République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : **Probabilités**

Par Mr : Lefriki Salim

Titre :

Existence des contrôles optimaux pour les EDS de type champ moyen

Devant le Jury :

Mr.	**HAFAYED MOKHTAR**	**Pr.**	U. Biskra	**Président**
Mr.	**GHERBAL BOULAKHRAS**	**Pr.**	U. Biskra	**Encadreur**
Mme.	**ZOUZOU AKILA**	**Dr.**	U. Biskra	**Examinatrice**

Soutenu Publiquement le 27/06/2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes trés chers parents pour leurs sacrifices et leur soutien moral tout le long de mon cursus, ma chére mére qui m'a t conseillée, mon pére qui m'a encouragé.

A mes très frères et sœurs à qui je souhaite une grande réussite dans leurs vies.

A'toute la famille Lefriki.

Tous mes amis.

A' tous ceux qui ont contribué, de loin ou de prés, à la réalisation de ce projet

$\mathcal{R}$emerciements

Je remercie dieu tout puissant de m'avoir donné la forces, le courage et la patience d'arrivé *finir mon mémoire.*

Je tiens tout particulièrement à remercier Pr. **GHERBAL BOULAKHRAS** qui a encadré mon travail, qu'il toujours montré à l'écoute et disponible tout au long de la réalisation de se mémoire, ainsi pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Un grand merci également pour les membres du jury **HAFAYED MOKHTAR** et **ZOUZOU AKILA** qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail. Je présente tous mes remerciements aux enseignants du département -MATH- sans exceptions qui ont contribué à ma formation, ainsi que tous ce qui m'ont soutenue et m'ont aidée tout le long de cette étude et toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement à ce travail et à tous ceux qui ont montré et disposé à mes questionnements.

Je remercie toute ma famille pour leur soutien moral et leur aide.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles (standard) gouvernent de nombreux phénonènes déterministes. Pour prendre en compte des phénomènes aléatoires, formellement on doit prendre en compte des « différentielles stochastiques », ce qui transforme les équations en équations différentielles stochastiques (EDS). Les équations différentielles sont des équations d'évolution du type

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\ dt + \sigma(t, X_t) dW_t \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{1}$$

Les EDS sont des généralisations des équations (1) où la dynamique déterministe d'évolution b est perturbée par un terme aléatoire (stochastique). On parle alors d'équation différentielle stochastique. En général la perturbation aléatoire est considérée comme un bruit, il est légitime de considérer que ce bruit est un processus gaussien et en général il est modélisé par un mouvement Brownien W et une intensité de bruit (t, x) :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

Où σ est une fonction du temps t et de l'inconnue au temps (X_t), mais pourrait juste dépendre du temps (σ_t) ou de la valeur X_t en $t, (\sigma(X_t))$ ou encore être constante. L'objectif de ce mémoire est de présenter la théorie des équations différentielles stochastique (EDS) et d'étudier l'existence et l'unicité de leur solution sous des conditions qui sont appliquées sur les coeffcients b et σ, on parlera aussi de la démonstration d'existence de contrôle optimal relaxé pour les EDSs non linéaire de type champ moyen.

Généralement nous allons présenter dans ce mémoire trois chapitres.

Le premier est un chapitre introductif permettant d'introduire les outils essentiels pour le reste des chapitres. Nous allons donner quelques rappels de calcul stochastique en énumérant tous les outils mathématiques (processus stochastique, martingale, mouvement Brownien, résultats importants relatifs au calcul d'Itô, et quelques inégalités,...ect) permettant de mieux comprendre le problème consistant à démontrer le théorème d'existence de contrôle optimal relaxé pour notre EDS.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution d'une EDS. Il y a beaucoup de résultats d'existence et d'unicité des solutions, on a choisi dans ce chapitre le théorème de Cauchy-Lipschitz qui traite le cas où les coeffcients sont Lipchitzien et continus.

Enfin, dans le troisième chapitre nous étudions l'existence de contrôle optimal relaxé pour les EDSs non linéaire de type champ moyen.

Chapitre 1

Généralités sur les processus stochastique

1.1 Généralités et notations

Dans ce chapitre introductif, nous donnons quelques définitions de base et le plus souvent élémentaires, concernant les résultats de calcul stochastique. Nous nous limitons au strict nécessaire pour les chapitres suivants. Notons que, pour représenter un phénomène aléatoire dépondant du temps, le modèle mathématique est donné par

1) Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

2) Une fonction $X: \ (\mathbb{R}_+ \otimes \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ avec $(t, w) \to X(t, w)$.

Pour chaque t fixé, l' état du systéme est une variable aléatoir c'est à dire $w \to X(t, w)$ est mesurable. Pour $w \in \Omega$ fixé, $t \to X(t, w)$ est appelée une trajectoire.

Définition 1.1.1 ***(Processus stochastique)*** *Soit T un ensemble d'indices par (example $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{N}$), on appelle processus défini sur T a valeur dans $(E, \mathcal{E})$, une* *famille* $(X_t)_{t\in T}$ *d'appelication mesurable de* $(T\otimes\Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F})$ *dans* $(E,\mathcal{E})$*, pour tout* $t\in T$*,* X_t *est une variable aléatoire.*

Définition 1.1.2 (Modification d'un processus) *On dit que deux processus* $(X_t)_{t\in T}$ *et* $(Y_t)_{t\in T}$ *définis sur le même espace de probabilité* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *sont modifications l'un de l'autre s'ils vérifiants* $\forall t\in T,\ X_t=Y_t,\ \mathbb{P}-p.s.$ *C'est équivalent à dire*

$$\forall t\in T, \exists N_t, \mathbb{P}(N_t)=0 \text{ et } \forall w\notin N_t, X_t(w)=Y_t(w).$$

Définition 1.1.3 (Processus indistinguables) *Deux processus* $(X_t)_{t\in T}$ *et* $(Y_t)_{t\in T}$ *sont indistinguables si :*

$$\mathbb{P}(X_t=Y_t, \forall t\in T)=1.$$

C'est équivalent à dire : $\exists\ N,\ \mathbb{P}(N)=0, \forall\ w\notin N, X_t(w)=Y_t(w),\ \forall t\in T.$

Remarque 1.1.1 *Il est clair que si* $(X_t)_{t\in T}$ *et* $(Y_t)_{t\in T}$ *sont indistinguables alors ils sont modifications l'un de l'autre. La résproque est généralement fausse.*

Définition 1.1.4 (Processus mesurable) *Un processus* $(X_t)_{t\in T}$ *est mesurable si l'application* $(t,w)\to X_t(w)$ *de* $\mathbb{R}_+\times\Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport aux tribus* $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*.*

Définition 1.1.5 (Filtration) *Soient* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *un espace probabilité et* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *une famille croissante de sous tribus de* $\mathcal{F}$ *au sens où,* $\forall s\leq t, \mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}$*.* $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est appelée la filtration de* $(\Omega,\mathcal{F})$*. Dans ce cas on dit que* $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+},\mathbb{P}\right)$ *est un espace de probabilité filtré.*

Définition 1.1.6 (Processus adapté) *Un processus* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est dit adapté par rapprt à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *(ou* $\mathcal{F}_t$*-adapté) si, pour tout* t*,* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable.*

Si $N \subset \mathcal{F}_0$, et si X_t est $\mathcal{F}_t$-adapté alors, toute modification de X_t est encore adaptée.

