République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : Probabilité

Par Melle : HOUIMLI Basma

Titre :

L'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires

Devant le Jury :

Dr.	Yekhlef Samia	U. Biskra	Présidente
Dr.	Romeili Nacira	U. Biskra	Encadrante
Dr.	Mezerdi Mohamed Al Amine	U. Biskra	Examinateur

Soutenu Publiquement le 26/06/2022

Dédicace

Je tiens à dédie ce travail à

Mes chèrs parents en premier lieu,

Ma soeur, mes frères, et tous ma famille,

Mes enseignants,

Mes amies, et tous ceux qui me sont chèrs.

BASMA HOUIMLI

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier en premier lieu, **Allah** le tout-puissant, qui m'a donné la force, la capacité et la persévérance pour réussir à chaque étape de ma vie universitaire, jusqu'au jour où j'ai terminé mon diplôme de master2.

J'adresse mes sincères remerciements, mon appréciation et mon respect à mon superviseur **Dr. ROMEILI Nacira**, pour ses efforts, ses conseils et son aide, pour faire ce travail une réussite.

Je tiens à remercier les membres du comité d'examen, **Dr. Yekhlef Samia** et **Dr. Mezerdi Mohamed Al Amine**, qui ont accepté de lire et de corriger ce travail.

Avec une grande gratitude, j'adresse mes sincères remerciments et mon respect à madame **Dr. Ibtissem Saad** de la faculté des sciences économiques -Biskra- pour son aide et ses encouragements.

Enfin, je voudrais remercier mes parents, ma famille, tous mes enseignants de département de mathématiques, mes amis et tous ceux qui m'ont encouragé et contribué à la réalisation de ce mémoire.

Notations et symbols

v.a.	:	Variable aléatoire.
$\mathbb{P}-p.s.$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité.
$p.s.$	:	Presque sûrement.
i.e. , c-à-d	:	C'est à dire.
$\mathbb{L}^1$	:	Espace des processus intégrable.
$\mathbb{L}^2$	:	Espace des processus de carré intégrable.
$\mathbb{L}^p$	:	Espace des processus de p-intégrable.
$L^2([0,T])$	:	Espace des fonction de carré intégrable.
$\mathbb{E}[.]$	:	Espérance mathématique.
$\mathbb{E}[./.]$	:	Espérance conditionnelle.
$\mathbb{R}^k$	:	Espace réel euclidien de dimension k.
$\mathbb{R}^{k*d}$	:	Ensemble des matrices réelles de dimension $k*d$.
Var	:	Variance.
Cov	:	Covariance.
$\mathbf{1}_A$	:	Indicatrice de A,tel que $\mathbf{1}_A(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{si } x\notin A\end{cases}$
$\mathcal{C}^k$	:	Ensemble des fonction k fois dérivable et dont la $k^{ème}$ dérivée est continue.
$\mathcal{S}^2$	:	Espace vectoriel formé les processus progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.

$\mathcal{S}_c^2$	:	Sous-espace formé par les processus continus.
$\mathcal{M}^2$	:	Formé par les processus progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k*d}$.
M^2	:	Ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k*d})$.
$\mathcal{B}^2$	:	Espace de Banach $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k*d})$.
resp.	:	Respectivement.
BDG	:	Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy.
ESD	:	Équation différentielle stochastique.
ESDR	:	Équation différentielle stochastique rétrograde.

Table des matières

Dédicace **i**

Remerciements **ii**

Notations et symbols **iii**

Table des matières **v**

Introduction **1**

1 Notions de base **3**

1.1 Calcul stochastique 3

1.2 Martingales en temps continue 6

1.3 Mouvement Brownien 8

1.4 Intégrale stochastique 8

1.4.1 Intégrale de Wiener 8

1.4.2 L'intégrale stochastique en général 9

1.5 Calcul d'Itô 12

1.6 Equations différentielles stochastiques"EDS" 14

1.6.1 Définitions et notations 14
1.6.2 Notions d'existence et unicité 15
1.7 Résultats importants 16

2 Les équations différentielles stochastiques rétrogrades "EDSRs" 18
2.1 Présentation du problème 18
2.2 Notations et définitions 20
2.3 Résultat de Pardoux-Peng 24
2.3.1 Cas particulier 25
2.3.2 Cas général 28
2.4 Le rôle de Z 34

3 Les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires 37
3.1 EDSR linéaire 37
3.2 Application 40
3.2.1 Modèle de Black-Scholes 40

Conclusion 45

Bibliographie 46

Introduction

Dans ce mémoire, on présente la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades "EDSRs", (ou en englais, backward stochastic differential equations "BSDE"), qui sont une nouvelle classe d'équation différentielle stochastique "EDS", dont leurs valeurs sont données en temps terminale T. L'EDSR a reçu un grand intérêt dans la recherche en probabilité. La théorie d'EDSR a trouvé de nombreuses applications, comme les problèmes de mathématiques financières. Les EDSRs ont été introduites en premier fois en 1973 par Bismut, dans le cas où le générateur f est linéaire, comme des EDSRs linéaires, aprés de cinq ans, en 1978, Bismut développe sa théorie et montre qu'il existe une unique solution borné de l'EDSR de Riccati. Et en 1990 la théorie des EDSRs a été grandement développé par les recherches scientifiques, et dans la même année, E.PADOUX et S. PENG ont posés la forme de l'ESDR dans le cas général, c-à-d où le générateur f est non-linéaire, et ont montrés l'existence et l'unicité de la solution de l'EDSR.[8]

Pour plus explication, on va introduire l'EDSR comme suivant

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré, B un mouvement brownien, ξ est une v.a. $\mathcal{F}_T-$adapté, Y un processus adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, f est le générateur et Z un processus de carré intégrable et adapté, on a l'EDSR

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \qquad \text{avec, } Y_T = \xi.$$

Alors, la question principale et centrale de notre travail est : Peut-on trouver une seule solution de l'EDSR linéaire ?

Notre travail est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution des EDSRs linéaires, et pour cela, composé à trois chapitres, sont les suivants

Le 1er chapitre (Notions de base) Dans ce chapitre, on va donner quelques rappels de base sur le calcul stochastique, les EDSs et des résultats utiles. Ce chapitre est essentiellement une sorte d'introduction.

Le 2ème chapitre (Les équations différentielles stochastiques rétrogrades "EDSRs") Dans ce chapitre, on va introduire les EDSRs et présenter le résultat d'existence et d'unicité de la solution d'une EDSR général, dans le cas lipschitz. Ce résultat a été obtenu par E. PADOUX et S. PENG en 1990, avec un générateur f non-linéaire et une donné terminale ξ de carré intégrable.

Le 3ème chapitre (L'existence et l'unicité de la solution des EDSRs linéaire) Dans ce chapitre, on va montrer l'existence et l'unicité de la solution d'une EDSR linéaire, c-à-d où le générateur f est linéaire et avec une donné terminale ξ de carré intégrable. Et on va présenter un exemple dans le marché financier, comme un exemple de l'EDSR linéaire qui est le modèle de Black-Scholes.

Chapitre 1

Notions de base

Ce premier chapitre est une introduction de quelques notions fondamentaux, et quelques résultats importants, dont nous aurons besoin dans la suite de ce mémoire. Dans ce chapitre nous nous sommes appuyés sur les références suivantes : [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] et [9].

1.1 Calcul stochastique

Définition 1.1.1 *[1]* ***(Processus stochastique)*** *Un processus $X = (X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires X_t indexée par un ensemble T.*

– En général $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}_+$ et on considère que le processus est indexé par le temps t.

– Si T est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire.

– Si $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires.

– Plus générale quand $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret.

– Pour $T \subset \mathbb{R}^d$, on parle de champ aléatoire (drap quand d=2).

— Un processus dépend de deux paramètres : $X_t(\omega)$ dépend de t (en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$:

– Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'éspace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;

– Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus.

Définition 1.1.2 *[1](**Égalité de processus**)*

– Deux processus X et Y ont même lois s'ils ont même lois fini-dimensionnelles : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, ..., t_p \in T$,

$$(X_{t_1}, ..., X_{t_p}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (Y_{t_1}, ..., Y_{t_p}).$$

On écrira $X \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y$.

– On dira que Y est une version (ou une modification) du processus X si pour tout $t \in T$, on a $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$.

– Deux processus X et Y sont dit indistinguables s'il existe $N \subset \mathcal{F}$ négligeable tels que, pour tout $\omega \notin N$, on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ pour tout $t \in T$; on écrit : $\mathbb{P}(X_t = Y_t : \forall t \in T) = 1$.

