République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathématiques Appliquées**"

Option :**Probabilité**

Par

Badri Maroua

Titre :

Sur quelques lois de probabilité (discrète et continue)

Devant le Jury :

Dr.	**LABED Boubakeur**	U. Biskra	**Président**
Dr.	**MANSOURI Badereddine**	U. Biskra	**Encadreur**
Dr.	**ZAGHDODI Kadhem**	U. Biskra	**Examinatrice**

Soutenu Publiquement le …../06/2022

Dédicace

Je dédiece simple travail

Mes chers parents que dieu lui accorde une longue vie

A toutes mes soeurs et mes fréres

A toute ma précieuse famille

A mes cheres amis

A toute la promotion de mathématique

Badri Maroua

Remerciements

Je remercie dieu tout puissant de m'avoir donné la forces, le courage et patience d'arrivé finir mon mémoirem.Je tiens tout particulièrement à remercier Dr. **Mansouri Badereddine**

qui a encadré mon travail, qu'il toujours montré à l'écoute et disponible tout au long de la réalisation de se mémoire, ainsi pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer.

Un grand mercu également pour les membres du jury les docteurs **Labed Boubakeur** et **Zaghdodi Kadhem** qui m'ont fait l'honneur d'évaluer ce travail .Je présente tous mes remerciements aux enseignants du départements -MATH- sans exceptions qui ont contribué à ma formation, ainsi que tous ce qui m'ont soutenue et m'ont aidée tout le long de cette étude

et toutes les personnes qui ont contribué directement ou indirectement à ce travail et à tous ceux qui ont montré et disposé à mes questionnements.

Je remercie toute ma famille pour leur soutien morall et leur aide.

Notations et symbols

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	:	Espace de probabilité.
$\mathbb{R}$	:	Ensembles des nombres réels.
$E(.)$	:	Espérence mathématique
$Var(.)$	:	Variance mathématique
$\sigma(.)$	:	L'écarte-type
$Q\alpha(.)$	:	Quantile d'ordre α
$Var(.)$	:	Variance mathématique
$Fx\,(.)$	:	Fonction de répartition
F_n	:	fonction de répartition empirique
$B(\pi)$	:	distribution Bernouli de paramètre π
$B(n,p)$	:	distribution binomial de paramètre n et p
$Hg(N,n,p)$	:	distribution hypergéométrique de paramètre N, n et p
$N(\mu;\sigma)$	:	distribution Normale de paramètre μ et σ
$U\,[a,b]$	:	distribution uniforme de paramètre a et b
$Exp\,(b)$	:	distribution exponentielle de paramètre b
$G(a;b)$	:	distribution gamma avec paramètres a et b
χ^2_d	:	distribution khi-deux à d degrés de liberté
T_d	:	distribution de Student à d degrés de liberté
$F_{m,k}$	:	distribution de Fisher à m et n degrés de liberté
$Po(\lambda)$	:	distribution de Poisson de paramètre λ
$Erl(a;b)$	:	distribution Erlang de paramètre a et b

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Introduction

Les probabilités et les statistiques sont des sujets fascinants sur l'interface entre les mathématiques et les sciences appliquées qui nous aident à comprendre et à résoudre des problèmes pratiques. Nous croyons que vous, en apprenant comment se produisent les méthodes stochastiques et ce qui fonctionne, serez en mesure de comprendre les sens des déclarations statistiques ainsi que de juger de la qualité de leur contenu, lorsque vous faites face à de tels problèmes par vous-même . Notre philosophie est celle du comment et du pourquoi : au lieu de présenter des méthodes stochastiques comme des recettes de livres de cuisine,nous préférons expliquer les principes qui les sous-tendent. Dans ce mémoire, vous trouverez les bases de la théorie des probabilités et des statistiques. En outre, il y a plusieurs sujets qui vont un peu au-de là des bases, mais qui devrait être présent dans un cours d'introduction : la simulation, le processus de poisson, la loi des grands nombres, et le théorème de limite centrale. Les ordinateurs ont apporté de nombreux changements dans les statistiques. En particulier, le boots rap a gagnée sa place. Il permet de calculer des intervalles de confiance et d'effectuer des tests d'hypothèses lorsque les méthodes traditionnelles (approximation normale ou grand échantillon) ne sont pas appropriées. Nous croyons que c'est un outil moderne et utile. Les exemples et les ensembles de données de cet ouvrage proviennent principalement de situations réelles, du moins c'est ce que nous avons cherché dans le but de les utiliser comme exemples élémentaires sait que c'est difficile : d'une part, vous ne voulez pas énoncer avec audace des hypothèses qui ne sont manifestement pas satisfaites ; d'autre part, de longues explications concernant des questions secondaires détournent l'attention des points principaux. Nous espérons que nous avons trouvé une bonne voie du milieu. le première cours de calcul est nécessaire comme une condition préalable pour ce mémoire. En plus de l'algèbre de lycée, certaines séries infinies sont utilisées (exponentielle, poisson). l'intégration et la différenciation sont les compétences les plus importantes, concernant principalement une variable (les exceptions, intégrales bidimentionnelles, sont rencontrées dans les chapitres.

Ce mémoire organiser comme suit : Première chapitre sur les espaces de probabilités, définitions de base et leur propritétés, deuxiéme chapitre les lois de probabilités, discrétes et continues et la dérnière chapitre les lois de convergences des variables aléatoires.

Chapitre 1

LES ESPACES PROBABILITES

1.1 Les variables aléatoires discrétes

Définition 1.1.1 *une variable aléatoireX est dite discréte si l'ensemble des valeurs qu'elle prend dans $\mathbb{R}$ est fini ou dénombrable .*

L'application X telle que $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ conduit à n valeur qui sont $(x_1, x_2, ..., x_n)$, n étant un entier nature.

Pour toute variable aléatoire, l'application X est t.q $\forall \omega \in \Omega$, l'ensemble des $X(\omega) \leq x$ est un événement. $\{X(\omega) \leq x\}$ correspond à $X = \{x_0, x_1, ..., x_i\}$ avec $x_i \leq x$. Donc cet événement s'écrit

$$\{X(\omega) \leq x\} = (X = x_0) \cup (X = x_1) \cup \cdots \cup (X = x_i) .$$

avec $x_i \leq x$.où $\{X(\omega) \leq x\} = \bigcup\limits_{i; x_i \leq x} (X = x_i)$

$F_X(X) = P(\{X \leq x_i\})$,peut s'écrire $F_X(X) = P\left(\bigcup\limits_{i; x_i \leq x} (X = x_i)\right)$.

D'aprés le théoréme des probabilités totales,dans le cas d'événement deux à deux incompatibles

$$F_x(X) = \sum P(X = x_i) = P(X = x_0) + P(X = x_1) + \cdots + P(X = x_i).$$

avec $x_{i\leq} x$

La fonction de répartition à un graphe en escalier

Exemple 1.1.1 *On jette deux dés parfaitement équilibrés.*

la variable aléatoire X =“somme des points obtenus”,est une variable aléatoire discréte car elle prend un nombre fini de valeurs.

On peut établir la loi de probabilité de X si on peut calculer $p_i = p(X = x_i)$.

$$P(X \leq 5) = 1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 = 10/36.$$

1.1.1 Espérance mathématique :

Définition 1.1.2 *Soit X une variable aléatoire discréte définie sur (Ω, φ, P)prenant ses valeur dans $\mathbb{R}$.L'espérance mathématique, ou moyenne(notées respectivement $E(X)$et x) est définie par :*

$$E(X) = x = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \text{ avec } pi = p(X = x_i).$$

Exemple 1.1.2 *On a*

$$E(X) = 1/36(2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12) = 252/36 = 7.$$

Propriété 1.1.1 *On a*

$$\begin{array}{cc}
E(K) = K & K = cte \in \mathbb{R}. \\
E(X+Y) = E(X) + E(Y) & X, Y \quad \text{difinis sur } \Omega. \\
\cdot E(KX) = KE(X) & K = cte \in \mathbb{R}. \\
\cdot E(X-Y) = E(X) - E(Y) & X, Y \text{ indépendants} \\
\cdot E(aX+b) = aE(X) + b & a, b \quad ctes \in \mathbb{R}.
\end{array}$$

Remarque 1.1.1 *L'espérance mahématique des écarts algébriques de la va à la valeur moyenne est :*$E(X - E(X))$ *.D'aprés les propriétés précédents,*$E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$. $Y = X - E(X)$ *est une va dite centrée car son espérance mathématique est nulle.*

1.1.2 Variance et écart -type

Définition 1.1.3 *:Soit* X *une variable aléatoire discréte prenant ses valeur dans* $\mathbb{R}$ *et* $E(X)$ *son espérnce mathématique ; la variance de* X *,note* $Var(X)$ *,est telle que*

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right].$$

Nous constatons qu'il s'agit de l'espérance mathématique des carrés des écarts de la variable aléatoire à sa moyenne .On parle aussi d'écart quadratique moyen (ou de moment centré d'ordre 2). La variance indique le degré de dispersion des valeurs de X par rapport à leur moyenne.

