



Université Mohamed Khider de Biskra
Faculté des sciences et technologie
Département de génie électrique

MÉMOIRE DE MASTER

Sciences et Technologies
Filière d'Automatisme
Option : Automatique

Réf. : ...

Présenté et soutenu par :

• Salah Eddine Bouakkaz • Ben Djaballah Tahar

Le : mardi 28 juin 2022

Réduction de modèles d'un système d'ordre fractionnaire

Jury :

Dr.	Mihi Assia	MCA	Université de Biskra	Rapporteur
Dr.	Ben Chaaban Fateh	MCA	Université de Biskra	Président
Dr.	Abada Khaled	MCA	Université de Biskra	Examineur

Année universitaire : 2021 - 2022

TABLE DES MATIERES

Remercement

Dedicace

Introduction générale.....01

Chapitre I : système fractionnaire

Introduction.....04

I.1. Historique.....04

I.2. La modélisation d'ordre Fractionnaire05

I.3. Commande d'ordre fractionnaire06

I.4. Domaines d'application des systèmes fractionnaires.....06

I.4.1. Électronique06

I.4.2. Electrotechnique08

I.4.3. Automatique09

I.5 Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire09

I.5.1 Approximation numérique des systèmes d'ordre fractionnaire.....09

I.5.2 fonction de transfert.....10

I.6. Approximation analogique des systèmes d'ordre fractionnaire.....10

I.7. Méthode d'Oustaloup.....11

Conclusion.....14

Chapitre II: Réduction du modèle

Introduction16

II.2 Réduction par diagonalisation17

II.2.1 Négliger la partie rapide17

II.2.2 Négliger la dynamique des modes rapides	17
II.3 Agrégation	18
II.5. Réduction de modèles par décomposition de Schur	22
II.7. Approximation de Padé	31
II.8 Réduction optimale	32
Conclusion	34
Chapitre III : Resultats de simulation.....	36-60
Conclusion générale.....	62
Références Bibliographique.....	64

Introduction générale

INTRODUCTION GENERALE

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul régulier (ordre entier). Durant les dernières décennies, le calcul fractionnaire s'est développé et a pris de l'importance aussi bien dans le domaine des mathématiques que dans des applications scientifiques. Aujourd'hui, l'intérêt du calcul d'ordre fractionnaire et ses applications ne cesse de grandir dans plusieurs domaines. A partir de 2004, un workshop, qui se déroule tous les deux ans, spécialement dédié au calcul d'ordre fractionnaire et ses applications, a été créé.

L'application des concepts du calcul fractionnaire dans le domaine des systèmes de commande automatique et de l'identification par des modèles d'ordre fractionnaire remonte aux années soixante, mais ce n'est que pendant les années 90 que les contrôleurs fractionnaires gagnent de plus en plus d'intérêt au sein de la communauté de commande. Le concept de commande d'ordre fractionnaire signifie que les systèmes commandés et les correcteurs sont représentés par des équations différentielles et des transferts d'ordre non entier. Dont le but principal est d'améliorer les performances et la robustesse des systèmes de commande classiques par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaires dans les algorithmes de commande.

De nombreux phénomènes physiques peuvent être décrits par des modèles non entiers, tels que certains systèmes thermiques ou électrochimiques, mais vu le manque, voir l'inexistence, de moyens techniques (logiciels) pour l'analyse, simulation et implémentation ce genre de modèles, il est nécessaire de revenir vers des modèles d'ordre entier via des approximations.

Beaucoup de recherches ont été entamées dans ce sens, et plusieurs méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire dans le domaine analogique ou numérique ont été élaborées. Dans ce mémoire certaines de ces méthodes sont énumérées, dont la méthode d'Oustaloup est détaillée. L'ordre du système d'ordre entier résultant pourrait être extrêmement élevé. Ainsi, une approximation d'ordre inférieur du problème d'origine peut être trouvée en utilisant la méthode de réduction du modèle optimal. Le système d'ordre entier d'ordre élevé peut être suffisamment bien approché par un modèle d'ordre réduit.

L'objectif de ce travail est de présenter les fondements de la méthodologie de réduction de modèle pour obtenir le modèle réduit, où certaines méthodes de réduction d'ordre de modèle sont énumérées. Dans cette étude, deux méthodes sont étudiées et analysées dans le but de tirer des conclusions vis-à-vis de leurs performances et de leur précision.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres organisés de la façon suivante :

INTRODUCTION GENERALE

Le premier chapitre, présente des généralités sur les systèmes d'ordre fractionnaire, on y présentera quelques notions fondamentales et on définira les modes de représentation d'un système d'ordre fractionnaire, à savoir, l'équation différentielle et la fonction de transfert. On y exposera aussi, certaines méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire dont la méthode d'Oustaloup sera détaillée.

Le chapitre 2 présente les méthodes de réduction de modèle. En particulier, il est montré que les méthodes conçues dans le domaine de l'automatique sont efficaces en termes d'erreur d'approximation.

Et finalement le troisième chapitre, sera consacré à l'application des méthodes de réductions de modèles pour des exemples de systèmes d'ordre fractionnaire simples dans les but d'étudier l'efficacité de chacune, et aussi leurs limites par rapport à quelques paramètres.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats obtenus.

Chapitre I

Systemes d'ordre fractionnaire

Introduction

L'analyse d'une large catégorie de processus physiques tel que le bruit électronique, les réseaux de télécommunication, les systèmes hydrauliques, la mécanique des fluides, la polarisation électrode-électrolyte, montre que les tracés de Bode de ces systèmes sont caractérisés par un comportement temporel régi par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Ce type de processus est connu comme système d'ordre fractionnaire. L'utilisation des modèles entiers n'est donc pas convenable pour représenter ce type de systèmes. Alors, une nouvelle catégorie de modèles appelés modèles d'ordre fractionnaire basés sur le concept de la différentiation d'ordre fractionnaire a été développée.

Dans ce chapitre, nous allons donner des définitions du calcul fractionnaire et des systèmes d'ordre fractionnaires. Nous allons en particulier présenter quelques méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire.

I.1. Historique

Le concept des opérateurs d'ordre fractionnaire a été défini aux 19 siècles par Riemann et Liouville. Leur but devait prolonger la dérivation ou intégration d'ordre fractionnaire en employant non seulement un ordre entier mais également des ordres non entiers. L'histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de Leibniz, à qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire. Il introduisit le symbole de dérivation d'ordre n ,

$\frac{d^n y}{dx^n} \equiv D^n y$, où n est un entier positif. Ce fut peut être un jeu naïf des symboles qui poussa L'Hospital à s'interroger sur la possibilité d'avoir n dans \mathcal{Q} . Il posa la question : et si $n=1/2$ En 1695, dans une lettre à L'Hospital, Leibniz écrivit prophétiquement : « Ainsi il s'ensuit que sera égal à $d^{\frac{1}{2}}x$ un $\sqrt[2]{dx:x}$, e apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences ». Sur ces questions, nous retrouvons les contributions de grands mathématiciens tels qu'Euler ou Lagrange au XVIIIème siècle, Laplace, Fourier, Liouville (1832; 1837) ou Riemann (1847) au XIXIII^{ème} siècle, ainsi qu'à Grünwald (1867) et Letnikov (1868) dans la seconde moitié du même siècle. Il semble qu'une contradiction dans les définitions ait empêché un succès plus grand de la théorie, qui n'est certes pas encore unifiée de plus, l'absence au début d'une interprétation géométrique ou physique claire de la dérivée fractionnaire d'une fonction a largement contribué à ce que des champs de recherche passionnants restent dans l'ombre. Le paradoxe des définitions distinctes fut résolu par la compréhension du caractère non local de l'opérateur de dérivation non entière. Pour plus de détails

historiques, Pendant ces trois dernières, plus d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire et les champs d'applications se sont diversifiés.

Dans les dernières années un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire par l'application de ces concepts dans différents domaines de la physique et de l'ingénierie, où on a pu trouver un progrès signifiant de travaux théoriques qui peuvent servir comme fondation pour un nombre d'applications dans ces domaines. Donc, un grand effort a été fait pour essayer de mettre en pratique les résultats déjà établis, et un travail de recherche intensif est encore en cours dans plusieurs domaines d'ingénierie pour l'application de ces concepts d'ordre fractionnaire.

I.2.La modélisation d'ordre Fractionnaire

La représentation mathématique des systèmes fractionnaires dans le domaine fréquentiel donne des fonctions irrationnelles qui, dans le domaine temporel, correspondent à des équations différentielles difficiles à exploiter. Vu l'absence de méthodes mathématiques, les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire étaient jusque-là étudiés de façon marginale seulement, que ce soit en théorie ou en application. Pour des raisons d'analyse, de synthèse, et de simulation de tels systèmes, l'utilisation des fonctions rationnelles pour l'approximation s'avère d'une grande importance. Alors pour analyser et concevoir les systèmes de commande d'ordre fractionnaire il faut les approximer par des fonctions rationnelles.

La modélisation d'ordre fractionnaire consiste à décrire les phénomènes physiques associés à des dispositifs dont le comportement peut être régi par des équations aux dérivées partielles. Le calcul infinitésimal (différentiel et intégral) d'ordre fractionnaire marque son début au XVIIème siècle, après quelques travaux de Gottfried Wilhelm Leibniz (1697) et Leonhard Euler (1730). Cent ans plus tard il recommence à être étudié par un grand nombre de mathématiciens célèbres comme P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A. K. Grünwald (1867-1872) ou A.V. Letnikov (1868-1872). Bien qu'il ne soit pas nouveau, le calcul infinitésimal d'ordre fractionnaire est redevenu un sujet d'étude dans la deuxième moitié du XXème siècle. Le formalisme mathématique de la dérivation non entière associé au développement des outils informatiques a permis d'envisager des applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur du FOD (Fractional Order Differential).

Aujourd'hui, l'approche fractionnaire est ainsi appliquée pour la modélisation des dispositifs électriques, pour la modélisation des conséquences des désastres naturels ou pour la synthèse de la

commande. La modélisation d'ordre fractionnaire est aussi présente dans le domaine des sciences biologiques (les modèles des parties du corps humain) ou même des sciences humaines et sociales (la modélisation des comportements des marchés).

I.3. Commande d'ordre fractionnaire

En automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) était proposé par Oustaloup. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. La synthèse d'une telle commande est effectuée de façon que l'équation différentielle d'ordre fractionnaire qui la décrit, soit de la même forme que celle qui régit la relaxation de l'eau sur une digue poreuse. Il a été remarqué qu'un tel phénomène physique est robuste au sens de l'automaticien. En effet, une observation attentive de la relaxation montre que son amortissement est indépendant de la nature de la digue, fluvial ou côtière, donc d'un certain nombre de paramètres, entre autre la masse d'eau en mouvement. Ce résultat est aussi remarquable que paradoxale dans l'approche entière de la mécanique où toute relaxation présente un amortissement lié à la masse transportée.

Depuis cette initiative, La commande d'ordre fractionnaire a attiré l'intérêt de beaucoup de chercheurs. En 1999, Podlubny a proposé le régulateur $PI_{\alpha}D_{\beta}$ qui contient une intégration fractionnaire d'ordre α et une dérivation fractionnaire d'ordre β , élargissant ainsi le champ d'application du calcul fractionnaire à la théorie de la commande. La commande adaptative d'ordre fractionnaire a connu ses premières publications au début des années 2000, avec les travaux de Ladaci et Charef, et Vinagre et al. Depuis, plusieurs dizaines de travaux sur les approches de commande adaptative d'ordre fractionnaire sont publiés annuellement.

I.4. Domaines d'application des systèmes fractionnaires : Les applications de la théorie du calcul fractionnaire aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénieries ont très diverses. Les systèmes d'ordre fractionnaires sont tout particulièrement intéressants pour représenter finement et avec un ordre réduit les dispositifs dont le fonctionnement repose sur la diffusion d'une grandeur (champ, température, etc.). Ils apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents domaines de recherches.

I.4.1 Électronique : Grâce à des données expérimentales, Shmidt et Drumheller montrent que le courant qui traverse un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension. En effet

en utilisant un composé ($LiN_2H_5SO_4$) et en procédant à des mesures sur une large gamme de températures et de fréquences, ils constatent que les parties réelle et imaginaire

de la susceptibilité ou encore, de la fonction diélectrique $\epsilon = \epsilon' + j\epsilon''$ ont très grandes ($\epsilon' \approx$

$\epsilon'' \approx 10^6$) et varient en fonction de la fréquence suivant un ordre de puissance

$$\epsilon' \in IR \text{ et } \epsilon'' \in IR).$$

$$\epsilon = \epsilon' \omega^{-\frac{1}{2}} (1 - j) = \epsilon' \sqrt{2} (j\omega)^{-\frac{1}{2}}, \text{ avec } j = \sqrt{-1}$$

(avec Dans, nous trouvons la relation suivante, valable pour un composé :

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \epsilon'}$$

En utilisant la relation entre la fonction diélectrique et l'impédance, on obtient la relation suivante :

Où C'est une constante.

En substituant la relation (I-1) dans (I-2), on a

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \epsilon' \sqrt{2} (j\omega)^{-\frac{1}{2}}}$$

qu'on peut éventuellement mettre sous la forme

$$Z = \frac{K}{(j\omega)^{\frac{1}{2}}} \text{ où } K = \frac{1}{\sqrt{2} C_e \epsilon'}$$

ou encore, en fonction de la variable de Laplace s :

$$Z = \frac{K}{s^{\frac{1}{2}}}$$

Cette équation montre en effet qu'on peut bien définir une impédance fractionnaire de capacité, qui peut être fabriquée à partir de composition de matériaux spécifiques et par conséquent définir le terme "Fractor", par analogie au terme anglais "Capacitor", pour mettre l'accent sur le caractère fractionnaire de l'impédance. K désigne alors la constante du "Fractor" (capacité fractionnaire). La réalisation d'une impédance fractionnaire peut se faire par juxtaposition en série de cellules Résistance-Capacité (d'impédance traditionnelle).

I.4.2. Electrotechnique :

Les machines électriques sont des composants omniprésents dans les systèmes et réseaux d'énergie électrique, que ce soit pour la génération (centrales électriques) ou pour les usages industriels ou domestiques en incluant le transport. Avec l'électrification croissante des principaux domaines industriels, on trouve des actionneurs électriques dans les réseaux de forte puissance comme ceux de taille plus modeste (réseaux embarqués ou îliens). La modélisation précise et compacte des machines électriques devient donc un objectif essentiel en termes de conception et de simulation des futurs systèmes et réseaux électriques. La finesse des modèles des générateurs et moteurs, synchrone et asynchrone notamment, est ainsi très importante dans l'étude de la stabilité, de sécurité et de fiabilité des réseaux. Ils doivent désormais tenir compte des effets liés aux harmoniques générés par les dispositifs d'électronique de puissance massivement insérés dans le réseau de manière à le gérer plus efficacement, pour modéliser l'influence de ces harmoniques sur le comportement dynamique des machines (surtout sur le couple électromagnétique).

Pour construire un modèle valable sur une grande plage de fréquences, il est nécessaire de tenir compte de l'effet de peau dans certaines parties conductrices de la machine. Pour la machine synchrone, les courants induits liés à la diffusion du champ magnétique, se localisent principalement dans les barres de la cage d'amortisseurs ou dans les pièces massives du rotor. Pour la machine asynchrone, ces effets induits se situent dans la cage d'écureuil de la machine. Les travaux sur l'utilisation des systèmes d'ordre non entier pour la modélisation des machines électriques ont été commencés dans les années 90 par le professeur Ivanès et Retière au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble, en France. Pendant plus d'une décade, plusieurs articles sont apparus, traitant de la méthode, son application et l'identification des paramètres des nouveaux schémas équivalents. D'autres travaux ont utilisé la modélisation d'ordre non entière pour modéliser les phénomènes transitoires dans les machines électriques. L'idée principale consiste à insérer des impédances d'ordre non entier dans les schémas équivalents classiques de machines en tenant compte de la localisation des courants induits dans la machine. Une étude analytique complète dans a permis de valider cette approche dans le cas de la machine asynchrone. Cette démarche permet de construire des modèles de connaissance et d'ordre réduit des machines électriques tournantes, valables sur une large plage de fréquences. A l'inverse de la modélisation classique, la modélisation d'ordre fractionnaire permet de caractériser correctement les machines électriques aussi bien en régime

permanent qu'en régime transitoire où il faut prendre en compte les effets liés à la fréquence d'alimentation, comme par exemple l'effet de peau.

