République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : **Analyse**

Par

Ben Ammar Khalida

Titre :

Les opérateurs différentiels

Devant le Jury :

Radjeh Fouzia	MCA	U. Biskra	Président
Houas Amrane	MCA	U. Biskra	Rapporteur
Senousi Assia	MCA	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 28/06/2022

Dédicace

Je dédie ce travail à mes chers parents, qu'ils trouvent

ici le témoignage de ma profonde gratitude pour leur amour,

leur encourage et leur soutien tout au long de mes études, que

ALLAH les bénisse.

A mes chers sœurs

et mes chers frères

A tous mes sympathiques amies.

A tous ceux qui m'aiment.

Je dédie le fruit de mes efforts.

Remerciements

Avant tout, mes purs remerciements, je les exprime

Allah tout puissant

Mes vifs remerciement vont également mon

encadreur *Houas Amrane*

qui ma a guider durant ce travail et qui ses conseils

et remarques, pour réaliser ce mémoire

Mes profonds remerciements siadressent certains de nos

enseignants pour leur gènèrositè et leur grande patience

durant notre cursus, mes chers parents et toutes les

personnes qui míont aidès et soutenue de près ou

de loin la rèalisation de ce travail.

Résumé du mémoire

Le but de ce mémoire est de fournit une étude mathématique bien détaillé sur les opérateurs différentiels (Gradient, Divergence, Laplacien, Rotation,...) qui sont des outils mathématiques nécessaire aux études des phénomènes naturelles issues de la (physique, chimie, mécanique, ...)

Table des matières

Table des figures

Introduction

La plupart des phénomènes naturelles issues de la (physique, chimie, mécanique, biologie, . . .) sont décrits par des équations différentielles qui impliquent des opérateurs différentielles. On rencontre souvent les gradients, rotationnelles, divergences et laplaciens, ce sont des opérateurs de dérivation et nous allons nous attacher dans ce mémoire à étudier leurs significations et à établir une étude mathématique bien détaillé.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définition et résultats pour les fonctions différentiables de plusieurs variables.

En deuxième chapitre, on introduit une étude sur les champs vectoriels, on donnant des définitions et résultats essentiels. Les champs de vecteurs sont souvent utilisés en physique, pour modéliser par exemple la vitesse et la direction d'un fluide en mouvement dans l'espace, ou la valeur et la direction d'une force, comme la force magnétique ou gravitationnelle, qui évoluent points par points.

Dans le dernier chapitre, nous étudions les opérateurs gradients, rotationnelles, divergences et laplaciens, nous donnons leur expression en coordonnées cartésiennes cylindriques et sphériques, leur significations en géométrie, en biologie et en physique, ainsi des exemples pour chaque opérateur.

Chapitre 1

Applications différentiables

1.1 Rappels et définition

Définition 1.1.1 *:(Espaces Vectoriels Normés)*

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, l'application $\|x\|$ de E dans $\mathbb{R}_+$, qui verifie les conditions suivantes :

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E \quad et\ \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$.
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| * \|x\| \quad \forall x \in E\ ,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

est dite norme. Un tel espace E muni d'une norme $\|.\|$ est dit espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2 *(Suite de Cauchy)* *Une suite (x_n) d'éléments d'un espace normé $(E, \|.\|)$ est dite une suite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq n_\varepsilon : \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

Définition 1.1.3 *(Espace complet)*

Un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dit complet si toutes ses suites de Cauchy sont convergentes dans E pour sa norme.

Proposition 1.1.1 *Tout espace normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie est complet.*

Définition 1.1.4 *(Espace de Banach)*

On appelle espace de Banach $(E, \|.\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme $d(x; y) = \|x - y\|$.

Définition 1.1.5 *(Produit scalaire)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $\langle ., . \rangle$ possédant les propriétés suivantes : pour tout x, y, z dans E et α,β dans $\mathbb{R}$.

1. $\langle \alpha x + y, \beta z \rangle = \alpha\beta \langle x + y, z \rangle$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. $\langle x, x \rangle \geqslant 0, \quad \forall x \in E$
4. $\langle x, x \rangle = 0 \quad \textit{implique} \quad x = 0$

Définition 1.1.6 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée*

Définition 1.1.7 *(Base orthonormale) Une famille $\{e_i\}_{i \in I}$ est une base orthonormale d'un espace de Hilbert H si*

1. $\|e_i\| = 1.$

2. *L'espace engendré* $Vect\{e_i\}$ *est dense dans* H.
3. $e_i \perp e_j$ *pour* $i \neq j$.

Définition 1.1.8 *(Opérateur)* *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriel normés. On dit qu'une application* A *défini sur un sous ensemble* $D \subset E$ *dans* F *est un opérateur si* D *est un sous–espace vectoriel de* E.

Définition 1.1.9 *(Opérateurs linéaires)* *Soient* E *et* F *deux espaces normés, un opérateur* A *défini sur* E *dans* F *est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :*

1. *Condition additive* $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E$, *on a* $A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2)$.
2. *Condition homogène* $\forall \varphi \in E, \quad \lambda \in \Bbbk, \qquad A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi)$

Différentielles partielles

Définition 1.1.10 *Soient* $E\,(E_1, \|.\|)\,, ..., (E_2, \|.\|)$ *et* $(E_n, \|.\|)$ *des espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{R}$, $a = (a_1, ..., a_n)$ *un point de* $E = E_1 \times ... \times E_n$, U *un voisinage de* a *et* f *une application de* U *vers* F. *Pour tout* $j \in \{1, ..., n\}$, *soit* f_j *l'application de* E_j *vers* F *définie en posant pour tout* $x_j \in E_j$

$$f_j(x_j) = f(a_1, ..., a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, ..., a_n).$$

Si f_j *est différentiable au point* a *, sa différentielle s'appelle la* $j-$*iéme différentielle partielle de l'application* f *au point* a *et se note* $\partial_j f(a)$ *(ou encore* $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$*).*

1.2 Dérivée et dérivées partielles

Pour une fonction d'une seule variable $f(x)$, la dérivée quand elle est existe, est la fonction définie par

$$f^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La droite tangente à f en x_0 a alors pour équation :

$$y = f^{'}(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$$

Pour une fonction f de plusieurs variables, il existe une dérivée partielle pour chaque variable : il s'agit en chaque point de la dérivée à 1 dimension par rapport à cette variable, les autres variables étant maintenues constantes. On notera pour $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \partial_x f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

et ainsi de suite.

Sens géométrique

La dérivée est égale à la tangente de l'angle entre la tangente à la courbe de la fonction et l'axe de la variable : $\frac{df}{dx} = \tan\varphi$

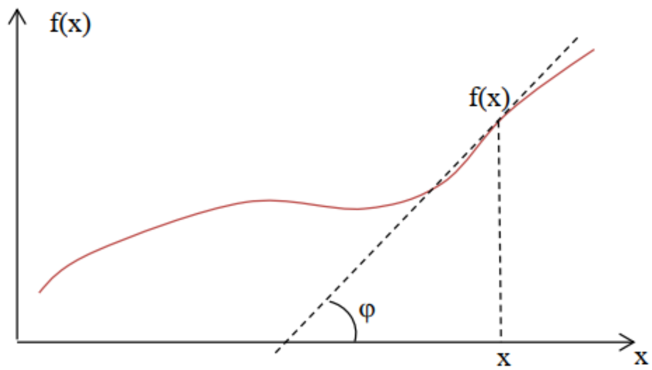

FIGURE 1.1 – Sens géométrique

Sens physique

Si $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ est le vecteur de la position d'un point M dans l'espace, la dérivée par rapport au temps représente la vitesse : $\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$
La dérivée de la vitesse représente l'accélération : $\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$

Remarque 1.2.1 *La dérivée d'ordre N est égale à la dérivée de la dérivée d'ordre $N-1$:*

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)$$
$$\frac{d^3 f}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)$$
$$\ldots$$

