République Algériennne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider, Biskra

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Départementde Mathématiques

Mémoire présenté pour obtenir le diplôme de

Master en "**Mathematiques Appliquées**"

Option : Analyse

Par Khergag Nadjat

Titre :

Résolution de quelques équations aux dérivées partielles par la méthode de Tau

Devant le Jury :

Mr.	Houas Amrane	U. Biskra	Président
Mr.	Laiadi Abdelkader	U. Biskra	Rapporteur
Mme.	Adouane Saida	U. Biskra	Examinatrice

Soutenu Publiquement le 26/06/2022

Dédicace

Je dédie ce travail à ceux que je préfère à

moi-même à ceux qui ont sacrifié pour moi

Mes chers parents

*A mes frères et soeurs en particulier ma soeur "***Salwa"**

A mes amis

*."***Mahdia, Nouna, Afaf, Sara,Hanane,Malika"**

Tous ceux qui se tenaient à côté

de moi et m'aidaient avec tout ce qu'il avait

Je vous présente cette

recherche et j'espère que vous serez satisfaits.

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude à mon encadrant

Monsieur **Dr."Laiadi Abedelkader"**, pour avoir accepté de diriger ce travail. Son soutien, sa gentillesse, sa clairvoyance, ses compétences, m'ont été d'une aide inestimable.

Je tiens à remercier sincèrement les membres de jury **Dr. "Houas Amrane "** et **Dr. "Adouane Saida "** qui me font le grand honneur d'évaluer ce travail.

Je tiens à remercier tous mes professeurs de mathématiques qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite dans mes études universitaires.

Mes remerciements les plus chaleureux vont à tous mes camarades de Master 2 Option Analyse.

Je dédie ce mémoire :

- mes parents pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien.
- toute ma famille ainsi qu'à mes amis.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Très peu d'équations différentielles sont solutionnées analytiquement. De plus chaque type d'équations requit une méthode particulière de résolution. Par-suite, la résolution de la plupart de ces équations nécessite l'utilisation de méthodes numérique.

Les méthodes numériques de résolution des équations différentielles (ODE) et des équations aux dérivées partielles (EDP) jouent un rôle très important dans plusieurs domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de computation numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour résoudre les différent problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui était difficiles a résoudre dans le passé. Il ya des plusieur méthodes efficaces pour résoudre ODE et EDP, en particulier méthodes spectrales (méthode Galerkin, méthode lanczos, méthode de tau...). Les méthodes spectrales consistent une classe de la discrétisation spatiale des équations différentielles, elles cherchent des solutions en termes d'une série de fonctions connues, régulières (les fonctions de base). A partir de ses fonctions on peut distinguer trois types de méthodes, à savoir Galerkin, Tau et Collocation.

Le but de ce travail est de trouver des solutions numériques pour les équations aux dérivées partielles par la méthode de Tau-collocation. Cette méthode est une modification de la méthode de Galerkin, qui est applicable à des problèmes avec des conditions aux limites non périodiques qui a été utilisé par Lanczos (1938) et Orszag (1971) telle que les fonctions des base sont les polynômes de Tchebyshev qui produiset des solutions très précises à la dynamique des fluides.

Ce mémoire est divisé en deux chapitres :

Dans **le chapitre 1** Nous présentons quelques définitions sur les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles. Ce chapitre est une introduction à la terminologie et à la classification des équations différentielles aux dérivées partielles.

Le chapitr 2 contient la définition des polynômes orthogonaux, en particulier le polynôme de Tchebyshev et quelques propriétés. Et aussi on traite quelques problèmes (ODE et EDP) avec conditions aux limites en utilisant les méthodes de Tau et tau-collocation. On essaye d'exposer à la fois la formulation intrinsèque de ces méthodes et leur application pratique à l'aide d'exemples.

Chapitre 1

Notions Préliminaires Sur Des Equations Aux Dérivées Partielles

1.1 Equation différentielle

Définition 1.1.1 *(Equation différentielle)*

Une équation différentielle est tout équation implique la fonction inconnue et ses dérivées si la fonction inconne une seul variable alors où parle des équations différentielles ordinaires (EDO). Si elle a plusieur variable alors on parle des équations aux dérivées partielles (EDP).

1.1.1 Equations différentielles ordinaires

Equation différetielle linéaire du premier ordre

Définition 1.1.2 *(Equation differetielle linéaire du premier ordre)*

Une équation différentielle linéaire du premier ordre écrite sous la forme :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x), \tag{1.1}$$

où :

a et b fonctions données. Elles s'appallent les coefficients de l'équation différentielle et la fonction f est appelée second membre de l'équation différentielle.

Une solution de.(1.1) est une fonction y de classe $\mathbb{C}^1$ sur un intervalle I vérifiant (1.1) pour tout $x \in I$.

La solution générale de l'équation différentielle ordinaire de (1.1) s'écrivent :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

où :

y_h est la solution générale de l'équation homogène.et y_p une solution particulière de (1.1).

Exemple 1.1.1 *On a les équations différentielles linéaires du premier ordre suivantes :*

1. $y'(x) - 4y(x) = 3.$
2. $y'(x) + y(x) = 2e^x.$
3. $(x^2 + 1)y'(x) + xy(x) = 0.$

4. $xy'(x) - y(x) = x$.

Equation homogéne

Définition 1.1.3 *(Equation homogéne)*

La forme de l'équation différentielle homogène associée à (1.1) donnée par :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0. \tag{1.2}$$

Equation homogéne à coefficients constantes

Définition 1.1.4 *(Equation homogéne à coefficients constantes)*

Si a et b sont des constantes, la solution générale de l'équation homogène (1.2) s'écrivent :

$$y_h = Ce^{rx},$$

avec $r = -\frac{b}{a}$ et C est une constante arbitraire.

Exemple 1.1.2 *Résourdre l'équation à coefficients constantes :*

$$y'(x) + 2y(x) = 0,$$

on a

$a = 1, b = 2$, alors $r = -2$,

la solution homogéne est :

$$y_h(x) = Ce^{-2x}.$$

Equation homogéne à coefficients variables Soit I un intervalle où les fonctions a et b sont définies et continues et tel que $a(x) \neq 0$, pour tout $x \in I$, alors la solution générale de (1.2) est :

$$y_h = Ce^{u(x)}.$$

avec $u'(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}$ et C est une constante arbitraire.