I.4.3. Automatique :

En automatique, peu d'auteurs ont utilisé des lois de commande introduisant des dérivées fractionnaires. Podlubny, Chen et al, et Caponetto et al ont montrés que la meilleure méthode pour assurer un contrôle efficace des systèmes fractionnaires, est l'utilisation de contrôleurs fractionnaires. Ils proposent une généralisation des contrôleurs traditionnels PID. Mbodje et Montseny et Matsuda et Fuji ont appliqué avec succès des lois de commande fractionnaires à des systèmes à paramètres distribués. Cependant, nous ne pouvons aborder le sujet de contrôle fractionnaire sans invoquer l'approche CRONE, introduite par Oustaloup. La commande CRONE est le travail d'un groupe de chercheurs au Laboratoire de l'Intégration du Matériaux au Système (IMS) de Bordeaux sous la direction d'Alain Oustaloup. Elle fait l'objet de nombreuses publications et de plusieurs ouvrages. La méthodologie CRONE permet la synthèse dans le domaine fréquentiel de commandes dynamiques robustes par retour de sortie pour des systèmes linéaires stationnaires (LTI), incertains, monovariables (SISO) ou multivariables (MIMO). Les performances auxquelles elle conduit s'expliquent autant par la prise en compte aussi peu pessimiste que possible des incertitudes portant sur les systèmes commandés, que par l'efficacité des paramètres de réglage utilisés.

La commande PID d'ordre fractionnaire ($PI\lambda D_\mu$) a aussi connu un très grand succès auprès des chercheurs en théorie de contrôle, depuis sa proposition par Podlubny. Plusieurs travaux ont été consacrés à l'ajustement des paramètres de ce régulateur qui a prouvé son efficacité et sa supériorité par rapport à la commande PID classique.

La commande adaptative d'ordre fractionnaire attire aussi un intérêt croissant des chercheurs automaticiens, avec plusieurs schémas proposés régulièrement, et des applications aussi variées que la robotique, les machines électriques, la commande d'une chaudière, ou les panneaux solaires ...etc.

I.5. Représentation des systèmes d'ordre fractionnaire

I.5.1. Équation différentielle linéaire d'ordre fractionnaire

Un système linéaire d'ordre fractionnaire est par définition un système décrit par une équation différentielle d'ordre fractionnaire de la forme:

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} D^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (I.6)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ sont, respectivement, l'entrée et la sortie du système fractionnaire, les ordres des dérivées α_i ($0 \leq i \leq n$) et β_j ($0 \leq j \leq m$) sont des nombres réels tel que $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_0$ et $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_0$ et $\alpha_n \geq \beta_m$ et les coefficients a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) et b_j ($j = 0, 1, \dots, m$) sont des nombres réels. Quand les ordres des dérivées α_i ($0 \leq i \leq n$) et β_j ($0 \leq j \leq m$) sont multiples du même nombre réel α ($0 < \alpha < 1$), tel que $\alpha_i = i.\alpha$ ($0 \leq i \leq n$) et $\beta_j = j.\alpha$ ($0 \leq j \leq m$) et $m \leq n$, le système fractionnaire est dit système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable. Alors, l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de l'équation (I.6) devient :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{i\alpha} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{j\alpha} u(t) \quad (I.7)$$

I.5.2 Fonction de transfert

La fonction de transfert du système linéaire d'ordre fractionnaire de l'équation (I.7) est donnée par la fonction suivante:

$$G(s) = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (I.8)$$

Dans le cas d'un système linéaire fractionnaire d'ordre commensurable, la fonction de transfert de l'équation (I.8) devient :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j (s^\alpha)^j}{\sum_{i=0}^n a_i (s^\alpha)^i} \quad (I.9)$$

I.6 Approximation des systèmes d'ordre fractionnaire :

Dans la littérature, il existe beaucoup de méthodes d'approximation des systèmes d'ordre non entier. Elles se partagent en deux classes principales : les méthodes du domaine fréquentiel (approximations analogiques), et les méthodes du domaine temporel (approximations numériques).

I.6.1 Approximation numérique des systèmes d'ordre fractionnaire :

La difficulté majeure des systèmes d'ordre fractionnaires est la simulation dans le domaine temporel car l'expression analytique de la sortie est difficile à implémenter, ce qui nécessite donc une approximation. Il y a trois types de méthodes d'approximation numérique :

- Par calcul de l'expression analytique de la sortie du système
- Par approximation du modèle non entier par un modèle rationnel discret
- Par approximation du modèle non entier par un modèle rationnel continu puis la discrétisation de ce dernier.

I.6.2. Approximation analogique des systèmes d'ordre fractionnaire :

Dans le but de réaliser et implémenter des correcteurs ou simuler des systèmes d'ordre non entier, les fonctions de transfert d'ordre fractionnaire doivent être remplacées par des modèles entiers, avec un comportement identiques à celui des fonctions fractionnaires et plus faciles à manipuler. Il existe plusieurs méthodes d'approximation qui utilisent des approches différentes. Parmi ces méthodes on peut citer les méthodes suivantes :

- La méthode de l'expansion par fractions continues EFC (Expansion Fractionnaire Continue).
- La méthode de Carlson.
- La méthode de Charef.
- La méthode de Matsuda.
- La méthode d'Oustaloup

Les méthodes de Charef et d'Oustaloup sont les plus utilisées dans la littérature.

Dans la section qui suit, nous allons présenter brièvement le principe de la méthode d'approximation d'Oustaloup. La méthode qu'on va utiliser pour notre simulation.

I.7. Méthode d'Oustaloup :

La méthode est basée sur l'approximation par pôles et zéros récursifs de l'opérateur de dérivation non entière. L'objectif de cette méthode est d'approcher l'opérateur d'intégration ou de dérivation non entier par un modèle entier borné en fréquence de dimension finie. Cette approximation nécessite deux étapes :

- La troncature fréquentielle de l'opérateur d'intégration ou de dérivation.
 - L'approximation de l'opérateur non entier borné en fréquence par un modèle entier.

a) Dérivateur généralisé :

Le dérivateur généralisé est défini par la fonction de transfert suivante :

$$D(s) = \left(\frac{s}{\omega_c} \right)^m$$

Où $m \in R$ et ω_c est appelée fréquence transitionnelle. Ainsi, pour des ordres strictement positifs la relation (II.44) définit un dérivateur d'ordre non entier et pour des ordres strictement négatifs un intégrateur d'ordre non entier.

En premier lieu, on effectue une troncature, elle consiste à limiter le comportement différentiel de $\left(\frac{s}{\omega_c} \right)^m$, sur l'intervalle $[\omega_A, \omega_B]$ centré sur ω_c . En réalité, la troncature sera effectuée sur l'intervalle plus large $[\omega_l, \omega_h]$, pour plus de précision.

Avec :

$$\omega_l \ll \omega_A \text{ et } \omega_h \gg \omega_B$$

On introduit alors, le dérivateur d'ordre fractionnaire borné en fréquence proposé par Oustaloup.

$$D_{bf}(s) = \left(C_0 \frac{1 + \frac{s}{\omega_l}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^m, \quad -1 < m < 1$$

Où

$$C_0 = \frac{\omega_l}{\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_h} \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\omega_h \omega_l}$$

Pour assurer un gain unitaire à la fréquence ω_c

Dans une seconde phase, l'approche consiste à approximer le dérivateur borné en fréquence, par une distribution récursive de pôles et de zéros réels. Ce qui donne un transfert d'ordre entier.

$$D_{bf}(s) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s)$$

Où

$$D_N(s) = \left(\frac{\omega_c}{\omega_h} \right)^m \prod_{i=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{z_i}}{1 + \frac{s}{p_i}}$$

z_i et p_i représentent les zéros et les pôles de rang i ; ces $N + 1$ paires de zéro-pôle sont déterminés par les relations récursives suivantes :

$$\frac{P_i}{z_i} = \alpha > 0$$

$$\frac{z_{i+1}}{P_i} > \eta > 0$$

$$\frac{z_{i+1}}{z_i} = \frac{P_{i+1}}{P_i} = \alpha\eta > 1$$

Les facteurs α et η sont appelés facteurs récurrents. Et ils donnent un rapport constant $\alpha\eta$ entre deux pôles ou deux zéros consécutifs. Et N est généralement fixé de telle sorte à avoir $\alpha\eta$ approximativement égal à 5.

la relation entre l'ordre m et les facteurs récurrents α et η :

$$m = \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha\eta)} \quad (\text{I.10})$$

Les pôles et zéros de rang i peuvent être, aussi, écrits sous la forme suivante :

$$\begin{cases} z_i = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{i+N+1/(2-n/2)}{2N+1}} \omega_l \\ P_i = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l}\right)^{\frac{i+N+1/(2+n/2)}{2N+1}} \omega_l \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

L'intérêt de cette méthode d'approximation réside dans sa simplicité de mise en oeuvre. Si l'ordre $m > 1$ ou $m < -1$, seule la partie non entière est approchée par un modèle entier.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les définitions de base des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire ainsi que leurs représentations. Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul fractionnaire.

Nous avons présenté aussi deux classes de méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire à savoir les méthodes fréquentielles et les méthodes numériques. Où, la méthode d'approximation d'Oustaloup est détaillée.

CHAPITRE II

Réduction de modèles

Introduction

Les méthodes de réduction de l'ordre des modèles ont été développées afin de réduire la complexité d'un modèle tout en préservant au mieux son comportement entrées-sorties. D'autres critères sont aussi utilisés afin de caractériser la méthode de réduction, telle que la conservation des caractéristiques essentielles du modèle initial. Par exemple, la préservation de la stabilité dans le modèle réduit est fondamentale.

La réduction de la complexité des modèles se fait en éliminant des états de ce dernier. L'élimination des états implique, en pratique, une diminution de la dimension des matrices, ce qui constitue la réduction de l'ordre du modèle.

Dans ce chapitre, l'accent est mis sur les méthodes temporelles qui sont largement détaillées et discutées [11]. Dans la suite nous considérons un système continu, supposé commandable et observable, décrit par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

avec $\dim(x) = n \times 1$, $\dim(u) = p \times 1$ et $\dim(y) = m \times 1$

On se propose de chercher un modèle réduit de dimension r conservant certaines propriétés intéressantes du système initial (I.1) (stabilité, comportements statique et dynamique, observabilité, commandabilité). Ce modèle réduit est supposé régi par les équations d'état

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz + Gu \\ \dot{y} = Hz \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Où $\dim(z) = r \times 1$. Les matrices F , G et H sont de dimensions appropriées qu'il s'agira de déterminer.

II.1 Réduction par diagonalisation

Considérons une partition du système (I.1) en deux sous-systèmes :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y = Cx = [C_1 \quad C_2]x \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Si A est diagonalisable alors $A = V^{-1}AV$ est une matrice diagonale, V étant la matrice modale

de A . Sans perte de généralité, on suppose que $A = \text{diag}(\lambda_i)$ avec $Rc(\lambda_i) \geq Rc(\lambda_{i+1})$

Effectuons alors le changement de variables :

$$x = Vz = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} u$$

Où $V_1 = r \times r$, le système (I.3) devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = Az + V^{-1}Bu = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} u \\ y = CVz = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Plusieurs stratégies de simplification sont alors possibles :

II.1.1 Négliger la partie rapide

Ceci revient à imposer $z_2 = 0$, d'où :

$$\begin{cases} x_1 = V_1 z_1 \\ x_2 = V_3 z_1 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

On en tire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \Lambda_1 z_1 + E_1 u \\ \dot{x}_2 = M_3 z_1 \end{cases}$$

Finalement, on obtient le modèle réduit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Fx_1 + Gu \\ \dot{y} = Hx_1 \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} F = V_1 \Lambda_1 V_1^{-1} \\ G = V_1 E_1 \\ H = M_1 V_1^{-1} \end{cases}$$

II.1.2 Négliger la dynamique des modes rapides

En première approximation, on peut considérer que les modes rapides agissent instantanément sur le système. On ne retient donc que leur apport statique.

Ceci se traduit mathématiquement par $z_2 = 0$. En utilisant l'équation modale du système, on obtient

$$z_2 = -\Lambda_2^{-1}E_2u$$

puis

$$x_1 = V_1z_1 + V_2z_2 = V_1z_1 - V_2\Lambda_2^{-1}E_2u$$

Ou encore

$$z_1 = V_1^{-1}(x_1 + V_2\Lambda_2^{-1}E_2u)$$

que l'on remplace dans l'expression de z_1 :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \Lambda_1z_1 + E_1u \\ &= \Lambda V_1^{-1}x_1 + \Lambda_1V_1^{-1}V_2\Lambda_2^{-1}E_2u + E_1u\end{aligned}$$

soit

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = V_1\Lambda_1V_1^{-1}x_1 + (V_1E_1 + V_1\Lambda_1V_1^{-1}V_2\Lambda_2^{-1}E_2)u \\ \dot{y}_2 = M_1V_1^{-1}x_1 + M_1V_1^{-1}V_2\Lambda_2^{-1}E_2 - M_2\Lambda_2^{-1}E_2\end{cases}$$

finalement, le modèle réduit s'écrit :

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = Fx_1 + Gu \\ \dot{y} = Hx_1 + Du\end{cases}$$

avec

$$\begin{cases}F = V_1\Lambda_1V_1^{-1} \\ G = V_1E_1 + V_1\Lambda_1V_1^{-1}V_2\Lambda_2^{-1}E_2 \\ H = M_1V_1^{-1} \\ D = M_1V_1^{-1}V_2\Lambda_2^{-1}E_2 - M_2\Lambda_2^{-1}E_2\end{cases}$$

II.2. Agrégation

La méthode d'agrégation consiste à passer de (I.1) à (I.2) en utilisant une matrice d'agrégation K telle que $z = Kx$, ce qui donne les conditions :

$$FK = KA$$

$$G = KB$$

Si on connaît K , les solutions F et G sont données par :

$$\begin{cases} F = KAK^* \\ G = KB \end{cases}$$

Où K^* est une matrice qui vérifie $KK^* = I$. Cette matrice K^* n'est pas unique mais on prend souvent la pseudo-inverse K^+ , ce que l'on fera dans ce qui suit. En particulier, ici :

$$K^* = (KK^T)^{-1}K^T$$

Vérifie bien $KK^* = I$.

On voit que le calcul explicite de F et G par (I.8) nécessite la connaissance de la matrice d'agrégation K . Quant à la matrice de sortie H du modèle réduit, elle n'intervient pas directement dans les conditions d'agrégation. Toutefois, il existe de nombreuses méthodes permettant sa détermination.

1 Calcul de la matrice de sortie :

En première approximation, on peut considérer que $\dot{y} \cong Cx$ d'où l'on déduit :

$$C = HK$$

donc une première solution peut être :

$$H = CK^+$$

cette expression est toutefois peu satisfaisante car elle induit souvent des résultats très grossiers.

Si le système initial ne possède pas de pôles à l'origine, alors la matrice d'état A est inversible. Dans ce cas, la matrice d'observation H peut être calculée de manière à rendre égaux les gains statiques du système et du modèle réduit, ce qui se traduit par :

$$HF^{-1}G = CA^{-1}B$$

d'où

$$H = (CA^{-1}B)(F^{-1}G)^{-1}$$

Lorsque la matrice d'état A est singulière, une autre expression peut être obtenue en utilisant la matrice adjointe découlant de la formule classique du calcul d'un inverse matriciel. En effet, il est assez facile de montrer que :

$$H = \frac{1}{n} \frac{C \operatorname{adj}(A) B [\operatorname{adj}(F)G]^+}{\prod_{i=r+1}^n (-\lambda_i)}$$

ou $\operatorname{adj}(A)$ désigne l'adjointe de A et peut être calculée en utilisant la relation

$$\operatorname{adj}(A) = A^{n-1} - a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} A + I_n,$$

Les a_i sont coefficients du polynôme caractéristique

$$\det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

La formule (1.12) s'applique à tout système continu mais uniquement pour la méthode d'agrégation. Quant à la relation (I.11), elle est valable pour toutes les méthodes de réduction mais s'applique uniquement aux systèmes continus sans intégrateur.