Exemple 1.1.3 *Variance de la somme des points obtenus lorsqu' on jette deux dés* $(E(X) = 7)$.

On effectue ensuite, colonne par colonne ,les produits$(X_i - E(X))^2 \cdot pi$*, que l'on* *somme pour obtenir la variance :*

$Var\left(X\right)=1/36\left(25+32+27+16+5+5+16+27+32+25\right)=210/36=5.83.$

Autre expression de la variance :

$$Var\left(X\right)=E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^2\right]=E\left[X^2+E\left(X\right)^2-2XE\left(X\right)\right].$$

$$Var\left(X\right)+E\left(X^2\right)+E\left[E\left(X\right)^2\right]-E\left[2XE\left(X\right)\right].$$

$$E\left(K\right)=\text{cte},\text{d}'\text{ou}$$

$$VarX=E\left(X^2\right)+E\left(X\right)^2-2E\left(X\right).E\left(X\right)=E\left(X^2\right)-E\left(X\right)^2.$$

donc

$$Var\left(X\right)=E\left[\left(X-E\left(X\right)\right)^2\right]=E\left(X^2\right)-E\left(X\right)^2.$$

Propriété 1.1.2 $\cdot Var\left(aX+b\right)=a^2Var\left(X\right)$, *$a$ et b sont des constantes réelles.* $\sigma^2\left(X\right)=Var\left(X\right)$ *et* $\sigma\left(X\right)$ *est l'écart-type :*

$$\begin{aligned}Var(X+Y)&=E\left[\left(X+Y-E\left(X+Y\right)\right)^2\right]\\&=E\left[\left(\left(X-E\left(X\right)\right)+\left(Y-E\left(Y\right)\right)\right)^2\right]\\&=Var\left(X\right)+Var\left(Y\right)+2\left[E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)\right]\\&=Var\left(X\right)+Var\left(Y\right)+2cov\left(X,Y\right).\end{aligned}$$

1.2 Le consept de variable aléatoire discrète

1.2.1 Définition de variable aléatoire discrète

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ l'ensemble fondamental des résultats d'une expérience aléatoire ayant une nombre fini de résultats.

Toute fonction X associant un nombre réel à chacun des éléments de Ω,c'est-à-dire $X : \Omega \to \mathbb{R}$, définit une variable aléatoire discrète.

1.2.2 Support d'une variable aléatoire discrète

On peut noter S_X l'image de la fonction, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable aléatoire discrète X. S_X est souvent appelé le support de la variable aléatoire X . Il s'agit d'un sous-ensemble de nombres réels ayant un nombre fini k d'éléments, où $k \leq n$. Nous conviendrons de toujours présenter les éléments de S_X de façon ordonnée : $S_X = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$,ou $X_1 < ... < X_n$

1.2.3 Distribution d'une variable aléatoire discrète

Les événements définis par $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \cdots, \{X = x_k\}$ forment une partition de Ω.On convient habituellement de noter par $P(X = x_i)$, ou par pi, la probabilité deréalisation de chacun des événements $\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \cdots, k$.On a : $p_i > 0$, pour $i = 1, 2, \cdots, k$,et $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. Les premières étapes de l'étude d'une telle variable aléatoire X consistent en

- l'identification de son supportl $S_X = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$.
- l'identification ou le calcul des valeurs de sa fonction de masse, ou fonction de

probabilité

$$P(X = x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_i \ i = 1, 2, \ldots, k \\ 0 & \text{si } x \notin S_x \end{cases}$$

Fonction de répartition

La fonction de répartition $F(x)$ d'une variable aléatoire X se définit par :

$$F(x) = P(X \leq x), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

$$X = \text{nombre total de jetons rouges obtenus alors des 3 prélèvements}$$

Le tableau qui suit permet d'identifier la distribution de X. Il utilise les résultats de calculs déjà présentés dans la solution du problème.

élément ω de Ω	$P(\{\omega\})$	valeur x prise par X	$p(X = x)$
(v, v, v)	$120/720 = 5/30$	0	$5/30 = 0.167$
(r, v, v) (v, r, v) (v, v, r)	$120/720 = 5/30$ $120/720 = 5/30$ $120/720 = 5/30$	1	$15/30 = 0.500$
(r, r, v) (r, v, r) (v, r, r)	$72/720 = 3/30$ $72/720 = 3/30$ $72/720 = 3/30$	2	$9/30 = 0.300$
(r, r, r)	$24/720 = 1/30$	3	$1/30 = 0.033$

TAB. 1.1 – Tableau de probabilité

On combine souvent les résultats de ces 2 étapes en présentant la distribution de la variable aléatoire discrète étudiée à l'aide d'un tableau de la forme :

Considérons l'expérience aléatoire définie au problème et définissons la variable aléatoire Xpar : $X =$ nombre total de jetons rouges obtenus lors des 3prélèvements. Le tableau qui suit permet d'identifier la distribution de X. Il utilise les résultats

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

Tab. 1.2 – Tableau de probabilité

de calculs déjà présentés dans la solution du problème

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
$P(X = x)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k

Tab. 1.3 – Tableau de probabilité

1.2.4 Équation et graphe de la fonction de répartition

Lorsque la variable aléatoire étudiée est discrète et que son support est de la forme

$$\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, \text{ou } X_1 < X_2 < \cdots < X_n.$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < X_1 \\ F_i & \sum_{m=1}^{i} P(X = x_m) \text{ si } x_i \leq x < x_{i+1}, \text{ où } i \in \{1, 2, \cdots, k-1\} \\ 1 & \text{si } X \geq X_k \end{cases}$$

Dans un tel cas, on obtient un graphe en escalier comportant $k+1$ paliers.

1.3 Espérence,variance et écarte-type

1.3.1 Espérance de X

On définit l'espérance de X par :

$$E(X) = \sum_{x \in S_x} x P(X = x) \text{ ou } E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i.$$

Espérance d'une fonction réelle de X

Soit g une fonction réelle quelconque

$$E[g(X)] = \sum_{x \in S_x} g(x) P(X = x) \text{ ou } E[g(X)] = \sum_{i=1}^{k} p_i g(x_i).$$

Soit g et h les fonctions réelles définies par

$$g(x) = x^2 \text{ et } h(x) = (x - 1.2)^2.$$

Soit X la variable aléatoire étudiée dans l'exemple qui précède

$$\begin{aligned}
E[g(X)] &= E(X^2) = \sum g(X)P(X = x) = \sum x^2 P(X = x) \\
&= (0^2 \times 5/30) + (1^2 \times 15/30) + (2^2 \times 9/30) + (3^2 \times 1/30) \\
E[h(X)] &= E[(X - 1.2)^2] = \sum h(X)P(X = x) = \sum (X - 1.2)^2 P(X = x) \\
&= [(0 - 1.2)^2 \times 5/30] + [(1 - 1,2)^2 \times 15/30] \\
&+ [(2 - 1.2)^2 \times 9/30] + [(3 - 1.2)^2 \times 1/30 \\
&= 0.56.
\end{aligned}$$

Variance de X

On définit la variance de X par $Var(X) = E\left([X - E(X)]^2\right).$

On peut démontrer que $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2.$

Ecart type de X

On définit l'écart-type de X par $\sigma(X) = \sqrt{var(X)}.$

Soit X la variable aléatoir étudier dans les 2 exemples qui précédent.

X	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

TAB. 1.4 – Tableau de probabilité 3

Dans l'exemple précedent nous avons déjà calculer l'espérence de X

$$E(X) = 0 \times 5/30) + (1 \times 15/30) + (2 \times 9/30) + (3 \times 1/30) = 1.2.$$

pour calculer variance de X, on peut procéder de 2 façons.

