

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la

VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme :

MASTER en Mathématiques

Option : **Analyse**

Par

Guellai Selma

Titre :

SYSTÈMES DYNAMIQUES DISCRETS SANS POINTS FIXES

Membres du Comité d'Examen :

Dr. Rezki Ibrahim	UMKB	Président
Dr. Nadjette Bouziane	UMKB	Encadreur
Dr. Soltani Siham	UMKB	Examinatrice

Juin 2022

Dédicace

Je dédie ce travail

A mon père Guellai Abdel Karim d'être pour moi le meilleur des pères, Que Dieu
le protège et prolonge sa vie.

A ma mère Triche. L qui m'a soutenu et encouragé durant ces années d'études .Qu'
elle trouve ici le témoignage de ma profond reconnaissance.

A mes sœurs, je leur souhaite de réussir dans leur vie et a chacun ma famille.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier ALLAH qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier mon encadrant Dr Nadjette Bouziane, pour l'orientation et les conseils qu'elle m'a prodigués pendant la période du travail. Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Mes remerciements s'étendent également à tous mes enseignants durant les années d'études et à ma famille surtout mon père, ma mère, mes sœurs et mes amis qui par leurs prières et leurs encouragements, j'ai pu surmonter tous les obstacles.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Remerciements	ii
Table des matières	iii
Introduction	1
1 Systèmes dynamiques discrets	4
1.1 Systèmes dynamiques	4
1.1.1 Systèmes dynamiques discrets	5
1.1.2 <i>Système dynamique continu</i>	6
1.2 Systèmes dynamiques discrets linéaires	10
1.3 Points fixes	11
1.3.1 Points périodiques et p-cycles	12
2 Systèmes dynamiques discrets non linéaires	13
2.1 Stabilité des points fixes	13
2.1.1 Stabilité des points fixes pour les systèmes dynamiques discrets non linéaires	14
2.1.2 Méthode de linéarisation	15
2.2 Stabilité des systèmes discrets	16

2.2.1	Stabilité des systèmes discrets linéaires	16
2.2.2	Fonction de Lyapunov	17
2.3	Attracterur	19
2.3.1	Bassin d'attraction	19
2.3.2	Types d'attracteurs	20
2.4	Bifurcations	21
2.4.1	Types de Bifurcations	22
2.5	Systèmes dynamiques chaotiques	24
2.5.1	Quelque définitions du chaos	24
2.5.2	Propriétés des systèmes chaotiques	25
2.5.3	Outils de quantification du chaos	26
3	Attracteurs chaotiques cachés	31
3.1	Introduction général	31
3.2	Classification des attracteurs comme étant cachés ou auto-excités . .	32
3.2.1	Attracteurs auto-excités	32
3.2.2	Attracteurs cachés	33
3.3	Modèle de Hénon	34
3.3.1	Points fixes et analyse de stabilité	34
3.3.2	Attracteurs étranges sans point fixe	38
	Conclusion	42
	Bibliographie	43

Introduction

La théorie des systèmes dynamiques est une branche classique des mathématiques fournit une description qualitative des phénomènes naturelles qui se développent au fil du temps. Le système dynamique discret est née avec les travaux de **Poincaré** autours des années 1881-1890, qui trouve des systèmes dans lesquels le temps évolue par ruptures de séquences régulières.

Ainsi, vers la fin de **XIXe** siècle ce mathématicien, physicien et philosophe français **Henri Poincaré** avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps. **Poincaré** a proposé, au lieu de s'intéresser à une solution particulière du système (donnée par exemple par des conditions initiales ou des conditions aux limites), d'utiliser des arguments topologiques et géométriques pour déterminer les propriétés de l'ensemble de toutes les solutions, considérées comme orbites (ou trajectoires) dans l'espace des états. Certain des études de **Poincaré** ont conduit à la définition du terme "chaos".

Au préalable, rappelons que la théorie du chaos, issue des travaux fondamentaux d'**Edward Lorenz** et prolongée par quelques mathématiciens et physiciens autour des années 1975.

En 1963 le météorologue **Edward Lorenz** expérimentait une méthode lui permettant de prévoir les phénomènes météorologiques. C'est par pur hasard qu'il ob-

serva qu'une modification minime des données initiales pouvait changer de manière considérable ses résultats. **Lorenz** venait de découvrir le phénomène de sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés les systèmes chaotiques par **Tien Li** et **James A Yorke** qui ont présenté pour la première fois le terme chaos, ou plus précisément, le chaos déterministe, et qui est largement utilisé depuis, c'est donc au cours des années soixante dix que la théorie du chaos a pris son essor. Cependant, les travaux de certains scientifiques et plus particulièrement le physicien mathématicien belge **David Ruelle**, le mathématicien hollandais **Floris Takens** menaient bien avant cette découverte, et vont être très utiles à la compréhension de la dynamique chaotique.

La théorie du chaos décrit le comportement de certains systèmes dynamiques déterministes (c'est-à-dire : l'existence d'une condition initiales, l'existence et l'unicité de la solution).

Dans ce mémoire, l'objectif est d'étudier un système dynamique discret sans points fixes, il est organisé comme suit :

Le premier chapitre, nous allons présenter quelques définitions et propriétés des systèmes dynamiques discret (systèmes dynamiques discret et continu, systèmes dynamiques discret linéaires et les points fixes).

Le deuxième chapitre, nous avons étudiés dans ce chapitre quelques problèmes abstraits : des systèmes discrets non linéaires, Ces modèles sont très utilisés principales définitions et notions bifurcation est le types de bifurcations, exposants de Lyapunov, attracteurs. etc

Le troisième chapitre, est consacré à l'étude du la dynamique cachée d'une classe de systèmes à deux dimensions, et une attention particulière est accordée à l'existence de points fixes et persistance dans ces applications. Nous concentrons notre attention

sur trois scénarios typiques qui peuvent générer la dynamique cachée, c'est-à-dire pas de point fixe, un point fixe, deux points fixes.

Chapitre 1

Systemes dynamiques discrets

Nous consacrerons ce premier chapitre de notre travail à l'introduction des éléments fondamentaux associés aux systèmes dynamiques discrets

1.1 Systemes dynamiques

Un système dynamique est un système physique qui évolue. Il peut évoluer dans le temps ou par rapport à une autre variable suivant l'espace de phase considéré.

La trajectoire d'un objet en mouvement dans le temps est donc un système dynamique, ainsi que le nombre d'individu d'une population quelconque dans le temps, encore les valeurs d'une fonction par rapport a une variable x .

Un système dynamique est défini par un triplet (X, Γ, f) constitué de l'espace d'états X (espace topologique) et du domaine temporel Γ et d'une fonction de transition d'état $f : X \times \Gamma \rightarrow X$, qui possède la propriété, pour tout $x \in X$ et $t_1, t_2 \in \Gamma$:

$$\begin{cases} f(x; 0) = x \\ f(f(x; t_1); t_2) = f(x; t_1 + t_2) \end{cases} .$$

On distingue deux grandes catégories, les systèmes dynamiques à temps continu et les systèmes dynamiques à temps discret.

1.1.1 Systèmes dynamiques discrets

Un système dynamique à temps discret est un triplet (X, \mathbb{N}, f) , avec $(X; \mathbb{N})$ un espace mesurable, ce système est définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Où :

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction d'itération et de classe C_1 ; (fonction mesurable).
- $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^n$ est une valeur initiale.
- $x_n \in X$ un vecteur d'états du système.

