République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : probabilité

Par

Firas Mouna

Titre **:**

EDSR et contrôl optimale

Devant le Jury :

Mr.	Chighoub Farid	docteur	U. Biskra	Président
Mr.	Tamer Lazhar	docteur	U. Biskra	Rapporteur
Mme.	Aoun Salima	docteur	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 28/06/2022

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

Mes trés chères parents pour leurs sacrifices et leur soutien morale tout le long ; de mon cursus, ma chère mère,qui est à la fois une mère et une amie que je ne remercierai jamais assez.mon père qui est la lumière de mes yeux qui m'a encouragé.

A mon frère (mon coeur Yahia) et mes soeurs (Belkiss, Tassnim, chiraz) et ma tante Soad

A toute la famille Firas et la famille Debchouna

A mes amies (Houda, Chahno ,Halima,Hinda,Malak,Aya,)

A tout personne chère à mon coeur qui ont contribué,de loin ou de près,à la réalisation de ce projet.

$\mathcal{R}$emerciements

A líissue de ce modeste travail, je tenais à remercier tout díabord Dieu de m'avoir offert tout ce que je posséde .

Je tiens àremercier en particulier :

Mon promoteur Docteur TAMER LAZHAR qui n'a économisè aucun effort pour m'encourager à aller de l'avant et qui m'a accompagnèe tout au long de ce périple .

A touts les enseignants- du département MATH- sans exceptions qui ont contribué à ma formation .

A toutes les personnes qui n'ont manqué aucun effort et ont contribué de prés et de loin à la réalisation de ce travail par leurs d'encouragements .

Table des matières

Introduction

La théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR en abrégé) a connu un grand intéresse à partir des années 1990. Ces équations sont apparues pour la première fois dans un article de Bisumt [9] où il aintroduit l'équation adjointe comme une EDSR linéaire lors de l'étude du principe de maximum d'une eds...Pardoux et Peng [3] ont étendu les EDSR linéaires au cas général. Aprés quelque années, cette théorie à tracter un grand nombre de chercheurs dans différente domaine d'application finance, contrôle,edp „, voir El Karoui et al.[4] , Ma et Yong [10], B Oksendal [2].. Comme les EDSR découle de la théorie du contrôle stochastique, il est très naturel d'étudier le problème de contrôle optimal d'une EDSR. Le problème de contrôle linéaire quadratique (LQ) est un type important de problème de contrôle. . De plus,la solution de ce problème présente des propriétés élégantes en raison de structure simple du modèle. Le grand problème dans l'étude du problème de contrôle LQ est de dériver une représentation feedback du contrôle optimal. Yong et Zhou [12] ont étudié systématiquement le problème de contrôle LQ d'une EDS. Dans le cas d'une EDSR la forme du système hamiltonien est donné par une EDSPR couplé et pour avoir une représentation de feedback du contrôle optimal il faut a voir des techniques pour découpler ce système. Lima et Zhou [1] ont étudié un problème de contrôle LQ d'une EDSR avec un cadre général et ont donné une représentation de feedback du controle optimale . Récemment, Li et al [16] ont étendu le résultat de [1] au cas de champ moyen .

Dans ce mémoire, nous étudions un problème de contrôle LQ d'une EDSR avec informations partielles . Nous nous consacrons à donner une représentation de feedback du contrôle optimal et établir une formule explicite du coût optimal. Notons que les articles mentionnés ci-dessus se concentrent sur le cas d'information complète. En particulier, Huang et al. [8] ont dérivé une condition nécessaire d'optimalité d'une edsr avec informations partielles et ont appliqué leurs résultats à deux classes de problèmes de contrôle LQ .Wang et al.[8] et Wang et al [5] considérons les problèmes de contrôle LQ d'information partielle pour un EDSPR et EDSPR à champ moyen respectivement. . Dans ce mémoire on s'interesse au problème de contrôle optimale linéaire quadratique d'une edsr dont nous adoptons une technique de découplage qui conduit à trois équations de Riccati, une EDS avec filtrage et une EDSR avec filtrage et par suite on donne des représentations explicites du contrôle optimal en termes de ces trois équations de Riccati.

Notre mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on présente quelque notions de base sur le calcul de stochastique (filtration, intégrale d'Itô , mouvement brownien, quelque propriété stochastique de l'espérance conditionnelle, etc...) .

Dans le deuxième chapitre on donne le théorème d'existence et l'unicité de la solution d'un edsr dans le cas générale ainsi le cas linéaire.

Dans le troisièmes chapitre on commence par une formulation de notre problème de contrôle (LQ) sous l'information partielle dont le coût est quadratique et l'état de système est la solution d'une edsr linéaire, ensuite on vise à découpler le système hamiltonien stochastique associé et dériver quelques équations de Riccati , enfin nous donnons une représentation explicite du contrôle optimal et coût optimal.

Chapitre 1

Rappels sur les calcul stochastique

1.1 processus stochastique

Définition 1.1.1 (espace de probabilité) *: Un espace de probabilité est un triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *où :*

i) Ω est un ensemble non vide.

ii) $\mathcal{F}$ est une tribu de parties de Ω.

iii) $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $\mathcal{F}$.

Définition 1.1.2 (tribu) *: Un ensemble* $\mathcal{F}$ *de parties d'un ensemble non vide* Ω *est une tribu sur* Ω *si :*

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$.

ii) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^{\complement} \in \mathcal{F}$.

iii) $\forall n, A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n} A_n \in \mathcal{F}$ (union dénombrable).

Remarque 1.1.1 ***:****Que (i) et (ii) impliquent $\Omega \in \mathcal{F}$ et que (ii) et (iii) impliquent :*

$$\forall n, A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{F}$$

Définition 1.1.3 (filtration) *: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une filtration de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est une suite croissante de sous-tribus*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{F}$$

Définition 1.1.4 *(* ***Un processus stochastique****) : Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit adapté (par rapport à une filtration $\mathcal{F}_t$) si X_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable pour tout t.On dit que le processus est à trajectoires continue (ou continue) si les applications*

$t \longrightarrow X_t(\omega)$ sont continues pour presque tout ω.

On dit que deux processes X et Y sont égaux à une modification prés si $X_t = Y_t$ P.s $\forall t$.

Deux processus sont égaux en loi $X =^{loi} Y$ si pour tout $(t_1, t_2, ..., t_n)$ et pour tout n on a $(X_{t_1}, X_{t_2}, ..., X_{t_2}) =^{loi} (Y_{t_1}, Y_{t_2}, ..., Y_{t_n})$.

$$\forall t \geq 0, P(X_t = Y_t) = 1, P.s.$$

X et Y sont indistinguable si P.s, les trajectoires de X et Y sont les mêmes c'est à dire

$$P(X_t = Y_t; \forall t \geq 0) = 1, P.s$$

On dit que le processus$X$ et de Markov si pour toute fonction f borélienne bornée

$$\mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)|\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\left(f\left(X_t\right)|X_s\right), \forall t > s.$$

Proposition 1.1.1 (Inégalité de Hölder) *: Soient* $p, q \in [1, +\infty]$ *des exposants conjugués.i.e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, X \in L^p, Y \in L^q$.

Alors : $XY \in L^1$ et

$$\|XY\|_1 \leq \|X\|_P \|Y\|_q .$$

En particulier, l'inégalité de Hölder (dans le cas $p = q = 2$) donne l'inégalité de cauchy-schwarz

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \sqrt{\mathbb{E}\left(|X|^2\right)\mathbb{E}\left(|Y|^2\right)}$$

1.2 Mouvement brownien.

Définition 1.2.1 ***(Mouvement Bronien (M.B))*** *: Le mouvement brownien est un processus* $(B_t)_{t\in[0,1]}$ *continu dont les accroissements sont indépendants, stationnaires et gaussiens.*

i) *Continuité : B est un processus à trajectoires continues .*

ii) *B est à accroissements indépendants si :* $0 \leq s \leq t$ *,* $B_t - B_s$ *est independant de* $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u\ , u\ \leq s)$ *la filtration naturelle du mouvement Brownien.*

iii) pour tous $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ de loi gaussienne centrée de variance $t - s$

Remarque : .On dit qu'un mouvement brownien par rapport à x si $B_0 = x$.

Définition 1.2.2 (Mouvement Brownien standard (M.B))

Un Mouvement Brownien (standard) est un processus W vérifiant :

1 $W_0 = 0\ \mathbb{P} - p.s.$

2 W est continue, i.e. $t \mapsto W_t(\omega)$ est C^0 pour presque tout ω,

3 W est à accroissemsnts indépandants :

$W_t - W_s$ est indépandant de $\mathcal{F}_s^W = \sigma(W_s, s \leq t)$

4 Les accroissements sont stationnaires, Gaussiens et pour $s \leq t$:

$$W_t - W_s \sim N(0, t-s)$$

Théorème 1.2.1 ***(Caractérisation du Mouvement Brownien)*** *Un processus W est un Mouvement Brownien ssi c'est un processus Gaussiens continue, centrée de fonction de covariance :*

$$cov(X_s, X_t) = s \wedge t = \min(s,t).$$

Proposition 1.2.1 *: Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard, alors : B_t est un processus gaussien i.e. pour tout n et tous $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 ....t_n$; $(B_{t_1}, ...B_{t_n})$ est un vecteur gaussien.*

1.3 Martingales

Définition 1.3.1 *Un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est dit martingale si :*

1 Pour tout $t \geq 0$, M_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable,

2 Pour tout $t \geq 0$, M_t intégrable i.e. $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$,

3 Pour tout $t \geq s \geq 0$, $\mathbb{E}[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s.\mathbb{P} - p.s.$

On définit de manière similaire une sous-martingale si (3) est remplacé par

$$\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] > M_s.P - p.s$$

Et sur-martingale si (3) est remplacé par

$$\mathbb{E}\left[M_t|\mathcal{F}_s\right] < M_s.P - p.s.\forall t \geq s \geq 0.$$

Proposition 1.3.1 *Le mouvement brownien standard* $(W_t, t \geq 0)$ *est une martingale par rapport à sa filtration naturelle* $\mathcal{F}_t^W = \sigma\left(W_s, 0 \leq s \leq t\right)$*.*

Définition 1.3.2 *Soit* X *un processus càdlàg adapté. On dit que c'est une martingale local s'il existe une suite de temps d'arrêt* T_n *croissant vers l'infini telle que pour tout* n *le processus arrêté* $X^{T_n}1_{\{T_n>0\}}$ *soit une martingale.*

Une semi-martigale continue est un processuse X que s'écrit $X = M + V$, ou M est une martingale locale continue et V est un processus continue adapté à variation bornée tel que $V_0 = 0$.

