

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

**MASTER en Mathématiques**

Option : **Analyse**

Par

**HAMIDI Manel.**

Titre :

**Sur les bifurcations globales**

Membres du Comité d'Examen :

Pr.	MENACER Tidjani	UMKB	Président
Dr.	LAADJAL Baya	UMKB	Encadreur
Dr.	OUAAR Fatima	UMKB	Examineur

Juin 2022

## DÉDICACE

C'est avec un énorme plaisir, un cœur ouvert et une immense joie

que dédie ce modeste travail :

A mes très chers et magnifiques parents **Sabah** et **Mosebah**, qui m'ont bien soutenu et aidé tout au long de mon parcours jusqu'à en arriver jusqu'ici. Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leur encouragement.

Puisse Dieu, le tout puissant, vous préserve et vous accorde santé, longue vie et bonheur.

A mes très chers frères **Adel** et **Tarek** et ma belle sœur **Ilhem**.

Puisse Dieu vous donne santé, bonheur, courage et surtout réussite dans la vie.

A ma famille, et toutes les personnes que j'aime.

A mes chères amies " **Chaima, Bouthiana, karima** ".

A tous mes enseignants du primaire jusqu'à l'université et à tous mes amis.

## REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier DIEU le tout puissant et miséricordieux, qui m'a donné le courage et la fore d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier cordialement mon encadreur

Dr. "**LAADJAL. Baya**" pour son aide

afin d'améliorer le contenu de ce mémoire.

J'adresse également mes remerciements aux membres de jury

Pr **MENACER Tidjani** et Dr **OUAAR Fatima** d'avoir accepté d'examiner ce modeste travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je remercie tous mes enseignements du département de mathématiques pour la formation qu'ils m'ont assurés tout le long de mon parcours universitaire.

Enfin, Je voudrais associer à mes remerciements toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Merci à vous.

# Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Introduction	1
<b>1 Notions générales sur les systèmes dynamiques discrets</b>	<b>3</b>
1.1 Système dynamique . . . . .	3
1.1.1 Système dynamique continu . . . . .	4
1.1.2 Système dynamique discret . . . . .	5
1.2 Attracteurs . . . . .	6
1.2.1 Attracteurs réguliers . . . . .	7
1.2.2 Stabilité des attracteurs réguliers . . . . .	8
1.2.3 Classification des points fixes et cycles d'ordre $k$ . . . . .	10
1.2.4 Attracteurs irréguliers . . . . .	10
1.3 Ensembles stables et instables . . . . .	11
1.3.1 Ensemble Instable . . . . .	11
1.3.2 Ensemble Stable . . . . .	12

1.4 Bassin d'attraction . . . . .	13
<b>2 Caractérisation des Bifurcations globales</b>	<b>16</b>
2.1 Structures de bifurcation . . . . .	16
2.1.1 Bifurcations locales . . . . .	17
2.1.2 Bifurcations globales (contact ) . . . . .	19
2.2 Bifurcations du bassin d'attraction . . . . .	19
2.3 Bifurcations homoclines et hétéroclines . . . . .	25
2.3.1 Bifurcation homocline . . . . .	25
2.3.2 Bifurcation hétérocline . . . . .	26
2.4 Application sur les bifurcations globales . . . . .	26
2.4.1 Les cycles d'ordre $k = 1, 2$ et leurs stabilité . . . . .	27
2.4.2 Bifurcations des cycles d'ordre $k = 1, 2$ . . . . .	32
2.4.3 Les lignes critiques . . . . .	33
2.4.4 Etude numérique . . . . .	34
<b>Conclusion</b>	<b>39</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>
<b>Annexe A : Caractéristiques des TNI</b>	<b>42</b>
<b>Annexe B : Abréviations et Notations</b>	<b>45</b>

# Table des figures

2.1	Bassin connexe $\longrightarrow$ bassin non connexe . . . . .	21
2.2	Bassin non connexe $\longrightarrow$ bassin connexe . . . . .	22
2.3	Bassin simplement connexe $\longleftrightarrow$ bassin multiplement connexe . . . . .	22
2.4	Modification du nombre "d'îlots" lorsque $D_i \cap Z_2 \neq \emptyset$ . . . . .	23
2.5	L'apparition d'une nouvelle séquence d'îlots lorsque $D_i \subset Z_2$ . . . . .	23
2.6	La bifurcation modification du nombre de lacs dans $\mathcal{D}$ . . . . .	24
2.7	Le bassin d'attraction pour $a = 1$ et $b = -0.59519$ . . . . .	35
2.8	Le bassin d'attraction pour $a = 1$ et $b = -0.597$ . où $H_2^1 = f_1^{-1}(H_1)$ , $H_2^2 =$ $f_2^{-1}(H_1)$ . . . . .	37
2.9	Partielles du bassin d'attraction pour $a = 1$ , $b = -0,5975$ et $b = -0,5979$ . . . . .	38
2.10	Le bassin d'attraction pour $a = 1$ et $b = -0.598$ . . . . .	38
2.11	Plan de phase $(Z_0 - Z_2)$ . . . . .	43
2.12	Plan de phase $(Z_1 - Z_3 - Z_1)$ . . . . .	44

# Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques [8] introduite par Newton vers 1665, et avait initialement pour objet l'étude du comportement qualitatif des trajectoires d'un champ de vecteurs. Cette théorie fournit des modèles mathématiques, pour des systèmes évoluant dans le temps et suivant des règles généralement exprimés sous forme analytique comme un système d'équation différentielles ordinaires [1]. Ces modèles sont appelés systèmes dynamiques continus.

Dans les années 1880, Poincaré trouva commode de remplacer certains systèmes dynamiques par des systèmes dynamiques discrets décrits par des équations aux différences (ou récurrences, ou transformations ponctuelles), c'est à dire, des systèmes dans lesquels le temps évolue par ruptures de séquences régulières. Ainsi, depuis plus de cent ans, les systèmes dynamiques sont définis en deux classes : les systèmes continus et discrets [2].

Les modèles des systèmes dynamiques dépendent généralement d'un ou plusieurs paramètres, où la variation des paramètres peut provoquer des changements qualitatifs et quantitatifs de ses propriétés. Ce changement produit un phénomène que nous appellerons bifurcation [2]. Les types de bifurcation (locales ou globales) sont déterminés par leur effet sur le système, ou par la façon dont ils se produisent, ce qui est généralement lié à leurs causes.

Les types de bifurcation considérés dans ce travail sont des bifurcations globales [3]. Elles correspondent à un contact entre deux ensembles singuliers de nature différents et elles ne font pas forcément intervenir le voisinage de la solution dont les linéarisations locales

autour de la solution ne seront donc d'aucunes d'aide.

L'objet de ce mémoire consiste en une présentation d'une étude d'un système dynamique discret modélisé par une transformation ponctuelle bidimensionnelle non inversible dépendant de paramètre et caractériser quelques bifurcations globales.

Le mémoire est divisé en deux chapitres.

Dans le premier chapitre nous allons introduire les notions générales concernant les systèmes dynamiques discrets telles que : (les attracteurs, stabilité des attracteurs réguliers, ensemble stable et instable et le bassin d'attraction).

Le deuxième chapitre sera consacré à la théorie de bifurcation où nous s'intéressons aux deux types de bifurcations globales, les bifurcations bassin d'attraction et les bifurcations homoclines et hétéroclines. Nous terminons ce chapitre par une étude analytique et numérique d'un exemple illustratif.

# Chapitre 1

## Notions générales sur les systèmes dynamiques discrets

En mathématique, en physique, et en ingénierie un système dynamique est un système classique qui évolue au cours du temps de façon à la fois :

**Causale** : c-à-d que son avenir ne dépend que des phénomènes du passé ou de présent.

**Déterministe** : c.à.d qu'à une condition initiale donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état futur possible.

Dans ce chapitre on donne des notions générales et préliminaires pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques, ainsi que certaines propriétés que l'on utilisera dans ce travail.

### 1.1 Système dynamique

**Définition 1.1.1** [2] On appelle système dynamique un triplet  $(X, T, f)$  où  $X$  est un espace métrique (généralement  $X \subseteq \mathbb{R}^m$ ),  $T$  est l'ensemble  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{N}$ , et  $f$  une application continue de  $X \times T$  dans  $X$  vérifiant :

$$\begin{cases} f(x, 0) = x, \forall x \in X. \\ f(f(x, t), \tau) = f(x, t + \tau), \forall t, \tau \in T, \forall x \in X. \end{cases}$$

- La fonction  $f$  décrit la façon dont le système évolue au cours du temps.
- L'espace temporel  $T$  dépend en général du phénomène que l'on souhaite modéliser. Si  $T = \mathbb{R}$ , le système  $(X, T, f)$  est dit continu, et si  $T = \mathbb{N}$  ou  $T = \mathbb{Z}$ , le système  $(X, T, f)$  est dit discret.
- L'espace  $X$  s'appelle l'espace d'état (de phase) du système et tous les états possibles d'un système sont caractérisés par les points de cet ensemble. En réalité, la spécification d'un point  $x \in X$  doit être suffisante non seulement pour décrire la position actuelle du système, mais également pour déterminer son évolution.

### 1.1.1 Système dynamique continu

Dans le cas général, un système dynamique autonome continu peut être représenté par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = F(x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $F \in C^r(X)$ ,  $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^m$ , et  $t, t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ .

La solution de l'équation (1.1) est donnée par :

$$f(x_0, t) = x_0 + \int_0^t (F(x_s)) ds.$$

Si la fonction  $F$  dépend de l'état  $x(t)$  et de la variable du temps  $t$  i.e :

$$\frac{dx}{dt}(t) = F(t, x(t)),$$

on dit que le système dynamique est non autonome.

**Définition 1.1.2** Soit  $x(x_0, t)$ ,  $x_0 \in X$ , solution du système (1.1) avec condition initiale  $x(0) = x_0$ . On appelle flot du système (1.1), l'application définie par :

$$\begin{aligned}\phi_t : X &\rightarrow X \subset \mathbb{R}^m \\ x_0 &\rightarrow \phi_t(x_0) = x(x_0, t),\end{aligned}$$

où  $\phi_t(x_0)$  possède les propriétés suivantes :

- (i)  $\phi_t$  est de classe  $C^r(X)$ .
- (ii)  $\phi_0(x_0) = x_0$  pour tout  $x_0 \in X$ .
- (iii)  $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ .

Ce qui permet de définir un système dynamique autonome à temps continu.

## 1.1.2 Système dynamique discret

**Définition 1.1.3** [9] On appelle système dynamique discret autonome de dimension  $m$  et d'ordre 1, l'équation aux différences (récurrence, itération ou transformation ponctuelle) suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n), \\ x_0 = x(0) \text{ donnée,} \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction différentiable et  $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^m$  est une valeur initiale,  $x_n \in X$  est le vecteur des états du système.

De plus :

- $x_1 = f(x_0)$  : est appelée première itération de  $x_0$  par la fonction  $f$ .
- $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$  : est appelée seconde itération de  $x_0$  par la fonction  $f$ .
- $x_n = f^n(x_0)$  où  $f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$  est appelée  $n^{\text{ième}}$  itération de  $x_0$  par la fonction  $f$ .

Le triplet  $(X, \mathbb{N}, \varphi)$  définit un système dynamique discret autonome, où  $\varphi$  est donnée par :

$$\varphi(x_0, n) = f^n(x_0).$$

**Définition 1.1.4** *Etant donné le point initial  $x_0$ , on appelle orbite (ou trajectoire) du système dynamique discret d'ordre 1 de la forme (1.2) la suite :*

$$O(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), \dots, x(n+1) = f(x(n))\}.$$

**Définition 1.1.5 :**

1. *L'application  $f$  est dite inversible (bijective) si elle admet une application inverse unique  $f^{-1}$  sur son domaine de définition, sinon elle est non inversible (chaque conséquence peut avoir plusieurs antécédents ou aucun).*
2. *L'application  $f$  est dite homéomorphisme si elle est bijective et bicontinue.*
3. *L'application  $f$  est dite endomorphisme si elle est continue et non inversible.*
4. *L'application  $f$  est dite difféomorphisme si elle est bijective, de plus  $f$  et son inverse  $f^{-1}$  sont continument différentiable.*

Dans ce travail, nous nous intéressons aux systèmes dynamiques discrets, pour cela nous donnons les différentes notions de base dans ce cas là.