On définit récursivement :

$$f^{n+1} = f \circ f^n, \tag{I.1}$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$. On écrit aussi $f^0 = Id$, où Id est l'application identité. On not que :

$$f^{m+n} = f^m \circ f^n.$$

Pour $m, n \in \mathbb{N}_0$, où $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Lorsque l'application f est inversible, on définit aussi $f^{-n} = (f^{-1})^n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, l'identité (I.1) est satisfaite pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1.1.1 Soient $f : X \rightarrow X$ et $g : Y \rightarrow Y$ deux systèmes dynamiques. On

défini un nouveau système dynamique $h : X \times Y \rightarrow X \times Y$ par :

$$h(x, y) = (f(x), g(y)),$$

On note que si f et g sont inversibles, alors l'application h est aussi inversible et a pour application réciproque

$$h^{-1}(x, y) = (f^{-1}(x), g^{-1}(y)).$$

1.1.2 Système dynamique continu

Définition 1.1.1 On dit qu'une famille d'applications f_t est un système dynamique à temps continu si elle est un flot ou un semi-flot. Si f_t est un flot alors :

$$f_t \circ f_{-t} = f_{-t} \circ f_t = f_0 = Id.$$

Donc, chaque application f_t est inversible et a pour application réciproque $f_t^{-1} = f_{-t}$.

Définition 1.1.2 (un flot ou semi-flot)

-Une famille d'applications $f_t : X \rightarrow X$ pour $t \geq 0$ telles que $f_0 = Id$ et :

$$f_{t+s} = f_t \circ f_s \text{ pour tous } t, s \geq 0,$$

est appelée un semi-flot.

-Une famille d'applications $f_t : X \rightarrow X$ pour $t \in \mathbb{R}$ telles que $f_0 = Id$ et :

$$f_{t+s} = f_t \circ f_s \text{ pour tous } t, s \in \mathbb{R},$$

est appelée un flot.

Proposition 1.1.1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue telle que, pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (I.2)$$

a un solution unique $x(t, x_0)$ définie par $t \in \mathbb{R}$. Alors la famille des applications $f_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie pour chaque $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f_t(x_0) = x(t, x_0)$$

est un flot.

Démonstration

Pour chaque $s \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$y(t) = x(t + s, x_0).$$

On a $y(0) = x(s, x_0)$ et :

$$y'(t) = x'(t + s, x_0) = f(x(t + s, x_0)) = f(y(t)). \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

Donc la fonction y est aussi une solution de l'équation $x' = f(x)$.

Puisque par hypothèse le problème de Cauchy (I.2) a une solution unique, on obtient :

$$y(t) = x(t, y(0)) = x(t, x(s, x_0)),$$

ou

$$x(t + s, x_0) = x(t, x(s, x_0)), \tag{I.3}$$

pour tous $t, s \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il résulte (I.3) que $f_{t+s} = f_t \circ f_s$.

En outre :

$$f_0(x_0) = f(0, x_0) = x_0.$$

C'est-à-dire $f_0 = Id$. Cela montre que la famille des applications f_t est un flot.

Remarque 1.1.1 *Les équations différentielles (ordinaires) autonomes sont des équations différentielles qui dépendent pas explicitement du temps.*

Exemple 1.1.2 *Considérons l'équation différentielle :*

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases},$$

si $(x, y) = (x(t), y(t))$ est une solution, alors :

$$(x^2 + y^2)' = 2xx' + 2yy' = -2xy + 2yx = 0,$$

il existe une constante $r \geq 0$, telle que :

$$(y(t))^2 + (x(t))^2 = r^2,$$

Soient :

$$\begin{cases} x(t) = r \cos \theta(t) \\ y(t) = r \sin \theta(t) \end{cases},$$

où θ est une fonction différentiable. Il résulte de l'identité $x' = -y$ que :

$$-r\theta'(t) \sin \theta(t) = -r \sin \theta(t),$$

Donc, $\theta'(t) = 1$ et il existe une constante $c \in \mathbb{R}$. telle que $\theta(t) = t + c$. Pour $(x_0, y_0) = (r \cos c, r \sin c) \in \mathbb{R}^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos(t + c) \\ r \sin(t + c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) \cdot r \cos(c) - \sin(t) \cdot r \sin(c) \\ \sin(t) \cdot r \cos(c) + \cos(t) \cdot r \sin(c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos(c) \\ r \sin(c) \end{pmatrix} \\ &= R(t) \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

telle que :

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix},$$

est une matrice de rotation pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Puisque $R(0) = Id$, il résulte de la proposition que la famille des applications $f_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définies par :

$$f_t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

est un flot. On note que l'identité $f_{t+s} = f_t \circ f_s$ est équivalente à l'identité entre matrices de rotation :

$$R(t+s) = R(t)R(s).$$

1.2 Systèmes dynamiques discrets linéaires

Un système dynamique linéaire discret est définie par une équation aux différences suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + b \\ x_0 \text{ donné} \end{cases} ; n \in \mathbb{N},$$

où :

* $a, b \in \mathbb{R}$, sont des constantes.

* $x_n \in \mathbb{R}$, variable d'état.

* $x_0 \in \mathbb{R}$, variable initial.

A partir de la valeur initiale x_0 , on déduit de le système précédent :

— à l'instant $n = 0$: $x_1 = ax_0 + b$.

— à l'instant $n = 1$: $x_2 = ax_1 + b = a(ax_0 + b) + b = a^2x_0 + ab + b$.

— à l'instant $n = 2$: $x_3 = ax_2 + b = a(a^2x_0 + ab + b) + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b$.

En général :

$$\begin{aligned} x_n &= a^n x_0 + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \dots + ab + b \\ &= a^n x_0 + b \sum_{i=0}^{n-1} a^i = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

On a $\sum_{i=0}^{n-1} a^i$ est une somme d'une série géométrique, donc pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = \begin{cases} a^n x_0 + b \frac{1 - a^n}{1 - a} & a \neq 1 \\ x_0 + bn & a = 1 \end{cases}$$

1.3 Points fixes

La notion de points d'équilibre est centrale dans l'étude de la dynamique de tout système physique. Dans de nombreuses applications en biologie, économie, physique, ingénierie, etc., il est souhaitable que tous les états (solutions) d'un système donné tendent à son état d'équilibre (point d'équilibre).

Un point d'équilibre (ou point fixe) est une valeur de la variable d'état x_n qui est invariante selon la loi du mouvement dictée par le système dynamique. En d'autres termes, le point fixe d'un système dynamique $x_{n+1} = f(x_n)$ est $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{x} = f(\bar{x})$ où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

Graphiquement, les points fixes peuvent être trouvés en identifiant les intersections de la fonction $f(x)$ avec la diagonale $y = x$.

Remarque 1.3.1

1. Les points fixes sont appelés aussi points stationnaires.

2. x est un point fixe hyperbolique si la matrice jacobienne $Df(x)$ associé au système $x_{n+1} = f(x_n)$; $n \in \mathbb{N}$, x_0 donné n'a pas de valeurs propres dont le module soit égal à 1
3. Si tous les modules des valeurs propres de $Df(x)$ sont égaux à 1, x est un point fixe elliptique.

1.3.1 Points périodiques et p-cycles

S'il existe $k \geq 1$, tel que $f^k(x) = x$, on dit que x est un point périodique. La période d'un point périodique x est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $f^k(x) = x$.

Un ensemble $\{x_0; x_1; \dots; x_{p-1}\}$ forme un cycle d'ordre p (ou une orbite périodique d'ordre p , ou encore un p -cycle), si :

$$\begin{cases} f(x(i)) = x(i+1), & i = 0; 1; \dots; p-1; \\ f(x(p-1)) = x(0), \end{cases}$$

Autrement dit, chaque point d'un cycle d'ordre p est un point fixe pour f^p où $f^p(x(i)) = x(i)$; pour $i = 0; 1; \dots; p-1$ et n'est pas un point fixe pour f_k si $k < p$.

