République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option :

Analyse

NOM et Prénom

MATLOUG Laila

Titre :

Sur la résolution des EDP d'ordre 2 linéaire.

Devant le Jury :

Dr.	**RADJEH Fouzia**	U. Biskra	Président
Dr.	**GUIDAD Derradji**	U. Biskra	Rapporteur
Dr.	**SOUKEUR Abdessalam**	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 27/06/2022

Dédicace

Dieu soit loué, qui m'a permis d'accomplir cet humble travail et m'a donné la patience, l'endurance et la capacité de persévérer

Je dédie le fruit de mes efforts à mon bien le plus cher en ce monde, à qui sa supplication a été le secret de ma réussite, ma chère mère, **"Lahouel Noura"**.

A celui qui m'a appris à donner sans attendre A celui qui porte fièrement son nom A mon cher père, **"Mohammed"**

A mon cher grand-père **"Sadik"**, que Dieu ait pitié de lui, qui a été comme un deuxième père pour moi et a un grand mérite sur moi

A ceux avec qui j'ai connu le sens de la vie, mes soeurs, **Imane** et **Rima**, et mes frères **Salah Chaaban Ismail et**

Abd Aldjalil

Et à ma sœur, qui n'est pas née de ma mère, **Manal**

Et aux amis de toute une vie qui m'ont soutenu contre vents et marées, **Samia, Amira, Serin, Kholoud, Khawla, Kalthoum, Basma, Ikram, Roumaissa, Fatima, Wasila, Manal, Rafika, Somia, Habiba et Rima.**

A ma famille **Matloug et Lahouel**

Et à tous ceux qui m'ont soutenu de loin ou de près

$\mathcal{R}$emerciements

Avant tout nous remercions **ALLAH** qui nous a orienté au chemin du savoir et aux

portes de la science.

je remercie **mes parents** car grâce à eux que j'ai pu continuer mes études à un niveau si avancé.

Je remercie mon encadreur **GUIDAD Derradji** qui m'a guidé dans mon projet et m'aider à trouver des solutions pour avancer. Ainsi que les professeurs, **RADJEH Fouzia** et **SOUKEUR Abdessalam** qui m'ont accepté de présider les jurys de soutenance.

je suis particuliérement reconnaissante envers Pr **LAKHDARI Imad eddine** le doyen de ma facultré, sans oublier de remercier tous mes ensiengnants de primaire à l'université.

En fin, je remercie toutes les personnes, amis, qui directement ou indirectement ont contribué à la réalisation de ce travail.

Notations et symbols

EDP	:	Èquation aux dérivées partielles
EDO	:	Èquations différentielles ordinaires
ψ	:	Est une fonction des ondes de température.
$\partial\Omega$	:	La frontière de Ω.
C^1	:	Classe C^1
D	:	Désigne un ouvert de$\mathbb{R}^n$
D_f	:	Son ensemble de définition

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé "EDP" dans la suite, constituant une branche importante des mathématiques appliquées. Elles expriment sous forme d'égalités des relations que doivent satisfaire les dérivées partielles d'une certaine fonction inconnue u de plusieurs variables a n de décrire un phénomène physique et pour satisfaire une propriété prescrite. Nous avons l'habitude de classer les équations aux dérivées partielles en trois grandes classes fondamentales d'équation : elliptique, parabolique et l'équation hyperbolique La physique, la biologie et les sciences pour l'ingénieur nécessitant de savoir résoudre une grande variétés des équations différentielles aux dérivées partielles.

Cependant l'étude systématique des EDP est bien plus récente, et c'est seulement au cours du 20 ème siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. un pas de géant à été accompli par **L. Schwartz** lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrès au moins comparable est du à **L. Hormander** pour la mise au point du calcul pseudodi érentielle (au début des années 1970). il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des EDP reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21 ème siècle. d'ailleurs ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciences appliquées, mais jouent aussi un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-même, à la fois en géométrie et en analyse.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres, **le premier chapitre** contient des définitions et proprieté de base sur les EDP. Dans **le deuxieme chapitre**, nous allons détallaier comment trouver la solution de problème par deux méthodes le premier séparation des variables et le deuxieme forme canonique, et Integrale de Poisson. **Le dernier chapitre** est un ensemble des différentes examples qui l'on va chercher les solutions par les deux méthodes.

Chapitre 1

Quelques définition et propriété de base

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une relation reliant une fonction inconnue des plusieurs variables u à ses dérivées partielles. Les EDP se trouvent dans les applications de la physique, l'ingénierie, la biologie, l'économie, etc. En effet et dans ces domaines, les phénomènes se modélisent souvent par des systèmes mathématiques impliquant des EDP. Les différents processus du phénomène se décrivent en déterminant une relation entre u et ses dérivées partielles

1.1 Concepts préliminaires

1.1.1 Equations différentielles ordinaires.

L'exemple le plus simple est lorsque la fonction u dépend uniquement d'une seule variable. Alors cette relation est décrite simplement par ce qu'on appelle une EDO.

Définition 1.1.1 *Une équation différentielle ordinaire, également noté EDO, d'ordre* n *est une relation entre la variable réelle* x*, une fonction inconnue* $x \to u(x)$ *et ses dérivées* $u', u'', ..., u^{(n)}$ *au point* x *défine par :*

$$F\left(x, u'(x), u''(x), ..., u^{(n)}(x)\right) = 0$$

où F *n'est pas indépendante de sa dernière variable,* $u^{(n)}$ *on prendra* x *dans un intervalle* I*, (*I *peut être* $\mathbb{R}$ *tout entier).*

Exemple 1.1.1 *Le mouvement d'un objet sur une droite peut être décrit par l'équation*

$$u''(x) = g(u(x))$$

La variable x correspond au temps et la fonction u correspond à la position de l'objet. Dans ce cas $x \in I \subset \mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rcl} F:(x,y) & \to & F(x,y_0,y_1,y_2) = y_2 - g(y_0) \\ \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

1.1.2 Equation aux dirévées partielles.

Une equation aux dérivées partielles est une equation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (u ci-dessous) et les variables indépendantes ($x, y; ...$ ci-dessous) une ou plusieurs dérivées partielles. Cette equation est ainsi de la forme :

$$F\left(x, y, ...u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x^2}, ...\right) = 0$$

Où F est une fonction de plusieurs variables. Si n est le nombre de variables indépendantes, alors nous considérons le n-tuplet de variables indépendantes $(x; y; ..)$

comme appartenant a un domaine D convenable de $\mathbb{R}^n$. Nous utiliserons EDP comme abréviation d'équation aux dérivées partielles. u est la solution de l'EDP Si, aprés substitution, la relation :

$$F\left(x, y, ...u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x^2}...\right) = 0$$

est satisfaite pour $x, y, ...$ appartenant à une certaine région Ω de l'éspace des variable indépendantes.

Définition 1.1.2 *Une équation aux dérivées partielles*(EDP) *est une relation fonctionnelle entre une fonction inconnue u de plusieurs variable* $(u = u(x_1, ...x_n))$ *est ses dérivées* $(x_1, ..., x_n) \in D$,*où* D *désigne un ouvert de* $R^n, (n \geq 2)$.