Exemple 1.1.3 *Résourdre l'équation à coefficients variables :*

$$y'(x) + xy(x) = 0,$$

et on a $a(x) = 1, b(x) = x, u'(x) = -x$, alors $u(x) = -\frac{x^2}{2}$,

la solution homogéne est :

$$y_h(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La solution particuliére

On commence toujours par regarder s'il n'y a pas de solution évidente, sinon on peut appliquer l'une des méthodes suivantes :

– Seconde membre de la forme :

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x).$$

Pour une équation à coefficients constantes, si le second membre est de la forme :

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x),$$

où P_n est un polynôme de degré n :

– Si $\alpha \neq r = -\frac{b}{a}$,

alors on cherche une solution sous la forme :

$$y_p x) = e^{\alpha x} Q_n(x),$$

où Q_n est un polynôme de degré n.

– Si $\alpha = r = -\frac{b}{a}$,

on cherche une solution sous la forme :

$$y_p(x) = e^{\alpha x} x Q_n(x),$$

où Qn est un polynôme de degré n.

Méthode de variation de la constante Si y_h est une solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière y_p sous la forme :

$$y_p(x) = C(x) y_h(x),$$

et

$$C'(x) = \frac{f(x)}{a(x) y_h(x)}.$$

Exemple 1.1.4 *Résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante :*

$$y'(x) - 4y(x) = 3.$$

– L'équation homogène est :

$$y'(x) - 4y(x) = 0,$$

La solution génerale de l'équation homogène est :

$$y_h(x) = Ce^{4x}.$$

– La solution particuliére est :

$$y_p(x) = -\frac{3}{4}.$$

– La solution générale est :

$$y(x) = Ce^{4x} - \frac{3}{4}.$$

Equation differetielle linéaire du seconde ordre

Définition 1.1.5 *(Equation differetielle linéaire du seconde ordre)*

Une équation différentielle linéaire du seconde ordre écrite sous la forme :

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x), \tag{1.3}$$

où :

a, b et c sont des fonctions connues, appelées coefficients de l'équation différentielle et f est appelée seconde membre de l'équation différentielle.

Une solution de (1.3) est une fonction y de classe $\mathbb{C}^2$ sur un intervalle I vérifiant (1.3) pour tout $x \in I$.

La solution générale de l'équation différentielle ordinaire de (1.3) s'écrivent :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

où y_h est la solution générale de l'équation homogène.et y_p une solution particulière de (1.3).

Exemple 1.1.5 *On a les équations différetielles linéaires du second ordre :*

1. $y''(x) + 4y(x) = \cos(2x) - 3\sin(2x)$.
2. $y''(x) + 16y(x) = 0$.
3. $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$.

Equation homogène

Définition 1.1.6 *(Equation homogène)*

On appelle équation différentielle homogène associée à (1.3) l'équation :

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0. \tag{1.4}$$

Soit I un intervalle où les fonctions a, b et c sont définies et continues et tel que $a(x) \neq 0$, pour tout $x \in I$. Les solutions de l'équation homogène (1.4) sont de la forme :

$$y(x) = \lambda y_1(x) + \mu y_2(x),$$

où :

λ et μ sont des constantes arbitraires et y_1, y_2 deux solutions linéairement indépendantes. Autrement dit, l'ensemble des solutions de (1.4) est un espace vectoriel de dimension 2. La solution de l'équation (1.4) dépend ainsi de deux constantes arbitraires. Il suffit donc de connaître deux solutions linéairement indépendantes de (1.4).

Equation homogène à coefficients constantes Une équation différentielle linéaire de seconde ordre à coefficients constantes est du type :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \tag{1.5}$$

où les réels a, b et c sont donnés dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On appelle équation caractéristique associée à (1.5) :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions $r_1 \neq r_2$ réelles.

La solution général de (1.5) s'écrit :

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$

avec C_1,$C_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitraires.

Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $\overline{r} = \alpha - i\beta$ Comme précédemment on a donc :

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{\overline{r}x},$$

avec C_1,C_2 solutions complexes.

ou bien si on veut les solutions réelles de (1.5) :

$$y(x) = e^{\alpha x}(Acos(\beta x) + Bsin(\beta x)),$$

avec A,$B \in \mathbb{R}$ solutions réelles.

Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une unique solution $r = -\frac{b}{a}$ (racine double) et les solutions de (1.5) s'écrivent :

$$y(x) = (A + Bx)e^{rx},$$

où :

A et B sont deux constantes arbitraires réelles.

La solution particuliére Revenons à l'EDO complète :

$$a(x)y"(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x), \tag{1.6}$$

dont on cherche une solution particulière. On commence toujours par regarder s'il n'y a pas de solution évidente, sinon on peut appliquer l'une des méthodes suivantes.

Cas d'une EDO a coefficients constantes

– Si le seconde membre est de la forme :

$$f(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x),$$

alors on peut chercher une solution sous la forme :

$$y_p(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x).$$

– Si le seconde membre est de la forme :

$$f(x) = e^{\lambda x} P_n(x),$$

avec P_n polynôme de degré n :

$1^{èr}$ cas :

si $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$ i.e.$\lambda \neq r_1$ et $\lambda \neq r_2$ on cherche une solution sous la forme :

$$y_p(x) = e^{\lambda x} x Qn(x),$$

Qn est un polynôme de degré n.

$2^{ièm}$ cas :

si $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ i.e.si $\lambda = r_1$ ou $\lambda = r_2$ avec $r_1 \neq r_2$,on cherche une solution sous la forme :

$$y_p(x) = e^{\lambda x} x^2 Qn(x),$$

où Q_n est un polynôme de degré n.

$3^{ièm}$ cas :

si $\lambda = r_1 = r_2$ on cherche une solution sous la forme :

$$y_p(x) = e^{\lambda x} x^2 Qn,$$

où $Q_n$est un polynôme de degré n.

Cas général méthode de variation des constantes Le principe est le suivant :

on a trouvé une solution de l'équation homogène de la forme :

$$y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x).$$

On va chercher une solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = A(x)y_1(x) + B(x)y_2(x).$$

On va être amenés à chercher des fonctions A et B vérifiant le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} y_1(x)A'(x) + y_2(x)B'(x) = 0 \\ y_1'(x)A'(x) + y_2'(x)B'(x) = \frac{f(x)}{a(x)} \end{array} \right\} \tag{1.7}$$

Ce système est un système linéaire en $(A'(x)$,$B'(x))$ de déterminant :

$$W(x) = \left| \begin{array}{cc} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{array} \right| \tag{1.8}$$

appelé Wronskien de y_1 et y_2. Le système (1.7) a-t-il des solutions oui car son déterminant (1.8) est non nul :

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2'(x) = y_1(x)^2 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'(x) \neq 0,$$

puisque y_1 et y_2 sont linéairement indépendants.

