République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option : Probabilités

Par Melle : SEBKHI Samiha

Titre :

Théorème de Girsanov

Devant le Jury :

Dr.	YEKHLEF Samia	U. Biskra	Président
Pr.	CHALA Adel	U. Biskra	Encadreur
Dr.	MEZERDI Mohamed Al Amine	U. Biskra	Examinateur

Soutenu Publiquement le 26/06/2022

Dédicace

A mes très chers parents,

à mes soeurs,

à toute ma famille.

A tous ceux qui sont chers pour moi.

Remerciements

*J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu **Allah**, qui m'a donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail, j'exprime mes profondes gratitudes à mes chers parents.*

*Je remercie mon encadreur le **Pr. CHALA Adel**, pour m'avoir proposé ce sujet de mémoire et pour son encadrement, je le remercie vivement pour sa disponibilité pour son aide, et pour ses précieux conseils.*

*Je voudrais remercier les membres du jury qui m'a honoré de lire et d'évaluer ce travail **Dr. YEKHLEF Samia** et **Dr. MEZERDI Mohamed Al Amine**.*

En fin je voudrais dire : Merci ma famille notamment mes parents pour tout ce qu'ils on fait pour moi.

Merci a tous les personnes qui m'ont encouragé.

Notations et symboles

C^1, C^2	:	Ensemble des fonctions une/deux fois dérivable(s), et dont la première/seconde dérivée est continue.
$\mathcal{N}$	:	Ensemble des $\mu-$négligeables.
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$	:	Tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
$\mathbf{1}_A$	:	Indicatrice de A, définie par : $\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$
L^1, L^2	:	Espace des processus intégrables/de carré intégrables.
$\mathbb{P}-p.s.$	:	Presque sûrement pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.
EDS	:	Équation différentielle stochastique.
$i.e.$	:	C'est-à-dire.
$dt \otimes d\mu$	:	Mesure produit de mesure de Lebesgue sur $[0, T]$ avec la mesure de $d\mu$.
càdlàg	:	Continue à droite, admet limite à gauche.
$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$	:	Espérance par rapport à la probabilité $\mathbb{P}$.
A^c	:	Complémentaire de A dans Ω.
$\overline{A}$	:	Adhérence de A.
$\stackrel{\mathcal{L}}{=}$	:	Égalité en loi.
$\langle X \rangle_t$	:	Variation quadratique (crochet stochastique) de X.

Table des matières

Introduction

En théorie des probabilités, un processus de Lévy est un processus stochastique en temps continu, continu à droite et limité à gauche, dont les accroissements sont stationnaires et indépendantes, normé d'après mathématicien français Paul Lévy. Les exemples les plus connus sont le processus de Wiener, et le processus de Poisson.

Le principe du théorème de Girsanov est comment un processus stochastique change si l'on change de mesure de probabilités. Ce théorème est particulièrement très important dans la théorie des mathématiques financières.

Dans les années 1940, les résultats de ce type ont été prouvés pour la première fois par Cameron-Martin [4], puis par Girsanov [7] en 1960.

Ce théorème peut être utilisé pour trouver l'unique probabilité de risque neutre dans l'application sur le marché financier.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est un rappel et introduction au processus stochastique. Dans le deuxième chapitre nous avons étudié le processus d'Itô-Lévy, et dans le dernier chapitre nous avons défini théorème de Girsanov, et nous avons appliqué ce théorème au processus d'Itô-Lévy, et nous avons donné un exemple d'application de la transformation de Girsanov sur le marché financier.

Chapitre 1

Introduction au processus stochastique

Dans ce chapitre, on donne quelques rappels de base concernent le calcul stochastique que nous utiliserons dans ce travail, en faisant référence à [1], [2] et [3], [8] et [9], [10] et [12], [13].

1.1 Rappel

1.1.1 Tribu

Définition 1.1.1 (Tribu) *Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de parties d'un ensemble non vide Ω est dite une tribu sur Ω si*

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. *Si* $A \in \mathcal{F}$, *alors* $A^c \in \mathcal{F}$.
3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *si* $A_n \in \mathcal{F}$, *alors* $\underset{n}{\cup} A_n \in \mathcal{F}$.

Définition 1.1.2 (Tribu engendrée) *Si A est une partie de Ω. on appelle tribu engendrée par A la plus petite tribu sur Ω contenant A, et on note $\sigma(A)$. Elle est l'intersection de toutes les tribus contenant A.*

1.1.2 Mesure

Définition 1.1.3 (Mesure) *Une mesure μ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$ est une application $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que*

- $\mu(\emptyset) = 0.$
- *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dénombrable d'ensembles de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(A_n\right).$$

Définition 1.1.4 (Espace mesurable) *Un espace mesurable est un couple $(\Omega, \mathcal{F})$ constitué d'un ensemble non vide Ω, et d'une tribu $\mathcal{F}$ sur Ω.*

Définition 1.1.5 (Application mesurable) *Soit X une application d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ dans un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$, on dit que X est mesurable si $X^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{F}$, ou encore*

$$\textit{Pour tout } B \in \mathcal{B}, \ \textit{on a } X^{-1}(B) \in \mathcal{F}.$$

1.1.3 Probabilité

Définition 1.1.6 (Probabilité) *Une probabilité $\mathbb{P}$ sur une tribu $\mathcal{F}$ est une application de $\mathcal{F}$ dans $[0, 1]$ telle que*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0.$

2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *pour tout* $A_n \in \mathcal{F}$, *pour tout* $i \neq j \in \mathbb{N}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, *alors* $\mathbb{P}\left(\underset{n}{\cup} A_n\right) = \sum\limits_n \mathbb{P}(A_n)$.

Définition 1.1.7 (Espace de probabilité) *Un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est un espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{F})$ *muni d'une mesure de probabilité* $\mathbb{P}$.

1.1.4 Variable Gaussienne

Définition 1.1.8 (Variable aléatoire) *Une variable aléatoire est une application mesurable* X *d'un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *dans un espace mesurable* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Définition 1.1.9 (Variable Gaussienne) *On dit que la variable aléatoire* X *suit la loi normale standard centré et réduite* $\mathcal{N}(0,1)$, *si elle admet pour densité* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$, *pour tout* $t \in \mathbb{R}$. *En générale, une variable aléatoire* X *suit la loi de Gauss* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, *si elle admet pour densité*

$$t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

1.1.5 Espérance conditionnelle

Définition 1.1.10 (Espérance) *Soit* X *une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *on appelle espérance de* X *l'intégrale de Lebesgue de* X *relativement à la mesure* $\mathbb{P}$, *et on note* $\mathbb{E}[X]$, *tel que*

$$\mathbb{E}[X] = \int\limits_{\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int\limits_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

Définition 1.1.11 (Espérance conditionnelle par rapport à une tribu) *On appelle l'espérance conditionnelle de la variable aléatoire X sachant $\mathcal{G}$ et on la note $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$, l'unique variable aléatoire tel que*

1. *$\mathcal{G}-$mesurable.*
2. *Telle que $\int\limits_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})d\mathbb{P} = \int\limits_A X d\mathbb{P}$, pour tout $A \in \mathcal{G}$.*

C'est l'unique (à une égalité p.s. près) variable $\mathcal{G}-$mesurable, telle que

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})Y] = \mathbb{E}(XY),$$

pour toute variable Y, $\mathcal{G}-$mesurable bornée.

Définition 1.1.12 (Espérance conditionnelle par rapport à une variable) *L'espérance conditionnelle d'une variable intégrable X sachant Y est une variable aléatoire définie comme l'espérance conditionnelle de X par rapport à la tribu engendrée par Y. On la note $\mathbb{E}(X \mid Y)$, c'est une fonction de Y, alors il existe une fonction borélienne φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\mathbb{E}(X \mid Y) = \varphi(Y)$ est caractérisée par*

1. *C'est une variable $\sigma(Y)-$mesurable.*
2. *$\int\limits_A \mathbb{E}(X \mid Y)d\mathbb{P} = \int\limits_A X d\mathbb{P}$, pour tout $A \in \sigma(Y)$.*

Propriété 1.1.1 (Propriétés de l'espérance conditionnelle) *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité donné, et soit $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on a*

1. *Soit a, $b \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}(aX + bY \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$.*
2. *Si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G})$.*

3. *Si* X *est* $\mathcal{G}-$*mesurable, alors* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = X$.

4. *Si* Y *est* $\mathcal{G}$*-mesurable, alors* $\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})$.

5. $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})\right] = \mathbb{E}\left[X\right]$.

6. *Si* X *est indépendante de* $\mathcal{G}$*, alors* $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.