Définition 1.1.3 *L'ordre d'une EDP est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé.*

Exemple 1.1.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos x \quad ; \quad 2^{er} ordre.$$

Définition 1.1.4 *Si u et ses dérivées partielles apparaissant séparament et* $\ll$ *à la puissance* $1 \gg$ *dans l'EDP celle-ci est dit linéaire.*

Exemple 1.1.3 $u = u(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad 1^{er} \textit{ordre linéaire.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \sin u = 0 \quad 1^{er} \textit{ordre non-linéaire.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 2^{éme} \textit{ordre non-linéaire.}$$

Pour une EDP non-linéaire homogène :

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \text{ solution} \\ \\ u_2 \text{ solution} \end{array}\right\} \lambda u_1 + \mu u_2 \text{ est solution.}$$

1.1.3 Exemples des EDP.

Equation de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ où } u\left(x,t\right)$$

est utilisée pour modéliser la polution de l'air, la dispersion des colorants ou même le flux de trafic.

Equation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0 \text{ où, } u\left(x,y;z;t\right)$$

est utilisée dans l'étude de la conduction thermique

Equation de Laplace ou du pontentiel :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \text{ où, } u(x,y,z,t)$$

Apparait notamment dans : astronomie, électrostatique, mécanique des fluides et la mécanique quantique.

EDP linéaire du 1er ordre.

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + C(x,y)u = D(x,y)$$

est la forme la plus générale pour une EDP linéaire 1^{er} ordre.

EDP linéaire du $\mathbf{2^{éme}}$ ordre.

Définition 1.1.5 *Une équation aux dérivées partielles du $2^{éme}$ ordre de deux variables x et y est une équation de la forme :*

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+2E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u=H(x,y)$$

dont un cas particulier important est celui ou A, B, C, D et F sont des fonctions.

Exemple 1.1.4 *Donnons quelques exemples fondamentaux d'EDP du second ordre*

Equation de Laplace : *En dimension n, on cherche $u = u(x_1, ...x_n)$ tel que*

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans un ouvert } \Omega. \\ \qquad u = y \text{ dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

Equation des ondes : Pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on cherche $u = u(x_1, ...x_N, t)$ telque

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \times [0,T] \\ \qquad u = g \text{ sur } \delta\Omega \times [0,T] \\ \qquad u(x, t=0) = u_0(x) \\ \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = v_0(x) \end{cases}$$

Condition sur l'ensemble des solutions.

Pour trouver des solutions particuliéres d'EDP à partir de la solution générale, on va imposer des conditions restrictives sur l'ensemble des solutions.

Les conditions les plus fréquentes sont :

1. Conditions initiales : Si u est une fonction de $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^\star$ on donne

$u(x, t_0) = \Phi_0(x)$ ou $D^\alpha u(x, t_0) = \Phi_0(x)$, on parle aussi des conditions de Cauchy.

2. Conditions aux limites : Une condition aux limites est une contrainte sur les valeurs que prennent les solutions des EDP sur une frontiére. Ces conditions imposent une valeur de u ou de ses derivées au bord du domaine .

Classification des équations aux dérivées partielles du $2^{éme}$ ordre.

Définition 1.1.6 *Une équation de la forme :*

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x^2}\right) \tag{1.1}$$

Où $a; b; c$ sont des fonctions données, et F une fonction défnie dans un ouvert de D. soit $\Delta(x,y) = b^2(x,y) - 4a(x,y)c(x,y)$, on a les cas suivantes :

1. (1.1) est dite hyperbolique si $\Delta(x,y) > 0$.

2. (1.1) est dite parabolique si $\Delta(x,y) = 0$.

3. (1.1) est dite elliptique si $\Delta(x,y) < 0$.

Exemple 1.1.5

$$k^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.2}$$

on à $a = k^2$, $b = 0$, $c = -1 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = a^2 \geq 0$ donc :

$$\begin{cases} \text{si } a = 0 \text{ l'équation } (1.2) \text{ est parabolique} \\ \text{si } a \neq 0 \text{ l'équation } (1.2) \text{ est hyperbolique} \end{cases}$$

Chapitre 2

les méthodes de résolution des EDP

2.1 Réduction à la forme standard du second ordre.

2.1.1 Changement de variables.

Proposition 2.1.1 *On considère le changement de variables* $(\xi(x;y),\ \eta(x;y))$ *supposé deux fois continument diférentiable et tel que le Jacobien* J *ne s'annule pas, alors il existe des fonctions* a', b', c' *et* F' *telles que*

$$a'(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+b'(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+c'(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=F'\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{2.1}$$

L'équation (2.1) *s'appelle la forme standard ou canonique de l'équation* (1.1)*. De plus, on*

$$\Delta'\left(\xi,\eta\right)=b'^2\left(\xi,\eta\right)-4a'\left(\xi,\eta\right)c'\left(\xi,\eta\right)=J^2\Delta\left(x,y\right)$$

2.1.2 Forme canonique.

L'écriture d'une EDP du second ordre sous la forme canonique permet de la mettre sous une forme plus simple. Elle consiste d'éliminer certaines dérivées secondes. Cette procédure va aiderà chercher des solutions comme l'équation des ondes. La forme canonique d'une EDP du second ordre dépend du type de l'équation. Pour cela on a besoin d'introduire la notion d'une courbe caractéristique associe à l'équation (1.1) .

Définition 2.1.1 *Une caractéristique de l'équation* (1.1) *est la courbe satisfaisant à l'équation diférentielle :*

$$a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - b\frac{\partial y}{\partial x} + c = 0 \tag{2.2}$$

Dans ce qui suit, on traite chaque cas indépendamment en donnant la forme correspondante.

Cas hyperbolique.

Définition 2.1.2 *Soit* $(1.1)_h$ *une équation de type hyperbolique. On sait que dans ce cas* $b^2 - 4ac > 0$ *et par conséquent l'équation* (2.2) *admet deux solutions defférent. Donc, il existe deux courbes caractéristiques réelles des équations* $\psi_1(x, y) = c_1$ *et* $\psi_2(x, y) = c_2$ *pour l'équation* (2.2)*.*

théorém 2.1.1 *Les équations des courbes caractéristiques sont données par :*

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En posant $\varsigma = \psi_1(x,y)$ et $\eta = \psi_2(x,y)$ où $\psi_i\,;\ i = 1,2$, la forme canonique de $(1.1)_h$ s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \varsigma \partial \eta} = G\left(\varsigma, \eta, \nu, \frac{\partial \nu}{\partial \varsigma}, \frac{\partial \nu}{\partial \eta}\right).$$

Exemple 2.1.1 *Considérons l'équation suivante*

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$\Delta(x,y) = b^2(x,y) - 4a(x,y)c(x,y) = 4x^2y^2$: Donc si $x = 0$ ou $y = 0$; cette EDP est parabolique au point (x,y), si non elle est hyperbolique au point (x,y). Considérons un domaine D pour le quel l'EDP est hyperbolique à tous ses points. A ces points, les équations caractéristiques sont :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{0 \pm \sqrt{4x^2y^2}}{2y^2} = \pm \frac{x}{y}.$$