Définition 1.1.7 ***(Processus progressivement mesurable)*** *On dit qu'un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est progressivement mesurable si l'application*

$$X_\cdot(\cdot): \ ([0,t]\times\Omega, \mathcal{B}(0,t)\otimes\mathcal{F}) \longrightarrow (E,\mathcal{E}),$$
$$(s,w) \longmapsto X_s(w),$$

est $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(0,t)\otimes\mathcal{F})$-mesurable.

1.2 Mouvement Brownien et Martingale

Définition 1.2.1 ***(Mouvement Brownien standard)*** *On appelle mouvement Brownien standard tout processus stochastique W à valeurs réelles tel que*

1) $\mathbb{P}-p.s.$ $t \to W_t(w)$ est continu.

2) Pour $0 \leq s < t$, $W_t - W_s$ est indépendant de la tribu $\sigma\{W_r, r\leq s\}$ et de loi gaussienne centrée et de variance $t-s$.

3)$W_0 = 0$, $\mathbb{P}-p.s.$

Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire W_t suit la loi gaussienne centrée de variance t. On dit qu'un mouvement Brownien (MB dans la suite) part d'un point x si $W_0 = x$.

Remarque 1.2.1 *On dit que W est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-MB si W est un processus continu, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adapté et vérifiant*

$$\forall u\in\mathbb{R}, \ \forall 0\leq s\leq t, \ \mathbb{E}\left[\exp\left(iu\left(W_t-W_s\right)\right)|\mathcal{F}_s\right] = \exp\left\{-u^2\left(t-s\right)|2\right\}.$$

Proposition 1.2.1 *Soit W un MB standard donc on a :*

1. Pour tout $s > 0$, $\{W_{t+s} - W_s\}_{t\geq 0}$, est un MB indépendant de $\{W_r, r \leq s\}$.
2. $(-W)$ est aussi un MB.
3. Pour tout $c > 0$, $\left\{cW_{t/c^2}\right\}_{t\geq 0}$ est un MB.
4. Le processus défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tW_{1/t}$ est un MB.

Définition 1.2.2 *Un processus X_t à valeurs réelles est une sur-martingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{\ t\geq 0}$ si*

1. Pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
2. Pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable.
3. Pour $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{F}_s\right] \leq X_s$.

O dit que X_t est une sous-martingale lorsque $(-X_t)$ est une sur-martingale et X_t est une martingale s'il est à la fois une sur-martingale et une sous-martingale.

Théoreme 1.2.1 *Si W est un MB, alors $\{W_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ et $\{\exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2)\}_{t\geq 0}$ sont des martingales.*

Théoreme 1.2.2 ***(Théorème d'arrêt)*** *Si X_t est une martingale et si ϑ et τ sont deux temps d'arrêt bornés tels que $\vartheta \leq \tau$, alors*

$$\mathbb{E}\left[X_\tau|\mathcal{F}_\vartheta\right] = X_\vartheta, \mathbb{P} - p.s.$$

Rappelons aussi qu'un processus X_t adapté et intégrable est une martingale si et seulement si, pour tout temps d'arrêt borné $\tau, \mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

Théoreme 1.2.3 *Soit X_t une $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–martingale, alors X_t possède une modification càdlàg, i.e. dont les trajectoires sont continues à droite et possèdent des limites à gauche.*

Définition 1.2.3 ***(Martingale locale)*** *Soit X_t un processus $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$–adapté, à trajectoires continues à droite. On dit que X_t est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ telle que $lim_{n\to\infty}\tau_n = +\infty$, $\mathbb{P}-p.s$, et pour tout n, $X^{\tau_n}\mathbf{1}_{\tau_n>0}$ est une martingale.*

Théoreme 1.2.4 *Soit X_t une martingale locale continue. Il existe un unique processus croissant et continu $\langle X_t, X_t\rangle$, nul en 0, tel que $X_t^2 - \langle X_t, X_t\rangle$ soit une martingale locale.*

Proposition 1.2.2 *Soit X_t une martingale locale continue. Il y a équivalence entre*

1. $X_0 \in L^2$ et $E[\langle X_t, X_t\rangle_\infty] < \infty$,
2. X_t est une martingale bornée dans L^2.

1.3 Intégrale stochastique et formule d'Itô

Dans cette section, T est un réel positif, on cherche à définir l'intégrale

$$I(\theta) = \int_0^T \theta_t dW_t, \tag{1.1}$$

où $(\theta_t)_{t\geq 0}$ est un processus quelconque et $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien. Le problème de donner un sens à l'élément différentiel dW_s puisque la fonction $s \to W_s$ n'est pas dérivable.

1.3.1 L'intégrale de Wiener

On note

$$L^2([0,T],\mathbb{R}) = \left\{\theta : [0,T] \longmapsto \mathbb{R} \text{ tel que, } \int_0^T |\theta_s|^2 \, ds < \infty\right\}.$$

L'intégrale de Wiener est une intégrale du type (1.1) avec θ une fonction déterministe, c'est à dire ne dépendant pas d'aleatoire w.

Si θ^n est une fonction en escalier déterministe de la forme

$$\theta_t^n = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i(t) \mathbf{1}_{\left[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}\right]},$$

où $p_n \in N$, les α_i sont des réels et $\left\{t_i^{(n)}\right\}$ est une suite croissante de $[0,T]$. On définit intégrale de Wiener par

$$I(\theta^n) = \int_0^T \theta_s^n dW_t = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right).$$

Par le caractère gaussienne du mouvement Brownien et l'indépendance de ses accroissements, la variable aléatoire $I(\theta^n)$ est une variable gaussienne d'espérance nulle et de variance

$$\begin{aligned} Var(I(\theta^n)) &= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 Var\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right), \\ &= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 (t_{i+1} - t_i), \\ &= \int_0^T (\theta_s^n)^2 \, ds. \end{aligned}$$

Remarque 1.3.1 *On remarque que $\theta \to I(\theta)$ est une fonction linéaire, de plus,* *si f et g sont deux fonctions en escalier, on a*

$$\mathbb{E}\left[I\left(f\right)I\left(g\right)\right]=\int_0^T f\left(s\right)g\left(s\right)ds.$$

On parle alors de la propriété d'isométrie de l'intégrale de Wiener.