On calcule donc $A'(x)$ et $B'(x)$ solutions du système (1.7), puis on intègre pour trouver $A'(x)$ et $B'(x)$ et en déduire $y_p(x)$.

1. $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$.

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - 5r + 6 = 0.$$

$\Delta = 1 > 0$ alors $r_1 = 2, r_2 = 3$

La solution générale est

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

1.1.2 Equations aux dérivées partielles

Dérivées partielles

Définition 1.1.7 *(Dérivée partielle)*

La dérivée partielle en mathématiques, c'est la dérivation d'une fonction mathématique composée de plusieurs variable de sorte que la dérivation est en relation avec l'une ces variables tout en traitant le reste des variables comme des constantes, et la dérivation parielle est d'une grande utilité dans l'analyse et géométrie différentielle.

Exemple 1.1.6 *trouver les dérivées partielles de* $u(x, y)$:

$$u(x, y) = 2x^2 + y^2.$$

– la dérivée de $u(x,y)$ par rapport à x :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x.$$

– la dérivée de $u(x,y)$ par rapport à y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y.$$

– la dérivée de $u(x,y)$ par rapport à xy :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

– la dérivée de $u(x,y)$ par rapport à yx :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0.$$

Définition 1.1.8 *(Equations aux dérivées partielles)*

Une équation aux dérivées partielles est une relation faisant intervenir une fonction inconnue u de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Les plusieurs variables indépendantes x_1,$x_{2,......}$,x_n, ses dérivées partielles $(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial u}{\partial x_2 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m})$.

La facon générale :

$$F(x_1, x_{2,......}, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial u}{\partial x_2 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}) = 0.$$

Notation

$$u_{x_i} = \frac{\partial u(x_{1,\ldots,}x_n)}{\partial x_i}$$
$$u_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 u(x_{1,\ldots,}x_n)}{\partial x_i^2}.$$

Exemple 1.1.7 *Quelques exemples des equations aux dérivées partielles :*

1. $u_t = k u_{xx} \quad , k \in \mathbb{R}$ (équation de chaleure).
2. $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$ (équation de poisson).
3. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (équation de laplace).
4. $u_{tt} = C^2 u_{xx} \quad , C \in \mathbb{R}$ (équation de d'onde).

Equations aux dérivées partielles linéaires

Définition 1.1.9 *(Equations aux dérivés partielles linéaires)*

Une équation aux dérivées partielles est linéaire par rapport à la fonction u et à toutes ses dérivées partielles. On peut écrire sous la forme :

$$L(u) = f$$

L : l'opérateur aux dérivées partielles associé à une EDP.

Exemple 1.1.8 *Soit l 'équation suivant :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$L(\alpha u+\beta v) = \frac{\partial^2(\alpha u+\beta v)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(\alpha u+\beta v)}{\partial y^2}$$
$$= (\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\beta v)}{\partial x^2}) - (\frac{\partial^2(\alpha u)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\beta v)}{\partial y^2})$$
$$= (\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + (\beta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$
$$= \alpha L(u) + \beta L(v)$$

donc l'équation est linéaire .

1.1.3 Equation aux dérivées partielles quasi-linéaire

Définition 1.1.10 *(Equation aux dérivée partielle quasi-linéaire)*

Une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus élevé de la fonction u.

1.1.4 Equation aux dérivées partielles non-linéaire

Définition 1.1.11 *(Equation aux dérivée partielle non-linéaire)*

On dit qu'une équation aux dérivées partielles est complètement non linéaire si elle dépend non linéairement de ses termes d'ordre le plus élevé.

1.1.5 Equation aux dérivées partialles du premier ordre

Définition 1.1.12 *(Equation aux dérivées partialles du premier ordre)*

Une équation dans laquelle figure une fonction u de plusieurs variables indépendantes $x_1, x_2, ..., x_n$ et des dérivées partielles de premièr ordre de u par rapport à ces variables, c'est-à-dire une équation de la forme :

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, ...u_{x_n}) = 0.$$

est dite une équation aux dérivées partielles de premier ordre Toute fonction $u(x_1, ..., x_n)$ qui satisfait identiquement à cette équation est une solution de celle-ci.

Equation aux dérivées partielles du seconde ordre

Définition 1.1.13 *(Equation aux dérivées partielles du seconde ordre)*

On appelle EDP linéaire d'ordre inférieur ou égale 2 dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et d'inconnue

$$u : \Omega \longmapsto \mathbb{R},$$

une équation du type

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ji}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + g(x)u(x) = h(x).$$

Par convention, on supposera que $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $h(x)$ est souvent appelé terme source de l'équation.

où $x \in \Omega$ admet composantes, notées $x = (x_1, ..., x_N)$. On écrira aussi indifférement.

Ecriture vectorielle : On introduit les notations suivantes :

- $A(x) = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ la matrice $N \times N$ symétrique des coefficients devant les termes d'ordre 2.
- $F(x) = (f_i(x))_{1\leq i\leq N}$ le vecteur de taille N des coefficients devant les termes d'ordre 1.
- $Hu(x)$ la matrice Hessienne de u, $(Hu(x))_{ij} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}$.
- $\nabla u(x)$ le gradient de u, $(\nabla u(x))_i = \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}$.

ainsi que la notation (appelée produit scalaire de Frobenius)

$$A : B = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} b_{ij},$$

où A et B sont deux matrices de composantes respectivement a_{ij} et b_{ij}.

Avec ceci l'E.D.P. d'ordre 2 se réécrit

$$A(x) : Hu(x) + F(x).\nabla u(x) + g(x)u(x) = h(x).$$

Exemple 1.1.9 *On a les équations aux dérivées partielles du second ordre*

1. $u_{xx} + u = 0.$
2. $u_{xy} = 0.$

1.1.6 Classification des équations aux dérivées partielles dans $\mathbb{R}^N$

Dans la classification des équations aux dérivées partielles il éxiste trois types différénts : équations elliptiques, paraboliques et hyperboliques.

Equations aux dérivées partielles elliptiques

Définition 1.1.14 *(Equations aux dérivées partielles elliptiques)*

Une E.D.P linéaire du seconde ordre est dite elliptique en $x \in \Omega$ si la matrice $A(x)$ n'admet que des valeurs propres non nulles et qui sont toutes de même signe.

Exemple 1.1.10 *(Equation de Laplace)*

Soit $u(x, y, ...)$ une fonction définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, et vérifiant dans ce domaine l'équation de Laplace :

$$\Delta u = 0$$

les fonctions qui vérifent cette équation sont dites harmoniques dans Ω.