Chapitre 2

Systèmes dynamiques discrets non linéaires

Un système dynamique discret non linéaire est définie par l'équation aux différences suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k), & k \in \mathbb{N} \\ x_0 \text{ et donné} \end{cases}, \quad (I.4)$$

Où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction non linéaire de classe C^1 et $x_k \in \mathbb{R}$ est la variable d'état, telle que le système discret admettent au moins une solution.

2.1 Stabilité des points fixes

S'il est possible que la trajectoire d'un système corresponde, à partir d'un certain moment, uniquement à un point, un tel point est appelé point d'équilibre. Nous allons voir que les problèmes de stabilité sont naturellement formulés par rapport aux points d'équilibre.

Le vecteur $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est dit point d'équilibre de système dynamique discret si

$\bar{x} = f(\bar{x}, k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 2.1.1 *Considérons le système discret suivant :*

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1(k) + x_2^2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + \beta x_2(k) \end{cases},$$

Un point d'équilibre de cette système discret est un vecteur $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ solution du système :

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha \bar{x}_1 + \bar{x}_2^2 \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2 \end{cases},$$

ce qui donne deux points d'équilibre :

$$\bar{x} = (0, 0) \text{ et } \bar{x} = ((1 - \alpha)(1 - \beta)^2, (1 - \alpha)(1 - \beta)).$$

2.1.1 Stabilité des points fixes pour les systèmes dynamiques discrets non linéaires

Il est difficile de trouver des solutions de non linéaires. Souvent, ces solution a ne fournissent pas suffisamment d'informations sur les facteurs qui contrôlent la stabilité du système. Par conséquent, nous avons a besoin de méthodes analytiques pour faciliter l'étude du comportement de ce système non linéaire. L'approximation linéaire du système non linéaire est l'un des moyens les plus efficaces d'étudier la stabilité des systèmes non linéaires.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction réelle définie une équation discrète et soit $Df(\bar{x})$ sa matrice jacobienne évaluée au point fixe \bar{x} de l'application f , pour simplifier les notions de la stabilité locale du point fixe \bar{x} , on introduit la notion de multiplicateur

et pour caractériser la nature de ce point fixe nous donnons les définitions :

1. Le point fixe \bar{x} de f est dit stable si ses multiplicateurs caractéristiques sont tous de module strictement inférieur à 1.
2. Le point fixe \bar{x} de f est dit instable si l'un des multiplicateur et de module strictement supérieur à 1.
3. Le point fixe \bar{x} de f est dit point selle et au moins un multiplicateur est de module strictement infirmer à 1 et les autres multiplicateur sont tout de module strictement supérieur à 1.

Remarque 2.1.1 *La notion de multiplicateur permet de caractériser la nature de points fixes. le multiplicateur d'un point fixe \bar{x} est :*

$$M = f'(\bar{x}) \text{ où } M = Df(\bar{x})$$

2.1.2 Méthode de linéarisation

Le développement de Taylor d'ordre 1 de $f(x_k) = x_{k+1}$ au voisinage \bar{x} est :

$$x_{k+1} = f(x_k) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_k - \bar{x}) + o(x_k - \bar{x})^2,$$

alors :

$$x_{k+1} = f'(\bar{x})x_k + f(\bar{x}) - f'(\bar{x})\bar{x} = \alpha x_k + b,$$

Où $\alpha = f'(\bar{x})$ et $b = f(\bar{x}) - f'(\bar{x})\bar{x}$.

Donc on obtient une approximation linéaire de (I.4), au voisinage du point fixe par le développement de Taylor d'ordre 1 de la fonction f .

Nous pouvons utiliser les résultats de stabilité du système linéaire pour étudier la stabilité du système non linéaire. Étant donné que le système linéaire n'approche

du comportement du système non linéaire que dans un voisinage suffisamment petit d'un point fixe, l'analyse globale du système linéaire ne donne qu'une analyse locale du système dynamique non linéaire.

La stabilité du système non linéaire à proximité d'un point fixe \bar{x} ne peut être étudiée à partir du système linéarisé si $f'(\bar{x}) = 1$. À savoir, tout changement infinitésimal dans la dérivée au point \bar{x} entraîne un changement dans la nature du système dynamique.

2.2 Stabilité des systèmes discrets

2.2.1 Stabilité des systèmes discrets linéaires

Dans ce paragraphe on s'intéresse à l'étude de la stabilité des systèmes linéaires définis par l'équation :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (I.5)$$

où A est une matrice carrée de dimension $n \times n$.

Le système discret (I.5) est dit stable si l'origine est stable, est dit asymptotiquement stable si l'origine est asymptotiquement stable. Dans ce cas, la matrice du système A est dite stable ou asymptotiquement stable.

Le système (I.5) est stable si et seulement si pour toute valeur propre λ de A , on a $|\lambda| \leq 1$ et la solution s'écrit $x(k) = A^k x_0$.

Le système (I.5) est asymptotiquement stable si et seulement si pour toute valeur propre λ de A on a $|\lambda| < 1$.

2.2.2 Fonction de Lyapunov

On peut étudier la stabilité d'un système à l'aide d'une fonction convenablement choisie, appelée fonction de Lyapunov. Cette méthode, dite directe, est utile pour les systèmes non linéaires et elle a l'avantage d'être applicable dans des situations non standards.

Plus précisément, l'idée de base de cette méthode est de chercher une fonction définie positive, dépendant de l'état du système et qui est décroissante le long des trajectoires du système, quand le système évolue. L'exemple classique dans un système mécanique libre avec frottement est celui de l'énergie qui décroît à moins que le système ne soit au repos et ce fait peut être utilisé pour établir la stabilité du système.

Cas des systèmes discrets

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}, \quad (I.6)$$

et soit \bar{x} un point d'équilibre de ce système, alors on a la définition suivante.

Une fonction V définie sur Ω , une région de l'espace d'état du système discret (I.6) est contenant \bar{x} , est de Lyapunov si elle vérifie les conditions :

1. V est continue sur Ω .
2. V admet un minimum unique au point \bar{x} sur Ω .
3. La fonction $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0$ sur Ω .

1) La condition 3 de la définition est équivalente à dire que le long de la trajectoire du système contenue dans Ω , la fonction V est décroissante. En effet :

*Si à l'instant k , l'état du système est x alors à l'instant $k + 1$, l'état du système est $f(x)$, les valeurs de la fonction de Lyapunov en ces points sont $V(x)$ et $V(f(x))$ et donc la variation est $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$.

*Si V est une fonction de Lyapunov sur Ω , $\Delta V(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$.

2) L'interprétation géométrique permet de conclure que si la fonction de Lyapunov existe, le point d'équilibre doit être stable.

3) La condition 2 de la définition peut être remplacée par $V(\bar{x}) = 0$ et $V(x) \geq 0$ sur Ω . En effet, il suffit de considérer la fonction W définie par $W(x) = V(x) - V(\bar{x})$.