Voyons maintenant comment calculer K :

Première méthode : Utilisation de la matrice de commandabilité.

Soit $\Delta = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ la matrice de commandabilité associée au système.

Alors on a successivement :

$$\begin{aligned} K \Delta &= [KB \ KAB \ \dots \ KA^{n-1}B] \\ &= [G \ FKB \ \dots \ F^{n-1}KB] \\ &= [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G] \end{aligned}$$

Δ étant de rang plein n , on déduit :

$$K = [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G] \Delta^+$$

Ici, on peut prendre

$$K^+ = \Delta^T (\Delta \Delta^T)^{-1}$$

Si A et B sont sous la forme compagne de commandabilité d'un système *SISO*, alors $\Delta = I$ et l'on obtient dans ce cas :

$$K = [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G]$$

Deuxième méthode : Décomposition spectrale

On démontre que

$$K = T[\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_r]^T$$

Où les ω_i sont les vecteurs propres de A associés aux r valeurs propres dominantes et T est une matrice $r \times r$ inversible quelconque. Dans le cas particulier où toutes les valeurs propres de A sont distinctes on a :

$$K = T \begin{bmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \end{bmatrix} V^{-1}$$

Où V est la matrice modale de A . En particulier, dans (I.16) et (I.17), on peut prendre

2. Propriétés du modèle agrégé

-Les valeurs propres de F sont valeurs propres de A

En effet, soit λ_i valeur propre de A et v_i un vecteur propre associé, alors :

$$KA\vartheta_i = FK\vartheta_i = \lambda_i K\vartheta_i$$

Ainsi, si $Kv_i \neq 0$ alors c'est un vecteur propre de F avec la même valeur propre λ_i . Ceci justifie l'utilisation de la structure propre du système pour calculer la matrice d'agrégation K .

-Commandabilité

Supposons $\{A, B\}$ commandable, alors $\Delta = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$ est de rang n , donc $k\Delta$ est de rang r si $\text{rang}(K) = r$.

Or $k\Delta = [G \ FG \ \dots \ F^{n-1}G]$, donc la paire $\{F, G\}$ est commandable.

-Caractérisation de K

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un modèle agrégé de par l'opérateur linéaire K est que le noyau $N(K)$ de K soit invariant par

A (i.e. $AN(K) \subset N(K)$).

Perturbations singulières

On suppose ici que la dynamique du système peut être décrite des équations de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \varepsilon\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \\ y = C_1x_1 + C_2x_2 + Du \end{cases}$$

A_{11} Contient la partie dominante du système (mode lents). Le coefficient ε est un paramètre de très faible valeur. Si on fait tendre ε Vers 0, on obtient, (en supposant A_{22} inversible)

$$\begin{cases} x_1 = (A_{11} + A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2)u \\ y = (C_1 + C_2A_{22}^{-1}A_{21})x_1 + (D - C_2A_{22}^{-1}B_2)u \end{cases}$$

C'est le modèle réduit recherché.

On remarque l'existence dans le modèle réduit d'un terme en u (transmittance directe) dans l'équation de sortie du modèle réduit. Même si $D = 0$ dans le système de départ.

La méthode des perturbations singulières possède les propriétés suivantes :

- le modèle réduit a le même gain statique que le système initial ; pour le vérifier, il suffit de se rappeler que le gain statique s'obtient en faisant $\dot{x}_1 = 0$ et $\dot{x}_2 = 0$
- le modèle réduit est stable si le système initial est stable,
- elle permet de conserver la structure physique du système si sa représentation d'état se présente sous la forme (I.18) de façon naturelle.

I.5. Réduction de modèles par décomposition de Schur

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu la nécessité de partitionner le système à réduire en deux sous-systèmes dont on ne conserve que la partie dominante. Cette partition peut dans certains cas être réalisée physiquement ou plus systématiquement à l'aide d'une décomposition spectrale de la matrice d'état du système. Cette dernière méthode pose toutefois des problèmes numériques dans le cas d'un système possédant des pôles multiples. Il est possible de remédier à cet inconvénient grâce à la décomposition de Schur qui est une procédure numériquement robuste assurant une partition systématique de tout système linéaire. On verra de surcroît que l'utilisation de cette décomposition permet de combiner les approches agrégation et perturbations singulières et qu'elle permet également d'éviter le calcul de l'inverse de la matrice de passage. La décomposition de Schur de la matrice d'état A du système décrit par les équations (I.1) est définie par :

$$\begin{cases} S = U^T A U \\ = \begin{bmatrix} S_1 & S_{12} \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

S_1 et S_2 sont des matrices triangulaires supérieures et l'on suppose que S_1 contient les valeurs propres dominant $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. La matrice est une matrice de transformation unitaire. En effectuant le changement de variables, le système (I.1) équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{\omega} = S\omega + U^T B u \\ y = C U x \end{cases}$$

ou encore avec $\omega = [z \ \omega_2]^T$, où $\dim(z) = r$ et $U^T B = [B_1 \ B_2]^T$:

$$\begin{cases} \dot{z} = S_1 z + S_{12} \omega_2 + B_1 u \\ \dot{\omega}_2 = S_2 \omega_2 + B_2 u \\ y = C_1 z + C_2 \omega_2 \end{cases}$$

Plusieurs approches sont alors envisageables :

-Agrégation :

Dans ce cas, $\omega_2 = 0$ et par suite $F = S_1$ et $G = B_1$. La matrice d'agrégation est :

$$K = [I_r \ 0] U^T$$

et il est facile de montrer que

$$S_1 K = K A \quad \text{et} \quad G = K B$$

-Perturbations singulières:

On considère que $\dot{\omega}_2 = 0$, d'où l'on déduit, en remarquant que S_2^{-1} existe toujours :

$$\omega_1 = -S_2^{-1} B_2 \mu, \quad \text{Puis}$$

$$\dot{z} = S_1 z + (B_1 S_{12} S_{12}^{-1} B_2) u$$

soit

$$\begin{cases} F = S_1 \\ G = B_1 - S_{12} S_2^{-1} B_2. \end{cases}$$

Pour la matrice de sortie H , on peut prendre

$$H = C_1$$

et dans ce cas, il apparait une matrice constante de transmittance directe

$$D = -C_2 S_2^{-1} B_2$$

Le modèle réduit a pour équations d'état

$$\begin{cases} \dot{z} = Fz + Gu \\ y = Hz + Du \end{cases}$$

La présence du terme D est très gênante ; on préfère alors prendre $y = Hz$ avec H calculé de façon à récupérer le gain statique du système initial et ce, en utilisant la formule.

I.6 réalisation équilibrée

Dans cette section, l'ensemble des réalisations de dimension n sera noté C^n dans le cas continu et D^n dans le cas discret. Nous noterons C_c^n (resp D_c^n) le sous-ensemble des réalisations équilibrées dans le cas continu (resp discret).

I.6.1 Cas continu

Pour le système continu (I.1), on définit :

Le gramien de commandabilité :

$$W_c = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt, \quad \text{solution de l'équation Lyapunov}$$

$$A W_c + W_c A^T = -B B^T$$

Le gramien d'observabilité :

$$W_0 = \int_0^{\infty} e^{At} C^T C e^{At} dt \quad \text{qui est solution}$$

$$A^T W_0 + W_0 A = -C^T C$$

Les équivalents fréquentiels de W_c et de W_0 sont obtenus par application du théorème de Parseval:

$$W_c = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} f(s) f^*(s) ds, \quad \text{avec } f(s) = (sI - A)^{-1} B$$

et

$$W_0 = \frac{1}{2\pi j} \int_0^\infty g(s)g^*(s)ds, \text{ avec } g(s) = C (sI - A)^{-1}$$

Remarque : Soit

$$H = \begin{bmatrix} J_0 & J_1 & \cdots \\ J_1 & J_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

la matrice de Hankel infinie où $J_k = CA^k B$ sont les paramètres de Markov du systèmes $\{A B C\}$.

Alors on a

$$H = \Gamma \Delta$$

avec T (resp. Δ) matrice infinie d'observabilité (resp. de commandabilité). De plus, les grammiens

$$W_e = \Delta \Delta^T \text{ et } W_0 = \Gamma^T T$$

sont des matrices finies de dimension $n \times n$.

Théorème 1: Les valeurs propres de $W_c W_0$ sont invariantes par changement de base dans l'espace d'état.

Démonstration : Soit $z = Tx$ alors

$$\mathcal{R} = \{A, B, C\} \rightarrow \mathcal{R}_T = \{TAT^{-1}, TB, CT^{-1}\}$$

Donc

$$\begin{cases} \Delta T \rightarrow \Delta \\ \Gamma \rightarrow \Gamma T^{-1} \end{cases}$$

et par suite:

$$\begin{cases} W_c \rightarrow TW_c T^{-1} \\ W_0 \rightarrow (T^{-1})^T W_0 T^{-1} \end{cases}$$

finalemet

$$W_c W_0 \rightarrow (TW_c T^{-1})(T^{-1})^T W_0 T^{-1} = (TW_c W_0 T^{-1})$$

Définition 1: Soit $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$ une réalisation minimale stable.

\mathcal{R} est dite équilibré (balanced) si et seulement si les solutions.

$$W_c = W_0 = \Sigma = \text{diag}(\sigma_i)$$

où les σ_i , appelées valeurs singulières de \mathcal{R} , sont par :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(W_c W_0)}$$

Le résultat suivant assure l'existence d'une telle réalisation et en donne une caractérisation.

Théorème 2 : Soit $R = \{A, B, C\} \in C^n$. Il existe une transformation T telle que

$\{TAT^{-1}, TB, CT^{-1}\}$ soit équilibrée.

De plus, est équilibrée si et seulement si, il existe une matrice diagonale $\Sigma > 0$ telle que :

$$A\Sigma + \Sigma A^T = -BB^T$$

et

$$A^T\Sigma + \Sigma A = -C^T C$$

Dans ce cas, on a $W_0 = W_c = \Sigma$

Une partition quelconque d'une réalisation équilibrée est toujours stable : c'est ce résultat qui rend cette approche attractive pour la réduction de modèles :

Théorème. 3 : Soit $R = \{A, B, C\} \in C_r^n$ Considérons la partition

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, C = [C_1 \quad C_2]$$

et

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}$$

Alors $\{A_{ii}, B_i, C_i\} \in C_c^{n_i}$, $i = 1, 2$ si Σ_1 et Σ_2 n'ont pas de valeurs propres communes.

Calcul pratique de la transformation équilibrée :

Effectuons une décomposition de Choleski de W_0

$$W_0 = R^T R$$

et considérons la matrice $RW_c R^T$ qui est symétrique définie positive et donc unitairement diagonalisable, soit :

$$RW_c R^T = U \Sigma^2 U^T$$

Avec

$$U^T U = I \quad \text{et} \quad \Sigma = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad \delta_1 \geq \dots \geq \delta_n.$$

Alors

$$T = \Sigma^{-1/2} U^T R$$

Est une transformation donnant un système avec une réalisation équilibrée. En effet :

$$\begin{aligned} T W_C T^{-1} &= \Sigma^{-1/2} U^T R W_C R^T U \Sigma^{-1/2} \\ &= \Sigma^{-1/2} U^T U \Sigma^2 U^T U \Sigma^{-1/2} = \end{aligned}$$

et de même

$$(T^{-1}) W_0 T^{-1} = \Sigma$$

Choix pratique de l'ordre r du modèle réduit :

On utilise le critère :

$$\left[\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 \right]^{1/2} \geq \left[\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \right]^{1/2}$$

R est donc cherché de façon récurrente.

On dispose également d'une mesure de l'erreur de réduction, où $G(s)$ et $\bar{G}(s)$ sont les matrices de transfert du système initial et du modèle réduit :

$$\|G(j\omega) - \bar{G}(j\omega)\|_\infty \leq 2 \sum_{r+1}^n \sigma_i, \quad \text{pour tout } \omega$$

où

$$\|H\|_\infty = \sup_\omega \sqrt{\lambda(H(j\omega)H^*(j\omega))} = \sigma_{\max}(H(j\omega))$$

Cas discret

Des développements similaires au cas continu peuvent être faits pour les

Systèmes discrets. On commence par définir :

- le gramien de commandabilité :

$$W_c = \sum_0^{\infty} A^k B B^T (A^k)^T$$

qui est solution de l'équation de Lyapunov:

$$A W_c A^T - W_c = -B B^T \tag{I.31}$$

- le gramien d'observabilité :

$$W_0 = \sum_0^{\infty} (A^k)^T C^T C A^k,$$

Solution de

$$A^T W_0 A - W_0 = -C^T C \tag{I.32}$$

Une réalisation $\{A, B, C\}$ d'un système discret est dite équilibrée si et seulement si $W_c = W_0 = \Sigma$, matrice diagonale.

Théorème 4 : Soit $R = \{A, B, C\} \in D$ est une réalisation équilibrée si et seulement si, il existe une matrice diagonale $\Sigma = \sigma$ telle que les solutions de (I.31) et (I.32) vérifient

$$W_c = W_0 = \Sigma$$

Soit $R \in D_c^n$: considérons la partition en deux sous-systèmes de dimension n_1 et

$n_2 = n - n_1$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$C = [C_1 \quad C_2], \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}$$

Si $\lambda_{min}(\Sigma_1) > \lambda_{max}(\Sigma_2)$, alors $\{A_{11}, B_1, C_1\} \in D_0^{n_1}$.

Exemple 7: Soit à réduire à l'ordre 1 le système discret:

$$T(z) = \frac{z - 0.8}{(z - 0.1)(z + 0.7)}$$

Une représentation sous forme compagne de $T(z)$ est:

$$\mathcal{R} = \left\{ \begin{bmatrix} -0.6 & 0.07 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [1 \quad -0.8] \right\}$$

Que l'on transforme en une réalisation équilibrée :

$$\bar{\mathcal{R}} = \left\{ \begin{bmatrix} -0.7700 & 0.2467 \\ -0.2467 & 0.1700 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.1513 \\ -0.5705 \end{bmatrix}, [1.1513 \quad 0.5705] \right\}$$

Les valeurs singulières correspondantes sont:

$$\sigma_1 = 3.3370 \text{ et } \sigma_2 = 3.3370$$

Le modèle réduit d'ordre 1 est :

$$T_1(z) = \frac{1.3255}{z + 0.77}$$

Réalisation approchée

Considérons la décomposition en valeurs singulières de la matrice de Hankel infinie H définie en (1.25):

$$\begin{aligned} H &= U\Sigma V \\ &= [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Où

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \text{ et } \Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n)$$

avec $\sigma_i > \sigma_{i+1}$

Alors on a le résultat fondamental d'approximation optimale :

Théorème 5: Parmi les matrices Ω de rang r , la matrice

$$\Omega_1 = U_1 \Sigma_1 V_1^T$$

Minimise

$$\|H - \Omega\|_S$$

De plus, on a

$$\|H - \Omega\|_S = \sigma_{r+1}$$

Où $\|\cdot\|_s$ désigne la norme spectrale d'une matrice

Toutefois, la matrice Ω_1 définie dans ce théorème n'est pas en général une matrice de Hankel. Une bonne approximation est obtenue à partir de la réalisation proposée par Kung ou encore de celle de Zeiger .