Proposition 1.1.1 *indistinguable $\Longrightarrow$ modification $\Longrightarrow$ même lois fini-dimensionnelles.[1]*

Définition 1.1.3 (Processus continu) *On dit que le processus est à trajectoires continues (ou est continu) si les applications $t \mapsto X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.[3]*

Définition 1.1.4 (Processus càdlàg (resp. càglàd)) *Un processus est dit càdlàg (continu à droite, pourvu de limites à gauche) si ses trajectoires sont continues* *à droite, pourvues de limites à gauche. Même définition pour càglàd (continu à gauche et limité à droite).[3]*

Définition 1.1.5 (Processus mesurable) *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit mesurable si l'application définie sur $(\mathbb{R}_+ \times \Omega,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ par $(t,\omega) \mapsto X_t(\omega)$ est mesurable.[1]*

Définition 1.1.6 *[7]**(Filtration)** Une filtration est une famille croissante $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t < +\infty\}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ pour $0 \leq s \leq t < +\infty$.*

On pose : $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup\limits_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$.

Remarque 1.1.1 *[9]Une tribu est dite complète lorsqu'elle contient l'ensemble des négligeables $\mathcal{N}$ de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui est définie par*

$$\mathcal{N} \ := \ \{\mathcal{N} \subset \Omega \ , \ \exists \ A \in \mathcal{F} \ / \ \mathcal{N} \subset \ A \ , \mathbb{P}(A) = 0\}.$$

Définition 1.1.7 *Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ est complète lorsque $\mathcal{F}_t$ est complète pour tout $t \in [0,T]$ (ce qui équivaut à $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$).[9]*

Définition 1.1.8 (Filtration naturelle) *À un processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ on associe sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t^X$, c-à-d la famille croissante de tribus $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s \ , \ 0 \leq s \leq t\}$.[3]*

Définition 1.1.9 (Filtration continue) *On définit*

$$\mathcal{F}_{t^-} = \sigma\left(\bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s\right) \ , \qquad \mathcal{F}_{0^-} = \mathcal{F}_0 \ , \qquad \mathcal{F}_{t^+} = \ \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Une filtration est continue à droite (resp. à gauche) si $\forall t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ (resp. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$).[7]

Définition 1.1.10 ***(Filtration standard)*** *Une filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ satisfait les conditions usuelles (habituelles) si elle est continue à droite et si $\mathcal{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\mathcal{F}$.[7]*

Définition 1.1.11 ***(Processus adapté)*** *Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\geq 0}$ est dit adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$), si X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable, pour tout t.[3]*

Définition 1.1.12 ***(Processus progressif)*** *Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit progressif (ou progressivement mesurable) si pour $t \geq 0$, $(s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$ est mesurable sur $[0, t] \times \Omega$ muni de $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$.[1]*

Définition 1.1.13 *[6]**(Temps d'arrêt)** Soit $(\mathcal{F}_t)$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Une v.a. $T : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt si $\forall t \geq 0$, $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

On associe à un temps d'arrêt T les tribus suivantes

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0,\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$
$$\mathcal{F}_{T+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty, \forall t \geq 0,\ A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t\}$$
$$\mathcal{F}_{T-} = \sigma(\{A \cap \{T > t\}; t \geq 0,\ A \in \mathcal{F}_t\}).$$

1.2 Martingales en temps continue

Définition 1.2.1 *[6]Un processus $(X_t,\ t \geq 0)$ adapté et tel que, pour tout $t \geq 0$, $X_t \in \mathbb{L}^1$ est appelé*

· martingale si pour $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s$;

· sur-martingale si pour $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s$;

· sous-martingale si pour $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s$.

Propriété 1.2.1 *[3]*

− Si X est une martingale $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_0)$, $\forall t$.

− Si $(X_t,\, t \leq T)$ est une martingale, le processus est comlètement déterminé par sa valeur terminale : $X_t = \mathbb{E}(X_T \mid \mathcal{F}_t)$. Cette dernière propriété est d'un usage trés fréquent en finance.

Définition 1.2.2 *[6]* ***(Martingale locale)*** *Un processus adapté à trajectoires continues $M = (M_t,\, t \geq 0)$ tel que $M_0 = 0$ p.s. est une martingale locale (continue) s'il existe une suite croissante $(T_n,\, n \in \mathbb{N})$ de temps d'arrêt telle que $T_n \uparrow \infty$ et pour tout n le processus arrêté M^{T_n} est une martingale uniformément intégrable.*

Plus généralement, lorsque $M_0 \neq 0$, on dit que M est une martingale locale (continue) si $M_t = M_0 + N_t$, où le processus N est une martingale locale issu de0.

Définition 1.2.3 ***(Semi-martingale)*** *Un processus $X = (X_t,\, t \geq 0)$ est une semi-martingale continue s'il s'écrit sous la forme*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

où M est une martingale locale (nulle en $t = 0$) et A est un processus à variation finie.[6]

1.3 Mouvement Brownien

Définition 1.3.1 *[9]Soit $\mathcal{F}$ une filtration. Un $\mathcal{F}$-mouvement brownien (standard) est un processus W (on l'appelle aussi processus de Wiener) vérifiant*

1. W est $\mathcal{F}$-adapté,

2. $W_0 = 0$ $\mathbb{P}$-$p.s.$,

3. W est continu, $i.e.$ $t \mapsto W_t(\omega)$ est continue pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$,

4. W à accroissements indépendants, i.e. $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s = \sigma(W_u,$ $0 \leq u \leq s)$ pour tous t, $s \in [0, T]$ tels que $s \leq t$,

5. W à accroissements stationnaires et gaussiens, i.e. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ pour tous t, $s \in [0, T]$ tels que $s \leq t$.

Théorème 1.3.1 *Un processus W est un mouvement brownien si et seulement si c'est un processus gaussien continu centré de fonction de covariance donnée par $cov(W_s, W_t) = s \wedge t$, pour s, $t \in [0, T]$.[9]*

Propriété 1.3.1 *[1]*

· $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ car $\mathbb{E}(W_t) = 0$.

· $Var(W_t) = cov(W_t, W_t) = t$.

1.4 Intégrale stochastique

1.4.1 Intégrale de Wiener

C'est un cas particulier de l'intégrale stochastique. En effet pour un processus X quelconque, la loi de la $v.a.$

$$\int_0^t X_s dB_s$$

n'est pas connu, même si B est un mouvement brownien. Mais quand $X_s = g(s)$ est une fonction déterministe du temps, l'intégrale $\int_0^t g(s)dW_s$ est appelée intégrale de Wiener. Ses propriétés sont les suivantes.[7]

Proposition 1.4.1 *[7]Soit g dans $L^2([0,T])$*

$$\int_0^T (g(s))^2 ds < +\infty.$$

Le processus $\left(\int_0^t g(s)dW_s,\, t \in [0,T]\right)$ est un processus gaussien, centré, à trajectoires continues, de carré intégrable et de fonction de covariance

$$Cov\left(\int_0^t g(r)dW_r, \int_0^s g(r)dW_r\right) = \int_0^{t\wedge s} g^2(r)dr.$$

Si f est une autre fonction analogue,

$$Cov\left(\int_0^t g(r)dW_r, \int_0^s f(r)dW_r\right) = \int_0^{t\wedge s} g(r)f(r)dr.$$

1.4.2 L'intégrale stochastique en général

Définition 1.4.1 *[5]**(Bon processus)** On note $\left\{\mathcal{F}_t^W\right\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du mouvement brownien W.*

On dit que $\{\theta_t,\, t \geq 0\}$ est un bon processus s'il est $\left(\mathcal{F}_t^W\right)$-adapté, càglàd et si

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < \infty, \qquad \text{pour tout } t > 0.$$

Cas de processus étagés[3]

On dit qu'un processus θ est étagé (ou élémentaire ou simple) s'il existe une suite de réels t_i, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ et une suite de variable aléatoires θ_i, telles que θ_i soit $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable, appartienne à $\mathbb{L}^2(\Omega)$ et que $\theta_t = \theta_i$ pour tout $t \in]t_i, t_{i+1}[$, soit

$$\theta_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega) \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}[}(t).$$

On définit alors

$$\int_0^\infty \theta_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \right).$$

On a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s dW_s\right] = 0,\, Var\left(\int_0^\infty \theta_s dW_s\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \theta_s^2 ds\right].$$

On obtient

$$\int_0^t \theta_s dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i \left(W(t_{i+1} \wedge t) - W(t_i \wedge t) \right).$$

Cas général[5]

Si θ est un "bon processus", on montre d'abord qu'il existe

$$\{\theta^n,\, n \geq 0\},$$

suite de processus étagés telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds\right] \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0,$$

puis pour tout $t > 0$, il existe une v.a. $I_t(\theta)$ de carré intégrable telle que

$$\mathbb{E}\left[\left|I_t(\theta) - I_t(\theta^n)\right|^2\right] \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

avec

$$I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dW_s, \qquad \forall t \geq 0.$$

Par indépendence, on remerque que

$$\mathbb{E}\left[I_t(\theta^n)\right] = \sum_{i=0}^{p_n} \mathbb{E}\left[\theta_i\right]\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right) = 0,$$

de sorte que en passant à la limite que

$$\mathbb{E}\left[I_t(\theta)\right] = 0.$$

De même on obtient

$$\begin{aligned} Var\left[I_t(\theta)\right] &= \lim_{n \longrightarrow \infty} Var\left[I_t(\theta^n)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]. \end{aligned}$$

Propriété 1.4.1 *[9]* ***(Propriétés des intégrales stochastiques)***

1. $\theta \longrightarrow \int_0^t \theta_s dW_s$ est linéaire.
2. $\theta \longrightarrow \int_0^t \theta_s dW_s$ est continue $p.s.$
3. $\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus $\mathcal{F}$-adapté.
4. propriété d'isométrie

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right].$$

5.