Exemple 1.2.1

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^4+y^3\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^4+y^3\right)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(4x^3+3y^2\right)$$
$$= 12x^2$$

Dérivées mixtes

Les dérivées secondes mixtes de plusieurs variables suivent la même règle que dans la section précédente :

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left.\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right|_{x=c^{te}}\right]_{y=c^{te}}$$

Si f est une fonction analytique, l'ordre des dérivations ne change pas le résultat :

$$\frac{\partial}{\partial x \partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y \partial x} f(x,y)$$

1.2.1 Fonction différentiable

La notion de fonction diférentiable est la généralisation aux fonctions de plusieurs variables de la notion de fonction dérivable d'une variable réelle. Bien sûr, on ne peut pas transposer directement la définition utilisant le taux d'accroissement (impossible de diviser par un vecteur !). C'est la caractérisation de la dérivabilité en terme d'éxistence de développement limité d'ordre 1 qui se généralise directement en dimension quelconque. Différentielle de la fonction f, noté df, est définie par :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz$$

Définition 1.2.1 *Soit f une fonction de 2 variables (x, y) définie au voisinage d'un point $M_0 = (x_0, y_0)$. On dit que f est différentiable si f admet une approxi-mation linéaire.*

Théorème 1.2.1 *Si f est une fonction de classe C^1 dans un voisinage de M_0, f est differentiable et son approximation linéaire est donnée par*

$$f(M_0) + D_1(f)(M_0)(x - x_0) + D_2(f)(M_0)(y - y_0)$$

Autrement dit :

$$f(x, y) = \frac{df}{dx}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{df}{dy}(x_0, y_0)(y - y_0) + \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\varepsilon(x, y)$$

où ε est une fonction de (x, y) définie au voisinage de (x_0, y_0) telle que $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lim} \varepsilon(x, y) = 0$.

$$f(x, y) = \frac{df}{dx}(x_0, y_0)(x-x_0)+\frac{df}{dy}(x_0, y_0)(y-y_0)+(x-x_0)\varepsilon_1(x, y)+(y-y_0)\varepsilon_2(x, y)$$

où ε_1 et ε_2 sont des fonctions de (x, y) définies au voisinage de (x_0, y_0) telle que $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lim} \varepsilon_1(x, y) = 0$, $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lim} \varepsilon_2(x, y) = 0$ Avec des notations différentes que l'on utilisera par la suite,

$$f(x, y) = D_1(f)(x_0, y_0)(x-x_0)+D_2(f)(x_0, y_0)(y-y_0)+\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\varepsilon(x, y)$$

où ε est une fonction de (x, y) définie au voisinage de (x_0, y_0) telle que $\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{lim} \varepsilon(x, y) = 0$

$$f(M) = grad(f)(M_0) \cdot \overrightarrow{M_0M} + \|M_0M\|\, \varepsilon(M)$$

où ε est une fonction de M définie au voisinage de M_0 telle que $\underset{M \to M_0}{lim} \varepsilon(M) = 0$.

1.2.2 Matrice jacobienne

On revient au cas général où f peut être à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ pour n'importe quel $p \in \mathbb{N}^*$. On introduit maintenant la matrice jacobienne d'une application différentiable. Il n'y a pas de concept nouveau, on donne simplement un nom à la matrice de la différentielle :
f est différentiable en a, alors on appelle matrice jacobienne de f en a et on note $Jac_a f$ la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$:

$$Jac_a f = Jacf(a) = \left(\frac{\partial fi}{\partial xj}\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

Exemple 1.2.2 *Désignons par f l'application de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ définie en posant pour tout $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$, par$f(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Les applications f_1 et f_1 sont ici définies pour tout $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$, par*

$$f_1(\rho, \theta) = \rho \cos \theta \quad \text{et} \quad f_2(\rho, \theta) = \rho \sin \theta.$$

La matrice jacobienne de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ en un point (ρ, θ) est

$$J_f(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

Son jacobien au point (ρ, θ) est

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(\rho, \theta)}(\rho, \theta) = \rho.$$

- *Dans le cas particulier où p=1 , si la fonction*

$$f : (x_1, ..., x_n) \to f(x_1, ..., x_n)$$

de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ est différentiable en a, sa matrice jacobienne au point a est la matrice ligne

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \;\; \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \;\; ... \; ... \; ... \; \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right),$$

et sa différentielle est l'application linéaire

$$(h_1, ..., h_n) \to \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

- *Soient*

$$f : (x_1, ..., x_n) \to (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_p(x_1, ..., x_n))$$

une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ et

$$g : (y_1, ..., y_p) \to (g_1(y_1, ..., y_p), ..., g_q(y_1, ..., y_p))$$

une application d'un ouvert V de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$ tel que $f(U) \subset V$. Si l'application f est différentiable en un point $a = (a_1, ..., a_n)$ de U et si l'application g est différentiable au point $b = (b_1, ..., b_n)$=$f(a)$ de V, nous savons que $g \circ f$ est différentiable en a et que

$$d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a).$$

Matriciellement, cette égalité entre application linéaires se traduit par l'égalité entre matrices jacobiennes :

$$J_{g\circ f}\left(a\right)=J_{g}\left(b\right)\cdot J_{f}\left(a\right).$$

On obtient donc les n égalités entre dérivées partielles :

$$\frac{\partial\left(g\circ f\right)_{k}}{\partial x_{i}}\left(a\right)=\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial g_{k}}{\partial y_{j}}\left(b\right)\frac{\partial f_{j}}{\partial x_{i}}\left(a\right) \tag{1.1}$$

Exemple 1.2.3 *Soit $f=(f_1,f_2)$ l'application différentiable de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$, définie par*

$$f_{1}\left(x_{1},x_{2}\right)=x_{1}^{2}-x_{2}^{2}\quad \textit{et}\quad f_{2}\left(x_{1},x_{2}\right)=2x_{1}x_{2}\ .$$

et g l'application différentiable de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, définie par

$$g\left(y_{1},y_{2}\right)=\arctan\frac{y_{2}}{y_{1}}.$$

On déduit de (1.1),

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(g\circ f\right)}{\partial x_{1}}\left(x_{1},x_{2}\right)&=\frac{\partial g}{\partial y_{1}}\left(x_{1}^{2}-x_{2}^{2},2x_{1}x_{2}\right)\cdot\frac{\partial f_{1}}{\partial x_{1}}\left(x_{1},x_{2}\right)+\frac{\partial g}{\partial y_{2}}\left(x_{1}^{2}-x_{2}^{2},2x_{1}x_{2}\right)\cdot\frac{\partial f_{2}}{\partial x_{1}}\left(x_{1},x_{2}\right)\\&=\frac{-2x_{1}x_{2}}{\left(x_{1}^{2}+x_{2}^{2}\right)^{2}}\cdot\left(2x_{1}\right)+\frac{x_{1}^{2}-x_{2}^{2}}{\left(x_{1}^{2}+x_{2}^{2}\right)^{2}}\cdot 2x_{2}\\&=\frac{-2x_{2}}{x_{1}^{2}+x_{2}^{2}};\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{\partial g}{\partial y_1}\left(x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2\right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \frac{\partial g}{\partial y_2}\left(x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2\right) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\
&= \frac{-2x_1x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} \cdot (-2x_2) + \frac{x_1^2 - x_2^2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} \cdot 2x_1 \\
&= \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2}.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Champ de vecteurs

On appelle champ de vecteur toute application f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, à tout point de U, on associe un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Ex : Le vent ! En tout point de la surface de la terre, on associe un vecteur qui représente la force, la direction et le sens du vent. On définit ainsi un champ de vecteurs.

En mathématiques, un champ de vecteurs ou champ vectoriel est une fonction qui associe un vecteur à chaque point d'un espace euclidien ou plus généralement d'une variété différentielle.

