République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option :Probabilitiès

Par

Atia Nesrine

Titre :

Equations différentielles stochastiques rétrogrades de Volterra

Devant le Jury :

Pr	YEKHLEF Samia	UMKB	Prèsident
Dr	DJABER Ibtissem	UMKB	Encadreur
Dr	CHAOUCHKHOUANE Nassima	UMKB	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 28/06/2022

Dédicace

Louange à Allah tout puissant de m'avoir donné la force et le courage de mener

à bien ce modeste travail et je le dédie à :

Mes parents les plus chers en ma vie A mon père précieux

A Maman ma vie et plus merveilleuse de toutes les femmes au monde,

Pour tous les sacrifices qu'ils consentirent durant tout ma vie.

A mon mari*Said Bekhouche* et à la famille de mon mari*Mohamed et fatma*

A mon adorable frère :*Anis* , je lui souhaite une vie pleine de bonheur et

de réussite.

A mes belles soeurs :*Nahla*,*Nouha* et *Nada*, Je leur souhaite une vie

heureuse et réussie.

Aux frères et soeurs de mon mari :*Wehhab*, *Hichem*, *Afef*et *chahra*

Ma chère nièce, mon amour :*loudjin bekhouche .*

Mes amis préférés :*Rabie Manal*,*Ababsa Mouaki Hana*, *Belarouci Amat allah*,*Ghoul*

Naima et *Ramli Faiza*, Je leur souhaite une vie heureuse et réussie.

A toute mes collègues le long de mes études et toute la promotion de master de

Mathématique de l'année universitaire 2022/2023

Remerciements

Tous nous remerciements vont d'abords à Dieu, le tout puissant, pour nous avoir donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

Ce travail de thèse a atteint son terme grâce à l'assistance et à la collaboration de nombreuses personnes. Nous profitons de cette occasion de gratitude et de reconnaissance pour remercier tous ceux qui de loin ou de prés ont contribués ‡ l'élaboration de ce travail.

Je remercier mon encadreur, Pr *Djaber Ibtissem* pour avoir accepté d'encadrer ce travail,

ainsi que pour sa gentillesse, ses conseils constructifs, son attention, son dévouement, ses encouragements et sa disponibilité tout au long de travail. Que Dieu vous récompense et te donne santé, merci et mille mercis.

Je adresse aussi nos plus vifs et ardents remerciements à Pr *Yekhlef Samia* pour avoir bien voulu présider le jury.

Je remercie également à remercier Dr *Chaouchkouane Nassima* qui a bien voulu nous honorer de sa présence dans ce jury et d'examiner notre travail.

Je remercie aussi au chef du département de mathématiques Monsieur *Lakhdari Imad Eddine* pour les efforts.

Je remercie également tous les professeurs qui nous ont étudiés sincèrement.

Merci à tout

Résumé

Cette thèse porte sur les équations intégrales stochastiques rétrogrades de Volterra (EISRV en abrégé). Ce type d'équations est utilisé en mathématique financières et on contrôle stochastique.

L'objectif principal de cette thèse est l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution des EISRV.

Mot-clés : Equations intégrales stochastiques rétrogrades de Volterra (EISRV), équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR), existence et unicité du solution.

Abstract

This thesis treats of backward stochastic Volterra integral equations. This type of equations is used in financial mathematics and stochastic control.

The main objective of this thesis is the study of the existence and the uniqueness of the solution of the (BSVIE).

Key-words : Backward stochastic Volterra integral equations (BSVIE), Backward stochastic differential equations (BSDE), Existence and uniquence of the solution.

Notations et symbols

Les différentes abréviations et notations utilisées tout au long de ce mémoire sont expliquées ci-dessous :

$\mathbb{R}^d$	: Espace réel euclidien de dimension d.
$\mathbb{R}^{d\times m}$	: Ensemble des matrices réelles $d \times m$.
$\mathbb{L}^2\left(\mathcal{F}_T\right)$	: Espace des variables aléatoires de carée intégrable $\mathcal{F}_T-$mesurable
$\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$	: La tribu de Borel sur $\mathbb{R}^d$.
z^t	: Transposée de la matrice z.
$\mathbb{P}-ps$	: Presque sûrment pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
$dt \otimes d\mathbb{P}$	: Mesure produit de mesur de lebesgue sur $[0,T]$ avec la mesure $d\mathbb{P}$.
$\mathbb{E}\left(X\right)$	: Espérence mathématique de la variable aléatoire X.
$\mathbb{E}\left(X/\mathcal{F}_t\right)$	: Espérence conditionnelle de la variable aléatoire X pa rapport a $\mathcal{F}_t$.
BDG	: Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy.
EDS	: Equation différentielle stochastique.
EDSR	: Equation différentielle stochastique rétrograde.
EISRV	: Equations intégrales stochastiques rétrogrades de Volterra.
càdlàg	: Continue à droite, admet limite à gauche.
MB	: Mouvement Brownien.

Table des matières

Introduction

Les équations intégrales stochastiques de Volterra (EISV en abrégé) sont un type spécial d'équations intégrales. Ils représentent des modèles intéressants de dynamique stochastique avec mémoire, ont des applications par exemple en ingénierie, biologie et finance. Dans cette thèse on s'intérrese aux équations intégrales stochastiques rétrogrades de Volterra (EISRV en abrégé).

On définit un mouvement Brownien standard $d-$dimensionnel B_t sur un espace de probabilité filtré complet $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ et on note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = \sigma\left(B_s, s < t\right)$. L'équation stochastique différentielle (EDS en abrégé) est donnée par :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x \end{cases}, \forall t \in [0, T], \tag{1}$$

Les résultats concernant l'équation (1) peuvent être trouvés dans de nombreux livres (voir [6] et [7]). L'équation (1) est sous forme intégrale :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \forall t \in [0, T], \tag{2}$$

Cela nous suggère naturellement que l'on peut considérer la forme intégrale suivante :

$$X_t = \xi\left(t\right) + \int_0^t b(t, s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(t, s, X_s)dB_s, \forall t \in [0, T], \tag{3}$$

Ce qui précède est une équation intégrale stochastique de Volterra, pour certaines études systématiques (même pour des cas plus généraux) ont été effectuées dans la littérature (voir [1] et [2] par exemple). En général on ne peut pas transformer (3) en EDSF de la forme (1), même si les coefficients b et σ sont lisses.

Mathématiquement (3) plus général que (2). D'autre part du point vue des applications pratiques (3) permet une certaine dépendance à long terme du bruit dans les modèles considérés. Il est intéressant que l'on puisse même permettre à $\sigma(t, s, X(s))$ d'être seulement $\mathcal{F}_t-$mesurable d'une certaine manière (il faut donc anticiper les intégrales) mais on pourrait avoir des solutions adaptées. Donc la théorie pour (3) est beaucoup plus riche que celle de (2). D'autre part, en 1973 Bismut introduit les équations stochastiques rétrogrades (linéaires) pour la premières fois. Pardoux et Peng ont étudié d'abord les EDSR non linéaires générales de la forme suivante en 1990 :

$$\begin{cases} -dY_t = g(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, 0 \leq t \leq T, \\ Y_T = \xi \end{cases} \tag{4}$$

C'est un problème de valeur terminale pour une équation différentielle stochastique . Par une solution adaptée on prend un couple de processus (Y, Z) qui est $\mathcal{F}_t-$adaptée et satisfaisant (4). Maintenant , on prend le point de vue de la relation entre (1) et (3). Nous savons que (4) est interprété comme l'équation intégrale suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, 0 \leq t \leq T. \tag{5}$$

Nous pouvons appeler (5) une équation intégrale stochastique rétrograde de Volterra (EISRV en abrégé) inspiré par (3), nous nous posons la question suivante :

Quel est l'analogique de (3) pour (5) comme (3) pour (2) ?