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_u dW_u \mid \mathcal{F}_s\right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_v dW_v\right)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_v^2 dv \mid \mathcal{F}_s\right].$$

6.
$$\mathbb{E}\left[\left(\int_s^t \theta_v dW_v\right)\left(\int_s^u \phi_v dW_v\right) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^{t\wedge u} \theta_v \phi_v dv \mid \mathcal{F}_s\right].$$

7. $\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $\mathcal{F}$-martingale.

8. Le processus $\left(\left(\int_0^t \theta_s dW_s\right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds\right)_{0\leq t\leq T}$ est une $\mathcal{F}$-martingale.

9. La variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dW_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds.$$

10. La covariation quadratique entre deux intégrales stochastiques est donnée par

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dW_s, \int_0^u \phi_s dW_s \right\rangle = \int_0^{t\wedge u} \theta_s \phi_s ds.$$

1.5 Calcul d'Itô

Définition 1.5.1 *[7](**Processus d'Itô**) Un processus d'Itô $X = \{X_t, \mathcal{F}_t\ ;\ t \geq 0\}$ est un processus adapté de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s = X_0 + \Gamma_t + M_t,\ 0 \leq t < \infty,$$

avec

· X_0 *v.a.* $\mathcal{F}_0$-mesurable de carré intégrable ;

· β adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\int_0^T |\beta_s|\, ds < \infty$ pour tout T ;

· σ adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^{n\times d}$ telle que $\int_0^T |\sigma_s|^2\, ds < \infty$ pour tout T.

De cette définition et des propriétés de l'intégrale d'Itô, on a

· $\Gamma_t = \int_0^t \beta_s ds$: partie à variation finie de X.

$\cdot$ $M_t = \int_0^t \sigma_s dW_s$: partie martingale de X.

Proposition 1.5.1 [2]***(Intégration par parties "IPP")*** *Si X et Y sont deux processus d'Itô, alors*

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t .$$

Théorème 1.5.1 [5]***(1ère formule d'Itô)*** *Supposons g de classe $\mathcal{C}^2$. Alors*

$$g(X_t) = g(x) + \int_0^t g^{'}(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t g^{''}(X_s) \sigma_s^2 ds.$$

Si g est à dérivées bornées, le processus

$$g(X_t) - \int_0^t g^{'}(X_s) b_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t g^{''}(X_s) \sigma_s^2 ds$$

est une martingale.

Cette formule s'écrit

$$dg(X_t) = g^{'}(X_t) dX_t + \frac{1}{2} g^{''}(X_t) d \langle X \rangle_t .$$

Théorème 1.5.2 [5]***(2ème formule d'Itô)*** *Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t, de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x. On a*

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) d \langle X \rangle_s .$$

On peut écrire la formule sous la forme différentielle

$$dg(t, X_t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) d \langle X \rangle_t .$$

1.6 Equations différentielles stochastiques"EDS"

1.6.1 Définitions et notations

Définition 1.6.1 *Une équation différentielle stochastique est une équation de la forme*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \tag{1.1}$$

ou sous forme condencée

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{1.2}$$

L'inconnue est le processus X. Le problème est, comme pour une équation différentielle ordinaire, de montrer que sous certaines conditions sur les coefficients, l'équation différentielle a une unique solution. Il est utile de préciser les données.[3]

Définition 1.6.2 *Soit* b *et* σ *deux fonctions de* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ *à valeurs réelles données. On se donne également un espace* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *muni d'une filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *et un* $(\mathcal{F}_t)$ *mouvement brownien* W *sur cet espace. Une solution de 1.1 est un processus* X *continu* $(\mathcal{F}_t)-$*adapté tel que les intégrales* $\int_0^t b(s, X_s)ds$ *et* $\int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$ *ont un sens et l'égalité*

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

est satisfaite pour tout t, $\mathbb{P} - p.s.$[3]

1.6.2 Notions d'existence et unicité

l'existence et l'unicité d'une solution faible et forte[5]

1. Existence d'une solution faible si 1.2 admet une solution X.

2. Existence d'une solution forte si 1.2 qui soit adaptée à la filtration du mouvement brownien.

3. Unicité faible si tous les processus X solutions de 1.2 ont même loi.

4. Unicité trajectorielle si l'espace de probabilité et le mouvement brownien étant fixés, deux solutions X et $X^{'}$ de 1.2 sont indistinguables, i.e.

$$\mathbb{P}(\exists\ t \in \mathbb{R} \mid X_t \neq X_t^{'}) = 0.$$

Théorème 1.6.1 *Soient b et σ deux fonctions boréliennes. On suppose qu'il existe une constante K telle que, pour tout $t \in [0, T]$, $y, z \in \mathbb{R}^n$,*

1. condition de Lipschitz en espace, uniforme en temps

$$|b(t, y) - b(t, z)| + \|\sigma(t, y) - \sigma(t, z)\| \leq K\,|y - z|\ ;$$

2. croissance linéaire : $|b(t, y)| + \|\sigma(t, y)\| \leq K(1 + |y|)$;

3. $\mathbb{E}[|x|^2] < \infty$.

Alors l'EDS 1.1 possède une unique solution (à l'indistinguabilité près). Cette solution appartient à $\mathcal{S}^2$ et donc à $\mathcal{S}_c^2$.[2]

Preuve. Voir [2], pages (36-37-38). ■

1.7 Résultats importants

Théorème 1.7.1 ***(Représentation des martingales browniennes)*** *Soit M une martingale (càdlàg) de carré intégrable pour la filtration $\{\mathcal{F}_t^B\}_{t\in[0,T]}$. Alors il existe un unique processus $(H_t)_{t\in[0,T]}$, appartenant à $M^2(\mathbb{R}^k)$, tel que*

$$\mathbb{P}-p.s. \qquad \forall t \in [0,T], \qquad M_t = M_0 + \int_0^t H_s.dB_s.$$

Il est important de remarquer que ce résultat implique que, dans la filtration brownienne, les martingales sont continues.[2]

Théorème 1.7.2 ***(Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy "BDG")*** *Pour tout réel $p \geq 0$, il existe des canstantes c_p, C_P telles que pour toute martingale locale M continue issue de 0,*

$$c_p \ \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty^{P/2}] \leq \mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] \leq C_p \ \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_\infty^{p/2}]$$

où $M_t^* = \sup_{0\leq s\leq t} |M_s|$.[1]

Proposition 1.7.1 ***(Inégalité de Doob)*** *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une martingale dont les trajectoires sont continues à droite avec $X_t \in \mathbb{L}^p$ pour tout $t \geq 0$ alors*

$$\left\| \sup_{s\in[0,t]} \mid X_s \mid \right\|_p \leq q \left\|X_t\right\|_p,$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.[1]

Lemme 1.7.1 ***(Gronwall)*** *Soit f une fonction positive localement intégrable dé-*

finie sur $\mathbb{R}_+$ *telle que pour* a*,* $b \geq 0$

$$f(t) \leq a + b\int_0^t f(s)ds.$$

Alors $f(t) \leq a\exp(bt)$ pour tout $t \geq 0$.[1]

Théorème 1.7.3 *[4]**(Théorème de Point fixe de Picard-Banach)*** *Soient* (E, d) *unespace métrique complet et* $g : E \longrightarrow E$ *une application* $k-$*contractante. Alors*

1. g admet un unique point fixe $a \in E$,

2. Pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérées de x_0 par g, définie par $x_n := g(x_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers a,

3. la convergence est géométrique,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Chapitre 2

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades "EDSRs"

Le but de ce chapitre est d'introduire l'EDSR, et de montrer l'existence et l'unicité de sa solution, dans le cas où le générateur f est non-linéaire (cas général). Cette étude est par Pardoux et Peng en 1990. Dans ce qui suit, nous avons adopté [2] et [8] comme références pour la recherche.