Les champs de vecteurs sont souvent utilisés en physique, pour modéliser par exemple la vitesse et la direction d'un fluide en mouvement dans l'espace, ou la valeur et la direction d'une force, comme la force magnétique ou gravitationnelle, qui évoluent points par points.

2.1 Vecteurs

Un vecteur est représenté graphiquement par une flèche dont la longueur est proportionnelle à sa grandeur. La flèche pointe dans le même sens que le vecteur. Dans les chapitres qui suivent, on représente un vecteur par une lettre ayant une flèche par dessus : $\overrightarrow{v}$. Un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ est un vecteur ayant un module de 1. Par définition, un vecteur $\overrightarrow{A} = |A|\overrightarrow{u}$ où $|A|$ veut dire module (amplitude) du vecteur $\overrightarrow{A}$. Donc, le vecteur unitaire est défini selon :

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{A}}{|A|} \tag{2.1}$$

2.1.1 Somme de vecteurs

La somme de deux vecteurs est un autre vecteur. Graphiquement, on peut réaliser cette opération par la règle du parallélogramme, comme à la figure (2.1).

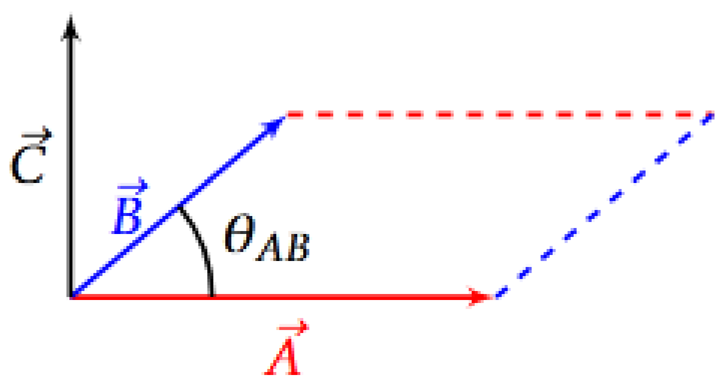

FIGURE 2.1 – Somme de deux vecteurs

2.1.2 Soustraction de vecteurs

La soustraction de deux vecteurs produit elle aussi un $3éme$ vecteur. Dans ce cas-ci, on considère la soustraction comme la somme du premier vecteur avec le deuxième vecteur multiplié par -1.

$$\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{B}) \tag{2.2}$$

Graphiquement, $-\overrightarrow{B}$ est obtenu en faisant une rotation de 180° de $\overrightarrow{B}$.

2.1.3 Multiplication par un scalaire

Un vecteur qui est multiplié par un scalaire change d'amplitude, mais pas de direction :

$$k\overrightarrow{A} = (k|A|)\overrightarrow{u} \tag{2.3}$$

2.2 Produit scalaire

Le produit scalaire de 2 vecteurs ($\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2$) donne un scalaire, qui mesure la projection d'un vecteur sur l'autre. En cartésien, $(\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Du point de vue géométrique, $|\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2| = \|\overrightarrow{v}_1\| \, \|\overrightarrow{v}_2\| \, cos(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ et en particulier $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$. Le produit scalaire de 2 vecteurs orthogonaux est nul.

2.3 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de 2 vecteurs $\overrightarrow{v}_1 \wedge \overrightarrow{v}_2$ ou $\overrightarrow{v}_1 \times \overrightarrow{v}_2$ est lui aussi un vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que

1. $\overrightarrow{w}$ orthogonal à $\overrightarrow{v}_1$ et à $\overrightarrow{v}_2$.
2. $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{w})$ est orienté dans le sens direct.
3. $\|\overrightarrow{w}\| =.\|\overrightarrow{v}_1\| \, \|\overrightarrow{v}_2\| \sin(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$

La dernière propriété implique que $\overrightarrow{v}_1 \wedge \overrightarrow{v}_2 = -\overrightarrow{v}_1 \wedge \overrightarrow{v}_2$. Il existe plusieurs méthodes pour le calcul des composantes en coordonnées cartésiennes, qu'on peut retrouver en utilisant que si le repère $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est direct, alors $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$, et $\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$.

2.4 Champs de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

Définition 2.4.1 *Un champ de vecteurs ou champ vectoriel de $\mathbb{R}^3$ est un champ*

$$\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \ \overrightarrow{X} \longmapsto \overrightarrow{V}\left(\overrightarrow{X}\right)$$

à valeur dans les vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

• La position $\overrightarrow{X}$ des points, une force $\overrightarrow{F}$, les champs gravitationnel $\overrightarrow{G}$, électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$, ou encore le potentiel magnétique $\overrightarrow{A}$, sont des champs vectoriels.

• La vitesse d'écoulement des points d'un fluide est un champ de vecteurs. La vitesse de déplacement d'un corps ponctuel est un champ vectoriel, défini sur la trajectoire du corps.

• La vitesse de déplacement d'un objet étendu qu'on ne peut pas identifier à son baricentre n'est pas un champ vectoriel, car elle n'est pas définie sur des points.

2.4.1 Exemple de champs vectoriels

• Le champ gravitationnel engendré par une masse M est le champ central

$$\overrightarrow{G}(r) = -\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{e}_r$$

Une masse m situé à distance r de M est soumise à la force gravitationnelle

$$\overrightarrow{F}(r) = m\overrightarrow{G}(r) = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{e}_r.$$

• Le champ électrique engendré par une charge Q est le champ central

$$\overrightarrow{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\overrightarrow{e}_r$$

Une charge q situé à distance r de Q est soumise à la force de Coulomb

$$\overrightarrow{F}(r) = q\overrightarrow{E}(r) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon r^2}\overrightarrow{e}_r.$$

Composantes cartesiennes d'un champ de vecteurs

Définition 2.4.2 *Soit* $\overrightarrow{X} \longmapsto \overrightarrow{V}\left(\overrightarrow{X}\right)$ *un champ de vecteurs de* $\mathbb{R}^3$. • *Si* $\overrightarrow{X} = (x, y, z)$ *est donné en coordonnées cartesiennes, on a*

$$\overrightarrow{V}\left(\overrightarrow{X}\right) = V_x\left(\overrightarrow{X}\right)\overrightarrow{i} + V_y\left(\overrightarrow{X}\right)\overrightarrow{j} + V_z\left(\overrightarrow{X}\right)\overrightarrow{k},$$

où $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ *est le repère cartesien de* $\mathbb{R}^3$ *centré au point* $\overrightarrow{X} = (x, y, z)$, *et* V_x , V_y , $V_z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *sont des fonctions réelles qui s'appellent coefficients ou* *composantes de* $\overrightarrow{V}$. • *Le domaine de* $\overrightarrow{V}$ *est l'ensemble*

$$D_{\overrightarrow{V}} = \left\{ \overrightarrow{X} \in \mathbb{R}^3 \ / \ \ \overrightarrow{X} \in D_{V_x}, \ \overrightarrow{X} \in D_{V_y}, \ \overrightarrow{X} \in D_{V_z} \right\}.$$

• *Le champ est de classe* C^k *si ses coefficients le sont.* • *Le dessin de* $\overrightarrow{V}$ *consiste des vecteurs* $\overrightarrow{V}\left(\overrightarrow{X}\right)$ *appliqués aux points* $\overrightarrow{X}$:

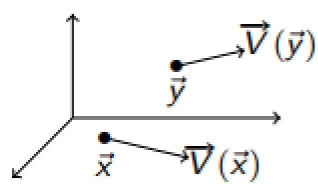

Figure 2.2 – Composantes d'un vecteur

2.4.2 Repères mobiles

Définition 2.4.3 *Un repère mobile est un repère centré en tout point P variable, et qui dépend de la représentation en coordonnées de P : les vecteurs indiquent la direction de variation des coordonnées de P.*

En particulier : repère cartesien : $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ repère cylindrique : $\left(\overrightarrow{e}_\rho, \overrightarrow{e}_\varphi, \overrightarrow{k}\right)$
repère sphérique : $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\varphi, \overrightarrow{e}_\theta)$

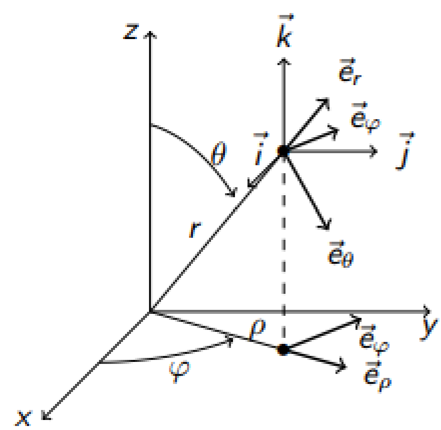

Figure 2.3 – Repère sphérique

Attention : Les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ ne changent pas de direction quand P bouge, mais les autres vecteurs si !