Soit X une martigale (ou une sous-martingale positive) continue à droite. Alors,

i $\forall p \geq 1, \forall a > 0, a^p P\left(\sup_t |X_t| \geq a\right) \leq \sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right],$

ii $\forall p > 1, E\left[\sup_t |X_t|^p\right] \leq q^p \sup_t \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$ *ou* $q = \frac{p}{p-1}$.

Théorème 1.3.1 (Inégalité de burkholder-davis-gundy "BDG") *: Pour tout* $p > 0$*, il existe des constantes positives* c_p *et* C_P *telles que, pour toute martingale continue* $X = (X_t)_{t>0}$*, nul en 0 :*

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0} |X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{\frac{p}{2}}\right].$$

Remarque : En particulier, si $T > 0$,

$$c_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle X, X\rangle_T^{\frac{p}{2}}\right]$$

Lemme 1.3.1 (Lemme de gronwall) *: Soit $T > 0$ et soit g une fonction positive mesurable bornée sur l'intervalle $[0, T]$. Supposons qu'il existe deux constantes $a \geq 0$, $b \geq 0$ telles que pour tout $t \in [0, T]$:*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s)ds.$$

Alors, on a pour tout $t \in [0, T]$:

$$g(t) \leq a \exp(bt).$$

Théorème 1.3.2 *Soit $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ la filtration naturelle du mouvement brownien standard $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ et soit M une martingale continue de carré intégrable par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$, alors il existe un unique processus adapté H tel que :*

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 \mathrm{d}s\right) < \infty$$

et, pour tout $t \in [0, T]$,

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s \mathrm{d}W_s \quad \mathbb{P} - p.s$$

1.4 Temps d'arrêt

On travaille sur un espace muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$. On note $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\cup_t \mathcal{F}_t\right)$

Définition 1.4.1 *: Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. τ est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ −temps d'arrêt si, pour tout t, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

• Si S et T sont des temps d'arrêt, $S \wedge T$ est un temps d'arrêt. En particulier $T \wedge t$ est un temps d'arrêt.

• Si S et T sont des temps d'arrêt tels que $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

• Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus et T un temps d'arrêt fini. On définit X_T par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.

• Si un processus X est continu et adapté, X_t est $\mathcal{F}_T-$ mesurable.

Théorème 1.4.1 *Si T est un temps d'arrêt et M une $(\mathcal{F}_t)-$martingale, le processus Z défini par $Z_t =^{déf} M_{t \wedge T}$ est une $(\mathcal{F}_t)$ martigale.*

En particulier, $\mathbb{E}(M_{t \wedge T}) = \mathbb{E}(M_0)$.

Théorème 1.4.2 ***(théorème d'arrêt de Doob)*** *Si M est une $(\mathcal{F}_t)-$martingale continue et si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T \leq K$, K étant une constante finie, M_t est intégrable et $\mathbb{E}(M_T/\mathcal{F}_S) = M_S$.*

Ce résultat s'étend à tous les temps d'arrêt si la martingale est uniformément intégrable.

si M est uniformément intégrable, on peut montrer que M_t converge $p.s$ et dans L^1

vers M_∞ quand $t \longrightarrow \infty$ et que $M_S = \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{F}_S)$.

Proposition 1.4.1 *si pour tout temps d'arrêt bornée $\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0)$, le processus X est une martingale.*

Définition 1.4.2 *un processus M adapté càglàd est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêts τ_n telle que $\tau_n \longrightarrow \infty$ et $(M_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0)$ est une martingale pour tout n.*

Une martingale local positive est une sur-martingale et une martingale local uniformément intégrable est une martingale.

1.5 Calcule d'Itô.

Soit $\theta(t)$ un processus tel que :

i $\theta(t)$ est $\mathcal{F}_t-$adapté.

ii $\forall T > 0$, $\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^T (\theta(t))^2 \,\mathrm{d}t\right)\right] < \infty$.

On veut défini l'intégrale stochastique d'Itô

$$\int\limits_0^t \theta_s \mathrm{d}B_s$$

Remarque 1.5.1 *Si f est une fonction dérivable alors : :*

$$\int\limits_0^t \theta(s)\,\mathrm{d}f(s) = \int\limits_0^t \theta(s)\, f'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Intégrale d'Itô pour un processus simple :

Soit $\eta = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ partition de $[0, T]$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n = T$, supposon que $\theta(t)$ est constant sur chaque intervalle $[t_k, t_{k+1}[$. On définit :

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \theta(t_j)\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right) + \theta(t_k)\left(B_t - B_{t_k}\right), t_{k \leq t \leq t_{k+1}}.$$

1 $\forall t \geq 0$, $I(t)$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

2 Linéarité.

3 $(I(t))_t$ est une martingale.

Intégrale d'Itô pour un processus quelconque :

Soit $T > 0$ soit θ un processus :

i $\theta(t)$ est $\mathcal{F}_t-$adapté.

ii $\forall T > 0$, $\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^T (\theta(t))^2 \,\mathrm{d}t\right)\right] < \infty$

Théorème 1.5.1 *Il existe une suite (θ_n) de processus simple tel que :*

$$\lim_n \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T (\theta_n(s) - \theta(s))^2 \,\mathrm{d}s\right] = 0$$

On a défini

$$I_n(T) = \int\limits_0^T \theta_n(u)\,\mathrm{d}B_u$$

On défini

$$I(T) = \int\limits_0^T \theta(u)\,\mathrm{d}B_u =^{déf} \lim_n \int\limits_0^T \theta_n(u)\,\mathrm{d}B_u.$$

Proposition 1.5.1 *(De l'intégrale stochastique)*

$I(t) = \int\limits_0^t \theta_s \mathrm{d}B_s \ / \ \theta, \mathcal{F}_t-$adapté, $\theta \in L^2(\mathcal{F} \times [0,T])$

1 $\forall t \geq 0, I(t)$ est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

2 $\theta \mapsto I(t)$ est linéaire.

3 $(I(t))_t$ est une martingale.

4 Continuté : $t \mapsto \int\limits_0^t \theta_s \mathrm{d}B_s$ est à trajéctoires continue.

5 Isométrie d'Itô :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^t \theta(u)\,\mathrm{d}B_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int\limits_0^t \theta^2(u)\,\mathrm{d}u\right] \tag{1.1}$$

Proposition 1.5.2

$$\int_0^t B_s \mathrm{d}B_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right)$$

Théorème 1.5.2 ***(Inégalité de Doob)***

Soit $(M_n, n \in \mathbb{N})$ une martingale réelle de carré intégrable. On a :

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\leq k\leq n} M_k^2\right] \leq 4\mathbb{E}\left[M_n^2\right]$$

En particulier,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}} M_n^2\right] \leq 4\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[M_n^2\right] \tag{1.2}$$

1.5.1 Processus d'Itô

Nous allons maintenant introduire un calcul différentiel sur ces intégrales stochastiques. On appelle ce calcul "calcul d'Itô" et l'outil essentiel en est la "formule d'Itô".

Définition 1.5.1 *Soient* $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ *un espace de probabilité muni d'une filtration et* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un* $\mathcal{F}_t-$*mouvement brownien. On appelle processus d'Itô, un processus* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *tel que :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}B_s, \forall t \leq T, \mathbb{P} - p.s.$$

Avec :

1 X_0 est $\mathcal{F}_t-$mesurable.

2 $(K_s)_{0\leq t\leq T}$ et $(H_s)_{0\leq t\leq T}$ des processus adapté à $\mathcal{F}_t$.

3 $\int\limits_0^t |K_s| \, \mathrm{d}s < +\infty, \, \mathbb{P} - p.s$

4 $\int\limits_0^t |H_s|^2 \, \mathrm{d}s < +\infty, \, \mathbb{P} - p.s$

Proposition 1.5.3 *Soit $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ martingale continue telle que :*

$$M_t = \int\limits_0^t K_s \mathrm{d}s, \ \mathbb{P} - p.s. \ avec \int\limits_0^t |K_s| \, \mathrm{d}s < +\infty,$$

Alors :

$$M_t = 0, \ \forall t \leq T, \ \mathbb{P} - p.s.$$

Ceci entraîne que :

La décomposition d'un processus "d'Itô" est unique. Ce qui signifie que si :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int\limits_0^t K_s \mathrm{d}s + \int\limits_0^t H_s \mathrm{d}B_s \\ &= X_0' + \int\limits_0^t K_s' \mathrm{d}s + \int\limits_0^t H_s' \mathrm{d}B_s \end{aligned}$$

Alors :

$$X_0 = X_0', \ \mathbb{P} - p.s.$$

$$H_s = H_s', \ \mathrm{d}s \times \mathbb{P} - p.p.$$

$$K_s = K_s', \ \mathrm{d}s \times \mathbb{P} - p.p.$$

ii Si $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}B_s$$

Alors

$$K_t = 0,\ \mathrm{d}t \times \mathbb{P} - p.p.$$

Théorème 1.5.3 *Soit* $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus d'Itô :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}B_s$$

Et f *une fonction deux fois continûment différentiable, on a :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s .$$

Où par définition :

$$\langle X, X\rangle_t = \int_0^t H_s^2 \mathrm{d}s,$$

Et

$$\int_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s = \int_0^t f'(X_s)\,K_s \mathrm{d}s + \int_0^t f'(X_s)\,H_s \mathrm{d}B_s.$$

De même si $(t,x) \longrightarrow f(t,x)$ est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t, ces dérivées étant continues en (t,x) (on dit dans ce cas que f est de class $C^{1,2}$), on a :

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t f'_s(s,X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t f'_x(s,X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s,X_s)\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s .$$

Proposition 1.5.4 ***(Formule d'intégration par parties)*** *Soient X_t et Y_t deux processus d'Itô,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s \mathrm{d}s + \int_0^t H_s \mathrm{d}B_s$$

Et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s \mathrm{d}s + \int_0^t H'_s \mathrm{d}B_s.$$

Alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_t \mathrm{d}Y_t + \int_0^t Y_t \mathrm{d}X_t + \langle X, Y \rangle_t$$

Avec la convention

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t H_s H'_s \mathrm{d}s.$$

Théorème 1.5.4 *Soit X un processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, pour $i = 1, ..., n$*

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t K_s^i \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^n \int_0^t H_s^{i,k} \mathrm{d}B_s^k.$$

Si f est deux fois différentiable en x et une fois en t on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \partial_s f(s, X_s) \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^n \int_0^t \partial_{x_i} f(s, X_s) \mathrm{d}X_s^i$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \partial^2_{x_i, x_j} f(s, X_s) \mathrm{d} \left\langle X^i, X^j \right\rangle_s,$$