Lemme 2.2.1 *Si il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ associée au système (I.5) dans une boule $B(\bar{x}, R_0)$ alors le point d'équilibre \bar{x} est stable et si, de plus, $\Delta V(x) < 0$ en tout point (excepté \bar{x}), alors est asymptotiquement stable.*

Considérons le système :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{x_2(k)}{1+x_2^2(k)} \\ x_2(k+1) = \frac{x_1(k)}{1+x_2^2(k)} \end{cases},$$

qui admet $(0, 0)$ un point d'équilibre. On définit la fonction :

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,$$

La fonction V est continue et admet $(0, 0)$ comme minimum. De plus :

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) &= \frac{x_2^2(k)}{(1+x_2^2(k))^2} + \frac{x_1^2(k)}{(1+x_2^2(k))^2} \\ &= \frac{V(x(k))}{(1+x_2^2(k))^2} \langle V(x(k)) \end{aligned}$$

D'où V est une fonction de Lyapunov pour ce système et donc ce point d'équilibre est asymptotiquement stable.

2.3 Attracteur

Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire un ensemble vers laquelle évolue un système quelles que soient ses conditions initiales.

Mathématiquement, l'ensemble A est un attracteur si :

- Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0; t) = f'_k(x)$ restera dans U si $x_0 \in V$.
- $\bigcap_{k \geq 0} f_k(V) = A$;
- Il existe une orbite dense dans A .

Soit $(X; \mathbb{N}; f)$ un système dynamique discret. Une partie A de X est appelée attracteur si est seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1. A est fermée.
2. A est positivement invariante.
3. A est attractive, c'est-à-dire, il existe un voisinage U de A tel que U est positivement invariant et :

$$\forall u \in U; \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(u), A) = 0.$$

2.3.1 Bassin d'attraction

Définition 2.3.1 *Le bassin d'attraction d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers l'attracteur considéré, c'est l'ensemble :*

$$W = \bigcup_{t < 0} f_t(V);$$

Définition 2.3.2 *On a A un attracteur, le terme bassin d'attraction de A , est l'en-*

semble de toutes les conditions initiales x_0 , telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n; A) = 0$$

2.3.2 Types d'attracteurs

On distingue deux types d'attracteurs : attracteur régulier et attracteur étrange (chaotique).

Attracteurs réguliers :

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de système non chaotique et peuvent être de trois sortes :

1. L'attracteur "**point fixe**" est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante.
2. L'attracteur "**cycle limite**" est une trajectoire fermée dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.
3. L'attracteur "**tore**" représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodiques".

Attracteurs étrange :

L'attracteur étrange est une forme géométrique complexe qui caractérise l'évolution des systèmes chaotiques, il a été introduit par Ruelle et Takens. Les caractéristiques d'un attracteur étrange sont :

- **L'autosimilarité** : le motif géométrique se répète sur des échelles de plus en plus petites quelle que soit l'échelle à laquelle on regarde cette structure, l'aspect paraît

identique.

- **La sensibilité aux conditions initiales** : deux trajectoires initialement très voisines de l'espace des phases s'écartent l'un de l'autre et divergent de façon exponentielle au cours du temps, mais cette divergence ne peut pas être indéfinie car l'attracteur est de diamètre fini.
- **La dimension fractale** : La dimension d de l'attracteur étrange est non entière. Elle doit être strictement supérieure à la dimension de l'espace des phases.
- **L'étirement et le repliement** : L'attracteur étrange est invariant par l'étirement et le repliement pour plusieurs itérations. Si le système est de dimension 3, l'étirement de l'attracteur par le flot se fait dans une direction, le repliement dans une autre direction, et un comportement périodique selon la troisième direction.

2.4 Bifurcations

Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x_f du système non linéaire suivant :

$$x(k+1) = f(x(k), \mu), \quad x(k) = x_k \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^m,$$

lorsqu'on modifie le paramètre de contrôle μ ; c'est à dire la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

Dans cette section, on va considérer des systèmes à 1 degré de liberté et étudier successivement trois bifurcations majeures :

- ▶ nœud-col (Saddle-node) : 1 point fixe \longleftrightarrow 0 point fixe.
- ▶ fourche (pitchfork) : 1 point fixe \longleftrightarrow 2 points fixes.
- ▶ de Hopf (Hopf) : 1 point fixe \longleftrightarrow 1 cycle limite.

2.4.1 Types de Bifurcations

Bifurcation de nœud-col

Cette bifurcation intervient lorsque les multiplicateurs sont à valeurs réelles, et que l'un d'eux traverse les valeurs $+1$, et donne naissance à deux cycles d'ordre k , stable, et l'autre instable. Ces deux cycles sont confondus à la bifurcation pour une valeur du paramètre μ notée $\mu_{(k)_0}^j$. k représente l'ordre du cycle, j caractérise l'ordre d'échange des points du cycle par f . Cette bifurcation est représentée par le schéma :

$$\Phi \xleftrightarrow{M=1} N_s^k + C^k,$$

Le symbole Φ signifie l'absence de cycles dans le voisinage où apparaît les deux cycles.

N_s^k cycle nœud d'ordre k stable.

C^k cycle col d'ordre k .

Bifurcation de fourche

L'équation qui nous intéresse est la suivante :

$$\dot{x} = \mu x - x^3,$$

les solutions stationnaires sont en ce cas $\bar{x} = 0$ et $x_0 = \pm\sqrt{\mu}$, ces deux dernières n'étant définies que pour $\mu > 0$. Il faut remarquer que cette forme normale est invariante dans la transformation $x \rightarrow (-x)$.

Le point fixe $\bar{x} = 0$ est stable pour $\mu < 0$ et devient instable à $\mu = 0$, quand les branches de nouveaux point fixe $\bar{x} = \pm\sqrt{\mu}$ sont créées. Ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand ils existent.

Bifurcation Flip ou doublement de période

Lorsque le multiplicateur M avec $|M| < 1$ d'un cycle d'ordre k passe par la valeur $M = -1$. Ce cycle devient instable et donne naissance à un cycle d'ordre $2k$. Cette bifurcation intervient pour une valeur du paramètre μ notée μ_k^j .

$$\begin{aligned} N_j^k &\xleftrightarrow{M=-1} N_s^k + N_i^{2k}, \\ N_s^k &\xleftrightarrow{M=-1} N_i^k + N_s^{2k}, \end{aligned}$$

N_s^{2k} signifie cycle d'ordre $2k$ stable.

N_i^{2k} signifie cycle d'ordre $2k$ instable.

Bifurcation de Neimark ou Hopf

Lorsque les cycles d'ordre k sont des foyers avec des multiplicateurs complexes ($M_1 = M_2 = r \exp i\theta$) et r passe par la valeur $+1$, Ces cycles changent de stabilité et donnent naissance à une courbe fermée invariante qui a la même stabilité que les cycles d'origine. On le présente par le schéma :

$$\begin{aligned} F_s^k &\xleftrightarrow{r=1} F_i^k + CFI_s, \\ F_s^k &\xleftrightarrow{r=1} F_s^k + CFI_i, \end{aligned}$$

F_s^k signifie cycle foyer d'ordre K stable.

F_i^k cycle foyer d'ordre K instable.

CFI_s courbe fermée invariante stable.

CFI_i courbe fermée invariante instable.

2.5 Systèmes dynamiques chaotiques

Le phénomène du chaos est un phénomène complexe non linéaire, qui dépend de plusieurs paramètres et qui est caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes chaotiques sont des systèmes dont les trajectoires évoluent dans une région bornée présentant un caractère stable mais sans toute fois converge vers un point fixe ou un cycle limite.

Ces trajectoires qui restent denses dans cette région sont très sensibles aux conditions initiales. Les solutions des équations différentielles non linéaires ne peuvent pas être calculés avec exactitude analytiquement car il n'existe pas de méthode de résolution analytique pour ces équations, sauf pour certaines classes particulières. Elles sont alors déterminées numériquement et le comportement du système analysé par simulation.