2.5 Transformation des repères cartésiens cylindriques et sphériques

Relation de passage entre les systèmes de coordonnées

Proposition 2.5.1 *Les transformation H entre les repère cartesien, cylindrique et sphérique, sont les suivantes :*

Conversion entre systèmes cartésien et cylindriquee Si $(x, y, z) = h(\rho, \varphi, z)$,

avec

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Inversement, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{e}_\rho = \cos \varphi \overrightarrow{i} + \sin \varphi \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{e}_\varphi = -\sin \varphi \overrightarrow{i} + \cos \varphi \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \overrightarrow{i} = \cos \varphi \overrightarrow{e}_\rho - \sin \varphi \overrightarrow{e}_\varphi \\ \overrightarrow{j} = \sin \varphi \overrightarrow{e}_\rho + \cos \varphi \overrightarrow{e}_\varphi \\ \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \end{cases}$$

Preuve - La première formule vient de la définition des vecteurs $\overrightarrow{e}_\rho$, $\overrightarrow{e}_\varphi$, et la deuxième formule s'obtient en inversant le système donné par la première.

Conversion entre systèmes cartésien et sphérique Si $(x, y, z) = h(r, \varphi, \theta)$,

avec

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Inversement, on a les relations suivantes : $\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) \\ \theta = \begin{cases} arc\cos\left(\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}\right) & si \quad y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}\right) & si \quad y \prec 0 \end{cases} \end{cases}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{e}_r = \cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{j} + \cos\theta\,\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\overrightarrow{i} + \cos\varphi\,\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{e}_\theta = \cos\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{j} - \sin\theta\,\overrightarrow{k} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \overrightarrow{i} = \cos\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{e}_r - \sin\varphi\,\overrightarrow{e}_\varphi + \cos\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{e}_\theta \\ \overrightarrow{j} = \sin\varphi\sin\theta\,\overrightarrow{e}_r + \cos\varphi\,\overrightarrow{e}_\varphi + \sin\varphi\cos\theta\,\overrightarrow{e}_\theta \\ \overrightarrow{k} = \cos\theta\,\overrightarrow{e}_r - \sin\theta\,\overrightarrow{e}_\theta \end{cases}$$

Preuve - La première formule vient de la définition des vecteurs $\overrightarrow{e}_r$, $\overrightarrow{e}_\varphi$, $\overrightarrow{e}_\theta$ et la deuxième formule s'obtient en inversant le système donné par la première.

2.5.1 Champ vectoriel en coordonnées

Conclusion Un champ vectoriel $\overrightarrow{V}\left(\overrightarrow{X}\right)$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit dans le repère mobile de sa variable $\overrightarrow{X}$: • en coordonnées cartesiennes (x, y, z) :

$$\overrightarrow{V} = V_x\overrightarrow{i} + V_y\overrightarrow{j} + V_z\overrightarrow{k},$$

• en coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) :

$$\overrightarrow{V} = V_\rho\overrightarrow{e}_\rho + V_\varphi\overrightarrow{e}_\varphi + V_\rho\overrightarrow{k},$$

• en coordonnées sphériques (r, φ, θ) :

$$\overrightarrow{V} = V_r \overrightarrow{e}_r + V_\varphi \overrightarrow{e}_\varphi + V_\theta \overrightarrow{e}_\theta,$$

où les coefficients V_x, etc, sont des fonctions $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

La transformation d'une forme à une autre est donnée par le changement de coordonnées usuel sur les coefficients, et par le changement de repère d´ecrit ci-dessus sur les vecteurs.

2.5.2 Circulation d'un champ vectoriel

On définit la circulation d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ le long d'un contour (C), par l'intégrale curviligne :

$$C_{\overrightarrow{AB}}\left(\overrightarrow{v}\right) = \int \overrightarrow{v} \cdot d\,\overrightarrow{l}$$

La circulation de long d'un contour fermé est notée :

$$C\left(\overrightarrow{v}\right) = \oint \overrightarrow{v} \cdot d\,\overrightarrow{l}$$

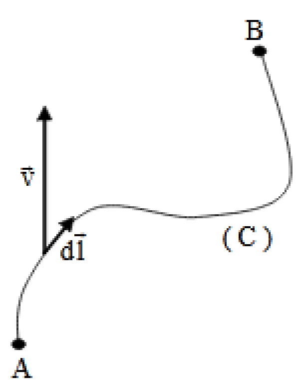

FIGURE 2.4 – Circulation dun vecteur

2.5.3 Flux d'un champ vectoriel

On définit le flux d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ à travers une surface (S) par l'intégrale double :

$$\phi_{/(S)}\left(\overrightarrow{v}\right) = \iint_{(S)} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

Lorsque la surface (S) est fermée, le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ est dirigé de l'intérieur

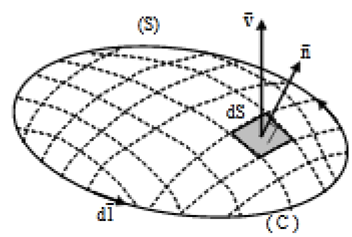

FIGURE 2.5 – Flux d'un champ vectoriel

vers l'extérieur.

Chapitre 3

Gradient, Rotationnel, Divergence, Laplacien

Le gradient, la divergence et le rotationnel sont les trois principaux opérateurs différentiels linéaires du premier ordre. Cela signifie qu'ils ne font intervenir que des dérivées partielles (ou différentielles) premières des champs, à la différence, par exemple, du Laplacien qui fait intervenir des dérivées partielles du second ordre. On les rencontre en particulier en : Mécanique des fluides (équations de Navier-Stokes), Électromagnétisme, où ils permettent d'exprimer les propriétés du champ électromagnétique. La formulation moderne des équations de Maxwell utilise ces opérateurs. Ainsi que dans toute la physique mathématique (propagation, diffusion, résistance des matériaux, ...).

3.1 Opérateur formel nabla

L'opérateur nabla ∇ tire son nom d'une lyre antique qui avait la même forme de triangle pointant vers le bas. Il s'agit d'un opérateur formel de $\mathbb{R}^3$ défini en coordonnées cartésiennes par

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

On écrit aussi $\vec{\nabla}$ pour souligner que formellement, l'opérateur nabla a les caractéristiques d'un vecteur. Il ne contient certes pas de valeurs scalaires, mais on va utiliser ses éléments constitutifs (que l'on peut voir comme des opérations en attente d'argument des opérateurs différentiels) très exactement comme on aurait utilisé les valeurs scalaires composant un vecteur. La notation nabla fournit un moyen commode pour exprimer les opérateurs vectoriels en coordonnées cartésiennes ; dans d'autres systèmes de coordonnées, elle est encore utilisable au prix de précautions supplémentaires ; pour plus de précisions, et des interprétations plus théoriques (en particulier la relation avec la dérivée covariante).