7. *Si* $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{H}$ *sont deux tribus, telles que* $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$*, alors*

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}) \mid \mathcal{G}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}\right] = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{H}).$$

8. *Si* ψ *est une application convexe et mesurable, alors* $\mathbb{E}\left[\psi(X) \mid \mathcal{G}\right] \geq \psi(\mathbb{E}\left[X \mid \mathcal{G}\right])$. *(Inégalité de Jensen).*

Preuve. La preuve en détail est trouvée dans [8]. ■

1.2 Processus stochastique

Définition 1.2.1 (Filtration) *On appelle filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F})$*, une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$*. (i.e. pour tout* $s \leq t$*,* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$*).*

Définition 1.2.2 (Filtration naturelle) *Soit* X *un processus défini sur* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, on introduit la filtration* $\mathcal{G}_t = \sigma\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$*, cette filtration s'appelle la filtration naturelle de* X*.*

Définition 1.2.3 (Filtration naturelle augmentée) *La filtration naturelle augmentée de* X *définie par* $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{\mathcal{G}_t \cup \mathcal{N}\}$*, lorsque nous parlerons de filtration naturelle, il s'agira toujours de filtration naturelle augmentée, car* $\mathcal{G}_0$ *ne contient pas nécessairement tous les ensembles négligeables* $\mathcal{N}$*.*

Définition 1.2.4 (Processus stochastique) *On appelle processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ indexé par $\mathbb{T}$ et à valeur dans $\mathbb{R}^d$ une famille d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, tel que pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est une variable aléatoire.*

Remarque 1.2.1 *Si $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ on dit que X est un processus à temps discret, si $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$ pour les processus à temps continu.*

Remarque 1.2.2 *Un processus $X_t(\omega)$ dépend de deux paramètres, dépend de t (en générale est le temps), et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$, on a*

i *Pour $t \in \mathbb{T}$ fixé, $\omega \in \Omega \longmapsto X_t(\omega)$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

ii *Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in \mathbb{T} \longmapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeurs réelles, appelée trajectoire du processus X.*

Définition 1.2.5 (Processus adapté) *On dit que un processus X est adapté par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, si pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable.*

Remarque 1.2.3 *Un processus X est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.*

Définition 1.2.6 (Processus mesurable) *On dit que un processus X est mesurable si l'application $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$, est mesurable par rapport à $(\mathcal{B}(\mathbb{R}+) \otimes \mathcal{F})$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 1.2.7 (Processus progressivement mesurable) *Un processus X est dite progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$, l'application $(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport aux tribus $(\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Définition 1.2.8 (Processus càdlàg) *Un processus est càdlàg (continue à droite, pourvu de limites à gauche), si ses trajectoires sont aussi continue à droite et pourvues de limites à gauche.*

Définition 1.2.9 (Lois fini-dimensionnelles) *Soit un processus stochastique* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$*, les lois fini-dimensionnelles de* X *sont les lois de tous les vecteurs* $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ *pour tout* $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{T}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*. (i.e.* $\mathcal{L}(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_n})$ *:* $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{T}$*, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*).*

Définition 1.2.10 (Processus équivalents) *Deux processus* X *et* Y *sont équivalents s'ils ont même loi, on écrira* $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$*.*

Définition 1.2.11 (Processus Gaussien) *Un processus* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$*est gaussien si toute combinaison linéaire* $a_1X_{t_1}+a_2X_{t_2}+...+a_nX_{t_n}$ *suit une loi gaussienne pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, pour tout* $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{T}$*,* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$*.*

Définition 1.2.12 (Processus à accroissements indépendants) *Un processus* X *est dit à accroissements indépendants si pour tout* $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$*, les variables aléatoires* $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*

Définition 1.2.13 (Processus à accroissements stationnaires) *Un processus est dit à accroissements stationnaires si la loi des accroissements* $X_{t+h} - X_t$ *ne dépend pas de* $h > 0$*.*

Définition 1.2.14 (Processus prévisible) *Une tribu des prévisibles est la tribu sur* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ *engendrée par les rectangles* $]s, t] \times A$*, pour tout* $0 < s < t$*,* $A \in \mathcal{F}_s$*. On dit que un processus est prévisible si et seulement si* $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ *est mesurable par rapport à la tribu des prévisibles.*

1.2.1 Martingale

Définition 1.2.15 (Martingale à temps continu) *Un processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans $\mathbb{R}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$, si*

1. *X adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. (i.e. pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable).*
2. *Pour tout $t \geq 0$, X_t est intégrable. (i.e. $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$).*
3. *Pour tout s, $t \in \mathbb{R}_+$, $s \leq t$*

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s. \tag{1.1}$$

Si (1.1) remplacé par pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$, alors X est sur-martingale. Si (1.1) remplacé par pour tout $s \leq t$, $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$, alors X est sous-martingale.

1.2.2 Mouvement brownien

Définition 1.2.16 *On appelle mouvement brownien (standard) un processus stochastique B à valeurs réelles, tel que*

1. *$B_0 = 0$ $\mathbb{P}-p.s.$*
2. *$\mathbb{P}-p.s.$, $t \longmapsto B_t(\omega)$ est continue. (i.e. B à trajectoire continue).*
3. *Pour $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ est indépendant de la tribu $\sigma(B_u,\ u \leq s)$ et de loi gaussienne centrée de variance $t - s$.*

Pour tout $t > 0$, la variable aléatoire B_t suit la loi de Gauss d'espérance nulle et de variance t.

Proposition 1.2.1 *Si B est un mouvement brownien, alors pour tout λ réel le processus $\left\{\exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right),\ t \geq 0\right\}$ est une martingale.*

Preuve. Posons $X_t = \exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|X_t|\right] = \mathbb{E}\left[X_t\right] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 t - \frac{x^2}{2t}\right) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2t}\left(\lambda^2 t^2 + x^2 - 2\lambda t x\right)\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-\lambda t)^2}{2t}\right) dx = 1 < +\infty,
\end{aligned}$$

car est une fonction de densité de loi de Gauss d'espérance λt et de variance t.

X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable, car $X_t = f(t, B_t)$ est une fonction continu.

Pour tout $0 \leq s \leq t < +\infty$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[X_t \frac{X_s}{X_s} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s \mathbb{E}\left[\frac{X_t}{X_s} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s \mathbb{E}\left[\frac{\exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)}{\exp\left(\lambda B_s - \frac{1}{2}\lambda^2 s\right)} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s \mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\lambda^2(t-s)\right\} \mid \mathcal{F}_s\right] \\
&= X_s \mathbb{E}\left[\exp\left\{\lambda(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\lambda^2(t-s)\right\}\right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= X_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2(t-s)\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx \\
&= X_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2(t-s) - \frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx \\
&= X_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(x^2 + \lambda^2(t-s)^2 - 2\lambda x(t-s))}{2(t-s)}\right) dx \\
&= X_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(x - \lambda(t-s))^2}{2(t-s)}\right) dx = X_s,
\end{aligned}$$

car est l'intégrale de fonction de densité de loi de Gauss d'espérance $\lambda(t-s)$ et de variance $2(t-s)$.

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\left\{\exp\left(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right),\ t \geq 0\right\}$ est une martingale. ■

Définition 1.2.17 (Brownien géométrique) *Soient b et σ deux constantes et B un mouvement brownien, pour tout $t \geq 0$ le processus*

$$X_t = X_0 \exp\left\{\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t\right\},$$

est appelé Brownien géométrique.

Remarque 1.2.4 *Le Brownien géométrique est une martingale, d'après proposition 1.2.1.*

1.3 Intégrale stochastique

1.3.1 Intégrale de Wiener

Définition 1.3.1 *Soit l'ensemble des fonctions boréliennes f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable et on note $L^2(\mathbb{R}_+)$, c'est à dire telles que $\int_0^{+\infty} |f(s)|^2 ds < +\infty$. C'est un espace de Hilbert pour la norme $\|f\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} f^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}$, soit l'intégrale*

$$I(f) = \int_0^{+\infty} f(s) dB_s.$$

On dit que $I(f)$ est l'intégrale stochastique ou l'intégrale de Wiener de f par rapport à B.

Définition 1.3.2 (Fonctions en escalier) *Si $f = \mathbf{1}_{]u,v]}$ on pose $\int_0^{+\infty} f(s) dB_s = B_v - B_u$. Soit f une fonction en escalier sous la forme $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1} \mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}$, et on pose $\int_0^{+\infty} f(s) dB_s = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$. On dit que $I(f) \overset{déf}{=} \int_0^{+\infty} f(s) dB_s$ est une variable gaussienne centré et de variance $\int_0^{+\infty} f^2(s) ds$. On a $I(f)$ est gaussienne centré, car B est gaussien d'espérance nulle. De plus*

$$Var(I(f)) = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^2 Var\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) = \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^2 \left(t_i - t_{i-1}\right) = \int_0^{+\infty} f^2(s) ds.$$

Définition 1.3.3 (Processus lié à l'intégrale stochastique) *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$,* *la variable aléatoire* $\int_0^t f(s)dB_s = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}(s)_{[0,t]} f(s)dB_s$. *On définit* $\int_0^t f(s)dB_s$ *pour tout* f *telle que pour tout* T, $\int_0^T |f(s)|^2 ds < +\infty$. *Donc on peut définir l'intégrale stochastique pour une classe plus grande de fonctions, on notera* ${L^2}_{loc}$.

Théorème 1.3.1 *Pour tout* $f \in {L^2}_{loc}$ *et* $M_t = \int_0^t f(s)dB_s$, *on a*

a *M est une martingale continue, et la variable aléatoire M_t est gaussien centré et de variance* $\int_0^t f^2(s)ds$.

b *Le processus* $\left({M_t}^2 - \int_0^t f^2(s)ds,\ t \geq 0\right)$ *est une martingale.*

c *Soit* $f,\ g \in {L^2}_{loc}$, *on a* $\mathbb{E}\left(\int_0^t f(u)dB_u \int_0^s g(u)dB_u\right) = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)du$.