Le terme chaos associé à une application itéré a été formellement introduit par Li et Yorke en 1975, où ils ont établi un critère simple pour le chaos dans les équations aux différences unidimensionnelles.

2.5.1 Quelques définitions du chaos

Le chaos est un comportement aperiodique à long terme dans un système déterministe qui présente une dépendance sensible aux conditions initiales.

Définition 2.5.1 (*Chaos dans le sens de Devaney*)

Devaney proposa la définition suivante du chaos : système dynamique est chaotique si et seulement si :

· **il est topologiquement transitif :**

La transitivité signifie simplement que si l'on considère deux voisinages quelconques de deux états distincts d'un système dynamique, il existe une trajectoire qui

passer de l'un à l'autre. ($f : X \rightarrow X$ est topologiquement transitive, s'il existe $x_k \in X$ tel que l'orbite $O = \{f^k(x_k); k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X)

· **il possède un ensemble dense d'orbites périodiques :**

$\{x_0 \in X; \exists k > 0; x_k = x_0\}$ est dense dans X .

· **il présente le phénomène de sensibilité aux conditions initiales :**

Il existe un nombre réel $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in X$ et pour tout $\beta > 0$, il existe un point $y_0 \in X$ et un entier $k > 0$, vérifiant :

$$d(x_0, y_0) < \beta \Rightarrow d(x_k, y_k) > \epsilon$$

Notons que les deux premières hypothèses impliquent la troisième sans que la réciproque soit vraie.

Définition 2.5.2 (*Chaos au sens de Li – Yorke*)

Li-Yorke ont introduit la première définition mathématique du chaos. Ils ont établi un critère très simple "La présence de trois périodes implique le chaos ". Ce critère joue un rôle très important dans l'analyse des systèmes dynamiques chaotiques.

2.5.2 Propriétés des systèmes chaotiques

Les mouvements chaotiques sont plus compliqués que stationnaire périodique ou quasi périodique, et ils ont des formes très complexes appelés attracteurs étranges.

La non-linéarité : Un système chaotique est un système dynamique non linéaire.

Un système linéaire ne peut pas être chaotique. La notion de système dynamique est relative à tous les systèmes dont l'évolution dépend du temps. En général, pour prévoir des phénomènes réels générés par ces systèmes, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un

ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause.

Le déterminisme : Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes.

Sensibilité aux conditions initiales : Certains phénomènes dynamiques non linéaires sont si sensibles aux conditions initiales que, même s'ils sont régis par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes, les prédictions exactes sont impossibles.

L'imprévisible : En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.

L'irrégularité : Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques "ordre dans le désordre" plus simplement

2.5.3 Outils de quantification du chaos

Comme il est difficile de calculer la solution analytique des systèmes chaotiques, des méthodes numériques sont utilisées. Dans ce paragraphe, nous présentons quelques outils qui permettent d'identifier le comportement chaotique d'un système dynamique et ses caractéristiques.

Exposants de Lyapunov

Certains systèmes dynamiques ont grande sensibilité aux variations de leurs conditions initiales que peut présenter un attracteur étrange Alexander Lyapunov (1857-1918) a développé un paramètre qui nous permet de calculer le taux de divergence

entre l'évolution de trajectoires issues de conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange. Ce moyen de contrôle est appelé "Exposant de Lyapunov" qui est une quantité permettant de caractériser le chaos temporel et est défini pour un système dynamique par :

Exposants de Lyapunov pour un système de dimension égale à 1 Soit un système dynamique unidimensionnel suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases},$$

et $f \in C^1(\mathbb{R})$, donc l'exposant de Lyapunov est la limite E (s'il existe) :

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|.$$

Pour $E < 0$:

L'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique stable. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Les points fixes et les points périodiques super-stables ont un exposant de Lyapunov qui tend vers $-\infty$.

Pour $E > 0$:

Le comportement est chaotique (les deux orbites divergentes) c'est-à-dire ; il y a une sensibilité aux conditions initiales.

Pour $E = 0$:

L'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservateur. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.

Exposants de Lyapunov pour un système supérieur à 1 La relation $E = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |f'(x_i)|$ se généralise aux systèmes de dimension $p > 1$, qui possèdent

p exposants de Lyapunov. Chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes de l'espace des phases.

On prend le système dynamique $x_{n+1} = f(x_n)$, $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$, on définit les p exposants de Lyapunov E_i ($i = 1, \dots, p$) de la manière suivante :

$$E_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\lambda_i|.$$

-Si $E_i \leq 0, \forall i \in \{1, \dots, p\}$ avec $\sum_{i=0}^p E_i < 0$, l'attracteur est non chaotique.

-Si $\exists E_i > 0$, avec $\sum_{i=0}^p E_i < 0$, l'attracteur est étrange.

λ_i les valeurs propres de la matrice jacobienne de f^n au point x_0 .

Dimension de Lyapunov Un paramètre permettant de mesurer la dimension de chaos, ou bien d'une autre façon, est un outil pour déterminer la structure géométrique d'un attracteur, cet outil se base sur l'exposant de Lyapunov. Kaplan et Yourk ont suggéré de calculer la dimension d'un attracteur dans l'espace de dimension $d > 1$ en utilisant les exposants de Lyapunov associé de cet attracteur.

Soit A un attracteur représenté dans l'espace multidimensionnelle de dimension d . Classant les exposants de Lyapunov $E_1 \geq E_2 \geq E_3 \geq \dots \geq E_n$, la dimension de Lyapunov D_L est définie par :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j E_i}{E_{j+1}},$$

où j est le plus grand entier qui satisfait $E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_j \geq 0$.

Les exposants de Lyapunov de la transformation du boulanger sont :

$$E_1 = \log 2, \quad E_2 = \log \frac{a}{2},$$

d'où :

$$D_L = 1 + \frac{\log 2}{\log 2 - \log a}.$$

Donc : l'attracteur de boulanger est de structure fractale.

Espace des phases

Notre première approche du chaos nous a fait réaliser la difficulté de trouver des solutions exactes ou même approchées à des équations non linéaires et ceci nous amène à la recherche d'une représentation qui nous permettrait d'accéder plus simplement à des solutions qualitatives. C'est ce que présente l'espace des phases.

Attracteurs étranges

Ils sont spécifiques à l'évolution des systèmes chaotiques, c'est-à-dire que tous les points de l'espace des phases qui découlent du bassin d'attraction de l'attracteur fournissent des trajectoires qui tendent à construire l'attracteur étrange au cours d'un certain temps. De manière importante, un attracteur étrange n'est pas une surface lisse, mais une surface introvertie souvent sur elle-même. Effectivement, les trajectoires des points s'écartent du moment que deux points ne subissent pas la même évolution, mais comme l'attracteur a des dimensions finies, et ainsi l'attracteur doit se replier sur lui-même et ce procès de repliement tend à se renouveler indéfiniment et donne lieu à un nombre infini de plis chevauchés qui ne se rencontrent pas. Par conséquent, deux conditions initialement proches peuvent avoir deux positionnement différents de l'attracteur au-delà d'un certain rang. Cela exprime le caractère divergent des systèmes non-réguliers.

Sensibilité aux conditions initiales (S.C.I)

La sensibilité des trajectoires aux conditions initiales est un autre outil qui sert à quantifier un caractère chaotique. En choisissant deux états initiaux à proximité peu importe, les trajectoires qui en découlent s'écartent bientôt l'une de l'autre. Elles restent cependant attachées au même attracteur dès lors, enfermées dans un espace borné. Il est notamment facile à comprendre que, de plus faible erreur dans la condition initiale, empêche à prévoir quelle sera la trajectoire suivie après un certain temps et, donc, de faire une prédiction d'autre que statistique sur le long terme du système.