L'analogique doit prendre la forme suivante :

$$Y(t) = \xi(t) + \int_t^T h(t, s, Y(s), Z(t, s), Z(s, t))ds - \int_t^T Z(t, s)dB_s, \forall t \in [0, T], \tag{6}$$

où ξ et h sont données et on cherche le couple (Y, Z). On appelle (6) une équation intégrale stochastique rétrograde de Volterra. Les caractéristiques importantes de (6) sont :

- Le terme $Z(t, s)$ dépends de t.
- La dérive (drift) dépends des deux termes $Z(t, s)$ et $Z(s, t)$ en général.

Le mémoire présenté est partagé en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux rappels des résultats importante en calcule stochastique. On va présenter des définitions, propositions et théorèmes faits sans démonstrations car ce chapitre a pour bute de mettre le lecteur dans le cadre théorique de notre étude.

Dans le deuxième chapitre, on abordera les équations différentielles stochastiques rétrogrades standards $(EDSR)$ par la présentation du théorème de Pardoux et Peng.

Enfin, dans le troisième chapitre nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution pour les équations intégrales stochastiques rétrogrades de Volterra $(EISRV)$.

Chapitre 1

Notions de base

Dans ce chapitre nous introduisons quelques notions de base concernant le calcule stochastique.

1.1 Calcule stochastique

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Définition 1.1.1 *(**Filtration**). Une filtration est une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$, pour tout $0 \leq s \leq t < \infty$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.*

Définition 1.1.2 *(**Filtration naturelle**). Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus stochastique définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Une filtration naturelle associée à X est la filtration définie par :*

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(X_s, s \leq t\right), \forall t \geq 0.$$

Définition 1.1.3 *(**Processus stochastique**). Soit T un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par T et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ une famille $(X_t)_{t \in T}$ d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telle que pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire.*

Définition 1.1.4 ***(Processus mesurable)****. Un processus X est dit mesurable si l'application $(t,\omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 1.1.5 ***(Processus continu).*** *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \to X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.*

Définition 1.1.6 ***(Processus adapté)****. Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit adapté par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$ (ou bien $\mathcal{F}_t$-adapté) si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout t.*

Définition 1.1.7 ***(Processus càdlàg)****. Un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est dit càdlàg (continu à droite limité à gauche) si ses trajectoires sont continues à droite et limitées à gauche pour presque tout ω.*

Définition 1.1.8 ***(Processus progressivement mesurable)****. Un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est dit progressivement mesurable (ou progressif) si pour tout t l'application :*

$$\begin{aligned} ([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t] \otimes \mathcal{F}) &\to \left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \\ (s,\omega) &\mapsto X_s(\omega), \end{aligned}$$

est mesurable.

1.1.1 Mouvement Brownien

Définition 1.1.9 ***(Mouvement Brownien)****. On appelle un mouvement Brownien standard tout processus stochastique B_t à valeurs réelles tel que :*

1. *$\mathbb{P} - p.s.$ $t \longmapsto B_t(\omega)$ est continue.*
2. *Pour $0 \leq s < t$, $(B_t - B_s)$ est indépendant de la tribu $\sigma\{B_u, u \leq s\}$ et de loi gaussienne centrée de variance $(t-s)$.*

3. $B_0 = 0$, $\mathbb{P} - p.s.$

4. *Pour tout* $t > 0$, *la variable aléatoire* B_t *suit la loi gaussienne centrée de variance* t *donc de densité* $(2\pi t)^{-1/2} exp\{-x^2/(2t)\}$.

Proposition 1.1.1 *Soit* B *un* MB *standard.*

1. *Pour tout* $s > 0$, $\{B_{t+s} - B_s\}_{t\geq 0}$ *est un* MB *indépendant de* $\sigma\{B_u, u \leq s\}$.

2. $-B$ *est aussi un* MB.

3. *Pour tout* $c > 0$, $\{cB_t/c^2\}_{t\geq 0}$ *est un* MB.

4. *Le processus défini par* $X_0 = 0$ *et* $X_t = tB_{1/t}$ *est un* MB.

1.1.2 Martingales

Définition 1.1.10 *(**Martingale à temps continue**). Une famille de variables aléatoires* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si :*

1. X_t *est intégrable*, $\forall t \geq 0$,

2. X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*adapté*, $\forall t \geq 0$,

3. $\forall s \leq t : \mathbb{E}\left[X_t \,/\mathcal{F}_s\right] = X_s$.

Définition 1.1.11 *Une famille de variables aléatoires* $(X_t)_{t\geq 0}$ *est une sur-martingale (resp.sous-martingale) par rapport à la filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *si :*

1. X_t *est* $\mathcal{F}_t-$*adapté et intégrable*, $\forall t \geq 0$,

2. $\mathbb{E}\left[X_t \,/\mathcal{F}_s\right] \leq X_s$, $\forall s \leq t$, *(resp.* $\mathbb{E}\left[X_t \,/\mathcal{F}_s\right] \geq X_s$*).*

Définition 1.1.12 *(**Martingale locale**). Un processus càdlàg adapté* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croissante vers l'infini telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$ *le processus arrêté* X^{T_n} *soit une martingale nulle en* 0, *i.e :* $X_0 = 0$.

Définition 1.1.13 *(**Semi-martingale**) . Une semi-martingale continue est un processus* X *qui s'écrit* $X = M + V$, *où* M *est une martingale locale continue et* V *est un processus continu adapté à variation borné tel que* $V_0 = 0$.

Définition 1.1.14 *(**Temps d'arrêt**). Un temps d'arrêt τ par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est une application $\tau : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+$ telle que :*

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ : \{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega \diagup \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

1.2 Intégrale stochastique

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et B un movement brownien sur cet espace. On désigne par $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_s, s \leq t\}$ la filtration naturelle du MB.

Lintégrale stochastique ou l'intégrale d'Itô est une intégrale de la forme suivante :

$$\int_0^t \theta_s dB_s,$$

où $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique.