Soit maintenant $\theta\in L^2\left([0,T],\mathbb{R}\right)$. Il existe donc une suite des fonctions en escalier $\{\theta^n,n\geq 0\}$ qui converge dans $L^2\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ vers θ. D 'après le paragraphe précédent on peut construire les intégrales de Wiener $I\left(\theta^n\right)$ qui sont des gaussiennes centrées qui, par isométrie forment une suite de Cauchy. L'éspace $L^2\left([0,T],\mathbb{R}\right)$ étant complet, cette suite converge vers une variable aléatoire gaussienne notée $I\left(\theta\right)$. On peut montrer que la limite ne dépent pas du choix de la suite $\{\theta^n,n\geq 0\}$. $I\left(\theta\right)$ s' appelle intégrale de Wiener de θ par rapprt à $\left(W_t\right)_{t\in\mathbb{R}}$.

1.3.2 L'intégrale stochastique ou intégrale d'Itô

On cherche maintenant à définir l'intègrale (1.1), la construction de $I\left(\theta\right)$ se fait par discrétisation comme dans le cas de l'intégrale de Wiener.

Considérons tout d'abord les processus étagés du type

$$\theta_t^n=\sum_{i=0}^{p_n}\theta_i\mathbf{1}_{\left[t_i^{(n)},t_{i+1}^{(n)}\right]}\left(t\right), \tag{1.2}$$

où $p_n\in\mathbb{N}$, $\left\{t_i^{(n)}\right\}$ une suite croissante de $[0,T]$, et $\theta_i\in L^2\left(\Omega,\mathcal{F}_{t_i},\mathbb{P}\right)$ pour tout $i=0,...,p_n$. On défini $I\left(\theta^n\right)$ par

$$I\left(\theta^n\right)=\sum_{i=1}^{p_n}\theta_i\left(W_{t_{i+1}}-W_{t_i}\right).$$

On peut vérifier que

$$\mathbb{E}\left[I\left(\theta^n\right)\right]=0,\ \text{et } Var\left(I\left(\theta^n\right)\right)=\mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\theta_s^n\right)^2 ds\right].$$

Soit Υ l'espace que des processus θ càdlàd (c'est à dire, continue à gauche et limité à droite), $\mathcal{F}_t$-adapté tel que

$$\|\theta\|^2=\mathbb{E}\left[\int_0^T\left|\theta_s\right|^2 ds\right]<\infty.$$

On peut définir $I\left(\theta\right)$ pour tout $\theta\in\Upsilon$, on approche θ par une suite de processus étagés donnée par (1.2), la limite étant dans $L^2\left(\Omega,[0,T]\right)$. L'intégrale $I\left(\theta\right)$ est alors $\lim\limits_{n\rightarrow+\infty} I\left(\theta^n\right)$ avec

$$\mathbb{E}\left[I\left(\theta\right)\right]=0,$$

et

$$Var\left(\ I\left(\theta\right)\right)=\mathbb{E}\left[\int_0^T\theta_s^2 ds\right].$$

Définition 1.3.1 ***(Processus d'Itô)*** *On appelle processus d'Itô tout processus $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ à valeurs réelles tel que $\forall 0\leq s\leq t$*

$$X_t=X_0+\int_0^t b(s)ds+\int_0^t\sigma(s)dW_s,\mathbb{P}-p.s,$$

où, X_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurables vérifiants les conditions

$$\int_0^T\mid b(s)\mid ds<\infty \text{ et } \int_0^T\parallel\sigma(s)\parallel^2 ds<\infty,\ \text{où }\ \parallel\sigma\parallel=trace(\sigma\sigma^*).$$

Le coefficient b est le drift ou la dérive, σ est le coefficient de diffusion.

Théoreme 1.3.1 ***(Première formule d'Itô)*** *Soit* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô, soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *de classe* C^2*. Alors*

$$f(X_t)=f(X_0)+\int_0^t f_x(X_s)dX_s+1/2\int f_{xx}(X_s)\sigma^2(s)ds.$$

Théoreme 1.3.2 ***(Deuxième formule d'Itô)*** *Soit* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô, soit* f *une fonction définie sur* $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ *de classe* C^1 *par rapport à* t *et de classe* C^2 *par rapport à* x*. On a*

$$\begin{aligned}f(t,X_t)=f(0,X_0)+\int_0^t f_t(s,X_s)ds+\int_0^t f_x(s,X_s)dX_s\\+1/2\int_0^t f_{xx}(s,X_s)\sigma^2(s)ds.\end{aligned}$$

Proposition 1.3.1 ***(Formule d'intégration par parties)*** *Soient* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *et* $(Y_t)_{0\leq t\leq T}$ *deux processus d'Itô, alors*

$$X_tY_t=X_0Y_0+\int_0^t X_sdY_s+\int_0^t Y_sdX_s+\langle X,Y\rangle_t\,.$$

Chapitre 2

Existence et unicité des solustions des équations différentielles stochastiques

2.1 Existence et l'unicité de la solution

Comme d'habitude pour les équations différentielles, les notions d'existence et d'unicité sont essentielles. Dans le contexte des EDS, il existe plusieurs types d'existence et d'unicité des EDS. Dans toute cette section, en dans un résulta l'existence l'unicité dans le cas Lipschitz.

Définition 2.1.1 *Soit d et m des entiers positifs, et soient b et σ des fonctions mesurables localement bornées définies sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ et à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^d$ et $M_{d\times m}(\mathbb{R})$,où $M_{d\times m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $d \times m$ à coefficients réel. On note $\sigma(t,x) = (\sigma_{i,j}(t,x))_{1\leq i\leq d, 1\leq j\leq m}$* ***coefficient de diffusion*** *de l'EDS, et $b(t,x) = (b_i(t,x))_{1\leq i\leq d}$* ***drift (ou dérivé)*** *de l'EDS.*

Une solution de l'équation

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \tag{2.1}$$

Notions d'existence et d'unicité

– 1.**Existence d'une solution faible** si (2.1) admet une solution X_t, qui n'est pas adaptée à la filtration du mouvement Brownien.

– 2. **Existence d'une solution forte** si (2.1) admet une solution X_t, qui soit adaptée à la filtration du mouvement Brownien.

– 3. **Unicité faible** si tous les processus X_t solutions de (2.1) ont la même loi.

– 4. **Unicité trajectorielle** si l'espace de probabilité et le Brownien étant fixés, deux solutions X_t et $X_t^{'}$ de (2.1) sont indistinguables

$$\mathbb{P}(\exists t \in \mathbb{R} \mid X_t \neq X_t^{'}) = 0$$

Définition 2.1.2 *(Solution forte) : Un processus continu X_t est dit solution forte de l'EDS (2.1) si :*

A· X_t est progressivement mesurable.