Equations aux dérivées partielles hyperboliques

Définition 1.1.15 *(Equations aux dérivées partielles hyperboliques)*

Une E.D.P. est dite hyperbolique en $x \in \Omega$ si $A(x)$ n'admet que des valeurs propres non nulles et qui sont toutes de même signe sauf une de signe opposé.

Exemple 1.1.11 *(Equation des ondes)*

Soit $u(x, y, ..., t)$ une fonction des variables d'espace $(x, y, ...)$ et du temps t définie sur domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ et pour t positif. L'équation des ondes pour la fonction u s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0.$$

Equations aux dérivées partielles paraboliques

Définition 1.1.16 *(Equations aux dérivées partielles paraboliques)*

On dit que l'E.D.P est parabolique en $x \in \Omega$ si $A(x)$ admet $\mathbb{N} - 1$ valeurs propres non nulles de même signe et une valeur propre nulle.

Exemple 1.1.12 *(Equation de la Chaleur)*

Soit $u(x, y, ...)$ une fonction des variable d'espace $(x, y, ...)$ et du temps t , définie sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ et pour t positif. L'équation de la chaleur pour la fonction u s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f,$$

avec f donnée

C'est cette équation qui régit, entre autre, l'évolution de la température u en un point (x, y, z) d'un domaine Ω au cours du temps t en présence d'une source de chaleur volumique, définie par f C'est cette même équation qui décrit l'évolution de la concentration d'un produit dans un solvant (d'où le nom d'équation de la diffusion).

Chapitre 2

Méthode De Tau Pour Résoudre Equations Différentielles Ordinaires Et Equations Aux Dérivées Partielles

2.1 Polynômes orthogonaux

Définition 2.1.1 *(Polynômes orthogonaux)*

En mathématiques, une suite de polynômes orthogonaux est une suit infinie de polynômes $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ à coefficients réels dans laquelle chaque $p_n(x)$ est de degré n, et telle que les polynômes de la suite sont orthogonaux deux à deux produit scalaire de fonctions données.

Cette notion est utilisée par exemple en cryptologie ou en analyse numérique De nombreux types de polynômes orthogonaux particuliers comme ceux de Legendre, de Tchebyshev permettent d'approcher une fonction et par leurs propriétés de résoudre plus simpliment des équation différentielles.

On dit qu' une suite de polynômes $p_0(x), \ldots.., p_n(x)$ est de degré n est orthogonale si

$$(p_n \diagup p_m) = 0, \forall n \neq m$$

2.1.1 Polynômes de Tchebyshev de première espèce T_n

Définition 2.1.2 *(Polynomes de Tchebyshev de première espèce T_n)*

Les polynôme de Tchebyshev de première éspace sont les uniques polynômes $(T_n)_{n \geq 0}$définis sur $[-1, 1]$ par :

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ou encore $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

les premiers polynômes sont :

1. $T_0(x) = 1.$
2. $T_1(x) = x.$
3. $T_2(x) = 2x^2 - 1.$
4. $T_3(x) = 4x^3 - 3x.$
5. $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$

Plus généralement :

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=1}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^m \frac{(n-m-1)}{m(n-2m)} (2x)^{n-2m}.$$

Quelques propriétés :

– Le degré de T_n est egal à n et son coefficient dominant est 2^{n-1}.

– T_n est paire si n est paire, impare si n impaire.

– T_n est la solution de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)T_n'' - xT_n' + n^2T_n = 0.$$

– T_n satisfait la relation de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{c} T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) = 1 \qquad \forall n \geq 1 \\ T_1(x) = x \end{array}\right\}$$

– Les polynômes T_n orthogonaux sur $L_2([-1,1], w(x)dx)$ avec $w(x)$ définie

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et sont normalisées par l'exigence que $T_1(1) = 1$.

2.1.2 Polynômes de Tchebyshev de seconde espèce u_n^2

Définition 2.1.3 *(Polynômes de Tchebyshev de seconde espèce U_n)*

Les polynôme de Tchebyshev de seconde éspace sont les uniques polynômes $(U_n)_{n\geq 0}$définis

sur $-1, 1$ par :

$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$.

les premiers polynômes sont :

1. $U_0(x) = 1$.
2. $U_1(x) = 2x$.
3. $U_2(x) = 4x^2 - 1$.

4. $U_3(x) = 8x^3 - 4x$.

5. $U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$.

   Plus généralement :

$$U_n(x) = \sum_{m=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^m C_m^{n-m} (2x)^{n-2m}.$$

Quelques propriétés

– Le degré de U_n est egal à n et son coefficient dominant est 2^n.

– U_n est paire si n est paire, impare si n impaire.

– U_n est la solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)U_n'' - 3xU_n' + n(n+2)U_n = 0.$$

– U_n satisfait la relation de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{c} U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \\ U_0(x) = 1 \qquad \forall n \geq 1 \\ U_1(x) = 2x \end{array} \right\}$$

– Les polynômes U_n orthogonaux sur $L_2([-1,1], \sqrt{1-x^2}dx)$.

2.2 Méthode de Tau pour résoudre équation différentielle ordinaire

Définition 2.2.1 *(La Méthode de Tau)*

La méthode de Tau est utilisée pour trouver la solution numérique de linéaire équation différentielle à coefficients rationnels dans un intervalle fini en substituant un polynôme de n degré dans le problème donné et ajout d'un terme de perturbation sur le côté droit de l'équation différentielle. Le terme de perturbation ajouté doit satisfaire à deux exigences. La première exigence est d'équilibrer le système des équations linéaires algébriques lorsqu'un polynôme de n degré avec $n+1$ coefficients inconnus est substitué dans l'équation différentielle considérée.

Ensuite, le système des équations algébriques linéaires deviennent solubles. Deuxièmement, le terme de perturbation doit soyez suffisamment petit.

Considérons une équation différentielle linéaire

$$Dy(x) = f(x), \qquad x \in [a, b], \tag{2.1}$$

Avec des conditions supplémentaires

$$(l_r, y) = \sigma_r, \qquad r = 1, 2, ..., v, \tag{2.2}$$

on a

$$D \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{v} \sum_{j=0}^{\alpha_i} p_{ij} x^j \frac{d^i}{dx^i} \tag{2.3}$$

est la classe des opérateurs différentiels linéaires d'ordre v à coefficients polynômiaux et l_r est une fonction d'évaluation ponctuelle linéaire agissant sur la fonction différentiable $y(x)$ et ses dérivées. Par conséquent, $(l_r, y) = \blacksquare r$, représente ici le conditions initiales, limites ou mixtes du problème (2.1) et (2.2). L'idée de base de la méthode Tau consiste à approximer la solution exacte du problème (2.1) et

(2.2) par substitution d'un polynôme de n degré

$$y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ , \tag{2.4}$$

qui est défini comme approximation de Tau dans le problème (2.1) et (2.2).