Chapitre 3

Attracteurs chaotiques cachées

3.1 Introduction général

Dans la théorie de la bifurcation, une oscillation bornée qui naît sans perte de stabilité de l'ensemble stationnaire est appelée oscillation cachée. Dans la théorie du contrôle non linéaire, la naissance d'une oscillation cachée dans un système de contrôle invariant dans le temps avec des états bornés signifie franchir une frontière, dans le domaine des paramètres, où la stabilité locale des états stationnaires implique une stabilité globale.

Si une oscillation cachée attire toutes les oscillations proches, alors on l'appelle un attracteur caché. Pour un système dynamique avec un point d'équilibre unique globalement attractif, la naissance d'un attracteur caché correspond à un changement qualitatif de comportement de la monostabilité à la bi-stabilité. Dans le cas général, un système dynamique peut se révéler multistable et avoir des attracteurs locaux coexistants dans l'espace des phases. Alors que les attracteurs triviaux, c'est-à-dire les points d'équilibre stables, peuvent être facilement trouvés analytiquement ou numériquement, la recherche d'attracteurs périodiques et chaotiques peut s'avérer être un problème difficile.

3.2 Classification des attracteurs comme étant cachés ou auto-excités

Pour identifier un attracteur local dans une expérience physique ou numérique, il faut choisir un état initial du système dans le bassin d'attraction de l'attracteur et observer comment l'état du système, à partir de cet état initial, après un processus transitoire, visualise l'attracteur. La classification des attracteurs comme étant cachés ou auto-excités reflète les difficultés de révéler les bassins d'attraction et de rechercher les attracteurs locaux dans l'espace des phases.

La classification des attracteurs comme étant cachés ou auto-excités a été introduite par **G.Leonov** et **N. Kuznetsov** dans le cadre de la découverte de l'attracteur caché de Chua pour la première fois en 2009. De même, une oscillation bornée arbitraire, n'ayant pas nécessairement un voisinage ouvert comme bassin d'attraction dans l'espace des phases, est classée comme une oscillation auto-excitée ou cachée.

3.2.1 Attracteurs auto-excités

Pour un attracteur auto-excité, son bassin d'attraction est connecté à un équilibre instable et, par conséquent, les attracteurs auto-excités peuvent être trouvés numériquement par une procédure de calcul standard dans laquelle, après un processus transitoire, une trajectoire, commençant dans un voisinage d'un équilibre instable, est attiré par l'état d'oscillation et le suit ensuite.

Ainsi, les attracteurs auto-excités, même coexistants dans le cas de la multistabilité, peuvent être facilement révélés et visualisés numériquement. Dans le système de Lorenz, pour les paramètres classiques, l'attracteur est auto-excité par rapport à tous les équilibres existants, et peut être visualisé par n'importe quelle trajectoire à partir de leurs voisinages; cependant, pour certaines autres valeurs de paramètres,

il existe deux attracteurs triviaux coexistant avec un attracteur chaotique, qui est auto-excité par rapport à l'équilibre zéro uniquement. Les attracteurs classiques des systèmes dynamiques de Van der Pol , Belousov–Zhabotinsky , Rössler , Chua , Hénon sont auto-excités.

Une conjecture est que la dimension de Lyapunov d'un attracteur auto-excité ne dépasse pas la dimension de Lyapunov de l'un des équilibres instables, dont la variété instable croise le bassin d'attraction et visualise l'attracteur.

3.2.2 Attracteurs cachés

Un attracteur est appelé un attracteur caché si son bassin d'attraction ne croise pas un certain voisinage ouvert de points d'équilibre.

En général, le problème avec les attracteurs cachés est qu'il n'y a pas des méthodes directes générales pour tracer ou prédire de tels états pour les systèmes dynamiques. Alors que pour les systèmes bidimensionnels, les oscillations cachées peuvent être étudiées à l'aide des méthodes analytiques pour l'étude de la stabilité et des oscillations dans des systèmes multidimensionnels non linéaires complexes, des méthodes numériques sont souvent utilisées.

Dans le cas multidimensionnel, l'intégration de trajectoires avec des données initiales aléatoires est peu susceptible de fournir une localisation d'un attracteur caché, car un bassin d'attraction peut être très petit, et la dimension de l'attracteur elle-même peut être bien inférieure à la dimension de l'attracteur considéré. Par conséquent, pour la localisation numérique des attracteurs cachés dans l'espace multidimensionnel, il est nécessaire de développer des procédures de calcul analytiques-numériques spéciales, qui permettent de choisir des données initiales dans le domaine d'attraction de l'oscillation cachée (qui ne contient pas de voisinages d'équilibres),

puis d'effectuer un calcul de trajectoire. Il existe des méthodes efficaces correspondantes basées sur l'homotopie et la continuation numérique : une séquence de systèmes similaires est construite, de sorte que pour le premier système (de départ), les données initiales pour le calcul numérique d'une solution oscillante (oscillation de départ) peuvent être obtenues analytiquement, et puis la transformation de cette oscillation de départ dans le passage d'un système à un autre est suivie numériquement.

3.3 Modèle de Hénon

Modèle de Hénon, est une applications présentées par l'équation aux différences suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = b_1 x_k + b_2 y_k + b_3 x_k^2 + b_4 y_k^2 + b_5 y_k x_k + b_6 \end{cases},$$

où b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 et b_6 sont des coefficients réels.

3.3.1 Points fixes et analyse de stabilité

Pour caculer le point fixe $(x; y)$, on posons $(x; y) = f(x; y)$:

$$\begin{cases} x = y \\ y = b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 y^2 + b_5 y x + b_6 \end{cases},$$

et on va résoudre l'équation suivante par rapport à y :

$$(a_3 + a_4 + a_5) y^2 + (a_1 + a_2 - 1) y + a_6 = 0.$$

Supposons qu'il existe un point fixe $(x; y)$ de modèle de Hénon. Pour étudier la

stabilité de ces points fixes, on utilisons le lemme suivant :

Le point fixe $(x; y)$ de l'application de Hénon est stable si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\det(J) - 1 < 0$.
2. $\text{tr}(J) - \det(J) - 1 < 0$.
3. $\text{tr}(J) + \det(J) + 1 > 0$.

où $\det(J) = -(a_1 + 2a_3x + a_5y)$ est le déterminant de la matrice jacobienne, et $\text{tr}(J) = a_2 + 2a_4y + a_5x$ est la trace de la matrice jacobienne.

La matrice jacobienne de l'application de Hénon est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 + 2a_3x_k + a_5y_k & a_2 + 2a_4y_k + a_5x_k \end{pmatrix},$$

et l'équation caractéristique de la matrice jacobienne peut être calculée comme suit :

$$\det(\lambda I - J) = \lambda^2 - \text{tr}(J)\lambda + \det(J) = 0.$$

Le point fixe s'il existe est stable si les racines $\lambda_1; \lambda_2$ de l'équation caractéristique vérifie que $|\lambda_{1,2}| < 1$.

- * Si $\det(J) = 1$ alors $\lambda_1\lambda_2 = 1$.
- * Si $\text{tr}(J) + \det(J) + 1 = 0$ alors il y a une racine réel $\lambda = -1$.
- * Si $\text{tr}(J) - \det(J) - 1 = 0$ alors il y a une racine réel $\lambda = -1$.
- * Si $a_3 + a_4 + a_5 \neq 0$, $\Delta = (a_1 + a_2 - 1)^2 - 4(a_3 + a_4 + a_5)a_6$ est le discriminant.