B· $\mathbb{P} - p.s$ on a :

$$\int_0^t \left\{ |b(s, X_s)| + ||\sigma(s, X_s)||^2 \right\} ds < \infty,$$

où $||\sigma|| = trace(\sigma\sigma^t)$, telle que $\sigma\sigma^t$ la martice de diffusion.

C· $\mathbb{P} - p.s$ on a :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \forall t \in [0, T].$$

Remarque 2.1.1 *Pour simplifier les calculs déjà nombreux, les démonstrations* *seront effectuées dans le cas $d = m = 1$.*

L'exemple suivant montre que l'on peut avoir (1) et (3) (existence et unicité faible) mais ni (2) ni (4).

Exemple 2.1.1 *Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard. On considère le processus*

$$W_t = \int_0^t sgn(B_s)dB_s,$$

où

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \geq 0 \\ -1 & si\ x < 0, \end{cases}$$

puisque $sgn^2(x) = 1$ alors (W_t) est bien défini et (W_t) est une martingale continue de crochet t, par le théorème de Lèvy, (W_t) est un mouvement Brownien.

Considérons l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = sgn(X_t)dB_t \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

(W_t) est une solution de cette équation. On voit que toutes les solutions de cette équation sont des mouvements Browniens et sont égaux en loi (on existence et unicité faibles), mais (4) n'est pas vérifiée. Le processus $(-W_t)$ est aussi solution de l'équation

$$\mathbb{P}[W_t \neq -W_t] = \mathbb{P}[2W_t \neq 0] = 1,$$

de sorte que (W_t) et $(-W_t)$ sont deux solutions qui ne sont pas indistinguables.

Théoreme 2.1.1 (Yamada-Watanabe) *Supposons que l'équation (2.1) admette une solution faible et que toutes ses solutions soient indistinguables. Alors (2.1) admet une unique solution forte.*

Soient $\mathbb{S}^2\left(\mathbb{R}^d\right)$: L'espace de Banach constitué des processus X_t progressivement mesurable, tels que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right]<\infty,$$

et muni de la norme

$$||X||=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right]^{1/2}.$$

et $\mathbb{S}_c^2\left(\mathbb{R}^d\right)$: le sous espace de $\mathbb{S}^2$ formé des processus X_t continus.

Théoreme 2.1.2 *Soit b et σ deux fonctions mesurables , et $T>0$*

$$b(.,.):[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$
$$\sigma(.,.):[0,T]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n\times m},$$

on suppose qu'il existe une constante $K>0$ telle que pour tout $t\in[0,T],X,Y\in\mathbb{R}^n$, on a :

- ***(1) Condition de Lipschitz***

$$|b(t,X_t)-b(t,Y_t)|\leq K|X_t-Y_t|,$$
$$|\,\|\sigma(t,X_t)-\sigma(t,Y_t)\|\leq K|X_t-Y_t|.$$

- ***(2) Croissance linéaire***

$$|b(t,X_t)|\leq K(1+|X_t|),$$
$$|\,\|\sigma(t,X_t)\|\leq K(1+|X_t|),$$

- ***(3) Condition sur la valeur initiale***

$$\mathbb{E}[|X_0|^2]<\infty.$$

Alors l'EDS (2.1) possédé une solution unique dans l'intervalle $[0,T]$. *De plus cette solution* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *vérifie :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}(|X_t|^2)\right] < \infty.$$

L'unicité signifie que si X_t *et* Y_t *sont deux solutions de (2.1), alors* $\mathbb{P}(X_t = Y_t \text{ pour tous } 0 \leq t \leq T) = 1$

$$\forall 0 \leq t \leq T \quad X_t = Y_t,\ p.s.$$

Alors l'EDS $(2,1)$ posséde une unique solution et cette derniére appartient à $\mathbb{S}^2$ et donc à $\mathbb{S}^2_c$.

Preuve. La preuve consiste à utiliser la méthode itérative de Picard (et la méthode de point fixe) comme dans le cas déterministe. Pour $X_t \in \mathbb{S}^2_c$, posons pour tout $t \in [0,T]$:

$$\Phi(X)_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s.$$

Le processus $\Phi(X)$ est bien défini et est continu si $X_t \in \mathbb{S}^2_c$.
Soit X_t et Y_t deux éléments de $\mathbb{S}^2_c$, et on utilise la majouration $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, on a pour tout $0 \leq t \leq u \leq T$:

$$\begin{aligned} \mid \Phi(X)_t - \Phi(Y)_t \mid^2 \quad \leq \quad & \Big[2\sup_{0\leq t\leq u} \mid \textstyle\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\, ds \mid^2 \\ & + 2\sup_{0\leq t\leq u} \mid \textstyle\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\, dB_s \mid^2\Big]. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'isométrie d'Itô :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} \mid \Phi(X)_t - \Phi(Y)_t \mid^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^u (b(s,X_s)-b(s,Y_s))\,ds\right)^2\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^u \parallel \sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)\parallel^2 ds\right].$$

On utilise la majouration $(a+b)^2 \leq 2a^2+2b^2$, on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} \mid \Phi(X)_t - \Phi(Y)_t \mid^2\right] \leq 2T\mathbb{E}\left[\left(\int_0^u (b(s,X_s)-b(s,Y_s))\,ds\right)^2\right] + 8\mathbb{E}\left[\int_0^u \parallel \sigma(s,X_s)-\sigma(s,Y_s)\parallel^2 ds\right],$$

et comme les fonctions b et σ sont Lipschitziennes, on obtient, pour tout $u \in [0,T]$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq u} \mid \Phi(X)_t - \Phi(Y)_t \mid^2\right] \leq 2K^2(T+4)\mathbb{E}\left[\int_0^u \sup_{0\leq t\leq u} \mid X_t - Y_t \mid^2 ds\right]. \quad (2.2)$$

Notant 0 le processus nul, et en utilisant la majoration $(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$ on obtient :

$$\mid \Phi(0)_t \mid^2 \leq 3\left(x^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^t b(s,0)ds \mid^2 + \sup_{0\leq t\leq T} \mid \int_0^t \sigma(s,0)ds \mid^2\right).$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'isométrie d'Itô et la croissance linéaire de b et σ :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid \Phi(0)_t \mid^2\right] \leq 3\left(\mathbb{E}\left[x^2\right] + K^2T^2 + 4K^2T\right). \quad (2.3)$$

Les formules (2.2) et (2.3) montront alors que le processus $\Phi(X)$ appartient à $\mathbb{S}_c^2$ dès que X_t appartient à $\mathbb{S}_c^2$.

L'existence : On définit par récurrence une suite de processus de $\mathbb{S}_c^2$ en posant :

$$\begin{cases} X^{n+1} = \Phi\left(X^n\right), \forall n \in \mathbb{N} \\ X_0 = x. \end{cases}$$

On obtient à l'aide de la formule (2.2) pour tout $n \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^{n+1} - X_t^n \mid^2\right] \leq \frac{C^n T^n}{n!}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^1 \mid^2\right],$$

où $C = 2K^2\left(T+4\right)$.