## 1.2 Attracteurs

L'attracteur joue un rôle important dans l'étude du comportement d'un système dynamique à long terme. Notamment, le système peut être considéré comme étant réduit à son attracteur [2].

**Définition 1.2.1** *Un ensemble  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}^m$  est invariant par  $f$  ssi  $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ .*

**Définition 1.2.2** *Un ensemble fermé invariant  $\mathcal{A}$  est appelé ensemble attractif si dans tout voisinage  $U$  de  $\mathcal{A}$  il existe un voisinage  $V \subset U$  de  $\mathcal{A}$  tel que :*

$$f(V) \subset V \quad \text{et} \quad f^n(x) \rightarrow \mathcal{A} \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty \quad \text{pour tout} \quad x \in V.$$

**Définition 1.2.3** *Un attracteur  $\mathcal{A}$  est un ensemble attractif topologiquement transitif, ce qui signifie que pour tout couple d'ensembles ouverts  $U, V \subset \mathcal{A}$ , il existe un entier positif  $k$  tel que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ , de façon équivalente, il existe un point  $p \in \mathcal{A}$  dont l'orbite est dense dans  $\mathcal{A}$ .*

Il en existe deux type d'attracteurs : attracteurs réguliers et attracteurs irréguliers.

### 1.2.1 Attracteurs réguliers

On distingue deux types d'attracteurs réguliers (appeler aussi singularités) les points fixes et les cycles d'ordre  $k$ .

**Définition 1.2.4** *On appelle "point fixe " d'un système dynamique discret tout point  $x^*$  de l'espace des phases vérifiant :*

$$f(x^*) = x^*.$$

Le point fixe est l'attracteur le plus simple. Il est représenté dans l'espace des phases par un point .

**Définition 1.2.5** *On appelle cycle d'ordre  $k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) l'ensemble de  $k$  points  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  de l'espace des phases vérifiant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i+1} = f(x_i), i = 1, \dots, k-1. \\ x_1 = f(x_k). \\ x_i = f^k(x_i), i = 1, \dots, k. \\ x_i \neq f^h(x_i), i = 1, \dots, k, 1 \leq h < k. \end{array} \right.$$

*Autrement dit, chaque point  $x_i$  d'un cycle d'ordre  $k$  est un point fixe de  $f^k$  c-à-d  $f^k(x_i) = x_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, k$  et n'est pas un point fixe pour  $f^h$  si  $h < k$ .*

C'est la généralisation d'un point fixe lorsqu'on considère la transformation obtenue après  $k$  application de  $f$  noté  $f^k$ .

Lorsque la dimension de l'espace des phases est supérieure à un, il peut également apparaître des singularités dites de dimension un, qui sont les courbes invariantes par la transformation  $f$  ou  $f^k$ . Dans le plan de phases  $\mathbb{R}^2$ , une courbe définie par l'équation  $\Gamma(x, y) = C$ ,  $C$  une constante, est invariante par la transformation  $f$  ou  $f^k$ , si elle satisfait l'équation fonctionnelle suivante :

$$\Gamma(f(x, y)) = \Gamma(x, y), \quad \text{ou} \quad \Gamma(f^k(x, y)) = \Gamma(x, y).$$

## 1.2.2 Stabilité des attracteurs réguliers

En mathématiques, la théorie de la stabilité concerne la stabilité des solutions des systèmes dynamiques et des trajectoires sous des petites perturbations des conditions initiales.

**Définition 1.2.6** Soit  $\varphi(x_0, n) = f^n(x_0)$  une solution du système dynamique discret (1.2), on dit que :

1. La solution  $\varphi(x_0, n)$  est stable si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y_0 \in \mathbb{R}^m : \|y_0 - x_0\| < \delta \implies \forall n > 0, \|\varphi(y_0, n) - \varphi(x_0, n)\| < \varepsilon.$$

2. La solution  $\varphi(x_0, n)$  est attractive si elle est stable et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(y_0, n) = \varphi(x_0, n).$$

3. La solution  $\varphi(x_0, n)$  est instable si elle n'est pas stable.
4. La solution  $\varphi(x_0, n)$  est répulsive si elle n'est pas attractive.

**Définition 1.2.7** Soit  $x^*$  un point fixe d'un système dynamique discret de type (1.2), les valeurs propres de la matrice jacobienne  $Df(x^*)$  de  $f$  évalué au point fixe  $x^*$ , sont appelées multiplicateurs de  $f$  en  $x^*$ .

**Définition 1.2.8** *Le point fixe  $x^*$  est dit hyperbolique si toutes les multiplicateurs caractéristiques ont module différent de 1, sinon le point fixe est non hyperbolique.*

Le résultat suivant détermine le comportement local des systèmes de type (1.2) au voisinage de leurs points fixes.

**Théorème 1.2.1 (Stabilité du point fixe)** *Considérons un système dynamique discret de type (1.2) de dimension  $m$  et  $x^*$  point fixe.*

1. *Si toutes les multiplicateurs de  $x^*$  sont de module inférieur ou égal à 1, alors  $x^*$  est stable.*
2. *Si toutes les multiplicateurs de  $x^*$  sont de module inférieur strictement à 1, alors  $x^*$  est attractif.*
3. *Si une des multiplicateurs de  $x^*$  a un module supérieur à 1, alors  $x^*$  est instable.*
4. *Si toutes les multiplicateurs de  $x^*$  sont de module supérieur strictement à 1, alors  $x^*$  est répulsif.*

**Remarque 1.2.1** *Dans le cas d'un système dynamique discret unidimensionnel ( $m = 1$ ), le multiplicateur d'un point fixe  $x^*$  est donné par  $S = f'(x^*)$ .*

**Théorème 1.2.2 (Stabilité du cycle d'ordre  $k$ )** *Considérons un système dynamique discret de type (1.2) de dimension  $m$ . Soit  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  un cycle d'ordre  $k$ , et  $x_i$  un point du cycle.*

1. *Si toutes les valeurs propres de  $Df^k(x_i)$  (appeler aussi les multiplicateurs du cycle) sont de module inférieur ou égal à 1, alors le cycle est stable.*
2. *Si toutes les valeurs propres de  $Df^k(x_i)$  sont de module inférieur strictement à 1, alors le cycle est attractif.*
3. *Si une des valeurs propres de  $Df^k(x_i)$  a un module supérieur à 1, alors le cycle est instable.*

4. Si toutes les valeurs propres de  $Df^k(x_i)$  sont de module supérieur strictement à 1, alors le cycle est répulsif.

**Remarque 1.2.2** Dans le cas d'un système dynamique discret unidimensionnel ( $m = 1$ ), le multiplicateur d'un cycle d'ordre  $k$  est donné par

$$S = \prod_{i=1}^k f'(x_i) = (f^k)'(x_i), \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

### 1.2.3 Classification des points fixes et cycles d'ordre $k$

Dans les systèmes dynamiques discrets bidimensionnels, on définit différentes sortes de points fixes ou cycles selon leurs multiplicateurs notés par  $S_1$  ou  $S_2$  avec  $|S_i| \neq 1$ ,  $i = 1, 2$  :

1. Point fixe (cycle) de type col (selle) :  $S_1$  et  $S_2$  sont réels :  $|S_1| > 1$  et  $|S_2| < 1$ .

Un col est toujours instable.

2. Point fixe (cycle) de type nœud :  $S_1$  et  $S_2$  sont réels.

- Attractif si  $|S_i| < 1$ ,  $i = 1, 2$ ,
- Répulsif si  $|S_i| > 1$ ,  $i = 1, 2$ .

3. Point fixe (cycle) de type foyer :  $S_1$  et  $S_2$  sont complexes conjugués,  $S_1 = \rho e^{-i\theta}$ ,  $S_2 = \rho e^{+i\theta}$ .

- Attractif si  $\rho < 1$ ,
- Répulsif si  $\rho > 1$ .

### 1.2.4 Attracteurs irréguliers

**Définition 1.2.9** Un attracteur chaotique "d" est un ensemble attractif invariant, dont les points génèrent des suites itérées qui vérifient la propriété de sensibilité aux conditions initiales (c-à-d une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur long terme).

Actuellement il n'y a pas de définition générale du terme "chaos". En fonction du contexte, on dit qu'un état est chaotique quand il est non périodique. On parle même de mouvement chaotique pour un mouvement chaotique très irrégulier sur une période, et pour lequel la durée des observations physiquement possibles est inférieure à cette période.

Le comportement chaotique est caractérisé par :

- Existence de cycles attractifs d'ordre infini
- Coexistence d'une infinité de cycles répulsifs.
- L'absence de cycles attractifs d'ordre fini .

## 1.3 Ensembles stables et instables

### 1.3.1 Ensemble Instable

Considérons un système dynamique discret de type (1.2) de dimension  $m$ , et  $x^*$  un point fixe instable de  $f$  (peut être col ou nœud instable ou foyer instable), et  $U$  voisinage de  $x^*$ .

**Définition 1.3.1 (Ensemble Instable Locale)** *On appelle  $W_{loc}^i(x^*)$  ensemble instable locale c'est à dire dans un voisinage  $U$  de  $x^*$ , l'ensemble des points de  $U$  ayant une séquence d'antécédents successifs dans  $U$  qui converge vers  $x^*$ .*

$$W_{loc}^i(x^*) = \{x \in U : x_{-n} \in f^{-n}(x) \rightarrow x^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_{-n} \in U\}.$$

**Définition 1.3.2 (Ensemble Instable Globale)** *On appelle  $W^i(x^*)$  ensemble instable global de  $x^*$ , l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^m$  ayant une séquence d'antécédents successifs, qui converge vers  $x^*$ .*

$$W^i(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^m : x_{-n} \in f^{-n}(x) \rightarrow x^*\} = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_{loc}^i(x^*)).$$

$W^i(x^*)$  vérifie les propriétés suivantes :

**Propriété 1.3.1**  $W^i(x^*)$  est invariant par  $f$  c'est à dire :

$$f(W^i(x^*)) = W^i(x^*).$$

**Propriété 1.3.2** Si  $f$  est non inversible, en général  $W^i(x^*)$  n'est pas invariant par  $f^{-1}$  et on a :

$$f^{-1}(W^i(x^*)) \supseteq W^i(x^*).$$

L'invariance de  $W^i(x^*)$  par rapport à  $f^{-1}$  a lieu lorsque  $f$  est inversible.

**Propriété 1.3.3** Dans le cas d'un endomorphisme  $f$ , l'ensemble instable  $W^i(x^*)$  d'un point fixe col  $x^*$  peut avoir des points d'auto-intersections, lorsque celle-ci traverse  $LC_{-1}$  en un point, ce qui n'est pas vrai dans le cas d'un difféomorphisme.

## 1.3.2 Ensemble Stable

Considérons un système dynamique discret de type (1.2) de dimension  $m$ , et  $x^*$  un point fixe de  $f$ , attractif ou répulsif.

