

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed khider –Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie civil et d'Hydraulique
Référence : 2021/2022



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم الهندسة المدنية و الري
المرجع .2022/2021

Mémoire de Master

Filière : Génie civil

Spécialité : structure

Thème

**Effet de l'humidité et de la température sur
l'endommagement des plaques en matériaux
composites**

Nom et Prénom de l'étudiant :

CHERGUI Abir

Encadreur :

Dr. Abdelhak Khechai

Promotion: Juin 2022

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon Dieu tout puissant ALLAH qui m'a donné la santé, le courage et la patience pour mener à bien ce modeste travail.

*Je remercie particulièrement mon encadreur, Monsieur **KHECHAI Abdelhak**, Docteur au département de génie civil Université Mohamed Khider de Biskra, pour la confiance qu'il m'a accordé en me proposant ce mémoire. De plus, son enthousiasme et sa confiance qui m'ont donné les motivations nécessaires pour réaliser ce travail.*

Je tiens à remercier profondément les membres de jury pour la bonne discussion de ce travail.

Je remercie très chaleureusement Mon père et ma mère et mes frères et mes sœurs et toute la famille.

En dernier, un grand remerciement à tous les enseignants du département de génie civil université Mohamed Khider de Biskra et mes collègues et tous mes amis.

CHERQUI - ABIR

Dédicace

Je dédie ce travail à :

A ma très chère patrie l'Algérie

Mon père

Ma mère

Mes merveilleux frères

« HAKO, SADEK, OUMATMA, RAHAN. »

Ma famille.

Mes amis « RANDA, KHAOULA »

Mes professeurs.

CHERQUI - ABIR

Résumé

Le présent travail concerne l'étudier **l'effet de l'Humidité et la température sur l'endommagement des plaque stratifiées** en utilisant un élément fini rectangulaire à quatre nœuds avec 6 degrés de liberté par nœuds, basé sur la théorie classique des stratifiés (CLT).

Une série d'exemples a été testée sur l'effet des efforts des plaques isotropes et stratifiées, les résultats obtenus numériques et comparés à ceux disponibles analytiquement, ont montré la rapidité de convergence et la bonne performance et la précision de l'élément utilisé.

Dans ce contexte, on va essayer de déterminer l'humidité et la température critique qui cause la rupture de ces plaques. D'autre part, plusieurs paramètres, tels que l'orientation des fibres et la stratification des couches.

Mots clés : plaques stratifiées, endommagement, élément fini, température, humidité.

ملخص

يتعلق هذا العمل بدراسة تأثير الرطوبة ودرجة الحرارة على انهيار اللوحة الطبقية باستخدام عنصر نهائي مستطيل مع أربع عقد مع 6 درجة من الحرية في كل عقدة، استنادًا إلى النظرية الكلاسيكية لطبقات .

تم اختبار سلسلة من الأمثلة على تأثير الجهود التي بذلها لوحات الخواص والطبقية، وقد أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها رقميًا ومقارنتها بتلك المتاحة تحليليًا في البرنامج، سرعة التقارب والأداء الجيد ودقة العنصر المستخدم

في هذا السياق، سنحاول تحديد الرطوبة ودرجة الحرارة الحرجة التي تسبب تمزق هذه اللوحات. من ناحية أخرى، العديد من المعلمات، مثل اتجاه الألياف والطبقات الطبقية.

الكلمات المفتاحية :

- الواح المركبة، انهيار (ضرر)، عنصر محدود، درجة الحرارة، رطوبة

Sommaire

Introduction générale	I
Problématique	I
Chapitre I :Généralités Sur Les Matériaux Composites	14
I.1 Introduction	14
I.1 Historique	14
I.3 Définition générale des composites	15
I.4.Définitions de base	16
I.5.Caractéristiques mécaniques d'un matériau composite	16
I.6.Les constituants des matériaux composites	16
I.6.1.Le renfort	17
I.6.1.1 Fibre de verre	17
I.6.1.2. Fibre de carbone	18
I.6.1.3. Fibre d'aramide	18
I.6.1.d Fibre de bore	18
I.6.1.d Fibre de silice	19
I.6.1.6. Fibres de polyéthylène de haut module	19
I.6.2. La matrice	19
I.6.2.1. Résines thermodurcissables	19
I.6.2.2.Résines thermoplastiques	20
I.7. Classification des matériaux composites	20
I.8. Architecture des matériaux composite	21
I.8.1. Sandwich	21
I.8.2. Monocouche et les stratifiés	23
I.8.2.1.Monocouche	23
I.8.2.2.Stratifié	23
I.9. Les avantages et les inconvénients	26
Chapitre II :Comportement mécanique des plaques stratifiées	27
II.1 Introduction	27
II.2 Définition d'une plaque	27
II.1 Loi de comportement des stratifiées	28
II.3.1Loi de Hooke généralisée	28
II.3.2Différents types de matériaux	29

II.3.2.a	Matériaux anisotropes	29
II.3.2.b	Matériaux orthotropes (orthogonal + anisotrope)	30
II.3.2.c	Matériaux transversalement isotropes	31
II.2.2.d	Matériaux isotropes	32
II.3.3	Théorie des plaques minces	32
II.3.4	Relation contrainte-déformation plane	33
II.3.5	Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres	34
II.2	Théories utilisées dans la formulation analytique de structures composites	35
II.3	Théorie classique des stratifiés (CLT)	36
II.5.1	Relation déformations-déplacements (Cinématique)	37
II.5.2	Expression des résultantes et des moments.....	38
II.5.2.a	Résultantes en membrane.....	38
II.5.2.b	Moment de flexion et de torsion	40
II.6	Influence de l'empilement des couches	41
II.6.1	Couche isotrope	41
II.6.2	Stratifiés symétriques	41
II.6.4.c	Cas général	41
II.6.4.d	Stratifiés symétriques dont les axes des matériaux de toutes les couches coïncident avec les axes du stratifié (symétrie miroir)	42
II.7	La Loi de comportement des stratifiés hygrothermique.....	43
	CHAPITRE III :Étude théorique les différents critère D'endommageme.....	46
III.1	Introduction	46
III.2	Définition des critères de résistance	46
III.3	Historique des Critères de résistance ou rupture [33].....	46
III.4	Divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel	47
III.4.1	Rupture des fibres	47
III.4.2	Rupture transverse de la matrice	48
III.4.3	Rupture longitudinale de la matrice	49
III.4.4	Rupture de l'interface fibre-matrice	49
III.5	Rupture des stratifiés	50
III.6	Critères de rupture des matériaux composites	51
III.6.1	Critères en contraintes maximales	51
III.6.1.a	Critères dans les axes principaux	51
III.7	Critères de rupture en-dehors des axes des matériaux	52
III.8	Traction ou compression en-dehors des axes des matériaux	53