2.1 Présentation du problème

On définit un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, ξ est une v.a. $\mathcal{F}_T-$adapté et Y est un processus adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

On va résoudrer l'équation différentielle suivante

$$\frac{-dY_t}{dt} = f(Y_t), \qquad t \in [0, T], \qquad \text{avec } Y_T = \xi.$$

Pour cela, on prend l'exemple le plus simple à savoir $f \equiv 0$. On a $Y_t = \xi$ est l'unique solution de l'EDS qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe, donc on prend l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, pour obtenir ξ est adapté, alors la meilleure approximation -disons dans $\mathbb{L}^2$- adapté est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t)$.

Si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes 1.7.1 permets de construire un processus Z de carré intégrable et adapté tel que

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s \, dB_s.$$

Si on pose $T = t$, on trouve

$$\begin{aligned}
Y_T &= \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_T) = \mathbb{E}[\xi] + \int_0^T Z_s \, dB_s \\
Y_T &= \underbrace{\mathbb{E}[\xi] + \int_0^t Z_s \, dB_s}_{Y_t} + \int_t^T Z_s \, dB_s \\
&= Y_t + \int_t^T Z_s \, dB_s \\
&\Longrightarrow Y_t = Y_T - \int_t^T Z_s dB_s \\
&\Longrightarrow \; Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dB_s.
\end{aligned}$$

Ou sous forme différentielle

$$-dY_t = -Z_t dB_t, \qquad \text{avec, } Y_T = \xi.$$

Donc d'aprés notre exemple, on trouve une seconde inconnue qui le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Alors, pour obtenir la plus grand généralité, nous permettons à f de dépendre du processus Z. i.e.

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \qquad \text{avec, } Y_T = \xi.$$

Ou sous forme intégrable

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \qquad \text{avec, } t \in [0, T].$$

2.2 Notations et définitions

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet, B un mouvement brownien d-dimensionnel sur cet espace, et $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du ce mouvement brownien.

Soient

· $\mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ l'espace vectoriel formé des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que

$$\|Y\|^2_{\mathcal{S}^2} := \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] < \infty.$$

· $\mathcal{S}^2_c(\mathbb{R}^k)$ le sous-espace formé par les processus continus.

· $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k*d})$ celui forme par les processus Z, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k*d}$, tels que

$$\|Z\|^2_{\mathcal{M}^2} := \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 \, dt\right] < \infty,$$

où si $z \in \mathbb{R}^{k*d}$,$\|z\|^2 = trace(zz^*)$.

· $M^2(\mathbb{R}^{k*d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{M}^2(\mathbb{R}^{k*d})$.

· $\mathcal{B}^2$ l'espace de Banach $\mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k) \times M^2(\mathbb{R}^{k*d})$.

· $\mathcal{S}^2$, $\mathcal{S}_c^2$ et M^2 sont des espaces de Banach.

Soit l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR)

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dB_t, \qquad 0 \leq t \leq T, \qquad Y_T = \xi,$$

ou sous forme intégrale

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \qquad \text{avec, } t \in [0, T], \tag{2.1}$$

avec

· f est une application aléatoire définie sur $[0, T] \times \Omega \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k*d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ telle que, pour tout $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k*d}$, le processus $\{f(t, y, z)\}_{0 \leq t \leq T}$ soit progressivement mesurable, avec f s'appelle le générateur de l'EDSR.

· ξ est une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, telle que ξ s'appelle la condition terminale.

Définition 2.2.1 *Une solution de l'EDSR 2.1 est un couple de processus* $\{(Y_t, Z_t)\}_{0 \leq t \leq T}$ *vérifiant*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k*d}$;

2. $\mathbb{P} - p.s.$ $\int_0^T \{|f(s, Y_s, Z_s)| + \|Z_s\|^2\} \, ds < \infty$;

3. $\mathbb{P} - p.s.$, on a

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \qquad \text{avec, } t \in [0, T].$$

Remarque 2.2.1 *On a les intégrales de 2.1 étant bien définies, Y est une semi-martingale continue ($Y \in \mathcal{S}_c^2(\mathbb{R}^k)$), et puisque le processus Y est progressivement mesurable, et par suite il est adapté, donc Y_0 est une quantité déterministe.*

— On va montrer, que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f, le processus $Y \in \mathcal{S}_c^2$.

Proposition 2.2.1 *Supposons qu'il existe un processus $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$ positif, appartenant à $M^2(\mathbb{R})$ et λ une constante positive, tels que*

$$\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k*d}, \qquad |f(t,y,z)| \leq f_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l' EDSR 2.1 telle que $Z \in M^2$ alors $Y \in \mathcal{S}_c^2$.

Preuve. On a pour tout $t \in [0,T]$

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t f(s, Y_s, Z_s)ds + \int_0^t Z_s dB_s,$$

avec Y_0 déterministe.

On applique l'hypothèse sur f

$$\begin{aligned}
|Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^t |f(s,Y_s,Z_s)|\, ds + \left|\int_0^t Z_s dB_s\right| \\
|Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^t \left(f_s + \lambda\left(|Y_s| + \|Z_s\|\right)\right) ds + \left|\int_0^t Z_s dB_s\right| \\
&\leq \underbrace{|Y_0| + \int_0^t \left(f_s + \lambda \|Z_s\|\right) ds + \sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t Z_s dB_s\right|}_{\varsigma} + \lambda \int_0^t |Y_s|\, ds \\
&\Longrightarrow |Y_t| \leq \varsigma + \lambda \int_0^t |Y_s|\, ds,
\end{aligned}$$

avec ς est une v.a. de carré intégrable, car

· Y_0 est déterministe, et par suite de carré intégrable.

· $Z \in M^2$, alors d'aprés l'inégalité de Doob, $\sup\limits_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t Z_s dB_s\right|$ est de carré intégrable, il en est de même pour $\{f_t\}_{0\leq t\leq T}$.

Et puisque Y est un processus continu, et d'aprés le lemme de Gronwall 1.7.1, on obtient

$$|Y_t| \leq \varsigma \exp(\lambda t),$$

$$\Longrightarrow \sup_{t\in[0,T]} |Y_t| \leq \varsigma \exp(\lambda T).$$

ce qui prouve que $Y \in \mathcal{S}_c^2$. ■

Lemme 2.2.1 *Soient $Y \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k*d})$. Alors $\left\{\int_0^t Y_s.Z_s dB_s,\ t \in [0,T]\right\}$ est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. On utilise les inégalités de BDG 1.7.2 avec $p = 1$ et C est un canstante, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t Y_s.Z_s dB_s\right|\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\left(\left(\int_0^T Y_s.Z_s dB_s\right)\left(\int_0^T Y_s.Z_s dB_s\right)\right)^{1/2}\right] \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_s|^2 \|Z_s\|^2 ds\right)^{1/2}\right] \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\underbrace{\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|}_{a}\underbrace{\left(\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right)^{1/2}}_{b}\right],
\end{aligned}$$

et par l'inégalité de Young $ab \leq a^2/2 + b^2/2$, on trouve

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t Y_s.Z_s dB_s\right|\right] \leq \frac{C}{2}\left(\underbrace{\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|Y_t|^2\right]}_{<\infty} + \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_s\|^2 ds\right]}_{<\infty}\right) < \infty,$$

ce qui montre que $\left\{\int_0^t Y_s.Z_s dB_s,\ t\in[0,T]\right\}$ est une martingale uniformément intégrable. ■

2.3 Résultat de Pardoux-Peng

dans ce section, on va montrer le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur f est non-linéaire. Ce résultat est dû à E. PARDOUX et S. PENG [PP90].

On pose les hypothèses suivantes, qui nous allons utilisant dans notre travail.

— Il existe une constante λ telle que $\mathbb{P}-p.s.$,

(H1). Condition de Lipschitz en (y,z) **:** Pour tout t, y, $y^{'}$, z, $z^{'}$

$$\left|f(t,y,z) - f(t,y^{'},z^{'})\right| \leq \lambda\left(\left|y-y^{'}\right| + \left\|z-z^{'}\right\|\right)\ ; \tag{2.2}$$

(H2). Condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(s,0,0)|^2 ds\right] < \infty. \tag{2.3}$$

2.3.1 Cas particulier

C'est le cas le plus simple, on choisit f ne dépend ni de y ni de z. Et on cherche une solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s, \qquad \text{avec, } t \in [0,T], \tag{2.4}$$

avec

· ξ est de carré intégrable.

· $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ un processus dans $M^2(\mathbb{R}^k)$.

Lemme 2.3.1 *Soient $\xi \in \mathbb{L}^2(F_T)$ et $\{F_t\}_{0\leq t\leq T} \in M^2(\mathbb{R}^k)$. L'EDSR 2.4 possède une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve.

1. L'éxistence :

On suppose que (Y,Z) une solution de 2.4, tel que $Z \in M^2$.