– On peut utiliser la formule $Var(X) = E\left([X - E\left(X\right)]^2\right) = E\left([X - 1.2]^2\right).$

Il s'agit d'un calcul déjà effectué dans l'exemple

$$\begin{aligned} Var(X) &= \left[(0-1.2)^2 \times 5/30\right] + \left[(1-1.2)^2 \times 15/30\right] \\ &+ \left[(2-1.2)^2 \times 9/30\right] + \left[(3-1.2)^2 \times 1/30\right] \\ &= 0.56. \end{aligned}$$

– On peut utiliser la formule $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - (1.2)^2 = 0.56.$

L'écart-type de X se déduit de la variance de$X$:

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.56} = 0,748.$$

1.3.2 Quantiles ou fractiles d'ordre α

Tous les indicateurs qui permettent de caractériser la distribution d'une variable quantitative discrète en statistique descriptive peuvent se transposer à la distribution d'une variable aléatoire discrète en calcul des probabilités. On peut également transposer les différentes utilisations et interprétations de ces indicateurs déjà étudiées en statistique descriptive.

Définition d'un quantile ou fractile d'ordre α

Un quantile ou fractile d'ordre a de X, que l'on peut noter $Q_\alpha(X)$ ou $x_{1-\alpha}$, selon les auteurs, est un nombre tel que $P(X < Q_\alpha(X)) \leq \alpha$ et $P[X > Q_\alpha(X)]$ $\leq 1 - \alpha$.Nous avons approfondi les différentes façons d'interpréter ces mesures dans le cours de statistique descriptive.

Il est à noter que la deuxième condition $P[X > Q_\alpha(X)] \leq 1 - \alpha$ peut s'écrire :

$$P[X \leq Q_\alpha(X)] \geq 1 - \alpha.$$

Chapitre 2

LES LOIS DE PROBABILITES

.

2.1 LES LOIS DISCRETES

2.1.1 Epreuves et Variables de Bernouli

Epreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire dont l'ensemble fondamental des résultats se résume à

$\Omega = \{$«succès», «échec»$\}$. On note par π la probabilité de réalisation de l'événement $\{$«succès»$\}$. La probabilité de réalisation de l'événement $\{$«échec»$\}$ est $1 - \pi$.

Variable de Bernouli

Une variable de Bernouilli de paramètre π est une variable aléatoire qui se définit comme suit à partir d'une épreuve de Bernouilli

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si lerésultat de l'épreuve est un«succès»,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proprietés d'une variable de Bernouili

Soit X une variable de Bernouilli la distribution de X est donnée

est donnée par :

x	0	$1-\pi$
$P(X = x)$	$1 - \pi$	π

TAB. 2.1 – Kurtosis coefficients of some real data sets

$E(X) = \pi$, $Var(X) = \pi(1 - \pi)$ et $\sigma(X) = \pi(1 - \pi)$.

Explication :

$$E\,(X) = [0 \times (1 - \pi)] + [1 \times \pi] = \pi.$$

$$E(X^2) = [0^2 \times (1 - \pi)] + [12 \times \pi] = \pi.$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \pi - \pi^2 = \pi(1 - \pi).$$

2.1.2 Epreuve de Binomial

Distribution binomial :

Considérons une suite de n épreuves de Bernouilli telle que :

-deux épreuves distinctes sont indépendantes .

-p (ou q) reste constante au cours des n épreuves.

Alors ,la variable aléatoire discréte$X$,nombre de succés (ou d'échec) au cours de la suite de n épreuves de Bernouilli , suit une distribution binomiale, c'est -à-dire que la probabilité d'avoir k succés est donnée par $P(X=K)=C_n^k P^k p^{(n-k)}$,avec $q=1-p$ et $0 \leq K \preceq n$.

Preuve. Soit ω_0 un événement de $\{\omega, X(\omega_0)=K\}$. Les n épreuves étant indépendantes,

$$P(\omega_0)=P\left(\underbrace{S\ \cap \cdots \cap S}_{k\quad fois} \quad \cap \quad \underbrace{E\ \cap \cdots \cap E}_{(n-k)\, fois}\right)=p^k(1-p)^{n-k},$$

et il y a C_n^k fançons de répartir k succés parmi n épreuves ,

-Espérance mathématique $E(X)=np$.

$$var(X)=npq, \qquad \text{et } \sigma=\sqrt{npq}.$$

■

Exemple 2.1.1 *On lance dix fois un dé équilibré , la variable aléatoire* $X=$"*le nombre de* 1" $x \sim\succ B(10,1/6)$ *avec* $E(X)=10*1/6$, $var(X)=10*1/6*5/6$.

$$p(X=2)=C_{10}^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8$$

2.1.3 Epreuve de Hypergéométrique

Distribution Hypergéométrique :

On dispose d'une population de N individus dont K possédent un caractére C, et on préléve au hasard un échantillon de n individus .il s'agit d'un tirage sans remise alors que la loi binomiale correspond à un tirage avec remise.

La variable aléatoire X qui compte le nombre d'individus de l'échantillon qui possédent C suit une loi hypergéométrique.

Une loi hyergéométrique dépend de trois paramétres entiers positifs : N, $K \preceq N$ et $n \preceq N$. $P(X = K) = \dfrac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$.

En effet la variable $X \sim Hg(N = 10;\ n = 3;\ p = 0,4)$ et $X = X_1 + X_2 + X_3$, ou les X_i ont toutes la meme distribution $B(1; 0,4)$. Nous avons ensuite observé que $Cov(X_1, X_2) = Cov(X_{,1} X_3) = Cov(X_2, X_3) = -0.0267$.

Proposition 2.1.1 *En posant* $p = \frac{K}{N}$ *et* $q = 1 - p = \frac{N-K}{N}$, *on obtient*

- *Espérance m athématique :* $E(X) = np$.

- *Variance :* $var(X) = npq\frac{N-n}{N-1}$ *coefficient d'exhaustivité et* $\sigma(X) = \sqrt{npq\frac{N-n}{N-1}}$.

- *Fonction de masse : pour* $x \in S_{x,}$ $P(X = x) = \frac{\binom{N_1}{x}\binom{N_2}{n-x}}{\binom{N}{n}}$.

Exemple 2.1.2 *En effet la variable* $X \sim Hg(N = 10;\ n = 3;\ p = 0,4)$ *et* $X = X_1 + X_2 + X_3,$ *ou les* X_i *ont toutes la meme distribution* $B(1; 0,4)$. *Nous avons ensuite observé que* $Cov(X_1, X_2) = Cov(X_{,1} X_3) = Cov(X_2, X_3) = -00267.ce$ *qui est bien égal à* $-\frac{\pi(1-\pi)}{N-1} = -\frac{0,4\times 0,6}{10-1}$.

$$p(X = 0) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1\times 20}{120} = 0,167.$$

$$p(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{6\times 6}{120} = 0.300.$$

$$E(X) = n\pi = 3 \times 0,4 = 0.72.$$

$$Var(X) = n\pi(1-\pi)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = 3 \times 0.4 \times 0.6 \times \left(\frac{10-3}{10-1}\right) = 0.56.$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{4\times 15}{120} = 0.500.$$

$$P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{4\times 1}{120} = 0.033.$$

Remarque 2.1.1 *la loi hypergéométrique peut etre remplacée par celle de la loi binomiale dés que N est ≪grand≫ par rapport à n . En pratique, lorsque $\frac{n}{N} < 0.1$ - pour obtenir directement une valeur de la fonction de masse d'une variable aléatoire obéissant à une loi hypergéométrique,on peut utilliser la fonction loi hypergéométrique du logiciel $EXCEL$.*

2.1.4 Epreuve de Poison

Considérons un processus de Poisson dont le nombre moyen d'«arrivées» par unité de temps est q. Soit X la variable aléatoire définie comme le nombre d'«arrivées» de ce processus dans un intervalle de temps de longueur t, on dit d'une telle variable aléatoire qu'elle obéit à la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \theta t$, ce que l'on peut écrire :

$$X\tilde{}Po(\lambda).$$

Considérons un processus de Poisson dont le nombre moyen d'«arrivées» par minute est 4. Soit X et Y les variables aléatoires définies respectivement comme le nombre d'«arrivées» de ce processus en 30 secondes et le nombre d'«arrivées» en 5 minutes.Alors :

$$X\tilde{}Po(\lambda = 2) \text{ et } Y\tilde{}Po(\lambda = 20).$$

Exemple 2.1.3 ***d'un contexte s'utilisation :*** *Un des contextes d'utilisation les plus fréquents est celui de la modélisation des arrivées dans une file d'attente.*

Propriétés de $X\tilde{}Po(\lambda)$

λ est un nomber réel > 0. Support. Le support de X est infiniment dénombrable : $S_X = \{0, 1, 2, ...\}$.