Encore, en notant D le majorant de la formule (2.3) :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^{n+1} - X_t^n \mid^2\right] \leq D\frac{C^n T^n}{n!},$$

(avec $D = 3\left(E\left[x^2\right] + K^2T^2 + 4K^2T\right)\right)$.

Il résulte de cette dernière inégalité que :

$$\sum_{n\geq 0} \| \sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^{n+1} - X_t^n \mid \|_{L^1} \leq \sum_{n\geq 0} \| \sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t^{n+1} - X_t^n \mid \|_{L^2}$$
$$\leq \sqrt{D}\sum_{n\geq 0}\frac{\left(CT\right)^{n/2}}{\sqrt{n!}} < \infty.$$

Ainsi la série $\sum_n \sup_t \mid X_t^{n+1} - X_t^n \mid$ converge $\mathbb{P} - p.s$, donc $(X_t^n)_{n\in N}$ converge uniformément sur $[0,T]$ vers un processus X_t continu (i.e : $X_t \in \mathbb{S}_c^2$) puisque la convergence lieu dans $\mathbb{S}^2$. Alors X_t est une solution de l'EDS (2.1), en passant à la limite dans la défnition $X_t^{n+1} = \Phi(X^n)$ (i.e $\lim_{n\longrightarrow\infty} X_t^{n+1} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\Phi(X^n) \Leftrightarrow X_t = \Phi(X)$).

L'unicité : Si X_t et Y_t sont deux solutions de l'EDS (2.1) dans $\mathbb{S}_c^2$, alors :

$$X_t = \Phi(X) \text{ et } Y_t = \Phi(Y),$$

et d'après l'inégalité (2.2) et pour tout $r \in [0, T]$ on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq r} \mid X_t - Y_t \mid^2\right] \leq 2K^2 (T+4) \int_0^r \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq s} \mid X_t - Y_t \mid^2\right] ds.$$

D'après le lemme de Gronwall on trouve :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} \mid X_t - Y_t \mid^2\right] = 0,$$

ce qui prouve que X_t et Y_t sont indistinguables.

Pour montrer l'unicité des solutions de l'EDS (2.1) au sens de la définition (2.1.2), nous devons montrer que toute solution appartient à $\mathbb{S}_c^2$ (c'est à dire continue par définition) est appartient à $\mathbb{S}^2$. ■

Exemple 2.1.2 *On considère l'EDS suivante :*

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

avec μ et $\sigma \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$, on montre l'existence et l'unicité de la solution. Pour cela nous allons vérifier les conditions du théoréme, alors :

On a

$$\begin{aligned}
|\mu X_t - \mu Y_t| + |\sigma X_t - \sigma Y_t| &= |\mu(X_t - Y_t)| + |\sigma(X_t - Y_t)| \\
&\leq |\mu||X_t - Y_t| + |\sigma||X_t - Y_t| \\
&\leq (|\mu| + |\sigma|)(|X_t - Y_t|) \\
&\leq K|X_t - Y_t|.
\end{aligned}$$

D'où la condition de Lipschitz.

Et

$$\begin{aligned}
|\mu X_t| + |\sigma X_t| &\leq |\mu||X_t| + |\sigma||X_t| \\
&\leq (|\mu| + |\sigma|)|X_t| \\
&\leq K|X_t|.
\end{aligned}$$

D'où la condition de linéarité

On a X_0 *constante* $\mathbb{E}(|X_0|^2) < \infty$.

Chapitre 3

Existence de contrôle optimal pour les EDS de type champ moyen

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on va démontrer l'existence des contrôles optimaux relaxés pour des systèmes des équations différentielles stochastiques (EDS) non linéaires de type champ moyen. Ici les coefficients dépend du processus d'état ainsi que leur espérance mathématiques. La fonction de coût est aussi de type champ moyen.

Contrôle

La dynamique X_t de l'état du système est influencée par un contrôle que nous modélisons comme un processus $(u_t)_t$ dont la valeur peut être décidée à tout instant t en fonction des informations disponibles à cet instant, c'est à dire que u_t est adapté par rapport à une certaine filtration, et prend ses valeurs dans un espace de contrôle A (appelé espace d'action).

Contrôle admissible

On appelle contrôle admissible tout processus u_t où $t \in [0;T]$ mesurable, $(\mathcal{F}_t)_t$-adapté et à valeur dans un Borélien A de $\mathbb{R}^n$. Notons par U l'ensemble de tous les contrôles admissibles.

Contrôle optimal

Le problème de contrôle optimal consiste à minimiser une fonction coût $J(u)$ sur un ensemble de contrôle admissible U. On dit que le contrôle u^* est optimal si :

$$J(u^*) \leq J(u), \forall u \in U\cdot$$

3.2 Formulation du problème et hypothèses

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions usuelles sur lequel on définit un mouvement Brownien $(W_t)_{t\geq 0}$. On suppose que $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$.

On considère l'EDS suivante :

$$\begin{cases} dX_t = b(s, X_s, \mathbb{E}\left[\alpha\left(X_s\right)\right], u_s)ds + \sigma(s, X_s, \mathbb{E}\left[\beta\left(X_s\right)\right])dW_s \\ X_0 = \zeta. \end{cases} \tag{3.1}$$

Où

$$b : [0;T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}^d \text{ et } \sigma : [0;T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to M_d(\mathbb{R}),$$

sont deux fonctions mesurables en (t, X_1, X_2, u) et ζ une variable aléatoire F_0-mesurable et indépendante de W, telle que $\mathbb{E}[|\zeta|^m] < \infty$, pour tout $m > 1$. La fonction de coût à minimiser est donnée par :

$$J(u) = \mathbb{E}\left[g(X_T, \mathbb{E}\left[\bar{\alpha}\left(X_T\right)\right]) + \int_0^T h(t, X_t, \mathbb{E}\left[\bar{\beta}\left(X_t\right)\right], u_t)dt\right], \tag{3.2}$$

où $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times A \to \mathbb{R}$ est mesurable en (t, X_1, X_2, u) et $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est mesurable en X .

On suppose que b, σ, h et g sont dérivables en X et à dérivées continues et bornées et

$$|\sigma(t, X_1, X_2)| + |g(X_1, X_2)| + |h(t, X_1, X_2, u)| \leq k(1 + |X_1| + |X_2|). \tag{3.3}$$

Remarque 3.2.1 1 : *Les coeffcients de l'équation d'état* (3.1) *étant à dérivées bornées (donc sont Lipschitziens) alors,* (3.1) *admet une solution forte unique donnée par :*

$$X_t = \zeta + \int_0^t b(s, X_s, \mathbb{E}\left[\alpha\left(X_s\right)\right], u_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, \mathbb{E}\left[\beta\left(X_s\right)\right])dW_s.$$

De plus cette solution est continue et vérifie pour tout $m > 0$:

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^m\right] < +\infty.$$

2 : Les hypothèses sur h et g impliquent que le coût $J(u)$ est bien défini pour chaque contrôle admissible.