Considérons Γ_1 et Δ_1 respectivement matrice d'observabilité et de commandabilité associée

à $\{F, G, H\}$: ainsi

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} HF \\ HF^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_1 = [F \quad FG \quad \dots]$$

d'où

$$\Omega_1 = \Gamma_1 \Delta_1$$

La translatée τT_1 et T_1 est la matrice obtenue en décalant la matrice T_1 d'un bloc vers le haut

$$\tau T_1 = \begin{matrix} i.e. \\ \begin{bmatrix} HF \\ HF^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \end{matrix}$$

on voit donc que

$$\tau T_1 = T_1 F$$

d'où

$$F = T_1^{-1} (\tau T_1).$$

Les matrices F et G sont directement obtenues à partir de la décomposition en valeurs singulières ci-dessus comme suit:

$$G = p \text{ Premières colonnes de } \Delta_1 = \Sigma_1^{1/2} V_1^T$$

et

$$H = m \text{ Première lignes de } \Gamma_1 = U_1 \Sigma_1^{1/2}$$

Une propriété intéressante du modèle réduit ainsi obtenu est que la réalisation $\mathcal{R} = \{F, G, H\}$ est équilibrée. Pour le prouver. Il suffit de montrer que $W_0 = W_C =$ matrice diagonale ; ce qui est réalisé puisque

$$W_0 = \Gamma_1^T \Gamma_1 = [\Sigma_1^{1/2} U_1^T][U_1 \Sigma_1^{1/2}] = \Sigma_1$$

et

$$W_c = \Delta_1 \Delta_1^T = [\Sigma_1^{1/2} V_1^T][V_1 \Sigma_1^{1/2}] = \Sigma_1$$

En conclusion, la réalisation approchée constitue un moyen rapide et simple d'obtenir un modèle réduit, qui de plus est donné par une réalisation équilibrée. Il faut bien noter que cette méthode admet les propriétés de la réalisation équilibrée seulement a posteriori et ne constitue pas son objet initial. En effet, le problème posé et résolu par la réalisation approchée est un problème d'optimisation comme décrit dans le théorème 5.

Ainsi, la réalisation approchée offre une alternative à la méthode de la réalisation équilibrée mais son intérêt se limite à l'aspect théorique. Dans la pratique, elle est peut attrayante, au moins pour deux raisons d'ordre numérique :

- L'utilisation de la matrice de Hankel infinie (I.25) nécessite un nombre très élevé de paramètres de Markov J_{k^r} ,
- Le calcul de la puissance matricielle A^k , intervenant dans J_{k^r} , introduit de nombreuses erreurs d'arrondi.

Remarque : La réalisation équilibrée permet d'obtenir un modèle réduit d'ordre r pour tout r compris entre 1 et l'ordre du système n ; ceci n'est pas le cas des méthodes modales à cause de la restriction de conservation sur les valeurs propres.

I.7. Approximation de Padé

Contrairement aux méthodes ci-dessus, cette approche se fait en utilisant le formalisme de Laplace et son exposé sera limité aux systèmes mono-entrée, mono-sortie. **Définition 2 :** Soit

$$c_1 + c_2 s + \dots + c_i s^i + \dots$$

Le développement en série de Taylor au voisinage de $s = 0$ d'une fonction de transfert $G(s)$. L'approximant de Padé de $G(s)$, noté $AP_{p,q}$, est une fonction de transfert

$$AP_{p,q}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_p s^p}{a_0 + a_1 s + \dots + a_q s^q}$$

dont le développement en série autour de $s = 0$ est le même que celui de $G(s)$ jusqu'à l'ordre $p + q$.

Par définition même, on voit que l'approximation de Padé permet de préserver le gain statique du système.

I.8 Réduction optimale

Soit $f(z)$ une fonction intégrable sur le cercle unité $|z| = 1$ (i.e. $f \in L_\infty$). Les coefficients de Fourier de f sont définis par :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^k f(z) d\theta, \text{ Ou } z = e^{j\theta} .$$

Soit L_∞^- le sous-espace des fonctions $f \in L_\infty$ analytique dans $|z| < 1$ vérifiant

$$c_k(f) = 0 \quad k > 0 \quad \text{pour } . \text{ Soit } \mathcal{F}_H \text{ l'espace de toutes les fonctions } f \in L_\infty \text{ telles que}$$

$H(f) = H$. On a alors le résultat suivant :

Théorème 6 : une matrice de Hankel H est bornée si et seulement si, il existe $f \in L_\infty$ telle que $H = H(f)$; de plus, il existe $f^* \in \mathcal{F}_H$:

$$\inf_{f \in \mathcal{F}_N} \|f\|_\infty = \|f^*\|_\infty = \|H\|_s.$$

Corollaire : soit $f \in L_\infty$. Alors $\exists g^* \in L_\infty^-$

$$\inf_{g \in L_\infty^-} \|f - g^*\|_\infty = \|f - g^*\|_\infty = \|H(f)\|_s.$$

Ce corollaire donne la meilleure approximation d'ordre 0 de $H(f)$ Puisque $g \in L_\infty^-$ équivaut à $H(g) = 0$. On a également le théorème suivant dû à Kronecker.

Théorème 7 : Soit

$$H = H \left[\sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{-j} \right].$$

Alors H est de rang $r < \infty$ si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{-j} = \frac{n(z)}{d(z)} .$$

Où $d(z)$ est analytique dans $|z| \geq 1$ et a un degré r (i.e. $d(z)$ possède r pôles stables).

Considérons maintenant la décomposition en valeurs singulières de $H(f)$

$$H(f) = U\Sigma V^T$$

alors

$$Hv^i = \sigma_i u_i \quad \text{et} \quad Hu^i = \sigma_i v_i$$

et l'on a le résultat suivant dont une version a déjà été énoncée dans le théorème 5 :

Théorème 8 (Approximation optimale) : Soit σ_r la r -ème valeur singulière d'une matrice de Hankel bornée H vérifiant $\sigma_r > \sigma_{r+1}$. Alors, il existe une matrice de Hankel unique de rang r qui minimise $\|H - \Omega\|_S$ pour toutes les matrices de Hankel bornée Ω de rang r et

$$\|H - \Omega\|_S = \sigma_{r+1}$$

$$\Omega_r = H - H(\Phi^r(z))$$

$$\text{ou} \quad \Phi^r(z) = \sigma_{r+1} \frac{\mu^{r+1}(z)}{\gamma^{r+1}(z)}.$$

Une autre propriété intéressante est que $\gamma^{r+1}(z)$ admet r zéros dans $|z| < 1$ lorsque σ_{r+1} est une valeur singulière simple de H .

Théorème 9 : Soit $f(z) = c(zI - A)^{-1}b = n(z)/d(z)$ la fonction de transfert d'un système SISO d'ordre n et soit $\{\bar{A}, \bar{b}, c\}$ une réalisation équilibrée de $\{A, b, c\}$ et T la transformation associée. Alors on a:

1)

$$\Phi^r(z) = \sigma_{r+1} \frac{u^{r+1}(z)}{\gamma^{r+1}(z)}$$

Avec

$$u^{r+1}(z) = \sigma_{r+1}^{-1/2} c(zI - \bar{A})^{-1} c_{r+1} \triangleq \frac{m(z)}{d(z)}$$

$$\gamma^{r+1}(z) = \sigma_{r+1}^{-1/2} c_{r+1}^T (I - z\bar{A})^{-1} \bar{b} = \pm \frac{m(z)}{d(z)}$$

c_{r+1} étant $(r + 1)$ la ème colonne de I_n .

2)

$g^r(z)$ désignant la fonction de transfert de l'approximant optimal.

Conclusion

Dans ce chapitre, nombreuses méthodes de réduction et de simplification de modèles ont été présentées. Les méthodes de réduction de modèles sont nombreuses et le choix de l'une ou l'autre de ces méthodes n'est pas facile, sachant qu'une technique particulière peut être bien adaptée à un problème donné et ne pas l'être pour un autre. Ainsi le choix peut être effectué selon la nature ainsi que le type de description du système (représentation d'état, fonction de transfert...).

Dans le prochain chapitre, quelques méthodes de simplification de modèles présentées dans ce chapitre vont être utilisées.

Chapitre III

Simulation et resultats

Introduction

Pour faciliter l'implémentation des systèmes d'ordre fractionnaire on doit approximer les fonctions de transfert de ces systèmes par des fonctions de transfert d'ordre entier dans une bande fréquentielle désirée. Dans ce contexte la méthode utilisée pour l'approximation des correcteurs d'ordre fractionnaire proposés est la méthode d'Oustaloup. Or, le modèle approximé est d'ordre élevé et trop complexe il doit être réduit.

La réduction de l'ordre des modèles est donc la tâche de réduction du nombre des états tout en préservant les relations entrées-sorties.

Dans ce chapitre, deux méthodes de réduction de modèle sont utilisées, où les résultats de simulation obtenus de trois exemples de systèmes d'ordre fractionnaire d'application sont présentés.

III. 1. Exemples de simulation :

Des exemples illustratifs sont présentés pour discuter l'efficacité des méthodes de réduction de l'ordre de modèle en utilisant les deux méthodes proposées : réalisation équilibrée et réalisation approchée. On va considérer trois exemples de systèmes.

Exemple 1 :

Le premier système est donné par la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{1}{s^{0.7} + 1}$$

- **Application de la méthode d'Oustaloup :**

Dans un premier temps, on applique cette méthode à l'intégrateur fractionnaire pour la bande de fréquences :

$$\omega_l = 0.1 \text{ rad/s et } \omega_h = 1000 \text{ rad/s}$$

La figure suivante présente le diagramme de Bode du système pour différents ordres d'approximation: N=2, 4, 6, 8 et 10.

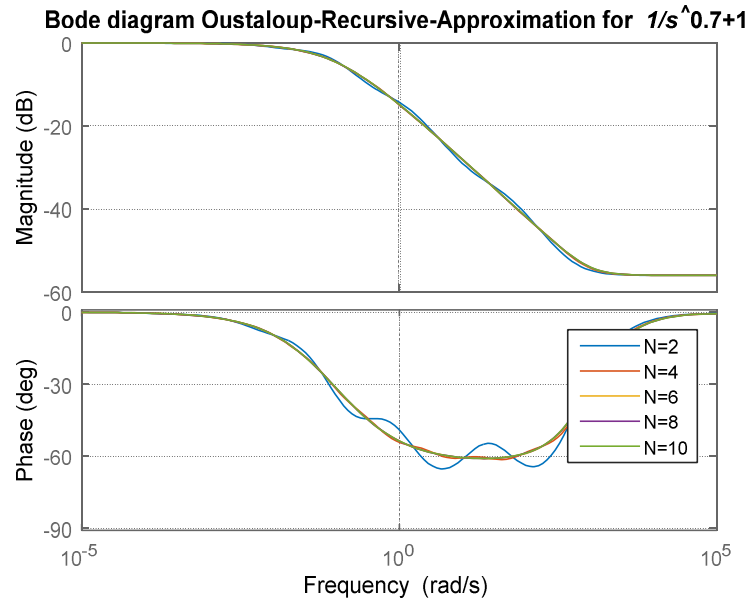


Fig. III.1 . Diagramme de Bode du système pour différents ordres d’approximation N.

A partir de la figure (III.1), on peut facilement voir que le paramètre N a une influence sur le comportement fréquentielle du système fractionnaire,

Pour l’ordre d’approximation N=9 le modèle approximé de ce système est le suivant :

$$H_a(s) = s^9 + 844.7 s^8 + 8.162e04 s^7 + 1.004e06 s^6 + 1.591e06 s^5 + 3.257e05 s^4 + 8609 s^3 + 29.33 s^2 + 0.01272 s + 6.31e-07$$

$$632 s^9 + 1.28e05 s^8 + 3.015e06 s^7 + 9.613e06 s^6 + 4.849e06 s^5 + 4.849e05 s^4 + 9613 s^3 + 30.15 s^2 + 0.0128 s + 6.32e-07$$

*** 1^{ère} méthode de réduction : Réalisation équilibrée**

La réalisation équilibrée du modèle du système produit une réalisation équilibrée du modèle LTI du système et un vecteur contenant la diagonale du gramien équilibrée. Ce vecteur peut être utilisé pour réduire l'ordre du modèle. On peut supprimer les états qui ont une petite valeur dans ce vecteur tout en conservant les caractéristiques d'entrées-sorties les plus importantes du système d'origine. Pour effectuer l'élimination de l'état deux techniques sont disponibles :

1. La première technique 'mdc' produit un ordre réduit des modèles avec correspondance gain continu 'DC gain' (ou de manière équivalente, correspondant au régime permanent dans la réponse indicielle).

2. La deuxième technique 'del' supprime simplement les états spécifiés. Bien que cette méthode ne garantisse pas correspondance gains continu, il tend à produire de meilleures approximations dans le domaine des fréquences. Pour notre modèle, les éléments diagonaux du gramien sont :

$$g = \begin{bmatrix} 0.3636 & 0.0774 & 0.0296 & 0.0129 & 0.0081 & 0.0030 & 0.0027 & 0.0006 \\ & & & & & & & 0.0006 \end{bmatrix}$$

On constate qu'à partir du cinquième état, les états sont faiblement couplés à l'entrée et la sortie. On peut supprimer ces états par l'un des deux techniques d'élimination. Pour obtenir l'approximation du quatrième ordre suivante du système d'origine.

Le modèle réduit par la première technique est comme suit :

$$H_{mdc}(s) = \frac{0.0315 s^4 + 0.2204 s^3 + 0.05655 s^2 + 0.001247 s + 1.72e-06}{s^4 + 0.7756 s^3 + 0.08198 s^2 + 0.001335 s + 1.723e-06}$$

et le deuxième modèle résultant de la deuxième technique est :

$$h_{del}(s) = \frac{0.001582 s^4 + 0.5142 s^3 + 1.476 s^2 + 0.3223 s + 0.005622}{s^4 + 7.751 s^3 + 4.758 s^2 + 0.4502 s + 0.005804}$$

La figure III.2 montre le diagramme de Bode du modèle réduit $h_{mdc}(s)$, le modèle réduit $h_{del}(s)$ et le modèle complet. Dans la zone de pulsation où la phase du système varie de 0 à -60°, les points du diagramme de Bode en amplitude des deux modèles réduits sont proches de ceux du modèle complet. Cela indique l'efficacité de la méthode de réduction proposée dans cette zone de pulsation. Hors de cette zone le diagramme de Bode en amplitude des deux modèles réduits sont légèrement loin de celui du système complet. Dans les hautes fréquences la précision des approximations se dégrade.

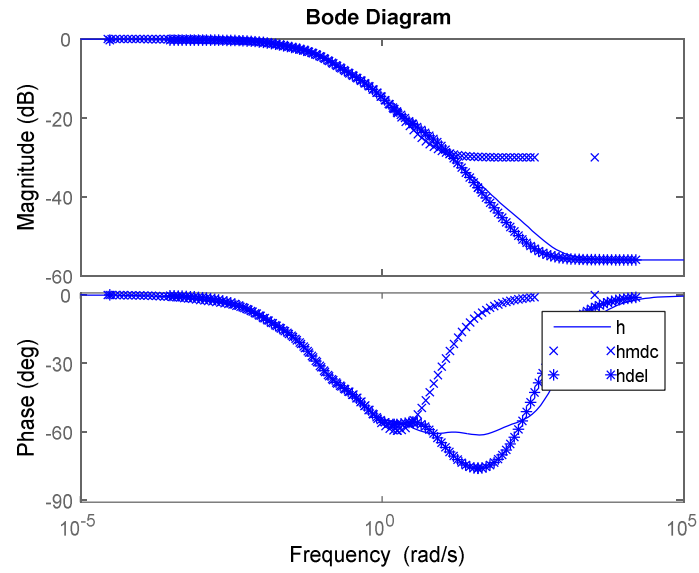


Fig. III.2 Comparaison des diagrammes de Bode du modèle complet et les deux modèles réduits.

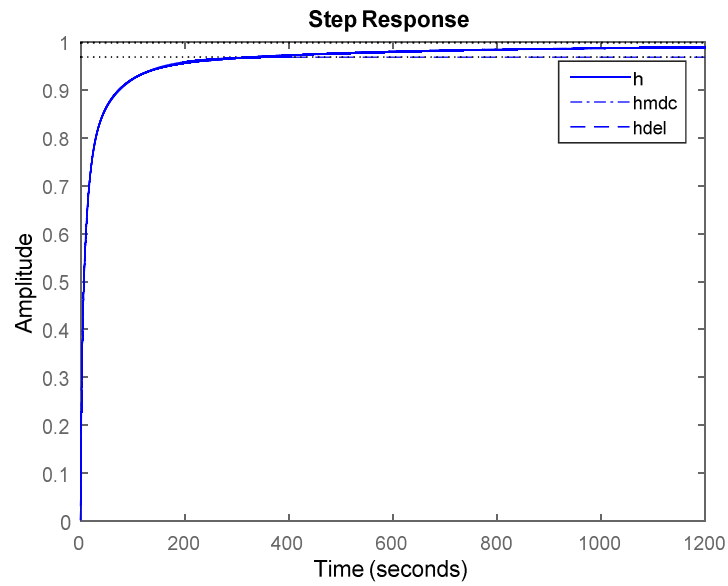


Fig. III.3 Réponse indicielle du modèle complet et les deux modèles réduits.