Avec

$$\begin{aligned}\mathrm{d}X_s^i &= K_s^i\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{d} H_s^{i,k}\mathrm{d}B_s^k \ \ et \ \mathrm{d}\left\langle X^i, X^j\right\rangle_s \\ &= \sum_{k=1}^{d} H_s^{i,k} H_s^{i,k}\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Le resultat est simple à retenir vectorielle. pour cela, on note X le vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées X^i, K le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées K^i et B le vecteur de $\mathbb{R}^d$ de coordonnées B^j. On introduit alors la matrice de taille $n \times d, H = (H^{i,j})$ $_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq d}$.Avec ces notations,on a :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\mathrm{d}s + \int_0^t H_s\mathrm{d}B_s,$$

Où $H_s dB_s$ est un produit matrice-vecteur colonne. La formule d'Itô s'écrit sous la forme, notant $x.y$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et H^* la transposée de H

$$\begin{aligned}f(t, X_t) = f(0, X_0) &+ \int_0^t \partial_s f(s, X_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \nabla f(s, X_s)\,.\mathrm{d}X_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t trace\left(D^2 f(s, X_s)\, H_s H_s^*\right)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

Soit encore

$$\begin{aligned}f(t, X_t) = f(0, X_0) &+ \int_0^t \left(\partial_s f(s, X_s) + \nabla f(s, X_s)\,.K_s\right)\mathrm{d}s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t trace\left(D^2 f(s, X_s)\, H_s H_s^*\right)\mathrm{d}s + \int_0^t Df(s, X_s)\, H_s\mathrm{d}B_s.\end{aligned}$$

Chapitre 2

Équations différentielles stochastiques rétrogrades $(EDSR)$

L'objectif de ce chapitre est de présenter et montrer le résultat d'existence et d'unicité de la solution des équations différentielles stochastiques rétrogrades dont les coefficients sont globalement Lipschitziens. Ce résultat a été obtenu par **Pardoux** et **Peng** en **1990** avec le générateur f non linéaire et une donné terminale de carré intégrable.

2.1 Motivationset notations :

2.2 Présentation du problème :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ un espace probabilisé filtré et ξ une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$, où T désigne un temps terminal.

On voudrait résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} -\frac{dY_t}{dt} = f\ (Y_t)\ ,\ t \in [0,T] \\ Y_T = \xi\ ; \end{cases}$$

en imposant que, pour tout instant t ; Y_t ne dépende pas du futur après t c'est à dire que le processus Y soit adapté par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ \geq 0}$.

Prenons l'exemple le plus simple à savoir $f = 0$; le candidat naturel est $Y_t = \xi$ qui n'est pas adapté si ξ n'est pas déterministe.

La meilleure approximation-disons dans L^2-adaptée est la martingale $Y_t = E(\xi/\mathcal{F}_t)$, si on travaille avec la filtration naturelle d'un mouvement brownien, le théorème de représentation des martingales browniennes permet de construire un processus Z de carré integrable et adapté tel que :

$$Y_t = E(\xi/\mathcal{F}_t) = E[\xi] + \int_0^t Z_s dW_s.$$

Un calcul élémentaire montre :

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s,\ t \in [0,T]$$

ou de façon équivalente

$$\begin{cases} -\ dY_t = -Z_t dW_t,\ t \in [0,T] \\ Y_T = \xi\ ; \end{cases}$$

On voit donc apparaître sur l'exemple le plus simple une seconde inconnue qui est le processus Z dont le rôle est de rendre le processus Y adapté.

Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f dépendre du processus Z ; l'équation devient alors :

$$\begin{cases} dY_t &= f\ (t; Y_t; Z_t)dt\ - Z_t dW_t,\ \ t \in [0, T] \\ Y_T &= \xi\ ; \end{cases} \tag{2.1}$$

ou de façon équivalente, sous forme intégrale,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\ (s; Y_s; Z_s)dt - \int_t^T Z_s dW_s,\ t \in [0, T]$$

2.2.1 Notations :

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité complet et W un mouvement brownien (MB) d-dimensionnel sur cet espace. On notera $(\mathcal{F}_t)_{t\ \geq 0}$ la filtration naturelle du MB W. On travaillera avec deux espaces de processus :

On note $S^2_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^K)$: l'espace vectoriel formé des processus Y , progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^K$, tels que :

$$\|Y\|^2_{S^2} = E\left[\sup_{0 \leq t\ \leq T} |Y_t|^2\right] < \infty,$$

et $S\ ^2_c(\mathbb{R}^K)$ le sous espace formé par le processus continus.

En suite $M\ ^2\ (\mathbb{R}^{K \times d})$ celui formé par les processus Z , progrssivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{K \times d}$, tels que :

$$\|Z\|^2_{M^2} = E\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty,$$

Où si $z \in \mathbb{R}^{K \times d}$, $\|z\|^2 = trace\ (zz^*)$. $M\ ^2\ (\mathbb{R}^{K \times d})$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence de $M\ ^2\ (\mathbb{R}^{K \times d})$.

$\mathbb{R}^K$ et $\mathbb{R}^{K\times d}$ seront souvent omis ; les espaces $S^2_{\mathcal{F}}$; $S^{\,2}_{\,c}$ et $M^{\,2}$ sont des espaces de Banach pour les normes définies précédemment. Nous désignerons $B^{\,2}$ l'espace de Banach $S^2_c(\mathbb{R}^K) \times M^{\,2}\,(\mathbb{R}^{K\times d})$.

Dans tout ce chapitre, nous donnons une application aléatoire f définie sur $[0;T]$ $\times\Omega \times \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K\times d}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^K$ telle que, pour tout $(y;z) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{K\times d}$, le processus$\{f\ (t,y;z)\}_{0\leq t\ \leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également une variable aléatoire ξ , mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^K$. La fonction f s'appelle le générateur et ξ la condition terminale. Dans ce contexte, on veut résoudre l'équation differentielle stochastique rétrograde (EDSR en abrégé) $(\mathbf{2.1})$.

Définition 2.2.1 *: une solution de l'EDSR* $(\mathbf{2.1})$ *est un couple de processus* $\{(Y_t;Z_t)\}_{0\leq t\ \leq T}$ *vérifiant :*

1. Y et Z sont progressivement mesurables à valeurs recpectivement dans $\mathbb{R}^K$ et $\mathbb{R}^{K\times d}$;
2. P-p.s ;
$$\int_0^T \left\{f\ (r;Y_r;Z_r) + \|z_r\|^2\right\} dr < \infty;$$
3. P-p.s, on a :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\ (r;Y_r;Z_r)dr - \int_t^T Z_r\ dW_r\ ,\ t \in [0,T]$$

Remarque 2.2.1 *: Il est important de retenir les deux points suivants : tout d'abord, les intégrales de l'équation* $(\mathbf{2.1})$ *étant bien définies,* Y *est une semi-martingale continue, ensuite, comme le processus* Y *est progressivement mesurable, il est adapté et donc en particulier* Y_0 *est une quantité déterministe.*

Avant de donner un premier théorème d'existence et d'unicité, nous allons montrer, que sous une hypothèse relativement faible sur le générateur f , le processus$Y$ appartient à $S^2_{\mathcal{F}}$.

Proposition 2.2.1 *: supposons qu'il existe un processus*$\{f\ (t;y;z)\}_{0\leq t\leq T}$ *, positif appartenant à* $M^{\ 2}\ (\mathbb{R}^K)$ *et deux constantes positives* C *et* K *tels que*

$$\forall (t;y;z)\in[0;T]\times\mathbb{R}^K\times\mathbb{R}^{K\times d};\quad |f\ (t;y;z)|\leq\ f_t+C\ |y|\ +K\,\|z\|\ .$$

Si $\{(Y_t;Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ *est une solution de l'EDSR* $(\mathbf{2.1})$ *telle que* $Z\in M^{\ 2}$ *, alors* Y *appartient à* $S^{\ 2}_{\ c}$ *.*

Preuve. : On a, pour tout $t\in[0;T]$,

$$Y_t=Y_0+\int_0^t f\ (r;Y_r;Z_r)dr-\int_0^t Z_r\ dW_r\ ,$$

et par suit, utilisant l'hypothèse sur f ,

$$|Y_t|\leq|Y_0|+\int_0^T\left(f_r+K\,\|Z_r\|\right)dr+\sup_{0\leq t\ \leq T}\left|\int_0^t Z_r dW_r\right|+C\int_0^t|Y_r|\,dr.$$

posons

$$\lambda=|Y_0|+\int_0^T\left(f_r+K\,\|Z_r\|\right)dr+\sup_{0\leq t\ \leq T}\left|\int_0^t Z_r dW_r\right|,$$

par suite on a

$$|Y_t|\leq\lambda+C\int_0^t|Y_r|\,dr.$$

Y étant un processus continu, le lemme de Gronwall fournit l'inégalité :

$$|Y_t|\leq\lambda\exp(Ct)\ ,$$

et donc :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t| \leq \lambda \exp(CT),$$

λ est une variable aléatoire de carré intégrable, puisque par hypothèse, Z appartient à M^2 et donc, d'après l'inégalité de Doob,on a :

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Z_r \, dW_r \right|^2 \right] \leq 4 \sup_{0 \leq t \leq T} E\left[\int_0^t \|Z_r\|^2 \, dr\right],$$

ce qui signifie que le troisème terme de λ est de carré intégrable. Il en est de même pour $\{f_t\}_{0 \leq t \leq T}$ et Y_0 puisqu'il est déterministe donc de carré intégrable. ■

Ceci montre que Y appartient à $S^2_{\mathcal{F}}$. Finissons par un résultat d'intégrabilité qui servira à plusieurs reprise.

Lemme 2.2.1 *: soient $Y \in S^2_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^K)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{K \times d})$, alors :*

$$\left\{ \int_0^t Y_s \, Z_s \, dW_s, t \in [0;T] \right\}$$

est une martingale uniformément intégrable.

Preuve. : En appliquant l'inégalité Burkholder-Davis-Gundy, il existe une constante positive C telle que :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t Y_r \, Z_r \, dW_r \right| \right] &\leq C \, E\left[\left(\int_0^T |Y_r|^2 \|Z_r\|^2 \, dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq C \, E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_r|^2 \left(\int_0^T \|Z_r\|^2 \, dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{aligned}$$

et par suite en appliquant linégalité

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

on obtient :

$$E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\left|\int_0^t Y_r\ Z_r\ dW_r\right|\right]\leq \acute{C}\ \left(E\ \left[\sup_{0\leq t\ \leq T}|Y_r|^2\right]+E\ \left[\int_0^T \|Z_r\|^2\,dr\right]\right)\ .$$

Par hypothèse le deuxième membre de cette inégalité est fini, et donc on aura :

$$E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\left|\int_0^t Y_r\ Z_r\ dW_r\right|\right]\leq \infty\ ,$$

$\blacksquare$

2.2.2 Le cas Lipschitz :

Résultat de Pardoux-Peng :

Nous allons montrer le résultat de **E. PARDOUX** et **S.PENG** qui sera généralisé plus tard. où il est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les **EDSR** dans

le cas où le générateur est non-linéaire.