En utilisant la méthode de séparation de variables, on obtient :$\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) = c_1$ et $\frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right) = c_2$. c_1 et c_2 sont des constantes. Les courbes caractéristiques :

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) = x^2 + y^2, \\ \varphi_2(x,y) = x^2 - y^2. \end{cases}$$

On pose

$$\xi = x^2 + y^2,\ \eta = x^2 - y^2$$

Et $u(x,y) = v(\xi,\eta)$ En utilisant ce changement de coordonnées, on obtient

$$\begin{cases} x^2 = \eta - \xi, \\ y^2 = \eta + \xi \end{cases}$$

Par la règle de chaînes, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -x\frac{\partial v}{\partial \xi} + x\frac{\partial v}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial y} = y\frac{\partial v}{\partial \xi} + y\frac{\partial v}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-x\frac{\partial v}{\partial \xi} + x\frac{\partial v}{\partial \eta}\right), \\
&= x^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2x^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + x^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}. \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial v}{\partial \xi} + y\frac{\partial v}{\partial \eta}\right), \\
&= y^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2y^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + y^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}.
\end{aligned}$$

Et finalement

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4x^2y^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \left(x^2 + y^2\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} + \left(x^2 - y^2\right)\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

ce qui implique aprés simplification

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\eta}{2\left(\xi^2 - \eta^2\right)}\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\xi}{2\left(\xi^2 - \eta^2\right)}\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

C'est la forme canonique de l'EDP aux points pour les quels celle-ci est hyperbolique.

Cas parabolique.

Définition 2.1.3 *Soit* $(\mathbf{1.1})_p$ *une équation hyperbolique. On sait que dans ce cas* $b^2 - 4ac = 0$ *et par conséquent l'équation* (2.2) *admet deux solutions confondues. Donc, il existe une seule courbe caractéristique réelle d'équation* $\psi_1(x, y) = c_1$ *pour l'équation*(2.2)*.*

théorém 2.1.2 *L'équation de la courbe caractéristique est donnée par :*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2a}.$$

en posant

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y), \\ \eta = \varphi_2(x, y). \end{cases}$$

où φ_2 satisfait $J(\xi, \eta) \neq 0$, la forme canonique de $(\mathbf{1.1})_p$ s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} = G\left(\xi, \eta, \nu, \frac{\partial \nu}{\partial \xi}, \frac{\partial \nu}{\partial \eta}\right).$$

Exemple 2.1.2 *L'équation suivante*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

est parabolique sur $\mathbb{R}^2$: L'équation des caractéristiques est donnée par :

$$\frac{dy}{dx} = 3$$

Dont la solution est $3x - y = C$: La première courbe caractéristique est $\varphi_1(x, y) = 3x - y$:

On pose donc $\xi(x,y) = 3x - y$: Pour obtenir une seconde coordonnée caractéristique ; on a beaucoup de choix. Pour cette exemple, on prendra $\eta(x,y) = x$. Cette fonction a bien des dérivées partielles d'ordre $m \leq 2$ continues et

$$J = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Pour tout point de $\mathbb{R}^2$: En utilisant ce changement de coordonnées

$$\begin{cases} \xi = 3x - y, \\ \eta = x. \end{cases}$$

et on pose $u(x,y) = v(\xi,\eta)$; on obtient

$$\begin{cases} x = \eta, \\ y = 3\eta - \xi. \end{cases}$$

En utilisant la règle de chaînes, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial \xi}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}) = 9\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) = -3\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial v}{\partial \xi \partial \eta}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 5\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

Équation elliptique.

Soit $(1.1)_e$ une équation elliptique. On sait que dans ce cas $\Delta = b2 - 4ac < 0$ et par conséquent l'équation (2.2) admet deux solutions complexes. Donc, les courbes caractéristiques sont défnies à partir des parties réelle et imaginaire des solutions.

théorém 2.1.3 *Soit φ une solution de l'équation*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm i\sqrt{\Delta}}{2a}$$

La forme canonique de $(1.1)_e$ s'écrit

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2} = G\left(\xi, \eta, \nu, \frac{\partial \nu}{\partial \xi}, \frac{\partial \nu}{\partial \eta}\right)$$

Où (ξ, η) sont données par

$$\begin{cases} \xi = \operatorname{Re}\varphi, \\ \eta = \operatorname{Im}\varphi. \end{cases}$$

Exemple 2.1.3 *Considérons l'équation de Tricomi :*$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial \eta^2} = 0$

$\Delta(x, y) = b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y) = -4x = 4i^2x$. comme $x > 0$, cette EDP est elliptique sur le domaine D. A ces points, les équations caractéristiques sont :

$$\frac{dy}{dx} = \pm i\sqrt{x}.$$

En utilisant la méthode de séparation de variables, on obtient $\frac{3}{2}y \pm ix^{\frac{3}{2}} = C$ où C est une constante. On pose :

$$\begin{cases} \xi = \frac{3}{2}y, \\ \eta = -x^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Et $u(x,y) = v(\xi,\eta)$: En utilisant la règle de chaînes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}\frac{\partial v}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3}{2}\frac{\partial v}{\partial \xi},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = \frac{9}{4}x\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial v}{\partial \eta},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{2}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) = \frac{9}{4}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}.
\end{aligned}$$

Et finalement

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{9}{4}x\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{9}{4}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\\
&= \frac{9}{4}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\eta}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\right)
\end{aligned}$$

La forme canonique de l'équation de Tricomi est

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{3\eta}\frac{\partial v}{\partial \eta}$$

2.2 Méthode de séparation des variables de fourier.

La méthode de séparation des variables ou la méthode de fourier est largement utilisée pour résoudre les problèmes aux limites relatives aux EDP. Elle consiste de chercher des solutions particulières de la forme séparable $u(x,y) = X(x)Y(y)$, ou X et Y sont des fonctions de x et y respectivement. Dans de nombreux cas, l'EDP se réduit à deux équations differentielles ordinaires pour X et Y. On obtient donc des problèmes aux limites impliquant des EDO. Cependant, la question de la séparabilité d'une EDP en deux équations différentielles ordinaires ou plus n'est pas toujours possible. Dans ce chapitre, on va appliquer cette méthode sur des problèmes aux limites relative aux EDP linéaire.