3.2 Opérateur différentiel gradient

Le gradient est un opérateur linéaire qui s'applique à un champ de scalaires et décrit un champ de vecteurs qui représente la variation de la valeur du champ scalaire dans l'espace . Pratiquement, le gradient indique la direction de la plus grande variation du champ scalaire, et l'intensité de cette variation. Par exemple, le gradient de l'altitude est dirigé selon la ligne de plus grande pente et sa norme augmente avec la pente. En dimension 3 et coordonnées cartésiennes, le champ de gradients vérifie (en base orthonormale)

$$\overrightarrow{grad} f = \vec{\vec{\nabla}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Cette relation peut servir, dans le cas particulier où elle s'applique, de définition du gradient. Elle se généralise naturellement en dimension quelconque en ajoutant des composantes au nabla.

(couleur, valeurs élevées en rouge) et de leur Exemple de champs scalaires gradient (flèches). À gauche : $f(x, y) = xy$, à droite $f(x, y) = x^2 + y^2$.

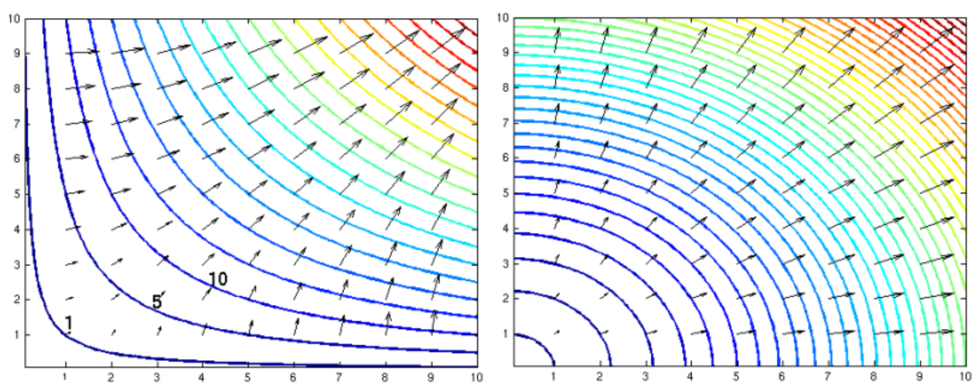

FIGURE 3.1 – champs scalaires et gradient

Le gradient en mathématiques Pour les mathématiciens, le terme de gradient désigne un vecteur représentant la variation d'une fonction par rapport à la variation de ses diférents paramètres. Ainsi le gradient d'une fonction f en un point M est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles de f calculées au point M.

Le gradient en biologie En biologie, le gradient désigne une variation de la concentration d'une substance ou d'une propriété physiologique. Il est souvent question de gradient de concentration de part et d'autre d'une membrane. Pour se déplacer dans le sens du gradient, c'est-à-dire de l'endroit où la concentration est la plus élevée vers l'endroit où elle est la plus faible, les molécules n'ont pas besoin d'un apport d'énergie.

Le gradient en physique En physique, on parle, par exemple, de gradient de vitesse lorsque deux couches adjacentes d'un fluide s'écoulent à des vitesses diférentes. Le gradient de température résulte de phénomènes thermodynamiques. La température d'un objet peut ne pas être la même en dif érents points de sa surface, lorsque celui-ci est relié, d'une part, à un autre objet chaud et, d'autre part, à un objet froid. Si une force peut dériver d'un gradient, elle est conservative : "Conservative" = l'énergie est préservée lors d'un déplacement sur un contour fermé

$d\overrightarrow{W} = \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r}$ travail mécanique élémentaire $W_c = \oint_c \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r}$ travail total le long de C (cette intégrale représente la circulation de F le long de C).

Si $\exists\ f : \overrightarrow{F} = gradf$ (si il existe une fonction scalaire f telle que le vecteur F dérive du gradient de f) alors

$$W = \oint_c gradf d\overrightarrow{r} = \oint_c df = f|_M^M = f(M) - f(M) = 0$$

Exemple 3.2.1 *Force gravitationnelle (elle doit être conservative) :*

$$\overrightarrow{F}_G = -g\frac{m}{r^2}\overrightarrow{e}_r \tag{3.1}$$

Potentiel G :

$$gradG = \overrightarrow{F}_G = -g\frac{m}{r^2}\overrightarrow{e}_r \tag{3.2}$$

Gradient dans un système de coordonnées sphériques, expression générale :

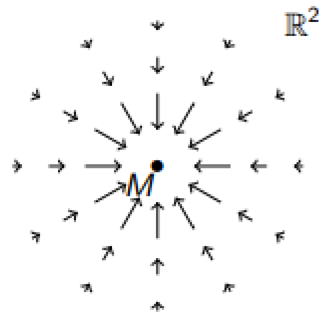

FIGURE 3.2 – Force gravitionnelle

$$gradG = \frac{\partial G}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial \theta}\overrightarrow{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial G}{\partial \varphi}\overrightarrow{e}_\varphi$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{\partial G}{\partial r} = -g\frac{m}{r^2} \\ \frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow G = g\frac{m}{r} + c^{te}$$

Exemple 3.2.2 *Force électrostatique*

(elle est conservative), symétrie sphérique : Champ d'une charge Q ayant une symétrie sphérique positionnée en O :

$$\overrightarrow{F}_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e}_r$$

Potentiel V

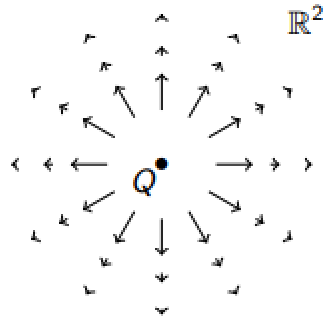

FIGURE 3.3 – Force électrostatique

$$-gradV = \overrightarrow{F}_E$$

(signe " $-$ " et les 4 introduits pour les raisons historiques, ε_0 – permittivité diélectrique du vide). Un calcul identique à celui de l'exemple sur G conduit à $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + c^{te}$

Exemple 3.2.3 *Force électrostatique*

(elle est conservative), symétrie cylindrique : Champ d'une charge Q ayant une symétrie cylindrique positionnée sur l'axe O_z :

$$\overrightarrow{F}_{E,cyl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\rho}\overrightarrow{e}_\rho$$

Potentiel :

$$-gradV_{E,cyl} = \overrightarrow{F}_{E,cyl}$$

En intégrant selon ρ , $V_{cyl} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ln\rho + c^{te}$

Le gradient en météorologie L'expression gradient de température est également largement employée en météorologie. Elle désigne alors les changements de la température atmosphérique avec l'altitude. Elle est déterminée à l'aide de ballons sondes. Dans la troposphère, le gradient de température moyen est d'en-viron $0,6°C/100$ m mais localement, il est très variable.

3.3 Opérateur divergence

Divergence (analyse vectorielle). La divergence s'applique à un champ de tenseurs d'ordre n et le transforme en un champ de tenseurs d'ordre $n-1$. Pratiquement, la divergence d'un champ de vecteurs exprime sa tendance à fluer localement hors d'un petit volume entourant le point M où est calculée la divergence. En dimension 3 et en coordonnées cartésiennes, si $\overrightarrow{F}$ est un tenseur d'ordre 1, alors c'est un vecteur et on peut définir la divergence par la relation

$$div\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

où $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$ désigne le champ de vecteurs auquel est appliqué l'opérateur divergence. La divergence peut être vue, formellement, comme le produit scalaire de l'opérateur nabla par le vecteur « générique » du champ auquel elle est appliquée, ce qui justifie la notation $\overrightarrow{\nabla}\cdot$. Bien entendu, cette définition se généralise naturellement en dimension quelconque.

Sens géométrique La divergence en un point M d'un champ de vecteurs est proportionnelle au nombre de lignes de champ de vecteur sortant de M

Sens physique La divergence d'un vecteur en un point M est proportionnelle à la densité volumique des sources de ce champ de vecteur.