**Définition 1.3.3 (Ensemble Stable Locale)** On appelle  $W_{loc}^s(x^*)$  ensemble stable locale (c'est à dire dans  $U$ ) de  $x^*$ , l'ensemble des points de  $U$  ayant une séquence d'images successives appartient à  $U$  qui converge vers  $x^*$ .

$$W_{loc}^s(x^*) = \{x \in U : x_n = f^n(x) \rightarrow x^* \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in U\}.$$

**Définition 1.3.4 (Ensemble Stable Globale)** On appelle  $W^s(x^*)$  ensemble stable global de  $x^*$ , l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^m$  ayant une séquence d'images successives qui converge vers  $x^*$ .

$$W^s(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^m : x_n = f^n(x) \rightarrow x^*\} = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_{loc}^s(x^*)).$$

**Remarque 1.3.1** :[6]

- Si  $x^*$  est un point fixe attractif, l'ensemble stable global de  $x^*$  est son bassin d'attraction.
- Dans le cas d'un point fixe  $x^*$  de type noeud instable ou foyer instable l'ensemble stable global de  $x^*$  lorsque  $f$  est inversible se réduit à  $x^*$  lui même, et lorsque  $f$  est non inversible l'ensemble stable local de  $x^*$  se réduit à  $x^*$  lui même et l'ensemble stable global de  $x^*$  est constitué de tous antécédents de tout rang de  $x^*$ . Ceci s'écrit :

$$W^s(x^*) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(x^*), \quad \text{et} \quad \forall x \in W^s(x^*) : \exists p \in \mathbb{N} / f^p(x) = x^*.$$

L'ensemble  $W^s(x^*)$  vérifie les propriétés suivantes :

**Propriété 1.3.4**  $W^s(x^*)$  est invariant par  $f^{-1}$  :

$$f^{-1}(W^s(x^*)) = W^s(x^*).$$

**Propriété 1.3.5** Si  $f$  est un endomorphisme, en général  $W^s(x^*)$  n'est pas invariant par  $f$  et on a :

$$f(W^s(x^*)) \subseteq W^s(x^*).$$

L'invariance de  $W^s(x^*)$  par rapport à  $f$  a lieu lorsque  $f$  est inversible.

**Propriété 1.3.6** : Dans le cas d'un difféomorphisme,  $W^s(x^*)$  est toujours connexe, ce qui n'est pas vrai dans le cas d'un endomorphisme (lorsque  $W^s(x^*)$  touche puis traverse LC, il en résulte que  $W^s(x^*)$  devient non connexe).

## 1.4 Bassin d'attraction

**Définition 1.4.1** Le bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  d'un attracteur  $\mathcal{A}$  ( point fixe, cycle d'ordre  $k$  ou attracteur chaotique ) est l'ensemble ouvert de conditions initiales  $x_0$  dont les itérés successifs vont converger vers l'attracteur  $\mathcal{A}$  :  $f^n(x_0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{A}$ .

**Propriété 1.4.1** *Le bassin  $\mathcal{D}$  est invariant par itération inverse  $f^{-1}$ , mais pas nécessairement invariant par  $f$  :*

$$f^{-1}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}, \quad f(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}.$$

*Lorsque la transformation  $f$  est inversible on a  $f(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ .*

**Remarque 1.4.1** *Un bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  peut être connexe, multiplement connexe (connexe avec trous ou lacs) ou non connexe c'est à dire formé d'un nombre fini ou infini de composantes connexes (des îlots) qui peuvent être simplement ou multiplement connexe.*

**Définition 1.4.2** *Si le bassin  $\mathcal{D}$  est non connexe, on appelle bassin immédiat  $\mathcal{D}_0$ , la plus large composante connexe de  $\mathcal{D}$  contenant l'attracteur  $\mathcal{A}$ . Les autre composantes de  $\mathcal{D}$  sont les antécédents de tout rang de  $\mathcal{D}_0$ . Ces antécédents s'appellent îlots (d'après la terminologie de Mira [3]).*

**Remarque 1.4.2** *Si le bassin  $\mathcal{D}$  est non connexe alors  $\mathcal{D} = \cup_{n \geq 0} f^{-n}(\mathcal{D}_0)$ , et si  $\mathcal{D}$  est connexe alors  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ ,*

**Définition 1.4.3** *La frontière de  $\mathcal{D}$  est notée  $\partial\mathcal{D}$  (ou  $\mathcal{F}$ ). Elle est définie par :*

$$\partial\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}} \cap \overline{C(\mathcal{D})}.$$

*Où l'ensemble  $C(\mathcal{D})$  représente la complémentaire de  $\mathcal{D}$ , et l'ensemble  $\overline{\mathcal{D}}$  (resp.  $\overline{C(\mathcal{D})}$ ) représente l'adhérence de  $\mathcal{D}$  (resp.  $C(\mathcal{D})$ ).*

**Propriété 1.4.2** *La frontière  $\partial\mathcal{D}$  est invariant par itération inverse  $f^{-1}$ , mais pas nécessairement invariant par  $f$  :*

$$f^{-1}(\partial\mathcal{D}) = \partial\mathcal{D}, \quad f(\partial\mathcal{D}) \subseteq \partial\mathcal{D}.$$

**Remarque 1.4.3 :**

1. La relation  $f^{-1}(\partial\mathcal{D}) = \partial\mathcal{D}$  implique que  $\partial\mathcal{D}$  doit contenir l'ensemble des antécédents de chacun de ces cycles.
2. La relation  $f(\partial\mathcal{D}) \subseteq \partial\mathcal{D}$  signifie que la trajectoire image de chaque point de  $\partial\mathcal{D}$  appartient à  $\partial\mathcal{D}$ .
3. La frontière  $\partial\mathcal{D}$  doit contenir l'ensemble stable  $W^s$  de tout cycle de  $f$  appartenant à  $\partial\mathcal{D}$ .

En général la frontière du bassin d'attraction d'un attracteur  $\mathcal{A}$ , est constituée de la variété stable globale  $W^s(x^*)$  d'un point fixe col  $x^*$  (ou d'un cycle col).

**Définition 1.4.4** Soit  $\mathcal{D}$  un bassin simplement ou multiplement connexe.

1. On appelle frontière externe de  $\mathcal{D}$  notée par  $\partial\mathcal{D}^*$  ( ou  $\partial_e\mathcal{D}$  ), la frontière de l'ensemble simplement connexe  $\mathcal{D}^*$  obtenue en comblant les trous de  $\mathcal{D}$ .
2. On appelle frontière interne de  $\mathcal{D}$  notée par  $\partial_i\mathcal{D}$ , l'union des frontières de tous les trous de  $\mathcal{D}$ .

# Chapitre 2

## Caractérisation des Bifurcations globales

La situation à laquelle nous intéressons dans ce chapitre est la suivante : on considère certains modèles des processus dynamiques qui dépendent de paramètres auxiliaires et on veut comprendre quelles modifications de forme subit le portrait des phases lorsque les paramètres varient :

C'est la question à laquelle répond la théorie de bifurcation. ce qui fait que la théorie de bifurcation s'intéresse aux familles des systèmes dynamiques (continu ou discret) dépendant d'un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^q$ .

### 2.1 Structures de bifurcation

Dans ce chapitre nous considérons les systèmes dynamiques discrets dépendant de paramètre modélisés par les transformations ponctuelles (ou récurrence) autonome sous la forme explicite donnée par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, \lambda), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{R}^m, \quad \lambda \in \mathbb{R}^q (q \geq 1). \quad (2.1)$$

Où  $f$  est au moins de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$  par rapport à la variable  $x$  et au paramètre  $\lambda$ .

$\mathbb{R}^m$  s'appelle l'espace des phases et  $m$  la dimension de la transformation (2.1),  $\mathbb{R}^q$  s'appelle l'espace des paramètres.

**Définition 2.1.1** *Une bifurcation est un changement qualitatif des propriétés d'un système de type (2.1), telle que la stabilité, le nombre de points fixes, où la nature des régimes permanents quand le paramètre  $\lambda$  traverse une valeur critique  $\lambda^*$ .*

*Les valeurs des paramètres au moment du changement sont appelées valeurs de bifurcations.*

Une bifurcation correspond à la collisions de deux objets (attracteur, point répulsif, ou selle), ou de deux ensembles de nature différents et ceci est une méthode géométrique efficace pour les décrire.

### 2.1.1 Bifurcations locales

Les bifurcations locales sont appelées ainsi car elles peuvent toujours être identifiées lors d'une linéarisation du système au voisinage de la solution, et seront détectées directement par le calcul des valeurs propres de la matrice Jacobienne du système[7].

#### Bifurcation fold

Elle correspond à l'apparition de deux cycles d'ordre  $k$ , de stabilités différentes. A la bifurcation, les deux cycles sont confondus et avec un multiplicateur  $S$  égal à 1. Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\emptyset \xrightarrow[S=+1]{} N_s^k + C^k.$$

Où  $\emptyset$  signifie l'absence de cycle dans le voisinage où apparaît les deux cycles,  $N_s^k$  désigne un cycle nœud d'ordre  $k$  stable et  $C^k$  un cycle col d'ordre  $k$ .

### Bifurcation flip

Cette bifurcation a lieu, lorsqu'un cycle d'ordre  $k$  de type nœud a un multiplicateur qui passe par la valeur  $S = -1$ . Ce cycle alors change de stabilité et donne naissance à un cycle d'ordre  $2k$ , qui a la même stabilité que le cycle d'origine. Cette bifurcation est représentée par les schémas :

$$N_i^k \xrightarrow[S=-1]{} N_s^k + N_i^{2k}.$$

$$N_s^k \xrightarrow[S=-1]{} N_i^k + N_s^{2k}.$$

Où  $N_s^k$  ( $N_s^{2k}$ ) signifie cycle nœud d'ordre  $k$  ( $2k$ ) stable,  $N_i^k$  ( $N_i^{2k}$ ) cycle nœud d'ordre  $k$  ( $2k$ ) instable.

### Bifurcation de Neimark-Sacker

Cette bifurcation a lieu lorsqu'un cycle d'ordre  $k$  de type foyer a deux multiplicateurs complexes  $S_1 = \overline{S_2} = \rho e^{i\theta}$ , dont le module  $\rho$  passe par la valeur 1, il change alors de stabilité et donne naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que le cycle d'origine. On a le schéma :

$$F_s^k \xrightarrow[\rho=1]{} F_i^k + CFI_s.$$

$$F_i^k \xrightarrow[\rho=1]{} F_s^k + CFI_i$$

Où  $F_s^k$  et  $F_i^k$  désignent deux cycles foyers d'ordre  $k$ , le premier stable et le second instable.  $CFI_s$  désigne une courbe fermée invariante stable,  $CFI_i$  désigne courbe fermée invariante instable.

### 2.1.2 Bifurcations globales (contact )

Un contact entre deux ensembles singuliers de nature différents (des variétés invariantes par  $f$  ou  $f^{-1}$  ou bien des variétés critiques) donne lieu à des bifurcations dite globales puisque elles ne font pas forcément intervenir le voisinage de la solution et les linéarisations locales autour de la solution ne seront donc d'aucune aide. Ces bifurcations comportent des changements qualitatifs de la dynamique de  $f$  et souvent elles correspondent à des bifurcations homoclines et hétéroclines.

Il existe plusieurs types de bifurcations globales :

1. Bifurcations de la courbe invariante fermée : interviennent lors d'un contact avec les lignes critiques et elles sont caractérisées par l'auto-intersections de la courbe invariante fermée ou bien la coexistence de cycle avec la courbe invariante fermée.
2. Bifurcation de l'ensemble instable d'un point col (cycle col) : intervienne lors d'un contact avec les lignes critiques et elle est caractérisée par l'auto-intersections de l'ensemble instable. Cette bifurcation est toujours suivie par une bifurcation homocline.
3. Intersection de la courbe invariante fermée et l'ensemble instable d'un point col.
4. Bifurcations du bassin d'attraction.

Dans ce travail nous intéressons aux bifurcations du bassin d'attraction ainsi que les bifurcations homocline et hétérocline.