Si on utilise l'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on trouve

$$Y_t = \mathbb{E}(Y_t \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Alors

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\left[\int_t^T Z_s dB_s \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] - \mathbb{E}\left[\int_t^T Z_s dB_s\right], \end{aligned}$$

et comme $\int_t^T Z_s dB_s$ est une martingale on a $\mathbb{E}\left[\int_t^T Z_s dB_s\right] = 0$.

Alors

$$\begin{aligned} Y_t &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_t^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T F_s ds - \int_0^t F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Donc on a Y, et il reste de trouver Z. Puisque F est progressivement mesurable, d'aprés le théorème de Fibuni, $\int_0^t F_s ds$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$; en fait dans $\mathcal{S}_c^2$ puisque F est de carré intégrable. Alors pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned} Y_t &= \underbrace{\mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T F_s ds \mid \mathcal{F}_t\right]}_{M_t} - \int_0^t F_s ds \\ &= M_t - \int_0^t F_s ds, \end{aligned}$$

et comme M est une martingale brownienne, et d'aprés le théorème de représentation des martingales browniennes 1.7.1, on voit donc apparaître un processus $Z \in M^2$, tel que

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_s ds = M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds.$$

On va vérifier que (Y, Z) une solution de 2.4, avec $Y_T = \xi$

$$\begin{aligned} Y_t - Y_T &= M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds - \left(M_0 + \int_0^T Z_s dB_s - \int_0^T F_s ds\right) \\ Y_t - Y_T &= M_0 + \int_0^t Z_s dB_s - \int_0^t F_s ds - M_0 - \int_0^T Z_s dB_s + \int_0^T F_s ds \\ Y_t - Y_T &= \left[\int_0^T F_s ds - \int_0^t F_s ds\right] - \left[\int_0^T Z_s dB_s - \int_0^t Z_s dB_s\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_t - Y_T &= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s \\ Y_t - Y_T = Y_t - \xi &= \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s \\ &\Longrightarrow Y_t = \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s. \end{aligned}$$

ce qui prouvé l'existence de la solution de l'EDSR 2.4.

2. L'unicité :

On suppose qu'on a deux solutions (Y,Z) et $\left(Y',Z'\right)$, et on note $y = Y - Y'$ et $z = Z - Z'$.

Et on a, avec $Y_T = Y'_T = \xi$

$$\begin{aligned} Y_t &= \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z_s dB_s \\ Y'_t &= \xi + \int_t^T F_s ds - \int_t^T Z'_s dB_s. \end{aligned}$$

Alors

$$\Longrightarrow \; y_t = Y_t - Y'_t = -\int_t^T (Z_s - Z'_s) dB_s = -\int_t^T z_s dB_s, \qquad t \in [0, T].$$

Alors, on a

$$dy_t = -z_t dB_t.$$

Donc, maintenant on va prouver que $y = z = 0$. Alors

On applique la formule d'Itô à $|y_t|^2$, on obtient

$$\begin{aligned} d\left(|y_t|^2\right) &= 2y_t dy_t + \langle y, y \rangle dt \\ &= -2y_t z_t dB_t + \|z_t\|^2 dt. \end{aligned}$$

On intègre entre t et T, avec $y_T = Y_T - Y'_T = \xi - \xi = 0$, on trouve

$$\begin{aligned}\int_t^T d\left(|y_s|^2\right) &= \underbrace{|y_T|^2}_{=0} - |y_t|^2 \\ &= -2\int_t^T y_s z_s dB_s + \int_t^T \|z_s\|^2 \, ds.\end{aligned}$$

Si on prend l'espérence, on obtient

$$\mathbb{E}\left[|y_t|^2\right] - 2\mathbb{E}\left[\int_t^T y_s z_s dB_s\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \|z_s\|^2 \, ds\right] = 0,$$

et comme $\int_t^T y_s z_s dB_s$ est une martingale, alors $\mathbb{E}\left[\int_t^T y_s z_s dB_s\right] = 0$.

Donc

$$\mathbb{E}\left[|y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \|z_s\|^2 \, ds\right] = 0.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \mathbb{E}\left[|y_t|^2\right] = 0 \\ \wedge \\ \mathbb{E}\left[\int_t^T \|z_t\|^2 \, dt\right] = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} |y_t|^2 = 0 \\ \wedge \\ \|z_t\|^2 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow y = z = 0,$$

et par suite l'unicité de la solution de l'EDSR. ■

2.3.2 Cas général

Théorème 2.3.1 ***(PARDOUX-PENG 1990)*** *Sous les hypothèses* ***(H1)*** ***2.2*** *et* ***(H2)*** ***2.3****, l'EDSR 2.1 possède une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2$.*

Preuve. On utilise la méthode de point fixe 1.7.3 dans $\mathcal{B}^2$, en construisant une application $\Theta : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^2$, telle que $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$ est une solution de l'EDSR 2.1 si et seulement si c'est un point fixe de Θ.

Pour (U, V) élément de $\mathcal{B}^2$, soit $(Y, Z) = \Theta(U, V)$ comme une solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, U_s, V_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s, \qquad \text{avec, } t \in [0, T].$$

1. On va montrer que l'application $\Theta : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^2$ est bien définie.

Cette dernière EDSR admet une unique solution dans $\mathcal{B}^2$. On pose un processus $F_s = f(s, U_s, V_s)$, tel que $F_s \in M^2$ puisque f est Lipschitz, alors sous l'hypothèse **(H1)** 2.2 et avec $U_s^{'} = V_s^{'} = 0$, on a

$$\left| f(s, U_s, V_s) - f\left(s, U_s^{'}, V_s^{'}\right) \right| \leq \lambda \left(\left| U_s - U_s^{'} \right| + \left\| V_s - V_s^{'} \right\| \right)$$

$$|f(s, U_s, V_s) - f(s, 0, 0)| \leq \lambda (|U_s - 0| + \|V_s - 0\|)$$

$$|f(s, U_s, V_s)| \leq |f(s, 0, 0)| + \lambda(|U_s| + \|V_s\|)$$

$$\Longrightarrow |F_s| \leq |f(s, 0, 0)| + \lambda |U_s| + \lambda \|V_s\|,$$

avec f, U_s, V_s sont des processus de carré intégrable. Alors, on va appliquer le lemme 2.3.1 pour obtenir une unique solution (Y, Z) de notre EDSR, avec $Z \in M^2$. Et d'aprés le proposition 2.2.1, on a $Y \in \mathcal{S}_c^2$, alors, $(Y, Z) \in \mathcal{B}^2$. Donc l'application $\Theta : \mathcal{B}^2 \to \mathcal{B}^2$ est bien définie.

2. On va montrer que l'application Θ admet un unique point fixe, et par suite l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR 2.1 dans $\mathcal{B}^2$.

Soient (U, V) et $\left(U^{'}, V^{'}\right)$ deux éléments de $\mathcal{B}^2$, telles que $(Y, Z) = \Theta(U, V)$ et $\left(Y^{'}, Z^{'}\right) = \Theta\left(U^{'}, V^{'}\right)$.

On pose $y = Y - Y^{'}$ et $z = Z - Z^{'}$, avec $y_T = 0$, et on a

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, U_s, V_s)\, ds - \int_t^T Z_s dB_s$$

$$Y_t^{'} = \xi + \int_t^T f\left(s, U_s^{'}, V_s^{'}\right) ds - \int_t^T Z_s^{'} dB_s,$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow Y_t - Y_t^{'} = \int_t^T \left[f\left(s, U_s, V_s\right) - f\left(s, U_s^{'}, V_s^{'}\right)\right] ds - \int_t^T \left(Z_s - Z_s^{'}\right) dB_s \\
&\Longrightarrow y_t = \int_t^T \left[f\left(s, U_s, V_s\right) - f\left(s, U_s^{'}, V_s^{'}\right)\right] ds - \int_t^T z_s dB_s \\
&\Longrightarrow dy_t = \left[f\left(t, U_t, V_t\right) - f\left(t, U_t^{'}, V_t^{'}\right)\right] dt - z_t dB_t.
\end{aligned}$$

Maintenant on applique la formule d'Itô à $\exp(\alpha t) \left|y_t\right|^2$, on trouve

$$\begin{aligned}
d(e^{\alpha t} \left|y_t\right|^2) &= d\left(e^{\alpha t}\right) \left|y_t\right|^2 + e^{\alpha t} d\left|y_t\right|^2 + e^{\alpha t} \langle y, y\rangle dt \\
&= \alpha e^{\alpha t} \left|y_t\right|^2 dt + e^{\alpha t}\left[2 y_t dy_t + \langle y, y\rangle dt\right] \\
&= \alpha e^{\alpha t} \left|y_t\right|^2 dt + 2e^{\alpha t} y_t.\left[f\left(t, U_t, V_t\right) - f\left(t, U_t^{'}, V_t^{'}\right)\right] dt - 2e^{\alpha t} y_t.z_t dB_t + e^{\alpha t} \left\|z_t\right\|^2 dt.
\end{aligned}$$