Exemple 3.3.1 *Champ gravitationnel d'une masse homogène à géométrie sphérique :*

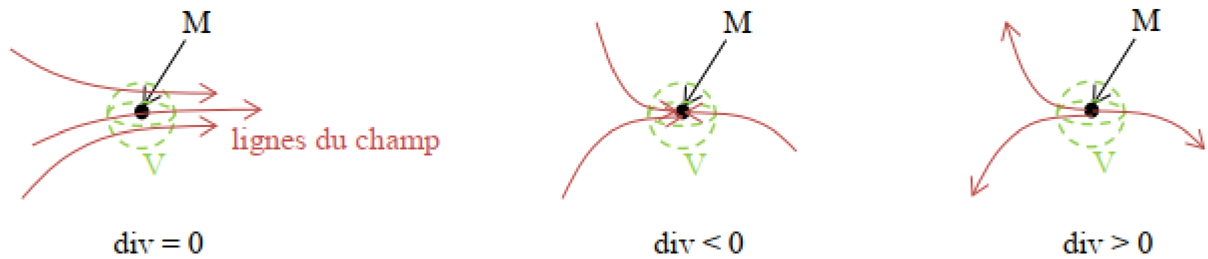

FIGURE 3.4 – Divergence

A l'extérieur de la masse, voir l'éq.(3.1), loi de Newton :

$$\overrightarrow{F}_G = -g\frac{m}{r^2}\overrightarrow{e}_r$$

A. Système sphérique :

$$\begin{aligned} div\overrightarrow{F} &= div\left(-g\frac{m}{r^2}\overrightarrow{e}_r\right) = \frac{2}{r}F_r + \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{F_\theta}{r}\cot g\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{2}{r}\left(-g\frac{m}{r^2}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(-g\frac{m}{r^2}\right) = -2g\frac{m}{r^3} + 2g\frac{m}{r^3} = 0 \end{aligned}$$

(pas de sources à l'extérieur) B. Système cartésien :

Etape 1 : trouver les composantes vectorielles dans le système choisi :

$$-g\frac{m}{r^2}\overrightarrow{e}_r = -g\frac{m}{r^3}\overrightarrow{r} = -g\frac{m}{r^3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow F_{x,y,z} = -g\frac{m\,(x,y,z)}{r^3}$$

Etape 2 : exprimer toutes les caractéristiques en fonction des variables du système :

$$F_{x,y,z} = -g\frac{m\,(x,y,z)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$$

Etape 3 : calculer les dérivées :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}F_x &= -gm\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\\
&= -gm\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
&= -gm\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - x\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\\
&= -gm\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - x\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\,2x}{(x^2+y^2+z^2)^3}\\
&= -gm\frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F_y = -gm\frac{x^2+y^2+z^2-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F_y = -gm\frac{x^2+y^2+z^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Alors,

$$div\,\overrightarrow{F} = -gm\frac{3\,(x^2+y^2+z^2)-3x^2-3y^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

3.3.1 Théorème de Gauss-Ostrogradski (ou théorème de la divergence)

Le théorème de la divergence est un outil qui permet de transformer une intégrale sur un volume à une intégrale sur une surface fermée. Le théorème exprime : "l'intégrale volumique de la divergence d'un champ vectoriel $\overrightarrow{A}$ est égal au flux net total du vecteur à travers la surface limitant le volume". $\int\limits_{v} \left(\nabla \cdot \overrightarrow{A}\right) dv = \oint\limits_{s} \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{s} où d\overrightarrow{s}$ est toujours selon la normale à la surface. Le théorème de la divergence est une expression mathématique du fait physique que, en l'absence de la création ou destruction de la matière, la densité dans une région de l'espace peut seulement changer s'il y a de la matière qui entre ou qui sort de la région.

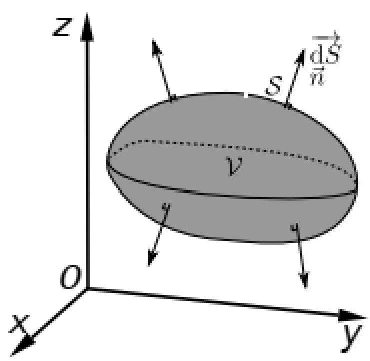

FIGURE 3.5 – Theoreme Dostro-Gauss

Exemple 3.3.2 *Soit* $\overrightarrow{A} = x^2\overrightarrow{e}_x + xy\overrightarrow{e}_y + yz\overrightarrow{e}_z$. *Vérifier le théorème de la divergence sur un cube unitaire selon* $x = 1, y = 1$ *et* $z = 1$. *Le cube est : On veut vérifier :*

$$\int\limits_{v} \left(\nabla \cdot \overrightarrow{A}\right) dv = \oint\limits_{s} \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{s}$$

On va faire l'intégrale de surface sur chaque surface du cube, puis on appliquera la divergence.

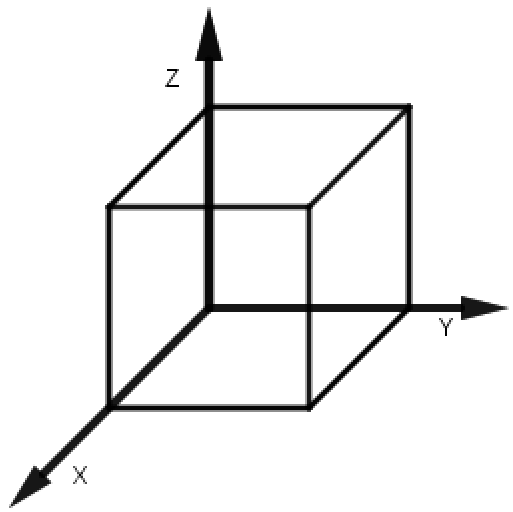

FIGURE 3.6 – Cube

1. Devant : $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e}_x, \quad x = 1 \qquad \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n} ds = 0 \rightarrow \int \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n} ds = 1$
2. Derrière : $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{e}_x, \quad x = 0 \qquad \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n} ds = 0 \rightarrow \int \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n} ds = 0$
3. Côté gauche : $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{e}_y, \quad y = 0 \ \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n} ds = 0 \rightarrow \int \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n} ds = 0$
4. Côté droit : $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e}_y, \quad y = 1 \ \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n} ds = xydxdz \rightarrow \int_0^1 \int_0^1 xdxdz = \frac{1}{2}$
5. Dessus : $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e}_z, \quad z = 1 \ \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n} ds = ydxdy \rightarrow \int_0^1 \int_0^1 ydxdy = \frac{1}{2}$
6. Dessous : $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{e}_z, \quad z = 0 \ \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n} ds = 0 \rightarrow \int \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{n} ds = 0$ Alors,

$$\oint_s \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{s} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

Maintenant, on calcule la divergence :

$$\nabla \cdot \overrightarrow{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(yz)$$
$$= 2x + x + y = 3x + y$$

Puis on fait l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_v (\nabla \cdot \overrightarrow{A})\mathrm{d}v &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= [3\frac{x^2}{2}]_0^1[y]_0^1[z]_0^1 + [\frac{y^2}{2}]_0^1[x]_0^1[z]_0^1 \\ &= 2\end{aligned}$$

Les deux donnent le même résultat.

3.4 Opérateur rotationnel

Le rotationnel transforme un champ de vecteurs en un autre champ de vecteurs. Plus difficile à se représenter aussi précisément que le gradient et la divergence, il exprime la tendance qu'a un champ à tourner autour d'un point : sa circulation locale sur un petit lacet entourant le point M est non nulle. Par exemple : dans une tornade, le vent tourne autour de l'œil du cyclone et le champ de vecteurs vitesse du vent a un rotationnel non nul autour de l'oeil. Le rotationnel de ce champ de vitesse (autrement dit le champ de vorticité ou encore champ tourbillon) est d'autant plus intense que l'on est proche de l'oeil. le rotationnel du champ des vitesses $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{\Omega}_0 \wedge \overrightarrow{OM}$ d'un solide qui tourne à vitesse constante $\overrightarrow{\Omega}_0$ est constant, dirigé selon l'axe de rotation et orienté de telle sorte que la rotation ait lieu, par rapport à lui, dans le sens direct, et vaut simplement $2\overrightarrow{\Omega}_0$. Dans un espace à 3 dimensions et en coordonnées cartésiennes, on peut définir le rotationnel par la relation

$$\overrightarrow{rot}F = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} \partial F_z/\partial y - \partial F_y/\partial z \\ \partial F_x/\partial z - \partial F_z/\partial x \\ \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y \end{pmatrix}$$

où $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$ désigne le champ de vecteurs auquel est appliqué l'opérateur rotationnel. L'analogie formelle avec un produit vectoriel justifie la notation $\overrightarrow{\nabla}\wedge$. Cela peut aussi s'écrire, par abus de notation (c'est aussi une astuce mnémotechnique), à l'aide d'un déterminant :

$$\overrightarrow{rot}\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

où $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ désigne la base canonique. Cette dernière expression est un peu plus compliquée que la précédente, mais elle se généralise facilement à d'autres systèmes de coordonnées.