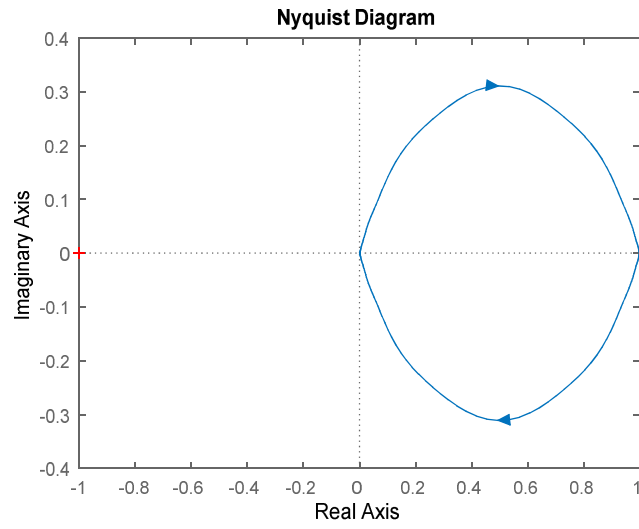


Fig. III.4 Diagramme de Nyquist du modèle complet.

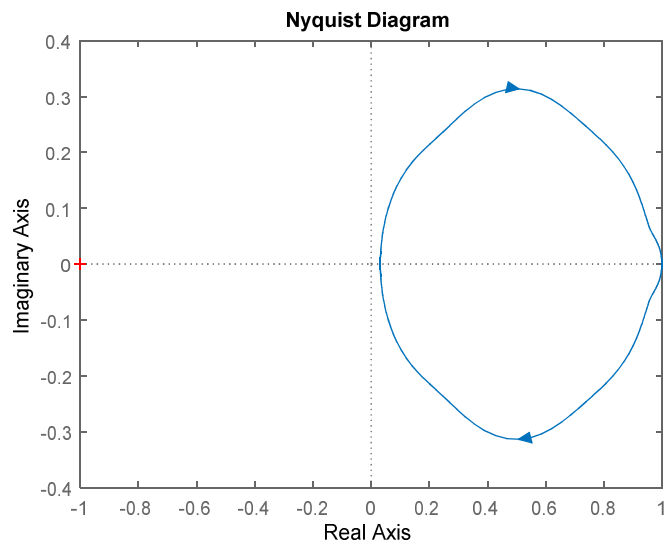


Fig. III.5 Diagramme de Nyquist du modèle réduit hdmc.

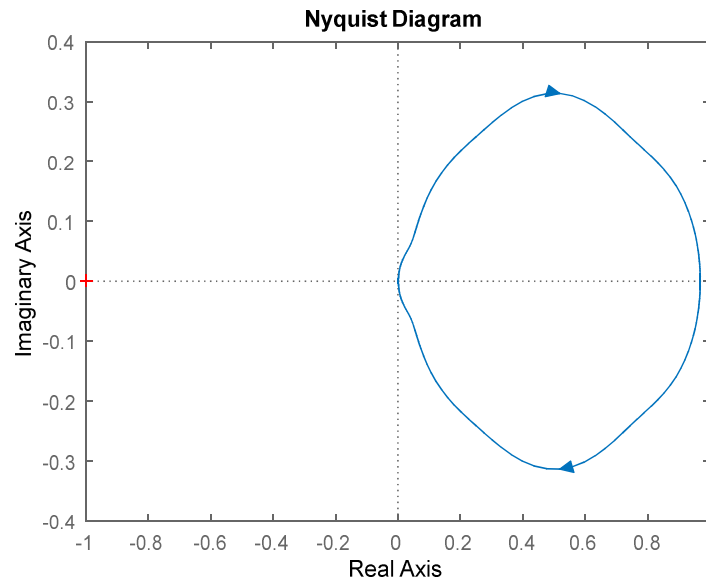


Fig. III.6 Diagramme de Nyquist du modèle réduit hdel.

• **2ème méthode de réduction** : Réalisation approchée

Calcul des valeurs singulières de Hankel :

Pour comprendre quels états du modèle peuvent être éliminés en toute sécurité, on examine les valeurs singulières de Hankel du modèle calculées.

D'après la figure III.7 le tracé des valeurs singulières de Hankel suggère qu'il ya un mode dominant de ce système. Un modèle réduit de premier représente bien le système original.

$T(s) =$

$$\frac{0.001582 s + 0.154}{s + 0.2113}$$

La figure (III.8) présente le tracé de Bode des fonctions de transfert du modèle original et du modèle réduit. Et la figure (III.9) présente les réponses indicielles du modèle original et du modèle réduit.

D'après le diagramme de Bode, les points du diagramme de Bode en amplitude du modèle original et du modèle réduit sont proches. Mais, la réponse indicielle du modèle réduit est un peu loin de celle du modèle complet.

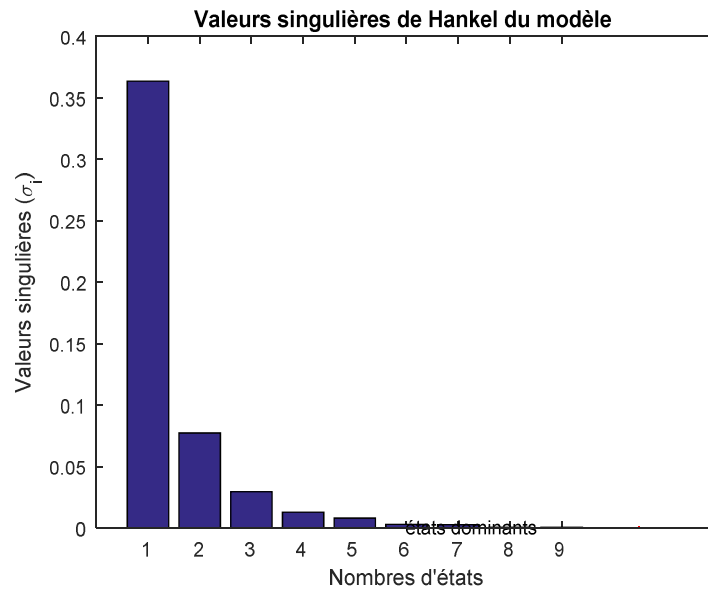


Fig. III.7 Valeurs Singulières de Hankel du modèle.

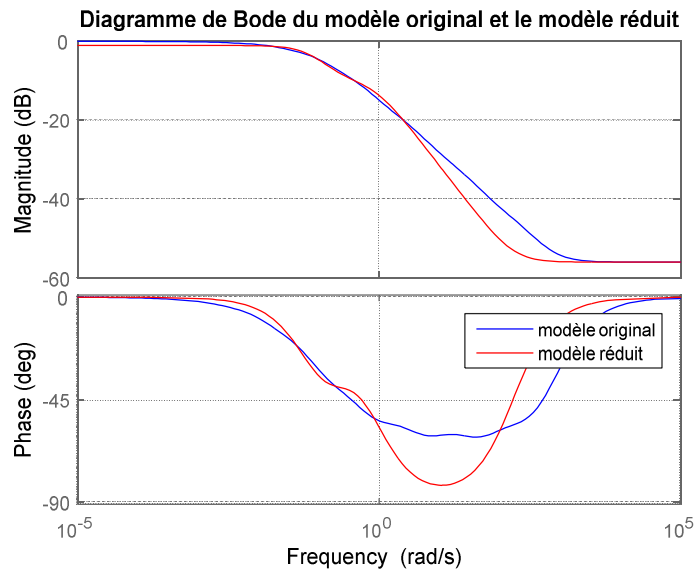


Fig. III.8 Diagramme de Bode du modèle original et du modèle réduit.

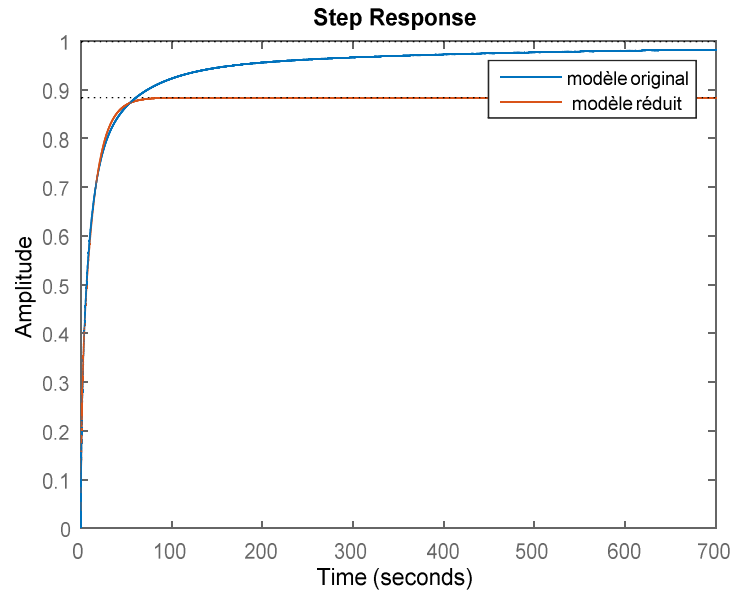


Fig. III.9 Réponse indicielle du modèle complet et le modèle réduit.

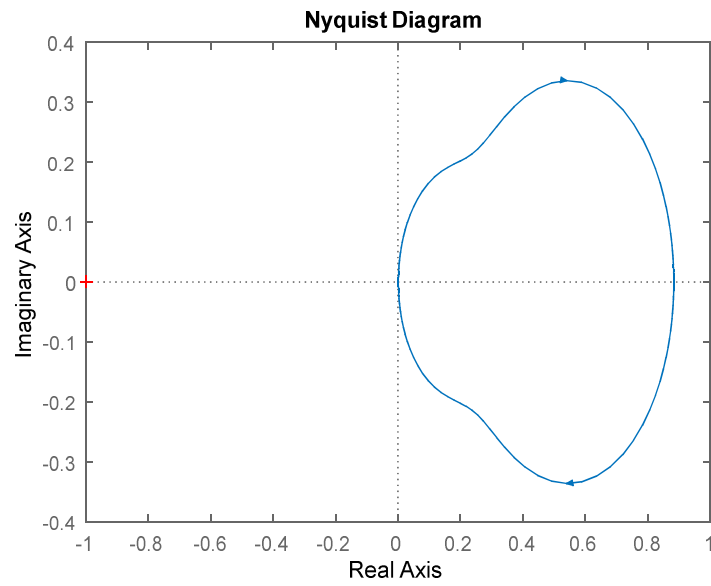


Fig. III.10 Diagramme de Nyquist du modèle réduit.

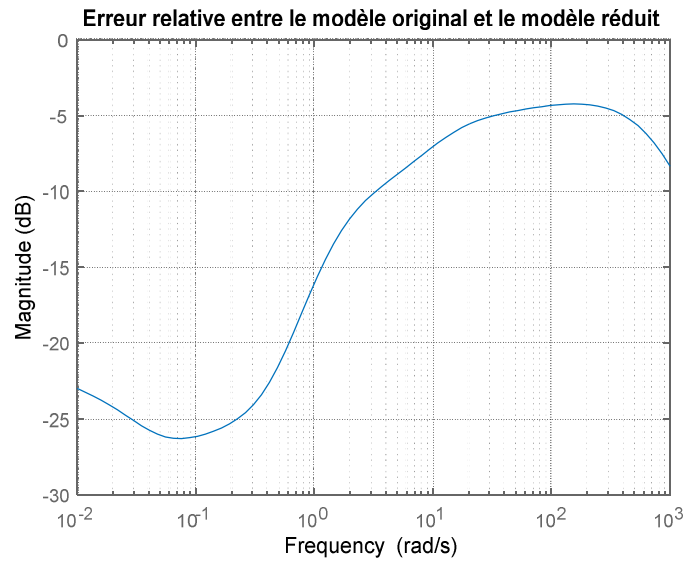


Fig. III.11 Erreur relative entre le modèle original et le modèle réduit.

Exemples 2 :

Le deuxième système est donné par la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{-2s^{0.603} + 4}{s^{3.501} + 3.8s^{2.42} + 2.6s^{0.798} + 2.5s^{1.31} + 1.5}$$

- **Application de la méthode d’Outaloup :**

Dans un premier temps, on applique cette méthode à l’intégrateur fractionnaire pour la bande de fréquences :

$$\omega_l = 0.1 \text{ rad/s et } \omega_h = 1000 \text{ rad/s}$$

Pour l’ordre d’approximation N=9 le modèle approximé de ce système est le suivant :

$$H_a(s) =$$

$$\begin{aligned} & -512.5 s^{45} - 1.559e06 s^{44} - 1.953e09 s^{43} - 1.311e12 s^{42} - 5.17e14 s^{41} - 1.249e17 s^{40} \\ & - 1.903e19 s^{39} - 1.869e21 s^{38} - 1.196e23 s^{37} - 5.009e24 s^{36} - 1.372e26 s^{35} \\ & - 2.463e27 s^{34} - 2.912e28 s^{33} - 2.267e29 s^{32} - 1.155e30 s^{31} - 3.82e30 s^{30} \\ & - 8.156e30 s^{29} - 1.112e31 s^{28} - 9.419e30 s^{27} - 4.582e30 s^{26} - 9.6e29 s^{25} \\ & + 1.428e29 s^{24} + 1.391e29 s^{23} + 3.766e28 s^{22} + 5.555e27 s^{21} + 4.955e26 s^{20} \\ & + 2.765e25 s^{19} + 9.91e23 s^{18} + 2.32e22 s^{17} + 3.572e20 s^{16} + 3.607e18 s^{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ 2.384e16 s^{14} + 1.038e14 s^{13} + 2.997e11 s^{12} + 5.741e08 s^{11} + 7.252e05 s^{10} \\
&+ 600.5 s^9 + 0.3268 s^8 + 0.0001172 s^7 + 2.754e-08 s^6 + 4.174e-12 s^5 + 3.994e-16 s^4 \\
&+ 2.371e-20 s^3 + 8.434e-25 s^2 + 1.643e-29 s + 1.347e-34
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&100.9 s^{48} + 3.178e05 s^{47} + 4.131e08 s^{46} + 2.886e11 s^{45} + 1.189e14 s^{44} + 3.014e16 s^{43} \\
&+ 4.837e18 s^{42} + 5.025e20 s^{41} + 3.429e22 s^{40} + 1.548e24 s^{39} + 4.651e25 s^{38} \\
&+ 9.39e26 s^{37} + 1.294e28 s^{36} + 1.237e29 s^{35} + 8.333e29 s^{34} + 4.018e30 s^{33} \\
&+ 1.399e31 s^{32} + 3.521e31 s^{31} + 6.357e31 s^{30} + 8.165e31 s^{29} + 7.412e31 s^{28} \\
&+ 4.746e31 s^{27} + 2.162e31 s^{26} + 7.154e30 s^{25} + 1.76e30 s^{24} + 3.252e29 s^{23} \\
&+ 4.472e28 s^{22} + 4.462e27 s^{21} + 3.128e26 s^{20} + 1.499e25 s^{19} + 4.857e23 s^{18} \\
&+ 1.06e22 s^{17} + 1.552e20 s^{16} + 1.512e18 s^{15} + 9.731e15 s^{14} + 4.155e13 s^{13} \\
&+ 1.182e11 s^{12} + 2.238e08 s^{11} + 2.802e05 s^{10} + 230.5 s^9 + 0.1248 s^8 + 4.458e-05 s^7 \\
&+ 1.044e-08 s^6 + 1.578e-12 s^5 + 1.507e-16 s^4 + 8.936e-21 s^3 + 3.175e-25 s^2 \\
&+ 6.178e-30 s + 5.059e-35
\end{aligned}$$

* 1^{ère} méthode de réduction : Réalisation équilibrée

Pour notre modèle, les éléments diagonaux du gramien sont :

g=

3.1609	2.0987	0.1506	0.0742	0.0305	0.0108	0.0073	0.0073	0.0018	0.0017
0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Ce qui indique que les quatre premiers états sont fortement couplés à l'entrée et la sortie. On peut ensuite supprimer le reste des états par l'un des deux techniques d'élimination. Pour obtenir l'approximation du quatrième ordre suivante du système d'origine.