## 2.2 Bifurcations du bassin d'attraction

Nous allons décrire dans ce paragraphe les bifurcations de base intervenant dans le changement qualitatif de la structure du bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  d'un attracteur  $\mathcal{A}$ . Ces bifurcations interviennent lors d'un contact ou d'une intersection du bassin  $\mathcal{D}$  avec une ligne critique  $LC$ . Nous intéressons aux critères de connexité de bassin d'attraction d'un attracteur pour

les systèmes dynamiques discrets modélisés par des transformations bidimensionnelles non inversibles de type  $(Z_0 - Z_2)$  (voir annexe A).

Considérons un système dynamique discret du type (2.1) où  $m = 2$ , et  $f$  une application non inversible de type  $(Z_0 - Z_2)$  et  $\mathcal{D}_0$  le bassin immédiat d'attraction d'un ensemble attractant  $\mathcal{A}$ . Ces deux propositions donnent les conditions liées à l'existence d'un bassin non connexe, et d'un bassin multiplement connexe.

**Proposition 2.2.1** [3] *Supposons que  $\mathcal{D}_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$ . Alors :*

1.  $\mathcal{D}$  est connexe  $\iff \mathcal{D}_0 \cap \overline{Z_2}$  est connexe  $\iff f(\mathcal{D}_0 \cap LC_{-1}) = \mathcal{D}_0 \cap LC$ .
2.  $\mathcal{D}$  est non connexe  $\iff \mathcal{D}_0 \cap \overline{Z_2}$  est non connexe  $\iff f(\mathcal{D}_0 \cap LC_{-1}) \subset \mathcal{D}_0 \cap LC$ .

**Proposition 2.2.2** [3] *Supposons que  $\mathcal{D}_0 \cap LC_{-1} \neq \emptyset$  et  $\mathcal{D}_0 \cap \overline{Z_2}$  est connexe. Alors :*

1.  $f^{-1}(\mathcal{D}_0^*) = \mathcal{D}_0^* \iff \mathcal{D} = \mathcal{D}_0$  est simplement connexe  $\iff \mathcal{D}_0^* \cap LC = f(\mathcal{D}_0^* \cap LC_{-1})$ .
2.  $f^{-1}(\mathcal{D}_0^*) \subset \mathcal{D}_0^* \iff \mathcal{D} = \mathcal{D}_0$  est multiplement connexe  $\iff \mathcal{D}_0^* \cap LC \subset f(\mathcal{D}_0^* \cap LC_{-1})$ .

Notons que  $\mathcal{D}_0^*$  est la frontière du domaine simplement connexe et appelé bassin immédiat apparent obtenu en retirant les trous de  $\mathcal{D}_0$ .

La proposition suivante est une conséquence des deux propositions précédentes qui décrit certaines bifurcations de bassins d'attraction.

**Proposition 2.2.3** [3] *Supposons que le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{D} \cap LC$  change quand  $\lambda$  traverse une valeur de bifurcation  $\lambda^*$ , alors le bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  peut subir une bifurcation de bassins parmi les types de bifurcations suivantes :*

1. bassin connexe  $\longleftrightarrow$  bassin non connexe.
2. bassin simplement connexe  $\longleftrightarrow$  bassin multiplement connexe.
3. modification du nombre d'îlots dans  $\mathcal{D}$  ou apparition d'une nouvelle séquence arborescente de telles composantes connexes.

4. *modification du nombre de lacs dans  $\mathcal{D}$  ou apparition d'une nouvelle séquence arborescente de lacs.*

Chacune de ces bifurcations correspond à un contact entre la frontière du bassin d'attraction  $\partial\mathcal{D}$  et la ligne critique  $LC$ . Donnant quelques explications concernant ces bifurcations

**La bifurcation bassin connexe  $\rightarrow$  bassin non connexe** ( $\lambda = \lambda_1$ ).

Cette bifurcation apparait lorsque  $\partial D_0$  a un contact avec  $LC$  au point  $a \equiv c$ . Cette situation génère une séquence de points  $f^{-n}(a) = f^{-n}(c)$  constituant le germe d'une séquence de  $N$  "îlots" naissant à partir de  $a \equiv c$  et de ses antécédents. Dans le cas de la figure (2.1)  $N = 1$  car  $\mathcal{D}_1 = f^{-1}(\mathcal{D}_0)$  appartient à la région  $Z_0$  qui ne possède pas d'antécédents, c'est donc une séquence finie.

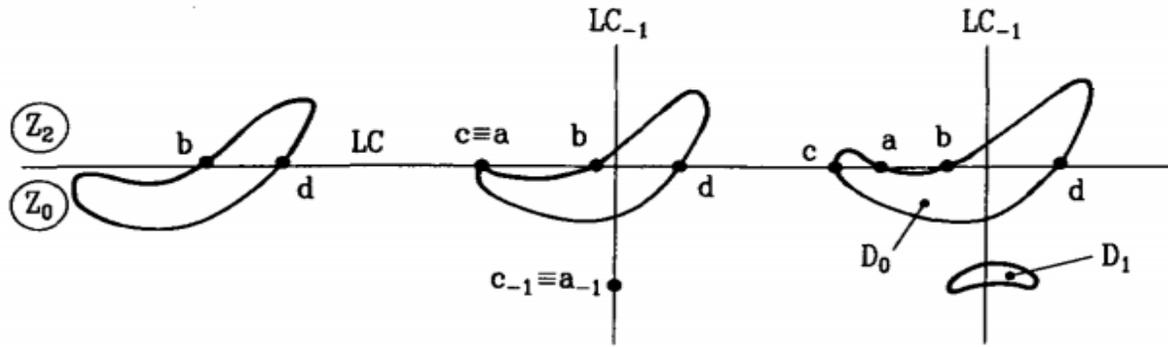


FIG. 2.1 – Bassin connexe  $\rightarrow$  bassin non connexe

**La bifurcation bassin non connexe  $\rightarrow$  bassin connexe** ( $\lambda = \lambda_2$ ).

C'est la bifurcation inverse de la précédente. Elle intervient lorsque  $\partial\mathcal{D}_0$  entre en contact tangentiel avec  $LC$  de telle sorte que  $a \equiv b$ , induisant un contact entre  $\mathcal{D}_1 = f^{-1}(\mathcal{D}_0)$  et  $\mathcal{D}_0$  en  $a_{-1} \equiv b_{-1}$ , voir figure (2.2).

**La bifurcation bassin simplement connexe  $\leftrightarrow$  bassin multiplément connexe.**

Cette bifurcation est illustrée sur la figure (2.3). Pour  $\lambda = \lambda_3$ ,  $\partial\mathcal{D}_0 \cap LC = a \equiv b$ .

Pour  $\lambda > \lambda_3$ , il se crée une "baie"  $H_0$  qui donne naissance à un "lac"  $H_1 = f^{-1}(H_0)$ , antécédent de rang 1 de  $H_0$  après application de la transformation inverse de  $f$ .

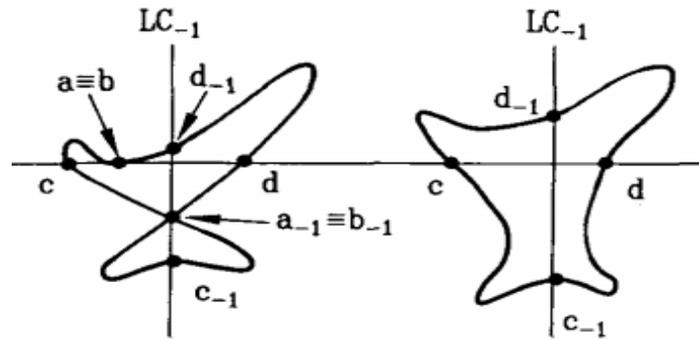


FIG. 2.2 – Bassin non connexe  $\rightarrow$  bassin connexe

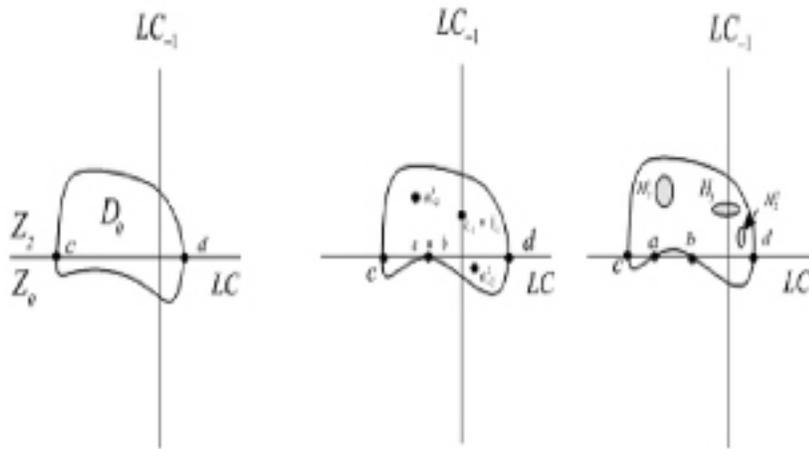


FIG. 2.3 – Bassin simplement connexe  $\leftrightarrow$  bassin multiples connexe

La séquence arborescente  $f^{-n}(a \equiv b)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , constitue le germe de la séquence  $H_{n+1} = f^{-n}(H_1)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . La présence de "lacs" rend le bassin  $\mathcal{D}$  multiples connexe.

Le passage d'un bassin multiples connexe à un bassin connexe se fait au travers de la bifurcation inverse, c'est-à-dire lorsque la "baie"  $H_0$  se réduit au point  $a \equiv b$  pour  $\lambda = \lambda_4$  avant de disparaître.

**La bifurcation modification du nombre "d'îlots" de  $\mathcal{D}$  ou apparition d'une nouvelle arborescence**

Considérons seulement l'antécédent de rang  $i$  de  $\mathcal{D}_0$  noté  $\mathcal{D}_i$ . Avant la bifurcation,  $\lambda < \lambda_5$ ,

$\mathcal{D}_i \subset Z_0$  et  $\mathcal{D}_i \cap LC = \emptyset$ . Pour  $\lambda = \lambda_5$ ,  $\mathcal{D}_i \cap LC = \alpha$  constituant le germe de l'arborescence  $f^{-n}(\alpha)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  avec  $f^{-1}(\alpha) = \alpha_{-1} \in LC_{-1}$  à partir de laquelle naît une arborescence "d'îlots"  $\mathcal{D}_{i+n} = f^{-n}(\mathcal{D}_i)$ , voir figure (2.4).

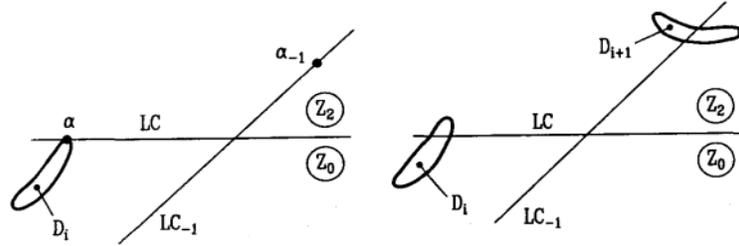


FIG. 2.4 – Modification du nombre "d'îlots" lorsque  $\mathcal{D}_i \cap Z_2 \neq \emptyset$ .

L'apparition d'une nouvelle arborescente est représentée sur la figure (2.5). Pour  $\lambda < \lambda_6$ ,  $\mathcal{D}_i \cap LC = \beta$ , nouveau contact tangentiel entre  $\mathcal{D}_i$  et  $LC$ . On a  $f^{-1}(\beta) = \beta_{-1} \in LC_{-1}$  et  $\mathcal{D}_{i+1} \cap LC_{-1} = \beta_{-1}$ . A partir de  $\lambda = \lambda_6$ ,  $\mathcal{D}_{i+1}$  se dévise, au point  $\beta_{-1}$ , en deux îlots situés de part et d'autre de  $LC_{-1}$  dans les régions  $R_1$  et  $R_2$  (correspondantes aux déterminations inverses de  $f$ ) de telle sorte que  $\mathcal{D}_{i+1} = \mathcal{D}_{i+1}^1 \cup \mathcal{D}_{i+1}^2$  et pour  $\lambda > \lambda_6$ ,  $\mathcal{D}_{i+1} \cap LC_{-1} = \emptyset$ .