3.3 Contrôle relaxé

Soit V l'ensemble des mesures de Radon sur $[0,T]\times A$ dont la projection sur $[0,T]$ coïncide avec la mesure de Lebesgue dt, muni de la topologie de la convergence stable des mesures. L'espace V est muni de sa tribu borelienne, qui est la plus petite tribu telle que l'application $q \to \displaystyle\int f(s,a)q(ds,da)$ soit mesurable pour toute fonction f mesurable, bornée et continues en a.

Un contrôle relaxé q est une variable aleatoire $q(w,dt,da)$ à valeur dans V telle que pour chaque $t, 1_{[0,t]}q$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable ($\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \leq s \leq t)$). Tout contrôle relaxé peut être intégré en $q(w,dt,da) = dtq_t(w,da)$ où $q_t(da)$ est un processus progressivement

mesurable à valeurs dans l'espace des mesures de probabilités $\mathbb{P}(A)$.

Définition 3.3.1 *Un contrôle relaxé q est une variable aléatoire $q(w,dt,da)$ à valeur dans V telle que pour chaque $t, 1_{[0,t]}q$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.*

On note par $\mathcal{R}$ l'ensemble des contrôles relaxés.

L'équation d'état dans le cas des contrôles relaxés est donnée par :

$$\begin{cases} dX_t = \displaystyle\int_A b(t, X_t, \mathbb{E}\left[\alpha\left(X_t\right)\right], a)q_t(da)dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{E}\left[\beta\left(X_t\right)\right])dW_t \\ X_0 = \zeta. \end{cases} \tag{3.4}$$

Avec les mêmes hypothéses sur b et σ.

La fonction coût à minimiser sur l'ensemble des contrôles relaxés $\mathcal{R}$, est donnée par :

$$J(q) = \mathbb{E}\left[g(X_T, \mathbb{E}\left[\bar{\alpha}\left(X_T\right)\right]) + \int_0^T \int_A h\left(t, X_t, \mathbb{E}\left[\bar{\beta}\left(X_t\right)\right], a\right) q_t(da)dt\right]. \tag{3.5}$$

Avec les mêmes hypothéses sur h et $g\cdot$

On cherche à minimiser le coût J sur l'ensemble $\mathcal{R}$. On dit que $q^* \in \mathcal{R}$ est un contrôle relaxé optimal si :

$$J(q^*) \leq J(\mu), \forall \mu \in \mathcal{R}.$$

La solution de l'équation (3.4) est donnée par :

$$X_t = \zeta + \int_0^t \int_A b(s, X_s, \mathbb{E}\left[\alpha\left(X_s\right)\right], a) q_s(da) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, \mathbb{E}\left[\beta\left(X_s\right)\right]) dW_s.$$

De plus cette solution est continue et vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^m\right] < M, \forall m > 1.$$

Où M est une constante qui dépend de k, m, T et ζ.

Remarque 3.3.1 *Dans le cas où le contrôle relaxé $q_t(da) = \delta_{u_t}(da)$ est une masse de Dirac au point contrôle strict u_t, on trouve*

$$\begin{aligned}
\int_A b(s, X_s, \mathbb{E}\left[\alpha\left(X_s\right)\right], a) q_s(da) ds &= \int_A b(s, X_s, \mathbb{E}\left[\alpha\left(X_s\right)\right], a) \delta_{u_t}(da) \\
&= b(s, X_s, \mathbb{E}\left[\alpha\left(X_s\right)\right], u_t), \\
\int_A h\left(t, X_t, \mathbb{E}\left[\bar{\beta}\left(X_t\right)\right], a\right) q_t(da) &= \int_A h\left(t, X_t, \mathbb{E}\left[\bar{\beta}\left(X_t\right)\right], a\right) \delta_{u_t}(da) \\
&= h\left(t, X_t, \mathbb{E}\left[\bar{\beta}\left(X_t\right)\right], u_t\right).
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne que le problème de contrôle strict est un cas particulier de celui de relaxé.

3.4 Thèorème d'existence

Dans cette section et moyennant le théorème de sélection de Skorokhod on va démontrer l'existence d'un contrôle optimal relaxé minimisant le fonctionel de coût J sur l'ensemble $\mathcal{R}$ des contrôles relaxé.

Théoreme 3.4.1 *Il existe $q \in \mathcal{R}$ tel que :*

$$J(q) = \inf_{\mu \in \mathcal{R}} J(\mu) = \inf_{u \in U} J(u).$$

Preuve. Supposons que $l = \inf_{\mu \in \mathcal{R}} J(\mu)$,

Soit (q^n, X_1^n, X_2^n, W^n), (une suite minimisante) une famille telle que :

$$\lim_{n\to\infty} J(q^n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[g(X_T^n, \mathbb{E}\left[\bar{\alpha}\left(X_T^n\right)\right]) + \int_t^T \int_A h(t, X_t^n, \mathbb{E}\left[\bar{\beta}\left(X_t^n\right)\right], a) q_t^n(da)dt\right] = l,$$

et

$$\begin{cases} dX_t^n = \int_A b(t, X_t^n, \mathbb{E}\left[\alpha\left(X_t^n\right)\right], a) q_t^n(da)dt + \sigma(t, X_t^n, \mathbb{E}\left[\beta X_t^n\right]) dW_t^n \\ \qquad X_0^n = \zeta. \end{cases}$$

La famille (q^n, X^n, W^n) est tendue dans $\mathbb{P}(A) \times C^2$;c-à-d :

1. La suite $(q^n)_{n\geq 0}$ est tendue dans $\mathbb{P}(A)$, car $[0;T] \times A$ est compact, et d'après le Théorème de Prokhorov l'espace $\mathbb{P}(A)$ est également compact pour la topologie de la convergence faible. Le fait que $(q^n)_{n\geq 0}$ variable aléatoire avec des valeurs dans un compact $\mathbb{P}(A)$, donc la famille des distributions associeés à $(q^n)_{n\geq 0}$ est tendue.