III.9 Critères en déformations maximales	54
III.9.1 Critère dans les axes des matériaux	54
III.9.2 Critères interactifs	55
III.9.2.a Théorie générale de Tsai-Wu	55
III.10 Conclusion	59
CHAPITRE IV: FORMULATION P'ELEMENTS FINIS ET PROGRAMMATION ...	60
IV.1 Introduction	60
IV.1 Définition de la MEF	60
IV.2 Historique	60
IV.3 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis	61
IV.4 Fonctions de déplacements de l'élément	62
IV.5 Les étapes à suivre afin de calculer la charge de rupture	70
IV.6 Validation de l'élément dans l'analyse statique des plaques.....	72
IV.8.1 Plaque isotrope simplement appuyée (SSSS)	73
IV.8.2 Plaque composite simplement appuyée sur tout le pourtour	75
IV.8.3 Plaque composite stratifiée (90°/0°/90°) sous une charge hygrothermique.....	77
IV.8.4 Plaque composite stratifiées simplement sur deux côtés	78
IV.7 Conclusion	81
V.1 Introduction	82
V.2 Effet de la température et de l'humidité sur l'endommagement des plaques	82
V.4 L'effet de la charges membranaire sur l'endommagement des plaques	94
Conclusion Générale	96
Références Bibliographies	97

Liste des Figures :

Chapitre 01 :

FIGURE I. 1: MATERIAUX COMPOSITE.....	15
FIGURE I. 2 : CONSTITUANTS D'UN MATERIAU COMPOSITE.	15
FIGURE I. 3 : MATERIAUX ISOTROPE ET ANISOTROPE, HOMOGENE.....	16
FIGURE I. 4 : REPRESENTATION SCHEMATIQUE D'UN MATERIAU COMPOSITE. (MANEL, 2020).....	16
FIGURE I. 5: CLASSIFICATION DES RENFORTS.	17
FIGURE I. 6: FIBRE DE VERRE.....	17
FIGURE I. 7 : FIBRE DE CARBONE.....	18
FIGURE I. 8: FIBRE D'ARAMIDE.	18
FIGURE I. 9: FIBRE DE BORE.	18
FIGURE I. 10 : FIBRE DE SILICE.	19
FIGURE I. 11 : CLASSIFICATION DES RENFORTS.	19
FIGURE I. 12 : CLASSIFICATION SCHEMATIQUE DES TYPES DE COMPOSITES. ..	21
FIGURE I. 13 : UN SANDWICH TYPIQUE.	21
FIGURE I. 14 : COURS.	22
FIGURE I. 15: SCHEMATISATION D'UNE MONOCOUCHE (FARIA, 2010).....	23
FIGURE I. 16 : MATERIAU COMPOSITE STRATIFIE (KADDA, 2015).....	23
FIGURE I.17: DESIGNATION D'UN STRATIFIE.	24
FIGURE I.18 : CONVENTION DE SIGNE POUR LA DESIGNATION DES STRATIFIES.	24

Chapitre 02 :

FIGURE IV. 1: ELEMENT PLAQUE RECTANGULAIRE.	62
FIGURE IV. 3 : TRIANGLE DE PASCALE .	62
FIGURE IV. 4 : L'EMPLACEMENT DES PLIS DANS UN STRATIFIE.	71
FIGURE IV. 5 : GEOMETRIE DE LA PLAQUE.	72
FIGURE IV. 6 : CONDITIONS AUX LIMITES. (YOUSRA, 2020)	73
FIGURE IV. 7 : PLAQUE CARREE ISOTROPE SIMPLEMENT APPUYEE SOUS CHARGEMENT UNIFORMEMENT REPARTIE. (YOUSRA, 2020)	73
FIGURE IV.8 : CONVERGENCE DE LA FLECHE MAXIMALE D'UNE PLAQUE ISOTROPE SIMPLEMENT APPUYEE (SSSS), EN FONCTION DE NOMBRE DES ELEMENTS.	74
FIGURE IV. 9: PLAQUE COMPOSITE STRATIFIEE [0°/90°/0°].	75
FIGURE IV. 10 : CONVERGENCE DU FACTEUR DE CONCENTRATION DE CONTRAINTES POUR UNE PLAQUE STRATIFIEE (0°/90°/0°) SIMPLEMENT APPUYEE(SSSS) .	76
FIGURE IV. 11: CONVERGENCE DU FACTEUR DE CONCENTRATION DE CONTRAINTES POUR UNE PLAQUE STRATIFIEE (0°/90°/0°) ENCASTREE APPUYEE (EEEE).	76
FIGURE IV. 12: PLAQUE COMPOSITE STRATIFIEE [90°/0°/90°].	77

Chapitre 03 :

FIGURE IV. 1: ELEMENT PLAQUE RECTANGULAIRE.....	62
FIGURE IV. 3 : TRIANGLE DE PASCALE	62
FIGURE IV. 4 : L’EMPLACEMENT DES PLIS DANS UN STRATIFIE.	71
FIGURE IV. 5 : GEOMETRIE DE LA PLAQUE.....	72
FIGURE IV. 6 : CONDITIONS AUX LIMITES. (YOUSRA, 2020).....	73
FIGURE IV. 7 : PLAQUE CARREE ISOTROPE SIMPLEMENT APPUYEE SOUS CHARGEMENT UNIFORMEMENT REPARTIE. (YOUSRA, 2020)	73
FIGURE IV.8 : CONVERGENCE DE LA FLECHE MAXIMALE D’UNE PLAQUE ISOTROPE SIMPLEMENT APPUYEE (SSSS), EN FONCTION DE NOMBRE DES ELEMENTS.....	74
FIGURE IV. 9: PLAQUE COMPOSITE STRATIFIEE [0°/90°/0°].....	75
FIGURE IV. 10 : CONVERGENCE DU FACTEUR DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE POUR UNE PLAQUE STRATIFIEE (0°/90°/0°) SIMPLEMENT APPUYE(SSSS)	76
FIGURE IV. 11: CONVERGENCE DU FACTEUR DE CONCENTRATION DE CONTRAINTE POUR UNE PLAQUE STRATIFIEE (0°/90°/0°) ENCASTREE APPUYE (EEEE).....	76
FIGURE IV. 12: PLAQUE COMPOSITE STRATIFIEE [90°/0°/90°].....	77

Chapitre 04 :

FIGURE V. 1: VARIATION LA COEFFICIENT DE RUPTURE EN FONCTION DU HUMIDITE ET HUMIDITE POUR UNE PLAQUE STRATIFIEE.	85
FIGURE V. 2: VARIATION LA COEFFICIENT DE RUPTURE EN FONCTION DU TEMPERATURE ET HUMIDITE POUR UNE PLAQUE STRATIFIEE.....	88
FIGURE V. 3: VARIATION LA COEFFICIENT DE RUPTURE EN FONCTION DU RAPPORT COEFFICIENT DILATATION ET TEMPERATURE POUR UNE PLAQUE STRATIFIEE.	91
FIGURE V. 4 : VARIATION LA COEFFICIENT DE RUPTURE EN FONCTION DU LA RAPPORT COEFFICIENT D'HUMIDITE ET TEMPERATURE POUR UNE PLAQUE STRATIFIEE.	93