2.2.1 Situation du problème

On decérit maintenant la méthode de séparation des variables et examine les conditions d'applicabilité de la méthode aux problèmes qui impliquent des EDP de second ordre de deux variables indépendentes. On considère donc le problème aux limites dont l'inconnu $u(x,t)$ posé sur un domaine de la forme $I \times J$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I = [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$.

$$\begin{cases} a_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_1(t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_2(x)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(t)\frac{\partial u}{\partial t} + (a_3(x) + b_3(t))\,u(x,t) = h(x,t)\,,(x,t) \in I \times J \\ u(x,0) = f(x)\,, x \in I \text{ condition initiale, condition aux limites} \\ \text{où } a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, h(x,t)\,, f(x) \text{ sont des fonctions données.} \end{cases}$$

<u>Conditions aux limites</u> : On distingue différents types des conditions aux limites $(C.L)$

▶**Conditions de Dirichlet :** u est fixée sur le bord de I :

$$u(a,t) = u(b,t) = 0$$

▶**Conditions de Neumann :** La derivée normale de u est fixée sur I :

$$u_x(a,t) = u_x(b,t) = 0$$

▶**Conditions de Robin ou mixte :**

$$C_1(x)\,u(a,t) + C_2(x)\,u(b,t) = 0$$

►**Conditions périodiques :**

$$u\,(a,t) = u\,(b,t) \;\text{ et }\; u_x\,(a,t) = u_x\,(b,t)$$

Rapportons les principales étapes de cette méthode :

1. On recherche les solutions séparées de (1.1), ces solutions sont de la forme spéciale :
$$u(x,t) = X(x)T(t)$$
et satisfont les conditions aux limites et la condition initiale il se trouve que X et T doivent être des solutions des problèmes aux limites linéaires (p_1) et (p_2) relatives aux X et T, respectivement.
2. On résout les problémes (p_1) et (p_2), les solutions de (p_1) nous permettent de construire une base hilbertiènne $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ on désigne par $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ les solutions de (p_2).
3. On utilise le principe de superposition générale pour générer à partir de $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une solution plus générale du problème, sous la forme d'une série infinie de solutions séparées.
4. Dans la derniére étape, on calcule les coefficient de cette série et étudie sa convergence.

Principe de superposition

Si u_1 et u_2 satisfont une EDP linéaire homogène, alors une combinaison linéaire arbitraire $c_1u_1 + c_2u_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ satisfait également la même équation. Dans la suite on va rappeler quelques notions essentielles sur les séries de fourier qui seront utilisées dans le reste de ce chapitre.

2.2.2 Séries de Fourier et coefficients de Fourier.

Définition 2.2.1 *Une suite de fonction* $\{\phi_n(x)\}, n \geq 0$ *définit sur un intervalle* $[a, b]$, *décrit un système orthonormal par rapport à la fonction de poids* $q(x)$ *si et seulment si :*

$$\forall n \geq 0, \forall m \geq 0, \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)qJ(x)dx = \begin{cases} 1 \ si \ m \neq n \\ 0 \ si \ m = n \end{cases}$$

Définition 2.2.2 *Le but de cette section est d'ecrire une fonction* $f(x)$ *continue par morceaux et* 2π *périodique sous la forme :*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Ou a_n, b_n pour $n \geq 0$ sont appellés les coefficients de Fourier associes à la fonction f

Définition 2.2.3 *Les cofficients de fourier associées à la fonction* f *sont données par :*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx; \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx sin \geq 1$$

Exemple 2.2.1 *Soit* $f(x) = 2 + x$ *sur l'intervalle* $[-\pi, \pi]$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2 + xdx = 4$$

Si $n \geq 1$ *alors :*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (2 + x)\cos(nx)dx$$

Par partier donc

$$\begin{aligned}
a_n &= \left[\frac{1}{n\pi}(2+x)\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)dx \\
&= \frac{\cos(n\pi)}{n^2\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2\pi}
\end{aligned}$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2+x)\sin(nx)dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n}$$

Donc la série de fourier :

$$SF(f) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty}((\frac{4(-1)^n}{n^2\pi})\cos(nx) + (\frac{4(-1)^{n+1}}{n})\sin(nx))$$

Une remarque importante pour faciliter les calculs.

Remarque 2.2.1 *1. Si f est une fonction paire, alors la série de fourier est :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nx) \ \text{avec} \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx \ \text{pour} \ n \geq 0.$$

2. Si f est une fonction impaire, alors la série de fourier est :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin(nx) \ \text{avec} \ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx \ \text{pour} \ n \geq 0.$$

2.2.3 Application

Equation de la chaleur

Considérons le problème sur l'intervalle $[0, L]$ avec $L \geq 0$ constitué de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < L, t > 0, \tag{2.3}$$

Les conditions aux limites de type Direchlet :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t \geq 0 \tag{2.4}$$

et la condition initiale :

$$u(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq L \tag{2.5}$$

où f est une fonction donnée et k est un constante positive. Ce problème modélise la condition thermique dans un tige de longeur L. La chaleur est supposée nulle aux deux extrémités du tige et égale a $f(x)$ à l'instant $t = 0$.

Les conditions aux limites impliqent que

$$\begin{cases} f(0) = u(0,0) = u(L,t) = 0 \\ \qquad\qquad \text{et} \\ f(L) = u(L,0) = u(L,0) = 0 \end{cases}$$

ces deux conditions s'appellent les conditions de compatibilité.

Equation de la chaleur avec condition de Neumann.

Considérons le problème de conduction thermique suivant dans un intervalle fini :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0. \tag{2.6}$$

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0,\ t \geq 0. \tag{2.7}$$

$$u(x,0) = f(x),\ 0 \leq x \leq L. \tag{2.8}$$

Où f est une condition initiale donnée est k est une constante positive. Afin de rendre (2.7) consistant avec (2.8) ou suppose la condition de compatibilité : $f_x(0) = f_x(L) = 0$. Ce problème correspond à l'évolution de la températeure $u\,(x,t)$ dans un tige thermo-conductrice unidimentionelle homogène de longeur L dont la temperature initiale (au temps $t = 0$) est connue et telle qu'il n'ya pas de flux de chaleur a travers les limites (la chaleur n'entre pas ou ne sort pas a travers le système). On commence par rechercher des solutions de la forme spéciale :

$$u\,(x,t) = X\,(x)\,T\,(t) \tag{2.9}$$

où X et T sont des fonctions des variables x et t respectivement, différencions la solution séparée (2.9) et remplaçons dans l'EDP, on obtient :

$$XT_t = KX_{xx}T$$

On peut réecrire par λ (appellé constante de séparation) telle que :

$$\frac{T_t}{T} = K\frac{X_{xx}}{X} = -\lambda \tag{2.10}$$

λ est une constante réelle. Comme on cherche des solutions ne s'annule pas identiquement, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ telque $T(t) \neq 0$ conséquement on obtient :

$$\begin{cases} u_x(0,t) = X_x(0).T(t_0) = 0 \\ u_x(L,t) = X_x(L).T(t_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow X_x(0) = X_x(L) = 0 \tag{2.11}$$

et

$$\{T' + \lambda KT = 0, t > 0 \tag{2.12}$$

où λ est une constante. On commence d'abord à résoudre le système (2.11)

Exemple 2.2.2 *Soit la fonction $f(x) = 1 + x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$ alors $L = \pi$ et*

$$\delta_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1+x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x + \frac{1}{2}x^2\right]_0^\pi = 1 + \pi$$

si $n \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} \delta_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1+x)\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(1+x)}{n}\sin(nx)\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\cos(nx)\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}\left[\cos(n\pi) - 1\right] = \frac{2}{\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \frac{1}{2}(1+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi}\left[(-1)^n - 1\right]\right]\cos(n\pi x / L)$$

Dans ce cas le principe de superposition généralisée implique la solution formelle

$$u(x,t) = \delta_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{\pi}\left[(-1)^n - 1\right]\right]\cos(n\pi x / L)\exp(-k(n\pi / L)^2)t$$