2. (X^n, B^n) est tendue dans C^2 (vérifiants le critère de tension de Kolmogorov) :

Pour $p > 1$ et $s < t$ par l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X_t^n - X_s^n|^{2P}) &= \mathbb{E}\left[\left(\left|\int_s^t \int_A b(r, X_r^n, \mathbb{E}\left[\alpha\left(X_r^n\right)\right], a) q_r^n(da)dr \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. + \int_s^t \sigma(r, X_r^n, \mathbb{E}\left[\beta X_r^n\right]) dW_r \right|^2 \right)^P \right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \int_A |b(r, X_r^n, \mathbb{E}\left[\alpha\left(X_r^n\right)\right], a)|^2 q_r^n(da)dr \right.\right. \\
&\left.\left. + \int_s^t |\sigma(r, X_r^n, \mathbb{E}\left[\beta X_t^n\right])|^2 dr\right)^p\right] \\
&\leq 2C\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \int_A |X_r^n|^2 q_r^n(da)dr + \int_s^t |X_r^n|^2 dr\right)^p\right] \\
&\leq 2C\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s\leq l\leq t} |X_l^n|^2 \int_s^t \int_A q_r^n(da)dr + \sup_{0\leq l\leq t} |X_l^n|^2 \int_s^t dr\right)^p\right] \\
&\leq 4pC\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq l\leq t} |X_l^n|^{2p}\right] |t-s|^p + 4p\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq l\leq t} |X_l^n|^{2p}\right] |t-s|^p \\
&\leq K_p |t-s|^p, \text{avac } K_p = 8p\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq l\leq t} |X_l^n|^{2p}\right],
\end{aligned}$$

où K_p est une constante qui dépende uniquement de p, c'est le critère de tension de Kolmogorov pour une suite de processus est vérifié. Alors, la suite$(X^n)_n$ est tendue dans C.

De même façon pour la suite (W_t^n).

Donc d'après le théorème de sélection de Skorokhod, il existe un espace probabilitsé filtré $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\mathbb{P}})$ et deux suites $(\tilde{q}^n, \tilde{X}^n, \tilde{W}^n)$ et $\left(\tilde{q}, \tilde{X}, \tilde{W}\right)$ définies sur cet espace telle que :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\text{les lois de } (q^n, X^n, W^n) \text{ et } \left(\tilde{q}^n, \tilde{X}^n, \tilde{W}^n\right) \text{ coincident,} \tag{3.6}$$

c'est-à-dire les deux suites (q^n, X^n, W^n) et $\left(\tilde{q}^n, \tilde{X}^n, \tilde{W}^n\right)$ ont la même loi.

Il existe une sous-suite $\left(\tilde{q}^{n_k}, \tilde{X}^{n_k}, \tilde{W}^{n_k}\right)$ qu'on peut la note $\left(\tilde{q}^{n}, \tilde{X}^{n}, \tilde{W}^{n}\right)$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tilde{q}^{n}, \tilde{X}^{n}, \tilde{W}^{n}\right) = \left(\tilde{q}, \tilde{X}, \tilde{W}\right), \mathbb{P}, p\cdot s \text{ dans } \mathbb{P}(A)\times C^2. \tag{3.7}$$

En conséquence du (3.6) on a :

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathbb{E}}\left[g(\tilde{X}^n_T, \tilde{\mathbb{E}}\left[\bar{\alpha}\left(\tilde{X}^n_{T}\right)\right]) + \int_0^T\int_A h(t, \tilde{X}^n_t, \tilde{\mathbb{E}}\left[\bar{\beta}\left(\tilde{X}^n_t\right)\right], a)\tilde{q}^n_t(da)dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[g(X^n_T, \mathbb{E}\left[\bar{\alpha}\left(X^n_{T}\right)\right]) + \int_0^T\int_A h(t, X^n_t, \mathbb{E}\left[\bar{\beta}\left(X^n_t\right)\right], a)q^n_t(da)dt\right] \\
&= l = \inf_{\mu\in\mathcal{R}} J(\mu),
\end{aligned}$$

où $\tilde{\mathbb{E}}$ est l'espérence mathématiques relativement à $\tilde{\mathbb{P}}$.

Donc :

$$\tilde{\mathbb{E}}\left[g(\tilde{X}^n_T, \tilde{\mathbb{E}}\left[\bar{\alpha}\left(X^n_{T}\right)\right]) + \int_0^T\int_A h(t, \tilde{X}^n_t, \tilde{\mathbb{E}}\left[\bar{\beta}\left(\tilde{X}^n_t\right)\right], a)q^n_t(da)dt\right] = l = \inf_{\mu\in\mathcal{R}} J(\mu).$$

Alors :

$$\begin{aligned}
l &= \inf_{\mu\in\mathcal{R}} J(\mu) = \lim_{n\to\infty}\tilde{\mathbb{E}}\left[g(\tilde{X}^n_T, \tilde{\mathbb{E}}\left[\bar{\alpha}\left(X^n_{T}\right)\right]) + \int_0^T\int_A h(t, \tilde{X}^n_t, \tilde{\mathbb{E}}\left[\bar{\beta}\left(\tilde{X}^n_t\right)\right], a)\tilde{q}^n_t(da)dt\right] \\
&= \tilde{\mathbb{E}}\left[g(\tilde{X}_T, \tilde{\mathbb{E}}\left[\bar{\alpha}\left(X_{T}\right)\right]) + \int_0^T\int_A h(t, \tilde{X}_t, \tilde{\mathbb{E}}\left[\bar{\beta}\left(\tilde{X}_t\right)\right], a)\tilde{q}_t(da)dt\right] \\
&= J(\tilde{q}).
\end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$J(\tilde{q}) = \inf_{\mu\in\mathcal{R}} J(\mu).$$

Il nous reste à démontrer que $\tilde{X}$ est une solution de l'équation (3.4).

En effet, d'après (3.6) on a :

$$\tilde{X}_t^n = \zeta + \int_0^t \int_A b(s, \tilde{X}_s^n, \tilde{\mathbb{E}}\left[\alpha\left(\tilde{X}_s^n\right)\right], a)\tilde{q}_s^n(da)ds + \int_0^t \sigma(s, \tilde{X}_s^n, \tilde{\mathbb{E}}\left[\beta(\tilde{X}_s^n)\right])d\tilde{W}_s^n, \tag{3.8}$$

b, σ, α et β étant continues alors par (3.7) on trouve $\mathbb{P}.p.s$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \int_A b(s, \tilde{X}_s^n, \tilde{\mathbb{E}}\left[\alpha\left(\tilde{X}_s^n\right)\right], a)\tilde{q}_s^n(da)ds = \int_0^t \int_A b(s, \tilde{X}_s, \tilde{\mathbb{E}}\left[\alpha\left(\tilde{X}_s\right)\right], a)\tilde{q}_s(da)ds,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t \sigma(s, \tilde{X}_s^n, \tilde{\mathbb{E}}\left[\beta(\tilde{X}_s^n)\right])d\tilde{W}_s^n = \int_0^t \sigma(s, \tilde{X}_s, \tilde{\mathbb{E}}\left[\beta(\tilde{X}_s)\right])d\tilde{W}_s.$$

Et par conséquent on a :