Fonction de masse.

$$P(X = x) = \frac{\exp(-\lambda)\lambda^x}{x!}, \text{ si } x \in S_X.$$

Espérence, Variance et ecart-type

$$E(X) = \lambda. \ Var(X) = \lambda \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

Pour obtenir directement une valeur de la fonction de masse ou de la fonction de répartition d'une variable aléatoire obéissant à une loi de Poisson, on peut utiliser, soit le menu «Calc Probability Distributions Poisson...» du logiciel **MINITAB**, soit la fonction **LOI.POISSON** du logiciel **EXCEL**.

2.2 lES LOIS CONTINUES

2.2.1 La loi Normale

Une variable aléatoire continue X obéit à une loi normale de paramètres μ et σ, où μ est un nombre réel quelconque et σ est un nombre réel , si et seulement si sa fonction de densité est : $f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{X-\upsilon}{\sigma})^2}$,pour tout $X \in \mathbb{R}$.

Notation : $X \sim N(\mu; \sigma)$.

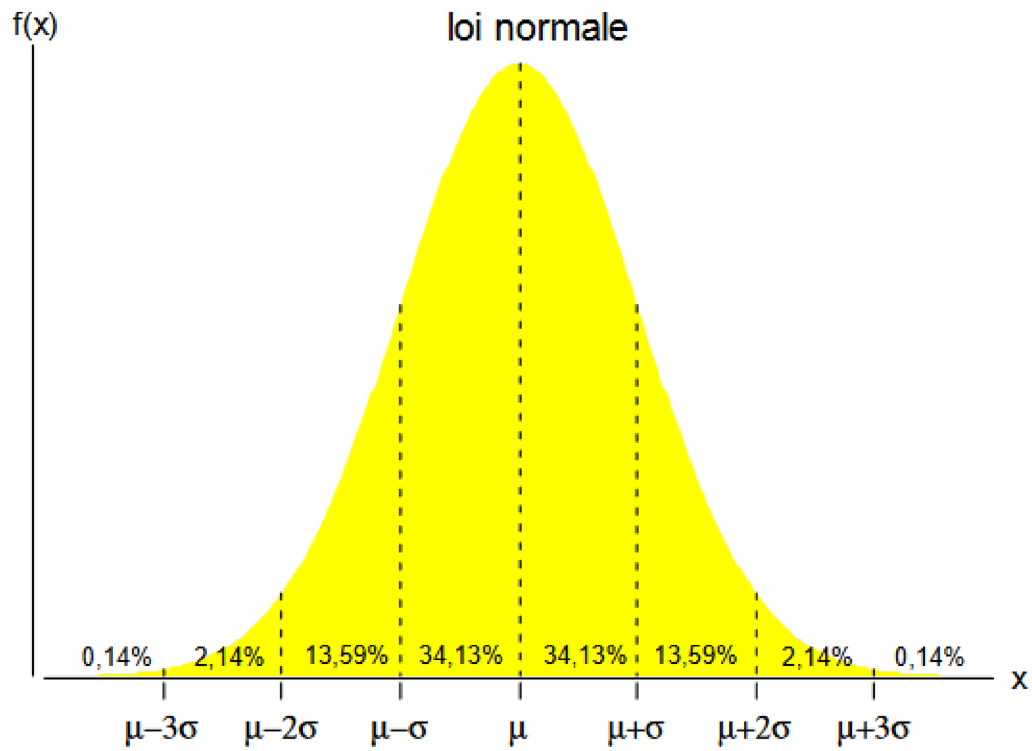

FIG. 2.1 – **Loi Normale**

Propriétés de $X \sim N(\mu;\sigma)$:

1. $Mode(X) = Q_{0.5}(X) = E(X) = \mu$, $Var(X) = \sigma_2$ et $\sigma(X) = \sigma$.
2. La fonction de densité est unimodale et symétrique par rapport à μ. Elle a la forme d'une cloche dont les points d'inflexion se situent en $\mu - \sigma$ et $\mu + \sigma$. Cette cloche comporte de

chaque côté une frange qui s'étire à l'infini et s'amincit plus elle s'éloigne du centre de la distribution.

3 Soit $Y = aX + b$, où $a \neq 0$, alors $Y \sim N(a\mu + b; |a|\sigma)$.

4 $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ est telle que $Z \sim N(0;1)$.

5 Pour tout nombre $k > 0$, $P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) = P(-k < Z < k)$, où

loi Normale	
K	$P(\mu - K\sigma < X < \mu + K\sigma)$
1	0.6872
2	0.9545
3	0.9973

TAB. 2.2 – Table Caption

Z est la variable centrée et réduite Peu importe les valeurs de μ et σ, les probabilités qui

Explication : Si on pose $a = \frac{1}{\sigma}$ et $b = -\frac{\mu}{\sigma}$, alors $Z = aX + b$.

Approche traditionnelle

L'approche traditionnelle consiste à reformuler toute question sur $X \sim N(\mu;\sigma)$ en une question sur $Z \sim N(0;1)$, où Z est la variable centrée et réduite, c'est-à-dire $Z = (X - \mu)/\sigma$. Il suffit alors d'avoir accès à une table donnant $P(Z > z)$, ou $P(Z < z)$, pour plusieurs valeurs de $z \geq 0$, pour pouvoir calculer une probabilité ou un quantile.

Quantiles d'une loi $N(0,1)$

Soit $Z \sim N(0;1)$. La symétrie de la distribution par rapport à 0 entraîne que :

1. $Q_\alpha(Z) < 0$, lorsque $\alpha < 0.5$ et $Q_\alpha(Z) > 0$, lorsque $\alpha > 0.5$.
2. $Q_\alpha(Z)$ et $Q_{1-\alpha}(Z)$ sont également éloignés de 0 et ils sont de signe contraire : $Q_\alpha(Z) = -Q_{1-\alpha}(Z)$.

Autre système de notation

Un système de notation souvent utilisé consiste à noter $Q_\alpha(Z)$ par $z_{1-\alpha}$. On a alors que $Q_{1-\alpha}(Z) = z_\alpha$.Avec ce système de notation, les 2 propriétés décrites ci-dessus

peuvent s'écrire :

1) $z_\alpha < 0$, lorsque $\alpha > 0.5$; et $z_\alpha > 0$, lorsque $\alpha < 0.5$

2) z_α et $z_{1-\alpha}$ sont également éloignés de 0 et on remarque aussi q'ils ont le signe contraire : $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$.

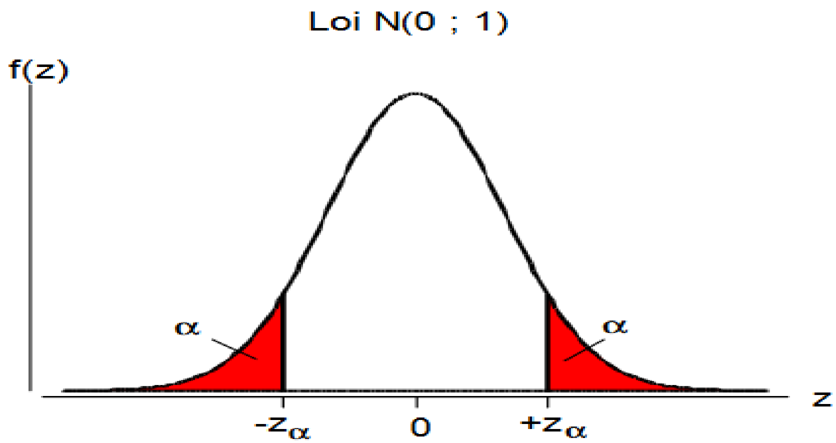

FIG. 2.2 – **Illustration graphique pour** α< **0.5.**

Quantiles d'une loi N(μ,σ)

Soit $Y \sim N(\mu;\sigma)$. La symétrie de la distribution par rapport à μ entraîne que :

1) $Q_\alpha(Y) < \mu$, lorsque $\alpha < 0.5$; et $Q_\alpha(Y) > \mu$, lorsque $\alpha > 0.5$.

2) $Q_\alpha(Y)$ et $Q_{1-\alpha}(Y)$ sont également éloignés de μ.