Théorème 1.3.2 (Intégration par parties) *Soit* $f \in C^1$, *alors*

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds.$$

1.3.2 Processus d'Itô

Définition 1.3.4 *Un processus X est un processus d'Itô s'écrit comme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s,$$

où b est un processus adapté, tel que $\int_0^t |b_s|\, ds < +\infty$ *p.s. pour tout* $t \geq 0$*, et* σ *un processus càglàd et adapté, tel que* $\int_0^t \sigma_s^2 ds < +\infty$ *p.s. pour tout* $t \geq 0$*. On utilise la notation sous la forme d'EDS*

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

avec le coefficient b_t *s'appelle la dérive du processus* X *(drift), et* σ_t *s'appelle le coefficient de diffusion du processus* X *(volatilité).*

1.3.3 Formule d'Itô

Soit X est un processus d'Itô

$$dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t.$$

Théorème 1.3.3 ($1^{ére}$ formule d'Itô) *Soit* f *une fonction de classe* C^2*, alors*

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) {\sigma_s}^2 ds.$$

Cette formule s'écrit comme

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d \langle X \rangle_t ,$$

avec

$$dt.dt = 0, \;\; dt.dB_t = 0 \;\; et \; dB_t.dB_t = dt.$$

Théorème 1.3.4 ($2^{ème}$ formule d'Itô) *Supposons f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe C^1 par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x. On a*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} f(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle_s.$$

On peut écrire cette formule sous la forme différentielle

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t} f(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) d\langle X \rangle_t.$$

Théorème 1.3.5 ($3^{ème}$ formule d'Itô) *Soient X et Y deux processus d'Itô issus de x et y, et f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées. On a*

$$\begin{aligned} f(X_t, Y_t) = f(x, y) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) dY_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s) d\langle X \rangle_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s, Y_s) d\langle Y \rangle_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s) d\langle X, Y \rangle_s. \end{aligned}$$

1.4 Equations différentielles stochastiques

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Définition 1.4.1 *Soient b et σ deux fonctions mesurables bornées de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles données, et B un $(\mathcal{F}_t)-$mouvement brownien. Une équation diffé-*

rentielle stochastique (EDS) est une équation de la forme

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{1.2}$$

ou sous forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Théorème 1.4.1 (Existence et unicité) *Soient b et σ deux fonctions mesurables de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, satisfont*

1. *Condition de $K-$Lipschitz : Il existe une constante $K > 0$, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout x, $y \in \mathbb{R}^n$*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K\,|x - y|\,.$$

2. *Condition de croissance : Il existe une constante $L > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$*

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq L(1 + |x|).$$

Alors l'EDS (1.2) admet pour toute condition initiale X_0 de carré intégrable, une solution forte X_t, presque sûrement continue. Cette solution est unique dans le sens que si X_t et Y_t sont deux solutions presque sûrement continues, alors pour tout $t \geq 0$

$$\mathbb{P}\{\sup |X_t - Y_t| > 0\} = 0.$$

Exemple 1.4.1 (Processus d'Ornstien-Uhlenbeck) *Soit l'EDS*

$$dV_t = -aV_t dt + \sigma dB_t, \ V_0 \ \text{donné}. \tag{1.3}$$

Pour trouvé l'unique solution explicite de (1.3), d'où il existe deux constantes positives K et L, tels que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, pour tout x, $y \in \mathbb{R}^n$

$$|ax - ay| + |\sigma - \sigma| \leq |a| \, |x - y| \, ,$$

avec $K = |a| \, ,$ *et* $|ax| + |\sigma| \leq |a| \, |x| + |\sigma| \leq \sup(|a| \, , |\sigma|)(1 + |x|),$ *avec* $L = \sup(|a| \, , |\sigma|)$.

Pour cela, on pose que $X_t = f(t, V_t) = V_t e^{at}$, pour tout $t \geq 0$, avec

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, V_t) = a e^{at} V_t, \ \frac{\partial f}{\partial V_t}(t, V_t) = e^{at}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial V_t^2}(t, V_t) = 0.$$

D'après la formule d'Itô, on trouve

$$\begin{aligned} dX_t = df(t, V_t) &= aV_t e^{at} dt + e^{at} dV_t \\ &= aV_t e^{at} dt + e^{at}(-aV_t dt + \sigma dB_t) = \sigma e^{at} dB_t. \end{aligned}$$

En intégrant de 0 à t

$$X_t = f(0, V_0) + \int_0^t \sigma e^{as} dB_s = V_0 + \int_0^t \sigma e^{as} dB_s.$$

D'autre part $X_t = V_t e^{at}$. Alors la solution explicite de (1.3) est

$$V_t = V_0 e^{-at} + \int_0^t \sigma e^{-a(t-s)} dB_s.$$

Chapitre 2

Processus de Poisson

Dans ce chapitre, on va définir le processus de Poisson voir [6] et [11] et [16], et pour la formule d'Itô-Lévy voir [15].

2.1 Processus de Poisson

Définition 2.1.1 (Loi de Poisson) *On dit que la variable aléatoire N suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on note $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si*

$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

Proposition 2.1.1 *Si $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbb{E}(N) = Var(N) = \lambda$.*

Définition 2.1.2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes, posons*

$$\begin{cases} S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \\ S_0 = 0. \end{cases}$$

La suite aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée processus de renouvellement, et les temps aléatoires* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *sont appelés temps de renouvellement. On défini le processus de comptage* $N = (N_t)_{t\geq 0}$ *par*

$$N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{[0,t]}(S_n) = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{\{S_n \leq t\}}.$$

Définition 2.1.3 *Si pour tout* $n \geq 1$, X_n *suit la loi exponentielle de paramètre* λ, *le processus de comptage* $N = (N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est appelé processus de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$. *Les variables aléatoires* S_n *sont appelées les instants de saut de processus* N.

Remarque 2.1.1 *Pour tout* $n \geq 1$, *on a* $\{N_t = n\} = \{S_{n-1} \leq t \leq S_n\}$. *De plus* $\{N_t \geq n\} = \{S_n \leq t\}$.

Proposition 2.1.2 *Si* $N = (N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est un processus de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$, *alors* $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$.

Définition 2.1.4 (Processus de Poisson) *Un processus de comptage* $N = (N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *est appelle un processus de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$, *si*

1. $N_0 = 0$.
2. N *est à accroissements indépendantes : pour tout* $0 < t_0 < t_1 < ... < t_n < +\infty$, *alors les variables aléatoires* $N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, ..., N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*
3. N *est à accroissements stationnaires : pour tout* $s,\ t \geq 0$, $N_{t+s} - N_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} N_s$.

2.2 Processus de Lévy

Définition 2.2.1 *On dit que* X *est un processus de Lévy, si*

1. $X_0 = 0$ *p.s.*

2. X *est à accroissements indépendantes et stationnaires.*

3. X *est stochastiquement continu*

$$\text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ pour tout } t \geq 0, \text{ on a } \lim_{h \longrightarrow 0} [\mathbb{P}(\, |X_{t+h} - X_t| > \varepsilon)] = 0.$$

Définition 2.2.2 *Si X un processus de Lévy, le processus de sauts associe $\triangle X = (\triangle X_t,\ t \geq 0)$, avec $\triangle X_t = X_t - X_{t^-}$.*

Définition 2.2.3 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d / \{0\})$, et pour tout $t \geq 0$. On définit la quantité aléatoire*

$$N(t, A) = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbf{1}_A(\triangle X_s).$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $A \longmapsto N(t, A)(\omega)$ est une mesure de comptage sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d / \{0\})$. Ainsi $A \longmapsto \mathbb{E}\,[N(t, A)]$ est une mesure borélienne sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d / \{0\})$, et on notera $\mu(A) = \mathbb{E}\,[N(1, A)]$ appelé mesure d'intensité du processus X, avec A est borné inférieurement.

Remarque 2.2.1 *Si A est borné inférieurement, et μ est une mesure de Lévy alors $0 \notin \overline{A}$ et donc $\mu(A) < +\infty$.*

Lemme 2.2.1 *Si A est borné inférieurement et borélien, alors $N(t, A) < \infty$ p.s.*

Théorème 2.2.1 *Soit A est borné inférieurement, alors le processus $(N(t, A),\ t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité $\mu(A)$.*

Définition 2.2.4 (Mesures aléatoires de Poisson) *Soit $(S, \mathcal{A})$ est un espace mesurable, et μ une mesure $\sigma-$finie sur $(S, \mathcal{A})$, une mesure aléatoire de Poisson N sur l'espace $(S, \mathcal{A})$ est une collection des variables aléatoires, telle que*

1. *Pour tout* $A \in \mathcal{A}$ *tel que* $\mu(A) < +\infty$, $N(A)$ *suit la loi de Poisson de paramètre* $\mu(A)$.

2. *Soit* $A_1, A_2, ..., A_n$ *sont des ensembles disjoints de* $\mathcal{A}$, *les variables aléatoires* $N(A_1), N(A_2), ..., N(A_n)$ *sont indépendantes.*

3. *Pour tout* $\omega \in \Omega$, *l'application* $A \longmapsto N(A,\omega)$ *est une mesure de comptage sur* $(S, \mathcal{A})$.

Définition 2.2.5 *Si* X *est un processus de Lévy, alors* $N([0,t], A) = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbf{1}_A(\triangle X_s)$ *est une mesure de Poisson sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d / \{0\}$ *d'intensité* $dt \otimes d\mu$, *avec*

$$\mu(A) = \mathbb{E}\left[N([0,1], A)\right].$$

On définit la mesure de Poisson compensée $\widetilde{N}$ *par pour tout* $t \geq 0$, *et* A *est borné inférieurement*

$$\widetilde{N}(t,A) = N(t,A) - t\mu(A).$$

Notation 2.2.1 $N(t,A) = N([0,t], A)$.

2.3 Intégration de Poisson

Définition 2.3.1 *Soit* N *une mesure aléatoire de Poisson d'intensité* $dt \otimes \mu$ *sur* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d / \{0\}$. *Si* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d / \{0\})$ *vérifie* $\mu(A) < +\infty$, *et si* f *est une fonction Borel-mesurable de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}^n$. *On définit l'intégrale de Poisson de* f *par*

$$\textit{Pour tout } t \geq 0, \quad \int_A f(z) N(t,dz) = \sum_{z \in A} f(z) N(t, \{z\}).$$

Si N est associée à un processus de Lévy, alors

$$\int_A f(z)N(t,dz) = \sum_{0\leq s\leq t} f(\triangle X_s)\mathbf{1}_A(\triangle X_s).$$

Car $N(t,\{z\}) = \{0 \leq s \leq t,\ \triangle X_s = \{z\}\}$ *. De plus, le processus* $t \longmapsto \int_A f(z)N(t,dz)$ *est un processus adapté et càdlàg.*

Proposition 2.3.1 *Si $f \in L^2(A,\mu)$ et $g \in L^2(B,\mu)$, et A, B sont bornés inférieurement. On a*

$$\left\langle \int_A f(z)\widetilde{N}(t,dz), \int_B g(z)\widetilde{N}(t,dz) \right\rangle = t\int_{A\cap B} f(z)g(z)\mu(dz).$$