Ensuite, un système surdéterminé avec $n + \blacksquare + 1$ équations algébriques linéaires et $n+1$ coefficients inconnus a_i. Afin de trouver une solution polynomiale approximative $y_n(x)$, un terme de perturbation $Hn(x)$ est ajouté au côté droit de l'équation (2.1).

Donc le problème (2.1) et (2.2) devient

$$Dy_n(x) = f(x) + H(x) \ , \quad x \in [a, b], \tag{2.5}$$

Avec des conditions supplémentaires

$$(l_r, y) = \sigma_r, \qquad r = 1, 2, ..., v, \tag{2.6}$$

qui est défini comme le problème de Tau.

Le polynôme de Tchebyshev, $T_n(x)$, est la meilleure approximation algébrique par un polynôme de degré n et $x \in [-1; 1]$, le terme de perturbation est

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^{v-1} \tau_{n-i} T^*_{n-1}(x) \ , \tag{2.7}$$

où τ_{n-i} , sont des paramètres libres qui équilibrent le système surdéterminé d'équations algébriques linéaires $T^*_{n-1}(x)$, est le polynôme de Tchebyshev défini sur $[a; b]$

.

Enfin, la solution du problème (2.1) et (2.2) est approchée par l'approximation polynomiale (2.4) avec le degré de Tau n. La solution polynomiale approximative (2.4) et la solution polynomiale exacte du problème de Tau (2.5)-(2.6) .

Notez qu'il existe une suite unique de $\{Q_n(x)\}$ pour tout opérateur différentiel linéaire D. Les polynômes canoniques sont défini par la relation fonctionnelle

$$DQ_n(x) = x^n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.8}$$

L'approximation de Tau $y_n(x)$ défini dans l'équation (2.4) peut s'écrire en terme de polynômes canoniques du problème de Tau (2.5) avec le terme de perturbation (2.7), qui est

$$\begin{aligned} Dy_n(x) &= f(x) + \sum_{i=0}^{v-1} \tau_{n-i} T^*_{n-1}(x) \\ &\Rightarrow Dy_n(x) = \sum_{k=0}^{\delta} f_k x^k + \sum_{i=0}^{v-1} \tau_{n-i} \sum_{j=0}^{n-i} c_j^{(n-i)} x^j \end{aligned}$$

puis

$$y_n(x) = \sum_{k=0k}^{\delta} f_k Q_k(x) + \sum_{i=0}^{v-1} \tau_{n-i} \sum_{j=0}^{n-i} c_j^{(n-i)} Q_j(x), \tag{2.9}$$

f_k est le coefficient de x^k de $f(x)$ et $c_j^{(n-i)}$ est le coefficient de x^j du $(n-i)^{ème}$ polynôme de Tchebyshev.

Notez que si la fonction $f(x)$ n'est pas un polynôme, il sera d'abord approximer par un polynôme qui peut être généré d'un problème de valeur initiale avec la solution exacte de la fonction $f(x)$. Ce problème est résolu par la méthode de Tau et puis un polynôme. On peut obtenir une solution approximative de la fonction $f(x)$.

Dans l'équation (2.9), c'est il est clair que l'approximation de Tau $y_n(x)$ ne dépend que d'une suite de polynômes canoniques $\{Q_n(x)\}$. Si la suite de polynômes canoniques $\{Q_n(x)\}$ est trouvée, toutes les paramètres inconnus τ_{n-i}, peuvent être déterminés par les conditions supplémentaires et l'approximation de Tau $y_n(x)$, c'est-à-dire la solution approximative du problème donné (2.1) et (2.2).

Exemple 2.2.1 *On considére*

$$D := \frac{d^3}{dx^3} + 1.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} Dx^n &= (\frac{d^3}{dx^3} + 1)x^n \\ &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} + x^n \\ &= D[n(n-1)(n-2)Q_{n-3}(x) + Q_n(x)], \end{aligned}$$

ensuite, nous avons

$$Q_n(x) = x^n - n(n-1)(n-2)Q_{n-3}(x).$$

Par conséquent, en utilisant la relation de récurrence ci-dessus, nous pouvons obtenir

$$Q_0(x) = 1,$$
$$Q_1(x) = x,$$
$$Q_2(x) = x^2,$$
$$Q_3(x) = x^3 - 6,$$
$$Q_4(x) = x^4 - 24x,$$
$$\vdots$$

2.2.1 Méthode de Tau-collocation

Définition 2.2.2 *(La méthode de Tau-collocation)*

soit $D_v \iff \sum_{i=0}^{v} q_i(x)\frac{d^i}{dx^i} \in D$ la classe des opérateurs différentiels linéaires d'ordre v à coefficients variables $q_i(x)$ et soit $D_{vr} \mid_{x=x_r} \iff \sum_{i=0}^{v_r} q_{ir}(x_r)\frac{d^i}{dx^i} \mid_{x=x_r}$est la fonctionnelle d'évaluation agissant sur $y(x)$. La méthode de Tau-collocation pour les EDO_s est trouver la solution approchée polynomiale d'un EDO linéaire avec coefficients variables

$$D_v y(x) = f(x), \quad x \in [a, b] \tag{2.10}$$

avec des conditions supplémenaires

$$D_{vr} \mid_{x=x_r} y(x) = \sigma_r(x_r), \quad r = 1, 2, ..., v \tag{2.11}$$

La solution exacte du problème (2.10) et (2.11) est approché en substituant un polynome de nième remplaçant un $u_n(x)$ polynome de degré n dans l'équation $y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ au problème lui-meme.alors le proplème de Tau associé du problème (2.10) et (2.11) est formé en ajoutant un terme de perturbation $H_n(x)$ au coté droit du problème (2.10) et est défini comme

$$D_v y(x) = f(x) + H(x), x \in [a, b] \tag{2.12}$$

Avec des conditions

$$D_{vr} \mid_{x=x_r} y(x) = \sigma_r(x_r), r = 1, 2, ..., v \tag{2.13}$$

Soit $\tau = (\tau_0, \tau_1, ..., \tau_{\varphi-1})$ et φ sont paramètres libres. Le terme de perturbation $H_n(x)$ est choisi comme