Liste des tableaux

Chapitre 01 :

TABLEAU I. 1: CARACTERISTIQUES DES RESINES THERMOPLASTIQUES. (GORNET, 2011).....	20
TABLEAU I. 2 : CARACTERISTIQUES DES RESINES THERMODURCISSABLES. (GORNET, 2011).....	20

Chapitre 04 :

TABLEAU IV. 1: PROPRIETES GEOMETRIQUES ET MECANIQUES DE LA PREMIERE PLAQUE TEST.	73
TABLEAU IV. 3 : LA FLECHE MAXIMALE D'UNE PLAQUE ISOTROPE SIMPLEMENT APPUYEE.	74
TABLEAU IV. 4 : PROPRIETES GEOMETRIQUES ET MECANIQUES DE LA PREMIERE PLAQUE TEST.	75
TABLEAU IV. 5: LA FLECHE MAXIMALE D'UNE PLAQUE STRATIFIEE (0°/90°/0°) SIMPLEMENT APPUYE.	75
TABLEAU IV. 6: LA FLECHE MAXIMALE D'UNE PLAQUE STRATIFIEE (0°/90°/0°) ENCASTREE APPUYE (EEEE).	76
TABLEAU IV. 7 : COMPARAISON DES EFFORTS OBTENUS NUMERIQUEMENT ET ANALYTIQUEMENT POUR UNE CHARGE THERMIQUE.	77
TABLEAU IV.8: COMPARAISON DES EFFORTS OBTENUS NUMERIQUEMENT ET ANALYTIQUEMENT POUR UNE CHARGE L'HUMIDITE	77
TABLEAU IV.9: PROPRIETES GEOMETRIQUES ET MECANIQUES DE LA POUTRE TEST.	78
TABLEAU IV. 10 : VARIATION DU COEFFICIENT DE RUPTURE DANS CHAQUE COUCHE.	78
TABLEAU IV. 11 : VARIATION DU COEFFICIENT DE RUPTURE DANS CHAQUE COUCHE.	79
TABLEAU IV. 12 : VARIATION DU COEFFICIENT DE RUPTURE DANS CHAQUE COUCHE.	80
TABLEAU IV. 13 : VARIATION DU COEFFICIENT DE RUPTURE DANS CHAQUE COUCHE.	80

Chapitre 05 :

TABLEAU V. 1: PROPRIETES GEOMETRIQUES ET MECANIQUES DE LA PLAQUE STRATIFIEE.	82
TABLEAU V. 2 : LES CHARGES DES RUPTURE POUR UNE PLAQUE COMPOSITE [0°/90°/0°] ET TEMPERATURE 50°	83
TABLEAU V. 3: LES CHARGES DES RUPTURE POUR UNE PLAQUE COMPOSITE [0°/90°/0°] ET TEMPERATURE 100°	83

TABLEAU V. 4: LES CHARGES DES RUPTURE POUR UNE PLAQUE COMPOSITE [0°/90°/0°] ET TEMPERATURE 150° .	84
TABLEAU V. 5: LES CHARGES DES RUPTURE POUR UNE PLAQUE COMPOSITE [0°/90°/0°] ET HUMIDITE 0.03 .	86
TABLEAU V. 6: LES CHARGES DES RUPTURE POUR UNE PLAQUE COMPOSITE [0°/90°/0°] ET HUMIDITE 0.04 .	87
TABLEAU V. 7: LES CHARGES DES RUPTURE POUR UNE PLAQUE COMPOSITE [0°/90°/0°] ET HUMIDITE 0.05 .	87
TABLEAU V. 8: LES CHARGES DES RUPTURE POUR UNE PLAQUE COMPOSITE [0°/90°/0°] ET T=50° ,H=0.02 .	89
TABLEAU V. 9: LES CHARGES DES RUPTURE POUR UNE PLAQUE COMPOSITE [0°/90°/0°] ET T=100° ,H=0.02 .	90
TABLEAU V. 10: LES CHARGES DES RUPTURE POUR UNE PLAQUE COMPOSITE [0°/90°/0°] ET T=150° ,H=0.02 .	90
TABLEAU V. 11: LES CHARGES DES RUPTURE POUR UNE PLAQUE COMPOSITE [0°/90°/0°] ET T=50° ,H=0.02 :	92
TABLEAU V. 12 : LES CHARGES DES RUPTURE POUR UNE PLAQUE COMPOSITE [0°/90°/0°] ET T=50 ,H=0.03 .	91
TABLEAU V. 13: LES CHARGES DES RUPTURE POUR UNE PLAQUE COMPOSITE [0°/90°/0°] ET T=50° ,H=0.04 .	92

Introduction Générale

Le développement des technologies modernes nécessite l'utilisation de matériaux à hautes propriétés mécaniques, c'est pourquoi les matériaux composites sont devenus nécessaires et se sont progressivement substitués aux matériaux traditionnels, grâce aux avantages qu'ils offrent. Mais ce type de matériau a des comportements très complexes du fait de son hétérogénéité et de son anisotropie évidente.

Problématique :

Grâce à leurs rapports rigidité-poids et résistance-poids, les plaques en matériaux composites stratifiés sont largement utilisées dans divers domaines de l'industrie et dans certaines constructions civiles.

L'analyse de l'endommagement de ces plaques est d'une grande importance car ce type de structures est soumis généralement à des chargements hygrothermiques conduisant à la rupture.

L'objectif :

L'objectif du présent travail est d'étudier numériquement l'effet de l'humidité et de la température sur l'endommagement des plaques stratifiées. En utilisant la méthode des éléments finis basée sur la théorie classique des stratifiées .

Organisation des chapitres :

Notre mémoire est divisé en quatre chapitres :

- **Le premier chapitre**, on présente des Généralités sur les matériaux composites
- **Le deuxième chapitre**, on présente la loi de comportement mécanique et thermique des plaque stratifiées.
- **Le troisième chapitre**, on présente l'Etude théorique sur les différents critères d'endommagement.

- **Le quatrième chapitre** consacré à la présentation de la formulation de l'élément fini utilisé, suivi de la présentation d'un programme en langage Fortran. L'élément fini sera validé par comparaison des résultats obtenus avec ceux obtenus analytiquement.
- **Le dernier chapitre** consiste à une étude paramétrique sur des plaques stratifiées pour voir une image claire de l'effet de la humidités et températures sur les mécanismes de rupture des plaques stratifiées minces.