Voici les hypothèses sous lesquelles nous allons travailler, sous les données suivantes : f est définie sur $[0,T]\ \times\Omega\times\ \mathbb{R}^K\ \times\ \mathbb{R}^{K\times d}$ à valeur dans $\mathbb{R}^K$, telle que, pour tout $(y,z)\in\mathbb{R}^K\ \times\ \mathbb{R}^{K\times d}$; le processus $\{f\ (t,y,z)\}_{0\leq t\ \leq T}$ soit progressivement mesurable. On considère également ξ une variable aléatoire,$\mathcal{F}_T-$mesurable,à valeurs dans $\mathbb{R}^K$.

a) Condition d'intégrabilité :

$$E\left[|\xi|^2+\int_0^T |f\ (r,0,0)|^2\,dr\right]\ <\infty,$$

b) Condition de Lipschitz en (y ; z) : pour tout $t; y; \acute{y}; z; \acute{z};$

$$|f\ (t; y; z) - f\ (t; \acute{y}; \acute{z})| \ \leq \ C\ \ (|y - \acute{y}| + \|z - \acute{z}\|)\ ;$$

où : C est une constante indépendante de $t\ ; y\ ; \acute{y}; z$ et $\acute{z}$.

Au début, Nous commençons par le cas simple, celui où f ne dépend pas ni par y ni par z **i.e.** on se donne de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq t\ \leq T}$ dans $M^{\ 2}\ (\mathbb{R}^K)$ et on veut trouver une solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r, 0 \leq t \leq T \tag{2.2}$$

Lemme 2.2.2 *: Soient $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T\ )$ et $\{F_t\}_{0\leq t\ \leq T} \in M^{\ 2}\ (\mathbb{R}^K)$. L'EDSR (2.2) possède une unique solution $(Y; Z\ )$ telle que $Z\ \in M^{\ 2}$.*

Preuve. : Supposons dans un premier temps que $(Y; Z\ )$ soit une solution vérifiant $Z\ \in M^{\ 2}$: Si on prend l'esperance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_t$, on a nécessairement,

$$Y_t = E\left(\xi + \int_t^T F_r\ dr\ \ \backslash\ \mathcal{F}_t\right).$$

On définit donc Y à l'aid de la formule précédent et il reste à trouver Z .Remarquons que, d'aprés le théoreme de Fubini, comme F est progressivement mesurable $\int_0^t F_r\ dr$ est un processus adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\ \leq T}$; en fait dans $S^{\ 2}_{\ c}$puisque F est de carré intégrable. On a alors, pour tout $t \in [0; T]$,

$$Y_t = E\left(\xi + \int_0^T F_r\ dr\ \ \backslash\ \mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_r dr\ = M_t - \int_0^t F_r dr\ ,$$

où M est une martingale brownienne ; par le théorème de représentation des martingales brownienne on construit un processus Z appartenant à M^2 tel que :

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr ,$$

On vérifie facilement que $(Y; Z)$ ainsi construit est une solution de l'EDSR étudiée puisque comme $Y_T = \xi$;

$$Y_t - \xi = M_0 + \int_0^t Z_r dW_r - \int_0^t F_r dr - \left(M_0 + \int_0^T Z_r dW_r - \int_0^T F_r dr \right)$$

finalement, on obtient,

$$Y_t = \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dW_r.$$

L'unicité est évidente pour les solution vérifiant $Z \in M^2$. ■

Théorème 2.2.1 ***(Pardoux–Peng 90) :*** *Sous les hypothèses* **(a)** *et* **(b)** *, l'EDSR* (2.1) *possède une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in M^2$.

Preuve. : Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach B^2 pour demontrer ce théorème, en construisant une application Ψ de B^2 dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in B^2$ est solution de l'EDSR (2.1) si et seulement si c'est un point fixe de Ψ.

Pour (N , H) élément de B^2, on définit $(Y, Z) = \Psi(N, H)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r; N_r; H_r) dr - \int_t^T Z_r dW_r , \ 0 \le t \le T$$

Remarquons que cette dernière EDSR possède une unique solution qui est dans B^2. En effet, posons $F_r = f(r, N_r, H_r)$. Ce processus appartient à M^2 puisque,

f étant Lipschitz,

$$|F_r| \leq |f\ (r;0;0)| + C\,|N_r| + C\,\|H_r\|\,,$$

■

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme (2.2.2)pour obtenir une unique solution (Y,Z) telle que $Z \in M^{\,2}$.

(Y,Z) appartient à $B^{\,2}$: l'intégralité de Z est obtenue par construction et, d'après la Proposition (2.2.1), Y appartient à $S^{\,2}_{\,c}$.

Donc, l'application Ψ de $B^{\,2}$ dans lui-même est bien définie.

Soient (N,H) et $(\acute{N},\acute{H}\ )$ deux éléments de $B^{\,2}$ et $(Y,Z) = \Psi(N,H)$, $(\acute{Y},\acute{Z}) = \Psi(\acute{N},\acute{H}\ )$.

Posons $y = Y - \acute{Y}$ et $z = Z - \acute{Z}$. On a , $y_{_T} = 0$ et

$$dy_t = -\left\{f\ (t,N_t,H_t) - f\ (t,\acute{N}_t,\acute{H}_t)\right\}dt + z_t dW_t.$$

On applique la formule de Itô à $e^{\alpha t}\ |y_t|^2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} d\left(e^{\alpha t}\,|y_t|^2\right) &= \alpha e^{\alpha t}\,|y_t|^2\,dt - 2e^{\alpha t}y_t.\left\{f\ (t,N_t,H_t) - f\ (t,\acute{N}_t,\acute{H}_t)\right\}dt \\ &\quad +2e^{\alpha t}y_t.z_t dW_t\ + e^{\alpha t}\,\|z_t\|^2\,dt\ . \end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t et T , on obtient

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\,|y_t|^2 + \int_t^T e^{\alpha r}\,\|z_r\|^2\,dr &= \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha\ |y_r|^2 - 2y_r.\left\{f\ (r,N_r,H_r) - f\ (r,\acute{N}_r,\acute{H}_r)\right\}\right)dr \\ &\quad - \int_t^T 2e^{\alpha r}y_r.z_r dW_r \end{aligned}$$

et, comme f est Lipshitz, il vient, notant n et h pour $N-\acute{N}$ et $H-\acute{H}$ respectivement,

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr &\leq \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha\ \left|y_r\right|^2-2C\ \left|y_r\right|.\left|n_r\right|+2C\ \left|y_r\right|.\left\|h_r\right\|\right) dr \\ &-\int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r\ . \end{aligned}$$

Pour tout $\epsilon>0$; on a

$$2ab \leq \frac{a^2}{\epsilon}+\epsilon b^2,$$

et donc, l'inégalité précédente donne

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr &\leq \int_t^T e^{\alpha r}\left(-\alpha+\tfrac{2C^{\,2}}{\epsilon}\right)\ \left|y_r\right|^2 dr\ -\int_t^T 2e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r \\ &+\epsilon\int_t^T e^{\alpha r}\left(\ \left|n_r\right|^2+\left\|h_r\right\|^2\right) dr \end{aligned}$$

et prenant $\alpha=\frac{2C^{\,2}}{\epsilon}$; on notant

$$K_\epsilon=\epsilon\int_0^T e^{\alpha r}\left(\ \left|n_r\right|^2+\left\|h_r\right\|^2\right) dr\ .$$

$$\forall t\in[0;T]\ ,\qquad e^{\alpha t}\left|y_t\right|^2+\int_t^T e^{\ \alpha r}\left\|z_r\right\|^2 dr\ \leq K_\epsilon-2\int_t^T e^{\alpha r} y_r.z_r dW_r. \tag{2.3}$$

D'aprés le lemme (**??**), la martingale locale

$$\left\{\int_0^T e^{\ \alpha r} y_r.z_r dW_r\right\}_{t\in[0;T]}\ ,$$

est une martingale uniformément intégrable nulle en 0 puisque $Y\ ,\acute{Y}$ appartiennent à $S^{\,2}$ et $Z\ ,\acute{Z}$ appartiennent à $M^{\,2}$.

En prenant l'espérance, il vient que pour $t=0$:

$$E\ \left[\int_0^T e^{\,\alpha t}\left\|z_r\right\|^2 dr\ \right] \leq E\ \left[K_\epsilon\right]. \tag{2.4}$$

Revenant à l'inégalité (2.3), les inégalités Burkholder-Davis-Gundy fournissent fournit

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|y_t\right|^2\right] &\leq E\ \left[K_\epsilon\right]+AE\left[\left(\int_0^T e^{\,2\alpha}\left|y_r\right|^2\left\|z_r\right\|^2 dr\ \right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq E\ \left[K_\epsilon\right]+AE\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\frac{a\,t}{2}}\ \left|y_t\right|\left(\int_0^T e^{\,\alpha r}\ \left\|z_r\right\|^2 dr\ \right)^{\frac{1}{2}}\right], \end{aligned}$$

puit, comme $\quad ab\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$,

$$E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|y_t\right|^2\right]\leq E\ \left[K_\epsilon\right]+\frac{1}{2}E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|y_t\right|^2\right]+\frac{A^2}{2}E\left[\int_0^T e^{\,\alpha r}\ \left\|z_r\right\|^2 dr\ \right],$$

Prenant en considération l'inégalité (2.4), on obtient finalement

$$E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|y_t\right|^2+\int_0^T e^{\,\alpha r}\ \left\|z_r\right\|^2 dr\ \right]\leq\left(3+A^2\right)E\left[K_\epsilon\right],$$

et par suite, revenant à la définition de K_ϵ

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|y_t\right|^2+\textstyle\int_0^T e^{\,\alpha r}\ \left\|z_r\right\|^2 dr\ \right]\quad &\leq\epsilon\left(3+A^2\right)\left(1\vee T\ \right)E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|n_t\right|^2\right. \\ &\left.+\textstyle\int_0^T e^{\,\alpha r}\ \left\|h_r\right\|^2 dr\right]. \end{aligned}$$

,Prenons ϵ tel que $\ \epsilon\left(3+A^2\right)\left(1\vee T\ \right)=\frac{1}{2}$, de sorte que l'application Ψ est alors une contraction stricte de $B^{\ 2}$ dans lui-même si on le munit de la norme

$$\left\|(N,H)\right\|_\alpha=E\left[\sup_{0\leq t\ \leq T}\ e^{\,\alpha t}\ \left|N_t\right|^2+\int_0^T e^{\,\alpha r}\ \left\|H_r\right\|^2 dr\ \right]^{1/2}\quad,$$

qui en fait un espace de banach-cette derniére norme étant équivalent à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$.