$$H_n(x) = g_n(x; \tau) V_{n-v+1}^{[a,b]} \tag{2.14}$$

où $g_n(x; \tau)$ est une fonction de x avec φ des paramètres libres $\tau_j = 0, 1, ..., \varphi - 1$, et $V_{n-v+1}^{[a,b]}(x)$ pour $n - v + 1 \geq 0$ est un polynôme orthogonal avec un degré $n - v + 1$ défini sur $[a, b]$. Le polynôme orthogonal est choisi le polynôme de Tchebyshev ou de Legendre. Notez que les paramètres libres $\tau_j = 0, 1, ..., \varphi - 1$ et la fonction interne $g_n(x; \tau)$ équilibre le système surdéterminé des équations algébriques linéaires. La forme du terme perturbation $H_n(x)$ est choisi exactement $n - v + 1$ zéros du polynôme orthogonal $V_{n-v+1}^{[a,b]}(x)$. Dans le cas, en utilisant le polynôme de Tchebyshev, les zéros peuvent être générés par

$$\frac{b-a}{2} \cos \frac{(2(n-v+1)-1)\pi}{2(n-v+1)} + \frac{a+b}{2}$$

Tout au long du calcul parce que les zéros de l'orthogonale polynôme $V_{n-v+1}^{[a,b]}(x)$ sont utilisés pour la collocation pendant le processus de formulation du méthode de Tau-collocation pour les EDO_s.

On peut trouver la solution polynomiale approximative $y_n(x)$ du problème (2.13) avec le terme de perturbation (2.14), seulement $n+1$ coefficients inconnus a_i, pour $i = 0, 1, ...n$, alors que les paramètres libres τ_j, pour $j = 0, 1, ..., \varphi - 1$ peut être ignoré. Il ya v équations algébriques linéaires sont donnés en utilisant les conditions (2.13), $n-v+1$ équations algébriques linéaires supplémentaires est nécessaire pour déterminer le $n+1$ coefficients inconnus a_i, pour $i = 0, 1, ...n$. Ces équations supplémentaires sont données par collocation $n-v+1$ zéros du polynôme orthogonal $V_{n-v+1}^{[a,b]}(x)$ dans l'équation (2.12). Par conséquent, le degré de $V_{n-v+1}^{[a,b]}(x)$ est défini comme $n-v+1$. Ensuite, on obtient un système de $n+1$ équations algébriques linéaires avec $n+1$ coefficients inconnus a_i,$i = 0, 1, ..., n$.

Soit $y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x_n$ où a_k pour $k = 0, 1, ...n$,sont les coefficients inconnus $a_n = (a_0, a_1, ..., a_n)$ et $x_n = (x^0, x^1, ..., x^n)'$. Le $i^{éme}$ dérivée de $y_n(x)$ par rapport x peut s'écrire

$$\frac{d^i}{dx^i} y_n(x) = a_n \prod_i (x)$$

où

$$\prod_i (x) \text{ est un vecteur } \prod_i (x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 \quad \text{pour } r = 1 = 0, 1, ...i-1 \\ \frac{r}{(r-i)} x^{(r-i)} \qquad \text{pour } r = i, ...n \end{array} \right\}.$$

Example. 1

– Nous prenons le degré de Tau $n = 3$ et utilisons polynôme de Tchebyshev avec le terme de pertubation $H_n(x)$, nous avons le probleme

et

$$y_3(x) = 1 - x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y_3(x) + x\frac{d}{dx}y_3(x) + (\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2})y_3(x) = g_n(x,\tau)T_2^*(x) \qquad x \in [0,1]$$

avec conditions aux limites

$$y_3(0) = 1$$

$$y_3(1) = 0$$

– On peut formuler les matrices s et F_{n-v}

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}) \\ x + (\frac{x^3}{4} + \frac{1}{2}x) \\ 2 + 2x^2 + (\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}x^2) \\ 6x + 3x^3 + (\frac{x^5}{4} + \frac{1}{2}x^3) \end{pmatrix} = g_n(x;\tau)T_2^*(x) \tag{2.15}$$

– Ensuite nous utilisons la méthode de collocation les zéros de $T_2^*(x)(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2})$ dans (2.15) et on a

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.682138476 & 0.50536166524 \\ 1.435794890 & 0.2204551101 \\ 3.954080987 & 0.8896892381 \\ 7.411092011 & 2.053731513 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

En utilisant des conditions aux limites on a

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

Nous avons la solution du système d'équations algébriques linéaires

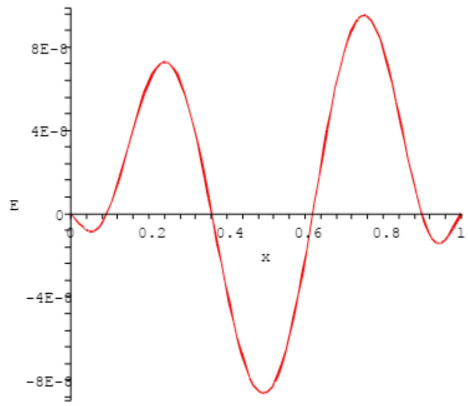
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.6821383476 & 1.435794890 & 3.954080987 & 7.411092011 & 0 \\ 0.5053616524 & 0.2204551101 & 0.8896892381 & 2.053731513 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

En résolvant l'équation (2.18) on obtient l'approximation de Tau

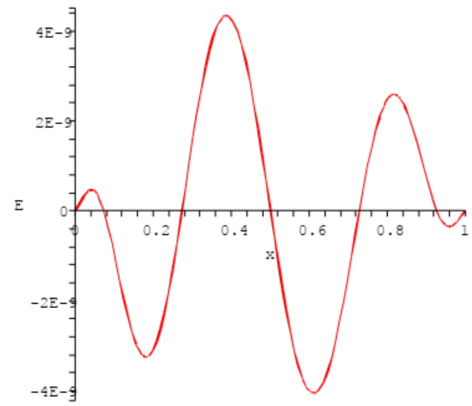
$$y_3(x) = 1 - 0.9883874828x - 0.2380798838x^2 + 0.2264673666x^3$$

avec une précision de 10 chiffres.

Dans le tableau 1 :nous donnons l'erreur absolue maximale $E = \max |y(x) - y_n(x)|$ pour l'éxemple. 1 en utilisant la méthode de Tau -collocation (TC) avec des degrés $n = 1, ...8$. Les résultats sont comparés aux résultats obtenu par la formule récursive de la méthode de Tau dans le même degré. Les résultats montrent que la précision de la méthode de Tau-collocation est similaire de la méthode de Tau. Les courbes d'erreurs obtenues pour l'éxemple. 1 par la méthode de Tau-collocation avec des degrés $n = 7$ et $n = 8$ sont présentées dans la figure. 1.