Chapitre I :

Généralités Sur Les Matériaux Composites

I.1 Introduction

Les exigences croissantes des structures performantes pour les technologies modernes et ses applications nécessitent la recherche de nouveaux matériaux. Il est difficile d'atteindre des normes de performance élevées et strictes en utilisant un seul matériau, c'est pourquoi de nouveaux matériaux sont fabriqués en combinant deux ou plusieurs matériaux conventionnels.

Ces matériaux appelés « **matériaux composites** » offrent une combinaison de propriétés (une résistance élevée, la rigidité en flexion et la résistance chimique). Ces propriétés sont indisponibles dans les matériaux traditionnels. [1]

L'objectif de ce premier chapitre est de définir les différents types de matériaux composites, ainsi que nous allons mettre en évidence tous leurs composants propres et les avantages et les inconvénients.

I.1 Historique :

Historiquement, la brique (chaume + argile) et le bois sont **les matériaux composites** les plus élémentaires utilisés dans l'Antiquité, comme en témoignent les peintures des tombes égyptiennes en argile. On peut donc dire que les matériaux composites ne sont pas nouveaux.

En 1823, un imperméable en caoutchouc sur bâche est inventé par Charles McIntosh. Après lui, les premiers bateaux en fibre de verre voient le jour et les plastiques renforcés apparaissent dans les applications aérospatiales et les composants électriques (**voir Figure I.1**).

Enfin, le début des années 1980 a vu une augmentation étonnante de l'utilisation des fibres à haute performance. Pour cela, l'accent est mis sur le développement de composés destinés à des applications avec des températures et une humidité élevée.[2]



Figure I. 1: Matériaux composites

I.3 Définition générale des composites :

Selon **Jartiz**, « Les composites sont des systèmes de matériaux multifonctionnels qui offrent des caractéristiques qui ne peuvent être obtenues à partir d'aucun matériau séparé. Ce sont des structures cohésives réalisées en combinant physiquement **deux ou plusieurs matériaux compatibles**, de composition et de caractéristiques différentes et parfois de forme ».

Un matériau composite est constitué d'une ossature souvent sous forme de fibres appelée "**renfort**" qui assure la tenue la fonction résistance mécanique aux efforts. Et d'une protection du renfort appelée "**matrice**", qui permet aussi d'obtenir une cohésion de la pièce et de transmettre les efforts mécaniques au renfort (**voir Figure I. 2**).[3]

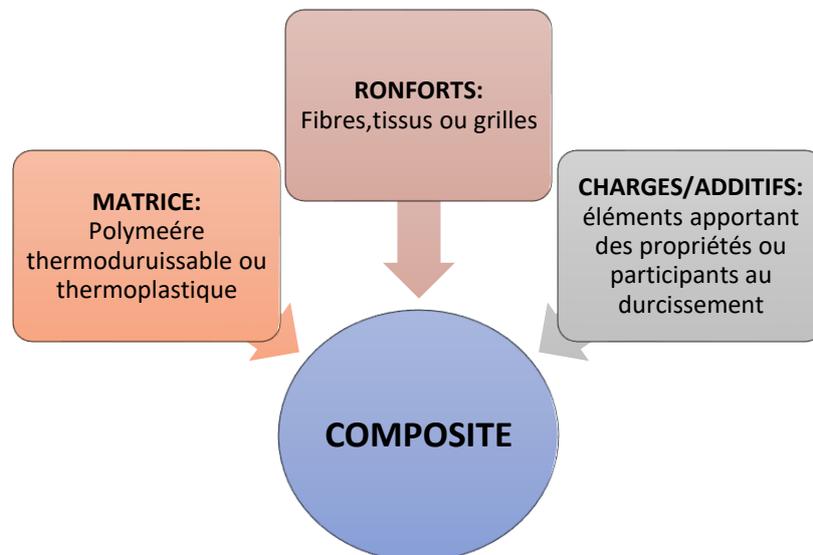


Figure I. 2 : Constituants d'un matériau composite.

I.4. Définitions de base :

- ✓ **Matériaux Anisotrope** : sont des matériaux dont les propriétés mécaniques (module d'Young E, ...etc.) varient selon la direction. Par exemple : **Béton armé, bois naturel**.
- ✓ **Matériaux Hétérogène** : sont des matériaux dont les propriétés physiques varient d'un point à un autre. Par exemple : **Béton armé**.

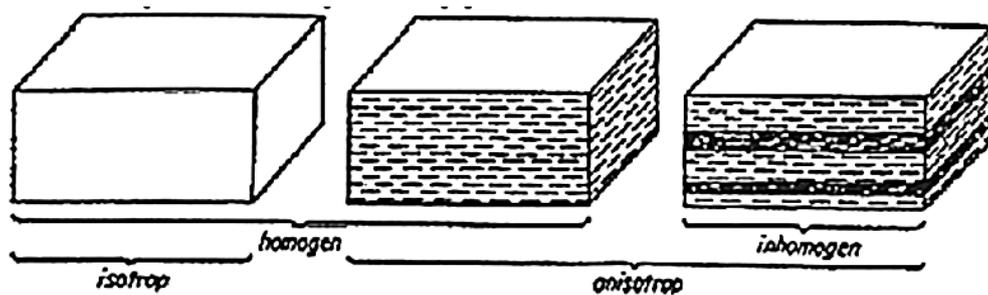


Figure I. 3 : Matériaux isotrope et anisotrope, homogène.

I.5. Caractéristiques mécaniques d'un matériau composite :

Les matériaux composites ont de meilleures propriétés que les matériaux classiques. Le renfort est habituellement à des propriétés mécaniques supérieures à celles de la matrice [4]. Les propriétés des matériaux composites résultent :

- des propriétés des matériaux constituants.
- de la distribution géométrique.
- de l'interaction renfort - matrice.

I.6. Les constituants des matériaux composites :

Un matériau composite est alors un matériau formé de plusieurs constituants de natures différentes, généralement à deux, comme présenté sur la figure (I.4) suivante :

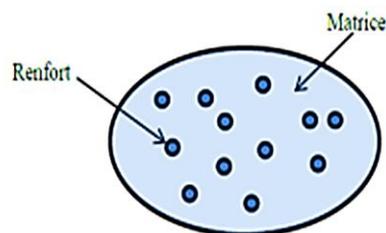


Figure I. 4 : Représentation schématique d'un matériau composite. [2]

I.6.1. Le renfort :

Les renforts représentent les composantes principales porteuses des matériaux composites [5]. Il sert à renforcer la matrice et à répartir les efforts aux quels le matériau est soumis, en lui apportant ses hautes performances (rigidité, résistance à la rupture, etc.). La classification des types de renforts couramment rencontrés est indiquée sur la **Figure I. 5**.