Théorème 2.3.1 *Soit A un ensemble borélien borné inférieurement, alors*

1. *Si $f \in L^1(A,\mu)$, on a*

$$\mathbb{E}\left[\int_A f(z)N(t,dz)\right] = t\int_A f(z)\mu(dz),$$

et

$$\mathbb{E}\left[\int_A f(z)\widetilde{N}(t,dz)\right] = 0.$$

2. *Si $f \in L^2(A,\mu)$, on a*

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_A f(z)N(t,dz)\right|^2\right] = t\int_A |f(z)|^2 \mu(dz).$$

De plus

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_A f(z)\widetilde{N}(t,dz)\right|^2\right] = t\int_A |f(z)|^2 \mu(dz).$$

Preuve. Soit f une fonction étagée de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$, pour tout $a_i \in \mathbb{R}$ et A_i boréliens deux à deux disjoints

1. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[N(t,A)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{0\leq s\leq t} \mathbf{1}_A(\triangle X_s)\right] = \sum_{0\leq s\leq t} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A(\triangle X_s)\right] = \sum_{0\leq s\leq t} \mu(A) \\ &= \mu(A)\sum_{0\leq s\leq t} 1 = \mu(A)\int_0^t 1ds = t\mu(A).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_A f(z)N(t,dz)\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i N(t,A_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}\left[N(t,A_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i t\mu(A_i) \\ &= t\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = t\int_A f(z)\mu(dz).\end{aligned}$$

D'autre part, on a $\widetilde{N}(t,dz) = N(t,dz) - t\mu(dz)$, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_A f(z)\widetilde{N}(t,dz)\right] &= \mathbb{E}\left[\int_A f(z)(N(t,dz) - t\mu(dz))\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_A f(z)N(t,dz)\right] - \mathbb{E}\left[t\int_A f(z)\mu(dz)\right] \\ &= t\int_A f(z)\mu(dz) - t\int_A f(z)\mu(dz) = 0.\end{aligned}$$

2. Pour tout $i < j$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(N(t,A_i))^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{0\le s\le t}\mathbf{1}_{A_i}(\triangle X_s)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{0\le s\le t}(\mathbf{1}_{A_i}(\triangle X_s))^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{0\le s\le t}(\mathbf{1}_{A_i}(\triangle X_s))(\mathbf{1}_{A_j}(\triangle X_s))\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{0\le s\le t}(\mathbf{1}_{A_i}(\triangle X_s))^2\right] + 2\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{0\le s\le t}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{A_i}(\triangle X_s)\mathbf{1}_{A_j}(\triangle X_s)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{0\le s\le t}\mathbf{1}_{A_i}(\triangle X_s)\right] = \sum_{0\le s\le t}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{A_i}(\triangle X_s)\right] \\
&= \sum_{0\le s\le t}\mu(A_i) = t\mu(A_i).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|\int_A f(z)N(t,dz)\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_A f(z)N(t,dz)\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}a_iN(t,A_i)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_iN(t,A_i))^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}a_ia_jN(t,A_i)N(t,A_j)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}a_i^2\mathbb{E}\left[(N(t,A_i))^2\right] + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}a_ia_j\mathbb{E}\left[N(t,A_i)N(t,A_j)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}a_i^2t\mu(A_i) = t\sum_{i=1}^{n}a_i^2\mu(A_i) \\
&= t\int_A (f(z))^2\mu(dz) = t\int_A |f(z)|^2\,\mu(dz).
\end{aligned}$$

De plus, d'après proposition (2.3.1), si $f = g$ et $A = B$

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_A f(z)\widetilde{N}(t,dz)\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_A f(z)\widetilde{N}(t,dz)\right)^2\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[t\int_A (f(z))^2\mu(dz)\right]$$

$$= t\int_A (f(z))^2\,\mu(dz) = t\int_A |f(z)|^2\,\mu(dz),$$

d'où le processus $t \longmapsto \int_A f(z)\widetilde{N}(t,dz)$ est une martingale *càdlàg*.

■

Proposition 2.3.2 *Soit f un processus simple de la forme $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f_i(t_j)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1}]}\mathbf{1}_{A_i}$. On définit*

$$I_T(f) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} f(s,z)d\widetilde{N}(ds,dz) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f_i(t_j)\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i).$$

De plus, pour tout $T > 0$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} f(s,z)d\widetilde{N}(ds,dz)\right] = 0,$$

et

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} f(s,z)d\widetilde{N}(ds,dz)\right)^2\right] = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} \mathbb{E}\left[|f(t,z)|^2\right]\mu(dz)dt.$$

Preuve. Soit f un processus simple de la forme $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f_i(t_j)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1}]}\mathbf{1}_{A_i}$, et comme $f_i(t_j)$ est $\mathcal{F}_{t_j}-$mesurable, et que $t \longmapsto \widetilde{N}(t,A_i)$ est une $\mathcal{F}_t-$martingale centrée.

On a

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} f(s,z)d\widetilde{N}(ds,dz)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n f_i(t_j)\widetilde{N}\left([t_j,t_{j+1}],A_i\right)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[f_i(t_j)\widetilde{N}\left([t_j,t_{j+1}],A_i\right)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(f_i(t_j)\widetilde{N}\left([t_j,t_{j+1}],A_i\right) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[f_i(t_j)\mathbb{E}\left(\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[f_i(t_j)\underbrace{\mathbb{E}\left(\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\right)}_{=0}\right] = 0.$$

De même, on a pour $j < j'$, et pour tout $1 \leq i,\, i' \leq n$

$$\mathbb{E}\left[f_i(t_j)\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)f_{i'}(t_{j'})\widetilde{N}\left([t_{j'},t_{j'+1}],A_{i'}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(f_i(t_j)\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)f_{i'}(t_{j'})\widetilde{N}\left([t_{j'},t_{j'+1}],A_{i'}\right) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[f_i(t_j)\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)f_{i'}(t_{j'})\mathbb{E}\left(\widetilde{N}\left([t_{j'},t_{j'+1}],A_{i'}\right) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[f_i(t_j)\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)f_{i'}(t_{j'})\underbrace{\mathbb{E}\left(\widetilde{N}\left([t_{j'},t_{j'+1}],A_{i'}\right)\right)}_{=0}\right] = 0.$$

De plus, pour $j = j'$

$$\mathbb{E}\left[f_i(t_j)\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)f_{i'}(t_j)\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_{i'})\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(f_i(t_j)\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)f_{i'}(t_j)\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_{i'}) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[f_i(t_j)f_{i'}(t_j)\mathbb{E}\left(\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_{i'}) \mid \mathcal{F}_{t_j}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[f_i(t_j)f_{i'}(t_j)\mathbb{E}\left(\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_i)\widetilde{N}([t_j,t_{j+1}],A_{i'})\right)\right],$$

pour $i = i'$

$$\mathbb{E}\left[(f_i(t_j))^2\,\mathbb{E}\left(\left(\widetilde{N}\left([t_j, t_{j+1}], A_i\right)\right)^2\right)\right] = (t_{j+1} - t_j)\,\mu(A_i)\mathbb{E}\left[(f_i(t_j))^2\right].$$

Alors pour tout i, i' et j, j'

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} f(s,z)d\widetilde{N}(ds,dz)\right)^2\right] \\
&= \sum_{j,j'=1}^{m} \sum_{i,i'=1}^{n} \mathbb{E}\left[f_i(t_j)\widetilde{N}([t_j, t_{j+1}], A_i) f_{i'}(t_{j'})\widetilde{N}([t_{j'}, t_{j'+1}], A_{i'})\right] \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[(f_i(t_j))^2\left(\widetilde{N}([t_j, t_{j+1}], A_i)\right)^2\right] \\
&= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(t_{j+1} - t_j)\mu(A_i)\mathbb{E}\left[(f_i(t_j))^2\right] \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d/\{0\}} \mathbb{E}\left[|f(t,z)|^2\right]\mu(dz)dt.
\end{aligned}$$

D'où la réponse. ∎

2.3.1 Décomposition d'Itô-Lévy

Théorème 2.3.2 *Soit X_t un processus de Lévy, alors X_t a une décomposition*

$$X_t = bt + \sigma B_t + \int_{z<R} z\widetilde{N}(t,dz) + \int_{z\geq R} zN(t,dz),$$

ou de forme d'EDS

$$dX_t = bdt + \sigma dB_t + \int_{\mathbb{R}} z\widetilde{N}(dt,dz).$$

Pour b et σ sont des réelles, et $R \in [0, +\infty]$, avec

$$\widetilde{N}(dt, dz) = N(dt, dz) - \mu(dz)dt,$$

est une mesure aléatoire de Poisson compensée, et B_t est un mouvement brownien. On a pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d / \{0\})$, le processus $M_t = \widetilde{N}(t, A)$ est une martingale.