L'application Ψ posséde donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de l'EDSR (2.1) dans $B^{\,2}$.

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in M^{\,2}$ puisque la Proposition (2.2.1) implique qu'un telle solution appartient à $B^{\,2}$.

2.2.3 Le rôle de Z :

Nous allons voir que le rôle de Z, plus précisément celui du terme $\int_t^T z_r \, dW_r$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Proposition 2.2.2 *: Soit (Y, Z) la solution de l'EDSR (2.1) et soit τ un temps d'arrêt majoré par T.*

On suppose qu'Il existe une constante C telle que P - p.s, que ξ est $\mathcal{F}_\tau$ –mesurable et que $f\ (t, y, z) = 0$ dès que $t \geq\ \tau$.

Alors $Y_t = Y_{t\ \wedge\tau}$ et $Z_t = 0$ si $t \geq\ \tau$.

Preuve. : On a, P–p.s.,

$$Y_t = \xi + \int_t^T f\ (r; Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r \ dW_r \ , \ 0 \leq t \leq T$$

et donc, pour $t = \tau$, comme $f\ (t, y, z) = 0$ dès que $t \geq\ \tau$,

$$Y_\tau = \xi + \int_\tau^T f\ (r; Y_r, Z_r)dr - \int_\tau^T Z_r \ dW_r \ = \xi - \int_\tau^T Z_r dW_r \ .$$

Il vient alors $Y_\tau = E(\xi|\mathcal{F}_\tau) = \xi$ et par suite $\int_\tau^T Z_r \, dW_r = 0$ d'où l'on tire que

$$E\left[\left(\int_\tau^T Z_r \, dW_r\right)^2\right] = E\left[\int_\tau^T \|Z_r\|^2 \, dr\right] = 0,$$

et finalement que $Z_r \mathbf{1}_{r \geq \tau} = 0$. Il s'en suit immédiatement que, si $t \geq \tau$, $Y_t = Y_\tau$, puisque par hypothèse,

$$Y_\tau = Y_t + \int_\tau^t f\ (r; Y_r, Z_r) dr - \int_\tau^t Z_r dW_r \ = Y_t + 0 - 0.$$

Notons que dans le cas où ξ et f sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'équation différentielle,

$$\frac{dY_t}{dt} = f\ (t, Y_t, 0)\ , \qquad Y_T = \xi.$$

■

2.3 EDSR linéaires :

Dans ce partie, nous étudions le cas particulier des EDSR linéaires pour lesquelles nous allons donner une formule plus ou moins explicite.

Définition 2.3.1 *: On suppose que $C = 1$ ce qui implique que Y est un réel et Z est une matrice de taille $1 \times d$ (vecteur de dimension d).*

Soit $\{(u_t, v_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}\times \mathbb{R}^d$, progressivement mesurable et borné et soient $\{p_t\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $M^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire, $\mathcal{F}_T$ -mesurable, de carré intégrable, à valeurs réelles.

$$Y_\tau = \xi + \int_t^T \{u_r Y_r + v_r\ Z_r + p_r\}\, dr - \int_t^T Z_r dW_r\ . \tag{2.5}$$

L'EDSR (2.5) s'appelle EDSR linéaire.

Proposition 2.3.1 *: L'EDSR* (2.5) *possède une solution unique qui vérifie :*

$$\forall t \in [0,T], Y_t = \Gamma_t^{-1} E\left(\xi \Gamma_T + \int_t^T p_r\ \Gamma_r\ dr \mid \mathcal{F}_t\right),$$

avec, pour tout $t \in [0,T]$;

$$\Gamma_t = \exp\left\{\int_0^t v_r\ .dW_r - \frac{1}{2}\int_0^t |v_r|^2\, dr + \int_0^t u_r\ dr\right\}.$$

Preuve. : Commençons par remarquer que le processus Γ vérifier :

$$\begin{aligned} d\ \Gamma_t &= \Gamma_t(u_t dt + v_t.dW_t), \\ \Gamma_0 &= 1. \end{aligned}$$

D'autre part, comme v est borné, l'inégalité de Doob montre que Γ appartient à $S^2_{\mathcal{F}}$. De plus, les hypothèses de cette proposition assure l'existence d'une unique solution (Y, Z) à l'EDSR linéaire ; il suffit de poser $f\ (t,y,z) = u_t y + z v_t + p_t$ et de vérifier que **(a)** et **(b)** est satisfaite. Y appartient à $S^2_{\mathcal{F}}$ par la proposition (2.2.1) . La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} d\ \Gamma_t Y_t &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d\left\langle \Gamma, Y\ \right\rangle_t \\ &= -\Gamma_t p_t dt + \Gamma_t\ Z_t dW_t + \Gamma_t\ Y_t v_t.dW_t\ , \end{aligned}$$

ce qui montre que le processus $\Gamma_t Y_t + \int_0^t p_r\ \Gamma_r\ dr$ est une martingale locale qui est en fait une martingale car $p \in M^2$ et Γ, Y sont dans $S^2_{\mathcal{F}}$. Par suite,

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t p_r \Gamma_r dr = E\left(\Gamma_T Y_T + \int_0^T p_r\ \Gamma_r\ dr \ \mid \mathcal{F}_t\right) ,$$

ce qui donne la formule annoncée. ■

Remarque 2.3.1 *: Notons que si $\xi \geq 0$ et si $p_t \geq 0$ alors la solution de l'EDSR linéaire vérifie $Y_t \geq 0$.*

Chapitre 3

Contrôle optimal sous l'information partielle

3.1 Formulation du problème et préliminaires

Soit $(\Omega, F, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré complet et $\{(W_1, W_2) : 0 \leq t \leq T\}$ un processus de Wiener standard à valeurs dand $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{F} \equiv \{F_t\}_{t \geq 0}$ est la filtration naturel de (W_1, W_2) augmentée de tous les ensembles $\mathbb{P}$-nuls. On note par $\mathcal{F}_t^{\beta} = \sigma\{\beta_s, 0 \leq s \leq t\}$ la filtration engendrée par le processus β, $\mathbb{R}^{n \times m}$ est l'ensemble de toutes les $n \times m$ matrices et $\mathbb{S}^n$ l'ensemble des matrices $(n \times n)$ symétriques. Pour une matrice $M \in \mathbb{R}^n$, $M^\intercal$est sa transposée. Le produit scalaire $\langle ., . \rangle$ sur $\mathbb{R}^{n \times m}$ est défini par $\langle M, N \rangle = tr(M^\intercal N)$ et de norme induite $\mid M \mid = \sqrt{tr(M^\intercal M)}$.

En particulier, on note $\mathbb{S}_+^N$ l'ensemble des matrices semi-définies positives et $\widehat{\mathbb{S}}_+^n$ l'ensemble des matrices uniformément définies positives. Pour tout espace ecludien M on définie l'espace :

$\mathcal{L}^\infty(0, T; M) = \{v : [0, T] \to M \mid v \text{ une fonction bornée}\}$.

$\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; M) = \left\{\zeta : \Omega \to M \mid \zeta \text{ une variable aléatoire } \mathcal{F}_T \text{ mesurable}, \mathbb{E}\left[\mid \zeta \mid^2\right] < \infty\right\}$

On considére l'EDSR linéaire contrôlé suivante :

$$\begin{cases} dY_t & = \left(A_t Y_t + B_t v_t + C_{1t} Z_{1t} + C_{2t} Z_{2t}\right) dt + Z_{1t} dW_{1t} + Z_{2t} dW_{2t}, \qquad t \in [0, T] \\ Y_T & = \zeta, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\zeta \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ et v un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ qui est le processus de contrôle. On définie l'ensemble des contrôle admissible par :

$V_{ad}[0,T] = \left\{ v : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^m \mid v \text{ est } \{\mathcal{F}_t^{w_1}\}_{t \geq 0} - \text{adapté et } \mathbb{E}\left[\int\limits_0^T \mid v_t \mid^2 dt\right] < \infty \right\}.$

Tout $v \in V_{ad}[0,T]$ est appelé un contrôle admissible.

Maintenant on donne les conditions sur lesquelle on va travailler :

H1) $A, C_1, C_2 \in \mathcal{L}^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times n}), B \in \mathcal{L}^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times m})$.

H2) $H, N_1, N_2 \in \mathcal{L}^\infty(0, T; S_+^n), R \in \mathcal{L}^\infty(0, T; \hat{S}_+^m), G \in S_+^n$

sous l'hypothèse H1) , le système dynamique (3.1)admet une unique solution $(Y, Z_1, Z_2) \in S^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}^n)$. La fonction de coût associé à notre problème de contrôle est prend la fome quadratique suivante :

$$J(v) = \frac{1}{2} E\left[Y_0^\top G Y_0 + \int\limits_0^T (Y_t^\top H_t Y_t + v_t^\top R_t v_t + Z_{1t}^\top N_{1t} Z_{1t} + Z_{2t}^\top N_{2t} Z_{2t}) dt\right], \tag{3.2}$$

notre problème de contrôle (LQ) est de trouvé $v^* \in V_{ad}[0,T]$ tel que :

$$J(v^*) = \inf_{v \in V_{ad}[0,T]} J(v), \tag{3.3}$$

tout $v^* \in V_{ad}[0,T]$ satisfaisant (3.3) est appelé un contrôle optimal.

Théorème 3.1.1 . *Si v^* un contrôle optimal du problème LQ et soit (Y^*, Z_1^*, Z_2^*) la solution associé à v^**

alors l'équation

$$\begin{cases} dX^* & = -\left(A^\top X^* + HY^*\right) dt - \left(C_1^\top X^* + N_1 Z_1^*\right) dW_1 - \left(C_2^\top X^* + N_2 Z_2^*\right) dW_2, \\ X_0^* & = -GY_0^* \end{cases} \tag{3.4}$$

admet une unique solution telle que

$$\mathbb{E}\left[R_t v_t^* + B_t^\top X_t^* \mid \mathcal{F}_t^{W_1}\right] = 0, \qquad t \in [0, T], \qquad a.s. \tag{3.5}$$

On introduit le système hamiltonien stochastique suivant :

$$\begin{cases} dY & = (AY + Bv + C_1 Z_1 + C_2 Z_2)\, dt + Z_1 dW_1 + Z_2 dW_2, \\ dX & = -\left(A^\top X + HY\right) dt - \left(C_1^\top X + N_1 Z_1\right) dW_1 - \left(C_2^\top X + N_2 Z_2\right) dW_2, \\ Y_T & = \zeta, \\ X_0 & = -GY_0, \\ & \mathbb{E}\left[R_t v_t + B_t^\top X_t \mid \mathcal{F}_t^{w_1}\right] = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Il s'agit d'une EDSPR couplé avec filtrage, la dernière équation de (3.6), est appelée condition de stationnarité.