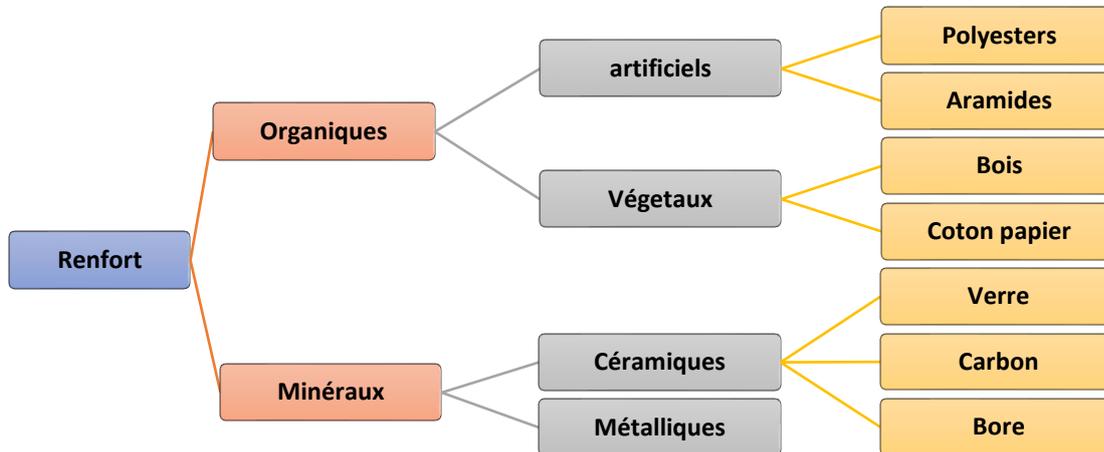


Figure I. 5:Classification des renforts.

I.6.1.1 Fibre de verre :



Fibre de verre ont un excellent rapport performance-prix qui les placent de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans la construction de structures composites [6]. Elle est obtenue à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie et oxyde de bore) (voir **Figure I.6**).

Figure I. 6:fibre de verre.

On distingue trois types de fibres de verre [7] :

- **E** : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes, bonnes propriétés électriques.
- **R** : pour les composites hautes performances (haute résistance mécanique).
- **D** : hautes propriétés diélectriques.

I.6.1.2. Fibre de carbone :



Les fibres de carbone sont les fibres les plus utilisées dans les applications de hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (**Polyacrylonitrile**). Selon la température de combustion.

Figure I. 7 : fibre de carbone.

On distingue deux types de fibres [8] :

- **fibres haute résistance (HR)** : pour une combustion de 1000 à 1500 °C.
- **fibres haut module (HM)** : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.

I.6.1.3. Fibre d'aramide :

Les **Fibres d'aramide** ont des propriétés mécaniques élevées en traction mais leurs résistances à la compression est faible, ce qui conduit à une mauvaise adhérence des fibres à la matrice dans le matériau composite. Pour y remédier, des enzymages des fibres peuvent être utilisés [6] (**Figure I. 8**).

Figure I. 8: Fibre d'aramide.

Il est possible de trouver deux types de fibres d'aramide de rigidités différentes [9].

- **La fibre basse module (70 GPa)** : utilisée pour les câbles et les gilets pare-balles.
- **La fibre haute module (130 GPa)** : utilisée pour les composites HP.

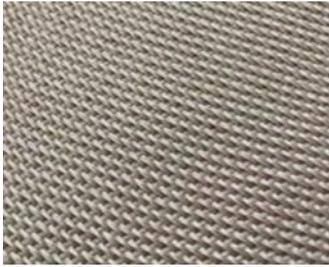
I.6.1.d Fibre de bore :



Les fibres de bore sont insensibles à l'oxydation à hautes températures. Elles sont obtenues par dépôt en phase gazeuse sur un substrat en tungstène. [7]

Figure I. 9: Fibre de bore.

I.6.1.d Fibre de silice :



Les fibres de silice sont produites comme le verre, par fusion, et sont essentiellement utilisées pour leur haute tenue chimique et thermique dans les tuyères pour moteur de fusée. [7]

Figure I. 10 : Fibre de silice.

I.6.1.6. Fibres de polyéthylène de haut module :

Elles présentent une très bonne résistance à la traction mais une mauvaise mouillabilité. Pour des structures peu sollicitées, on peut encore utiliser des fibres synthétiques courantes de polyamide ou polyester.[7]

I.6.2. La matrice :

Dans un matériau composite, le terme matrice désigne la matière solide qui entoure les renforts pour former une masse compacte. Le premier rôle de la matrice est de maintenir les renforts dans une forme compacte et de donner la forme voulue au produit final et à protéger les fibres contre l'abrasion et un environnement agressif [10]. La classification des types de matrice couramment rencontrés est indiquée sur la Figure I. 11.

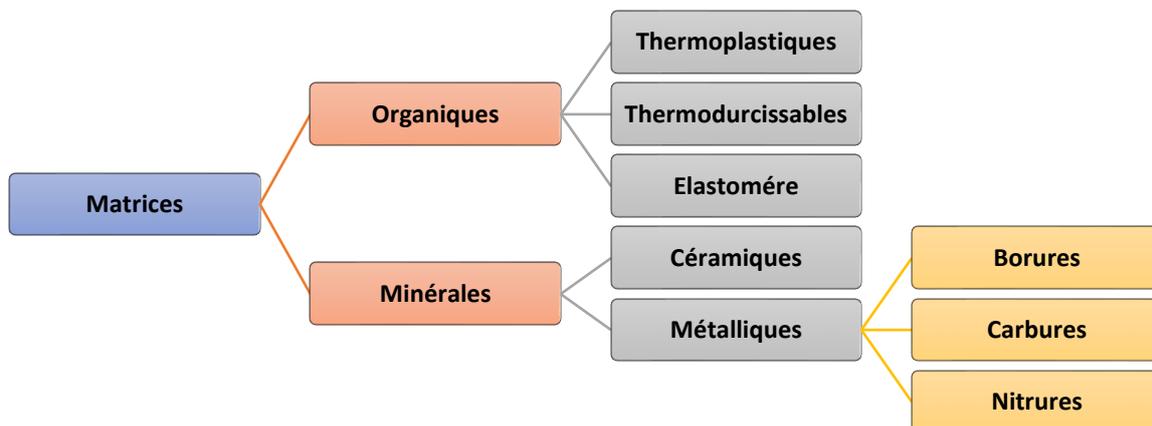


Figure I. 11 : Classification des matrices.

I.6.2.1. Résines thermodurcissables :

Résines thermodurcissables ont des propriétés mécaniques faibles et une masse volumique faible. Ces résines sont solides et nécessitent une transformation à très haute température.

