée, Université Catholique de Louvain.*
- [3] Anna Ivanova, Stanislaw Migorski, Rafal Wyczolkowski et Dinirsty Ivanov. *International Journal of Numerical Methods pour le flux de chaleur et de fluide; Vol 30 N° 6, 2020 pp 3083-3099.*
- [4] Derraji Salah. *Analyse Numérique I; Office des publications universitaires : Place centrale de Ben Aknoun (Alger).*
- [5] Ionut Danaila, Pascal Joly, Sidi Mahmoud Kaber et Marie Postel. 2005; *Introduction au calcul scientifique par la pratique; Paris.*
- [6] Petru Mironexu. 2005, *Cours de topologie métrique.*

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons abordé l'un des sujets les plus importants en analyse mathématique et numérique ; C'est le problème d'approximation et plus précisément la méthode des moindres carrés qui a comme but d'approcher une fonction continue par un polynôme et d'arrondir par les moindres carrés l'erreur entre cette fonction et le polynôme qui l'approche.

Mots-clés :

Approximation, méthode des moindres carrés, le polynôme, approximation des moindres carrés.

Abstract

In this Memory, we have addressed one of the most important subjects of mathematical and numerical analysis, namely : the approximation using the least square méthode That depends on the polynomial That approaches the continus fonctions. By the smallest squares, we reduct the difference between the actual function and the polynomial approaching This function.

Key Word :

Approximation ,polynomial ,méthode least square, approximation least square.

المخلص

تطرقنا في هذه المذكرة لموضوع من أهم مواضيع التحليل الرياضي والعددي، والمتمثل في التقريب باستخدام طريقة المربعات الأقل التي تعتمد على تقريب دالة مستمرة بكثير حدود وتهدف إلى تقليص الخطأ بين الدالة الحقيقية وكثير الحدود المقرب

الكلمات المفتاحية:

التقريب، كثير الحدود ، الطريقة الأقل تربيعًا، تقريب المربعات الأقل