Sens géométrique Si le champ a des lignes de champ fermées, à l'intérieur de ces lignes il existe un endroit où le rotationnel est non nul. S'il y a des lignes de champ fermées, la circulation le long de ces lignes est non nulle et en utilisant le théorème de Stokes, le rotationnel n'est pas nul.

Sens physique Si le rotationnel d'une force n'est pas nul, la force et non conservative. En effet, il existe des contours sur lesquels la circulation est non nulle, donc le travail le long de ces contours fermés est non nul :

$$rot\overrightarrow{F} \neq 0 \implies \overrightarrow{F} \; non \; conservative$$

Théorème de Stokes La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé (C) limitant une surface (S) est égal au flux de son rotationnel à travers cette surface.

$$C(v) = \phi_{/_{(s)}}\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{v})\right)$$
$$\oint \overrightarrow{v} d\overrightarrow{l} = \int\int_{(s)} \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{v})\overrightarrow{n} ds$$

Le vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ est orienté selon la convention du tire-bouchon de Maxwell.

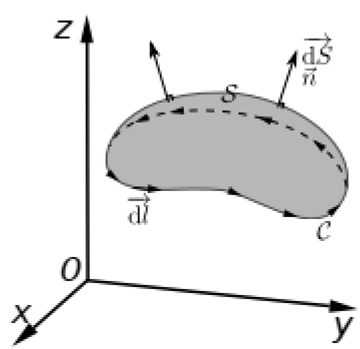

FIGURE 3.7 – Theoreme de Stokes

Rotationnel d'un champ central :

$$\overrightarrow{F} = cr^n \overrightarrow{e}_r$$

Le système approprié – système sphérique : 1. Les composantes du vecteur :

$$F_r = cr^n \qquad F_\theta = F_\varphi = 0$$

2. Calcul des dérivées en coordonnées sphériques :

$$rot\overrightarrow{F} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_r & r\overrightarrow{e}_\theta & r\sin\theta\overrightarrow{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ F_r & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \overrightarrow{e}_r & r\overrightarrow{e}_\theta & r\sin\theta\overrightarrow{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ cr^n & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Conclusion : Pour le champ gravitationnel et le champ électrostatique – rot = 0.

Calcul dans le système cartésien : 1. Les composantes :

$$\overrightarrow{e}_r = \frac{\overrightarrow{r}}{r} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{F} = cr^n\frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. Les variables :

$$\overrightarrow{F} = c\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3. Les dérivées : En direction de z :

$$\left\{\frac{\partial F_y}{\partial x} = c\frac{\partial}{\partial x}\left[y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\right] = cy\frac{n-1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n-3}{2}}2x\right\}$$
$$-\left\{\frac{\partial F_y}{\partial y} = c\frac{\partial}{\partial y}\left[x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n-1}{2}}\right] = cx\frac{n-1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{n-3}{2}}2y\right\}$$
$$= 0$$

En direction de x et y : La même chose

3.5 Opérateur laplacien

Le plus utilisé des opérateurs d'ordre 2 est le laplacien, du nom du mathématicien Pierre-Simon de Laplace. Le laplacien d'un champ est égal à la somme des dérivées secondes de ce champ par rapport à chacune des variables. En dimension 3 et en coordonnées cartésiennes, il s'écrit :

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Cette définition a un sens aussi bien pour un champ de scalaires que pour un champ de vecteurs. On parle respectivement de laplacien scalaire et de laplacien vectoriel. Le laplacien scalaire d'un champ de scalaires est un champ de scalaires alors que le laplacien vectoriel d'un champ de vecteurs est un champ de vecteurs. Pour distinguer ce dernier, on le note parfois $\overrightarrow{\Delta}$ (afin que les novices n'oublient pas qu'il s'agit de l'opérateur $\overrightarrow{grad}$ div$-\overrightarrow{rot}\overrightarrow{rot}$) ; la notation $\overrightarrow{\Delta}$ est plutôt à déconseiller. L'autre notation du laplacien qui apparaît ci-dessus, ∇^2 invite à le considérer, formellement, comme le carré scalaire de l'opérateur nabla .

3.6 Expression des opérateurs en coordonnées cartésiennes cylindriques et sphériques

3.6.1 Coordonnées cartésiennes

(tout le contenu de cette partie : à connaître ou à savoir retrouver rapidement) $f(x, y, z)$ est un champ scalaire quelconque. $\overrightarrow{A}(x, y, z)$ est un champ vectoriel quelconque. Pour alléger les notations des dérivées partielles, on ne note pas les variables qui sont gardées fixées, mais elles sont sous-entendues. On note les vecteurs avec la notation

$$\overrightarrow{A} = \begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = A_x\overrightarrow{e_x} + A_y\overrightarrow{e_y} + A_z\overrightarrow{e_z}$$

On introduit le “vecteur” nabla : $\overrightarrow{\nabla} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$. Ce n'est pas vraiment un vecteur. C'est un moyen pratique de retrouver les formules des différents opérateurs en coordonnées cartésiennes (mais pas forcémentpour les autres systèmes de coordonnées).

Opérateur	*Remarque importante*	*expression en coordonnées cartésiennes*
Gradient $\overrightarrow{grad} f$	s'applique à un scalaire retourne un vecteur	$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$
Divergence div $\overrightarrow{A}$	s'applique à un vecteur retourne un scalaire	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}$
Rotationnel $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}$	s'applique à un vecteur retourne un scalaire	$\begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial Ax}{\partial y} \end{vmatrix}$
Laplacien scalaire $\Delta f = \text{div}\left(\overrightarrow{grad} f\right)$	s'applique à un scalaire retourne un scalaire	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
Laplacien vectoriel Δ $\Delta\overrightarrow{A}$	s'applique à un vecteur retourne un vecteur	$\begin{vmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{vmatrix}$

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\text{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A}) = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\overrightarrow{u_x} + (\frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x})\overrightarrow{u_y} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial Ax}{\partial y})\overrightarrow{u_z}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Remarque 3.6.1 *Les vecteurs unitaires* $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{u_z}$ *en chaque point, constituent des champs uniformes et ont tout une divergence et un rotationnel nuls.*

$\bullet \overrightarrow{v}\,(x,y) = -y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} \quad \Longrightarrow \text{div}\,\overrightarrow{v}\,(x,y) = 0$ $\bullet \overrightarrow{v}\,(x,y) = x^2\,\overrightarrow{i} + 2xy\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$
$\Longrightarrow \text{div}\,\overrightarrow{v}\,(x,y,z) = 2x{+}2x{+}1$ $= 4x{+}1$

3.6.2 Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\text{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial Az}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A}) = (\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z})\overrightarrow{u_r} + (\frac{\partial Ar}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial r})\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial Ar}{\partial \theta})\overrightarrow{u_z}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Remarque 3.6.2 $\text{div}\,\overrightarrow{u_r} = \frac{1}{r}$; $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{0}$; $\text{div}\,\overrightarrow{u_\theta} = 0$; $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{u_\theta} = \frac{\overrightarrow{u_z}}{r}$; $\text{div}\,\overrightarrow{u_z} = 0$; $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{0}$