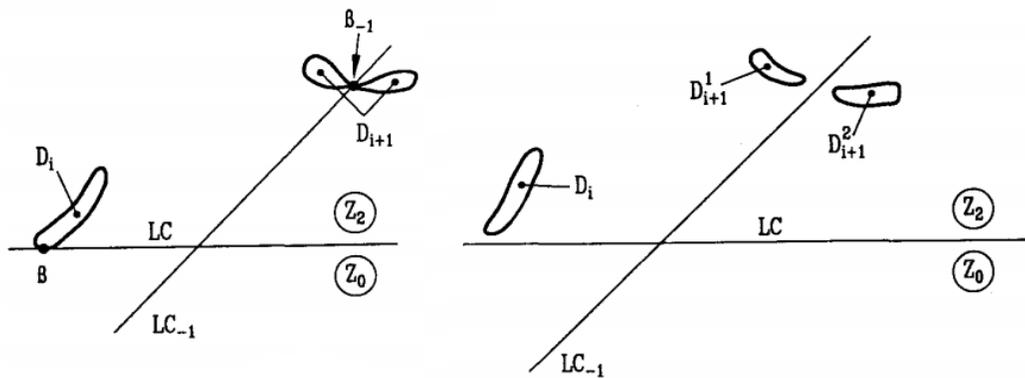


FIG. 2.5 – L'apparition d'une nouvelle séquence d'îlots lorsque  $\mathcal{D}_i \subset Z_2$ .

La bifurcation modification du nombre de lacs dans  $\mathcal{D}$  ou apparition d'une nouvelle séquence arborescente de lacs est analogue à la bifurcation précédente, en substituant dans

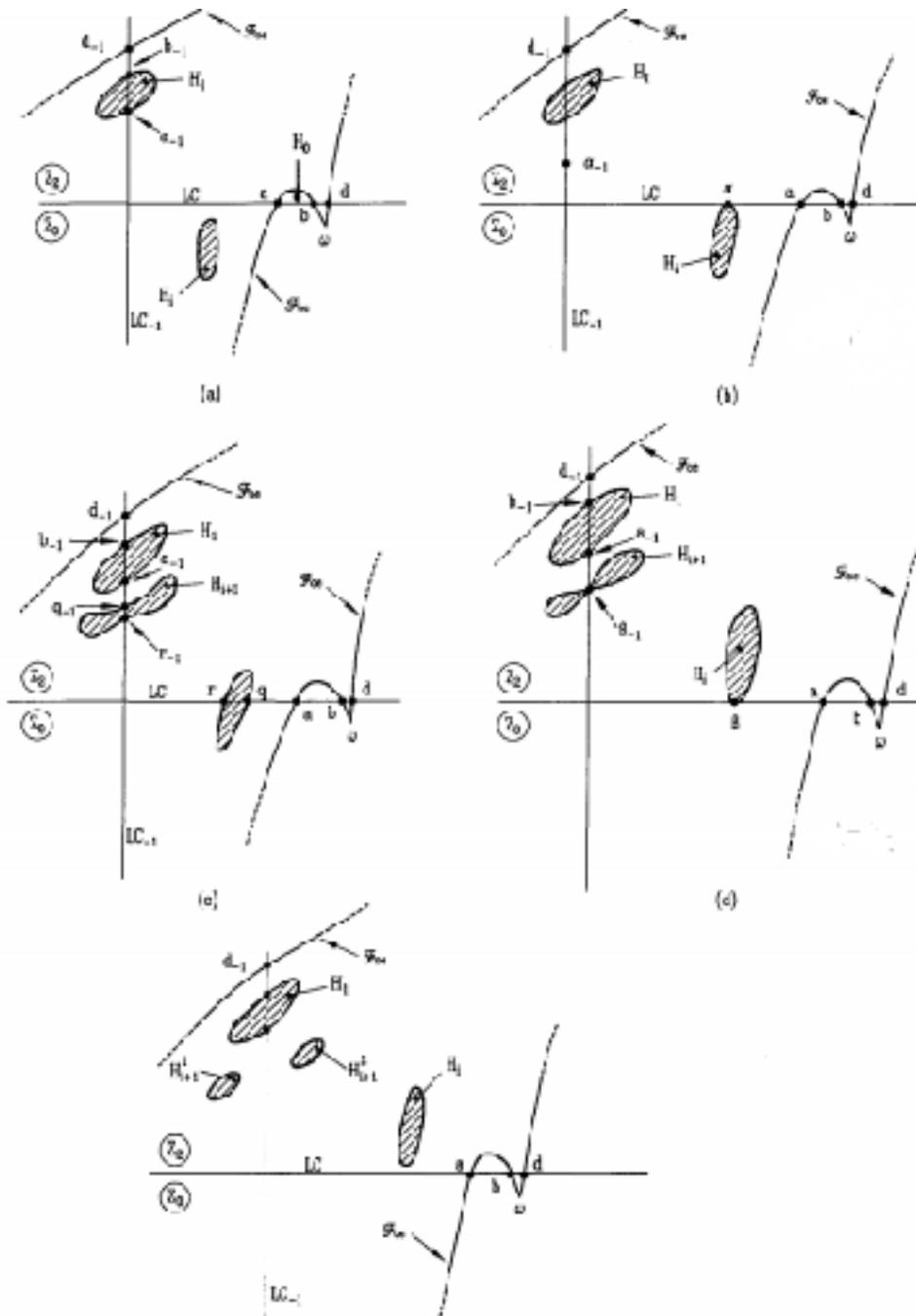


FIG. 2.6 – La bifurcation modification du nombre de lacs dans  $\mathcal{D}$ .

l'explication les flots par des lacs d'un bassin multiplement connexe. Cette bifurcation est illustrer sur la figure(2.6).

## 2.3 Bifurcations homoclines et hétéroclines

### 2.3.1 Bifurcation homocline

Considérons un système dynamique discret de type (2.1) où  $m = 2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  et soit  $x^*$  un point fixe répulsif de  $f$  et  $U(x^*)$  est un voisinage de  $x^*$ .

**Définition 2.3.1** *Un point  $q \in U(x^*)$  est appelé homocline à  $x^*$  si :*

$$q \in W^s(x^*) \cap W^i(x^*) \text{ et } q \neq x^*.$$

**Définition 2.3.2** *On appelle orbite homocline  $O_o(q)$  associée au point homocline  $q$  appartenant à  $U(x^*)$ , l'ensemble des itérés successifs de  $q$ , et d'une séquence infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse de  $f_{loc}^{-1}$  dans  $U(x^*)$  c-à-d :*

$$O_o(q) = \{f_{loc}^{-n}(q), q, f^n(q); n > 0\} = \{\dots, q_{-n}, \dots, q_{-2}, q_{-1}, q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\},$$

où  $q_n = f^n(q) \rightarrow x^*$  et  $q_{-n} = f_{loc}^{-n}(q) \rightarrow x^*$ .

**Remarque 2.3.1** *Il y a une infinité d'orbites homoclines associées à un point homocline. Celles-ci ont la même demie trajectoire positive, mais diffèrent par leur demie trajectoire négative.*

**Définition 2.3.3** *Une bifurcation homocline apparaît lorsque le paramètre atteint la valeur  $\lambda = \lambda^*$  en faisant apparaître ou disparaître une infinité d'orbites homoclines.*

### 2.3.2 Bifurcation hétérocline

**Définition 2.3.4** Soient  $x_1^*$  et  $x_2^*$  deux points fixes répulsifs de  $f$ . Un point  $q \in U(x_1^*)$  (voisinage de  $x_1^*$ ) est appelée hétérocline de  $x_1^*$  vers  $x_2^*$  si :  $f^n(q) \rightarrow x_2^*$  quand  $n$  croît, et  $q$  appartient à l'ensemble instable local  $W_{loc}^i(x_1^*)$  dans  $U(x_1^*)$ .

**Définition 2.3.5** Soient  $x_1^*$  et  $x_2^*$  deux points fixes répulsifs de  $f$ . Une orbite hétérocline  $O_e(q)$  associée au point hétérocline  $q$  de  $x_1^*$  vers  $x_2^*$  appartenant à  $U(x_1^*)$  est constitué des itérés successifs de  $q$ , et d'une séquence infinie d'antécédents successifs obtenus par la transformation locale inverse  $f_{loc}^{-1}$  de  $f$  dans  $U(x_1^*)$ , c-à-d :

$$O_e(q) = \{f_{loc}^{-n}(q), q, f^n(q); n > 0\} = \{\dots, q_{-n}, \dots, q_{-2}, q_{-1}, q, q_1, q_2, \dots, q_n, \dots\},$$

où  $q_{-n} = f_{loc}^{-n}(q) \rightarrow x_1^*$  et  $q_n = f^n(q) \rightarrow x_2^*$ .

**Définition 2.3.6** Une bifurcation hétérocline apparaît lorsque le paramètre atteint la valeur  $\lambda = \lambda^*$  en faisant apparaître ou disparaître une infinité d'orbites hétéroclines.

Les orbites homoclines et hétéroclines sont classifiées par rapport à l'ensemble des antécédents de premier rang confondus  $LC_{-1}$  et l'ensemble suivant :

$$J_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \det(Df(x, y)) = 0 \text{ ou } f \text{ n'est pas différentiable en } (x, y)\}.$$

**Définition 2.3.7** Une orbite homocline ou hétérocline est appelée dégénérée, si elle contient un point de  $J_0$ , dans le cas contraire on dit qu'elle est non dégénérée. De plus une orbite homocline ou hétérocline est appelée dégénérée critiques, si elle contient un point de  $LC_{-1}$ .

## 2.4 Application sur les bifurcations globales

Le modèle de kawakami et Kobayashi est un système dynamique discret bidimensionnel modélisé par une transformation ponctuelle non inversible. Il a été proposer en (1979) pour

donner les conditions d'existence d'un ensemble attractant en fonction des paramètres [4].  
L'application de Kawakami et Kobayashi est définie de la manière suivante :

$$f : \begin{cases} x' = ax + y \\ y' = x^2 + b \end{cases} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Ce modèle a été repris par Cathala en (1992), qui a défini la zone absorbante pour un attracteur chaotique, puis en (1994), par Mira et al. [5] qui ont définies la notion de bassin faiblement fractal et les bifurcations des bassins d'attractions.

Dans cette partie, nous étudions les comportements dynamiques du système (2.2) en utilisant l'analyse qualitative, nous déterminons d'abord l'existence des points fixes et des cycles d'ordre 2 du système, puis nous étudions leur stabilité en calculant les multiplieurs au point considéré. De plus, nous analysons les types de Bifurcations locales, et nous déterminons les conditions suffisantes d'existence pour les bifurcations de fold, flip et de Neimark-Sacker. Enfin nous étudions quelques bifurcations globales en caractérisant les attracteurs et leurs bassins d'attraction.

### 2.4.1 Les cycles d'ordre $k = 1, 2$ et leurs stabilité

**Proposition 2.4.1** *Posons  $\Delta = (a - 1)^2 - 4b$ , alors :*

1. Si  $\Delta > 0$ . Le système (2.2) admet deux points fixes  $p$  et  $Q$  où

$$p : x = \frac{(1 - a + \sqrt{\Delta})}{2}, y = \frac{(1 - a)(1 - a + \sqrt{\Delta})}{2}.$$

$$Q : x = \frac{(1 - a - \sqrt{\Delta})}{2}, y = \frac{(1 - a)(1 - a - \sqrt{\Delta})}{2}.$$

2. Si  $\Delta = 0$ . Le système (2.2) admet un point fixe  $O$ .

$$O : x = \frac{(1 - a)}{2}, y = \frac{(1 - a)^2}{2}.$$

3. Si  $\Delta < 0$ . Le système (2.2) n'admet aucun point fixe.

**Preuve.** D'après la définition (1.2.4), pour obtenir les points fixes du système (2.2), il faut résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x = ax + y, \\ y = x^2 + b, \end{cases}$$

d'après la première équation on trouve que  $y = (1 - a)x$ .