2.2.4 Intégrale de Poisson

Propagation de la chaleur dans une barre infinie

Définition 2.2.4 *Supposons que soit fixée à l'instant initial la température de diverses sections d'une barre infinie. On demande de déterminer la distribution de la température dans la barre aux instants suivants. (on est conduit au probléme de la propagations de la chaleur dans une barre infinie dans la cas de l'etude des problèmes physiques, la longueur de la barre etant si grand que la température de ses points intérieurs aux moments considérés ne dépend que trés peu des conditions aux extrémités de la barre). Si la barre coincide avec l'axe Ox, le problème mathématiquememt s'énonce de la manière suivant. Trouver la solution de l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \tag{2.13}$$

dans le domaine $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, vérifiant la condition initiale de de sépart

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{2.14}$$

Appliquons, pour trouver la solution la méthode de séparation des variables, c'est-à-dire nous allons rechercher une solution particulière de l'équation (2.13) sous forme de produit de deux fonctions :

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{2.15}$$

Portant dans l'équation (2.13) nous aurons :

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

où

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2. \tag{2.16}$$

Chacun de ces repports ne peut dépendre respectivement ni de x ni de t, et c'est pourquoi nous les égalons à une constant $-\lambda^2$. Nous obtenons de (2.16) deus équations :

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0 \tag{2.17}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{2.18}$$

En les résolvant nous trouvens :

$$T = C\exp(-a^2\lambda^2 t),$$
$$X = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x).$$

Portant dans (2.15), nous obtenons :

$$u_\lambda(x,t) = \exp(-a^2\lambda^2 t)\left[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\right]. \tag{2.19}$$

(La constante C est incluse dans $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$). Pour chaque valeur de λ nous obtenons une solution de la forme (2.19). Les constantes arbitraires A et B ont pour chaque valeur de λ des valeurs définies. C'est pourquoi on peut estimer que A et B sont des fonctions de λ. La somme des solutions de la forme (2.19)est assi une solution (du fait de la linéarité de l'équation (2.13) :

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \exp(-a^2\lambda^2 t)\left[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\right].$$

Intégrant l'expression (2.19) par rapport au paramètre λ entre les limites 0 et ∞ nous obtenons également une solution :

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \exp(-a^2\lambda^2 t)\left[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\right] d\lambda, \tag{2.20}$$

si $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ sont tels que cette intégrale, sa dérivée par rapport à t et sa dérivéé seconde par rapport à x existent et s'obtiennent en dérivant l'intégrale par rapport à t et à x. Choisissons $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ de sort que solution $u(x,t)$ satisfait à la condition (2.14). Posant dans l'égalité (2.20) $t = 0$, nous obtenons en vertu de la condition (2.14) :

$$u(x,0) = \varphi(x) = \int_0^{\infty} \exp(-a^2\lambda^2 t)\left[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)\right] d\lambda. \tag{2.21}$$

Supposons que la fonction $\varphi(x)$ est telle qu'elle peut être représentée par une intégrale de Fourier :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha - x)d\alpha\right)d\lambda$$

Ou

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda a d\alpha\right)\cos\lambda x + \left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha\right)\sin\lambda x\right]d\lambda \tag{2.22}$$

Comparant les second membres de (2.21) et (2.22) nous obtenons :

$$\left.\begin{array}{l} A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha d\alpha, \\ B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha. \end{array}\right\}. \tag{2.23}$$

Portant les valeur trouvées de $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ dans la formule (2.20) nous abtenons :

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \exp(-a^2\lambda^2 t)\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda a d\alpha\right)\cos\lambda x + \left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha d\alpha\right)\sin\lambda x\right]d\lambda,\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \exp(-a^2\lambda^2 t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\left(\cos\lambda a\cos\lambda x + \sin\lambda\alpha\sin\lambda x\right)d\alpha\right]d\lambda,\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \exp(-a^2\lambda^2 t)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\left(a-x\right)d\alpha\right)d\lambda.
\end{aligned}$$

et en inversant l'ordre d'intégration, nous avons en définitive :

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\left(\int_0^{\infty}\exp(-a^2\lambda^2 t)\cos\lambda\left(a-x\right)d\lambda\right)d\alpha. \tag{2.24}$$

C'est la solution du proplème que nous avons posé.

Transformons la formule (2.24) calculons l'ntégrale figurant entre parenthèses :

$$\int_0^{\infty}\exp(-a^2\lambda^2 t)\cos\lambda\left(a-x\right)d\lambda = \frac{1}{\alpha\sqrt{t}}\int_0^{\infty}\exp -z^2\cos\beta z dz. \tag{2.25}$$

CetteTransformons de l'ntégrale a été effectuée à l'aid des substitutions :

$$\alpha\lambda\sqrt{t} = z, \frac{\alpha - x}{\alpha\sqrt{t}} = \beta. \tag{2.26}$$

Introduisons la notation

$$K(\beta) = \int_0^{\infty}\exp -z^2\cos\beta z dz. \tag{2.27}$$

Dérivant nous obtenons :

$$K'(\beta) = -\int_0^{\infty}\left(\exp -z^2\right)z\sin\beta z dz.$$

Intégrant par parties nous trouvons :

$$K'(\beta) = \frac{1}{2}\left[\exp - z^2 z \sin \beta z\right]_0^\infty - \frac{\beta}{2}\int_0^\infty \exp - z^2 \cos \beta z dz dz.$$

Ou

$$K'(\beta) = -\frac{\beta}{2}K(\beta).$$

Intégrant cette équation différentielle nous obtenons :

$$K(\beta) = C \exp - \frac{\beta^2}{4}. \tag{2.28}$$

Déterminons la constant C. Il vient de (2.27) :

$$K(0) = \int_0^\infty \exp - z^2 dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par conséquent, dans l'égalité (2.28) on doit avoir

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ainsi,

$$K(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp - \frac{\beta^2}{4}. \tag{2.29}$$

Portons la valeur (2.29) de l'intégrale (2.27) dans (2.25) :

$$\int_0^\infty \exp(-a^2\lambda^2 t) \cos \lambda (a - x) \, d\lambda = \frac{1}{\alpha\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp - \frac{\beta^2}{4}.$$

Romplaçant β par son experssion (2.26), nous obtenons en définitive la valeur de l'intégrale(2.25) :

$$\int_0^{\infty} \exp(-a^2\lambda^2 t) \cos \lambda (a - x)\, d\lambda = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp -\frac{(\alpha - x)^2}{4\alpha^2 t}. \tag{2.30}$$

Portant cette expression de l'intégrale dans la solution (2.24) nous aurons en définitive :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi(\alpha) \exp -\frac{(\alpha - x)^2}{4\alpha^2 t} d\alpha. \tag{2.31}$$

Cette formule appelée *intégrale de Poisson*, est la solution du problème posé sur la propagation de la chaleur dans une barre infinie.

Remarque 2.2.2 *On peut démontre que la fonction* $u(x,t)$ *définie par l'intégrale* (2.31) *est la solution* (2.13)*et satisfait àla conditions* (2.14) *si la fonction* $\varphi(x)$*est bornée dans l'intervalle infini* $]-\infty, +\infty[$.