Définition 1.2.1 *On dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un bon processus s'il est $\mathcal{F}_t^B-$adapté, càdlàg et si :*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < \infty, \quad \forall t \geq 0.$$

1.2.1 Propriétés de l'intégrale stochastique

Proposition 1.2.1 *L'intégrale stochastique satisfait les propriétés :*

1. $\theta \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$ *est linéaire.*
2. *Le processus* $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est à trajectoires continues.*
3. *Le processus* $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est $\mathcal{F}_t-$adapté.*
4. $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s dB_s\right] = 0$ *et* $Var\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$.
5. *Propriété d'isométrie : pour deux bons processus θ et ϕ*

$$\forall t, u \geq 0 : \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)\left(\int_0^u \phi_s dB_s\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds\right],$$

1.2.2 Calcule d'Itô

Définition 1.2.2 (***Processus d'Itô***). *On appelle processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que :*

$$\mathbb{P}-p.s, \quad \forall\ 0 \leq t \leq T : \quad X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s.$$

où x est $\mathcal{F}_0-$mesurable, b et σ sont deux processus progressivement mesurable vérifiant :

$$\int_0^t |b_s|\, ds < \infty \quad et \quad \int_0^t |\sigma_s|^2\, ds < \infty, \mathbb{P}-p.s.$$

Le processus s'écrit sous forme différentielle

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \quad X_0 = x.$$

Le coefficient b s'appelle la dérive (drift) et σ s'appelle le coefficient de diffusion (ou volatilité).

Remarque 1.2.1 **a)** *La décomposition d'un processus d'Itô est unique,*

b) *Le processus $t \to x + \int_0^t b_s ds$ est la partie à variation finie de X,*

c) *Le processus $t \to \int_0^t \sigma_s dB_s$ est la partie martingale de X (martingale locale).*

Théorème 1.2.1 (***Formule d'Itô***). *Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus d'Itô de la forme*

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

et $f \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ et pour tout $0 \leq t \leq T$, nous avons presque surement

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s)\, ds + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, b_s ds \\ &+ \int_0^t f'_x(s, X_s)\, \sigma_s dB_s + \tfrac{1}{2}\int_0^t f'_{xx}(s, X_s)\, \sigma_s^2 ds, \end{aligned}$$

où $C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ est l'espace des fonction continues, dont les dérivées d'ordre 1 en t et les dérivées jusqu'à l'ordre 2 en x sont continues par rapport à (t,x).

1.3 Inégalités et théorèmes utiles

Proposition 1.3.1 (***Inégalité maximale***). *Soit θ un bon processus alors :*

$$\mathbb{E}\left(\left[\sup_{t \leq T} \int_0^t \theta_s dB_s\right]^2\right) \leq 4\mathbb{E}\left(\left[\int_0^T \theta_s dB_s\right]^2\right) = 4\mathbb{E}\left(\int_0^T \theta_s^2 ds\right)$$

Proposition 1.3.2 (***Inégalité de Hölder***). *Soient $p, q \in [1, +\infty[$ des exposants conjugués i.e : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si f, g sont des applications mesurables, alors :*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Quand $p = q = 2$ l'inégalité de Hölder donne l'inégalité de Cauchy-Schwartz, i.e :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 .$$

Lemme 1.3.1 (***Lemme de Gronwall***). *Soit $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout t :*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)\, ds, a \in \mathbb{R}, b \geq 0.$$

Alors pour tout t :

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

Théor■me 1.3.1 (***Théorème de Fubini***). *Soit f une fonction continue sur $[a,b] \times [c,d]$ à valeurs dans un ensemble E, alors :*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Théor■me 1.3.2 (***Théorème de représentation des martingales Browniennes***). *Soit M une martingale càdlàg de carré intégrable pour la filtration du MB $\left\{\mathcal{F}_t^B\right\}_{t\in[0,T]}$, alors il existe un unique processus $(Z_t)_{t\in[0,T]}$, tel que :*

$$\mathbb{P}\text{−}ps, \quad \forall t \in [0,T], \quad M_t = M_0 + \textstyle\int_0^t Z_s dB_s.$$

Théor■me 1.3.3 (***Théorème du point fixe de Picard***). *Soit (E,d) un espace métrique complet et $\Phi : E \to E$ une fonction contractante c'est à dire il existe $k \in [0,1[$ tel que :*

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq k d(x,y), \forall x, y \in E$$

Alors il existe un unique point $\alpha \in E$ tel que $\Phi(\alpha) = \alpha$.

Théor■me 1.3.4 (***Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy BDG***). *Pour tout $p > 0$, il existe des constantes positives c_p et C_p telles que, pour toute martingale locale continue $X = (X_t)_{0\leq t\leq T}$ et tout $T > 0$, on ait*

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X \rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X \rangle_T^{\frac{p}{2}}\right].$$

Chapitre 2

Equations différentielles stochastiques rétrogrades

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la formule d'équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé), et montrer le résultat d'existence et d'unicité des solutions dans le cas lipschitzienne.

2.1 Equation différentielle stochastique

Cette section introduit les équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement brownien. Ces équations permettent de tenir compte d'un bruit aléatoire dans l'évolution d'un phénomène. En particulier, elles fournissent des modèles en physique, biologie, économie et finance.

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1 *Une équation différentielle stochastique (EDS) est de la forme :*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2.1}$$

où :

- $b : [0,T] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ (la dérive) et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k\times d}$ (le coefficient de diffusion) sont deux fonctions mesurables bornées, où :$T > 0$ et $k, d \in \mathbb{N}$.
- $x \in \mathbb{R}^k$ une condition initiale (de carré intégrable et indépendante du $MB\ B$).

Cette équation est constituée par :

a. Un espace de probabilité filtré complet $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ où la filtration est définie pour tout t positif par :

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left\{\sigma\left(x, B_s; s < t\right) \cup \mathcal{N}\right\}.$$

b. Un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $-$mouvement brownien B à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

c. Un processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ continue $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $-$adapté tel que les intégrales :

$$\int_0^t b(s, X_s)ds \quad \text{et} \quad \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s,$$

sont bien définies et de plus l'égalité :

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \forall t \in [0,T], \tag{2.2}$$

soit satisfaite $\forall t \in [0,T]$ $\mathbb{P} - ps$.

Définition 2.1.2 *(Solution forte). Un processus continu X est dit solution forte de l'EDS* (2.1) *si :*

- X est progressivement mesurable.
- $\mathbb{P} - p.s$ $\quad \int_0^t \{|b(s, X_s)| + ||\sigma(s, X_s)||^2\}\, ds < \infty$, où $||\sigma|| = trace(\sigma\sigma^t)$, telle que $\sigma\sigma^t$ la matrice de diffusion.
- $\mathbb{P}$$-p.s$ on a : $X_t = x + \displaystyle\int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \forall t \in [0,T]$.

2.1.2 Existence et unicité des solutions

Pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution on a besoin de deux types de conditions pour les fonctions b et σ.

Notation :

i) $\mathbb{S}^2\left(\mathbb{R}^k\right)$: Espace de Banach constitué des processus X progressivement mesurable, tels que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right]<\infty \quad \text{et} \quad \|X\|=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^2\right]^{1/2}.$$

ii) $\mathbb{S}_c^2\left(\mathbb{R}^k\right)$: Sous espace de $\mathbb{S}^2$ formé des processus X continus.