Théorème 3.1.2 *Si* $(X^*, Y^*, Z_1^*, Z_2^*, v^*)$ *une solution du système hamiltonien stochastique*(3.6) *, alors* v^* *est un contrôle optimal.*

Preuve. Pour tout $v \in V_{ad}[0, T]$, et (Y, Z_1, Z_2) le processus d'état correspondant.et soit $\left(\widetilde{Y}, \widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2\right)$ un processus qui satisfait

$$\begin{cases} d\widetilde{Y} & = \left[A\widetilde{Y} + B(v - v^*) + C_1 \widetilde{Z}_1 + C_2 \widetilde{Z}_2\right] dt + \widetilde{Z}_1 dW_1 + \widetilde{Z}_2 dW_2 \ , \\ \widetilde{Y}_t & = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

par l'unicité de la solution d'une EDSR, posons $\widetilde{Y} = Y - Y^*, \widetilde{Z}_1 = Z_1 - Z_1^*, \widetilde{Z}_2 = Z_2 - Z_2^*$ .alors

$$J(v) - J(v^*) = \mathbb{E}\left[Y_0^{*\top} G\widetilde{Y}_0 + \int_0^T \left(Y^{*\top} H\widetilde{Y} + v^{*\top} R(v - v^*) + Z_1^{*\top} N_1 \widetilde{Z}_1 + Z_2^{*\top} N_2 \widetilde{Z}_2\right) dt\right] + \widetilde{J}, \tag{3.8}$$

où

$$\widetilde{J} = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\widetilde{Y}_0^\top G\widetilde{Y}_0 + \int_0^T \left(\widetilde{Y}^\top H\widetilde{Y} + (v - v^*)^\top R(v - v^*) + \widetilde{Z}_1^\top N_1 \widetilde{Z}_1 + \widetilde{Z}_2^\top N_2 \widetilde{Z}_2\right) dt\right]$$

Il est facile de voir que $\widetilde{J} \geq 0$ De plus, notons que $(X^*, Y^*, Z_1^*, Z_1^*, v^*)$ est une solution du système hamiltonien stochastique(3.6) . En appliquant la formule d'Itô à $\langle X^*, \widetilde{Y}\rangle$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y_0^{*\top} G\widetilde{Y}_0\right] &= -\mathbb{E}\left[X_0^*, \widetilde{Y}_0\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle A\widetilde{Y} + B(v - v^*) + C_1\tilde{Z}_1 + C_2\tilde{Z}_2, X^*\right\rangle dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle \widetilde{Y}, A^\top X^* + HY^*\right\rangle dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\left\langle v - v^*, B^\top X^*\right\rangle - \left\langle \widetilde{Y}, HY^*\right\rangle - \left\langle \widetilde{Z}_1, N_1 Z_1^*\right\rangle - \left\langle \widetilde{Z}_2, N_2 Z_2^*\right\rangle\right) dt\right],
\end{aligned} \tag{3.9}$$

combinant (3.8) et (3.9) , on trouve que

$$J(v) - J(v^*) = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle v - v^*, Rv^* + B^\top X^*\right\rangle dt\right] + \widetilde{J}. \tag{3.10}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle v - v^*, Rv^* + B^\top X^*\right\rangle dt\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T \mathbb{E}\left[\left\langle v_t - v_t^*, R_t v_t^* + B_t^\top X_t^*\right\rangle \mid F_t^{W_1}\right] dt\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle v - v_t^*, \mathbb{E}\left[R_t v_t^* + B_t^\top X_t^* \mid \mathcal{F}_t^{W_1}\right]\right\rangle\right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ensuite,

$$J(v) - J(v^*) = \widetilde{J} \geq 0, \tag{3.12}$$

ce qui implique que v^* est un contrôle optimal. ■

3.2 Solvabilité du système hamiltonien stochastique :

Dans cette section, nous utilisons la méthode de découplage donnée par Ma et Yong [10] pour résoudre notre système hamiltonien (3.6), qui est un EDSPR avec filtrage Pour la simplicité de notation ; on note par $\hat{\beta}_t = \mathbb{E}\left[\beta t \mid \mathcal{F}_t^{W_1}\right]$. Pour être précis, on suppose que

$$Y = \Theta \widehat{X} + \varphi, \tag{3.13}$$

où Θ est une fonction matricielle différentielle et déterministe de condition terminale $\Theta_T = 0$, et φ un processus stochastique qui satisfaisant l'EDSR

$$\begin{cases} d\varphi &= \lambda dt + \eta_1 dW_1 + \eta_2 dW_2, \\ \varphi_T &= \zeta, \end{cases} \tag{3.14}$$

λ, η_1 et η_2 des processus adapté. On applique la technique utilisé par Jie Xiong [11] on trouve que

$$\begin{cases} d\widehat{X} &= -\left(A^\top \widehat{X} + H\hat{Y}\right) dt - \left(C_1^\top \widehat{X} + N_1 \hat{Z}_1\right) dW_1, \\ \widehat{X}_0 &= -G\hat{Y}_0. \end{cases} \tag{3.15}$$

En appliquant la formule d'Itô à (3.13) , il result que

$$\begin{aligned} 0 &= dY - \dot{\Theta}\widehat{X}dt - \Theta d\widehat{X} - d\varphi \\ &= \left(AY + Bv + C_1Z_1 + C_2Z_2\right)dt + Z_1dW_1 + Z_2dW_2 \\ &-\dot{\Theta}\widehat{X}dt + \Theta\left(A^{\top}\widehat{X} + H\widehat{Y}\right)dt \\ &+\Theta\left(C_1^{\top}\widehat{X} + N_1\widehat{Z}_1\right)dW_1 - \lambda dt - \eta_1 dW_1 - \eta_2 dW_2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

ceci implique que

$$\begin{cases} AY - BR^{-1}B^{\top}\widehat{X} + C_1Z_1 + C_2Z_2 - \dot{\Theta}\widehat{X} + \Theta\left(A^{\top}\widehat{X} + H\widehat{Y}\right) - \lambda & = 0, \\ Z_1 + \left(C_1^{\top}\widehat{X} + N_1\widehat{Z}_1\right) - \eta_1 = 0, \\ Z_2 - \eta_2 = 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

Si on suppose que $I + \Theta N_1$ est inversible, alors

$$\begin{cases} Z_1 & = \eta_1 + \hat{\eta}_1 + \left(I + \Theta N_1\right)^{-1}\left(\hat{\eta}_1 - \Theta C_1^{\top}\widehat{X}\right), \\ Z_2 & = \eta_2. \end{cases} \tag{3.18}$$

En remplaçant (3.13) et (3.18) dans la première équation de(3.17), on obtient

$$\begin{aligned} &A\left(\Theta\widehat{X} + \varphi\right) - BR^{-1}B^{\top}\widehat{X} + C_1\left(\eta_1 - \hat{\eta}_1\right) + C_1\left(I + \Theta N_1\right)^{-1}\left(\hat{\eta}_1 - \Theta C_1^{\top}\widehat{X}\right) \\ &+C_2\eta_2 + \dot{\Theta}\widehat{X} + \Theta A^{\top}\widehat{X} + \Theta H\left(\Theta\widehat{X} + \hat{\varphi}\right) - \lambda = 0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

alors Θ satisfait l'équation de Riccati suivante :

$$\begin{cases} \dot{\Theta} - \Theta A^{\top} - \Theta A - \Theta H\Theta + BR^{-1}B^{\top} + C_1\left(I + \Theta N_1\right)^{-1}\Theta C_1^{\top} & = 0, \\ \Theta_T = 0, \end{cases} \tag{3.20}$$

et φ satisfait l' edsr

$$\begin{cases} d\varphi & = \left[A\varphi + \Theta H\hat{\varphi} + C_1\left(\eta_1 - \hat{\eta}_1\right) + C_1\left(I + \Theta N_1\right)^{-1}\hat{\eta}_1 + C_2\eta_2\right]dt + \eta_1 dW_1 + \eta_2 dW_2, \\ \varphi_T & = \zeta. \end{cases} \tag{3.21}$$

Pour donner une représentation de feedback de notre contrôle optimal nous adoptons la conjecture que

$$X = -\Gamma_1\left(Y - \widehat{Y}\right) - \Gamma_2\widehat{Y} - \Psi, \tag{3.22}$$

où Γ_1 et Γ_2 sont des fonctions matricielles différentielles et déterministes avec les conditions initiales $\Gamma_{10} = G$ et $\Gamma_{20} = G$ respectivement ; Ψ un processus stochastique qui satisfait l'eds

$$\begin{cases} d\Psi & = \alpha_0 dt + \alpha_1 dW_1 + \alpha_2 dW_2, \\ \Psi_0 & = 0, \end{cases} \tag{3.23}$$

où α_0, α_1et α_2 sont processus adapté. Notons que

$$\begin{cases} d\widehat{Y} & = \left(A\widehat{Y} - BR^{-1}B^\top + C_1\widehat{Z}_1 + C_2\widehat{Z}_2\right)dt + \widehat{Z}_1 dW_1, \\ \widehat{Y}_T & = \hat{\zeta}, \end{cases} \tag{3.24}$$

où $\hat{\zeta} = \mathbb{E}\left[\zeta \mid \mathcal{F}_T^{W_1}\right]$. alors,

$$\begin{cases} d\left(Y - \widehat{Y}\right) & = \left[A\left(Y - \widehat{Y}\right) + C_1\left(Z_1 - \widehat{Z}_1\right) + C_2\left(Z_2 - \widehat{Z}_2\right)\right]dt \\ & \quad + \left(Z_1 - \widehat{Z}_1\right)dW_1 + Z_2 dW_2, \\ Y_T - \widehat{Y}_T & = \zeta - \hat{\zeta} \end{cases} \tag{3.25}$$