Etablissons le sens physique de la formule (2.31). Considérons la fonction

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } -\infty < x < x_0, \\ \varphi(x) \text{ pour } x_0 < x < x_0 + \Delta_x, \\ 0 \text{ pour } x_0 + \Delta_x < x < \infty. \end{cases} \tag{2.32}$$

Alors la fonction

$$u^*(x,t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(\alpha) \exp -\frac{(\alpha - x)^2}{4\alpha^2 t} d\alpha. \tag{2.33}$$

Est la soution de l'équation (2.13) prenant pour $t = 0$ la valeur $\varphi^*(x)$. En vertu de (2.32) on peut écrire :

$$u^*(x,t) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{x_0+\Delta_x} \varphi(\alpha) \exp -\frac{(\alpha - x)^2}{4\alpha^2 t} d\alpha.$$

Appliquant le théorème de la moyenne à cette dernière intégrale nous obtenons :

$$u^*(x,t) = \frac{\varphi(\xi)\,\Delta_x}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \exp - \frac{(\xi - x)^2}{4\alpha^2 t},\ x_0 < \xi < x_0 + \Delta_x. \tag{2.34}$$

La formule (2.34) donne la valeur de la température en un point de la barre à chaque instant si pour $t = 0$ la température de la barre est partout $u^* = 0$ exception fait du segment $[x,\ x_0 + \Delta_x]$ où elle est égale à $\varphi(x)$. C'est précisément la somme des températures de la forme (2.34) qui donne la solution (2.31) Notons que si ρ est la densité linéaire de la barre, c la capacité calorifique de la substance la quantité de chaleur dans l'élément $[x,\ x_0 + \Delta_x]$ pour $t = 0$ sera

$$\Delta Q \approx \varphi(\xi)\,\Delta_x \rho c. \tag{2.35}$$

Considérons ensuite la fonction

$$\frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi t}} \exp - \frac{(\xi - x)^2}{4\alpha^2 t}. \tag{2.36}$$

En la comparant au second membre de la formul (2.34) en tenant compte de (2.35) on dit qu'elle la température en tout point de la barre à un instant arbitraire t si pour $t = 0$ dans la section ξ (cas limit lorsque $\Delta_x \to 0$) se trouvait une source instantanée de chaleur d'une quantité de chaleur $Q = c\rho$.

Equation de Laplace en coordonnées cylindriques.

Résolution du problème de Dirichlet pour un anneau avec des valeurs constantes de la fonction recherchée sur les circonférences intérieure et extérieure.

Soit $u(x, y, z)$ une fonction harmonique de trois variables. Alors par définition :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{2.37}$$

Introduisons les coordonnées cylindriques (r, φ, z) :

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z,$$

D'où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \varphi = arctg\frac{y}{x},\ \ z = z. \tag{2.38}$$

Remplacant les variables indépendantes x, y, z par r, φ et z. Nous obtenons une fonction u^* :

$$u(x, y, z) = u^*(r, \varphi, z)$$

Trouvons l'équation que doit satisfaire $u^*(r, \varphi, z)$ en tant que fonction des variables r, φ et z. Nous avons :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial x})^2 + \frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r\ \ \partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}(\frac{\partial \varphi}{\partial x})^2 + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \tag{2.39}$$

D'un manière analogue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2}(\frac{\partial r}{\partial y})^2 + \frac{\partial u^*}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u^*}{\partial r \partial \varphi}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}(\frac{\partial \varphi}{\partial y})^2 + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \tag{2.40}$$

En outre
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}. \tag{2.41}$$

Nous trouvons les expressions pour

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

à partir des égalités (2.38). En faisant la somme des seonds membres des égalités (2.39), (2.40) et (2.41) en égalant le résultat è zéro (car la somme des premiers membres de ces égalités est nulle en vertu de (2.37). Nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} = 0. \tag{2.42}$$

C'est l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques.

Si la fonction u ne dépend pas de z et dépand de x et y, la fonction u^* qui ne dépend que de r et φ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{2.43}$$

Où r et φ sont les coordonnées polaires dans le plan.Trouveons maintenant la solution de l'équation de Laplace dans le domaine D (anneau) limité par les circonférences $K_1 : x^2 + y^2 = R_1^2$ et $K_2 : x^2 + y^2 = R_2^2$ prenant les valeurs aux frontières suivantes :

$$u \mid_{K_1} = u_1, \tag{2.44}$$

$$u\mid_{K_2} = u_2, \tag{2.45}$$

Où u_1 et u_2 sont des constantes.

Nous résoudrons le problème en coordonnées polaires. Il est évidemment logique de rechercher une solution ne dépandant pas de φ. L'équation prend alors la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Intégrant cette équation nous trouvons :

$$u = C_1 \log R_1 + C_2. \tag{2.46}$$

Déterminons C_1 et C_2 des conditions et :

$$u_1 = C_1 \log R_1 + C_2.$$

$$u_2 = C_1 \log R_2 + C_2.$$

Nous en tirons

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{\log \frac{R_2}{R_1}}, C_2 = u_1 - (u_2 - u_1)\frac{\log R_1}{\log \frac{R_2}{R_1}} = \frac{u_1 \log R_2 - u_2 \log R_1}{\log \frac{R_2}{R_1}}.$$

Portant les valeurs trouvées de C_1 et C_2 dans la formule nous obtenons en définitive :

$$u = u_1 + \frac{\log \frac{r}{R_1}}{\log \frac{R_2}{R_1}}(u_2 - u_1) = \frac{u_2 \log \frac{r}{R_1} - u_1 \log \frac{r}{R_2}}{\log \frac{R_2}{R_1}} \tag{2.47}$$

Remarque 2.2.3 *En fait nous avons résolu le problème suivant : trouver une fonction u satisfaisant à l'équation de Laplace dans le domaine limité par les* *surface (en coordonnées cylindriques)*

$$r = R_1,\ r = R_2,\ z = 0,\ z = H,$$

Et vérifiant les conditions aux frontières suivantes :

$$u =|_{r=R_1}= u_1, \quad u =|_{r=R_2}= u_{2,}\frac{\partial u}{\partial z}\ |_{z=0}= 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\ |_{z=H}= 0$$

(problème de Dirichlet-Neumann). Il est évident que la solution cherchée ne dépend ni de z ni de φ et est donnée par la formule (2.47)

Résolution du problème de Dirichlet pour le cercle

Soient dans le plan Oxy un cercle de rayon R, de centre à l'origine des coordonnées et une fonction $f(\varphi)$ donnée sur sa circonfrécence (φ est l'angle polaire). On demande de trouver une fonction $u(r, \varphi)$ continue dans le cercle (y compris sur la frontière), vérifiant à l'intèrieur du cercle l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.48}$$

Et prenant sur la circonférence les valeurs données :

$$u\ |_{r=R}= f(\varphi). \tag{2.49}$$

Nous résoudrons le problème en coordonnées plaires. L'équation (2.48) s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

Où

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{2.50}$$

Nous chercherons la solution par la méthode de séparation des variables en posant

$$u = \Phi(\varphi)R(r). \tag{2.51}$$

Portant dans l'équation (2.50) nous obtenons :

$$r^2\Phi(\varphi)R^{''}(r) + r\Phi(\varphi)R^{'}(r) + \Phi^{''}(\varphi)R(r) = 0$$