2.3.2 Formule d'Itô-Lévy

Théorème 2.3.3 *Un processus X est un processus d'Itô-Lévy, s'écrit comme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s, z) \widetilde{N}(ds, dz),$$

ou sous forme d'EDS

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t + \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z) \widetilde{N}(dt, dz), \\ X_0 = x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Pour $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$, et on definit $Y_t = f(t, X_t)$. On a

$$\begin{aligned} Y_t = f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s^-}) \left[b_s ds + \sigma_s dB_s \right] + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_{s^-}) ds \\ &+ \int_0^t \int_{|z|<R} \left\{ f(s, X_{s^-} + \gamma(s, z)) - f(s, X_{s^-}) - \gamma(s, z) \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s^-}) \right\} \mu(dz) ds \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left\{ f(s, X_{s^-} + \gamma(s, z) \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s^-}) \right\} \widetilde{N}(ds, dz), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)[b_t dt + \sigma_t dB_t] + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)dt \\
&+ \int\limits_{|z|<R} \left\{ f(t, X_{t^-} + \gamma(t,z)) - f(t, X_{t^-}) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_{t^-})\gamma(t,z) \right\} \mu(dz)dt \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}} \{ f(t, X_{t^-} + \gamma(t,z)) - f(t, X_{t^-}) \} \widetilde{N}(dt,dz). \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Exemple 2.3.1 (Processus géométrique de Lévy) *On considère l'EDS*

$$dX_t = bX_{t^-}dt + \sigma X_{t^-}dB_t + \int\limits_{\mathbb{R}} \gamma(t,z) X_{t^-} \widetilde{N}(dt,dz), \qquad (2.2)$$

avec b, σ deux constantes et $\gamma(t,z) \geq -1$. Pour trouver la solution explicite X_t, on écrire (2.2) sous la forme

$$\frac{dX_t}{X_{t^-}} = bdt + \sigma dB_t + \int\limits_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\widetilde{N}(dt,dz).$$

On choisit $Y_t = \ln(X_t)$, et on utilise la formule d'Itô-Lévy

$$\begin{aligned}
dY_t &= \frac{X_t}{X_{t^-}}\left[bdt + \sigma dB_t\right] + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X_{t^-}^2}\right)\sigma^2 X_t^2 dt \\
&+ \int\limits_{|z|<R} \left\{ \ln(X_{t^-} + \gamma(t,z)X_{t^-}) - \ln(X_{t^-}) - \gamma(t,z)\frac{1}{X_{t^-}}X_{t^-} \right\} \mu(dz)dt \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}} \{ \ln(X_{t^-} + \gamma(t,z)X_{t^-}) - \ln(X_{t^-}) \} \widetilde{N}(dt,dz) \\
&= \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dB_t + \int\limits_{|z|<R} \{ \ln(1+\gamma(t,z)) - \gamma(t,z) \} \mu(dz)dt \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}} \ln(1+\gamma(t,z))\widetilde{N}(dt,dz).
\end{aligned}$$

En intégrant

$$Y_t = Y_0 + \left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t + \int_0^t \int_{|z|<R} \{\ln(1+\gamma(s,z)) - \gamma(s,z)\}\mu(dz)ds$$
$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1+\gamma(s,z))\widetilde{N}(ds,dz).$$

Alors

$$X_t = X_0 \exp\left\{\left(b - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t + \int_0^t \int_{|z|<R} (\ln(1+\gamma(s,z)) - \gamma(s,z))\mu(dz)ds \right.$$
$$\left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1+\gamma(s,z))\widetilde{N}(ds,dz)\right\}.$$

On appelé X_t *processus géométrique de Lévy.*

Chapitre 3

Théorèmes de Girsanov

Dans ce dernier chapitre, nous parlons de changement de probabilité [1] et [9], de théorèmes de Girsanov voir [14]. Ensuite, nous appliquons les théorèmes de Girsanov dans processus d'Itô-Lévy [15]. Nous donnons un exemple de l'application de transformation de Girsanov dans le marché financier [5].

3.1 Changement de Probabilité

Définition 3.1.1 (Continuité absolument) *Soit* $(\Omega, \mathcal{F})$ *un espace mesurable muni de deux mesures* $\mathbb{P}$*et* $\mathbb{Q}$. *On dit que* $\mathbb{P}$ *est absolument continue par rapport à* $\mathbb{Q}$, *et notons* $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, *si*

$$\textit{Pour tout } A \in \mathcal{F}, \textit{ si } \mathbb{Q}(A) = 0 \textit{ alors } \mathbb{P}(A) = 0.$$

Théorème 3.1.1 (Théorème de Radon Nikodym) *Si* $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$, *alors il existe une application mesurable* f *de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $\mathbb{R}$, *telle que pour tout* $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = \int_A f d\mathbb{Q}$. *La fonction* f *s'appelle la densité de* $\mathbb{P}$ *par rapport à* $\mathbb{Q}$.

Proposition 3.1.1 *Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités équivalents sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, alors il existe une $\mathbb{P}-(\mathcal{F}_t)-$martingale strictement positive $(Z_t)_{t\leq T}$, telle que pour tout $t \leq T$*

$$\mathbb{Q}{=}Z_T\mathbb{P} \text{ sur } \mathcal{F}_T, \text{ et } \mathbb{Q} \mid_{\mathcal{F}_t} {=}Z_t\mathbb{P} \mid_{\mathcal{F}_t} . \text{ De plus } Z_0 = 1 \text{ et } \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t) = 1.$$

Preuve. On va montrer l'existence de la martingale $(Z_t)_{t\leq T}$. On a d'après théorème 3.1.1, on dit que Z_T est la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_t$, telle que $\mathbb{Q} = Z_T\mathbb{P}$. Pour tout X variable aléatoire $\mathcal{F}_T-$mesurable et $\mathbb{Q}-$intégrable

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \int X d\mathbb{Q} = \int X Z_T d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X Z_T).$$

En particulier, Z_T est strictement positive et $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_0) = 1$. Soit $Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T \mid \mathcal{F}_t)$. Par construction $(Z_t)_{t\leq T}$ est une $\mathbb{P} - (\mathcal{F}_t)-$martingale et est la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$. ■

3.2 Théorèmes de Girsanov

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable muni de deux mesures de probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$, avec $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes.

Théorème 3.2.1 (Théorème *I* de Girsanov [14]) *Soit $X_t \in \mathbb{R}^n$ est un processus d'Itô sous la forme*

$$\begin{cases} dX_t = a_t dt + dB_t, \text{ pour tout } t \leq T, \\ X_0 = 0, \end{cases}$$

où T constante donné, et B_t est un mouvement brownien n-dimensionnelle. On *pose*

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t a_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t a_s^2 ds\right), \text{ pour tout } t \leq T.$$

On suppose que a *est un processus* $(\mathcal{F}_t)-$*adapté satisfait la condition de Novikov*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T a_s^2 ds\right)\right] < +\infty.$$

On définie les deux mesures de probabilités $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F}_T^{(n)})$ *par*

$$d\mathbb{Q} = Z_T d\mathbb{P},$$

où pour tout $t \leq T$, X_t *est un* $\mathbb{Q}-$*mouvement brownien n-dimensionnelle.*

Théorème 3.2.2 (Théorème $\boldsymbol{II}$ de Girsanov [14]) *Soit* $X_t \in \mathbb{R}^n$ *est un processus d'Itô sous la forme*

$$dX_t = \beta_t dt + \theta_t dB_t, \text{ pour tout } t \leq T. \tag{3.1}$$

où $B_t \in \mathbb{R}^m$, $\beta(t,\omega) \in \mathbb{R}^n$ *et* $\theta(t,\omega) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, *on suppose qu'il existe des processus* u_t, *et* α_t *tel que*

$$\theta_t u_t = \beta_t - \alpha_t. \tag{3.2}$$

Supposons que u_t *satisfait la condition de Novikov*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u_s^2 ds\right)\right] < +\infty.$$

Posons

$$Z_t = \exp\left(-\int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u_s^2 ds \right), \textit{ pour tout } t \leq T, \tag{3.3}$$

et

$$d\mathbb{Q} = Z_T d\mathbb{P}, \textit{ sur } \mathcal{F}_T^{(m)}. \tag{3.4}$$

Alors

$$\widetilde{B}_t = B_t + \int_0^t u_s ds, \textit{ pour tout } t \leq T, \tag{3.5}$$

où $\widetilde{B}_t$ *est un* $\mathbb{Q}-$*mouvement brownien, et*

$$dX_t = \alpha_t dt + \theta_t d\widetilde{B}_t.$$

Preuve. D'après théorème I de Girsanov 3.2.1 et (3.1), (3.2) et (3.5), on trouve

$$\begin{aligned} dX_t &= \beta_t dt + \theta_t dB_t \\ &= \beta_t dt + \theta_t d\left(\widetilde{B}_t - \int_0^t u_s ds \right) \\ &= \beta_t dt + \theta_t \left(d\widetilde{B}_t - u_t dt \right) \\ &= \left(\beta_t - u_t \theta_t \right) dt + \theta_t d\widetilde{B}_t \\ &= \alpha_t dt + \theta_t d\widetilde{B}_t. \end{aligned}$$

Si $n = m$ et $\theta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible ($i.e.$ il existe θ^{-1}), puis u_t satisfaisant (3.2) par $u_t = \theta_t^{-1}(\beta_t - \alpha_t)$. ■

Théorème 3.2.3 (Théorème III de Girsanov [14]) *Soient* X_t *et* $Y_t \in \mathbb{R}^n$

deux processus d'Itô sous les formes suivantes

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \\ X_0 = x, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} dY_t = (\gamma_t + b(Y_t))dt + \sigma(Y_t)dB_t, \\ Y_0 = y, \end{cases}$$

où les fonctions $b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *et* $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ *satisfait les conditions de l'existence et l'unicité de l'EDS, et* $x \in \mathbb{R}^n$.

Supposons qu'il existe un processus u_t *tel que* $\sigma(Y_t)u_t = \gamma_t$, *avec* u_t *satisfait la condition de Novikov*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u_s^2 ds\right)\right] < +\infty.$$

D'après (3.5), (3.3) *et* (3.4), *alors*

$$dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)d\widetilde{B}_t. \tag{3.6}$$

Par conséquent la $\mathbb{Q}-$*loi de* Y_t *est la même que la* $\mathbb{P}-$*loi de* X_t, *pour tout* $t \leq T$.

Preuve. D'après théorème II de Girsanov 3.2.2 et (3.6), dans le cas de $\theta_t = \sigma(Y_t)$, $\beta_t = \gamma_t + b(Y_t)$, et $\alpha_t = b(Y_t)$. On conclure que la $\mathbb{Q}-$loi de Y_t est la même que la $\mathbb{P}-$loi de X_t, pour tout $t \leq T$.