Le modèle réduit par la première technique est comme suit :

Hmdc (s) =

$$\frac{0.08775 s^4 - 0.2636 s^3 + 0.002153 s^2 + 0.02272 s + 0.000143}{s^4 + 0.3437 s^3 + 0.07304 s^2 + 0.009887 s + 5.372e-05}$$

et le deuxième modèle résultant de la deuxième technique est :

hdel (s) =

$$\frac{0.05062 s^3 - 0.647 s^2 + 0.1829 s + 0.005174}{s^4 + 2.242 s^3 + 0.3543 s^2 + 0.09591 s + 0.00201}$$

Comme le montre la figure III.12, le diagramme de Bode en amplitude des deux modèles réduits est proches de celui du modèle complet. Dans la zone de pulsation inférieure à 10² rad/s. Cela indique l'efficacité de la méthode de réduction proposée dans cette zone de pulsation. Hors de cette zone le diagramme de Bode en amplitude des deux modèles réduits sont au dessus de celui du système complet.

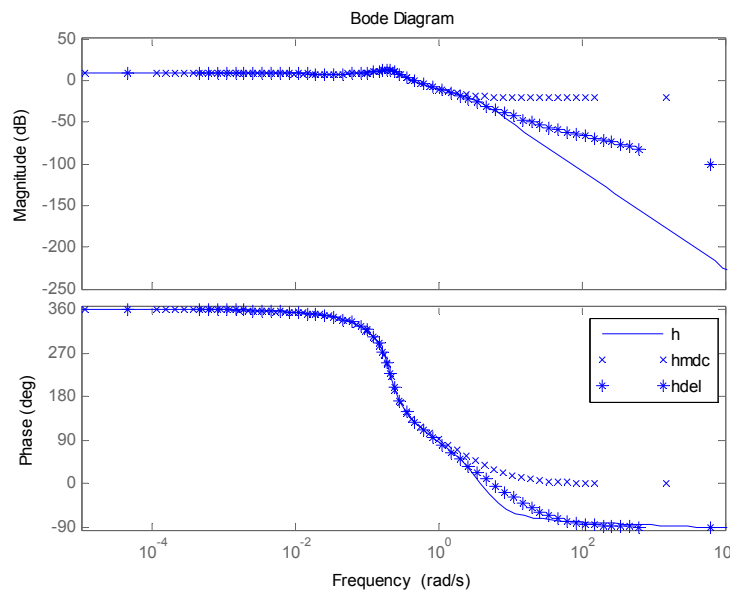


Fig. III.12 Comparaison des diagrammes de Bode du modèle complet

et les deux modèles réduits.

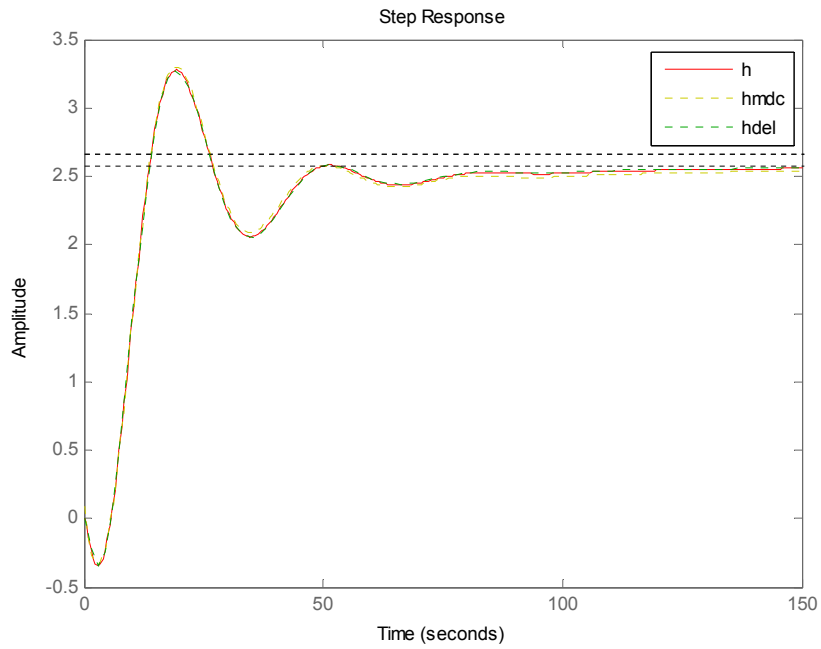


Fig. III.13 Réponse indicielle du modèle complet et les deux modèles réduits.

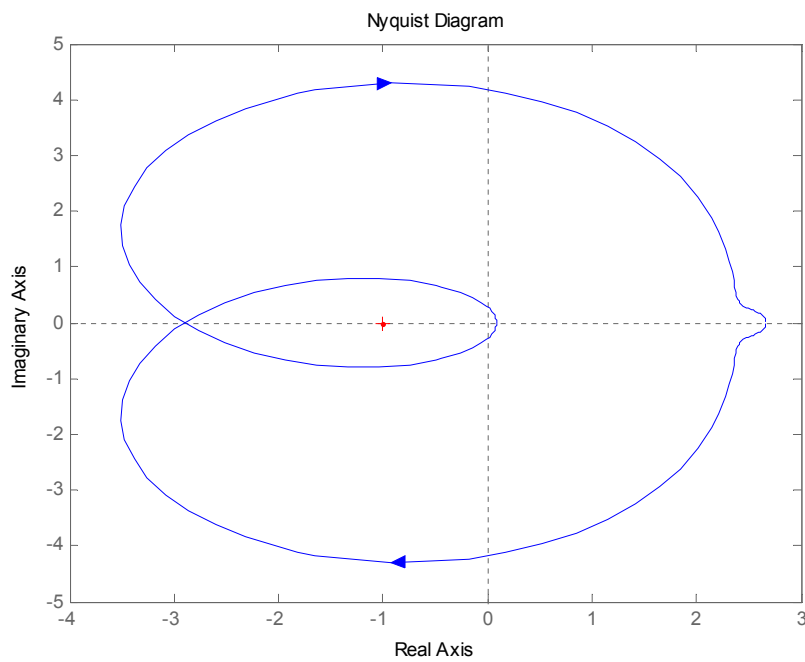


Fig. III.14 Diagramme de Nyquist du modèle complet.

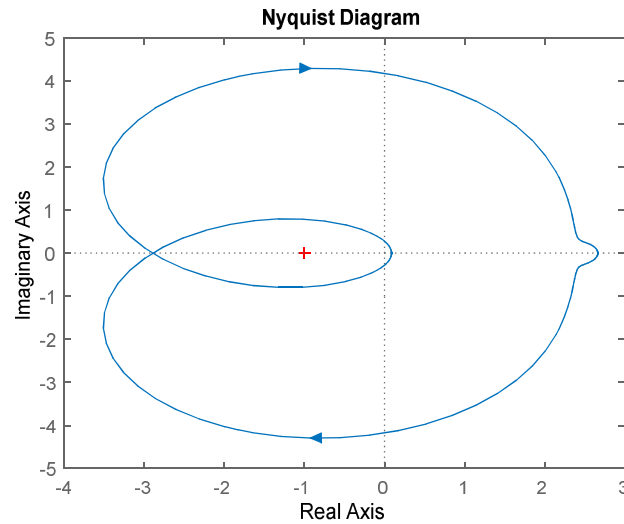


Fig. III.15 Diagramme de Nyquist du modèle réduit hdmc.

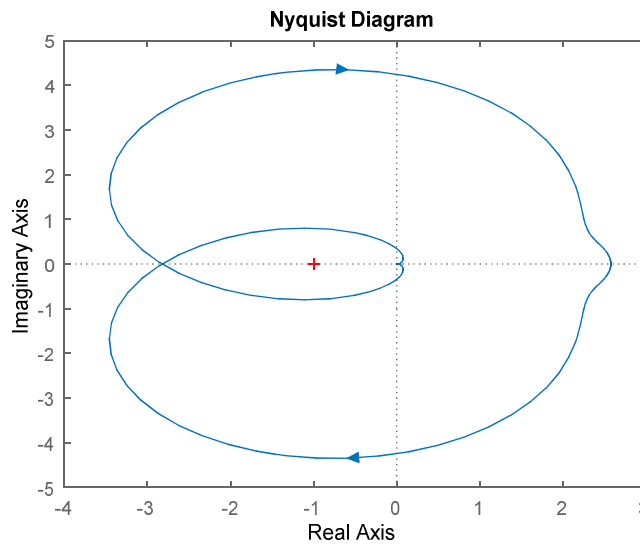


Fig. III. 16 Diagramme de Nyquist du modèle réduit hdel.

• 2ème méthode de réduction : Réalisation approchée

Calcul des valeurs singulières de Hankel :

D’après la figure III.17 le tracé des valeurs singulières de Hankel suggère qu’il ya deux modes dominants de ce système. Un modèle réduit d’ordre 2 représente bien le système original.

T(s) =

$$\frac{-1.939e13 s - 0.0003491}{s^2 + 1.45e14 s - 1.965e-06}$$

Mais, d'après les figures (III.18) et (III.19) qui présentent le diagramme de bode du système complet et le modèle et la réponse indicielle bode du système complet, respectivement, le résultat de l'approximation n'est pas bon dans ce cas.

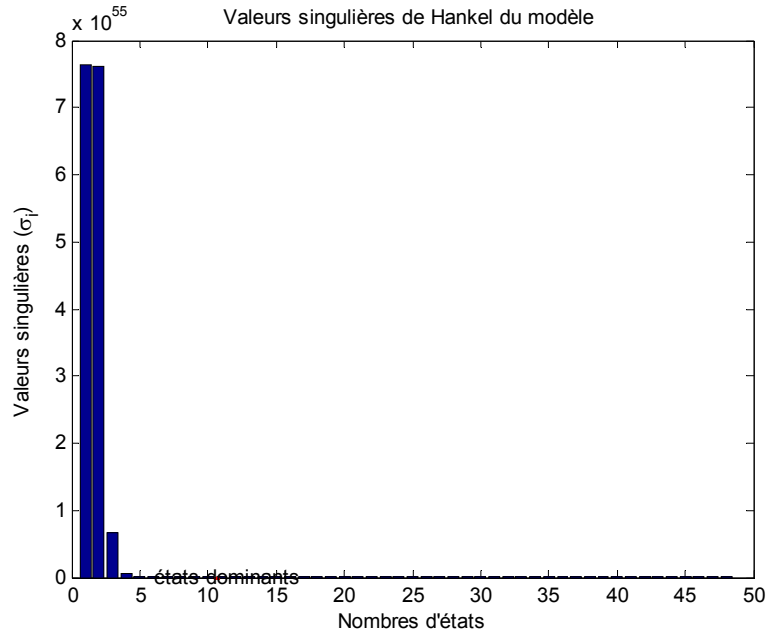


Fig. III. 17 Valeurs Singulières de Hankel du modèle.

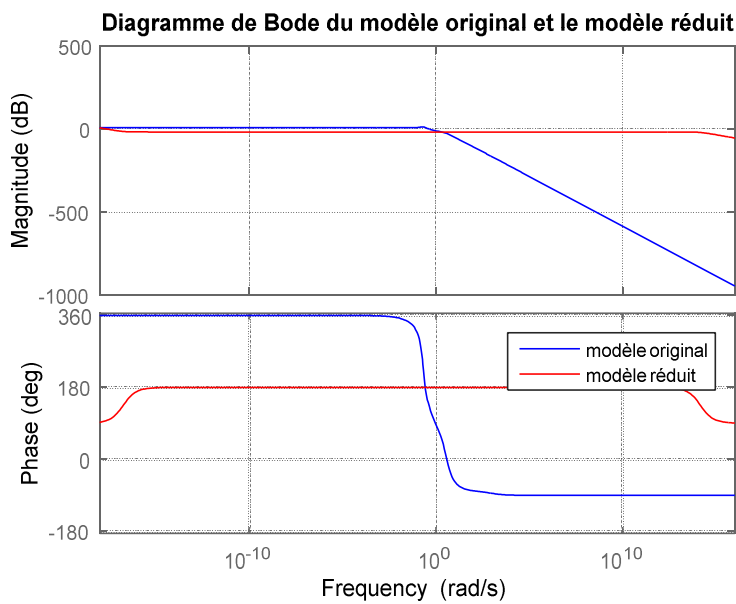


Fig. III.18 Diagramme de Bode du modèle original et du modèle réduit.

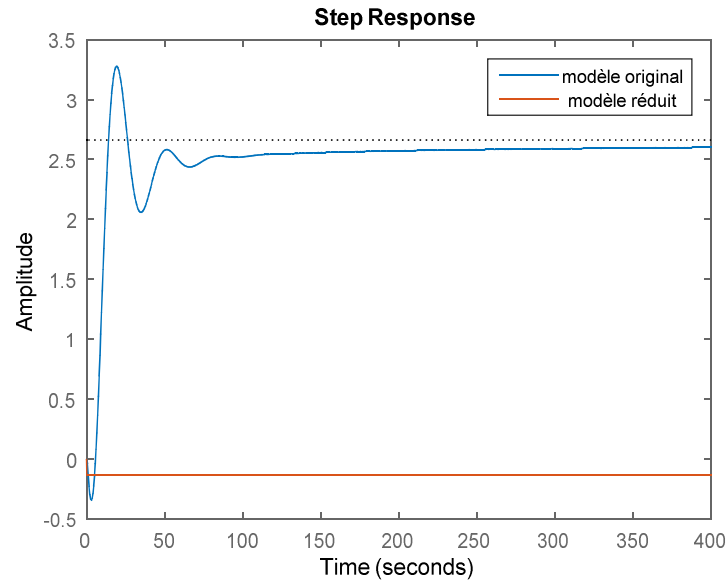


Fig. III.19 Réponse indicielle du modèle complet et le modèle réduit.

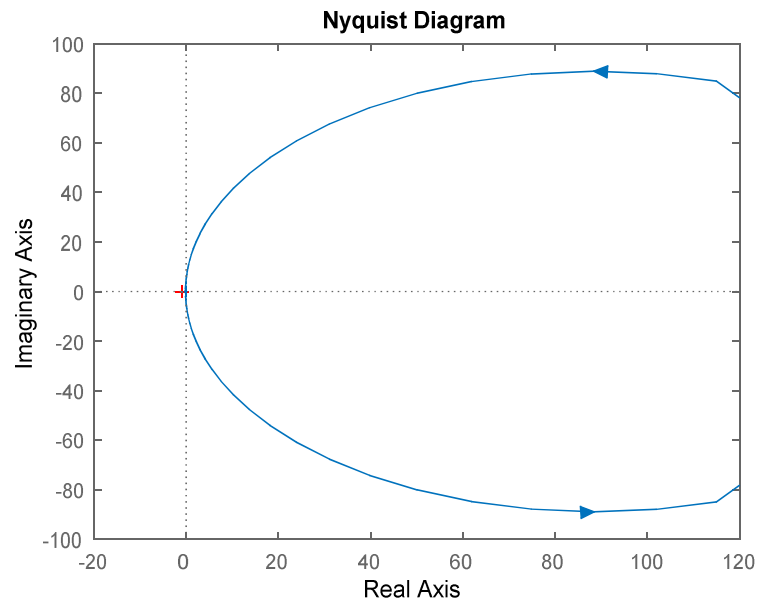


Fig. III. 20 Diagramme de Nyquist du modèle réduit.