En substitutions dans la deuxième équation on trouve l'équation  $x^2 - (1 - a)x + b = 0$ , ce qui donne que :

- Si  $(a - 1)^2 - 4b > 0$ , l'équation admet deux solutions  $x_{1,2} = \frac{(1 - a \pm \sqrt{(a - 1)^2 - 4b})}{2}$ .
- Si  $(a - 1)^2 - 4b = 0$ , l'équation admet une solution  $x_{1,2} = \frac{(1 - a)}{2}$ .
- Si  $(a - 1)^2 - 4b < 0$ , l'équation n'admet aucune solution.

Ce qui termine la preuve. ■

D'après le théorème (1.2.1), l'étude de la stabilité du point fixe nécessite le calcul des multiplicateurs (les valeurs propres de la matrice Jacobienne de  $f$  au point fixe).

La matrice Jacobienne de  $f$  au point  $(x, y)$  est donnée par :

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2x & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer les valeurs propres de  $Df(x, y)$ , nous résolvons l'équation

$$\det(Df(x, y) - SI) = 0,$$

où  $I$  est la matrice identité, on obtient le polynôme caractéristique suivant

$$P(S) = -S(a - S) - 2x = S^2 - aS - 2x = 0.$$

Où les valeurs propres (multiplicateurs) sont les racines de  $P(S)$  donnée par

$$S_i = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8x}}{2}, \quad i = 1, 2.$$

D'après la classification (1.2.3), on a les résultats suivants :

**Proposition 2.4.2 (Stabilité du point fixe  $P$ )** Posons  $\alpha = a^2 + 4 \left( 1 - a + \sqrt{(a-1)^2 - 4b} \right)$ ,

alors :

*I)* Si  $\alpha > 0$  et  $\Delta > 0$  :

1. Si  $|a + \sqrt{\alpha}| < 2 < |a - \sqrt{\alpha}|$  ou  $|a - \sqrt{\alpha}| < 2 < |a + \sqrt{\alpha}|$  alors  $P$  est un col.
2. Si  $|a + \sqrt{\alpha}| < 2$  et  $|a - \sqrt{\alpha}| < 2$ , alors  $P$  est un noeud attractif.
3. Si  $2 < |a + \sqrt{\alpha}|$  et  $2 < |a - \sqrt{\alpha}|$ , alors  $P$  est un noeud répulsif

*II)* Si  $\alpha = 0$  alors  $P$  est un noeud, il est attractif si  $|a| < 2$  et répulsif si  $|a| > 2$ .

*III)* si  $\alpha < 0$ , alors  $P$  est un foyer, il est attractif si :

$$a - 1 - \sqrt{(a-1)^2 - 4b} < 1.$$

Si non, il est répulsif.

**Proposition 2.4.3 (Stabilité du point fixe  $Q$ )** Posons  $\beta = a^2 + 4 \left( 1 - a - \sqrt{(a-1)^2 - 4b} \right)$ ,

alors :

*I)* Si  $\beta > 0$  et  $\Delta > 0$  :

1. Si  $|a + \sqrt{\beta}| < 2 < |a - \sqrt{\beta}|$  ou  $|a - \sqrt{\beta}| < 2 < |a + \sqrt{\beta}|$ , alors  $Q$  est un col.
2. Si  $|a + \sqrt{\beta}| < 2$  et  $|a - \sqrt{\beta}| < 2$ , alors  $Q$  est un noeud attractif.
3. Si  $2 < |a + \sqrt{\beta}|$  et  $2 < |a - \sqrt{\beta}|$ , alors  $Q$  est un noeud répulsif

*II)* Si  $\beta = 0$  alors  $Q$  est un noeud, il est attractif si  $|a| < 2$  et répulsif si  $|a| > 2$ .

III) Si  $\beta < 0$ , alors  $Q$  est un foyer, il est attractif si :

$$a - 1 + \sqrt{(a - 1)^2 - 4b} < 1.$$

Sinon, il est répulsif.

**Proposition 2.4.4 (Stabilité du point fixe  $O$ )** Si  $\Delta = 0$ , alors le point fixe  $O$  est toujours un point non hyperbolique où  $S_1 = 1$  et  $S_2 = a - 1$ .

Pour calculer les cycles d'ordre 2 du système (2.2), on doit calculer les points fixe de l'application  $f^2$ .

**Proposition 2.4.5** : Si  $\Delta' = 1 - 2a - 3a^2 - 4b > 0$  le système (2.2) admet un cycle d'ordre 2 noté  $(Q_1, Q_2)$  où

$$Q_1 : x = \frac{(a + 1 + \sqrt{\Delta'})}{2}, y = \frac{(a + 1)(1 - a - \sqrt{\Delta'})}{2}.$$

$$Q_2 : x = \frac{(a + 1 - \sqrt{\Delta'})}{2}, y = \frac{(a + 1)(1 - a + \sqrt{\Delta'})}{2}.$$

**Preuve.** L'itération d'ordre 2 de l'application  $f$  est donnée par

$$f^2 : \begin{cases} x' = a(ax + y) + x^2 + b. \\ y' = (ax + y)^2 + b. \end{cases}$$

D'après la définition (1.2.5), pour obtenir les cycles d'ordre 2, il faut résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 + (a^2 - 1)x + b + ay = 0, \\ (ax + y)^2 + b - y = 0, \end{cases}$$

d'après la première équation on trouve que  $y = -\frac{1}{a}(x^2 + (a^2 - 1)x + b)$ .

En substituons dans la deuxième équation on trouve l'équation

$$\left(ax - \frac{1}{a}(x^2 + (a^2 - 1)x + b)\right)^2 + b + \frac{1}{a}(x^2 + (a^2 - 1)x + b) = 0.$$

Si  $1 - 2a - 3a^2 - 4b > 0$  cette équation admet deux solutions

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{1 - 2a - 3a^2 - 4b}}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{1 - 2a - 3a^2 - 4b}}{2} \end{cases}.$$

Ce qui donne deux points de cycles d'ordre 2  $(Q_1, Q_2)$  qui ont pour ordonnées

$$y_{1,2} = -ax_{1,2} + \frac{1+a}{2} \pm \frac{\sqrt{1 - 2a - 3a^2 - 4b}}{2}.$$

C-à-d

$$\begin{cases} y_1 = -a\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{1 - 2a - 3a^2 - 4b}}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{1 - 2a - 3a^2 - 4b}}{2} \\ y_2 = -a\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{1 - 2a - 3a^2 - 4b}}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{1 - 2a - 3a^2 - 4b}}{2} \end{cases}.$$

Ce qui termine la preuve. ■

La matrice Jacobienne de  $f^2$  au point  $(x, y)$  est donnée par :

$$Df^2(x, y) = \begin{pmatrix} a^2 + 2x & a \\ 2a^2x + 2ay & 2y + 2ax \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres (multiplicateurs)  $Df^2(x, y)$  sont donnée par

$$S_i = \frac{a^2}{2} + x + ax + y \pm \frac{\sqrt{a^4 + 4a^2x + 4a^3x + 4a^2y + 4x^2 - 8ax^2 - 8xy + 4a^2x^2 + 8axy + 4y^2}}{2}, \quad i = 1, 2.$$

## 2.4.2 Bifurcations des cycles d'ordre $k = 1, 2$

Les propositions ci dessous déterminent les conditions suffisantes d'existences des bifurcations locales Fold, Flip et Neimark-Sacker.

**Proposition 2.4.6** [5] Si  $(a - 1)^2 - 4b = 0$  le système (2.2) subit des bifurcations de type Fold pour les points fixes  $P$  et  $Q$  comme suit :

1. Si  $a < 0$ ,

$$\emptyset \longleftrightarrow P \text{ noeud instable } (S_1 > 1, S_2 < -1) + Q \text{ col } (0 < S_1 < 1, S_2 < -1)$$

2. Si  $0 < a < 1$ ,

$$\emptyset \longleftrightarrow Q \text{ noeud stable } (0 < S_1 < 1, -1 < S_2 < 0) + P \text{ col } (S_1 > 1, -1 < S_2 < 0)$$

3. Si  $1 < a < 2$ ,

$$\emptyset \longleftrightarrow Q \text{ noeud stable } (0 < S_1 < 1, 0 < S_2 < 1) + P \text{ col } (S_1 > 1, 0 < S_2 < 1)$$

**Proposition 2.4.7** [5] Si  $4b + 1 + 2a + 3a^2 = 0$ , le système (2.2) subit une bifurcation Flip comme suit :

1. Si  $-1 < a < 0, b > 0$ ,

$$Q \text{ point col } (0 < S_1 < 1, S_2 < -1) \longleftrightarrow Q \text{ noeud stable } (0 < S_1 < 1, -1 < S_2 < 0) \\ + \text{ cycle col d'ordre } 2 \text{ } (0 < S_1 < 1, S_2 > 1)$$

2. Si  $-2 < a < -1, b < 0,$

$Q$  point col ( $-1 < S_1 < 0, S_2 < -1$ )  $\longleftrightarrow$   $Q$  noeud stable ( $-1 < S_1 < 0, -1 < S_2 < 0$ )  
 + cycle col d'ordre 2 ( $0 < S_1 < 1, S_2 > 1$ )

3. Si  $a > 0,$

$P$  point col ( $-1 < S_1 < 0, S_2 > 1$ )  $\longleftrightarrow$   $P$  noeud instable ( $S_1 < -1, S_2 > 1$ )  
 + cycle col d'ordre 2 ( $0 < S_1 < 1, S_2 > 1$ )

**Proposition 2.4.8** [5] Si  $2a - 4b - 3 = 0,$  Le système (2.2) subit une bifurcation de Neimark-Sacker au poin fixe  $Q$  comme suit :

$Q$  foyer stable ( $S_{1,2} = \rho e^{\pm i\theta}$  et  $\alpha < 1$ )  $\longleftrightarrow$   $Q$  foyer instable ( $S_{1,2} = \rho e^{\pm i\theta}$  et  $\rho > 1$ )  
 + CFI (Attractif)

### 2.4.3 Les lignes critiques

**Proposition 2.4.9** La transformation ponctuelle est non inversible (endomorphisme) de type  $Z_0 - Z_2.$

**Preuve.** En effet :

$$\begin{cases} x' = ax + y, \\ y' = x^2 + b, \end{cases} \implies \begin{cases} x = \pm\sqrt{y' - b}. \\ y = x' \pm a\sqrt{y' - b}. \end{cases}$$

Donc la transformation  $f$  possède deux déterminations inverses notées par  $f_{1,2}^{-1}$  où :

$$f_1^{-1} : \begin{cases} x = +\sqrt{y' - b}, \\ y = x' + a\sqrt{y' - b}, \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2^{-1} : \begin{cases} x = -\sqrt{y' - b}. \\ y = x' - a\sqrt{y' - b}. \end{cases}$$

Le lieu  $LC_{-1}$  des antécédents de premier rang confondus est définie par :

$$\begin{aligned} LC_{-1} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \det Df(x, y) = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} \end{aligned}$$

Les lignes critiques  $LC$  sont définies par

$$LC = f(LC_{-1}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = b\}.$$

et pour des points initiaux  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  si  $y_0 > b$ , il existe deux antécédents, donnés par  $f_{1,2}^{-1}$  et si  $y_0 < b$ , les points  $(x_0, y_0)$  n'ont pas d'antécédents. Par suite, l'espace des phases est séparé en deux régions ouvertes  $Z_0$  (chaque point  $(x, y) \in Z_0$  n'a pas d'antécédents), et  $Z_2$  (chaque point  $(x, y) \in Z_2$  possède deux antécédents de rang un) définie par :

$$Z_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < b\} \quad \text{et} \quad Z_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > b\}.$$

■

#### 2.4.4 Etude numérique

Dans cette partie nous présentons des comportements dynamiques complexes du système (2.2) et nous exposons quelques bifurcations globales de ce système par des simulations numériques .