On intègre entre t et T, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_t^T d(e^{\alpha s} \left|y_s\right|^2) = \underbrace{e^{\alpha T} \left|y_T\right|^2}_{=0} - e^{\alpha t} \left|y_t\right|^2 \\
&= \int_t^T e^{\alpha s} \left[\alpha \left|y_s\right|^2 + 2 y_s.\left[f\left(s, U_s, V_s\right) - f\left(s, U_s^{'}, V_s^{'}\right)\right]\right] ds \\
&\quad - \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dB_s + \int_t^T e^{\alpha s} \left\|z_s\right\|^2 ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow e^{\alpha t} \left|y_t\right|^2 + \int_t^T e^{\alpha s} \left\|z_s\right\|^2 ds &= \int_t^T e^{\alpha s} \left[-\alpha \left|y_s\right|^2 - 2 y_s.\left[f\left(s, U_s, V_s\right) - f\left(s, U_s^{'}, V_s^{'}\right)\right]\right] ds \\
&\quad + \int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dB_s,
\end{aligned}$$

et puisque f est Lipschitz, alors d'aprés l'hypothèse **(H1)** 2.2, on obtient, avec

$u = U - U^{'}$ et $v = V - V^{'}$

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds &\leq \int_t^T e^{\alpha s}\left[-\alpha\left|y_s\right|^2-2y_s.\left(\left|f\left(s,U_s,V_s\right)-f\left(s,U_s^{'},V_s^{'}\right)\right|\right)\right] ds \\
&+\int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dB_s \\
e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds &\leq \int_t^T e^{\alpha s}\left[-\alpha\left|y_s\right|^2+2\lambda\underbrace{\left|y_s\right|}_{a}\underbrace{\left|u_s\right|}_{b}+2\lambda\underbrace{\left|y_s\right|}_{a}\underbrace{\left\|v_s\right\|}_{c}\right] ds \\
&+\int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dB_s
\end{aligned}
$$

D'aprés l'inégalité de Young $\forall\varepsilon>0$, $2ab \leq a^2/\varepsilon+\varepsilon b^2$, on trouve

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds &\leq \int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha\left|y_s\right|^2+\left(\frac{\lambda^2\left|y_s\right|^2}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\left|u_s\right|^2+\left(\frac{\lambda^2\left|y_s\right|^2}{\varepsilon}\right)+\varepsilon\left\|v_s\right\|^2\right) ds \\
&+\int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dB_s \\
&\leq \int_t^T e^{\alpha s}\left(-\alpha+2\lambda^2/\varepsilon\right)\left|y_s\right|^2 ds-\int_t^T 2e^{\alpha s} y_s.z_s dB_s \\
&+\varepsilon\int_t^T e^{\alpha s}\left(\left|u_s\right|^2+\left\|v_s\right\|^2\right) ds.
\end{aligned}
$$

On note $R_\varepsilon=\varepsilon\int_t^T e^{\alpha s}\left(\left|u_s\right|^2+\left\|v_s\right\|^2\right) ds$, et pour simplifier, on prend $\alpha=2\lambda^2/\varepsilon$, et $\forall t\in[0,T]$, on trouve

$$
e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds \leq R_\varepsilon-2\int_t^T e^{\alpha s}\left|y_s\right|.z_s dB_s.
$$

On a Y, $Y^{'}$appartiennent à $\mathcal{S}_c^2$ et Z, $Z^{'}$ appartiennent à M^2, alors d'aprés le lemme 2.2.1, la martingale $\int_t^T e^{\alpha s}\left|y_s\right|.z_s dB_s$ est une martingale nulle en 0.

On prend l'espérance, et pour $t=0$, on trouve

$$
\mathbb{E}\left[e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]-\mathbb{E}\left[2\int_t^T e^{\alpha s}\left|y_s\right|.z_s dB_s\right],
$$

et comme $\int_t^T e^{\alpha s} |y_s| .z_s dB_s$ est une martingale, alors $\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{\alpha s} |y_s| .z_s dB_s\right] = 0$, alors on obtient

$$\underbrace{\mathbb{E}\left[e^{\alpha t} |y_t|^2\right]}_{a} + \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds\right]}_{b} \leq \underbrace{\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]}_{c}.$$

Et on a si $a + b \leq c \Longrightarrow a \leq c$ et $b \leq c$, alors

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} \|z_s\|^2 ds\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]. \tag{2.5}$$

Et d'autre part on a

$$e^{\alpha t} |y_t|^2 \leq R_\varepsilon - \int_t^T e^{\alpha s} |y_s| .z_s dB_s.$$

On prend l'espérance, et pour $t = 0$, on trouve

$$\mathbb{E}\left[e^{\alpha t} |y_t|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] - 2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s} |y_s| .z_s dB_s\right],$$

alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] - 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^T e^{\alpha s} |y_s| .z_s dB_s\right)\right].$$

Et d'aprés les inégalités de BDG 1.7.2, avec $p = 1$, on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left(\int_0^T e^{\alpha s} |y_s| .z_s dB_s\right)\right] \leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha s} |y_s|^2 \|z_s\|^2 ds\right)^{1/2}\right],$$

et par conséquent

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t} |y_t|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \underbrace{(-2C)}_{K}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha s} |y_s|^2 \|z_s\|^2 ds\right)^{1/2}\right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[\left(\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2 \left(K^2\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right)\right)^{1/2}\right]$$

$$\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[\underbrace{\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t/2}\left|y_t\right|}_{a}\underbrace{\left(K^2\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right)^{1/2}}_{b}\right].$$

Et d'aprés l'inégalité de Young $ab \leq a^2/2 + b^2/2$, alors on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] + \frac{K^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right],$$

alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \frac{K^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right]\\ \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \frac{K^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right],\end{aligned}$$

$$\overset{(\times 2)}{\Longrightarrow} \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + K^2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right].$$

Et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right] &\leq 2\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + K^2\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right]\\ &\quad + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right]\\ &\leq 2\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \left(1+K^2\right)\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right],\end{aligned}$$

et d'aprés l'inégalité 2.5, on trouve

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right] \leq 2\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right] + \left(1+K^2\right)\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right],$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right]\leq\left(3+K^2\right)\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right].$$

Maintenant, on va changer R_ε par sa définition, et pour $t=0$

$$\mathbb{E}\left[R_\varepsilon\right]=\varepsilon\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left(\left|u_s\right|^2+\left\|v_s\right\|^2\right)ds\right],$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} R_\varepsilon\right]=\varepsilon\left(T.\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2\right]+1.\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha s}\left\|v_s\right\|^2 ds\right]\right),$$

et par suite

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|z_s\right\|^2 ds\right]\leq\varepsilon\left(3+K^2\right)(1\vee T)\,\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|u_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|v_s\right\|^2 ds\right].$$

On prend ε vérifie $\varepsilon\left(3+C^2\right)(1\vee T)=1/4$, pour obtenir que l'application Θ est contraction stricte de $\mathcal{B}^2\rightarrow\mathcal{B}^2$, si on le munit de la norme

$$\left\|(U,V)\right\|_\alpha=\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}\left|U_t\right|^2+\int_0^T e^{\alpha s}\left\|V_s\right\|^2 ds\right]^{1/2},$$

et puisque notre norme est équivalente à la norme usuelle (où $\alpha=0$), alors $\left\|(U,V)\right\|_\alpha$ est un espace de Banach.

Alors, comme un résultat de notre travail, on a Θ possède un unique point fixe $(Y,Z)\in\mathcal{B}^2$, et donc l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR 2.1. ■

2.4 Le rôle de Z

On va voir que le rôle de Z (et exacte le rôle de terme $\int_t^T Z_s dB_s$) est de render le processus Y adapté, et on va indiquer dans quel cas $Z=0$.

Proposition 2.4.1 *Soit (Y,Z) la solution de l'EDSR 2.1 et soit τ un temps d'ar-*

*rêt majoré par T. On suppose, outre les hypothèses **(H1)** 2.2 et **(H2)** 2.3, que ξ est $\mathcal{F}_\tau-$mesurable et que $f(t, y, z) = 0$ dès que $t \geq \tau$.*

Alors : $Y_t = Y_{t \wedge \tau}$ et $Z_t = 0$ si $t \geq \tau$.