Théorème III de Girsanov peut être utilise pour produire une solution faible de l'EDS. Supposons que Y_t est la solution connue (faible ou fort) de l'équation

$$dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dB_t,$$

où $b : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$, et $B_t \in \mathbb{R}^m$. On va trouver une solution faible X_t de l'EDS suivante

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \tag{3.7}$$

où $a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, suppose que on peut trouvé une fonction $u_0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, tel que

$$\sigma(y)u_0(y) = b(y) - a(y),\ \ y \in \mathbb{R}^n.$$

Si $n = m$, et σ est inversible, on choisi $u_0 = \sigma^{-1}(b - a)$. Alors si $u_t = u_0(Y_t)$ satisfait la condition de Novikov, et d'après (3.5) et (3.4), on a

$$dY_t = a(Y_t)dt + \sigma(Y_t)d\widetilde{B}_t. \tag{3.8}$$

Ainsi on trouve un $\mathbb{Q}-$mouvement brownien $\widetilde{B}_t$, tel que Y_t satisfait (3.8) par conséquent le couple $(Y_t, \widetilde{B}_t)$ est la solution faible de (3.7) . ■

3.3 Application du théorème de Girsanov dans processus de Lévy

Théorème 3.3.1 (Théorème de Girsanov I pour processus d'Itô-Lévy [5]) *Soit X_t est un processus d'Itô-Lévy de la forme*

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_{t^-})dt + \sigma(t, X_{t^-})dB_t + \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \gamma(t, X_{t^-}, z)\widetilde{N}(dt, dz), \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{3.9}$$

Supposons qu'il existe des processus prévisibles $u_t = u(t,\omega)$ *et* $\beta(t,z) = \beta(t,z,\omega)$, *tels que*

$$\sigma_t u_t + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\beta(t,z)\mu(dz) = \alpha_t, \text{ pour tout } (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega, \tag{3.10}$$

et tel que

$$Z_t = \exp\left\{ -\int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u_s^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \ln(1-\beta(s,z))\widetilde{N}(ds,dz) \right. \tag{3.11}$$
$$\left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[\ln(1-\beta(s,z)) + \beta(s,z)\right] \mu(dz)ds \right\},$$

est bien défini, et satisfait $\mathbb{E}(Z_T) = 1$. *On définit deux mesures de probabilités équivalents* $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *sur* $\mathcal{F}_T$, *par* $d\mathbb{Q} = Z_T d\mathbb{P}$, *puis* X_t *est une* $\mathbb{Q}-$*martingale locale.*

Preuve. Voir [15] théorème 1.31 page(15). ■

Théorème 3.3.2 (Théorème de Girsanov II **pour processus d'Itô-Lévy [5])** *Soit* X_t *un processus d'Itô-Lévy de la forme* (3.9). *Supposons qu'il existe des* $\mathcal{F}_t-$*processus prévisibles* u_t *et* $\beta(t,z) \leq 1$, *tels que le processus* Z_t (3.11) *existe pour tout* $t \leq T$, *et satisfait* $\mathbb{E}(Z_T) = 1$. *On définit* $B^{\mathbb{Q}}$, $\widetilde{N}^{\mathbb{Q}}$ *par*

$$dB_t^{\mathbb{Q}} = dB_t + u_t dt, \tag{3.12}$$

et

$$\widetilde{N}^{\mathbb{Q}}(dt,dz) = \beta(t,z)\mu(dz)dt + \widetilde{N}(dt,dz), \tag{3.13}$$

avec $B_t^{\mathbb{Q}}$ *est un* $\mathbb{Q}-$*mouvement brownien sur* $\mathcal{F}_t$, *et* $\widetilde{N}^{\mathbb{Q}}$ *est une* $(\mathcal{F}_t,\mathbb{Q})-$*mesure* *aléatoire de Poisson compensée de N, dans le sens où*

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \gamma(s,z)\widetilde{N}^{\mathbb{Q}}(ds,dz), \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T,$$

est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})-$martingale locale, pour touts les processus prévisibles $\gamma(s,z)$, tels que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\gamma(s,z))^2 (1 - \beta(s,z))\mu(dz)ds < \infty \ p.s.$$

Preuve. Voir [15] théorème 1.33 pages (17, 18, 19). ■

Théorème 3.3.3 (Théorème de Girsanov III pour processus d'Itô-Lévy [5]) *Soit X_t est un processus de la forme (3.9) dans théorème I 3.3.1. Supposons qu'il existe u_t et $\beta(t,z) \leq 1$ sont $\mathcal{F}_t-$processus prévisibles satisfaites (3.10) . Soient $B^{\mathbb{Q}}$ et $\widetilde{N}^{\mathbb{Q}}$ sont définies dans théorème II 3.3.2, donc en termes $B^{\mathbb{Q}}$ (3.12) et $\widetilde{N}^{\mathbb{Q}}$ (3.13) le processus X_t peut être représente par*

$$dX_t = a_t dt + dB_t^{\mathbb{Q}} + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\widetilde{N}^{\mathbb{Q}}(dt,dz),$$

où $a_t = b_t - \sigma_t u_t + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t,z)\beta(t,z)\mu(dz).$

Preuve. Voir [15] théorème 1.35 page (20). ■

Théorème 3.3.4 *Soit Z_t est un processus de la forme (3.11) vérifié $\mathbb{E}(Z_T) = 1$, alors Z_T est une $\mathbb{Q}-$martingale, défini par $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_T$ sur $\mathcal{F}_t$. On a la condition de Novikov pour les processus d'Itô-Lévy*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u_t^2 dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \beta^2(t,z)\widetilde{N}(dt,dz)\right)\right] < \infty.$$

3.3.1 Exemple : Marché financier de la sensibilité au risque

Définition 3.3.1 (Auto-financier) *La marché s'appelle auto-financier en fonction de la perfusion ni du retrait des fonds sur le période* $[0, T]$ *. Nous supposons aussi que notre marché doit être auto-financier.*

L'application de la transformation de Girsanov, peut être trouvée dans l'économie, en fait de la dynamique de la valeur de la richesse, pour cette fin nous étudierons certaine application.

La dynamique de l'investisseur avec un processus de diffusion de saut peut être décrite comme une EDS avec diffusion des sauts suivante

$$\begin{cases} dX_t = \alpha(t, X_{t^-}) + \sigma(t, X_{t^-})dB_t + \int\limits_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\widetilde{N}(dt, dz), \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{3.14}$$

Nous considérons une marché financier dans lequel deux actifs peuvent être des choix d'investissement, le premier est appelé un actif sans risque, et appelé aussi bond (dépôt de devises étrangères par exemple) dont le prix S_t au temps t donné par

$$\begin{cases} \dfrac{dS_t}{S_t} = r(t, X_t)dt, \\ S_0 = s, \end{cases}$$

le deuxième actif risqué est appelé stock, dont le prix S'_t au temps t est donné par

$$\begin{cases} \dfrac{dS'_t}{S'_t} = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t + \int\limits_{\mathbb{R}} \delta(t, z)\widetilde{N}(dt, dz), \\ S'_0 = s', \end{cases}$$

où $r(t, X_t)$ est le taux d'intérêt de la fonction d'obligation, et $a(t, X_t)$ est appelé le taux de rendement attendu, et $b(t, X_t)$ est le taux de volatilité du cours d'action, et $\delta(.,z)$ est une fonction réelle satisfait $-1 \leq \pi_t\delta(.,z) \leq +\infty$, en plus la fonction $\delta(.,z)$ satisfait $\int\limits_{\Gamma} |\delta(.,z)|^2 \mu(dz) < +\infty$, avec $\Gamma \subset \mathbb{R}/\{0\}$.

Considérons maintenant un investisseur qui veut investir dans le dépôt sans risque (dépôt de devises étrangères par exemple), et le stock, et dont les décisions ne peuvent pas effectuer les prix dans le marché financier.

Nous supposons aussi que notre marché doit être auto-financier. Nous notons par V_t le montant de la richesse de l'investisseur, et u_t est la proportion de la richesse investie dans le stock au temps t, puis π_t est le montant du stock avec $\pi_t = u_tV_t$, et $(1-u_t)V_t$ est le montant d'obligation, ce qui signifie que l'investisseur possède $V_t - u_tV_t = V_t - \pi_t$ épargnes dans banque. Alors la dynamique de la richesse de l'investisseur qui veut des investis sur le marché financier a la forme suivante

$$\frac{dV_t}{V_{t^-}} = (V_t - \pi_t)\frac{dS_t}{S_t} + \pi_t\frac{dS'_t}{S'_t}. \tag{3.15}$$

En fait, la richesse de l'investisseur est décrite par

$$\begin{aligned}
\frac{dV_t}{V_{t^-}} &= (V_t - \pi_t)\frac{dS_t}{S_t} + \pi_t\frac{dS'_t}{S'_t} \\
&= (V_t - \pi_t)r(t,X_t)dt + \pi_t\left[a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dB_t + \int\limits_{\mathbb{R}} \delta(t,z)\widetilde{N}(dt,dz)\right] \\
&= V_tr(t,X_t)dt - \pi_tr(t,X_t)dt + \pi_ta(t,X_t)dt + \pi_tb(t,X_t)dB_t + \int\limits_{\mathbb{R}} \pi_t\delta(t,z)\widetilde{N}(dt,dz) \\
&= [V_tr(t,X_t) + \pi_t(a(t,X_t) - r(t,X_t))]dt + \pi_tb(t,X_t)dB_t + \int\limits_{\mathbb{R}} \pi_t\delta(t,z)\widetilde{N}(dt,dz),
\end{aligned}$$

donc

$$dV_t = [V_t r(t, X_t) + \pi_t(a(t, X_t) - r(t, X_t))] V_{t^-} dt \\ + \pi_t b(t, X_t) V_{t^-} dB_t + \int_{\mathbb{R}} \pi_t \delta(t, z) V_{t^-} \widetilde{N}(dt, dz).$$

Définition 3.3.2 *Une stratégie admissible est de carré intégrable* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}-$*adapté avec valeurs dans* $\mathbb{R}$*, le processus* π *tel que* (3.15) *admet une solution fort* $(V_t)_{t\in[0,T]}$*, qui satisfait* $\mathbb{E}\left(\int_0^T |V_t|\, dt\right) < +\infty$.