Nous fixons  $a = 1$ , le système (2.2) a deux points fixes  $P = (\sqrt{-b}, 0)$ , et  $Q = (-\sqrt{-b}, 0)$ .

Le point fixe  $P$  est un col si  $b > -1$  puisque

$$\left( -1 < S_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 8\sqrt{-b}}}{2} < 0, S_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{-b}}}{2} > 1 \right),$$

et le point fixe  $Q$  est un foyer si  $b < -1/64$  ( stable si  $b > \tilde{b} = -1/4$  et instable si  $b < \tilde{b} = -1/4$  ). Faisons varier le paramètre  $b$  dans le sens décroissant sur l'intervalle  $[-0.599, -0.595]$ . Alors après la déstabilisation du foyer  $Q$  une courbe fermée invariante  $\Gamma$  est née via une bifurcation de Hopf (Neimark Sacker). Après une séquence de bifurcations, l'évolution du courbe fermée donne naissance à un attracteur chaotique  $d$  délimité par les segments des lignes critiques  $LC_k$ .

Intéressons-nous aux changements dans la structure géométrique du bassin d'attraction  $\mathcal{D}$  de l'attracteur chaotique  $d$ .

1. Pour  $b < -0.595$ , le bassin immédiat d'attraction  $\mathcal{D}_0(d)$  de l'attracteur chaotique est simplement connexe ( $\mathcal{D}_0(d) \cap LC$  est connexe) et sa frontière est délimité par l'ensemble stable  $W^s(P)$  du point fixe col  $P$ . A la valeur  $b = -0.59519$ , la frontière du bassin d'attraction entre en contact avec la ligne critique  $LC$  en un point  $\alpha_0$ . Autrement dit  $\partial\mathcal{D}_0(d) \cap LC = \alpha_0 \neq \emptyset$  (figure 2.7).

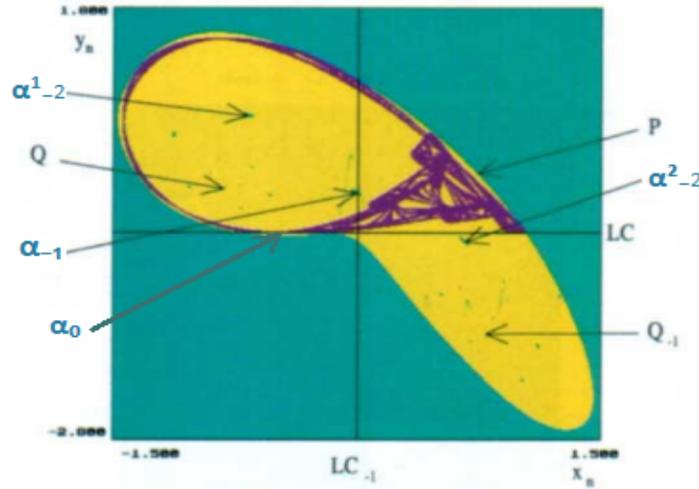


FIG. 2.7 – Le bassin d'attraction pour  $a = 1$  et  $b = -0.59519$ .

Notons de plus qu'en cette valeur de  $b = -0.59519$  l'ensemble stable  $W^s(P)$  est constitué des frontières  $\partial_e\mathcal{D}_0(d)$ , et des préimages du point critique  $\alpha_0 \in LC$ . La préimage  $\alpha_{-1} = f_{1,2}^{-1}(\alpha_0) \in LC_{-1}$  se trouve dans la zone qu'occupait l'attracteur. Il

en découle qu'une séquence de préimages  $\alpha_{-n} = f^{-n}(\alpha_{-1})$ ,  $n > 1$ , de  $\alpha_{-1}$  converge vers le foyer instable  $Q$ , ce qui signifie l'apparition de la première orbite hétérocline connectant  $Q$  à  $P$ . Cette orbite hétérocline constituée de  $\alpha_{-1}$ , de ses images  $f^n(\alpha_{-1})$ ,  $n > 0$ , convergeant vers  $P$ , et de ses préimages  $\alpha_{-n} \in$ ,  $n > 1$ , convergeant vers  $Q$ .

2. Pour  $b < -0.59519$ , il se crée une baie  $H_0$  qui donne naissance à un lac (trou)  $H_1$ , antécédent de rang 1 de  $H_0$  après application de la transformation inverse de  $f$ ,  $H_1 = f^{-1}(H_0)$ . Le bassin  $\mathcal{D}(d)$  est multiplement connexe, c'est à dire connexe avec des trous (lacs)  $H_j^{i_1, i_2, \dots}$ ,  $i_k = 1, 2$ , et  $j = 1, 2, \dots$  puisque  $\mathcal{D}(d) \cap LC$  n'est plus connexe. Les  $H_j^{i_1, i_2, \dots}$  sont les préimages de la baie  $H_0$  par les déterminations inverses  $f^{-i}$ ,  $i = 1, 2$  de l'endomorphisme  $f$ . La baie  $H_0$  est numériquement visible à partir de la valeur  $b = -0.5952$ . alors d'après la proposition (2.2.3) situation (2) on a une valeur de bifurcation "simplement connexe  $\rightarrow$  multiplement connexe" entre les valeurs  $b = -0.59519$  et  $b = -0.5952$ . L'une des deux séquences arborescentes des trous convergent en spirale vers le point fixe  $Q$  et l'autre séquence converge vers  $Q^{-1}$ . L'ensemble stable  $W^s(P)$  du point fixe col  $P$  est non connexe et sa composante connexe contenant  $P$  est la frontière externe  $\partial_e \mathcal{D}_0(d)$ . Les autres composantes connexes sont les frontières des trous ou lacs  $H_j$ , se trouvant à l'intérieur du bassin  $\mathcal{D}_0(d)$ .
3. Pour  $b < -0.5952$ , le trou  $H_2^2$ , ( $H_2^2 \subset Z_0$ ), et lorsque  $b \approx -0.5966$ , le trou  $H_2^2$  s'intersecte avec  $LC$  en un point  $\beta_0$  ce qui donne la naissance d'une deuxième orbite hétérocline (même situation que la première orbite hétérocline), ainsi que l'apparition d'une deuxième baie donne lieu à un nouveau trou  $H_3^2 = f^{-1}(H_2^2 \cap Z_2)$  qui s'intersecte avec  $LC_{-1}$  qui est la source de deux autre séquences de lacs convergent vers  $Q$  et  $Q^{-1}$  (voir figure 2.8).

La décroissance des valeurs de  $b$  conduit à plusieurs intersections des trous  $H_i$ ,  $i > 2$  avec  $LC$  en des points critiques  $\gamma_i$ ,  $i > 2$  donc plusieurs trous  $H_{i+1}$  traverser par  $LC_{-1}$  et plusieurs nouvelles séquences de lacs convergent vers  $Q$  et  $Q^{-1}$  (voir les

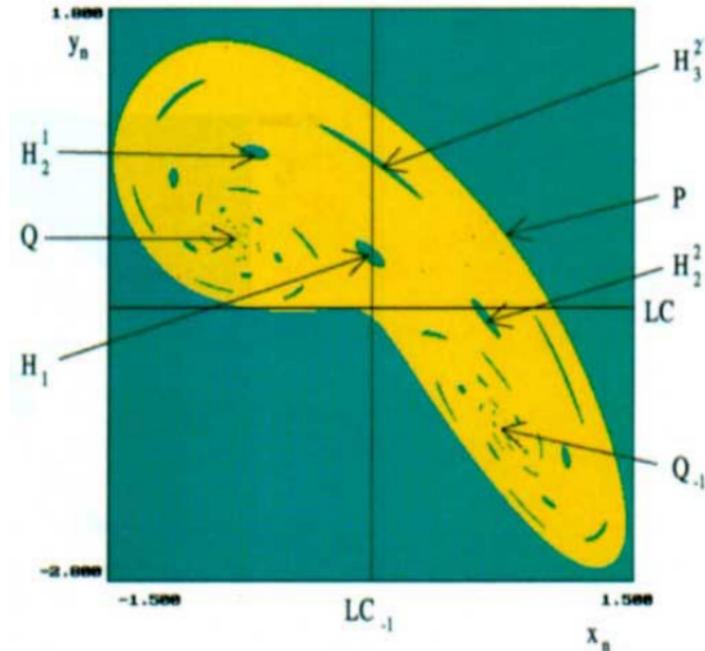


FIG. 2.8 – Le bassin d'attraction pour  $a = 1$  et  $b = -0.597$ . où  $H_2^1 = f_1^{-1}(H_1)$ ,  $H_2^2 = f_2^{-1}(H_1)$ .

figures 2.9 et 2.10), alors d'après la proposition (2.2.3) situation 4 on a une valeur de bifurcation "augmentation du nombre de lacs dans  $\mathcal{D}$ " entre les valeurs  $b = -0.5966$  et  $b = -0.597$ .

Notons de plus qu'en cette valeur de bifurcation l'ensemble stable  $W^s(P)$  est constitué des frontières  $\partial_e \mathcal{D}_0(d)$ ,  $\partial H_i, i \geq 1$  et des préimages du point critique  $\gamma_i \in LC$ . La préimage  $\gamma_{i-1} = f_{1,2}^{-1}(\gamma_i) \in LC_{-1}$  se trouve dans la zone qu'occupait l'attracteur. Il en découle qu'une séquence de préimages  $\gamma_{i-n} = f^{-n}(\gamma_{i-1}), n > 1$ , de  $\gamma_{i-1}$  converge vers le foyer instable  $Q$ , ce qui signifie l'apparition de la  $i$ -ème orbite hétérocline connectant  $Q$  à  $P$ . Cette orbite hétérocline constituée de  $\gamma_{i-1}$ , de ses images  $f^n(\gamma_{i-1}), n > 0$ , convergeant vers  $P$ , et de ses préimages  $\gamma_{i-n}, n > 1$ , convergeant vers  $Q$ . La naissance de cette orbite hétérocline critique est suivie d'une explosion d'orbites hétéroclines pour  $b \approx -0.59873$ , ce qui prouve que le système subit une bifurcation hétérocline .

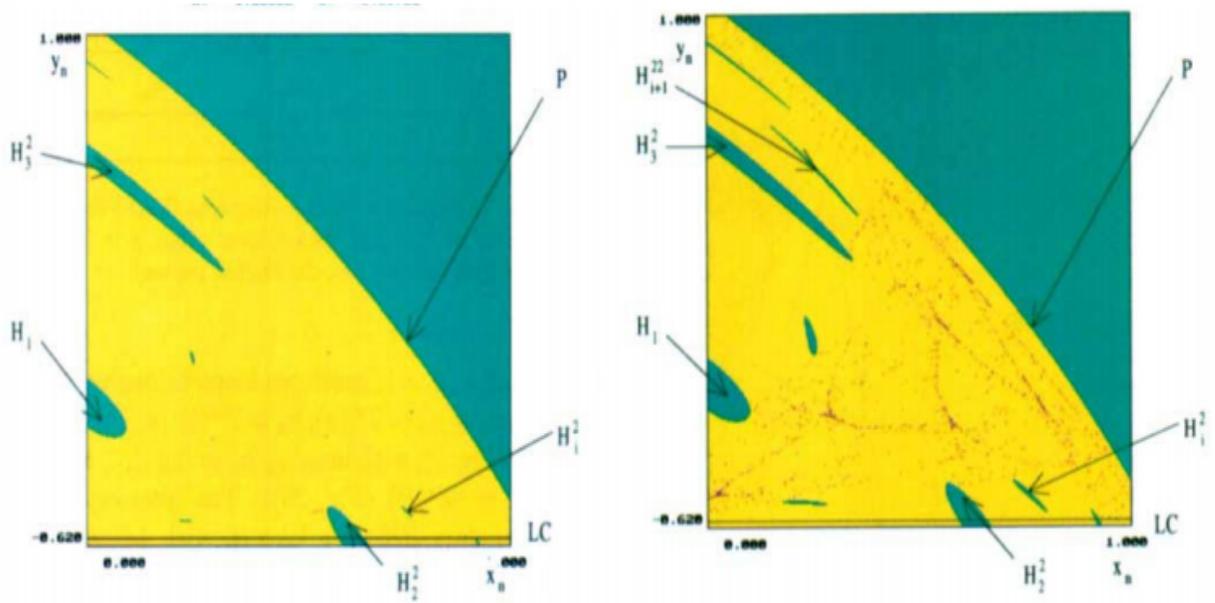


FIG. 2.9 – Partielles du bassin d'attraction pour  $a = 1, b = -0,5975$  et  $b = -0,5979$ .