On peut toujours exprimer$Q_\alpha(Y)$ comme une fonction linéaire de $Q_\alpha(Z)$ où $Z = (Y-\mu)/\sigma$ et $Z \sim N(0;1)$. En effet, la relation entre Y et Z peut se réécrire $Y = \sigma Z + \mu$, ce qui entraîne que

$$Q_{1-\alpha}(Y) = \sigma$$

Si on utilise le système de notation représentant $Q_\alpha(Z)$ par $z_{1-\alpha}$, on obtient les relatio qui suivent. Celles-ci illustrent bien le fait que $Q_\alpha(Y)$ et $Q_{1-\alpha}(Y)$ sont également éloignés

de μ :

$Q_\alpha(Y) = \mu + \sigma Q_\alpha(Z) = \mu + \sigma Z_{1-\alpha} = \mu - \sigma Z_\alpha$, [étant donné que $z_{1-\alpha} = -z_\alpha$],et

$Q_{1-\alpha}(Y) = \mu + \sigma Q_{1-\alpha}(Z) = \mu + \sigma z_\alpha$.

2.2.2 La loi uniforme

Une variable aléatoire continue X obéit à la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, ce qu' écrit $X \sim U[a; b]$,si et seulement si sa fonction de densité est constante (ou uniforme) sur l'intervalle $[a; b]$ et nulle ailleurs. On obtient :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

propṙetés de $X \sim U[a, b]$:

1.
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

2.
$$E(X) = \frac{a+b}{2},\ var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

(La valeur de $E(X)$ peut se déduire de la symétrie de la distribution. Il faut utiliser le calcul intégral pour obtenir la variance)

3

$$Q_\alpha(X) = a+\alpha(b-a), \ [F(x) = \alpha \Longleftrightarrow (x-a)/(b-a) = \alpha \Longleftrightarrow x = a+\alpha(b-a)].$$

4 Si $Y = cX + d$,ou $c \neq 0$ alors Y obéit aussi à une loi uniforme. Son support dépend du signe de c : pour $c \succ 0$, $Y \sim U[ca+d; cd+d]$; pour $c \prec 0$, $Y \sim U[cd+d; ca+d]$.

2.2.3 Loi exponentielle

Définition 2.2.1 *Une variable aléatoire continue X obéit à la loi exponentielle de paramètre b où b est un nombre réel > 0, si et seulement si sa fonction de densité est donnée par :*

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{b}\varrho^{-x/b} \ si \ x \succeq 0 \\ 0 \ sinon. \end{cases}$$

Notation :$X\tilde{}Exp(b)$.

Propriétés de$X\tilde{}Exp(b)$:

1. $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \prec 0, \\ 1-\varrho^{-x/b} & \text{si } x \succeq 0. \end{cases}$$

2. $E(X) = b$, $Var(X) = b^2 et\ \sigma(X) = b$.

3. $Q_\alpha(X) = -b\ln(1-\alpha)$.

4. Si $Y = cX$, ou $c \succ 0$ alors $Y \sim Exp(cb)$

Exemple d'un contexte d'utilisation :

Considérons un processus de Poisson dont le nombre moyen d'arrivées par unité de temps est q. Soit X la variable aléatoire définie comme le temps qui s'écoule avant une première arrivée (en commençant le décompte du temps en un instant initial quelconque). Soit Y la variable aléatoire discrète définie comme le nombre d'arrivées en x unités de temps, où $x > 0$. Les événements $\{X > x\}$ et $\{Y = 0\}$sont équivalents puisque, pour qu'il s'écoule plus de $x$unités de temps avant une première arrivée il faut qu'aucune arrivée ne se soit produite pendant l'intervalle de temps$[0, x]$. Étant donné que $Y \tilde{} Po(\lambda = \theta x)$, on obtient :

$F(x) = P(X \preceq x) = 1 - P(X \succ x) = 1 - P(y = 0) = 1 - \frac{(\theta x)^0 \varrho^{-\theta x}}{0!} = 1 - \varrho^{-\theta x}, \forall$ $x \succ 0$.

Nous venons d'observer que $X \tilde{} Exp(b = 1/\theta)$.

2.2.4 Loi Erlang

Une variable aléatoire continue X obéit à une loi Erlang de paramètres a et b, où a est un nombre entier ≥ 1 et b est un nombre réel > 0, si et seulement si sa fonction de densité est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x^{a-1} \varrho^{-x/b}}{b^a (a-1)!} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Notation : $X \tilde{} Erl(a; b)$.

Propriétés de $X \tilde{} Erl(a; b)$ La loi Erlang est un cas particulier de la loi Gamma.

Exemple d'un contexte d'utilisation : Généralisons le contexte étudié pour la loi exponentielle, c'est-à-dire considérons un processus de Poisson dont le nombre moyen d'arrivées par unité de temps est θ Soit X la variable aléatoire définie comme le temps qui s'écoule avant la $k^{éme}$ arrivée(en commençant le décompte du temps en un instant initial quelconque), où k est un nombre entier ≥ 1 Soit Y la variable aléatoire discrète définie comme le nombre d'arrivées en x unités de temps, où $x > 0$. Les événements $\{X > x\}$ et $\{Y \preceq k-1\}$sont équivalents puisque, pour qu'il s'écoule plus de x unités de temps avant la $k^{éme}$ arrivée, il faut qu'un maximum de $k-1$ arrivées se soient produites pendant l'intervalle de temps $[0, x]$. Étant donné que $Y\tilde{}Po(\lambda = \theta x)$, on obtient :

$$F(x) = P(X \preceq x) = 1 - P(Y \preceq k-1) = 1 - \sum_{y=0}^{k-1} \frac{(\theta x)^y \varrho^{-\theta x}}{y!}.$$

Pour idedentifier la fonction de densité de X, il suffit de dériver sa fonction de répartition. On obtient : $f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{x^{k-1}\theta^k}{(k-1)!}$ pour $x \succ 0$.
Nous venons d'observer que $X\tilde{}Erl(a = k;\, b = 1/\theta)$.

2.2.5 Loi gamma

Introduction

Les lois exponentielle et Erlang s'inscrivent dans une vaste classe de distributions appelée lois gamma. Cette classe a une importance certaine tant au niveau théorique qu'au niveau appliqué. Ces lois gamma dépendent de deux paramètres a et b, où a et b sont des nombres réels > 0. Les liens entre les lois exponentielle, Erlang, du khi-deux et les lois gamma sont illustrés par le tableau suivant :

Les lois gamma sont des exemples de distributions de variables continues positives,

Type de loi	*loi gamma$(a;b)$*
loi exponentielle(b) *loi Erlang$(a;b)$* *loi du khi − deux à d deg rés de liberté*	$a=1$ *a est unnombre entier* $a=v/2$ *et* $b=2$(*d est un nombre entier* $\succeq 1$)

TAB. 2.3 – Table Khi-deux et gamma

unimodales et asymétriques avec une longue frange qui s'étire à droite. Grâce aux choix possibles des paramètres a et b , les lois gamma permettent de modéliser beaucoup de phénomènes aléatoires dont, entre autres :

- des durées de vie de composantes de machine ;

- des temps d'attente associés à un processus de Poisson ;

- des mesures physiques comme des montants de précipitation en météréologie ;

- des montants de réclamations en assurance

Une variable aléatoire continue X obéit à une loi gamma de paramètres a et b, où a et b sont des nombres réels > 0, si et seulement si sa fonction de densité est :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^{a-1}e^{-x/b}}{b^{a}\Gamma(a)} & \text{si } x\succ 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où $\Gamma(a)$ est une constante qui garantit que l'aire sous la courbe f est égale à 1.

Propriétés de $X\tilde{}G(a;\ b)$:

1. $E(X)=ab$, $Var(X)=ab^{2}\sigma(X)=\sqrt{ab}.$
2. La distribution est unimodale.
3. La distribution est asymétrique avec une frange à droite.
4. Si $Y=cX$, où $c>0$, alors $Y\tilde{}G(a;cd)$

Exemple simple :

1. déterminer les valeurs des paramètres a et b ;
2. déterminer la probabilité que le montant des réclamations pour une semaine dépasse 30 000$,
3. déterminer le $90^{éme}$ centile du montant hebdomadaire des réclamations .

Solution :

1. $E(X) = 2 = ab$ et $Var(X) = (1,6)^2 = 2,56 = ab^2 \Leftrightarrow b = 1,28$ et $a = 1,5625$.
2. On cherche $P(X > 3) = 1 - F(3) = 1 - 0,7893 = 0,2107$.
3. On cherche $Q_{0,9}(X) = 4,1264$. Le $90^{éme}$ centile de X étant $4,1264$; le $90^{éme}$centile du montant des réclamations est :41264$.

Fonction gamma

Soit $n > 0$, on définit la fonction gamma par : $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} \varrho^{-x} dx$.

On peut démontrer que :

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, pour tout nombre réel $n > 0$.

$\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$.

$\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(n) = (n-1)!$, pour tout nombre entier $n \succeq 1$.