3.6.3 Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{rsin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A}) = \frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi})\overrightarrow{u_r} + (\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial Ar}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi))\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial Ar}{\partial \theta})\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Remarque 3.6.3 $\operatorname{div}\overrightarrow{u_r} = \frac{2}{r}$; $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{0}$; $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{u_\varphi} = \frac{\overrightarrow{u_z}}{rsin\theta}$; $\overrightarrow{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\overrightarrow{u_r}}{r^2}$

Exemple 3.6.1 • *Soit $\phi : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donné par $\phi(r,\varphi,\theta) = r\varphi\sin\theta$.*

Le gradient de ϕ est

$$\begin{aligned}\overrightarrow{grad}\phi(r,\varphi,\theta) &= \frac{\partial(r\varphi\sin\theta)}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(r\varphi\sin\theta)}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\varphi\sin\theta)}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta}\\ &= \varphi\sin\theta\ \overrightarrow{u_r} + \frac{r\sin\theta}{r\sin\theta}\overrightarrow{u_\varphi} + \frac{r\varphi\cos\theta}{r}\overrightarrow{u_\theta}\\ &= \varphi\sin\theta\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\varphi} + \varphi\cos\theta\overrightarrow{u_\theta}\end{aligned}$$

3.7 Le cas euclidien :gradient, divergence, rotationnel

Plaçons nous dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$ et munissons $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire habituel . L'espace est donc euclidien.

On pose la définition suivante :

Définition 3.7.1 *-Gradient- Soit* $a = (a_1, \cdots, a_n)$ *un point de* $\mathbb{R}^n$ U *un voisinage de* a*,* f *une application de* U *vers* $\mathbb{R}^n$*, que l'on suppose différentiable en* a *et* $(e_1, \cdots, e_n)$ *une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$*. On appelle gradient de* f *en* a *et on note* $\operatorname{grad} f(a)$ *le vecteur*

$$\operatorname{grad} f(a) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a)\, e_1 + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a)\, e_n$$

On montre aisément que le gradient de f *en* a *ne dépend pas de la base orthonormale choisie*

Définition 3.7.2 *(divergence) Soit* $a = (a_1, \cdots, a_n)$ *un point de* $\mathbb{R}^n$*,* U *un voisinage de* a*,* f *une application de* U *vers* $\mathbb{R}^n$*, que l'on suppose différentiable en* a *et* $(e_1, \cdots, e_n)$ *une base orthonormale de* $\mathbb{R}^n$ *. On pose pour tout*

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = f_1(x)\, e_1 + \cdots + f_n(x)\, e_n$$

On appelle divergence de f *en* a *on note* $\operatorname{div} f(a)$ *le nombre réel*

$$\operatorname{div} f(a) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a)$$

On montre aisément que la divergence de f *en* a *dépend pas de la base orthonormale choisie.*

Si $n = p = 3$*, on pose encore la définition suivante :*

Définition 3.7.3 *(Rotationnel) Soit* $a = (a_1, a_2, a_3)$ *un point de* $\mathbb{R}^3$*,* V *un voisinage de* a*,* f *une application de* V *vers* $\mathbb{R}^3$*, que l'on suppose différentiable en* a *et* (e_1, e_2, e_3) *une base orthonormale de* $\mathbb{R}^3$ *. On appelle* *rotationnel de f en a et on note $rotf(a)$ le vecteur*

$$rotf(a) = e_1 \wedge \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + e_2 \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + e_3 \wedge \frac{\partial f}{\partial x_3}(a)$$

Où $\wedge$ désigne le produit vectoriel. En outre, si f est définie pour

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

par

$$f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) = f_1(x) e_1 + f_2(x) e_2 + f_3(x) e_3$$

$$rotf(a) = \left[\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a)\right] e_1 + \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a)\right] e_2 + \left[\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a)\right] e_3.$$

Exemple 3.7.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure d'espace vectoriel euclidien. On désigne par f une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$,ϕ une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ et on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:*

$$F(x) = \phi(x) f(x)$$

Pour $x \in \mathbb{R}^n$, montrons que :

$$\operatorname{div} F(x) = \phi(x) \operatorname{div} f(x) + \langle \operatorname{grad} \phi(x), f(x) \rangle.$$

Pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n)$, écrivons sous la forme :

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$$

Alors, en posant $F_1(x) = \phi(x) f_1(x); \cdots; F_n(x) = \phi(x) f_n(x);$

$$F(x) = \phi(x) f(x) = (\phi(x) f_1(x), \cdots, \phi(x) f_n(x)) = (F_1(x), \cdots, F_n(x)).$$

D'autre part,

$$\operatorname{div} F(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x)$$

et

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} f_1(x) + \phi(x) \frac{\partial f_1}{\partial x 1}(x);$$

$$\cdots$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x_n} f_n(x) + \phi(x) \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x).$$

On en déduit :

$$\operatorname{div} F(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} f_1(x) + \cdots + \frac{\partial \phi}{\partial x_n} f_n(x) + \phi(x) \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \right].$$

Or,

$$\operatorname{grad} \phi(x) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x) e_1 + \cdots + \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x) e_n,$$

et donc,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x) f_1(x) + \cdots + \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(x) f_n(x) = \langle \operatorname{grad} \phi(x), f(x) \rangle.$$

Enfin,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) = \operatorname{div} f(x),$$

et finalement,

$$\operatorname{div} F(x) = \phi(x) \operatorname{div} f(x) + \langle \operatorname{grad} \phi(x), f(x) \rangle.$$

Théorème de Schwartz : permutation des dérivées partielles

Si la fonction f est assez régulière (ce qui est le cas en physique), on peut échanger l'ordre des dérivées partielles, par exemple :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Ou encore

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$$

Comme les différents opérateurs font agir des dérivées partielles, on a aussi des égalités du type :

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\,\overrightarrow{A}\right) = \mathrm{div}\left(\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right)$, $\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A}\right) = \overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right)$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$, *etc.*

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons fournit une étude mathématique bien détaillé sur les opérateurs différentiels (Gradient, Divergence, Laplacien, Rotation,. . .),oú, nous avons donnés leur expression en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques et aussi leur significations en géométrie, en biologie et en physique illustré par des exemples.

Bibliographie

[1] Spiegel, M. R. (1973). Théorie et applications de l'analyse. McGraw-Hill.

[2] J. Royer Calcul Différentiel et intégral, - Université Toulouse 3.

[3] Jean-Jacques Colin, Applications différentiables, fonctions de plusieurs variables. Cepadues 2015

[4] Gabriel-Cormier GELE3222 - Calcul vectoriel, résumé de cours et exercices

[5] Evgeni Popov, Anne-Laure Fehrembach. Notes de Maths : Vecteurs, Dérivées et Opérateurs différentiels. Licence. Notes de Maths AMU, 2014.

[6] Erwan Penchèvre, Cours Dérivées partielles et opérateurs différentiels, Erwan Penchèvre, SUPII 2009.

[7] Opérateurs différentiels, Master Dynamique terrestre et risques naturels Math´ematiques pour géologues, http ://www.gm.univ-montp2.fr/spip/IMG/pdf/mathsTD7.pdf

[8] Fabrice Bethuel LM256 : Analyse vectorielle, intégrales multiples, Année Universitaire 2012-2013, https ://www.ljll.math.upmc.fr/ bethuel/LM256.pdf

[9] Jean-Fran¸cois Babadjian,2M216 Fonctions de plusieurs variables, analyse vectorielle, int´egrales multiples, https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ babadjian/files/2M216/Poly-2M216.pdf

[10] FONCTIONS VECTORIELLES DE PLUSIEURS VARIABLES, https ://www.mathematik.uni-marburg.de/ portenier/Analyse/Cours/pl-var.pdf