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{X}_t^n = \zeta + \int_0^t \int_A b(s, \tilde{X}_s, \tilde{\mathbb{E}}\left[\alpha\left(\tilde{X}_s\right)\right], a)\tilde{q}_s(da)ds + \int_0^t \sigma(s, \tilde{X}_s, \tilde{\mathbb{E}}\left[\beta(\tilde{X}_s)\right])d\tilde{W}_s.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{X}_t^n = \tilde{X}_t, \tilde{\mathbb{P}}.p.s$, alors

$$\tilde{X}_t = \zeta + \int_0^t \int_A b(s, \tilde{X}_s, \tilde{\mathbb{E}}\left[\alpha\left(\tilde{X}_s\right)\right], a)\tilde{q}_s(da)ds + \int_0^t \sigma(s, \tilde{X}_s, \tilde{\mathbb{E}}\left[\beta(\tilde{X}_s)\right])d\tilde{W}_s,$$

qui est la forme intégrale de l'équation (3.4) relativement a $\tilde{W}$. ■

Corollaire 3.4.1 *Sous la condition de convexity de Roxin : l'ensemble*

$$(b, h)(t, x, x', A) = \left\{b_i(t, x, x', u), h(t, x, x', u)/u \in U, i = 1, \cdots, n\right\},$$

est convexe et fermé. Le contrôle relaxé optimal est une masse de Dirac au point d'un contrôle strict optimal c'est-à-dire

$$\tilde{q}_t(da) = \delta_{u_t}(da).$$

Conclusion

Ce travail est consacré aux équations différentielles stochastiques (EDS) de type champ moyen de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t, \mathbb{E}\left[\alpha\left(X_t\right)\right], u_t)\ dt + \sigma(t, X_t, \mathbb{E}\left[\beta\left(X_t\right)\right])dW_t \\ X_0 = \zeta. \end{cases}$$

Nous avons étudié en détaille un théorème d'existence des contrôles optmaux relaxés pour un système governé par cette EDS de type champ moyen. Ici les coefficients dépend du processus d'état ainsi que leur espérance mathématiques. La fonction de coût est aussi de type champ moyen. La méthode de démonstration est basée sur les convergences faible et le théorème de représentation de Skorokhod.

Pour cet objectif, on a donné quelques rappels de base concernant de calcul stochastique (définition et généralité de processus stochastique et intégrale stochastique,. . . ect), et on a étudié l'existence et l'unicité des solutions pour les équations différentielles stochastiques (EDS) dans le cas Lipschitzien.

Notations et symbols

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	$\longrightarrow$	Espace de probabilité.
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$	$\longrightarrow$	Espace de probabilité filltré.
$\mathcal{B}\,(.)$	$\longrightarrow$	Tribu Borélienne.
$\mathbb{E}$	$\longrightarrow$	L'espérance par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$.
$(E, \mathcal{E})$	$\longrightarrow$	Espace mesurable.
$\mathbb{R}^d$	$\longrightarrow$	l'espace réel euclidien de dimension d.
$i.i.d$	$\longrightarrow$	indépendantes identiquement distribées
$MB, (M_t)_{t\geq 0}$	$\longrightarrow$	Mouvement Brownien.Martingale
A	$\longrightarrow$	Espace de valeurs des contrôles.
$J(.)$	$\longrightarrow$	La fonction de coût à minimiser.
$\max, \min$	$\longrightarrow$	maximum, minimum.
σ	$\longrightarrow$	Cofficient de diffusion.
b	$\longrightarrow$	Drift.
U	$\longrightarrow$	Ensemble des contrôles admissibles.

q	$\longrightarrow$ Contrôle relaxé.
$\mathbb{P}-p.s$	$\longrightarrow$ Presque sûrment pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$\mathcal{R}$	$\longrightarrow$ Ensemble des contrôles relaxés.
$s \wedge t$	$\longrightarrow$ $\min(s,t)$.
$sign(a) : sign(x) = +1; 1; 0$	$\longrightarrow$ selon que a est positif, négatif, nul, respectivement.
$< X, X >_T$	$\longrightarrow$ Variation quadratique de X sur $[0,T]$.
$\exp$	$\longrightarrow$ Exponentiel.
$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$	$\longrightarrow$ filtration.

Bibliographie

[1] Berglund, N. Introduction aux équations différentielles stochastiques. (2005).

[2] Damien Lambetron, Bernard Lapeyre, Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. ISBN 978-2-7298-71987, Èllipses Edition Marketings S.A., (2012).

[3] Jeanblanc Monique. Cours de Calcul stochastique. Université d'Evry. (2006).

[4] Jean-Christophe Breton, Calcul stochastique M2 Mathématiques, Université de Rennes 1, Octobre-Décembre (2021).

[5] Philippe Briand. Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades, Mars (2001).

[6] Nils Berglund. Martingales et calcul stochastique, Master 2 Recherche de Mathématiques. Université d'Orléans, Janvier (2014).

Résumé

Dans ce travail, nous étudions l'existence des contrôles relaxés optimaux pour un système gouverné par des équations différentielles stochastiques de type champ moyen. La fonction de coût est aussi de type champ moyen. La méthode de démonstration est basée sur les convergences faibles et le théorème de représentation de Skorokhod. Dans le premier chapitre. , nous donnons quelque généralité sur le calcul stochastique. Le deuxième chapitre concerne a établir un résultat d'existence et d'unicité des solutions pour EDS non linéaires dans Le cas Lipchitzien. Dans le troisième chapitre, nous établissons le résultat d'existence des contrôles relaxés optimaux pour l'équation différentielle stochastique de type champ moyen.

Summary

In this work, we study the existence of optimal relaxed controls for a system governed by stochastic differential equations of mean-field type. The cost function is also of mean field type. The proof method is based on weak convergences and Skorokhod's representation theorem. In the first chapter, we give some general information on stochastic calculus. The second chapter concerns to establish a result of existence and uniqueness of solutions for nonlinear EDS in the Lipchitz case. In the third chapter, we establish the existence result of the optimal relaxed controls for the stochastic differential equations of mean-field type.

ملخص

ندرس وجود ضوابط استرخاء مثالية لنظام تحكمه المعادلات التفاضلية العشوائية الزمنية من نوع الحقل المتوسط. دالة التكلفة هي أيضًا من نوع الحقل المتوسط. تعتمد طريقة الإثبات على التقاربات الضعيفة ونظرية التمثيل لصكوروخود ، وفي الفصل الأول نقدم بعض المعلومات العامة عن حساب التفاضل والتكامل العشوائي. يتعلق الفصل الثاني بإثبات نتيجة وجود ووحدانية الحلول لـ المعادلات التفاضلية العشوائية الزمنية غير الخطية في حالة ليبشيتز. في الفصل الثالث ، قمنا بتأسيس نتيجة وجود ضوابط الاسترخاء المثلى للمعادلات التفاضلية العشوائية الزمنية من نوع الحقل المتوسط.