2.2.6 Loi du Khi-Deux

La loi du khi-deux à d degrés de liberté, ou loi χ_d^2,est un cas particulier de la loi gamma : une variable aléatoire continue W obéit à la loi χ_d^2 si et seulement si elle obéit à la loi $G(a = d/2; b = 2)$.

Relation avec la loi normale Soit $Z_1, Z_2, ...,$ et $Z_d,$, des aléatoires indépendantes obéissant chacune à la loi $N(0;1)$. Soit $W = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_d^2$, La variable aléatoire continue W obéit à la loi du khi-deux de paramètre d.

Propriété 2.2.1 *Soit* $W\tilde{}\chi_d^2$

1. Le paramètre d est appelé le nombre de degrés de liberté; il s'agit d'un nombre entier $\succeq 1$.
2. W ne peut prendre que des valeurs positives.
3. $E(W) = d$ et $Var(W) = 2d$.
4. Sauf dans les cas $d = 1$ et $d = 2$, la distribution a la forme d'une cloche asymétrique avec une frange à droite qui s'allonge à l'infini.

2.2.7 Loi du student

Une variable aléatoire continue Y obéit à la loi de Student à d degrés de liberté, ce qu'on note par $Y\tilde{}T_d$ si et seulement si sa fonction de densité est donnée par :

$$f(y) = \frac{\Gamma\left[(b+1)/2\right]}{\Gamma\left[d/2\right]\sqrt{d\pi}} \frac{1}{\left(1+\left[y^2/d\right]\right)^{(d+1)/2}} \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}.$$

Cette fonction de densité fait intervenir deux fonctions gamma : $\Gamma[(d+1)/2]$ et $\Gamma[d/2]$. Nous la donnons à titre d'information.

Relation avec la loi normale et la loi du khi-deux :

Soit Z et W deux variables aléatoires continues et indépendantes telles que $Z\tilde{}N(0,1)$ et $W\tilde{}\chi_d^2$ si $Y = \frac{Z}{\sqrt{W/d}}$ alors $Y \sim T_d$.

Propritès de $Y \sim T_d$

1 La loi n'a qu'un seul paramètre d. Ce paramètre se nomme le «nombre de degrés de liberté» et correspond à un nombre entier > 0.

1. La densité de Y décrit une cloche symétrique par rapport à 0 dont les franges s'allongent à l'infini. La cloche est plus évasée (ou moins effilée) que la cloche de la loi $N(0;1)$.

2. $E(Y)$ n'est pas définie pour $d = 1$. Pour $d \succeq 2$, $E(Y) = 0$, par symétrie de la distribution.

3. $Var(Y)$ n'est pas définie pour $d = 1$ ou 2. Pour $d \succeq 3$, $Var(Y) = d/(d-2)$ et $\sigma(Y) = \sqrt{d/(d-2)}$.

4. Plus d est grand, plus l'écart-type de Y diminue et tend vers 1. Lorsque d est très grand, la loi T_d se confond avec la loi $N(0;1)$.

5. On utilise habituellement la notation $t_{d,\alpha}$ pour désigner $Q_{1-\alpha}(Y)$. Il est à noter que la symétrie de la distribution par rapport à 0 entraîne que (Q_α $(Y) = -Q_{1-\alpha}(Y)$), encore $t_{d,1-\alpha} = -t_{d,\alpha}$.

2.2.8 Loi de Fisher

Définition 2.2.2 ***(relation avec la loi du khi-deux)*** *Soit W et$Y$ deux variables aléatoires continues et indépendantes telles que $W\tilde{}\chi^2_m$ et $Y \sim \chi^2_k$ soit $X = \frac{W/m}{Y/k}$. La variable aléatoire X obéit à la loi de Fisher à m et n degrés de liberté, ce qui peut s'écrire : $X\tilde{}F_{m,k}$*

Quelques propriétés de $X\tilde{}F_{m,k}$.

Définition 2.2.3 ***Propriété 2.2.2*** *1. X est une variable aléatoire continue qui ne prend que des valeurs positives. Ces deux paramètres m et k sont des* *nombres entiers positifs qui sont habituellement appelés le nombre de degrés de liberté du numérateur et le nombre de degrés de liberté du dénominateur. La distribution est unimodale et elle n'est pas symétrique. Elle a une longue frange qui s'allonge à l'infini et sa forme varie selon les valeurs de* m *et* k.

2. $E(X) = \frac{k}{k-2}$,*si* $k \succeq 3$. $Var(X) = \frac{2k^2(m+k-2)}{m(k-2)^2(k-4)}$, *si* $k \succeq 5$.
3. *La variable* $1/X$ *obéit à la loi* $F_{m,k}$.
4. *Le quantile d'ordre* α, $Q_\alpha(X)$, *se note habituellement* $F_{m,k;1-\alpha}$ *et est tel que* $F_{m,k;1-\alpha} = \frac{1}{F_{m,k;\alpha}}$.

Chapitre 3

Convergence

Dans ce chapitre, nous considérons des suites (X_n) $(n \geq 1)$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω, A, P) et nous étudions le comportement asymptotique de telles suites lorsque n tend vers l'infini.Plusieurs types de convergence se sont imposés (convergence en loi, en probabilité, presque sûre, en moyenne d'ordre $r > 0$, et bien d'autres). Nous passons en revue les plus importants de ces types.

3.1 Convergence en loi, ou convergence étroite

Définition 3.1.1 *Donnons-nous*

a) une suite (X_n) $(n \geq 1)$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P)(on désigne par (F_n) $(n \geq 1)$ la suite des fonctions de répartion correspondantes) ;

b) une variable aléatoire$X$ définie sur le même espace probabilisé (Ω, A, P) (on désigne par$F$ sa fonction de répartion ; on notera que $F(+\infty) = 1$ et que $F(-\infty) = 0$).

On dit que la suite (X_n) $(n \geq 1)$ converge en loi (ou étroitement) vers X, et l'on écrit $X_n \xrightarrow{l} X$, ou $L(X_n) \to L(X)$, si en tout point x de continuité de F (en abrégé : $x \in C(F)$), on a $F_n(x) \to F(x)$, lorsque n tend vers l'infini.(En toute rigueur, il faudrait dire que la suite de lois $L(X_n)$ converge en loi, ou étroitement, vers la loi $L(X)$, mais la terminologie que nous adoptons est courante et justifiée).

Remarque 3.1.1 *Supposons que X_n, X et que les X_n, ainsi que$X$, soient du premier ordre (i.e. aient des espérances mathématiques finies). Il n'en résulte pas que la suite*

$(E[X_n])$ $(n \geq 1)$ converge ni que si elle converge, elle ait pour limite $E[X]$; les situations les plus diverses peuvent se présenter. Par exemple, soit (a_n) $(n \geq 1)$ une suite de nombres réels strictement positifs associons-lui une suite(X_n) $(n \geq 1)$de variables aléatoires de lois $(1/n)\varepsilon a_n + (1 - (1/n))\varepsilon_0$. On vérifie que la suite (Xn) converge en loi vers $X = 0$ (donc $E[X] = 0$) et que $E[X_n] = a_n/n$ pour tout $n \geq 0$. On a les comportements suivants :

si $a_n = \sqrt{n}$, alors $E[X_n] = 1/\sqrt{n} \to 0 = E[X]$,

si $a_n = n$, alors $E[X_n] = 1 \to 1 \neq E[X]$,

si $a_n = n^2$, alors $E[X_n] = n \to +\infty \neq E[X]$,

si $a_n = n[2 + (-1)^n]$ la suite $E[X_n] = 2 + (-1)^n$ oscille.

Exemple 3.1.1 $F_n(x) = \begin{cases} 0 \ si \ x < 0 \\ \frac{x}{n} \ si \ 0 \leq x < n \\ 1 \ si \ n \leq x \end{cases}$

Il en résulte que pour tout x on a :$F_n(x) \to F(x) = 0$, lorsque n tend vers l'infini. Or la limite $F(x) = 0$ n'est pas la fonction de répartition d'une loi de probabilité. On dit que la suite des lois de X_n converge faiblement vers la mesure nulle. Nous n'étudierons pas ici ce type de convergence.

3.2 Convergence en probabilité

Définition 3.2.1 *Soit* (X_n) $(n \geq 1)$*une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé* (Ω, A, P).

a) On dit que la suite $(X_n)(n \geq 1)$ converge en probabilité vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et l'on écrit, si pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\lim\limits_{n \to \infty} P\{|X_n| > \varepsilon\} = 0$.

b) Soit X une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé (Ω, A, P). On dit que la suite $(X_n)(n \geq 1)$ converge en probabilité vers X, et l'on écrit $X_n \xrightarrow{p} 0$,si $X_n \to X \xrightarrow{p} 0$.