Les polychlorures de vinyle (PVC), quelques exemples : les polyéthylènes, polypropylène, polystyrène. Ces caractéristiques sont présentées dans le **tableau I.1**. [6]

Tableau I.1:Caractéristiques des résines thermodurcissables. [6]

Résines	$\rho \left(\frac{kg}{m^3} \right)$	$\sigma^R (MPa)$	E (GPa)
Polyesters	1140	90 à 200	2.8 à 3.6
Phénoliques	1200	250	3 à 5
Epoxydes	1100 à 1500	250	3 à 5

I.6.2.2. Résines thermoplastiques :

Résines thermoplastiques ont des propriétés mécaniques élevées. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Les exemples de résines : Les résines polyesters insaturées, les résines de condensation (phénoliques, aminoplastes) et les résines époxy. Ces caractéristiques sont présentées dans (**le Tableau I.2**). [6]

Tableau I.2 : Caractéristiques des résines thermoplastiques. [6]

Résines	$\rho \left(\frac{kg}{m^3} \right)$	$\sigma^R (MPa)$	E (GPa)
Polyamide	1140	60 à 85	1.2 à 2.5
Polypro pylône	1200	20 à 35	1.1 à 1.4

I.7. Classification des matériaux composites :

Différentes classifications des matériaux composites sont rencontrées dans la littérature scientifique. Ces matériaux peuvent être classés selon (1) la morphologie des agents de renforcement (les fibres ou particules) ou selon (2) ses composantes structurales (les plis stratifiés). La deuxième classification subdivise les composites en composites structuraux, qui à leur tour, sont subdivisés en composites sandwichs et composites stratifiés (voir la **Figure I.12**) [11].

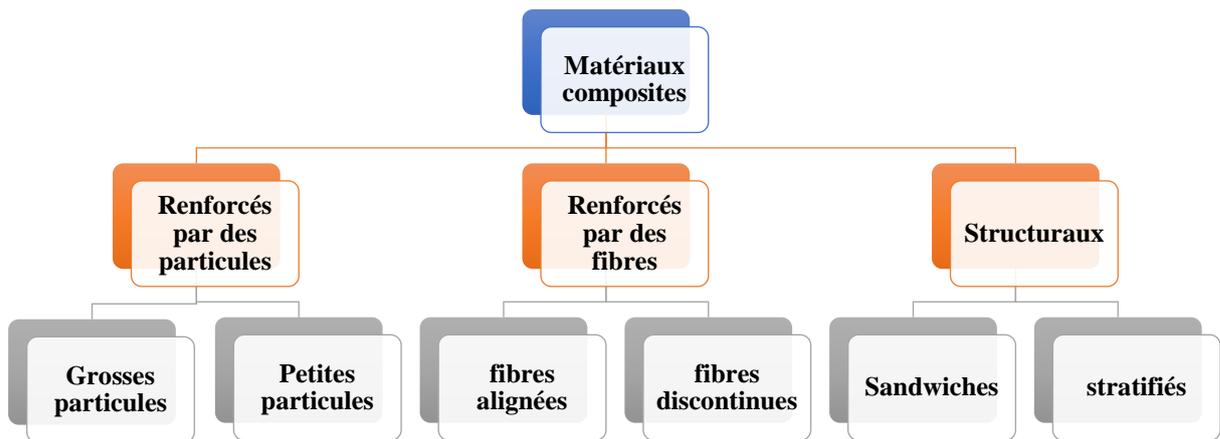


Figure I. 12 : Classification schématique des types de composites.

Dans ce qui suit ce chapitre en s'intéressera particulièrement au composite structural c'est-à-dire les stratifiés et les sandwichs.

I.8. Architecture des matériaux composite :

Généralement, les constituants des composites sont regroupés d'une manière optimale afin d'améliorer les caractéristiques mécaniques de la structure. Il est donc impératif de jouer sur la texture et la géométrie des renforts pour créer une architecture adaptée [12]. On rencontre plusieurs architectures de renforcements :

I.8.1. Sandwich :

La structure sandwich est une classe spéciale des composites qui sont principalement constitués de l'association de deux peaux avec des bonnes caractéristiques en traction et une âme faible densité, et sont séparés par un adhésive liée à **la Figure I.13:**

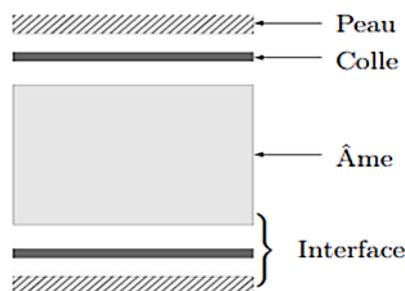


Figure I. 13 : Un sandwich typique.

La fabrication d'un sandwich met en jeu trois couches de natures différentes.

La complexité de ces structures provient du nombre de matériaux différents susceptibles d'être employés :

- **Matériau des peaux** : Tout matériau pouvant être obtenu sous forme de couche est candidat... que ce soit un métal, un matériau composite....
- **Matériau de l'âme** : Il se présente principalement sous quatre formes, illustrées **Figure I.14**

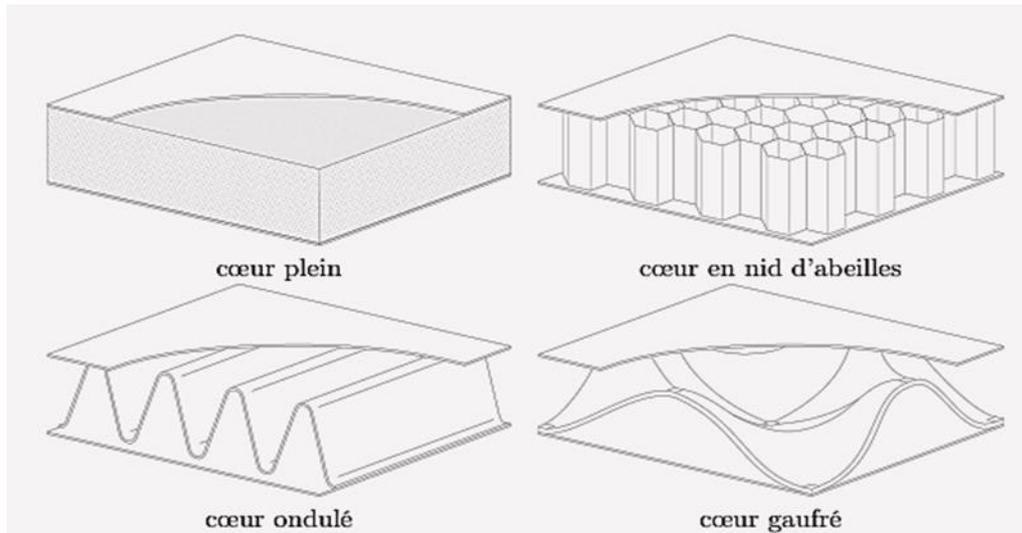


Figure I.14 : Cœurs.