Ensuite, l'ensemble de toutes les stratégies admissibles est noté par $\mathcal{U}_{ad}$. L'investisseur veut minimiser son utilité attendue sur l'ensemble $\mathcal{U}_{ad}$, dans un certain temps terminal $T > 0$

$$J^\theta(\pi(.)) = \frac{1}{\theta}\mathbb{E}(V_T^\theta). \tag{3.16}$$

En choisissant une stratégie de choix de portefeuille appropriée $\pi(.)$, où l'exposant $\theta > 0$ est appelé paramètre risque sensible.

Si on mettre $\theta = 1$ l'utilité (3.16) réduit au cas de risque-neutre habituel, l'espérance sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est notée par $\mathbb{E}$.

Lemme 3.3.1 *Nous pouvons réécrire l'espérance* $\mathbb{E}(V_T^\theta)$ *décrite dans l'équation* (3.16)*, en terme de l'exponentielle attendue du critère intégrale comme*

$$J^\theta(\pi(.)) = \frac{1}{\theta}V_0^\theta \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\theta\int_0^T h(t, X_t, \pi_t, z)dt\right)\right],$$

où $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ *est la nouvelle espérance par rapport à la mesure de probabilité* $\mathbb{Q}$*, et la* *fonction h est donnée par*

$$h(t, X_t, \pi_t, z) = -\frac{1}{2}(\theta - 1)\pi_t^2 b_t^2(t, X_t) + V_t r(t, X_t) + \pi_t \left[a(t, X_t) - r(t, X_t)\right]$$
$$+ \int\limits_{|z|<R} \left\{ \frac{1}{\theta} \left[(1 + \pi_t \delta(t,z))^\theta - 1 \right] - \pi_t \delta(t, z) \right\} \mu(dz).$$

Preuve. On a $V_T^\theta = \exp\left\{\ln(V_T^\theta)\right\} = \exp\left\{\theta \ln(V_T)\right\}$. On applique la formule d'Itô-Lévy (2.1) à la valeur logarithmique de richesse $\ln(V_t^\theta) = \theta \ln(V_t) = \theta f(t, V_t)$. On trouve

$$\begin{aligned}
\theta df(t, V_t) &= \theta d\left(\ln(V_t)\right) \\
&= \theta \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}(t, V_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, V_t)dV_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, V_t)\left\langle dV_t, dV_t \right\rangle \right. \\
&+ \int\limits_{|z|<R} \left[f(t, V_{t^-} + V_{t^-}\pi_t\delta(t,z)) - f(t, V_{t^-}) \right. \\
&\left. - \frac{\partial f}{\partial x}(t, V_{t^-})V_{t^-}\pi_t\delta(t,z) \right] \mu(dz)dt \\
&\left. + \int\limits_{\mathbb{R}} \left[f(t, V_{t^-} + V_{t^-}\pi_t\delta(t,z)) - f(t, V_{t^-}) \right] \widetilde{N}(dt, dz) \right\} \\
&= \theta \left\{ \frac{1}{V_{t^-}} dV_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{V_t^2}\right) \pi_t^2 b^2(t, X_t) V_{t^-}^2 dt \right. \\
&+ \int\limits_{|z|<R} \left[\ln(V_{t^-} + V_{t^-}\pi_t\delta(t,z)) - \ln(V_{t^-}) - \pi_t\delta(t,z) \right] \mu(dz)dt \\
&\left. + \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\ln(V_{t^-} + V_{t^-}\pi_t\delta(t,z)) - \ln(V_{t^-}) \right] \widetilde{N}(dt, dz) \right\}.
\end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\theta df(t,V_t) = \theta \{&[V_t r(t,X_t) + \pi_t(a(t,X_t) - r(t,X_t))]dt \\
&+\pi_t b(t,X_t)dB_t - \frac{1}{2}\pi_t^2 b^2(t,X_t)dt \\
&+ \int\limits_{|z|<R} \left[\ln(V_{t^-} + V_{t^-}\pi_t\delta(t,z)) - \ln(V_{t^-}) - \pi_t\delta(t,z)\right] \mu(dz)dt \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\ln(V_{t^-} + V_{t^-}\pi_t\delta(t,z)) - \ln(V_{t^-})\right] \widetilde{N}(dt,dz) \Bigg\},
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&\theta \int\limits_{|z|<R} [\ln(V_{t^-} + V_{t\_}\pi_t\delta(t,z)) - \ln(V_{t^-}) - \pi_t\delta(t,z)]\mu(dz)dt \\
&= \theta \int\limits_{|z|<R} [\ln(V_{t^-}(1 + \pi_t\delta(t,z))) - \ln(V_{t^-}) - \pi_t\delta(t,z)]\mu(dz)dt \\
&= \theta \int\limits_{|z|<R} [\ln(1 + \pi_t\delta(t,z)) - \pi_t\delta(t,z)]\mu(dz)dt \\
&= \int\limits_{|z|<R} [\theta\ln(1 + \pi_t\delta(t,z)) - \theta\pi_t\delta(t,z)]\mu(dz)dt \\
&= \int\limits_{|z|<R} \big[\theta\ln(1 + \pi_t\delta(t,z)) + 1 - 1 - (1 + \pi_t\delta(t,z))^\theta \\
&\quad +(1 + \pi_t\delta(t,z))^\theta - \theta\pi_t\delta(t,z)\big] \mu(dz)dt.
\end{aligned}
$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\theta \int\limits_{|z|<R} [\ln(V_{t^-} + V_{t_}\pi_t\delta(t,z)) - \ln(V_{t^-}) - \pi_t\delta(t,z)]\mu(dz)dt \\
&= \int\limits_{|z|<R} \left[\ln(1+\pi_t\delta(t,z))^\theta + 1 - (1+\pi_t\delta(t,z))^\theta\right]\mu(dz)dt \\
&+ \theta \int\limits_{|z|<R} \left\{\frac{1}{\theta}[(1+\pi_t\delta(t,z))^\theta - 1] - \pi_t\delta(t,z)\right\}\mu(dz)dt. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

En substituant l'équation (3.18) dans (3.17), on trouve

$$\begin{aligned}
V_T^\theta &= \exp\left\{\ln(V_T^\theta)\right\} \\
&= \exp\Bigg\{\ln\left(V_0^\theta\right) + \int_0^T [V_t r(t,X_t) + \pi_t(a(t,X_t) - r(t,X_t))]dt \\
&+ \int_0^T \pi_t b(t,X_t)dB_t - \frac{1}{2}\int_0^T \pi_t^2 b^2(t,X_t)dt \\
&+ \int_0^T \int\limits_{|z|<R} \left[\ln(1+\pi_t\delta(t,z))^\theta + 1 - (1+\pi_t\delta(t,z))^\theta\right]\mu(dz)dt \\
&+ \int_0^T \int\limits_{|z|<R} \left[\frac{1}{\theta}[(1+\pi_t\delta(t,z))^\theta - 1] - \pi_t\delta(t,z)\right]\mu(dz)dt \\
&+ \int_0^T \int\limits_{\mathbb{R}} \ln(1+\pi_t\delta(t,z))\widetilde{N}(dt,dz)\Bigg\}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Ensuite, nous obtenons après savoir pris l'attente

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}\mathbb{E}[V_T^\theta] &= \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[\exp(\theta\ln(V_T))\right] \\
&= \frac{1}{\theta}\mathbb{E}\left[\exp\{\ln(V_0^\theta)\}\exp\left\{\theta\int_0^T [V_t r(t,X_t)+\pi_t(a(t,X_t)-r(t,X_t))]dt\right.\right. \\
&-\frac{1}{2}\theta\int_0^T \pi_t^2 b^2(t,X_t)dt+\theta\int_0^T \pi_t b(t,X_t)dB_t \\
&+\int_0^T\int_{|z|<R}[\ln(1+\pi_t\delta(t,z))^\theta+1-(1+\pi_t\delta(t,z))^\theta]\mu(dz)dt \\
&+\theta\int_0^T\int_{|z|<R}\left[\frac{1}{\theta}[(1-\pi_t\delta(t,z))^\theta-1]-\pi_t\delta(t,z)\right]\mu(dz)dt \\
&\left.\left.+\theta\int_0^T\int_{\mathbb{R}}[\ln(1+\pi_t\delta(t,z))]\widetilde{N}(dt,dz)\right\}\right] \\
&= \frac{1}{\theta}V_0^\theta\mathbb{E}\left[\exp\left\{\theta\int_0^T \{[V_t r(t,X_t)+\pi_t(a(t,X_t)-r(t,X_t))]\}dt\right.\right. \\
&-\frac{1}{2}\theta\int_0^T \pi_t^2 b^2(t,X_t)dt+\frac{1}{2}\theta^2\int_0^T \pi_t^2 b^2(t,X_t)dt \\
&-\frac{1}{2}\theta^2\int_0^T \pi_t^2 b^2(t,X_t)dt+\theta\int_0^T \pi_t b(t,X_t)dB_t \\
&+\int_0^T\int_{|z|<R}\{\ln(1+\pi_t\delta(t,z))^\theta+1-(1+\pi_t\delta(t,z))^\theta\}\mu(dz)dt \\
&+\theta\int_0^T\int_{|z|<R}\left\{\frac{1}{\theta}[(1+\pi_t\delta(t,z))^\theta-1]-\pi_t\delta(t,z)\right\}\mu(dz)dt \\
&\left.\left.+\theta\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\ln(1+\pi_t\delta(t,z))\widetilde{N}(dt,dz)\right\}\right].
\end{aligned}
$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta}\mathbb{E}[V_T^\theta] &= \frac{1}{\theta}V_0^\theta\mathbb{E}\left[\exp\left\{\theta\int_0^T\{[V_t r(t,X_t)+\pi_t(a(t,X_t)-r(t,X_t))]\}dt\right.\right.\\
&+\theta\int_0^T\int_{|z|<R}\left\{\frac{1}{\theta}[(1+\pi_t\delta(t,z))^\theta-1]-\pi_t\delta(t,z)\right\}\mu(dz)dt\\
&\left.-\frac{1}{2}\theta\int_0^T\pi_t^2 b^2(t,X_t)dt+\frac{1}{2}\theta^2\int_0^T\pi_t^2 b^2(t,X_t)dt\right\}\times\\
&\exp\left\{-\frac{1}{2}\theta^2\int_0^T\pi_t^2 b^2(t,X_t)dt+\theta\int_0^T\pi_t b(t,X_t)dB_t\right.\\
&+\int_0^T\int_{|z|<R}\{\ln(1+\pi_t\delta(t,z))^\theta+1-(1+\pi_t\delta(t,z))^\theta\}\mu(dz)dt\\
&\left.\left.+\theta\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\ln(1+\pi_t\delta(t,z))\widetilde{N}(dt,dz)\right\}\right]\\
&= \frac{1}{\theta}V_0^\theta\mathbb{E}\left[I\times J\right].
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
I &= \exp\left\{\theta\int_0^T h(t,X_t,\pi_t,z)dt\right\}\\
&= \exp\left\{\theta\int_0^T[V_t r(t,X_t)+\pi_t(a(t,X_t)-r(t,X_t))]dt\right.\\
&+\theta\int_0^T\int_{|z|<R}\left[\frac{1}{\theta}[(1-\pi_t\delta(t,z))^\theta-1]-\pi_t\delta(t,z)\right]\mu(dz)dt\\
&\left.\theta\int_0^T-\frac{1}{2}(\theta-1)\pi_t^2 b^2(t,X_t)dt\right\},
\end{aligned}$$