Théorème 3.2.1 *Supposons que* X_n *et que les* X_n*, ainsi que* X*, soient du premier ordre. Il n'en résulte pas que la suite* $(E[X_n])(n \geq 1)$ *converge vers* $E[X]$*, ni que, si elle*

2) La suite converge, elle ait pour limite$E[X]$; les situations les plus diverses peuvent se présenter.

Exemple 3.2.1 *Reprenons l'exemple qui illustre la Remarque du paragraphe* 1 *relative à la convergence en loi.*

1. On a $X_n \to X = 0$ puisque pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\{Xn > \varepsilon\} \leq P\{Xn > 0\} = \frac{1}{n} \to 0.$$

2 La suite$(E[X_n])$ a les différents comprtements d écrits ci-dessus.

Donnons tout d'abord deux propriétés de la convergence en probabilité

Théorème 3.2.2 *Soit* $(M_n = (X_n, Y_n))$ $(n \geq 1)$ *une suite de points aléatoires qui converge en probabilité vers le point aléatoire* $M = (X, Y)$ *(c'est-à-dire pour tout*

$\varepsilon > 0$ $\lim_n P\{|M_n - M| > \varepsilon\} = 0$, ce qui entraine que l'on a simultanément $X_n \xrightarrow{p} 0$ et $Y_n \xrightarrow{p} Y$). Soit d'autre part h :$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$une fonction continue en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Alors, la suite des variables aléatoires $h(X_n, Y_n)$ $(n \geq 1)$ converge en probabilité vers la variable aléatoire $h(X, Y)$. En particulier, si $X_n \xrightarrow{p} X$ et si f est une fonction réelle, continue en tout point de la droite réelle, alors $f \circ X_n \xrightarrow{p} f \circ X$. Si $X = c$ (c réel), l'hypothèse $X_n \xrightarrow{p} c$ peut être remplacée par $X_n \xrightarrow{l} c$.

Théorème 3.2.3 *. Si la suite de variables aléatoires (X_n) $(n \geq 1)$ converge en probabilité vers la variable aléatoire X et si $P\{X = 0\} = 0$, alors $\frac{1}{X_n} \xrightarrow{p} \frac{1}{X}$.*

Corollaire 3.2.1 *Si la suite de points aléatoires $(M_n = (X_n, Y_n))$ $(n \geq 1)$ converge en probabilité vers le point aléatoire $M = (X, Y)$, alors*

1) $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$.

2) $\lambda X_n \xrightarrow{p} \lambda X$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

3) $X_n Y_n \xrightarrow{p} XY$.

4) $X_n / Y_n \xrightarrow{p} X/Y$, si $P\{Y = 0\} = 0$.

Remarque 3.2.1 *Le corollaire montre que la convergence en probabilité est compatible avec les opérations algébriques élémentaires. Il n'en est pas ainsi de la convergence en loi.*

Théorème 3.2.4 ***(Critére de convergence en probabilité)*** *Soit (X_n) $(n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires ; s'il existe $r > 0$ tel que la suite de terme général $(E[|X_n|^r])$ $(n \geq 1)$ tende vers 0, alors la suite $(X_n)(n \geq 1)$ converge en probabilité vers 0.*

Preuve. On a, d'aprés l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\{|X_n| \geq \varepsilon\} \leq \frac{(E[|X_n|^r])}{\varepsilon^r}.$$

■

3.3 Convergence en moyenne d'ordre r > 0

Définition 3.3.1 *Soit*(X_n) $(n \geq 1)$*une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé* (Ω, A, P). *On suppose qu'il existe* $r > 0$ *tel que pour tout* $n \geq 1$ *le moment* $E[|X_n|^r]$ *soit fini.*

a) On dit que la suite (X_n) $(n \geq 1)$ converge vers 0 en moyenne d'ordre r, si $E[|X_n|^r] \to 0$ lorsque n tend vers l'infini.

b) Soit X une autre variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé (Ω, A, P). On dit que la suite $(X_n)(n \geq 1)$ converge vers X en moyenne d'ordre r, si la suite $(X_n - X)(n \geq 1)$ converge vers 0 en moyenne d'ordre r.

Définition 3.3.2 *Supposons que* $X_n \to X$ *en moyenne d'ordre* r, *il n'en résulte pas que le moment* $E[|X|^r]$ *soit fini, mais si ce moment est fini, alors*

$$E[|X_n|^r] \to E[|X|^r].$$

Remarque 3.3.1 *Ce type de convergence est essentiellement utilisé pour* $r = 2$, *auquel cas on parle de convergencence en moyenne quadratique.*

3.4 Convergence presque sûre

Définition 3.4.1 *Soit* (X_n) $(n \geq 1)$*une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé* (Ω, A, P).

a) On dit que la suite(X_n) $(n \geq 1)$ converge vers 0 presque sûrement, et l'on écrit $X \overset{p.s}{\to} 0$, s'il existe un ensemble P-négligeable $A \in A$ tel que pourtout $\omega \in \Omega \backslash A$, on ait $X_n(\omega) \to 0$, lorsque n tend vers l'infini.

b) Soit X une autre variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé (Ω, A, P). On dit que la suite (X_n) $(n \geq 1)$ converge vers X presque sûrement et l'on écrit $X_n \overset{p.s}{\to} X$, si la suite $(X_n - X)(n \geq 1)$ converge vers 0 presque sûrement.

Remarque 3.4.1 *Il résulte directement de la définition que leThéorémes 3.2.2 et 3.2.3 ainsi que leurs corollaires sont valables pour la convergence presque sûre. Néanmoins, cette définition n'est pas opératoire et il convient, dans certains cas, de lui en substituer une autre, équivalente, qui a l'avantage de fournir instantanément des critéres de convergence presque sûre. Nous introduisons cette nouvelle définition aprés le commentaire qui suit.*

Commentaire de la définition. Posons pour tout $\varepsilon > 0$

$$E_n(\varepsilon) = \{|X_n| > \varepsilon\},\ E(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \sup E_n(\varepsilon) = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} E_k(\varepsilon).$$

Introduisons l'ensemble de convergence de la suite $(X_n)(n \geq 1)$ vers 0

$C = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \{|X_k| \leq \varepsilon\}$, ainsi que son complémentaire, l'ensemble de divergence

$D = C^c = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} \{|X_k| > \varepsilon\} = \bigcup_{\varepsilon>0} E(\varepsilon)$.

On voit que $0 < \varepsilon < \varepsilon' \Rightarrow E(\varepsilon') \subset E(\varepsilon)$, de sorte que $(E(\varepsilon))$ $(\varepsilon > 0)$ est une famille croissante lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, il en résulte que :

a) l'ensemble D peut sécrire $D = \bigcup_{l} E(1/l)$, avec $l \geq 1$ entier. Par conséquent, D (donc C) est mesurable. (Cette observation a été faite pour la premiére fois par Kolmogorov dans son ouvrage fondamental.2)

b) $D = lim\ \varepsilon \downarrow 0\ E(\varepsilon)$.

Il est clair que $X_n \overset{p.s}{\to} 0$, si et seulement si $P(C) = 1$, c'est-à-dire si et seulement si $P(D) = 0$. Or cette derniére propriété est susceptible d'une interprétation intéressante faisant l'objet du théoréme suivant.

Théorème 3.4.1 *Soit* (X_n) $(n \geq 1)$*une suite de variables aléatoires. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

a) La suite(X_n) $(n \geq 1)$ converge vers 0 presque sûrement.

b) La suite de terme général $Y_n = sup\ k \geq n|X_k|$converge vers 0 en probabilité.

Il en résulte immédiatement que la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

Preuve. Avec les notations ci-dessus, on a :

$$\underset{k\geq n}{\cup} E_k(\varepsilon) = \underset{k\geq n}{\cup} \{|X_k|\} > \varepsilon\} = \{\sup_{k\geq n} |X_k| > \varepsilon\}.$$

■

.Cette suite d'ensembles est décroissante lorsque n croıt, de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$E(\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \{\sup_{k\geq n} |X_k| > \varepsilon\}.\text{et } P(E(\varepsilon)) = \lim_{n\to\infty} P\{\sup_{k\geq n} |X_k| > \varepsilon\}.$$

Cette égalité, valable pour tout $\varepsilon > 0$, montre que $a) \Leftrightarrow b)$.

Nous donnons maintenant deux critéres de convergence presque sûre.