- **plein ou alvéolaire** : considéré comme homogène isotrope (propriétés matérielles identiques dans toutes les directions : 2 constantes indépendantes suffisent à définir la loi de comportement du matériau) ;
- **en nid d'abeilles** : considéré comme orthotrope (3 plans orthogonaux de symétrie : 9 constantes indépendantes) ou isotrope transverse (5 constantes indépendantes) ;
- **en nid d'abeilles** : considéré comme monoclinique (1 plan de symétrie : 13 constantes indépendantes) ;
- **gaufré** : considéré comme anisotrope (21 constantes indépendantes) ou parfois comme monoclinique, peu employé ;

Ainsi que de leur mode d'assemblage : collage, soudage, brasage... Généralement, le choix des matériaux est fait pour objectif initial d'avoir une masse minimale en tenant compte ensuite des conditions d'utilisation (conditions thermiques, corrosion, prix). Pour que les structures sandwich jouent pleinement leur rôle, il est nécessaire de veiller à avoir une

solidarisation parfaite de l'ensemble âme - peaux, de manière à répartir les efforts entre âme et peaux [13].

I.8.2. Monocouche et les stratifiés :

I.8.2.1. Monocouche :

Les monocouches ou plis représentent l'élément de base de structures composite. Ils sont constitués d'une matière plastique (résine) renforcée d'un matériau fibreux (renfort). La variation des multitudes types de monocouches sont définis par la forme du renfort : fibres longues, fibres tissées, ou à fibres courtes [14]. Comme il est indiqué sur la (Figure I.15)

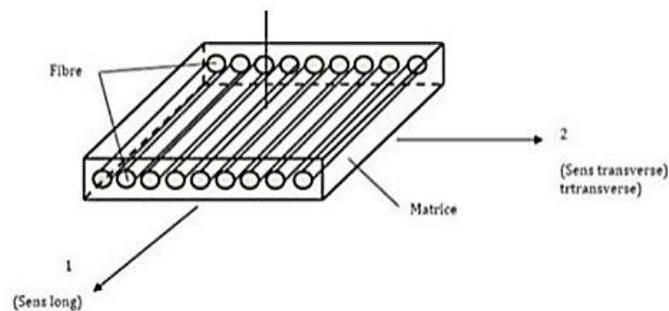


Figure I. 15: Schématisation d'une monocouche [11].

I.8.2.2. Stratifié :

Les stratifiés sont constitués de plusieurs couches successives (appelées parfois plis) de renforts (fils, mats, tissus, ...etc.) imprégnés de résines. Nous examinerons les divers types de stratifiés.[4]

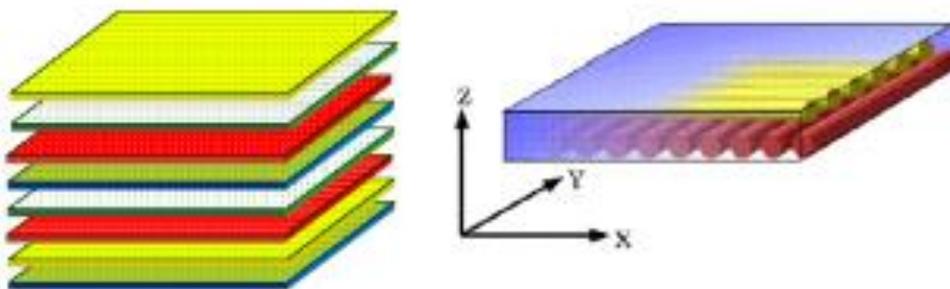


Figure I. 16 : Structure composite stratifiée [15].

I.8.2.2.1. Stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels :

Les stratifiés à base de fils ou tissus unidirectionnels constituent un type de stratifié de base auquel peut se ramener en théorie tout autre type de stratifié. Ces stratifiés sont constitués (Figure I.17) de couches de fils ou de tissus unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche.[4]

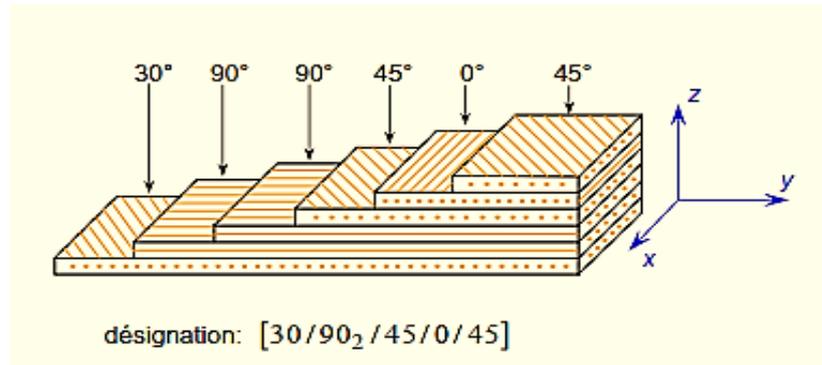


Figure I.17: Désignation d'un stratifié.

✚ Désignation des structures stratifiées :

Chaque désignation de ces stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant :

- ✓ Chaque est désignée par un nombre indiquant la valeur en degré de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe de référence x.
- ✓ Les couches successives sont séparées par un/ si leurs angles sont différents.
- ✓ Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique.
- ✓ Les couches sont nommées successives en allant d'une face à l'autre. Des crochets indiquent le début et la fin du code.

➤ Angles positifs et négatifs :

Lorsque des couches sont orientées à des angles égaux en valeurs absolues, mais de signes opposés, les signes + ou - sont utilisés (Figure I.18).

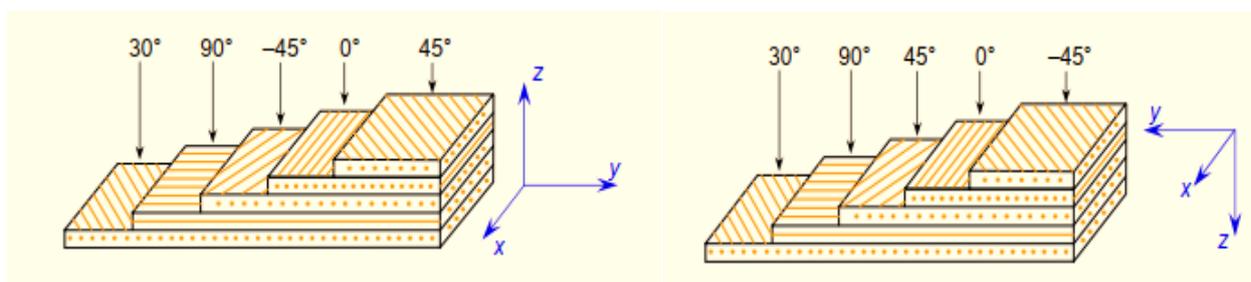


Figure I.18 : Convention de signe pour la désignation des stratifiés.