Théor■me 2.1.1 *(Existence et unicité). Soient b et σ deux fonctions boréliennes. Supposons qu'il existe une constante $K>0$ telle que pour tout $t\in[0,T]$, $x,y\in\mathbb{R}^n$:*

- Condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps :

$$|b(t,x)-b(t,y)|+||\sigma(t,x)-\sigma(t,y)||\leq K|x-y|.$$

- Croissance linéaire :

$$|b(t,x)|+||\sigma(t,x)||<K(1+|x|).$$

- La condition initiale x est de carré intégrable i.e : $\mathbb{E}\left[|x|^2\right]<\infty$.

Alors l'EDS (2.1) possède une unique solution appartient à $\mathbb{S}^2$ et donc à $\mathbb{S}_c^2$.

2.2 Equations différentielles stochastiques rétrogrades

2.2.1 Structuration du problème

Soient $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\geq0},\mathbb{P}\right)$ un espace probabilisé filtré, une variable aléatoire $\xi\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t)$ et un processus Y qui est adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$.

On voudrait résoudre l'équation différentielle :

$$\frac{-dY_t}{dt} = f(Y_t), \quad t \in [0,T], \qquad Y_T = \xi.$$

Considérons l'exemple où f est identiquement nul ($f \equiv 0$). La solution de cette EDS est $Y_t = \xi$, qui n'est pas adaptè si ξ n'est pas dèterministe. Le processus adapté le plus proche de la solution est la martingale $Y_t = E(\xi / \mathcal{F}_t)$.

Alors en utilisant le théorème de représentation des martingale browiennes, il existe un processus unique Z tel que :

$$Y_t = E(\xi / \mathcal{F}_t) = E[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s.$$

On prend $t = T$, alors

$$\begin{aligned} Y_T &= E[\xi] + \int_0^T Z_s dB_s \\ &= E[\xi] + \int_0^t Z_s dB_s + \int_t^T Z_s dB_s \\ &= Y_t + \int_t^T Z_s dB_s. \end{aligned}$$

Donc,

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s.$$

On voit donc apparaître sur notre exemple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z, l'équation devient donc :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, dr - \int_t^T Z_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

2.2.2 Notations et définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, B_t un mouvemement brownien de dimension d sur cet espace, et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle.

Fixons d'abord quelques notations :

- $S^2(\mathbb{R}^k)$: Espace vectoriel formé par les processus Y progressivement mesuable à valeur dans $\mathbb{R}^k$, tel que
$$\|Y\|_{S^2}^2 = \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right) < \infty.$$
- $S_c^2(\mathbb{R}^k)$: Sous espace de S^2 formé par les processus continus.
- $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$: Espace formé par les processus Z progressivement mesuable à valeur dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tel que
$$\|Z\|_{\mathcal{M}^2}^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right) < \infty,$$

où pour $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|z\|^2 = tr(zz^t)$.

- $\mathcal{B}^2$: Espace de Banach $S_c^2(\mathbb{R}^k) \times \mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$, muni de la norm :

$$\|(Y, Z)\|_{\mathcal{B}^2} = \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2 + \int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right).$$

Remarque 2.2.1 *Les espaces S^2, S_c^2, $\mathcal{M}^2$, $\mathcal{B}^2$ sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment.*

Définition 2.2.1 *Les EDSR sont des équations de type :*

$$\begin{cases} dY_t = f(t, Y_t, Z_t)\, dt - Z_t dB_t \\ Y_T = \xi, \qquad\qquad 0 \leq t \leq T \end{cases},$$

où, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s. \tag{2.3}$$

Remarque 2.2.2 *Les éléments de base de l'EDSR sont :*

- *La fonction* $f : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *est appelé le générateur, telle que pour tout* $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$ *le processus* $(f(t, y_t, z_t))_{0\leq t\leq T}$ *soit progressivement mesurable.*
- ξ *est une variable aléatoire de carré intégrable,* $\mathcal{F}_T-$*mesurable à valeur dans* $\mathbb{R}^k$ *(condition terminale).*

Définition 2.2.2 *On dit que le couple* $\{(Y_t, Z_t)\}_{t\in[0,T]}$ *est une solution de l'équation* (2.3)*si :*

- Y *et* Z *sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans* $\mathbb{R}^k$ *et* $\mathbb{R}^{k\times d}$*;*
- $\int_0^T \left\{ |f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2 \right\} ds < \infty;\ \mathbb{P} - p.s.$
- *Pour* $0 \leq t \leq T$ *on a :*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Remarque 2.2.3 *Comme les intégrales de l'équation précédente sont bien définies,* Y *est un semi-martingale continue.*

Proposition 2.2.1 *Supposons qu'il existe un processus* $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ *positif appartient à* $\mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$ *et une constante positive* λ *tels que*

$$\forall (t, y, z) \in [0, T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, \quad |f(t, y, z)| \leq f_t + \lambda (|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de l'EDSR* (2.3) *telle que* $Z \in \mathcal{M}^2$ *alors* Y *appartient à* S_c^2.

2.3 Existance et unicité des solutions

En 1990, E. Pardoux et S. Peng ont démontré l'existence et l'unicité des soulions de EDSR dans le cas où le générateur f est lipschitzien par rapport aux deux variables y et z.

Définition 2.3.1 *Le couple* (f, ξ) *est appelé paramètres standards pour l'équation* (2.3) *si :*

$\triangleright$ ξ *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T$*-mesurable vèrifiée :* $\mathbb{E}\left(|\xi|^2\right) < \infty$;

$\triangleright$ $f(.,0,0)$ *un processus prévisible vérifié :* $\mathbb{E}\left(\int\limits_0^T |f(t,0,0)|^2\, dt\right) < \infty$;

$\triangleright$ *Le générateur est lipschitzien par rapport* y *et* z*, c.à.d :*

$\exists\lambda > 0 : \forall (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$,

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq \lambda (|y_1 - y_2| + \| z_1 - z_2 \|).$$

Commençons par un cas particulier :

On prend le générateur f indépendant de y et de z. On se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq\, t\,\leq T}$ dans $\mathcal{M}^2$ et on veut trouver une solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int\limits_t^T F_s ds - \int\limits_t^T Z_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.4}$$

Lemme 2.3.1 *Soient* $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T)$ *et* $\{F_t\}_{0\leq\, t\leq T} \in \mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$. *L'EDSR* (2.4) *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in \mathcal{M}^2$.

Preuve. Supposons dans un premier temps que (Y, Z) soit une solution vérifiant $Z \in \mathcal{M}^2\left(\mathbb{R}^{k\times d}\right)$. Si on prend l'espérence conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a :

$$\begin{aligned} Y_t = \mathbb{E}\left(Y_t / \mathcal{F}_t\right) &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s / \mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\xi + \int_t^T F_s ds / \mathcal{F}_t\right), \end{aligned}$$

car $\int_t^T Z_s dB_s$ est une martingale $\left(\mathbb{E}\left(\int_t^T Z_s dB_s\right) = 0\right)$.
On définit donc Y à l'aide de la formule précédente et il reste à trouver Z.