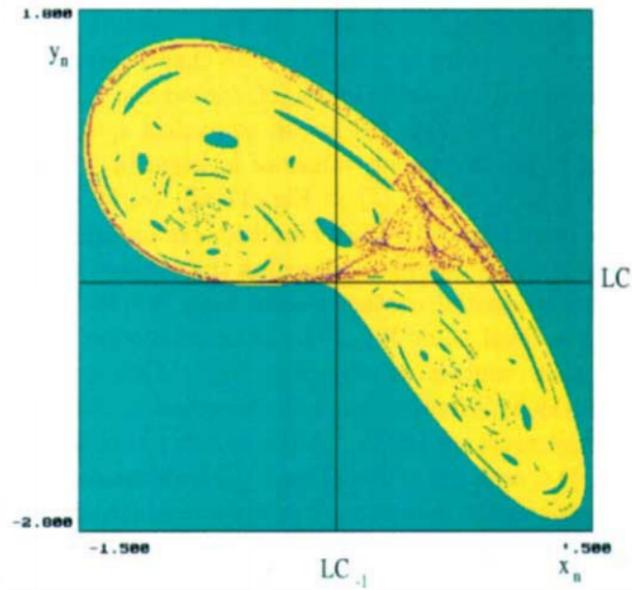


FIG. 2.10 – Le bassin d'attraction pour  $a = 1$  et  $b = -0.598$ .

# Conclusion

L'objectif de ce mémoire est d'étudier les systèmes dynamiques discrets et certaines caractérisation des bifurcations globales , pour atteindre l'objectif de cet étude nous avons divisé notre travail en deux chapitres :

- Le premier chapitre est consacré à la présentation des notions de base sur les systèmes dynamiques discret ( les singularités et leurs stabilité les attracteurs, les ensembles invariants le bassin d'attraction, les courbes homoclines et hétéroclines) et les outils mathématiques nécessaires pour ce travail concernant les systèmes dynamiques discrets.
- Le deuxième chapitre est basé sur la caractérisation des bifurcations globales pour les systèmes dynamiques discrets dépendant de paramètre où nous avons considéré que les bifurcations du bassins d'attractions et les bifurcations homoclines et hétéroclines. Ce chapitre s'accompagnait d'une étude analytique et numérique d'un système dunamique discret bidimensionnel modélisé par une transformation ponctuelle non inversible « *Le modèle de kawakami et Kobayashi* » qui possède une dynamique non linéaire très riche à cause de la variations de ses paramètres.

# Bibliographie

## [Livres]

- [1] Dan-Vu H, Delcarte C. [2000]. Bifurcation et Chaos : Une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. Collection-universités mécanique.
- [2] Kuznetsov.Y.A. [1998]. Elements of Applied Bifurcation Theory, Second Edition. Springer-Verlag New York, Inc.
- [3] Mira C., Gardini L., Barugola A. and Cathala J.C. [1996]. "Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps". World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, vol. 20.

## [Articles]

- [4] Kawakami H, Kobayashi K. [1979] "Computer experiments on chaotic solutions of  $x(t+2) - ax(t+1) - x^2(t) = b$ ", Bull. Fac. of Engin. (Tokushima University), Vol. 16, p 29-46.
- [5] Mira C, Fournier-Prunaret D., Gardini L., Kawakami H. et Cathala J.C. [1994] "Bassin Bifurcations of Two Dimensional Noninvertible Maps : Fractalization of Basins", International Journal of Bifurcations and Chaos, Vol. 4, No. 2 p.343-381.

## [Mém et thès]

- [6] Ferchichi M. [2006]. Etude des Comportements Complexes de Systèmes Modélisés par des Endomorphismes Bidimensionnels. Thèse de Doctorat Université Badji Mokhtar Annaba.
- [7] Millerioux, G. [1997]. Modèles par Transformations Non Inversibles et Application à la Sécurité des Communications. Synchronisation du Chaos”. Thèse de Doctorat de l’insat, Toulouse.
- [8] Yahiaoui Y. [2009]. Sur certains aspects des systèmes dynamiques discrets bidimensionnels, Mémoire de Magister Université A. Mira Béjaia.
- [9] Zaid F. [2021] Sur les Bifurcations Locales. Mémoire de Master Université Mohamed Khider Biskra.

# Annexe A : Caractéristiques des transformations non inversibles bidimensionnelles

La non inversibilité des applications définissant des systèmes dynamiques, est une propriété essentielle pour l'analyse des comportements compliqués ou chaotiques de ces systèmes. Dans l'espace des phases, cette propriété de non inversibilité des applications (endomorphismes) est caractérisée par la présence de singularités appelées respectivement, lignes critiques  $LC_k$  ( dans le cas des applications bidimensionnelles ). Elles interviennent dans l'étude des bifurcations globales d'attracteurs et de leurs bassins d'attraction.

**Lignes critiques** : Les lignes critiques constituent un outil fondamental dans la théorie des systèmes dynamiques non linéaires.

**Définition 2.4.1** Soit  $f$  une application non inversible de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

1. La ligne critique  $LC$  de l'application  $f$ , est le lieu géométrique des points de  $\mathbb{R}^2$ , qui ont au moins deux antécédents de premier rang confondus.
2. La ligne critique  $LC_{-1}$  est un sous ensemble de dimension un (une courbe) de  $\mathbb{R}^2$ , avec par définition

$$f(LC_{-1}) = LC$$

3. La ligne critique  $LC_k$  pour  $k \geq 1$  est l'image de rang  $k$  de  $LC$

$$LC_k = f^k(LC)$$

**Définition 2.4.2** Lorsque l'application  $f$  est différentiable, le lieu  $LC_{-1}$  des antécédents de premier rang confondus est l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^2$  pour lesquels le Jacobien de  $f$  est égale à zéro  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \det(Df(x, y)) = 0$  moins les points qui annulent le Jacobien et pour lesquels  $f$  est localement inversible.

### Classification des TNV :

Les transformations noninversibles sont identifiées par un symbolisme basé sur la configuration des régions  $Z_k$  de l'espace d'état, chaque zone  $Z_k$  correspond à l'ensemble des points du plan de phase qui possèdent  $k$  antécédents de rang un par  $f$ , ceci est due au lignes critiques. Nous proposons les deux classifications suivantes :

- La notion  $(Z_0 - Z_2)$  signifie que le plan de phase est divisé en deux régions ouvertes séparées par une ligne critique  $LC_0$  constituée d'une seule branche. Dans la région  $Z_0$ , chaque point  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  n'a pas d'antécédents et dans la région  $Z_2$  chaque point  $(x_{n+1}, y_{n+1})$  possède deux antécédents de rang un.

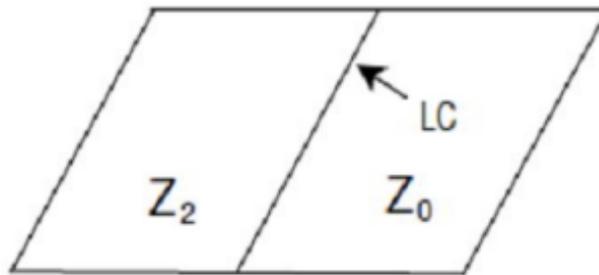


FIG. 2.11 – Plan de phase  $(Z_0 - Z_2)$

- La notation  $Z_1 - Z_3 - Z_1$  signifie que le plan de phase est divisé en trois régions ouvertes séparées par une ligne critique  $LC_0$  constituée de deux branches sans intersection

généralement entre deux lignes droites. Dans la zone  $Z_3$ , chaque point se possède trois antécédents de rang un, encadré par deux zones  $Z_1^1$  et  $Z_1^2$  dont les points ont seulement un antécédent de rang un.

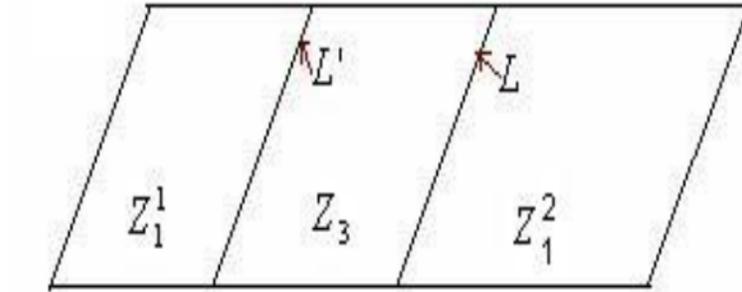


FIG. 2.12 – Plan de phase ( $Z_1 - Z_3 - Z_1$ )

# Annexe B : Abréviations et Notations

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous.

$\mathbb{R}^m$	vecteur des réels de dimension $m$ .
$\mathbb{R}$	ensemble des nombre réels.
$x^*$	point fixe.
$\mathcal{A}$	attracteur.
$S_i$	multiplicateur.
$\mathcal{D}$	bassin d'attraction.
$\mathcal{D}_0$	bassin immédiat.
$\partial\mathcal{D}$	frontière du bassin d'attraction.
$LC_k$	ligne critique d'ordre $k$ .
$p(\lambda)$	polynome caractéristique.
$Df(x, y)$	matrice jacobienne de $f$ au point $(x, y)$ .
$W^s(x^*)$	ensemble stable globale de $x^*$ .
$W^i(x^*)$	ensemble instable globale de $x^*$ .
$ \cdot $	valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.

# Résumé

Dans ce travail, je suis intéressé à l'étude des systèmes dynamiques discrets modélisés par des transformations ponctuelles dépendant de paramètre et leur évolution sous la variation de paramètre. D'abord j'ai donné les notions de base nécessaires pour ce travail, puis j'ai présenté une caractérisation des bifurcations globales. Enfin j'ai établi une étude analytique et numérique sur un exemple illustratif.

Mots clés : Systèmes dynamiques, attracteur, bifurcation globale

## الملخص

في هذا العمل ، اهتمت بدراسة الأنظمة الديناميكية المنقطعة التي تم نمذجتها بواسطة التحويلات النقطية المتعلقة بوسيط و تطورها في ظل تغير الوسيط . أولا قدمت المفاهيم الأساسية اللازمة لهذا العمل ، ثم قدمت وصفا للتشعبات الأعظمية. أخيرا أعددت دراسة تحليلية و عددية على مثال توضيحي .

الكلمات المفتاحية: الأنظمة الديناميكية، الجاذب، التشعب الأعظمي.

## Abstract

In this work, I interested in the study of discrete dynamical systems modeled by punctual transformations dependent on parameter and their evolution under the variation of parameter. First I gave the basic notions necessary for this work, then I presented a characterization of global bifurcations. Finally I established an analytical and numerical study on an illustrative example.

Key words: Dynamical systems, attractor, global bifurcation.