Où

$$\frac{\Phi^{''}(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2R^{''}(r) + rR^{'}(r)}{R(r)} = -k^2. \tag{2.52}$$

Comme le premier membre de cette équation ne dépand pas de r, et le second membre de φ, ils sont par conséquent égaux à un nombre constant que nous désignerons par $-k^2$. Ainsi l'égalité (2.52) donne deux équation

$$\Phi^{''}(\varphi) + k^2\Phi(\varphi) = 0, \tag{2.53}$$

$$r^2R^{''}(r) + rR^{'}(r) - k^2R(r) = 0. \tag{2.54}$$

La solution générale de l'équation (2.53) sera :

$$\Phi = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi. \tag{2.55}$$

Nous chercherons la solution de l'équation (2.54) sous la forme $R(r) = r^m$. Portant $R(r) = r^m$ dans (2.54) nous obtenons :

$$r^2 m(m-1)r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2 r^m = 0, \text{ ou } m^2 - k^2 = 0.$$

Nous pouvons écrire deux solutions particulières linéairement indépendantes r^k et r^{-k}. La solution générale de l'équation (2.54) sera :

$$R = Cr^k + Dr^{-k}. \tag{2.56}$$

Portons les expressions (2.55) et (2.56) dans (2.51) :

$$u_k = (A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi)(Cr^k + Dr^{-k}). \tag{2.57}$$

La fonction (2.57) sera la solution de l'équation (2.50) pour toute valeur de k différante de zéro. Si $k = 0$, les équation (2.53) et (2.54) s'écrivent :

$$\Phi^{''} = 0, \; rR^{''}(r) + R^{'}(r) = 0,$$

Et par conséquent

$$u_0 = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D \log r). \tag{2.58}$$

La solution doit être une fonction périodique de φ, car pour une meme valeur r correspondant à φ et $\varphi + 2\pi$ nous devons avoir la meme solution, il s'agit en effet chaque fois d'un meme point du cercle. C'est pourquoi il est évident que dans la formule (2.58) il faut que $B_0 = 0$. Nous cherchons la solution continue et finie dans le cercle. Par conséquent, au centre du cercle, pour $r = 0$, la solution doit etre finie, et par suite il faut que dans la formule (2.58) $D_0 = 0$ et dans la formule (2.57) $D_k = 0$. Ainsi le second membre de (2.58) se ramène au produit A_0C_0 que nous désignerons par $A_0/2$. Donc

$$u_0 = \frac{A_0}{2}. \tag{2.59}$$

Nous chercherons la solution de note problème sous forme d'une somme des solutions de la forme (2.57), car la somme des solutions est une solution. La somme doit etre une fonction périodique de φ. Il en sera ainsi si chaque terme de la somme est une fonction périodique de φ Pour cela k doit prendre des valeurs entières. (Notons que si nous avions égalé (2.52) les membres de l'égalité au nombre $+k^2$, nous n'aurions pas obtenu une solution périodique). Nous pouvons nous borner aux valeurs positives $k = 1, 2, ..., n, ...,$ puisque, les constantes A, B, C, D étant arbitraires, les valeurs négatives de k ne donnet pas de nouvelles solutions particulières. Ainsi

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)r^n \tag{2.60}$$

(la constante C_n est incluse dans A_n et B_n).

Choisissons maintenant les constantes arbitraires A_n et B_n de sorte que soient vérifiées les conditions aux limite(2.49). Portant dans l'égalité (2.60) $r = R$ nous obtenons en vertu de la condition (2.49) :

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)R^n. \tag{2.61}$$

Pour qu'ait lieu l'égalité (2.61) , il faut que la fonction $f(\varphi)$ admette un développement en série de Fourier dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et que $A_n R^n$ et $B_n R^n$ soient ses coefficient de Fourier. Par conséquent, A_n et B_n sont déterminée d'après les formules :

$$\left.\begin{array}{l} A_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \ dt \\ B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \ dt \end{array}\right\} \tag{2.62}$$

Ainsi le série (2.60) avec les coefficients déterminés d'après les formules (2.62). Sera la solution de notre problème si elle peut être deux fois dérivée terme à terme par rapport à r et à φ (mais cela n'a pas été démontré). Transformons la formule (2.60). Remplacant A_n et B_n par leurs expressions (2.62) et effectuant certaines transformation trigonométriques nous obtenons :

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \ dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos n(t - \varphi) \ dt (\frac{r}{R})^n$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{R})^n \cos n(t - \varphi) \right) dt \tag{2.63}$$

Transformons l'expression figurant entre crochts :

$$\begin{aligned} 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{R})^n \cos n(t - \varphi) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{r}{R})^n \left[e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)} \right] \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)} \right)^n + \left(\frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)} \right)^n \right] \\ &= 1 + \frac{\frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{i(t-\varphi)}} + \frac{\frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}}{1 - \frac{r}{R} e^{-i(t-\varphi)}}. \end{aligned}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - 2\frac{r}{R} \cos(t - \varphi) + \left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(t - \varphi) + r^2} \tag{2.64}$$

Remplaçent l'expression figurant entre crochets dans la formule (2.63) par l'expression (2.64) nous obtenons :

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2} dt. \tag{2.65}$$

La formule (2.65) est *appelée intégrale de Poisson.*

Chapitre 3

Exemples.

Exemple 3.0.3 *Pour l'EDP linéaire d'ordre* 2 *suivante*

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

1. Déterminer le domaine D où cette équation est parabolique.
2. Déterminer les courbes caractéristiques de cette équation sur D.
3. Effectuer le changement de coordonnées en basant sur (2) pour obtenir la forme canonique correspondante.
4. Trouver la solution générale de cette équation dans le domaine D.

solution

1) $\Delta(x,y) = b^2(x,y) - 4a(x,y)c(x,y) = 16x^2y^2 - 16x^2y^2 = 0$. L'équation est parabolique sur tout $\mathbb{R}^2$.

2)L'équations caractéristique est

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-4xy}{2x^2} = \frac{2y}{x}.$$

3)La courbe caractéristique associée est donc $\varphi(x;y) = 2xy$: On pose

$$\begin{cases} \xi = x, \\ \eta = 2xy \end{cases}$$

et $u(x;y) = v(\xi;\eta)$: En utilisant ce changement de coordonnées. Par la règle de chaînes, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} + 2y\frac{\partial v}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= x\frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial \xi} + 2y\frac{\partial v}{\partial \eta}) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 4y\frac{\partial v}{\partial \xi \partial \eta} + 4y^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) = x\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2xy\frac{\partial v}{\partial \xi \partial \eta}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}.
\end{aligned}$$

Finalement

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = \xi^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \xi\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0.$$

Aprés simplifcation, on obtient la forme canonique associée

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

où $\xi \neq 0$, ce qui est équivalent à $x \neq 0$: Maintenant si $x = 0$, cette EDP prend la forme simplifiée $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y}$. Il s'agit de la forme canonique d'une EDP parabolique pour $y \neq 0$: Si $x = y = 0$, l'équation est vérifée en tout les points sauf l'origine. On peut considérer comme forme canonique que la forme l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

4)En posant $w = \frac{\partial v}{\partial \xi}$, on arrive à l'$EDO$ du premier ordre $w' + (\frac{1}{\xi})w = 0$ dont la solution est $\ln w = -\ln \xi + \hat{f}(\eta)$,, ou $w = f(\eta) \diagup \xi$, où f et $hatf$ sont deux fonctions quelconques. Par intégration

$$v = \int v d\xi = \int w d\xi = \int \frac{f(\eta)}{\xi} d\xi = f(\eta) \ln \xi + g(\eta).$$

Par conséquent, la solution générale est $u(x, y) = f(2xy) \ln x + g(2xy)$ où $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ sont des fonctions réelles arbitraires.