1-Pas de point fixe

1. Si $a_3 + a_4 + a_5 = 0$; $a_1 + a_2 - 1 = 0$ et $a_6 \neq 0$, l'équation $(a_3 + a_4 + a_5)y^2 + (a_1 + a_2 - 1)y + a_6 = 0$ n'admet pas de solution, et l'application de Hénon n'admet pas de point fixe. Pour toute existence d'attracteurs, ils doivent être cachés car les bassins d'attraction de ces attracteurs ne contiennent aucun point fixe
2. Si $a_3 + a_4 + a_5 \neq 0$ et $\Delta < 0$, alors l'équation $(a_3 + a_4 + a_5)y^2 + (a_1 + a_2 - 1)y + a_6 = 0$ n'admet pas de solution, et l'application de Hénon n'a pas de point fixe. Alors, s'il existe un attracteur, il doit être caché puisque le bassin d'attraction de cet attracteur ne contient aucun point fixe.

2-Point fixe unique

1. Si $a_3 + a_4 + a_5 = 0$; $a_1 + a_2 - 1 \neq 0$, l'équation $(a_3 + a_4 + a_5)y^2 + (a_1 + a_2 - 1)y + a_6 = 0$ admet une solution unique $y = -\frac{a_6}{a_1 + a_2 - 1}$, et l'application de Hénon admet un point fixe $(\bar{x}; \bar{y})$, ou :

$$\bar{x} = \bar{y} = -\frac{a_6}{a_1 + a_2 - 1}.$$

Ce point fixe est stable si les valeurs propres $\lambda_1; \lambda_2$ de la matrice jacobienne $J_1 = J_{(\bar{x}; \bar{y})}$ se trouvent dans le cercle unitaire, c'est-à-dire $|\lambda_i| < 1$, ou $i = 1; 2$. D'après le lemme précédent, le point fixe $(\bar{x}; \bar{y})$ est stable si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(J_1) - 1 < 0, \\ \operatorname{tr}(J_1) - \det(J_1) - 1 < 0, \\ \operatorname{tr}(J_1) + \det(J_1) + 1 > 0, \end{array} \right.$$

et :

$$\begin{cases} \det(J_1) = - \left(a_1 + \frac{2a_3a_6 + a_5a_6}{a_1 + a_2 - 1} \right), \\ \operatorname{tr}(J_1) = a_2 + \frac{2a_4a_6}{a_1 + a_2 - 1} + \frac{a_5a_6}{a_1 + a_2 - 1} \\ = a_2 + \frac{2a_4a_6 + a_5a_6}{a_1 + a_2 - 1} \end{cases}$$

Supposons qu'il existe d'autres attracteurs à l'exception de ce point fixe car le point fixe $(\bar{x}; \bar{y})$ est stable et les bassins d'attraction ne peuvent contenir aucun point fixe, ces attracteurs de l'application de Hénon sont cachées.

2. Si $a_3 + a_4 + a_5 \neq 0$ et $\Delta = 0$, l'équation $(a_3 + a_4 + a_5)y^2 + (a_1 + a_2 - 1)y + a_6 = 0$ admet deux racines réelles égaux $y_1 = y_2 = -\frac{a_1 + a_2 - 1}{2(a_3 + a_4 + a_5)}$, et l'application de Hénon admet un point fixe $(\bar{x}; \bar{y})$, ou

$$\bar{x} = \bar{y} = -\frac{a_1 + a_2 - 1}{2(a_3 + a_4 + a_5)}.$$

Cependant, la matrice jacobienne à ce point fixe $J_2 = J_{(\bar{x}; \bar{y})}$ satisfait :

$$\operatorname{tr}(J_2) = \det(J_2) + 1,$$

ce qui donne que l'une des valeurs propres de la matrice jacobienne vaut 1.

Ainsi le point fixe $(\bar{x}; \bar{y})$ n'est pas stable.

3-Deux points fixes

1. Si $a_3 + a_4 + a_5 \neq 0$ et $\Delta > 0$, l'équation $(a_3 + a_4 + a_5)y^2 + (a_1 + a_2 - 1)y + a_6 = 0$ admet deux racines réelles distinctes :

$$y_{1;2} = \frac{-(a_1 + a_2 - 1) \pm \sqrt{\Delta}}{2(a_3 + a_4 + a_5)},$$

et l'application de Hénon admet deux points fixes $(\bar{x}_{1;2}; \bar{y}_{1;2})$, ou :

$$\bar{x}_{1;2} = \bar{y}_{1;2} = \frac{-(a_1 + a_2 - 1) \pm \sqrt{\Delta}}{2(a_3 + a_4 + a_5)}.$$

Ces deux points fixes sont stables si les valeurs propres $\lambda_1; \lambda_2$ de les matrices jacobiniennes $J_3 = J_{(\bar{x}_1; \bar{y}_1)}$ et $J_4 = J_{(\bar{x}_2; \bar{y}_2)}$ sont tous se trouvent dans le cercle unitaire, c'est-à-dire. $|\lambda_i| < 1$, où $i = 1; 2$. Ainsi les deux points fixes sont stables si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \det(J_3) - 1 < 0, \\ \operatorname{tr}(J_3) - \det(J_3) - 1 < 0, \\ \operatorname{tr}(J_3) + \det(J_3) + 1 > 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \det(J_4) - 1 < 0, \\ \operatorname{tr}(J_4) - \det(J_4) - 1 < 0, \\ \operatorname{tr}(J_4) + \det(J_4) + 1 > 0, \end{cases}$$

3.3.2 Attracteurs étranges sans point fixe

Neuf exemples typiques pour le cas avec NFI sont présentés dans le tableau 1 dans lequel la valeur initiale $(x_0; y_0)$, les exposants de Lyapunov (*Les*) et le maximum des dimensions locales de Lyapunov ($\dim L$) sont donnés.

On peut vérifier que toutes les cartes listées dans le tableau 1 satisfont $a_3 + a_4 + a_5 = 0$, $a_1 + a_2 - 1 = 0$ et $a_6 \neq 0$ indiquant qu'elles n'ont pas de point fixe.

Ainsi les attracteurs obtenus dans la carte sont cachés. Les exposants de Lyapunov positifs peuvent ne pas conduire au chaos car il existe des exemples connus avec les effets dits Perron d'inversion de signe pour le plus grand exposant de Lyapunov. Cependant, comme la carte considérée (1) appartient à une classe de systèmes discrets autonomes à coefficients réels, les exposants positifs de Lyapunov sont toujours adoptés comme indicateur de chaos.

On peut voir dans le tableau 1 que tous les exposants maximaux de Lyapunov sont positifs, donc les cartes avec les valeurs initiales données sont toutes chaotiques.

Les bassins d'attraction pour les exemples de la carte avec NF I répertoriés dans le tableau 1 sont présentés à la figure 1, où les attracteurs chaotiques, les orbites de période deux et les orbites de période dix sont marqués en points noir, rouge et bleu. points, respectivement, et les bassins des attracteurs non liés, chaotiques, les orbites de période deux et les orbites de période dix sont représentés respectivement en cyan, blanc, jaune et orange. Comme on peut le voir sur la Fig. 1 (a)-(e), il y a un attracteur chaotique pour chaque carte et les bassins des attracteurs chaotiques de la Fig. 1(a)-(d) sont grands. Cependant, le bassin de l'attracteur chaotique de la figure 1 (e) est très petit, de sorte qu'il est difficile de l'obtenir en utilisant la méthode de calcul standard. Sur les figures 1 (f) et (g), un attracteur de période deux et un attracteur chaotique coexistent, et les bassins des attracteurs chaotiques sont très petits. Sur la figure 1 (i), un attracteur de période deux, un attracteur de période dix et un attracteur chaotique coexistent, et le bassin de l'attracteur chaotique est également très petit.