$n = 7$



$n = 8$

FIG. 2.1 – Les courbes d'erreurs obtenues pour l'éxemple. 1 par la méthode de Tau-collocation avec des degrés $n = 7$ et $n = 8$.

n	E(Tau)	E(TC)
1	$3.5088 * 10^{-2}$	$3.5088 * 10^{-2}$
2	$1.2640 * 10^{-2}$	$1.0865 * 10^{-2}$
3	$4.9440 * 10^{-3}$	$4.8886 * 10^{-3}$
4	$3.8106 * 10^{-4}$	$3.6397 * 10^{-4}$
5	$3.1631 * 10^{-5}$	$3.0562 * 10^{-5}$
6	$1.6337 * 10^{-6}$	$1.6506 * 10^{-8}$
7	$8.8297 * 10^{-8}$	$9.5120 * 10^{-8}$
8	$4.2741 * 10^{-9}$	$4.3420 * 10^{-9}$

Table 1 Les erreurs absolues de l'exemple. 1

Example. 2

Considéros l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^4}{dx}y(x) + 4y(x) = 0 \qquad x \in [-1, 1]$$

avec conditions supplémentaires

$$\begin{aligned} y(-1) &= e^2 \\ y(1) &= 1 \\ \frac{d^2}{dx^2}y(-1) &= 2e^{-2}\tan(1) \\ \frac{d^2}{dx^2}y(1) &= -2\tan(1) \end{aligned}$$

La solution exacte de ce probléme est

$$y(x) = \sec(1)e^{1-x}\cos x$$

On applique la méthode de Tau-collocation pour résoudre ce problème.

Dans le Tableau 2, nous donnons l'erreurs absolues maximales $E = \max |y(x) - y_n(x)|$ pour

L'éxemple. 2 par la méthode Tau-collocation (TC) avec degrés $n = 4, 6, 8, ..., 18$.

Les solutions approchées sont comparées avec les résultats obtenues par la méthode de série de Tchebyshev (CEM) .

n	E(TC)	E(CEM)
4	$1.8357 * 10^{-2}$	_
6	$5.1610 * 10^{-3}$	_
8	$1.6647 * 10^{-5}$	$4.22 * 10^{-3}$
10	$3.9606 * 10^{-8}$	$2.91 * 10^{-5}$
12	$9.0601 * 10^{-11}$	$3.57 * 10^{-7}$
14	$1.7822 * 10^{-13}$	$1.25 * 10^{-9}$
16	$2.6947 * 10^{-16}$	$6.29 * 10^{-12}$
18	_	$4.84 * 10^{-14}$

Table 2 Les erreurs absolues de l'exemple. 2

2.3 Méthode de Tau pour résoudre équations aux dérivées partielles

Définition 2.3.1 *(Méthode de Tau)*

On applique cette méthode pour résoudre les problèmes avec des conditions aux limites non périodiques. Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ une base orthogonale ne vérifiant pas les conditions aux limites, et si F contient des dérivations d'ordre K les conditions aux limites sont au nombre de K. Donc, la méthode de Tau consiste à résoudre le problème est de trouver

$$u_n = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n$$

dans B_N telle que

$$\left\{ \begin{array}{cc} P_{N-K}^{\perp} = 0 & N-K \text{ équations} \\ Su_N = 0 & K \text{ équations} \end{array} \right\}$$

$P_{N-K}^{\perp}$ designe la projection orthogonale de H sur B_{N-K}.

2.3.1 Projecteur de la méthode Tau

On cherche u_n dans l'espace affine de dimension $N-K$ des éléments B_N vérifiant les K conditions aux limites.

Exemple 2.3.1 *Equation de chaleur*

$$\left\{ \begin{array}{cc} \frac{\partial u}{\partial t} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x} + f & x \in [-1,1], t \geq 0 \\ u(-1,t) = g_1, u(1,t) = g_2 & t < 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in [-1,1] \end{array} \right\}$$

$H = L^2([-1,1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$ avec comme fonctions de base les polynômes de Tchebyshev $(T_n)_{n\in N}$. On cherche la solution sous la forme :

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{N} a_n(t) T_{n(x)} \qquad \text{dans } B_N$$

avec B_N de dimension $N+1$ (notations spéciales à cet exemple).

on pose :

$$\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{(2)}(t) T(x).$$

les coefficients $a_n^{(2)}$ sont donnés par la formule :

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{c_n} \sum_{p=n+2}^{N} p(p^2 - n^2)a_p$$

$$c_n = \begin{Bmatrix} 0 \ \text{ si } n < 0 \\ 2 \ \text{ si } n = 0 \\ 1 \ \text{ si } n > 0 \end{Bmatrix}$$

d'où

$$R_N = \sum_{n=0}^{N} (\frac{da_n}{dt} - va_n^{(2)})T_n - \sum_{n=0}^{\infty} f_n T_n$$

Comme $K = 2$, on pose que la projection de ce résidu est nulle sur B_{N-2}

$\frac{da_n}{dt} = va_n^{(2)} + f_n \quad n = 0, 1, ..., N-2 \qquad :N-1$ équations.

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{Bmatrix} \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(-1) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n = g_1 \\ \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(1) = \sum_{n=0}^{N} a_n = g_2 \qquad \text{:2 équation} \end{Bmatrix}$$

Ces $N+1$ équations permettent de trouver les $N+1$ inconnues $a_n(t)$, en utilisant les conditions initiales

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n^0 T_{n(x)}.$$

2.4 Méthode de Tau-Collocation

Définition 2.4.1 *(Méthode de Tau-Collocation)*

Les conditions d'application pour cette méthode sont les même que pour celle de Tau.

Comme pour la méthode Tau,$(\varphi_n)_{n\geq 1}$ est une base orthogonale ne vérifiant pas les K conditions.

Comme pour la Collocation, $(x_i)_{1\leq i\leq N}$ sont N points du domaine Ω et on sait appliquer rapidement la matrice $M = (\varphi_n(x_i))_{\substack{n=1,N\\ i=1,N}}$ et son inverse.

On calcule la projection P_N^C avec des allers et retours entre l'espace spectral et l'espace physique.

La méthode de Tau-Collocation consiste à chercher $u_n \in B_N$ telle que

$$P^{\perp}_{N-K} P^C_N R_N = 0$$

$$S_{u_N} = 0$$

ou :

$P^{\perp}_{N-K}$ est la projection orthogonale de R_N sur B_{N-K}.