Remarquons que d'aprés le théorème Fubini, comme F est progressivement mesurable, $\int_0^t F_s ds$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$, en fait dans $\mathbb{S}_c^2$ puisque F est de carré intégrable. On a alors $\forall t \in [0, T]$,

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_s ds / \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_s ds := M_t - \int_0^t F_s ds,$$

et puisque M_t est une martingale brownienne, d'aprés le théorème de représentation des martingales browniennes on construit un processus unique $Z \in \mathcal{M}^2$ tel que :

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s,$$

alors

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_s ds = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds.$$

On vérifie facilement que (Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \xi$,

$$Y_t - \xi = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dB_s - \int_0^T F_s ds\right),$$

donc

$$Y_t = \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s.$$

L'unicité est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in \mathcal{M}^2$. ■

Nous énonçons à présent le théorème d'existence de **Pardoux-Peng.**

Théor■me 2.3.1 (*Pardoux-Peng 1990*). *Sous les hypothèses* (L) *suivantes :*

- *Condition de Lipschitz en* y *et* z *:* $\exists \lambda > 0 : \forall (y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k \times d}$

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq \lambda (|y_1 - y_2| + \|z_1 - z_2\|).$$

- *Condition d'intégrabilité :*

$$\mathbb{E}\left(|\xi|^2 + \int_0^T |f(s, 0, 0)|^2 ds\right) < \infty.$$

L'EDSR (2.3), *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in \mathcal{M}^2$.

Preuve. On utilise la mèthode du point fixe de l'espace de Banach $\mathcal{B}^2$ en construisant une application Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est solution de l'EDSR (2.3) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ.

Soit l'application Ψ définit comme suit :

$$\begin{aligned} &\Psi : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^2 \\ &(U, V) \mapsto \Psi(U, V) = (Y, Z), \end{aligned}$$

comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, U_s, V_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.5}$$

Etape 1 : Montrons que Ψ de $\mathcal{B}^2$ dans lui même est bien définie.

Posons $F_s = f(s, U_s, V_s)$, ce processus appartient à $\mathcal{M}^2$ puisque, f étant Lipschitzien

$$\left| f(s, U_s, V_s) - f\left(s, \acute{U}_s, \acute{V}_s\right) \right| \leq \lambda \left(\left| U_s - \acute{U}_s \right| + \left\| V_s - \acute{V}_s \right\| \right),$$

pour $\acute{V}_s = \acute{U}_s = 0$, on obtient

$$|F_s| \leq |f(s, 0, 0)| + \lambda |U_s| + \lambda \|V_s\|.$$

D'aprés le Lemme (2.3.1) on obtient une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in \mathcal{M}^2$, et par La proposition (2.2.1) Y appartient à S_c^2. Donc $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$.

Etape2 : Montrons que Ψ est contractante.

Soient (U, V) et $\left(\acute{U}, \acute{V}\right)$ deux éléments de $\mathcal{B}^2$

$$\Psi(U, V) = (Y, Z), \quad \text{et} \quad \Psi\left(\acute{U}, \acute{V}\right) = \left(\acute{Y}, \acute{Z}\right).$$

Posons $y = Y - \acute{Y}$ et $z = Z - \acute{Z}$. On a alors

$$dy_t = \left\{ f(t, U_t, V_t) - f\left(t, \acute{U}, \acute{V}_t\right) \right\} dt - z_t dB_t.$$

On applique la formule d'Itô à $\exp(\alpha t) |y_t|^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} d\left(\exp(\alpha t) |y_t|^2\right) &= \alpha \exp(\alpha t) |y_t|^2 dt + 2 \exp(\alpha t) |y_t| dy_t + \exp(\alpha t) d\langle y \rangle_t \\ &= \alpha \exp(\alpha t) |y_t|^2 dt + 2 \exp(\alpha t) y_t \left\{ f(t, U_t, V_t) - f\left(t, \acute{U}_t, \acute{V}_t\right) \right\} dt \\ &\quad -2 \exp(\alpha t) |y_t| z_t dB_t + \exp(\alpha t) \|z_t\|^2 dt. \end{aligned}$$

Intégrant entre t et T

$$\begin{aligned}
\exp(\alpha T)|y_T|^2 - \exp(\alpha t)|y_t|^2 &= \int_t^T \alpha \exp(\alpha s)|y_s|^2 ds + \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds \\
&+ \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s|\left\{f(s,U_s,V_s) - f\left(s,U_s^{'},V_s^{'}\right)\right\} ds \\
&- \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s| z_s dB_s,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds = & -\int_t^T \alpha \exp(\alpha s)|y_s|^2 ds + \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s| z_s dB_s \\
& + \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s|\left\{f(s,U_s,V_s) - f\left(s,U_s^{'},V_s^{'}\right)\right\} ds.
\end{aligned}$$

Comme f est $\lambda-$Lipschitzienne, notant $u = U - U^{'}$ et $v = V - V^{'}$

$$\begin{aligned}
\exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds \leq & \int_t^T \exp(\alpha s)\left(2\lambda|y_s||u_s| + 2\lambda|y_s|\|v_s\|\right) ds \\
& + \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s| z_s dB_s - \int_t^T \exp(\alpha s)|y_s|^2 ds.
\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $2ab \leq \dfrac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$ et l'inégalité précédente donne

$$\begin{aligned}
\exp(\alpha t)|y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s)\|z_s\|^2 ds \quad & \leq \int_t^T \exp(\alpha s)\left(\frac{2\lambda^2}{\varepsilon} - \alpha\right)|y_s|^2 ds \\
& + \varepsilon \int_t^T \exp(\alpha s)\left(|u_s|^2 + \|v_s\|^2\right) ds \\
& + \int_t^T 2\exp(\alpha s)|y_s| z_s dB_s.
\end{aligned}$$

On prend $\alpha = \dfrac{2\lambda^2}{\varepsilon}$, et on note

$$R_\varepsilon = \varepsilon \int_t^T \exp(\alpha s) \left(|u_s|^2 + \|v_s\|^2 \right) ds,$$

$$\exp(\alpha t) |y_t|^2 + \int_t^T \exp(\alpha s) \|z_s\|^2 \, ds \leq R_\varepsilon + 2 \int_t^T \exp(\alpha s) |y_s| \, z_s dB_s. \tag{2.6}$$

La martingale locale $\left\{ \int_t^T \exp(\alpha s)\, y_s z_s dB_s \right\}$ est une martingale nulle en 0 puisque Y, $\acute{Y} \in S^2$ et Z, $\acute{Z} \in \mathcal{M}^2$. En particulier, prenant l'espérance ce qui fait partir l'intégrale stochastique via la remarque précédente, on obtient facilement, pour $t = 0$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\alpha s) \|z_s\|^2 \, ds \right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon \right]. \tag{2.7}$$

Revenant à l'inégalité (2.6) les inégalités BDG fournissent :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \exp(\alpha t) |y_t|^2 \right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon \right] + C \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \exp(\alpha s) |y_s|^2 \|z_s\|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon \right] + C \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \exp\left(\frac{\alpha t}{2} \right) |y_t| \left(\int_0^T \exp(\alpha s) \|z_s\|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \right],$$

puis, comme $ab \leq \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \exp(\alpha t) |y_t|^2 \right] &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon \right] + \frac{1}{2} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \exp\left(\frac{\alpha t}{2} \right) |y_t|^2 \right] \\ &+ \frac{C^2}{2} \mathbb{E}\left[\int_0^T \exp(\alpha s) \|z_s\|^2 \, ds \right]. \end{aligned}$$

Prenant en considération l'inégalité (2.7) on obtient finalement,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2+\int_0^T\exp(\alpha s)\left\|z_s\right\|^2 ds\right]\leq\left(3+C^2\right)E\left[R_\varepsilon\right],$$

et par suite, revenant à la définition de R_ε,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|y_t\right|^2+\int_0^T\exp(\alpha s)\left\|z_s\right\|^2 ds\right]\leq C_\varepsilon\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|u_t\right|^2+\int_0^T\exp(\alpha s)\left\|v_s\right\|^2 ds\right],$$

où $C_\varepsilon=\varepsilon\left(3+C^2\right)(1\vee T)$.