Proposition 3.4.1 *Soit* $(X_n)(n \geq 1)$ *une suite de variables aléatoires. Si pour tout* $\varepsilon > 0$*, la série de terme général* $P\{|X_n| > \varepsilon\}$ *est convergente alors la suite* (X_n) $(n \geq 1)$ *converge vers* 0 *presque sûrement.*

Preuve. Avec les notations ci-dessus on a, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \geq 1$

$$P(E(\varepsilon)) \leq \sum_{k \geq n} E_k(\varepsilon).$$

■

Or le second membre reste d'ordre n d'une série convergente, tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini le premier membre étant indépendant de n est donc nul. D'où pour

tout $\varepsilon > 0$ l'identité $P(E(\varepsilon)) = 0$, c'est-à-dire $X_n \xrightarrow{p.s} 0$.

Proposition 3.4.2 *soit* (X_n) $(n \geq 1)$ *une suite de variables aléatoires. S'il existe* $r > 0$ *tel que la série de terme général* $E[|X_n|^r]$ *soit convergente, alors la suite* (X_n) $(n \geq 1)$

converge vers 0 *presque sûrement.*

Preuve. On a, d'aprés l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\{|Xn| \geq \varepsilon\} = \frac{E[|X_n|^r]}{\varepsilon^r}.$$

où le résultat en vertu de la Proposition 3.4.1 ■

Pour terminer cette section, nous donnons quelques liens entre convergence presque sûre et convergence en probabilité.

Théorème 3.4.2 *Soit* $X_n \xrightarrow{p} 0$ *il existe une suite partielle* (X_{nk}) *extraite de* (X_n) *telle que* $X_{nk} \xrightarrow{p.s} 0$ *pour tout* $k \geq 1$.

Preuve. Soients $\varepsilon > 0$ et (ηk) une suite de nombres strictement positifs tels que $\sum_{n \geq 1} \eta_k < +\infty$. Par hypothése, pour tout $k \geq 1$ il existe $\eta_k \geq 1$ tel que$P\{|X_{nk}| >$

$\varepsilon\} < \eta_k$. On peut toujours supposer que $\eta_k < \eta_{k+1}$ pour tout $k \geq 1$. On a alors pour tout $\varepsilon > 0$ les relations

$$P\{\sup_{k\geq n} |X_{nk}| > \varepsilon\} = P\{\bigcup_{k\geq n} \{|X_{nk}| > \varepsilon\}\} \leq \sum_{k\geq n} \eta_k$$

■

Or le dernier membre tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Le résultat en découle en vertu d du Théoréme

Théorème 3.4.3 *Soit* (X_n) $(n \geq 1)$ *une suite de variables aléatoires ; alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $X_n \xrightarrow{p} 0$.

b) De toute suite partielle extraite de (X_n) on peut extraire une suite partielle qui converge presque sûrement vers 0.

Preuve. $a) \Rightarrow b)$: Soit (X_{a_n}) une suite partielle extraite de (X_n) il est clair que $X_{a_n} \xrightarrow{p} 0$ ■

Le Théoréme 3.4.2appliqué à la suite (X_{a_n}) montre qu'il existe une suite partielle extraite de (X_{a_n}) qui converge vers 0 presque sûrement.

$b) \Rightarrow a)$ Supposons que $a)$ ne soit pas satisfaite, c'est-'a-dire qu'il existe ε, $\eta > 0$ tels que, quel que soit $N > 0$, il existe un entier $n \geq N$ pour lequel $P\{|X_n| > \varepsilon\} > \eta$. On en déduit

qu'il existe une suite partielle (X_{a_n}) extraite de (X_n) telle que, pour tout $n \geq 1$, on ait $P\{|X_{a_n}| > \varepsilon\} > \eta$ Pour toute suite partielle (X_{b_k}) extraite de (X_{a_n}) on a alors pour tout $k \geq 1$,

l'inégalité $P\{|X_{b_k}| > \varepsilon\} > \eta$. Il en résulte que la suite (X_{b_k}) ne converge pas vers 0 en probabilité, donc non plus presque sûrement, ce qui contredit b).

Remarque 3.4.2 *Le Théoréme fournit des démonstrations immédiates des Théoréme 3.2.2 et3.2.3 . Il suffit, en effet, d'observer que si* $X_n \overset{p.s}{\to} X$*, alors pour toute fonction continue* f *on a :* $f \circ X_n \overset{p.s}{\to} f \circ X$.

3.5 Comparaison des divers types de convergence

$$\begin{array}{ccccc} \text{Conv.en moyenne d'ordre } r & \Longrightarrow & \text{Conv.en probabilitée} & \Longrightarrow & \text{Conv.en loi} \\ & & \Uparrow & & \\ & & \text{Conv. en sûr} & & \end{array}$$

Il est évident a priori que le mode de convergence en loi est le plus faible, puisque sa définition ne fait intervenir que les lois des X_n et ne fait pas référence au triplet fondamental.

Notation. Dans ce qui suit (X), (F_n) $(n \geq 1)$ désignent une suite de variables alatoires et la suite de leurs fonctions de répartition associées.

Théorème 3.5.1

- Soit $r > 0$ la convergence en moyenne d'ordre r entraîne la convergence en probabilité.
- Elle résulte de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, puisque pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$P\{|X_n| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E[|X_n|]}{\varepsilon^r} \to 0.$$

Théorème 3.5.2 *La convergence en probabilité entraîne la convergence en loi.*

Lemme 3.5.1 **a)** *E'tant donné un couple* (X, Y) *de variables aléatoires, on a, pour tout* $\eta > 0$

$$|F_X(x) - F_Y(x)| \leq F_X(x+\eta) - F_X(x-\eta) + P\{|X-Y| > \eta\}.$$

a) *D'abord on a les relations*

$\{Y \leq x\} = \{Y \leq x, X \leq x+\eta\} + \{Y \leq x, X > x+\eta\} \subset \{X \leq x+\eta\} + \{|X-Y| > \eta\}$; d'où

$$F_Y(x) \leq F_X(x+\eta) + P\{|X-Y| > \eta\}.$$

On montre de façon analogue que :

$$F_X(x-\eta) \leq F_Y(x) + P\{|X-Y| > \eta\}.$$

Il résulte de a)et b) que :

$$F_X(x-\eta) - P\{|X-Y| > \eta\} \leq F_Y(x) \leq F_X(x+\eta) + P\{|X-Y| > \eta\}.$$

Or on a trivialement :

$$F_X(x-\eta) \leq F_X(x) \leq F_X(x+\eta).$$

Il résulte de c)et d) que :

$$F_X(x) - F_Y(x)| \leq F_X(x+\eta) - F_X(x-\eta) + P\{|X-Y| > \eta\}.$$

Pour démontrer le Théorème 3.5.2 on applique le lemme en prenant $Y = X_n$. On obtient donc, pour tout $n \geq 0$ et tout $\eta > 0$,

$$|F_X(x) - F_{X_n}(x)| \leq F_X(x+\eta) - F_X(x-\eta) + P\{|X - X_n| > \eta\}$$

Supposons que x soit un point de continuité de F_X ; alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta(\varepsilon)$ tel que $F_X(x+\eta) - F_X(x-\eta) < \varepsilon$. Suppposons que $X_n \xrightarrow{p} X$, alors on peut associer au couple $(\varepsilon, \eta(\varepsilon))$ un nombre $N(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $tP\{|X - Xn| \geq \eta\} < \varepsilon$ Il en résulte que, si x est un point de continuité de F_X on à pour tout $n \geq N$ l'inégalité $|F_X(x) - F_{X_n}(x)| < 2\ \varepsilon$.

Conclusion

De nombreuses situations pratiques peuvent être modélisées à l'aide de variables aléatoires qui sont régies par des lois spécifiques. Il est important donc d'étudier ces modèles probabilistes qui pourront nous permettre par la suite d'analyser les fluctuations de certains phénomènes en évaluant, par exemple, les probabilités que tel événement ou tel résultat soit observé. C'est le sujet que nous avons essayé de traiter dans ce mémoire.

Bibliographie

[1] Foata.Fuchs.A.,et Franch.J. Calcul des probabilités-3éme édition : cours,exercices et problèmes corrigés.Dunod.(2012).

[2] Frederic Michel Dekking,Cornelis Kraaikamp,Hendrik Paul Lopuhaä,Ludolf Erwin Meester. Springer,2005.

[3] École des Hautes Études Commerciales, Montréal (Québec) ; Note de cours probabilités et statistique, Janvier 2001.