En appliquant la formule Itô à(3.22), on obtient

$$\begin{aligned}
0 \quad &= dX + \dot{\Gamma}_1 \left(Y - \widehat{Y}\right) dt + \Gamma_1 d \left(Y - \widehat{Y}\right) + \dot{\Gamma}_2 \widehat{Y} dt + \Gamma_2 d\widehat{Y} + d\Psi \\
&= -\left(A^\top X + HY\right) dt - \left(C_1^\top X + N_1 Z_1\right) dW_1 \\
&- \left(C_2^\top X + N_2 Z_2\right) dW_2 + \dot{\Gamma}_1 \left(Y - \hat{Y}\right) dt \\
&+ \Gamma_1 \left[A \left(Y - \widehat{Y}\right) + C_1 \left(Z_1 - \widehat{Z}_1\right) + C_2 \left(Z_2 - \widehat{Z}_2\right)\right] dt \\
&+ \Gamma_1 \left(Z_1 - \widehat{Z}_1\right) dW_1 + \Gamma_1 Z_2 dW_2 + \dot{\Gamma}_2 \widehat{Y} dt \\
&+ \Gamma_2 \left(A\widehat{Y} - BR^{-1}B^\top \widehat{X} + C_1 \widehat{Z}_1 + C_2 \widehat{Z}_2\right) dt \\
&+ \Gamma_2 \widehat{Z}_1 dW_1 + \alpha_0 dt + \alpha_1 dW_1 + \alpha_2 dW_2,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

qui nous donne

$$\begin{aligned}
&-\left(A^\top X + HY\right) + \dot{\Gamma}_1 \left(Y - \widehat{Y}\right) + \\
&+ \Gamma_1 \left[A \left(Y - \widehat{Y}\right) + C_1 \left(Z_1 - \widehat{Z}_1\right) + C_2 \left(Z_2 - \widehat{Z}_2\right)\right] \\
&+ \Gamma_2 \widehat{Y} + \Gamma_2 \left(A\hat{Y} - BR^{-1}B^\top \widehat{X} + C_1 \widehat{Z}_1 + C_2 \widehat{Z}_2\right) + \alpha_0 &&= 0, \\
&-\left(C_1^\top X + N_1 Z_1\right) + \Gamma_1 \left(Z_1 - \widehat{Z}_1\right) + \Gamma_2 \widehat{Z}_1 + \alpha_1 &&= 0, \\
&-\left(C_2^\top X + N_2 Z_2\right) + \Gamma_1 Z_2 + \alpha_2 &&= 0.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Supposant que $I + \Gamma_2 \Theta$ est inversible, on trouve que

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha_1 \quad &= \left(N_1 - \Gamma_1\right)\left(\eta_1 - \hat{\eta}_1\right) + \left(N_1 - \Gamma_2\right)\left(I + \Theta N_1\right)^{-1} \left[\hat{\eta}_1 + \Theta C_1^\top \left(I + \Gamma_2 \Theta\right)^{-1} \left(\Gamma_2 \hat{\varphi} + \hat{\Psi}\right)\right] \\
&- C_1^\top \Gamma_1 \left(\varphi - \hat{\varphi}\right) - C_1^\top \left(\Psi - \hat{\Psi}\right) - C_1^\top \left(I + \Gamma_2 \Theta\right)^{-1} \left(\Gamma_2 \hat{\varphi} + \hat{\Psi}\right), \\
\alpha_2 \quad &= \left(N_2 - \Gamma_1\right) \eta_2 - C_2^\top \Gamma_1 \left(\varphi - \hat{\varphi}\right) - C_2^\top \left(\Psi - \hat{\Psi}\right) - C_2^\top \left(I + \Gamma_2 \Theta\right)^{-1} \left(\Gamma_2 \hat{\varphi} + \hat{\Psi}\right).
\end{aligned}\right. \tag{3.28}$$

De plus, il découle de (3.18) et (3.22) que

$$
\begin{aligned}
& A_1^\top \Gamma_1 \left(Y-\widehat{Y}\right)+A^\top \Gamma_2 \widehat{Y}+A^\top \Psi-HY+\dot{\Gamma}_1\left(Y-\widehat{Y}\right) \\
& +\Gamma_1 A\left(Y-\widehat{Y}\right)+\Gamma_1 C_1\left(\eta_1-\hat{\eta}_1\right)+\Gamma_2 C_2\left(\eta_2-\hat{\eta}_2\right) \\
& +\dot{\Gamma}_2 \widehat{Y}+\Gamma_2 A \widehat{Y}+\Gamma_2 B R^{-1} B^\top+\left(\Gamma_2 \widehat{Y}+\hat{\Psi}\right) \\
& +\Gamma_2 C_1\left(I+\Theta N_1\right)^{-1}\left[\hat{\eta}_1+\Theta C_1^\top\left(\Gamma_2 \widehat{Y}+\hat{\Psi}\right)\right]+\Gamma_2 C_2 \hat{\eta}_2+\alpha_0 \\
& =0,
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{\Gamma}_1+\Gamma_1 A+A^\top \Gamma_1-H & =0, \\
\Gamma_{10}=G,
\end{cases} \tag{3.30}
$$

$$
\begin{cases}
\dot{\Gamma}_2+\Gamma_2 A+A^\top \Gamma_2+\Gamma_2 B R^{-1} B^\top \Gamma_2+\Gamma_2 C_1\left(I+\Theta N_1\right)^{-1} \Theta C_1^\top \Gamma_2-H & =0, \\
\Gamma_{20}=G,
\end{cases} \tag{3.31}
$$

et

$$
\begin{aligned}
d\Psi = & -\left[A^\top \Psi+\Gamma_2 B R^{-1} B^\top \hat{\Psi}+\Gamma_2 C_1\left(I+\Theta N_1\right)^{-1}\left(\hat{\eta}_1+\Theta C_1^\top \hat{\Psi}\right)\right. \\
& \left.+\Gamma_2 C_2 \hat{\eta}_2+\Gamma_1 C_1\left(\eta_1-\hat{\eta}_1\right)+\Gamma_1 C_2\left(\eta_2-\hat{\eta}_2\right)\right] dt \\
& \left\{\left(N_1-\Gamma_1\right)\left(\eta_1-\hat{\eta}_1\right)-C_1^\top \Gamma_1(\varphi-\hat{\varphi})-C_1^\top\left(\Psi-\hat{\Psi}\right)\right. \\
& +\left(N_1-\Gamma_2\right)\left(I+\Theta N_1\right)^{-1}\left[\hat{\eta}_1+\Theta C_1^\top\left(I+\Gamma_2 \Theta\right)^{-1}\left(\Gamma_2 \hat{\varphi}+\hat{\Psi}\right)\right] \\
& \left.-C_1^\top\left(I+\Gamma_2 \Theta\right)^{-1}\left(\Gamma_2 \hat{\varphi}+\hat{\Psi}\right)\right\} dW_1 \\
& \left\{\left(N_2-\Gamma_1\right) \eta_2-C_2^\top\left[\Gamma_1(\varphi-\hat{\varphi})+\left(\Psi-\hat{\Psi}\right)\right]\right. \\
& \left.-C_2^\top\left(I+\Gamma_2 \Theta\right)^{-1}\left(\Gamma_2 \hat{\varphi}+\hat{\Psi}\right)\right\} dW_2, \\
\Psi_0 = & \ 0.
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

Une fois $\Theta, \Gamma_1, \Gamma_2$ et la solution $(\varphi, \eta_1, \eta_2)$ de(3.21) sont connues, la solvabilité de (3.32) sera obtenue immédiatement.

3.3 Représentation explicite du contrôle optimale et du coût optimal

Dans cette section on cherche a donné des formules explicites de contrôle optimal et de coût optimal en termes d'équations de Riccati(3.20), (3.30),(3.31), EDSR (3.21) et EDS (3.32). Eq(3.21) est une EDSR linéaire avec filtrage,il s'ensuit qui admet une solution unique $(\varphi, \eta_1, \eta_2) \in S^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(0,T;\mathbb{R}^n)$.

On donne maintenant le théorème qui spécifie la solvabilité du système hamiltonien stochastique(3.6) et la relation entre les solutions des composante.

Théorème 3.3.1 *Sous les hypothèses H1)-H2), le système hamiltonien stochastique*(3.6) *admet une unique solution* (X, Y, Z_1, Z_2, v) *.De plus on a les relations suivantes*

$$\begin{cases} Y & = \Theta\widehat{X} + \varphi, \\ Z_1 & = \eta_1 - \hat{\eta}_1 + (I + \Theta N_1)^{-1}\left(\hat{\eta}_1 - \Theta C_1^{\top}\widehat{X}\right), \\ Z_2 & = \eta_2, \\ v & = -R^{-1}B^{\top}\widehat{X}, \\ Y_0 & = (I + \Theta_0 G)^{-1}\varphi_0 \end{cases} \tag{3.33}$$

où Θ *et* $(\varphi, \eta_1, \eta_2)$ *les solutions de* (3.20) *et* (3.21,) *respectivement*

On donne maintenent le théorème principal de cette section.

Théorème 3.3.2 *.Supposons que les hypothèses H1)-H2) sont vérifions et* $\zeta \in L^2_{\mathcal{F}_t}(\Omega; R^n)$ *et soient* $\Theta, \Gamma_1, \Gamma_2$ *les solutions des équations de Riccati*(3.20) , (3.30) *et*(3.31)*, respectivement,* $(\varphi, \eta_1, \eta_2)$ *et* Ψ *les solutions de*(3.21) *et* (3.32)*,respectivement alors l'EDSR avec filtrage*

$$\begin{cases} dY &= \left(AY + BR^{-1}B^{\top}\Gamma_2\widehat{Y} + BR^{-1}B^{\top}\hat{\Psi} + C_1Z_1 + C_2Z_2\right)dt + Z_1dW_1 + Z_1dW_1, \\ Y_t &= \zeta. \end{cases} \tag{3.34}$$

admet une unique solution (Y, Z_1, Z_2)*.En définissant*

$$\begin{cases} X &= -\Gamma_1\left(Y - \widehat{Y}\right) - \Gamma_2\widehat{Y} - \Psi, \\ v &= R^{-1}B^{\top}\Gamma_2 + R^{-1}B^{\top}\widehat{\Psi}, \end{cases} \tag{3.35}$$

le cinq-uplet (X, Y, Z_1, Z_2, v) *est la solution de l' EDSPR*(3.6) *et* v *le contrôle optimal du problème LQ. Le coût optimal correspondant est*

$$\begin{aligned} J(v) = {} & \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left\langle \widehat{\zeta}, \sum\nolimits_T \widehat{\zeta}\right\rangle\right] \qquad (3.36) \\ & + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\langle H\varphi, \varphi\rangle - \langle\hat{\varphi}, H\hat{\varphi}\rangle + \left\langle \left[N_1(I + \Theta N_1)^{-1} - \sum\right]\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_1\right\rangle\right)dt\right] \\ & + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\langle N_1(\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_1), \eta_1 - \hat{\eta}_1\rangle + \langle N_2\eta_2, \eta_2\rangle\right)dt\right] \\ & - \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle \hat{\varphi}, \sum\left(C_1(I + \Theta N_1)^{-1}\hat{\eta}_1 + C_2\hat{\eta}_2\right)\right\rangle dt\right], \end{aligned}$$

où $\sum$ *est la solution de*

$$\begin{cases} \dot{\sum} + \sum(A + \Theta H) + (A + \Theta H)^{\top}\sum - H &= 0, \\ \sum_0 = G(I + \Theta_0 G)^{-1}. \end{cases} \tag{3.37}$$