Prenons ε tel que $\varepsilon\left(3+C^2\right)(1\vee T)=\dfrac{1}{2}$. Donc, l'application Ψ est une contraction de $\mathcal{B}^2$ dans lui même si on le munit de la norme :

$$\left\|(U,V)\right\|_\alpha=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\exp(\alpha t)\left|U_t\right|^2+\int_0^T\exp(\alpha s)\left\|V_s\right\|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}},$$

qui en fait un espace de Banach, cette dernière norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha=0$. Donc Ψ possède une unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution l'EDSR (2.3) dans $\mathcal{B}^2$. ■

2.4 EDSR linéaires et théorème de comparison

Les EDSR linéaires sont celles qui sont apparues les première en 1973 dans l'article de J.M.Bismut. Comme pour les équations différentielles ordinaires, si f est linéaire, on peut donner une formule explicite de la solution de l'EDSR.

2.4.1 EDSR linéaires

Proposition 2.4.1 *Soit $\{(\alpha_t,\beta_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, progressivement musurable et borné. Soient $\{\phi_t\}_{t\in[0,T]}$ un èlèment de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable, de carrè intègrable, à valeurs rèelles.*

L'EDSR linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{\alpha_s Y_s + Z_s \beta_s + \phi_s\}\, ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

possède une unique solution qui vérifie :

$$\forall t \in [0,T], \quad Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\left(\xi \Gamma_T + \int_t^T \phi_s \Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t \right),$$

pour tout $t \in [0,T]$,

$$\Gamma_t = \exp\left\{ \int_0^t \beta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\beta_s|^2 ds + \int_0^t \alpha_s ds \right\}.$$

2.4.2 Théorème de comparaison

Ce théorème permet de comparer les solutions de deux EDSR dans $\mathbb{R}$ dés que l'on sait comparer les conditions terminales et les générateurs.

Théorème 2.4.1 *Soient (Y,Z) et $\left(\acute{Y}, \acute{Z}\right)$ solutions des EDSR associées aux paramètres (f,ξ) et $\left(\acute{f}, \acute{\xi}\right)$.*
On suppose que f vérifie (L). Si $\xi \leq \acute{\xi}$ $\mathbb{P}.p.s$ et $f(t, Y_t, Z_t) \leq \acute{f}(t, Y_t, Z_t)\, dt \otimes d\mathbb{P}.ps$, alors

$$Y_t \leq \acute{Y}_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad p.s.$$

Chapitre 3

Equations intégrales stochastiques rétrogrades de Volterra

3.1 Equation différentielle stochastique de Volterra

Les équations différentielles stochastiques de Volterra ($EISV$ en abrégé) sont un type spécial d'équations intégrales. Ils représentent des modèles intéressants pour la dynamique stochastique avec mémoire, afin par exemple des applications en biologie et la finance.

3.1.1 Définitions

Soient $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ un espace de probabilité filtré complet, B un movement brownien de $1-$dimonsion et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle augmentée du B.

Définition 3.1.1 *L'équation intégtale stochastique de Volterra est donnée sous la forme :*

$$X_t = \xi(t) + \int_0^t b(t, s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(t, s, X_s) dB_s, \forall t \in [0, T], \tag{3.1}$$

ou la forme différentielle :

$$dX_t = d\xi(t) + \int_0^t \frac{\partial b}{\partial t}(t,s,X_s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial t}(t,s,X_s)dB_s + b(t,t,X_t)dt + \sigma(t,t,X_t)dB_t,$$

tels que :

* $\xi(t)$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté et à trajectoire continu $\forall t \in [0,T]$.
* $b(t,s,x)$ et $\sigma(t,s,x)$ sont des fonctions aléatoires définies pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ et $x \in \mathbb{R}$.
* Le processus X_t est une solution de l'équation (3.1) s'il est $\mathcal{F}_t-$adapté et à trajectoire continu $\forall t \in [0,T]$.

3.1.2 Existence et unicité des solutions

On va étudie l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (3.1) sous les hypothèses suivantes.

Hypothèses H1

- $\xi(t)$ est un processus $\mathcal{F}_t-$adapté et càdlàg.
- $b(t,s,x)$ et $\sigma(t,s,x)$ sont $\mathcal{F}_s-$mesurable pour tout $s \leq t$.
- Il existe un constant $C > 0$ tel que pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$ on a :

$$|b(t,s,0)| + \|\sigma(t,s,0)\| \leq C.$$

- $b(t,s,x)$ et $\sigma(t,s,x)$ sont Lipschitz par rapport à x, uniforme en t pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$ on a :

$$|b(t,s,x) - b(t,s,x')| + ||\sigma(t,s,x) - \sigma(t,s,x')|| \leq C|x - x'|.$$

- $\exists C > 0$ tel que :

$$|b(t,s,x)| + ||\sigma(t,s,x)|| < C(1 + |x|).$$

Théor■me 3.1.1 *(Existence et unicité). Si les hypothèses (H1) sont satisfaites, l'équation* (3.1) *possède une solution unique.*

3.2 Equations intégrales stochastiques rétrogrades de Volterra

3.2.1 Prèliminaires

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, B_t un mouvment brownien de dimension d et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du B.

On travaillera sur ces espace :

$$L^2(\Omega) = \left\{\xi : \Omega \to \mathbb{R} : \xi \text{ est } \mathcal{F}_T - \text{mesurable et } \mathbb{E}\left[|\xi|^2\right] < \infty.\right\}$$

$$L^2\left([0.T] \times \Omega, \mathbb{R}^k\right) = \left\{\varphi : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^k / \varphi(.) \text{ est } \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}_T - \text{mesurable}, \right. \\ \left. \mathbb{E}\left(\int_0^T |\varphi(t)|^2 dt\right) < \infty.\right\}$$

$$L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T], \mathbb{R}^k\right) = \{Y(.) \in L^2_{\mathcal{F}}([0,T] \times \Omega),\ Y(.) \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{adapté}, \\ \mathbb{E}\int_0^T |Y(t)|^2 dt < \infty, t \in [0,T].\}$$

$$L^2([0,T]), L^2_{\mathcal{F}}\left([0,T], \mathbb{R}^{k\times d}\right) = \left\{Z : [0,T]^2 \times \Omega \to \mathbb{R}^{k\times d}, Z(t,.) \text{ est } \mathcal{F}_t - \text{adapté}, \right. \\ \left. \mathbb{E}\int_0^T\int_0^T |Z(t,s)|^2 dsdt < \infty, s,t \in [0,T].\right\}$$

Définition 3.2.1 *Une $EISRV$ est donnée sous forme :*

$$Y(t) = \xi(t) - \int_t^T h(t, s, Y_s, Z_{t,s}, Z_{s,t})\, ds - \int_t^T Z_{t,s} dB_S, \quad t \in [0,T], \tag{3.2}$$

où

1. $h : [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times \mathbb{R}^{k\times d} \times \Omega \to \mathbb{R}^k$ *et ξ sont deux fonction données et h est appellé genérateur,*

2. $(Y(.), Z(.,.))$ *est une processus inconnu.*

3.3 Existance et unicité des solutions

On note par $\mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$ l'espace $L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^k) \times L^2([0,T];L^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R}^{k\times d}))$

Commençons par un cas particulier :

$$Y(t) = \varphi(t) - \int_t^T Z_{t,s} dB_s, \quad t \in [0,T], \tag{3.3}$$

telle que : $\varphi(.) \in L^2\left([0.T] \times \Omega, \mathbb{R}^k\right)$.