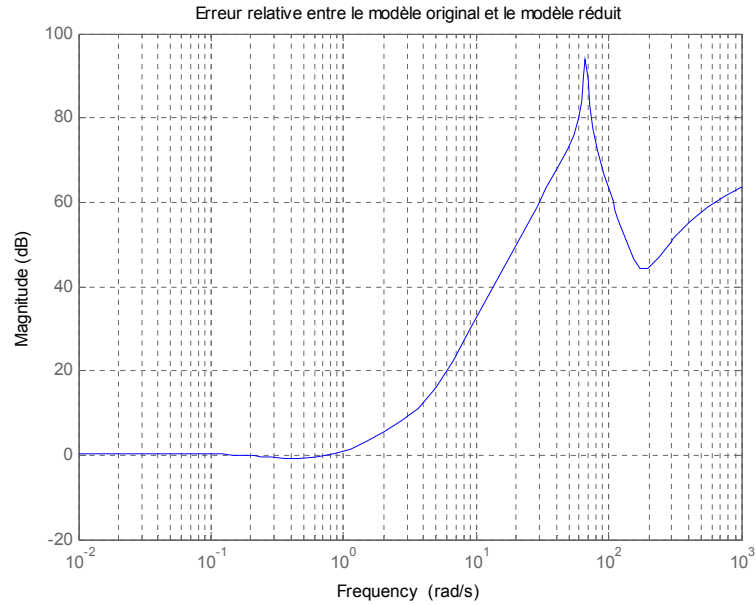


Fig. III.21 Erreur relative entre le modèle original et le modèle réduit.

Exemple 3 :

Le premier système est donné par la fonction de transfert suivante :

$$H(s) = \frac{2s^{0.6}}{s^{1.1} + 1.5s^{0.6} + 0.5} e^{-0.5s}$$

- **Application de la méthode d’Outaloup :**

Dans un premier temps, on applique cette méthode à l’intégrateur fractionnaire pour la bande de fréquences :

$$\omega_l = 0.1 \text{ rad/s et } \omega_h = 1000 \text{ rad/s}$$

Pour l’ordre d’approximation N=9 le modèle approximé de ce système est le suivant :

$$H_a(s) =$$

$$\begin{aligned} &503.4 s^{47} + 3.041e05 s^{46} - 7.217e07 s^{45} - 1.926e10 s^{44} + 8.819e12 s^{43} - 1.11e15 s^{42} \\ &- 5.079e16 s^{41} + 3.932e19 s^{40} - 6.881e21 s^{39} + 6.761e23 s^{38} - 3.328e25 s^{37} \\ &- 1.04e27 s^{36} + 3.658e29 s^{35} - 3.701e31 s^{34} + 2.23e33 s^{33} - 7.268e34 s^{32} \\ &- 7.228e35 s^{31} + 2.454e38 s^{30} - 1.575e40 s^{29} + 5.693e41 s^{28} - 1.024e43 s^{27} \\ &- 9.513e43 s^{26} + 1.122e46 s^{25} - 2.898e47 s^{24} + 2.32e48 s^{23} + 4.352e49 s^{22} \\ &- 9.284e50 s^{21} - 1.675e51 s^{20} + 9.436e52 s^{19} + 5.553e53 s^{18} + 1.149e54 s^{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1.079e54 s^{16} + 4.943e53 s^{15} + 1.135e53 s^{14} + 1.349e52 s^{13} + 8.397e50 s^{12} \\
& + 2.711e49 s^{11} + 4.635e47 s^{10} + 4.184e45 s^9 + 1.938e43 s^8 + 4.692e40 s^7 \\
& + 5.889e37 s^6 + 3.688e34 s^5 + 1.176e31 s^4 + 1.872e27 s^3 + 1.385e23 s^2 + 4.626e18 \\
& s + 5.618e13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2.512 s^{48} + 7254 s^{47} + 9.01e06 s^{46} + 6.506e09 s^{45} + 3.14e12 s^{44} + 1.102e15 s^{43} \\
& + 2.977e17 s^{42} + 6.434e19 s^{41} + 1.144e22 s^{40} + 1.709e24 s^{39} + 2.175e26 s^{38} \\
& + 2.387e28 s^{37} + 2.276e30 s^{36} + 1.897e32 s^{35} + 1.386e34 s^{34} + 8.896e35 s^{33} \\
& + 5.018e37 s^{32} + 2.483e39 s^{31} + 1.075e41 s^{30} + 4.052e42 s^{29} + 1.321e44 s^{28} \\
& + 3.695e45 s^{27} + 8.761e46 s^{26} + 1.736e48 s^{25} + 2.821e49 s^{24} + 3.67e50 s^{23} \\
& + 3.706e51 s^{22} + 2.79e52 s^{21} + 1.488e53 s^{20} + 5.279e53 s^{19} + 1.164e54 s^{18} \\
& + 1.5e54 s^{17} + 1.081e54 s^{16} + 4.217e53 s^{15} + 8.72e52 s^{14} + 9.583e51 s^{13} \\
& + 5.578e50 s^{12} + 1.702e49 s^{11} + 2.766e47 s^{10} + 2.388e45 s^9 + 1.068e43 s^8 \\
& + 2.514e40 s^7 + 3.089e37 s^6 + 1.906e34 s^5 + 6.014e30 s^4 + 9.503e26 s^3 + 6.996e22 \\
& s^2 + 2.328e18 s + 2.82e13
\end{aligned}$$

* 1^{ère} méthode de réduction : Réalisation équilibrée

Pour notre modèle, les éléments diagonaux du gramien sont :

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix}
1.0930 & 0.8988 & 0.8106 & 0.7431 & 0.6942 & 0.6550 & 0.6247 & 0.5990 & 0.5776 \\
0.5584 & 0.5416 & 0.5256 & 0.5098 & 0.4916 & 0.4698 & 0.4421 & 0.4079 & 0.3646 & 0.3099 \\
0.2331 & 0.2279 & 0.0886 & 0.0768 & 0.0336 & 0.0156 & 0.0080 & 0.0048 & 0.0023 & 0.0002 \\
0.0002 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\
0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000
\end{bmatrix}$$

On constate que les vingt-cinq premiers états sont fortement couplés à l'entrée et la sortie. On peut ensuite supprimer le reste des états par l'un des deux techniques d'élimination. Pour obtenir l'approximation de vingt cinquièmes ordre suivante du système d'origine.

Le modèle réduit par la première technique est comme suit :

$$H_{mdc}(s) =$$

$$\begin{aligned}
&0.03096 s^{25} + 90.76 s^{24} - 8.685e04 s^{23} + 3.787e07 s^{22} - 1.066e10 s^{21} + 2.201e12 s^{20} \\
&- 3.548e14 s^{19} + 4.64e16 s^{18} - 5.031e18 s^{17} + 4.594e20 s^{16} - 3.561e22 s^{15} \\
&+ 2.355e24 s^{14} - 1.329e26 s^{13} + 6.388e27 s^{12} - 2.596e29 s^{11} + 8.827e30 s^{10} \\
&- 2.47e32 s^9 + 5.549e33 s^8 - 9.632e34 s^7 + 1.213e36 s^6 - 9.82e36 s^5 + 3.756e37 s^4 \\
&\quad + 1.381e37 s^3 + 4.403e35 s^2 + 1.651e33 s + 4.359e29
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&s^{25} + 803.5 s^{24} + 5.604e05 s^{23} + 1.469e08 s^{22} + 4.236e10 s^{21} + 6.421e12 s^{20} + \\
&1.107e15 s^{19} + 1.138e17 s^{18} + 1.331e19 s^{17} + 9.899e20 s^{16} + 8.262e22 s^{15} + 4.546e24 \\
&s^{14} + 2.748e26 s^{13} + 1.113e28 s^{12} + 4.805e29 s^{11} + 1.388e31 s^{10} + 4.081e32 s^9 \\
&+ 7.794e33 s^8 + 1.402e35 s^7 + 1.484e36 s^6 + 1.229e37 s^5 + 3.737e37 s^4 + 9.707e36 s^3 + \\
&2.559e35 s^2 + 8.594e32 s + 2.188e29
\end{aligned}$$

et le deuxième modèle résultant de la deuxième technique est :

$$\begin{aligned}
\text{hdel}(s) = &200.2 s^{24} - 1.679e05 s^{23} + 7.002e07 s^{22} - 1.929e10 s^{21} + 3.926e12 s^{20} - \\
&6.267e14 s^{19} + 8.127e16 s^{18} - 8.754e18 s^{17} + 7.942e20 s^{16} - 6.121e22 s^{15} + 4.025e24 \\
&s^{14} - 2.258e26 s^{13} + 1.078e28 s^{12} - 4.35e29 s^{11} + 1.467e31 s^{10} - 4.061e32 s^9 \\
&+ 8.996e33 s^8 - 1.53e35 s^7 + 1.861e36 s^6 - 1.403e37 s^5 + 4.13e37 s^4 + 1.139e38 s^3 \\
&+ 2.03e37 s^2 + 4.385e35 s + 9.69e32
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&s^{25} + 1442 s^{24} + 7.869e05 s^{23} + 2.664e08 s^{22} + 6.357e10 s^{21} + 1.169e13 s^{20} + \\
&1.716e15 s^{19} + 2.079e17 s^{18} + 2.108e19 s^{17} + 1.814e21 s^{16} + 1.332e23 s^{15} + 8.366e24 \\
&s^{14} + 4.501e26 s^{13} + 2.061e28 s^{12} + 8.011e29 s^{11} + 2.597e31 s^{10} + 6.957e32 s^9 \\
&+ 1.487e34 s^8 + 2.477e35 s^7 + 2.968e36 s^6 + 2.367e37 s^5 + 9.456e37 s^4 + 9.725e37 s^3 \\
&+ 1.369e37 s^2 + 2.477e35 s + 4.941e32
\end{aligned}$$

Comme le montre le diagramme de Bode de la figure III.22, le modèle réduit capte les caractéristiques du système dans l'intervalle de fréquence moins de 10^5 rad /s très bien, mais la correspondance dans la région de fréquences supérieures à 10^5 rad /s est pauvre. En outre, le modèle réduit ne tient pas pleinement compte de la dynamique dans la gamme fréquences supérieures à 10^5 .

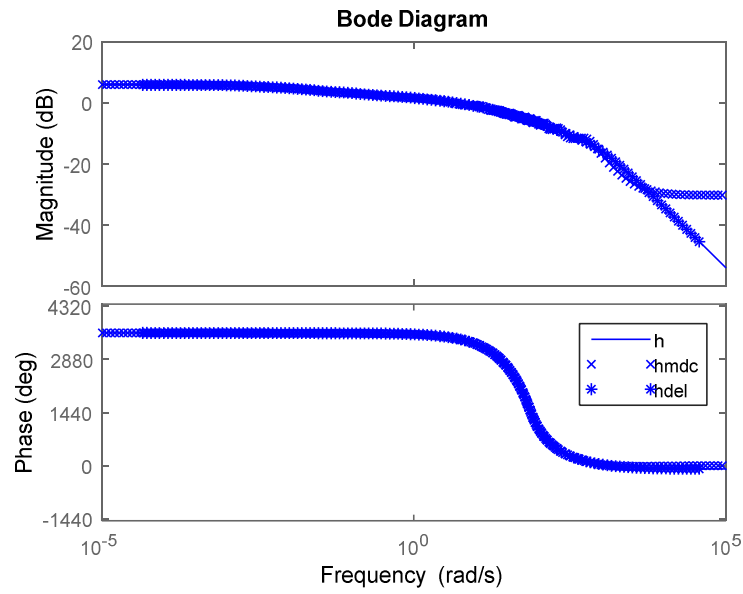


Fig. III.22 Comparaison des diagrammes de Bode du modèle complet et les deux modèles réduits.

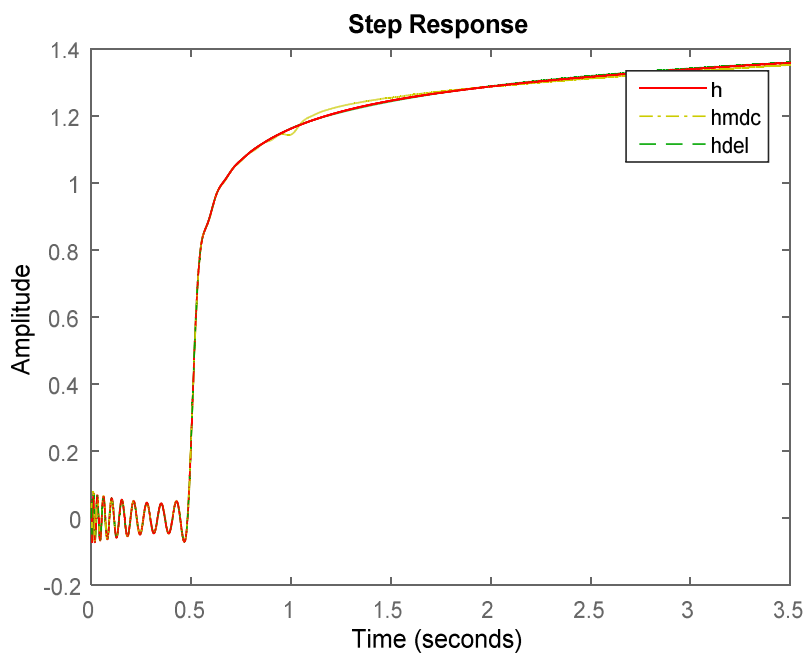


Fig. III.23 Réponse indicielle du modèle complet et les deux modèles réduits.

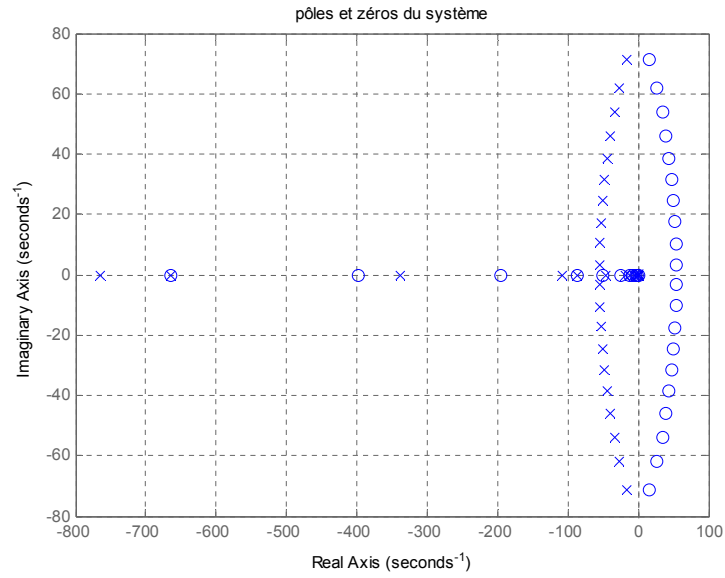


Fig. III.24 Les pôles et les zéros du système d'origine.

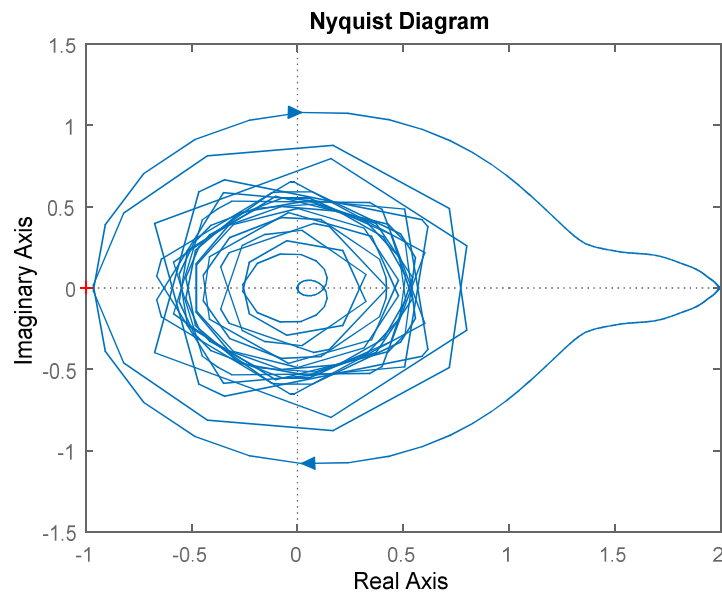


Fig. III.25 Diagramme de Nyquist du modèle complet.