Preuve. On a $\mathbb{P} - p.s.$,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \qquad \text{avec, } t \in [0, T].$$

Et pour $t = \tau$, comme $f(t, y, z) = 0$ dès que $t \geq \tau$, on a donc

$$Y_\tau = \xi + \underbrace{\int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s) ds}_{=0} - \int_\tau^T Z_s dB_s = \xi - \int_\tau^T Z_s dB_s.$$

Et on a

$$Y_\tau = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_\tau) = \xi - \int_\tau^T Z_s dB_s,$$

et on a $\int_\tau^T Z_s dB_s = 0$, alors $Y_\tau = \xi$, et d'où l'on tire que

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_\tau^T Z_s dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_\tau^T \|Z_s\|^2 ds\right] = 0,$$

et par suite $Z_s \mathbf{1}_{s \geq \tau} = 0$.

On a par l'hypothèse, si $t \geq \tau$ alors $Y_\tau = Y_t$, en effet

$$\begin{aligned} Y_\tau &= \xi + \int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_\tau^T Z_s dB_s \\ &= \xi + \left[\int_\tau^t f(s, Y_s, Z_s) ds + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds\right] - \left[\int_\tau^t Z_s dB_s + \int_t^T Z_s dB_s\right] \\ &= \underbrace{\xi + \left[\int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s\right]}_{Y_t} + \left[\int_\tau^t f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_\tau^t Z_s dB_s\right] \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow Y_\tau = Y_t + \int_\tau^t f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_\tau^t Z_s dB_s = Y_t + 0 - 0$$

$$\Longrightarrow Y_\tau = Y_t.$$

D'où la proposition est prouvée. ∎

Remarque 2.4.1 *On note que si ξ et f sont déterministe, alors $Z = 0$, et le processus Y soit une solution de l'équation différentielle*

$$\frac{dY_t}{dt} = f(t, Y_t, 0), \qquad \textit{avec, } Y_T = \xi.$$

Chapitre 3

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires

L'objectif de ce dèrnier chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques rétrogradres linéaires, c-à-d dans le cas particulier où le générateur f est linéaire, et à la fin de ce chapitre on va étudier le modèle de Black-Scholes qui est conduit un exemple de l'EDSR linéaire. Pour ce faire, nous avons pris la référence [2].

3.1 EDSR linéaire

Proposition 3.1.1 *Soient* $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$*, progressivement mesurable et borné,* $\{c_t\}_{t\in[0,T]} \in M^2(\mathbb{R})$*, et* ξ *une v.a.* $\mathcal{F}_T-$*mesurable, de carré intégrable, à valleurs réelles.*

L'EDSR linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T \{a_s Y_s + b_s Z_s + c_s\}\, ds - \int_t^T Z_s dB_s, \tag{3.1}$$

possède une unique solution qui vérifie

$$\forall t \in [0,T], \qquad Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\left(\xi \Gamma_T + \int_t^T c_s \Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t\right),$$

avec $\forall t \in [0,T]$

$$\Gamma_t = \exp\left\{\int_0^t b_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |b_s|^2 \, ds + \int_0^t a_s ds\right\}.$$

Preuve. Premièrement, on va montrer que le processus Γ vérifie

$$d\Gamma_t = \Gamma_t \left(a_t dt + b_t dB_t\right), \qquad \Gamma_0 = 1.$$

On note $\Gamma_t = e^X$, avec $X = \int_0^t \left(a_s - \frac{1}{2}|b_s|^2\right) ds + \int_0^t b_s dB_s$.

Alors, par la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned}
d\Gamma_t &= e^X dX + \frac{1}{2} e^X \langle dX, dX\rangle\, dt \\
&= \Gamma_t \left[\left(a_t - \frac{1}{2}|b_t|^2\right) dt + b_t dB_t\right] + \frac{1}{2}\Gamma_t b_t^2 dt \\
&= \underbrace{\Gamma_t \left(\frac{1}{2} b_t^2 - \frac{1}{2}|b_t|^2\right) dt}_{=0} + \Gamma_t \left(a_t dt + b_t dB_t\right),
\end{aligned}$$

ce qui donne la formulle annoncée.

Ensuite, puisque b est borné, d'aprés l'inégalité de Doob, on a $\Gamma \in \mathcal{S}^2$.

Et on a les hypothèses de notre proposition assure l'existence d'une unique solution (Y, Z) à l'EDSR linéaire, en effet

Pour tout t, y, $y^{'}$, z, $z^{'}$, on note $f(t, y, z) = a_t y + b_t z + c_t$ et $f(t, y^{'}, z^{'}) = a_t y^{'} + b_t z^{'} + c_t$, et on vérifie que **(H1)** 2.2 est satisfaite

$$\begin{aligned}\left|f(t, y, z) - f(t, y^{'}, z^{'})\right| &\leq a_t \left|y - y^{'}\right| + b_t \left\|z - z^{'}\right\| \\ &\leq \underbrace{\max(a_t, b_t)}_{\lambda} \left(\left|y - y^{'}\right| + \left\|z - z^{'}\right\|\right) \\ &\leq \lambda \left(\left|y - y^{'}\right| + \left\|z - z^{'}\right\|\right).\end{aligned}$$

Alors l'EDSR linéaire 3.1 admet une unique solution (Y, Z), avec $Y \in \mathcal{S}_c^2$ (d'aprés la proposition 2.2.1).

Maintenant, on utilise la formule d'intégration par partie **(I.P.P)** **1.5.1**, on trouve

$$\begin{aligned}d\Gamma_t Y_t &= \Gamma_t dY_t + d\Gamma_t Y_t + d\langle \Gamma, Y\rangle_t \\ &= \Gamma_t \left[-(a_t Y_t + b_t Z_t + c_t)\, dt + Z_t dB_t\right] + Y_t\left(\Gamma_t (a_t dt + b_t dB_t)\right) + \Gamma_t b_t Z_t dt \\ &= -\Gamma_t a_t Y_t dt - \Gamma_t b_t Z_t dt - \Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dB_t + Y_t \Gamma_t a_t dt + Y_t \Gamma_t b_t dB_t + \Gamma_t b_t Z_t dt \\ &= -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dB_t + Y_t \Gamma_t b_t dB_t.\end{aligned}$$

On intègre entre 0 et t, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t d(\Gamma_s Y_s) &= \Gamma_t Y_t - \Gamma_0 Y_0 \\ &= -\int_0^t \Gamma_s c_s ds + \int_0^t \Gamma_s Z_s dB_s + \int_0^t Y_s \Gamma_s b_s dB_s,\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_s c_s ds = Y_0 + \int_0^t \Gamma_s (Z_s + Y_s b_s)\, dB_s,$$

alors cette dèrnière inégalité montre que le procesus $\Gamma_t Y_t + \int_0^t \Gamma_s c_s ds$ est une martingale locale, et par suite une martingale (puisque $c \in M^2$ et Γ, Y sont dans $\mathcal{S}^2$).

Et comme résultat

$$\begin{aligned}
\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_s \Gamma_s ds &= \mathbb{E}\left[\Gamma_T Y_T + \int_0^T c_s \Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] \\
\Gamma_t Y_t &= \mathbb{E}\left[\Gamma_T Y_T + \int_0^T c_s \Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] - \int_0^t c_s \Gamma_s ds \\
&= \mathbb{E}\left[\Gamma_T Y_T + \int_0^T c_s \Gamma_s ds - \int_0^t c_s \Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\Gamma_T \xi + \int_t^T c_s \Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t\right],
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \ Y_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}\left[\xi \Gamma_T + \int_t^T c_s \Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t\right].$$

D'où la proposition est prouvée. ■

3.2 Application

3.2.1 Modèle de Black-Scholes

On a le modèle de Black-Scholes est donné comme un exemple de l'EDSR linéaire.

Dans un marché financier, on a une action dont le prix d'une part est régi par l'EDS

$$dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma dB_t\right), \qquad S_0 = x,$$

avec

· S_t est le prix d'une part avec risque.

· $\mu \in \mathbb{R}$, et le paramètre $\sigma > 0$ s'appelle la volatilité.

Alors on a pour tout $t \geq 0$, d'aprés la proposition 3.1.1

$$S_t = S_0 \exp\left\{\int_0^t \sigma dB_s + \int_0^t \left(\mu - \sigma^2/2\right) ds\right\}, \qquad \text{avec, } S_0 = x,$$
$$\Longrightarrow \; S_t = x \exp\left\{\sigma B_t + \left(\mu - \sigma^2/2\right) t\right\}.$$

D'autre part, on a un placement sans risque, le prix d'une part est donné par

$$dE_t = rE_t dt \;, \qquad E_0 = y,$$

et d'aprés la proposition 3.1.1, on a pour tout $t \geq 0$

$$E_t = E_0 \exp\left(\int_0^t r ds\right), \qquad \text{avec, } E_0 = y,$$

$$\Longrightarrow \; E_t = y e^{rt},$$

avec

· E_t est le prix d'une part sans risque.

· le constant r est le taux de rendement.