avec

$$h(t, X_t, \pi_t, z) = \left[-\frac{1}{2}(\theta - 1)\pi_t^2 b^2(t, X_t)\right] dt + [V_t r(t, X_t) + \pi_t(a(t, X_t) - r(t, X_t))]\, dt$$
$$+ \int\limits_{|z|<R} \left[\frac{1}{\theta}\left[(1 - \pi_t\delta(t, z))^{\theta} - 1\right] - \pi_t\delta(t, z)\right] \mu(dz)dt,$$

et

$$J = Z_T = \exp\left\{-\frac{1}{2}\theta^2 \int_0^T \pi_t^2 b^2(t, X_t)dt + \theta \int_0^T \pi_t b(t, X_t)dB_t\right.$$
$$+ \int_0^T \int\limits_{|z|<R} \left[\ln(1 + \pi_t\delta(t, z))^{\theta} + 1 - (1 + \pi_t\delta(t, z))^{\theta}\right] \mu(dz)dt$$
$$\left. + \theta \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \pi_t\delta(t, z))\widetilde{N}(dt, dz)\right\}.$$

On a la condition de Novikov pour le processus d'Itô-Lévy

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \upsilon_t^2 dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \beta^2(t, z)\widetilde{N}(dt, dz)\right)\right] < \infty,$$

avec $\upsilon_t = \theta\pi_t b(t, X_t)$, et $\beta^2(t, z) = \theta \ln[(1 + \pi_t\delta(t, z))]$. En appliquant la transformation de Girsanov (3.3.1), le terme intégral stochastique peut être défini, et selon l'hypothèse de la condition de Novikov, nous obtenons

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_T.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
J^{\theta}(\pi(.)) &= \frac{1}{\theta} V_0^{\theta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[V_T^{\theta} \right] = \frac{1}{\theta} V_0^{\theta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[I \times J \right] \\
&= \frac{1}{\theta} V_0^{\theta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \exp \left\{ \theta \int_0^T h(t, X_t, \pi_t, z) dt \right\} \right] \\
&= \frac{1}{\theta} V_0^{\theta} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[Z_T \exp \left\{ \theta \int_0^T h(t, X_t, \pi_t, z) dt \right\} \right] \\
&= \frac{1}{\theta} V_0^{\theta} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\exp \left\{ \theta \int_0^T h(t, X_t, \pi_t, z) dt \right\} \right],
\end{aligned}
$$

avec $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ est la nouvelle espérance par rapport à la mesure de probabilités $\mathbb{Q}$. ■

Lemme 3.3.2 *Notre dynamique (3.14) satisfait l'EDS avec saut suivant*

$$
\begin{cases}
dX_t = f(t, X_t, \pi_t, z) dt + \sigma(t, X_t) dB_t^{\mathbb{Q}} + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z) \widetilde{N}^{\mathbb{Q}}(dt, dz), \\
X_0 = x,
\end{cases}
$$

où la fonction f donné par

$$
f(t, X_t, \pi_t, z) = \alpha(t, X_t) - \theta \pi_t \sigma(t, X_t) b(t, X_t) - \int_{|z|<R} (1 + \pi_t \delta(t, z))^{\theta} \mu(dz).
$$

Preuve. Appliquer la transformation de Girsanov dans le théorème II (3.3.2), on note par

$$
B_t^{\mathbb{Q}} = B_t + \theta \int_0^t \pi_s b(s, X_s) ds,
$$

où $B^{\mathbb{Q}}$ est un mouvement brownien standard, sous la mesure de probabilités $\mathbb{Q}$, et la $\mathbb{Q}-$mesure aléatoire de Poisson compensée est donnée par

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \widetilde{N}^{\mathbb{Q}}(ds, dz) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \widetilde{N}(ds, dz) + \int_0^t \int_{|z|<R} (1 + \pi_s \delta(s, z))^{\theta} \mu(dz) ds.$$

Pour tout $0 \leq s \leq t$, on a

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\widetilde{N}(dt, dz) \\ &= \alpha(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)d\left(B_t^{\mathbb{Q}} - \theta \int_0^t \pi_s b(s, X_s)ds\right) \\ &+ \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\left(\widetilde{N}^{\mathbb{Q}}(dt, dz) - \int_{|z|<R} (1 + \pi_t \delta(t, z))^{\theta} \mu(dz)dt\right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} dX_t = f(t, X_t, \pi_t, z)dt + \sigma(t, X_t)dB_t^{\mathbb{Q}} + \int_{\mathbb{R}} \gamma(t, z)\widetilde{N}^{\mathbb{Q}}(dt, dz). \\ X_0 = x, \end{cases}$$

avec

$$f(t, X_t, \pi_t, z) = \alpha(t, X_t) - \theta \pi_t \sigma(t, X_t) b(t, X_t) - \int_{|z|<R} (1 + \pi_t \delta(t, z))^{\theta} \mu(dz).$$

La preuve est terminée. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons essayé d'appliquer théorème de Girsanov sur processus d'Itô-Lévy, et pour expliquer l'objectif de ce mémoire, nous avons donné l'exemple du marché financier de la sensibilité au risque, et par l'application de transformation de Girsanov dans un marché auto-financier, en fait de la dynamique de la valeur de richesse avec processus de diffusion de saut, nous avons obtenu un nouveau processus stochastique à partir du changement de probabilité.

Bibliographie

[1] Breton, C. (2009). *Probabilités.* Licence de Mathématiques 3ème année, Université de La Rochelle.

[2] Breton, C. (2006). *Processus Gaussiens.* Master IMA 2ème année, Université de La Rochelle.

[3] Briand, P. (2001). *Equations Différentielles Stochastique Rétrograde.* Université de Nantes.

[4] Cameron, R. H., Martin, W. T. (1944). *Transformations of Wiener Integrals under a Transformations.* Annals of Mathematics. 45 (2) : 386-396.

[5] Chala, A., Hafayedy, D., Khallout, R. (2018). *The use of Girsanov's theorem to Describe the Risk-Sensitive Problem and Application to Optimal Control. Stochastic Differential Equations : Basics and applications.* Nova Edition.

[6] Foata, D., Fuchs, A. (2002). *Processus Stochastiques-Processus de Poisson, Chaînes de Markov et Martingales.* Dunod, Paris.

[7] Girsanov, I. V. (1960). *On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures.* Theory of Probability and Its Applications. 5 (3) : 285-301.

[8] Hafayed, M. (2020). *Espérance conditionnelle et ses propriétés.* Master 1, Mathématiques appliqués, Université de Biskra.

[9] Jeanblanc, M. (2006). *Cours de Calcul Stochastique.* Master 2IF EVERY, Lecture Notes, University of Évry.

[10] Jean-Claude, L. (2014). *Processus et Intégrales Stochastiques-cours et exercices.* Ellipses.

[11] Khelfalleh, N. (2022). *Cours de Théorie générale de Processus stochastique.* Master2, Université de Biskra.

[12] Labed, B. (2022). *Cours de Mouvement Brownien.* Master 2, Université de Biskra.

[13] Berglund, N. (2014). *Martingales et Calcul Stochastique.* Master 2 Recherche de Mathématiques. Université d'Orléans.

[14] ∅ksendal, B. (2000). *Stochastic differential equations An introduction with applications.* Fifth edition, Springer-Verlag.

[15] ∅ksendal, B., Sulem, A. (2005). *Applied stochastic control of jump diffusions.* Volume 498. Berlin Springer.

[16] Rhodes, R. (2010). *Processus de Lévy et calcul stochastique.* Université de Paris-Dauphine.

ملخص

في هذه الأطروحة قمنا بدراسة مبرهنات جيرسانوف, حيث افتتحنا بالتذكير بالحساب العشوائي و المعادلات التفاضلية العشوائية, ثم تطرقنا للتكلم عن التغيير في الاحتمالات و مبرهنات جيرسانوف. و في الأخير لتوضيح هدفنا من هذه الأطروحة قمنا بتقديم مثال عن تطبيق مبرهنات جيرسانوف على الأسواق المالية.

Résumé

Dans ce mémoire, Nous avons étudié théorèmes de Girsanov, où nous avons commencé par un rappel du calcul stochastique et des équations différentielles stochastiques, puis nous avons passé pour parler de changement de probabilité et des théorèmes de Girsanov, à la fin pour clarifier notre objectif de ce mémoire, nous avons donné un exemple de l'application de transformation de Girsanov dans les marchés financiers.

Abstract

In this work, we studied Girsanov's theorems, where we started with a reminder of stochastic calculation and stochastic differential equations, then we passed to talk about changing in probability and Girsanov's theorems, at the end of this work, and to illustrate our goal, we gave an example of the application of Girsanov's transformation in financial market.