Exemple 3.0.4 *Résoudre le probléme suivant par la méthode de séparation des variables :*

$$\begin{cases} a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu + \frac{\partial u}{\partial t} = 0; (x, t) \in]0, \ell[\times \mathbb{R}^+ \\ u(0, t) = u_0 e^{-\alpha t}, u(\ell, t) = u_0 e^{-\beta t} \\ \lim_{t \to +\infty} u(x, t) = 0 \end{cases}$$

où a. b. α. β. u_0 et ℓ des réels striquetement positifs tel que $a\pi^2 > b\ell^2$.

On commence par rendre homogènes les conditions aux limites en cherchant un rélevement (le domaine prismatique suggère une solution affine de x).

$$U(x, t) = u_0 \left(e^{-\alpha t}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + \frac{x}{\ell} e^{-\beta t}\right)$$

U est regulier et verifié les conditions aux limites. On pose $v = u - U$.

υ est une solution de :

$$a\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + b\upsilon + \frac{\partial \upsilon}{\partial t} = -\left(a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + bU + \frac{\partial U}{\partial t}\right) \tag{3.1}$$
$$= u_0\left((b-\alpha)\, e^{-\alpha t}\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + (b-\beta)\,\frac{x}{\ell}e^{-\beta t}\right)$$

Et on doit satisfaire les conditions :

$$\upsilon(0,t) = \upsilon(\ell,t) = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} \upsilon = \lim_{t\to+\infty} u - U = 0$$

Posons $\upsilon = XT$ ce qui donne :

$$a\frac{X''}{X} = -b - \frac{T''}{T} = \lambda$$

les conditions aux limites conduit à $X_n = \sqrt{\frac{2}{\ell}}\sin\left(n\pi\frac{x}{\ell}\right)$. On injecte enfin la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n T_n$ dans l'EDP

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\left(b - \frac{an^2\pi^2}{\ell}\right)T_n + T_n^{'}\right) = u_0\left((b-\alpha)\, e^{-\alpha t}\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + (b-\beta)\,\frac{x}{\ell}e^{-\beta t}\right)$$

On projette alors le second membre sur la base : Il faut donc calculer les projections de $x \to 1$ et $x \to \frac{x}{\ell}$

$$\sqrt{\frac{2}{\ell}}\int_0^\ell \sin(n\pi\frac{x}{\ell})dx = \frac{\sqrt{2\ell}}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$
$$\frac{\sqrt{2}}{\ell\sqrt{\ell}}\int_0^\ell \sin(n\pi\frac{x}{\ell})dx = \frac{\sqrt{2\ell}}{n\pi}\left(-1\right)^{n+1}$$

Donc pour tout entier naturel n :

$$\left(b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2}\right) T_n + T_n^{'} = u_0 \frac{\sqrt{2\ell}}{n\pi} \left((b-\alpha)\, e^{-\alpha t} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + (b-\beta)\, \frac{x}{\ell} e^{-\beta t}\right)$$

Par hypothèse : $b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2} < 0$, ce qui donnerait une exponentielle croissante en solution de problème homogène, incompatible avec l'hypothèse de solution nulle a l'infini. On cherche donc une solution particulière qui tend vers0 en l'infini et donc :

$$T_n\,(t) = \left(b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2}\right) T_n + T_n^{'} = u_0 \frac{\sqrt{2\ell}}{n\pi} \left(\frac{(b-\alpha)}{b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2} - \alpha} e^{-\alpha t} + (-1)^{n+1} \frac{(b-\beta)}{b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2} - \beta} e^{-\beta t}\right)$$

ce qui conduit à

$$v(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_0 \frac{2}{n\pi} \left(\frac{(b-\alpha)}{b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2} - \alpha} e^{-\alpha t} + (-1)^{n+1} \frac{(b-\beta)}{b - \frac{an^2\pi^2}{\ell^2} - \beta} e^{-\beta t}\right) \sin\left(n\pi \frac{x}{\ell}\right).$$

Etant donné que le second membre est C^1, on a convergence uniforme des séries spatiales. Par ailleurs les $|T_n|$ sont bornés et décroissants (pour n croissant) il y a donc convergence uniforme de la série de la fonction de (x,t) sur tout segment temporel.

Exemple 3.0.5 *Résoudre l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 13 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, t > 0.$$

avec les conditions aux limites

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, t \geq 0$$

et les conditions initiales

$$u(x,0)=\begin{cases} 2 & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$

Solution

D'après le rèsultat dans le cas des conditions aux limites type Déichlet avec $k=13$ et $L=\pi,\ f(x)=2$, la solution est donnée par la formule suivante

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n \sin(\pi x)\exp\left(-13n^2t\right).$$

Où

$$\delta_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\pi x)dx=\frac{4}{\pi n}\left[-\cos\left(nx\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$$

d'où

$$u(x,t)=\frac{4}{\pi n}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\sin(nx)\exp\left(-13n^2t\right)$$

Bibliographie

[1] Baddari, K., & Abbassov, A. (2009). Equations de la physique mathématique appliquées.

[2] Bezard, M. (1996). Equations aux dérivées partielles. Ecole nationale supérieure des techniques avancées.

[3] KELLECHE, A. (2019). Ė quations de la physique mathématique.

[4] Robert Bédard. Offert par le département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal. Notes pour le cours Equations aux dérivées partielles.

[5] SABIT,S. Notions sur les équations aux dérivées partielles de l'Université du Ibn Khaldoun. Tiaret.

[6] Vladmir Arnold. (1997). Leçons sur les équations aux dérivées partielles.

[7] Zitouni, S., & Zennir, K. (2018). Equations aux Dérivées Partielles de nature physique : EDPs de nature physique Editions universitaires européennes.

[8] Zouaghi, G. (2020). Résolution numérique de quelques problèmes paraboliques linéaires et non linéaires. de l'Université du Abd Elhafid Boussouf. Mila

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est de trouver la solution d'une équations aux dérivées partielles de différentes manières (forme canonique, méthode de séparation des variables et Intégrale de Poisson)

Abstract

The main objective of this note is to find a solution to equations with partial second order linear derivatives in different ways (legal form, method of separating variables Poisson integration).

ملخص

الهدف الأساسي من هذه المذكرة هو إيجاد حل للمعادلات ذات مشتقات الجزئية من الرتبة الثانية الخطية بطرق مختلفة (الشكل القانوني، وطريقة فصل المتغيرات وتكامل دوبواسون).