Une stratégie est la donnée d'un couple de processus $(n_t,m_t)_{t\geq 0}$, adapté par rapport à la filtration du mouvement brownien B, tel que la valeur de portefeuille V_t à l'instant t est

$$V_t = n_t E_t + m_t S_t,$$

avec n_t et m_t représentent

· n_t le nombre de part d'actif sans risque,

· m_t le nombre de part d'actif avec risque, c-à-d le nombre d'actions à l'instant t détenues dans le portefeuille.

Seules les stratégies autofinancées sont considérées, ce qui signifie que l'évolution de la valeur du portefeuille est décrite par

$$\begin{aligned} dV_t &= n_t dE_t + m_t dS_t \\ &= r n_t E_t dt + m_t S_t(\mu dt + \sigma dB_t). \end{aligned}$$

On a $V_t = n_t E_t + m_t S_t \implies n_t E_t = V_t - m_t S_t$,

et on note $\delta_t = m_t S_t$ "la somme d'argent détenue en action", et alors $n_t E_t = V_t - \delta_t$. Donc

$$\begin{aligned} dV_t &= r(V_t - \delta_t)dt + \delta_t(\mu dt + \sigma dB_t) \\ &= rV_t dt - r\delta_t dt + \delta_t \mu dt + \delta_t \sigma dB_t \\ &= rV_t dt + \delta_t \sigma \left[\frac{(\mu - r)}{\sigma}\right] dt + \delta_t \sigma dB_t, \end{aligned}$$

on note $Z_t = \delta_t \sigma$, et $\varphi = \frac{(\mu - r)}{\sigma}$ le "risk premium", donc on trouve

$$dV_t = rV_t dt + \varphi Z_t dt + Z_t dB_t.$$

Donc, la question ici est : À quel prix v vendre l'option ? Il faut que le vendeur s'assure que s'il est vender l'option à ce prix à la date $t = 0$, alors il disposera de la somme ξ à la date $t = T$.

Donc pour obtenir le prix v, l'idée principale ou l'idée de base c'est l'idée de duplication, tel que le vendeur vend l'option au prix v et cette somme est investi sur le marché par une stratégie $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ à trouver. Alors pour cela, la valeur de son portefeuille est régie par l'EDS

$$dV_t = rV_t dt + \varphi Z_t dt + Z_t dB_t, \qquad V_0 = v.$$

Maintenant, on a le travail ici est de trouver le prix v et la stratégie $\{Z_t\}_{0\leq t\leq T}$, tels que la solution de notre EDS vérifie $V_T = \xi$. Dans ce cas, on dit que le prix v est le prix équitable. Ou en d'autre façon, la question ici est : Peut-on trouver $\{(V_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ adapté, tels que

$$dV_t = rV_t dt + \varphi Z_t dt + Z_t dB_t, \qquad V_T = \xi,$$

donc, dans ce cas, il suffit de vendre l'option au prix $v = V_0$. Alors, la solution de notre problème est s'agit de résoudre une EDSR linéaire. Alors l'EDSR linéaire ici comme suit

$$\begin{aligned}\int_t^T dV_s &= \underbrace{V_T}_{\xi} - V_t \\ &= \int_t^T (rV_s + \varphi Z_s)ds + \int_t^T Z_s dB_s,\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \; V_t = \xi - \int_t^T (rV_s + \varphi Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s,$$

et d'aprés la proposition 3.1.1, cette dernière équation possède une unique solution qui vérifie

$$V_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}(\xi\Gamma_T \mid \mathcal{F}_t), \qquad \forall t \in [0;T],$$

tel que

$$\Gamma_t = \exp\left\{\int_0^t \varphi dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\varphi|^2 ds + \int_0^t r ds\right\}, \qquad \forall t \in [0;T].$$

Et comme une résultat de notre travail, Nous avons trouvé une unique solution de l'EDSR linéaire qui maintient la valeur du portefeuille équilibrée malgré les risques aléatoires, évitant ainsi les pertes sur le marché financier.

Conclusion

Dans ce travail, on a éssayé d'exposer deux résultats d'existence et d'unicité de la solution de l'EDSR. Le premier résultat est de l'EDSR général, et le deuxième résultat qui est le principal est de l'EDSR linéaire, et par suite nous avons éssayé de répondre à la question centrale.

Aprés proposer des généralités de base, nous avons éssayé de montrer le premier résultat qui est étudier l'existence et l'unicité de la solution de l'EDSR général (c-à-d non-linéaire) dans le cas lipschitz, appelé le resultat de Pardoux-Peng. Dans cette démonstration, nous avons utilisé quelques théorèmes, les deux hypothèses **(H1)** 2.2 et **(H2)** 2.3, et la méthode de point fixe 1.7.3.

Dans le deuxième résultat qui est l'important et le principal travail, nous avons éssayé de montrer l'existence et l'unicité de la solution de l'EDSR linéaire. L'idée de cette démonstration est d'utiliser les hypothèses de la proposition 3.1.1 et l'hypothèse **(H1)** 2.2. Et comme résultat de notre travail, on obtient que

$$\forall t \in [0,T], \qquad Y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}\left(\xi\Gamma_T + \int_t^T c_s\Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t\right), \forall t \in [0,T],$$

est l'unique solution de l'EDSR linéaire. Et enfin, comme un exemple de l'EDSR linéaire, on a posé le modèle de Black-Scholes dans la finance.

Bibliographie

[1] Breton, J. C. (2013). Processus stochastique. Université de Rennes1.

[2] Briand, P. (2001). Equations différentielles stochastiques rétrogrades. Mars

[3] Jeanblanc, M. (2006). Cours de Calcul stochastique Master 2IF EVRY. Lecture Notes, University of Évry. Available at http ://www. maths. univ-evry. fr/pages_perso/jeanblanc.

[4] Kineider, G, & Harbreteau, T. (2020). Théorème de point fixe et applications. Université de Rennes1.
http ://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/thomas.harbreteau/cours/L3/lecture_dirigee.pdf

[5] Labed, B. (2021-2022). Cours de Mouvement Brownien et Calcul Stochastique.
http ://elearning.univ-biskra.dz/moodle/login/index.php ?

[6] Le Gall, J. (2010). Calcul stochastique et processus de markov. Notes de cours.

[7] POPIER, A. Calcul stochastique, applications en finance.

[8] ROMEILI, N. (2012). EQUATION DIFFERENTIELLES STOCHSTIQUES RETROGRADES A COEFFITIONS NON LIPCHITZIENS (Doctoral dissertation, Université Mohamed khider Biskra.).

[9] Romuald, E. L. I. E., & KHARROUBI, I. (2006). Calcul Stochastique Appliqué à la Finance. polycopié disponible sur http ://www. ceremade. dauphine. fr/elie/elie.

Résumer

L’objectif de ce mémoire est d’étudier deux résultats sur les solutions des équations différentielles stochastiques rétrogrades "EDSR". Dans le premier résultat, on étude l’existence et l’unicité de la solution de l’EDSR comme un cas général, c-à-d le cas où le générateur est non-linéaire, ce résultat est par E. PARDOUX et S. PENG en 1990. Et dans le deuxième résultat qui est le principal, nous étudions l’existence et l’unicité de la solution de l’EDSR linéaire, c-à-d le cas où le générateur est linéaire, et comme une application de notre résultat, on étude le modèle de Black-Scholes en finance comme un exemple de l’EDSR linéaire.

Mots-clés : Équation différentielle stochastique rétrograde "EDSR", EDSR linéaire, l’existence et l’unicité.

Abstract

The objective of this memory is to study two results on the solutions of backward stochastic differential equations "BSDE". In the first result, we study the existence and the uniqueness of the solution of the BSDE as a general case, i.e. the case where the generator is no-linear, this result is by E. PADOUX and S. PENG in 1990. And in the second result which is the the main one, we study the existence and uniqueness of the solution of the linear BSDE, i.e. the case where the generator is linear, and as an application of our result, we study the Black-Scholes model in finance as an example of the linear BSDE.

Key-words : backward stochastic differential equations "EDSR", linear BSDE, the existence and the uniqueness of the solution.

الملخص

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة نتيجتين على حلول المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية "متعت". في النتيجة الأولى، نقوم بدراسة وجود ووحدانية حل ل"متعت" كحالة عامة، أي الحالة التي يكون فيها المولد غير خطي، وتعود هذه النتيجة لعام 1990. وفي النتيجة الثانية وهي النتيجة الرئيسية، ندرس فيها وجود ووحدانية حل ل"متعت" خطية، أي الحالة التي يكون فيها المولد خطيا، وكتطبيقا لنتيجتنا الأخيرة، ندرس نموذجا في التمويل كمثال على "متعت" الخطية.

الكلمات المفتاحية: المعادلات التفاضلية العشوائية التراجعية "متعت"، "متعت" الخطية ، وجود ووحدانية حل.