2.4.1 Interprétation intrinsèque

La méthode de Tau-Collocation consiste à chercher u_N dans l'espace affine de dimension $N-K$ des $U_N \in B_N$ vérifiant $B_N u = g$ tel que le résidu R_N annule la projection $P^{\perp}_{N-K} P^C_N$ de H sur B_{N-K}.

Exemple 2.4.1 *Equation de Burgers avec terme dissipatif non périodique :*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \qquad x \in [-1,1], t \geq 0$$

$$u(-1,t) = g_1, u(1,t) = g_2 \qquad t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in [-1,1]$$

$H = L^2([-1,1], \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$ base des polynômes de Tchebyshev.

En choisissant comme points de collocation les $x_j = \cos(j\frac{2\pi}{N+1}), j = 0, ..., N$ et N pair.

On peut utiliser l'algorithme de transformation de Fourier rapide pour appliquer la matrice

$$\begin{aligned} M &= (T_n(x_j))_{\substack{n=1,N\\ j=1,N}} \\ &= (\cos[n \arccos x_j])_{\substack{n=1,N\\ j=1,N}} \\ &= (\cos nj\frac{2\pi}{N+1})_{\substack{n=1,N\\ j=1,N}} \end{aligned}$$

Les $N+1$ équations du problème approché s'écrivent comme suit :

B_N étant de dimension $N+1$.

Trouver $u_N = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n$ dans B_N telle que

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dt} + b_n = va_n^{(2)} + f_n \qquad n = 0, N-2 \\ \sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_n = g_1 \\ \sum_{n=0}^{N} a_n = g_2 \end{aligned}$$

avec

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{c_n}\sum_{\substack{p=n+2\\ step2}}^{N} p(p^2-n^2)a_p$$

et

$$c_n = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ si } n < 0 \\ \\ 2 \text{ si } n = 0 \\ \\ 1 \text{ si } n > 0 \end{array} \right\}$$

b_n coefficients spectraux de $P_N^C(u_N \frac{\partial u_N}{\partial x})$.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons d'abord étudié le sujet des équations différentielles, où nous avons vu qu'ils ont été divisés en deux sections. ordinaire et les équations aux dérivées partielles.

Nous avons fourni quelques définitions de base de ces équations et quelques exemples, le but de sa solution est de trouver les fonctions mathématiques qu'il réalise. Il y a plusieurs façons de le résoudre, y compris la méthode Tau où nous avons finalement expliqué la façon de Tau de trouver une solution précise aux équations différentielles habituelles et partielles.

Bibliographie

[1] A. M. Wazwaz, Partial Differential Equations Methods and Applications, A.A. Balkema Publishers, 2002.

[2] C. L´ anczos, Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. J. Math. Phys., vol. 17, pp. 123-199, 1938.

[3] C. Kesan, Chebyshev polynomial solutions of second-order linear partial differential equations, Applied Mathematics and Computation, Vol. 134, pp. 109-124, 2003.

[4] D. Gottlieb et S. A. Orszag, Numerical anamysis of spectal methods, Soc. Ind. and appl. Math, philadelphia, 1977.

[5] Eduardo L. Ortiz, The Tau method, Siam. J. Numer. Vol. 6, No. 3, 1969.

[6] Eduardo L. Ortiz et K. S. Pun, Numerical solution of nonlinear partial differential equations with the Tau method, Journal of Computational and Applied Mathematics. Vol. 12&13, pp. 511-516, 1985.

[7] I. Bouaricha. Méthodes spectrales et application _ des problèmes hyperboliques. Université Abdou Bekr. Tlemcen.

[8] J. Pour-Mahmoud, M.Y. Rahimi-Ardabili, S. Shahmorad, Numerical solution of the system of Fredholm integro-differential equations by the Tau method, Applied Mathematics and Computation. Vol. 168, pp. 465–478, 2005.

[9] M. H. Aliabadi et E. L. Ortiz, Numerical treatment of moving and free boundary value problems with the Tau Method, Comput. Math. Applic. Vol. 35, pp. 53-61, 1998.

[10] O. Thual, Introduction aux méthodes spectrales, Institut National Polytechnique, France, 1996.

[11] Sam Chi Ngai, Numerical Solution of Partial Differential Equations with the Tau-Collocation Method (Thèse de doctorat), City University of Hong Kong, 2004.

Résumé

Les équations différentielles sont divisées en deux parties, à savoir les équations différentielles partielles et ordinaires, où il existe plusieurs façons de résoudre ces équations, donc dans ce travail, nous avons essayé de mentionner l'une de ces méthodes, qui est la méthode tau collocation, qui dépend de la méthode tau pour approximer la solution de ces équations différentielles dans un champ limité et avec des conditions initiales et limites, où nous avons d'abord défini les équations différentielles partielles et Ordinaires, mentionné leurs types et fourni des exemples d'entre eux, puis nous avons étudié la méthode Tau pour résoudre ces équations différentielles pour en fournir des exemples.

Mots-clés: Équation différentielle ordinaire, équation différentielle partielle, Méthode Tau, Méthode Tau collocation

ملخص

تنقسم المعادلات التفاضلية الى قسمين هما المعادلات التفاضلية الجزئية والاعتيادية حيث هناك عدة طرق لحل هذه المعادلات , فحاولنا في هذه المذكرة ذكر طريقة من هذه الطرق وهي طريقة تاو كولوكايتون التي تعتمد على طريقة تاو لتقريب حل هذه المعادلات التفاضلية في مجال محدود وبشروط اولية و حدودية , حيث قمنا اولا بتعريف المعادلات التفاضلية الجزئية والاعتيادية وذكر انواعها وتقديم امثلة عنها ثم قمنا بدراسة طريقة تاو في حل هذه المعادلات التفاضلية و تقديم امثلة عنها.

الكلمات المفتاحية :معادلة تفاضلية اعتيادية,معادلة تفاضلية جزئية, طريقة تاو,طريقة تاو كولوكايتون .

Abstract

Differential equations are divided into two parts, namely partial and ordinary differential equations, where there are several ways to solve these equations , so in this work we tried to mention one of these methods, which is the tau collocation method, which depends on the tau method to approximate the solution of these differential equations in a limited field and with initial and boundary conditions, where we first defined the partial and Ordinary Differential Equations, mentioned their types and provided examples of them, and then we studied the Tau method in solving these differential equations to provide examples of them.

Key words: Ordinary Differential Equation, Partial Differential Equation, Tau method, Tau colocation method.