Définition 3.3.1 *Chaque couple de processus stochastique* $(Y(.), Z(.,.)) \in \mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$ *satisfait l'équation* (3.3) *est appelé une solution adaptée de* (3.3)*.*

Théorème 3.3.1 *Pour toute* $\varphi(.) \in L^2\left([0.T] \times \Omega, \mathbb{R}^k\right)$*, l'EISRV* (3.3) *admet une solution unique adaptée* $(Y(.), Z(.,.)) \in \mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$*, et on a la relation :*

$$Y(t) = \mathbb{E}[\varphi(t)] - \int_0^t Z_{t,s} dB_s, \quad t \in [0,T], \tag{3.4}$$

De plus on a l'estimation

$$\mathbb{E}\int_0^T |Y(t)|^2 dt + \mathbb{E}\int_0^T\int_0^T |Z_{t,s}|^2 ds dt \leq C\mathbb{E}\int_0^T |\varphi(t)|^2 dt. \tag{3.5}$$

où C *une constante* $(C > 0)$.

Preuve. Soit $\varphi(.) \in L^2\left([0.T] \times \Omega, \mathbb{R}^k\right)$, $\forall t \in [0,T]$.

On a

$$M_t(r) = \mathbb{E}\left[\varphi(t) / \mathcal{F}_r\right], \quad r \in [0,T].$$

$\left\{(M_t(r))_r\right\}_t$ est une famille de martingale de carré intégrable. Par le théorème de représentation des martingales Browniennes, pour chaque t il existe un unique processus $Z(t,.)$ de carré intégrable tel que

$$M_t(r) = \mathbb{E}\left(M_t(0)\right) + \int_0^r Z_{t,s} dB_s.$$

Posons $r = T$, et puisque $\varphi(.)$ est $\mathcal{F}_T$ adaptée alors

$$\varphi(t) - \mathbb{E}\left(\varphi(t)\right) = \int_0^T Z_{t,s} dB_s. \tag{3.6}$$

Donc, on obtient

$$Y(t) = \mathbb{E}\left[\varphi(t)\right] - \int_0^t Z_{t,s} dB_s, \quad t \in [0,T].$$

On a $Y(.)$ est $\mathcal{F}_t$ adaptée et par (3.6), on sait que $(Y(.), Z(.,.))$ est une solution adaptée de (3.3). L'esperance conditionelle dans (3.3) donne :

$$Y(t) = \mathbb{E}\left[Y(t) / \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(t) / \mathcal{F}_t\right].$$

Par conséquence,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^T |Y(t)|^2 dt &= \mathbb{E}\int_0^T \left(\left|\mathbb{E}\left[\varphi(t) / \mathcal{F}_t\right]\right|\right)^2 dt \\
&\leq \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}\left[\left|\varphi(t)\right| / \mathcal{F}_t\right]^2 dt.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz,

$$\mathbb{E}\int_0^T |Y(t)|^2\,dt \leq \mathbb{E}\int_0^T \mathbb{E}\left(|\varphi(t)|^2/\mathcal{F}_t\right)dt \leq \int_0^T \mathbb{E}\,|\varphi(t)|^2\,dt.$$

Ensuite, de (3.6) et l'isometrie on a d'une part

$$\int_0^T \mathbb{E}\left(\left|\int_0^T Z_{t,s}dB_s\right|\right)^2 dt = \int_0^T \mathbb{E}\int_0^T |Z_{t,s}|^2\,dsdt,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\int_0^T \mathbb{E}\left(\left|\int_0^T Z_{t,s}dB_s\right|\right)^2 dt &= \int_0^T \mathbb{E}\,|\varphi(t)-\mathbb{E}\left(\varphi\left(t\right)\right)|^2\,dt\\ &\leq \int_0^T \mathbb{E}\left(|\varphi(t)|+|\mathbb{E}\left(\varphi(t)\right)|\right)^2 dt\\ &\leq 2\int_0^T \mathbb{E}\left(|\varphi(t)|^2+|\mathbb{E}\left(\varphi(t)\right|^2\right)dt\\ &\leq 4\int_0^T \mathbb{E}\left(|\varphi(t)|^2\right)dt.\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{E}\int_0^T |Y(t)|^2\,dt+\mathbb{E}\int_0^T\int_0^T |Z_{t,s}|^2\,dsdt \leq 5\mathbb{E}\int_0^T |\varphi(t)|^2\,dt.$$

L'unicité est immédiate par l'estimation (3.5). ■

Le processus $\varphi(.)$ dans (3.3) peut se généralisé de la façon suivant :

$$\varphi(t) = \int_t^T h\left(t,s\right)ds, t\in\left[0,T\right],$$

où $h\left(t,s\right)\in L^2\left([0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^k\right)$.

3.3.1 Cas générale

Dans cette section, on considère le cas générale des $EISRV$ (3.2) avec $h : [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times \mathbb{R}^{k\times d} \times \Omega \to \mathbb{R}^k$.

Définition 3.3.2 *Le couple* $(Y(.), Z(.,.)) \in \mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$ *satisfaisant* (3.2) *est appelé une solution adaptée de* (3.2) .

On va étudie l'existence et l'unicité sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse H2 :

Soit $h : [0,T] \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times \mathbb{R}^{k\times d} \times \Omega \to \mathbb{R}^k$.

– h est $\mathcal{B}\left([0,T]^2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times \mathbb{R}^{k\times d}\right) \otimes \mathcal{F}_{T-}$musurable.

– Il existe une constante $L > 0$ telle que :

– $\begin{cases} |h(t,s,0,0,0)| \leq L, \\ \forall (t,s) \in [0,T] \times [0,T], y, \bar{y} \in \mathbb{R}^k, z, \bar{z}, \zeta, \bar{\zeta} \in \mathbb{R}^{k\times d}, \\ |h(t,s,y,z,\zeta)| - h\left(t,s,\bar{y},\bar{z},\bar{\zeta}\right) \leq L\left(|y-\bar{y}| + |z-\bar{z}| + \left|\zeta - \bar{\zeta}\right|\right) \end{cases}$

Ce qui suit est un résultat d'existence et d'unicité pour des solutions adaptées à EISRV (3.2).