<i>Cas</i>	application	(x_0, y_0)	<i>Les</i>	$\overline{\dim L}$
NFI_a	$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = x_k + 0.2x_k^2 + 0.71y_k^2 \\ \quad \quad \quad -0.91y_kx_k - 1.14 \end{cases}$	(0.93; -0.44)	0.0623 -0.3248	1.1947
NFI_b	$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = x_k + -0.6x_k^2 + 0.74y_k^2 \\ \quad \quad \quad -0.14y_kx_k - 0.33 \end{cases}$	(-0.78; 0.45)	0.0827 -0.2349	1.3572
NFI_c	$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = x_k + 0.51x_k^2 + y_k^2 \\ \quad \quad \quad -1.51y_kx_k - 0.74 \end{cases}$	(-0.81; 0.51)	0.0886 -0.2448	1.3649
NFI_d	$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = x_k + 0.6x_k^2 + y_k^2 \\ \quad \quad \quad -1.6y_kx_k - 0.72 \end{cases}$	(-0.26; 0.18)	0.1012 -0.2067	1.4932
NFI_f	$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = x_k - 0.3y_k^2 + \\ \quad \quad \quad 0.3y_kx_k + 2.98 \end{cases}$	(3.02; -2.78)	0.0430 -0.3523	1.1229
NFI_g	$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = x_k + 0.38y_k^2 \\ \quad \quad \quad -0.38y_kx_k - 1.6 \end{cases}$	(-0.07; 0.71)	0.0535 -0.2455	1.2188
NFI_h	$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = x_k + 0.12y_k^2 \\ \quad \quad \quad -0.12y_kx_k - 3.62 \end{cases}$	(1.03; 2.68)	0.0303 -0.1589	1.1928
NFI_8	$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = x_k + 0.57y_k^2 \\ \quad \quad \quad -0.57y_kx_k + -1.54 \end{cases}$	(-0.6; 0.62)	0.0489 -0.3468	1.1415
NFI_9	$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = x_k - 0.3y_k^2 \\ \quad \quad \quad +0.3y_kx_k + 1.09 \end{cases}$	(1.33; 0.12)	0.0154 -0.1079	1.1430

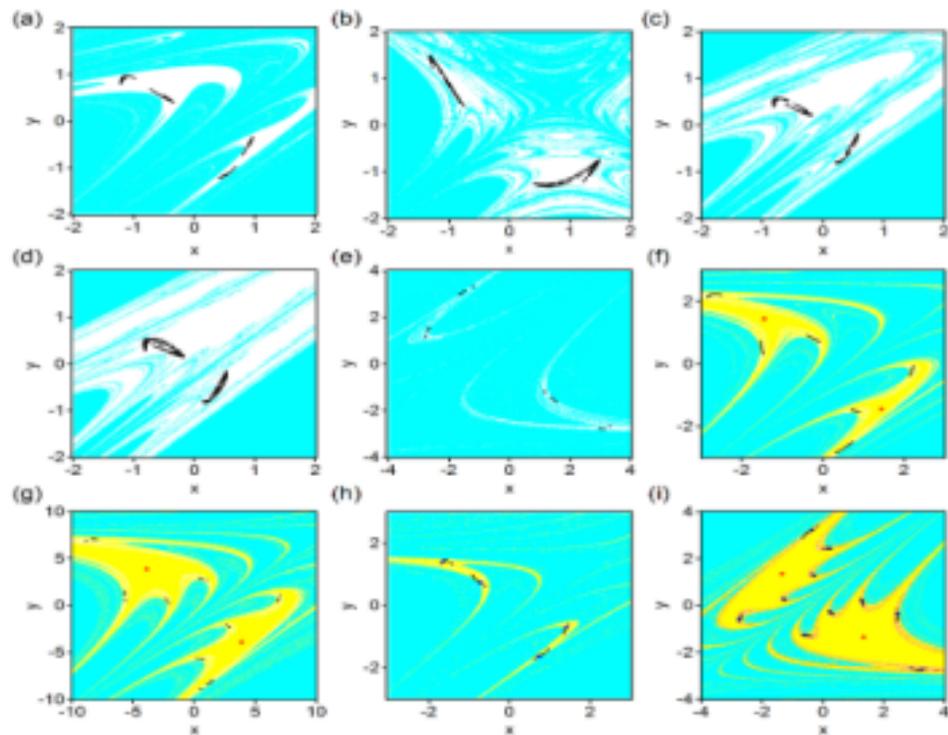


FIG. 3.1 – Basion d’attraction pour les exemples de la carte avec NF I énumérés dans le tableau 1. Les attracteurs chaotiques, les attracteurs deux-période-, et l’attracteur dix-période sont marqués points noirs, rouges et bleus, respectivement. Les bassins de non liés, les attracteurs chaotiques, les tracteres de duxe-période, et les attracteurs de dix-période sont timide incyan, blanc, jaune et orange, respectivement.

Conclusion

L'objectif principale de notre mémoire c'est de présenter le système dynamique et d'étudier de manière approfondie les concepts de base du système, tels que le point fixe et la stabilité, suivi de différents types de bifurcations, ce qui nous permet de détecter un comportement chaotique à travers plusieurs caractéristiques, notamment la sensibilité aux conditions initiales, l'exposant de Lyapunov et les attracteurs singuliers. De plus, nous prêtons attention aux comportements chaotiques dans les systèmes les plus célèbres de la littérature, qui impliquent des perturbations imprévisibles à un ensemble de paramètres, et ont une grande praticité et des citations dans de nombreuses disciplines telles que les applications logistiques, le modèle Hénon.

Bibliographie

- [1] A, Djerrai. (2017). Etude des systèmes dynamiques tridimensionnels. DOCTORAT. Université Badji Mokhtar , Annaba. 2017
- [2] B, Djamila. (2010)Systèmes chaotiques et hyperchaotiques pour la transmission sécurisée de données. MAGISTER. Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen.
- [3] B, Rabah. (2019)Systèmes dynamiques discrets. Cours de master maths. Université Abdelhafid Boussouf , Mila .
- [4] H, HAMICHE. (2011). Inversion à Gauche des systèmes Dynamiques Hybrides Chaotique. DOCTORAT. Université MOULOUD MAMMERI, TIZI_ OUZOU.
- [5] H, Abderrahim. (2011). Analyse et contrôle des systèmes chaotiques. MAGISTER . Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen.
- [6] K, Rabah. (2018)Contribution à la Modélisation et la Commande des Systèmes Chaotiques d'ordre Fractionnaire. DOCTORAT. Université DU 20 Août 1955 Skikda.
- [7] T, Hamaiziz . (2013). Systèmes dynamiques et chaos "Application à l'optimisation a l'aide d'aalgorithme chaotique". DOCTORAT. Université de Constantine -1-.
- [8] O, Rabiaa. (2018). Systèmes dynamiques et chaos : Différentes méthodes de contrôle et de synchronisation. Université frères mentouri , Constantine- 1-.

- [9] L, Barreira, et C, Vals. (2013). Théorie des systèmes dynamiques : Une introduction. France
- [10] E, Zerrik, et A, EL Jai. (2014). Stabilité des systèmes dynamiques. Université de Perpignan. France.
- [11] Jiang, H et Liu, Y et Wei, Z. (2016). Hidden chaotic attractors in a class of two-dimensional maps. Article.