Preuve. En substituant(3.13), (3.18) dans la fonction de coût,on trouve que

$$
\begin{aligned}
J(v) &= \tfrac{1}{2}\left\langle G\left(I+\Theta_0 G\right)^{-1}\varphi_0,\left(I+\Theta_0 G\right)^{-1}\varphi_0\right\rangle+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\langle \Theta\widehat{X}+\varphi, H\left(\Theta\widehat{X}+\varphi\right)\right\rangle dt\right] \\
&+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\langle R^{-1}B^{\top}\widehat{X},B^{\top}\widehat{X}\right\rangle dt\right]+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\langle \eta_2,N_2\eta_2\right\rangle dt\right] \\
&+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\langle \eta_1-\hat{\eta}_1+\left(I+N_1G\right)^{-1}\left(\hat{\eta}_1-\Theta C_1^{\top}\widehat{X}\right)\right.\right. \\
&\left.\left. N_1\left[\eta_1-\hat{\eta}_1+\left(I+N_1G\right)^{-1}\left(\hat{\eta}_1-\Theta C_1^{\top}\widehat{X}\right)\right]\right\rangle dt\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\left\langle G\left(I+\Theta_0 G\right)^{-1}\varphi_0,\left(I+\Theta_0 G\right)^{-1}\varphi_0\right\rangle \\
&+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T\left\langle \widehat{X},\left[\Theta H\Theta+BR^{-1}B^{\top}+C_1\left(I+\Theta_0 G\right)^{-1}\Theta N_1\Theta\left(I+\Theta_0 G\right)^{-1}C_1^{\top}\right]\widehat{X}\right\rangle dt\right] \\
&+\tfrac{1}{2}\ \mathbb{E}\left[\int_0^T\left\langle \Theta H\varphi,\widehat{X}\right\rangle dt\right]-\ \mathbb{E}\left[\int_0^T\left\langle \eta_1-\hat{\eta}_1+\left(I+\Theta N_1\right)^{-1}\hat{\eta}_1,N_1\left(I+\Theta N_1\right)^{-1}\Theta C_1^{\top}\widehat{X}\right\rangle dt\right] \\
&+\tfrac{1}{2}\ \mathbb{E}\left[\int_0^T\left\langle \eta_1-\hat{\eta}_1+\left(I+\Theta N_1\right)^{-1}\hat{\eta}_1,N_1\left[\eta_1-\hat{\eta}_1+\left(I+\Theta N_1\right)^{-1}\hat{\eta}_1\right]\right\rangle dt\right] \\
&+\tfrac{1}{2}\ \mathbb{E}\left[\int_0^T\left(\left\langle \eta_2,N_2\eta_2\right\rangle+\left\langle \varphi,H\varphi\right\rangle\right)dt\right].
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

On aplique la formule d'Itô à $\left\langle \widehat{X}, \Theta\widehat{X} \right\rangle$, on trouve que

$$\begin{aligned}
&\left\langle (I+G\Theta_0)^{-1} G\varphi_0, \Theta_0 (I+G\Theta_0)^{-1} G\varphi_0 \right\rangle \qquad (3.39)\\
&= -\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle \widehat{X}, \Theta\left[(A+\Theta H)^\top \widehat{X} + Q\hat{\varphi}\right]\right\rangle dt\right] - \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle (A+\Theta H)^\top \widehat{X} + H\hat{\varphi}, \Theta\widehat{X}\right\rangle dt\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle \widehat{X}, \left(\Theta A^\top + A\Theta + \Theta H\Theta - BR^{-1}B^\top - C_1 (I+\Theta N_1)^{-1} \Theta C_1^\top\right) \widehat{X}\right\rangle dt\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle (I+N_1\Theta)^{-1} C_1^\top \widehat{X} + N_1 (I+\Theta N_1)^{-1} \hat{\eta}_1, \right.\right.\\
&\left.\left.\Theta\left[(I+N_1\Theta)^{-1} C_1^\top \widehat{X} + N_1 (I+\Theta N_1)^{-1} \hat{\eta}_1\right]\right\rangle dt\right]\\
&= -\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle \widehat{X}, \left[\Theta H\Theta + BR^{-1}B^\top + C_1 (I+\Theta N_1)^{-1} \Theta N_1 \Theta (I+N_1\Theta)^{-1} C_1^\top\right] \widehat{X}\right\rangle dt\right]\\
&+ \mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle N_1 (I+\Theta N_1)^{-1} \hat{\eta}_1, \Theta N_1 (I+\Theta N_1)^{-1} \hat{\eta}_1 \right\rangle dt\right]\\
&+ 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle (I+N_1\Theta)^{-1} C_1^\top \widehat{X}, \Theta N_1 (I+\Theta N_1)^{-1} \hat{\eta}_1 \right\rangle dt\right] - 2\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\langle \Theta H\hat{\varphi}, \widehat{X}\right\rangle dt\right].
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
J(v) &= \frac{1}{2}\left\langle (I+G\Theta_0)^{-1} G\varphi_0, \varphi_0 \right\rangle + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \langle H\varphi, \varphi\rangle\, dt\right] \qquad (3.40)\\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\left\langle N_1 (I+\Theta N_1)^{-1} \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right\rangle + \langle N_1 (\eta_1 - \hat{\eta}_1), \eta_1 - \hat{\eta}_1\rangle + \langle N_2\eta_2, \eta_2\rangle\right) dt\right].
\end{aligned}$$

En rappelant que φ satisfait (3.21) et la formule Itô appliquée à $(\hat{\varphi}, \sum \hat{\varphi})$ va nous donne que,

$$\begin{aligned}\left\langle \left(I+G\Theta_0\right)^{-1}G\varphi_0,\varphi_0\right\rangle &= \mathbb{E}\left[\hat{\zeta},\textstyle\sum_T\hat{\zeta}\right]\\ &-\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T\left(\langle\hat{\varphi},H\hat{\varphi}\rangle+\langle\hat{\eta}_1,\textstyle\sum\hat{\eta}_1\rangle\right)dt\right]-2\\ &\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T\left\langle\hat{\varphi},\textstyle\sum\left[C_1\left(I+\Theta N_1\right)^{-1}\hat{\eta}_1+C_2\hat{\eta}_2\right]\right\rangle dt\right].\end{aligned}\tag{3.41}$$

on obtien que

$$\begin{aligned}J\left(v\right) &= \tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\hat{\zeta},\textstyle\sum_T\hat{\zeta}\right]+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^T\langle H\varphi,\varphi\rangle-\langle\hat{\varphi},H\hat{\varphi}\rangle\right.\right.\\ &\left.\left.+\left\langle\left[N_1\left(I+\Theta N_1\right)^{-1}-\textstyle\sum\right]\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_1\right\rangle\right)dt\right]\\ &+\tfrac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T\left(\langle N_1\left(\eta_1-\hat{\eta}_1\right),\eta_1-\hat{\eta}_1\rangle+\langle N_2\eta_2,\eta_2\rangle\right)dt\right]\\ &-\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T\left\langle\hat{\varphi},\textstyle\sum\left(C_1\left(I+\Theta N_1\right)^{-1}\hat{\eta}_1+C_2\hat{\eta}_2\right)\right\rangle\right]\end{aligned}\tag{3.42}$$

ce qui achève la preuve. ■

Bibliographie

[1] A.E.B. Lim, X. Zhou, Linear-quadratic control of backward stochastic differential equation

[2] B. Oksendal, Stochastic Differential Equations : an Introduction with Appli cations, sixth ed., Springer-Verlag, New York, 2005

[3] E. Pardoux, S. Peng, Adapted solution of a backward stochastic differentia-lequation, Syst. Control Lett. 14 (1) (1990) 55ñ61.

[4] .E. Karoui, S. Peng, M.C. Quenez, Backward stochastic differential equation in finance, Math. Financ[13] A.E.B. Lim, X. Zhou, Linear-quadratic controlof backward stochastic differential equations, SIAM J. Control Optim. 40 (2) (2001) 450-474.

[5] G. Wang, H. Xiao, G. Xing, An optimal control problem for mean-field forward-backward stochastic differential equation with noisy observation,„Auto matica 86 (2017) 104-109.

[6] G. Wang, Z. Wu, J. Xiong, A linear-quadratic optimal control problem of forward-backward stochastic di§erential equations with partial information,IEEE Trans. Autom. Control 60 (11) (2015) 2904-2916

[7] G. Wang, Z. Wu, J. Xiong, An Introduction to Optimal Control of FBSDE with Incomplete Information, Springer-Verlag, New York, 2018

[8] J. Huang, G. Wang, J. Xiong, A maximum principle for partial information backward stochastic control problems with applications, SIAM J. ControlOp tim. 48 (4) (2009) 2106-2117.

[9] J.M. Bismut, An introductory approach to duality in optimal stochastic control, SIAM Rev. 20 (1) (1978) 62-78

[10] J. Ma, J. Yong, Forward-backward stochastic differential equations and their applications, Lecture Notes in Math, Springer-Verlag, New York, 1999.

[11] J. Xiong, An Introduction to Stochastic Filtering Theory, Oxford University Press, London, 2008.

[12] J. Yong, X. Zhou, Stochastic Controls : Hamiltonian Systems and HJB Equa tions, Springer-Verlag, New York, 1999..

[13] K. Du, J. Huang, Z. Wu, Linear quadratic mean-Öeld-game of backward sto chastic differential , Math. Control Relat. Fields 8 (2018) 653-678.

[14] R.S. Liptser, A.N. Shiryayev, Statistics of Random Processes, Springer Verlag, New York, 1997.

[15] Wang, G., Wang, W., & Yan, Z. (2021). Linear quadratic control of backward stochastic di§erential equation with partial information. Applied Mathema tics and Computation, 403, 126164

[16] X. Li, J. Sun, J. Xiong, Linear quadratic optimal control problems formean-field backward stochastic differential equations, Appl. Math. Optim.80 (2019)223-250.

[17] Z. Wu, A maximum principle for partially observed optimal control of forward-backward stochastic control systems, Sci. China Inf. Sci. 53 (11)(2010)2205-2214.