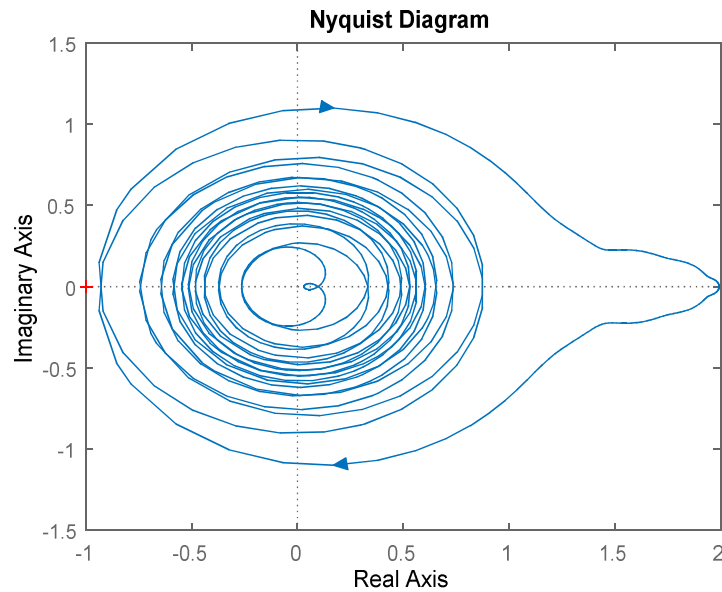


Fig. III.26 Diagramme de Nyquist du modèle réduit hmde.

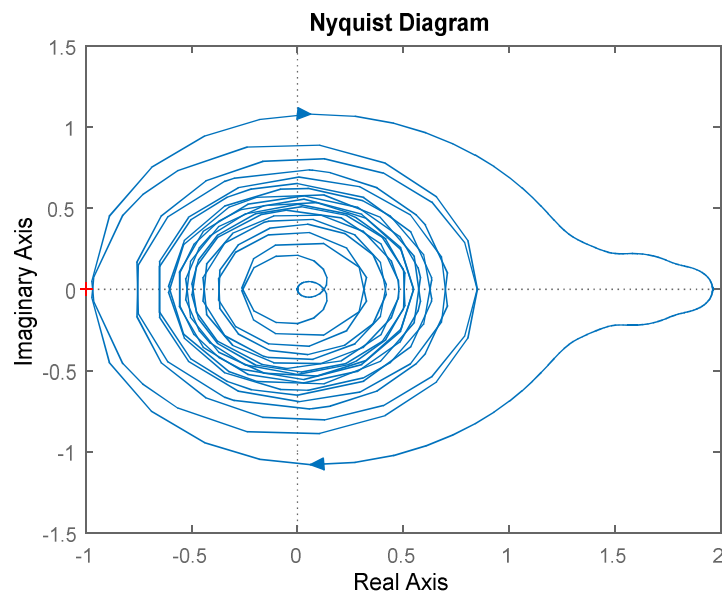


Fig. III.27 Diagramme de Nyquist du modèle réduit hdel.

• **2ème méthode de réduction** : Réalisation approchée

Calcul des valeurs singulières de Hankel :

D'après la figure III.28 le tracé des valeurs singulières de Hankel suggère qu'il ya deux modes dominants de ce système.

Un modèle réduit d'ordre 2 représente bien le système original.

$$T(s) = \frac{-8.485e37}{s - 1.119e38}$$

Mais, d'après les figures (III.29) et (III.30) qui présentent le diagramme de bode du système complet et le modèle et la réponse indicielle bode du système complet, respectivement, le résultat de l'approximation n'est pas bon dans ce cas.

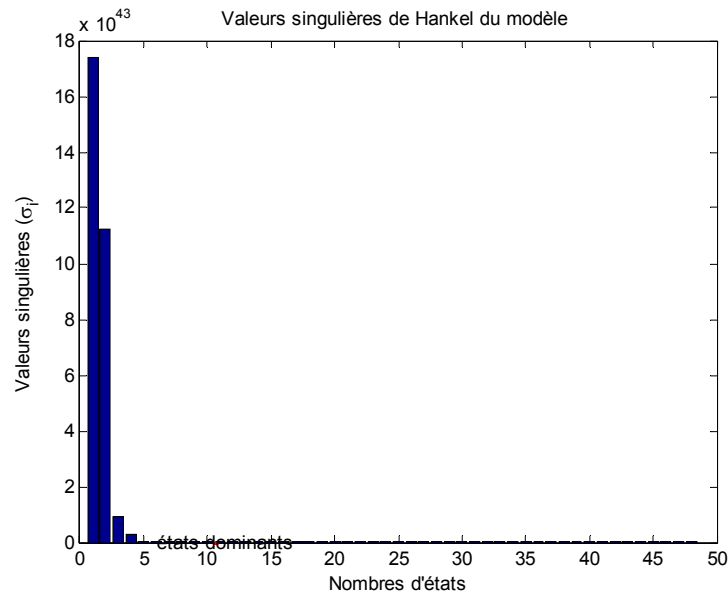


Fig. III.28 Valeurs Singulières de Hankel du modèle.

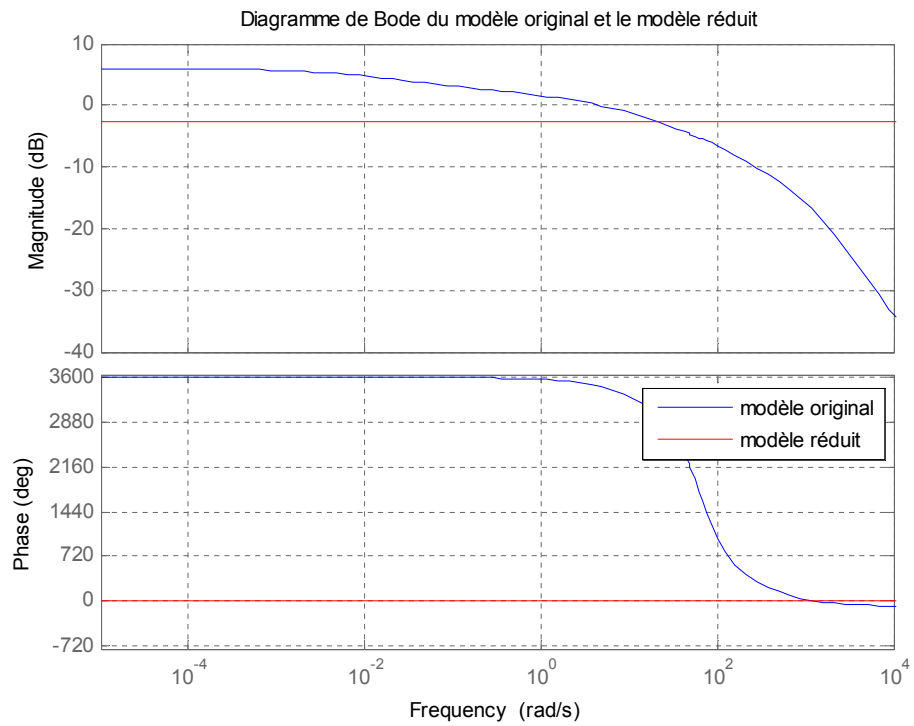


Fig. III.29 Comparaison de diagramme de Bode entre le modèle original et le modèle réduit.

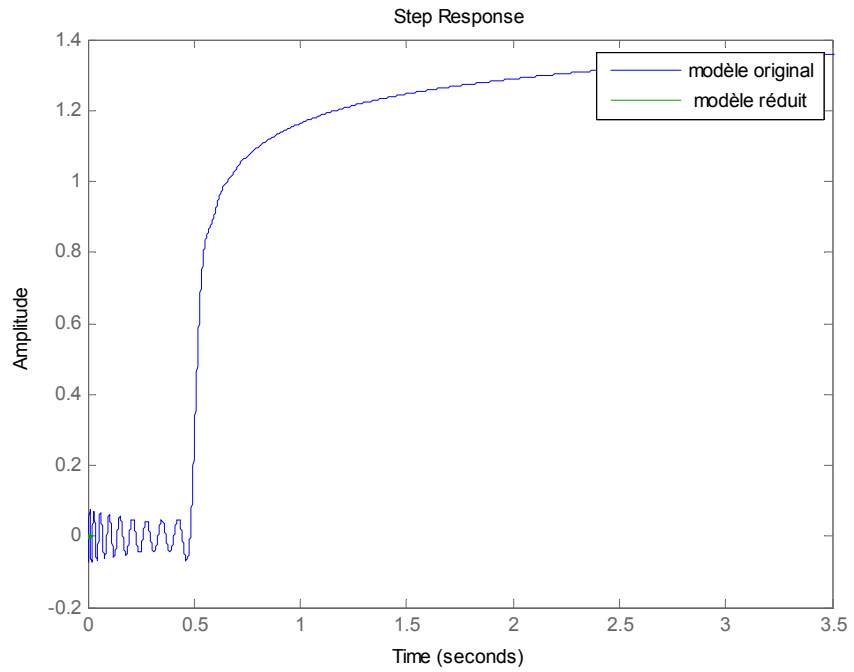


Fig. III.30 Réponse indicielle du modèle original.

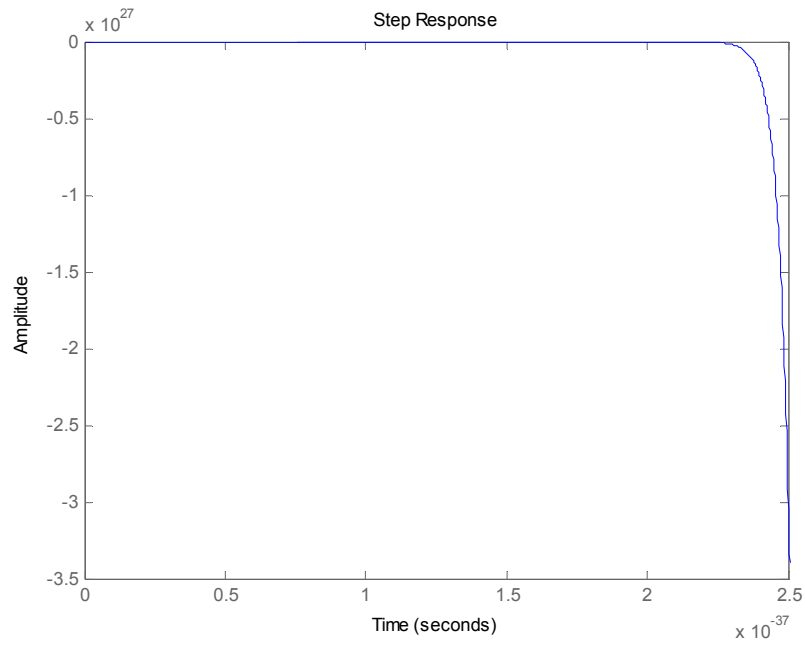


Fig. III.31 Réponse indicielle du modèle réduit.

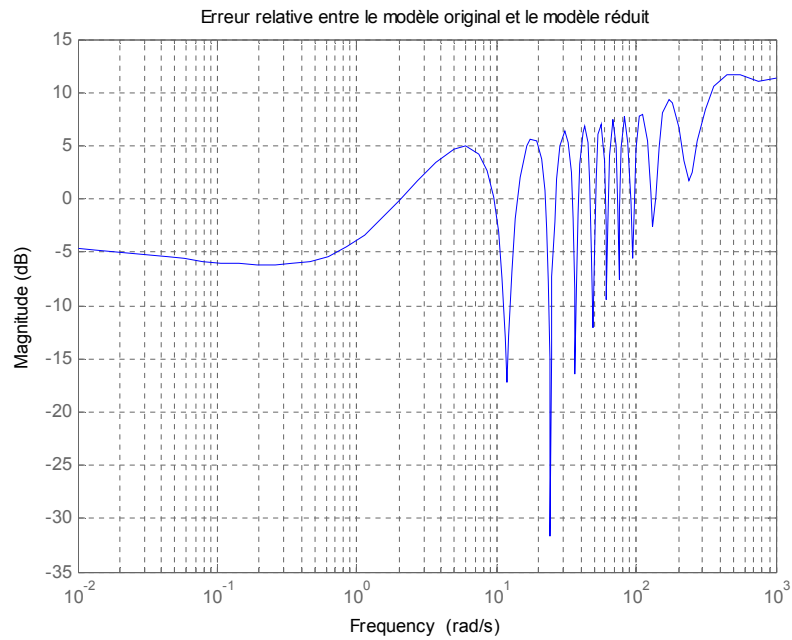


Fig. III.32 Erreur relative entre le modèle original et le modèle réduit.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats de simulation de deux méthodes de réduction de modèles proposées. Où, trois exemples de simulation de système fractionnaire pour montrer l'efficacité des deux méthodes de réduction proposées ont été fait.

Les résultats confirment l'efficacité des méthodes de réduction de modèle.

Conclusion générale

Conclusion générale

Pour faciliter leur implémentation on doit approximer les fonctions de transfert de ces correcteurs d'ordre fractionnaire par des fonctions de transfert d'ordre entier dans une bande fréquentielle désirée. Dans ce contexte la méthode utilisée pour l'approximation des correcteurs d'ordre fractionnaire proposés est la méthode d'Oustaloup.

Or, l'approximation conduit bien souvent à un modèle de grande dimension et doit être réduit. La réduction de l'ordre des modèles est donc la tâche de réduction du nombre des états tout en préservant les relations entrées-sorties.

Les principales raisons d'obtenir un modèle d'ordre réduit sont :

- simplifier l'étude du système ;
- diminuer les temps de calcul lors des simulations ;
- réduire les temps de calcul de manière à rendre la conception de commandes plus efficace ;
- obtenir des lois de commande simplifiées.

Dans le cadre de la réduction de l'ordre des modèles, plusieurs algorithmes de réduction ont été développés. Dans cette étude, Nous nous intéresserons principalement aux deux méthodes :

- Réalisation équilibrée ;
- Réalisation approchée basée sur le calcul des valeurs singulières de Hankel.

Pour montrer l'efficacité de ces méthodes et l'intérêt de la préservation de la structure, les algorithmes proposés sont utilisés afin de réduire un modèle de trois types de systèmes d'ordre fractionnaire. Dans le domaine de l'automatique, le critère généralement retenu est la qualité d'approximation du modèle réduit.

Les résultats développés dans le chapitre de simulation des deux méthodes de réduction permettent de conclure que la méthode réalisation équilibrée répond au besoin de simplifier la représentation des trois types de modèles des systèmes d'ordre fractionnaire.

Références Bibliographiques

Références

- 1- **Tarik GHEZLI, Sid ahmed CHABANE, Djamila BEN BELKACEM**, «Methodes D'approximation Des Systemes D'ordre Fractionnaire», Mémoire de Fin d'Etude de MASTER ACADEMIQUE, Université Mouloud Mammeri De Tizi-Ouzou, 04 juillet 2017.
- 2- **F. Dubois, A.C. Galucio, et N. Point**, « Introduction à la dérivée fractionnaire : Théorie et applications », Conservatoire des Arts et Métiers, Mathématiques, Paris, France. EADS Innovation Works, Suresnes, France. 29 mars 2010.
- 3- **S. Ladaci** « Contribution à la commande adaptative d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mentouri Constantine. Soutenue en 2007.
- 4- **Yassine BENSAFIA**, «Utilisation des filtres fractionnaires pour la conception de régulateurs adaptatifs robustes», Thèse En vue de l'Obtention du diplôme de : Doctorat en Science, Université du 20 Août 1955 Skikda, 03/05/2016.
- 5- **Stephane Azou**, «Réalisation équilibrée de systemes par orthogonalisation de fonctions d'entrée- Gramiens et approximation»,19 Décembre 1997.
- 6- **Le Hoang Bao** «Contribution aux méthodes de synthèse de correcteurs d'ordres réduits sous contraintes de robustesse et aux méthodes de réduction de modèles pour la synthèse robuste en boucle fermée »,29 Novembre 2010.
- 7- **Ali Benlabbes**. Sur des problèmes aux conditions aux limites et dérivées fractionnaires. Thèse de Doctorat. Université Djillali Liabès Sidi Bel Abbès. 2016
- 8- **B.Bijnan, K.Shyam**. Stabilization and control of fractional Order systems: A Sliding Mode Approach. Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London 2015.
- 9- **J. Sabatier et Al.**, Advances in Fractional Calculus: Theoretical Development and Applications in Physics and Engineering. Dordrecht, Netherlands : Springer, 2007.
- 10- **R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, I. Petras**, Fractional Order Systems. Singapore: World Scientific, 2010.
- 11- **Ksouri Mondher, said ben Allahem**, Réduction de modele : « **application a un système : une boucle en sustentation** », universite de biskra, 05/06/2013.