Théorème 3.3.2 *Supposons que* $(H2)$ *soit vérifie, alors pour tout* $\xi(.) \in L^2((0,T) \times \Omega; \mathbb{R}^k)$*, EISRV* (3.2) *admet une unique solution adaptée* $(Y(.), Z(.,.)) \in \mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$.
De plus on a l'estimation suivante :

$$\mathbb{E}\int_0^T |Y(t)|^2 \, dt + \mathbb{E}\int_0^T\int_0^T |Z(t,s)|^2 \, dsdt \leq C\left(1 + \mathbb{E}\int_0^T |\xi(t)|^2\right).$$

Preuve. La preuve consiste à trouver une solution de l'équation (3.2) par la méthode du point fixe. L'existence et l'unicité d'un point fixe vont résulter du fait que pour tout $T > 0$ l'application $(y,z) \mapsto (Y,Z)$ est contractante sur l'espace $\mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$. D'abord en vérifiant qu'elle est bien définit dans lui même.

Pour tout $(y(.), z(.,.)) \in \mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$,

$$\varphi(t) := \xi(t) + \int_t^T h(t,s,y(s),z(t,s),z(s,t))ds, \quad t \in [0,T].$$

Alors, par $(H2)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^T |\varphi(t)|^2 dt &\leq C\mathbb{E}\left\{\int_0^T |\xi(t)|^2 dt + \int_0^T \left|\int_t^T h(t,s,y(s),z(t,s),z(s,t))ds\right|^2 dt\right\} \\
&\leq C\mathbb{E}\left\{1 + \int_0^T |\xi(t)|^2 dt + \int_0^T |y(s)|^2 ds + \int_0^T\int_0^T |z(t,s)|^2 dsdt\right\}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(.) \in L^2([0,T] \times \Omega; \mathbb{R}^k)$ d'aprés le théorème (3.3.1) il existe une unique solution adaptée $(Y(.), Z(.,.)) \in \mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$ au EISRV suivant :

$$Y(t) = \xi(t) + \int_0^T h(t,s,y(s),z(t,s),z(s,t))ds - \int_t^T \langle Z(t,s), dB(s)\rangle, \tag{3.7}$$

pour une contante $C > 0$, alors l'application $(y,z) \mapsto (Y,Z)$ est définie de l'espace $\mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$ dans lui même.

Montrons que cette application est contractante sur l'espace $\mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$, sous la norme

$$\|.\|_{\mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])} = \mathbb{E}\int_0^T |Y(t)|^2 dt + \mathbb{E}\int_0^T\int_0^T |Z(t,s)|^2.$$

Prenons un autre couple $(\overline{y}(.), \overline{z}(.,.)) \in \mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$, et soit $\left(\bar{Y}(.), \bar{Z}(.,.)\right)$ la solution adaptée de (3.7), alors

$$\begin{aligned} Y(t) - \overline{Y}(t) &= -\int_t^T \left\{ \int_0^T h(t,s,y(s),z(t,s),z(s,t)) - h(t,s,\bar{y}(s),\bar{z}(t,s),\bar{z}(s,t)) \right\} ds \\ &- \int_t^T \left[Z(t,s) - \bar{Z}(t,s) \right] dB_s. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème (3.3.1) sur $[r,T]$ et $(H2)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\int_r^T \left|Y(t) - \bar{Y}(t)\right|^2 dt + \mathbb{E}\int_r^T\int_r^T \left|Z(t,s) - \bar{Z}(t,s)\right|^2 dsdt \\ &\leq C\mathbb{E}\int_r^T \left| \int_r^T [h(t,s,y(s),z(t,s),z(s,t) - h(t,s,\overline{y}(s),\bar{z}(t,s),\bar{z}(s,t))]\, ds \right|^2 dt \\ &\leq C(T-r)^2\mathbb{E}\int_r^T |y(t) - \bar{y}(t)|^2 dt + C(T-r)\mathbb{E}\int_r^T\int_r^T |z(t,s) - \bar{z}(t,s)|^2 dsdt. \end{aligned}$$

On prend $K_1(r) = C(T-r)^2$ et $K_2(r) = C(T-r)$, ce qui signifie que :

$$\|(Y,Z)\|_{\mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])} \leq K(r)\, \|(y,z)\|_{\mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])},$$

où $K(r) = K_1(r) \vee K_2(r)$.

On choisie r de tel sort que $K(r) < 1$, donc l'application $(y,z) \mapsto (Y,Z)$ est contractante sur l'espace $\mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$ alors $(Y(.), Z(.,.)) \in \mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}([0,T])$ est la solution unique de l'équation (3.2). ■

Bibliographie

[1] Aase, K., Øksendal, B., Privault, N., & Ubøe, J. (2000). White noise generalizations of the Clark-Haussmann-Ocone theorem with application to mathematical finance. Finance and Stochastics, 4(4), 465-496.

[2] Benth, F. E. (1993). Integrals in the Hida distribution space (S)*. B. Lindstrøm, B. Øksendal, and A.S. Ustunel, editors, Stochastic Analysis and Related Topics, Vol. 8, 89-99.

[3] Briand, P. (2004). Equations Différentielles Stochastique Rétrogrades.

[4] Jeanblanc, M, Simon, T. (2005). Eléments de calcul stochastique.

[5] Jeanblanc, M. (2006). Cours de calcul stochastique.

[6] Hida, T, Kuo, H. H, Potthoff, J, & Streit, L. (1993). White Noise. An Infinite-demensional Approach. Kluwer

[7] Hu, Y. & Øksendal, B. (2016). Linear backward stochastic Volterra equations. Stochastic Processes and their Applications

[8] Khalfallah, N . (2019) . Cours de théorie générale des processus stochastique. Université de Biskra.

[9] Labed, B. (2019). Cours de mouvement brownien et calcul stochastique. Université de Biskra

[10] Yong, J. (2006). Backward stochastic Volterra integral equations and some related problems.

[11] Øksendal, B. (2000). Stochastic Differential Equations.

Résumé

Cette thèse porte sur les équations intégrales stochastiques rétrogrades de Volterra (EISRV en abrégé). Ce type d'équations est utilisé en mathématique financières et on contrôle stochastique.
L'objectif principal de cette thèse est l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution des EISRV.

Mot-clés : Equations intégrales stochastiques rétrogrades de Volterra (EISRV), équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR), existence et unicité du solution.

Abstract

This thesis treats of backward stochastic Volterra integral equations. This type of equations is used in financial mathematics and stochastic control.
The main objective of this thesis is the study of the existence and the uniqueness of the solution of the (BSVIE).

Key-words : Backward stochastic Volterra integral equations (BSVIE), Backward stochastic differential equations (BSDE), Existence and uniqueness of the solution.

الملخص

تتناول هذه المذكرة المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية لVolterra

يستخدم هذا النوع من المعادلات في الرياضيات المالية والتحكم العشوائي.

إن الهدف الرئيسي لهذه الأطروحة هو دراسة وجود ووحدانية حل لهذه المعادلات

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية ل**Volterra**،

المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية، الموجود والوحدانية .