Nous donnons ci-après quelques exemples de désignation de stratifiés :

$\begin{array}{c} \hline 0^\circ \\ \hline 30^\circ \\ \hline -30^\circ \\ \hline -45^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{c} \hline 30^\circ \\ \hline -60^\circ \\ \hline -60^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{c} \hline 0^\circ \\ \hline -45^\circ \\ \hline -45^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline \end{array}$
$[\pm 45 / \mp 30 / 0]$	$[45 / 0 / -60_2 / 30]$	$[45_2 / -45_2 / 0]$

➤ **Stratifiés symétriques :**

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des couches successives.

*Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au plan de symétrie. Un indice S indique que le stratifié est symétrique.

*Si le stratifié comporte un nombre impair de couches, la désignation est semblable à la précédente, la couche centrale étant surlignée.

➤ **Séquence :**

La répétition de séquences peut être indiquée par un indice indiquant le nombre de fois où une séquence est successivement répétée. Par exemple :

$\begin{array}{c} \hline 0^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline \end{array}$	$[(0 / 45 / 90)_2]_S$ ou $[0 / 45 / 90]_{2S}$	$\begin{array}{c} \hline 0^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 90^\circ \\ \hline 60^\circ \\ \hline 30^\circ \\ \hline 60^\circ \\ \hline 30^\circ \\ \hline 60^\circ \\ \hline 30^\circ \\ \hline \end{array}$	$[(30 / 60)_3 (90 / 45 / 0)_2]$
---	--	---	---------------------------------

➤ **Stratifiés hybrides :**

Les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de natures différentes. Il sera alors nécessaire de les mentionner dans la désignation. Les matériaux hybrides sont réalisés pour des raisons diverses [15] :

- * Obtenir un matériau composite ayant de meilleures propriétés que celles de chacun des composants séparés,
- * Obtenir un matériau composite répondant aux caractéristiques mécaniques attendues à un prix raisonnable,
- * Obtenir des effets esthétiques agréables résultant du mélange des fibres utilisées,

<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">0°</td><td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">V</td></tr> <tr><td style="border-bottom: 1px solid black;">45°</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">C</td></tr> <tr><td style="border-bottom: 1px solid black;">-45°</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">C</td></tr> <tr><td style="border-bottom: 1px solid black;">90°</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">C</td></tr> <tr><td style="border-bottom: 1px solid black;">90°</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">C</td></tr> <tr><td style="border-bottom: 1px solid black;">-45°</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">C</td></tr> <tr><td style="border-bottom: 1px solid black;">45°</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">C</td></tr> <tr><td style="border-bottom: 1px solid black;">0°</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">V</td></tr> </table>	0°	V	45°	C	-45°	C	90°	C	90°	C	-45°	C	45°	C	0°	V	[0 _V / ±45 _C / 90 _C] _S	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">0°</td><td style="border-top: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">K</td></tr> <tr><td style="border-bottom: 1px solid black;">0°</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">K</td></tr> <tr><td style="border-bottom: 1px solid black;">45°</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">V</td></tr> <tr><td style="border-bottom: 1px solid black;">90°</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">V</td></tr> <tr><td style="border-bottom: 1px solid black;">45°</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">V</td></tr> <tr><td style="border-bottom: 1px solid black;">0°</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">C</td></tr> <tr><td style="border-bottom: 1px solid black;">0°</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">C</td></tr> </table>	0°	K	0°	K	45°	V	90°	V	45°	V	0°	C	0°	C	[0 _{2C} / (45 / 90) _{SV} / 0 _{2K}]
0°	V																																
45°	C																																
-45°	C																																
90°	C																																
90°	C																																
-45°	C																																
45°	C																																
0°	V																																
0°	K																																
0°	K																																
45°	V																																
90°	V																																
45°	V																																
0°	C																																
0°	C																																

Avec : V : verre.
 C : carbone.
 K : kevlar.

I.9. Les avantages et les inconvénients :

✚ Avantages des matériaux composites :

- Gain de masse
- Mise en forme de pièces complexes (principe du moulage) et réduction du nombre d'interfaces (boulonnage, rivetage et soudure sur structures métalliques)
- Grande résistance à la fatigue
- Faible vieillissement sous l'action de l'humidité, de la chaleur, de la corrosion (sauf en cas de contact entre de l'aluminium et des fibres de carbone)
- Insensibles aux produits chimiques "mécaniques" comme les graisses, huiles, liquides hydrauliques, peintures, solvants.

✚ Inconvénients des matériaux composites :

- Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température.
- Attention aux décapants de peinture qui attaquent les résines époxydes.
- Tenue à l'impact moyenne par rapport aux métalliques.
- Meilleure tenue au feu (classement M) que les alliages légers mais émission de fumées (classement F) parfois toxiques pour certaines matrices.
- Coût parfois prohibitifs (temps et coût études et mise en œuvre), le gain en coût est surtout valable pour des grandes séries.

Chapitre II :

Comportement mécanique des plaques stratifiées.

II.1 Introduction :

Les matériaux composites fibreux ont surpassé de nombreux matériaux ces dernières années dans divers domaines, grâce à leur structure technique conçue pour leur donner plus de solidité, de rigidité et une bonne résistance mécanique, ainsi qu'en termes de poids, car ils sont relativement légers. Mais parfois, il peut être exposé à des facteurs externes tels que l'humidité, la chaleur, les contraintes (traction et compression), qui peuvent affecter ses performances.

Le comportement mécanique d'un matériau composite peut évoluer en fonction de la direction et de l'angle d'inclinaison des différentes fibres du matériau. Par conséquent, il est nécessaire de diriger les fibres parallèles vers la direction de la pression la plus élevée. Son comportement est généralement analysé par la théorie des plaques stratifiées soit par une approche analytique soit par une analyse par éléments finis.

Dans ce chapitre, nous présenterons les étapes d'extraction de la loi de comportement des plaques stratifiées et un aperçu non détaillé sur l'étude du comportement des plaques isotropes.

II.2 Définition d'une plaque :

Une **plaque** est une structure solide définie par une surface de référence plate (planaire) et par une épaisseur (notée h). L'épaisseur est généralement très petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur) (**Figure I.1**) [16].

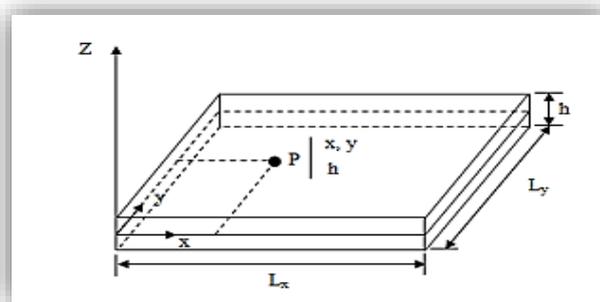


Figure II. 1: Description d'une plaque.[17]

Il existe de nombreuses théories en circulation pour décrire le comportement mécanique des matériaux en couches, notamment la théorie classique des plaques stratifiées (CLP),

la théorie de la déformation du premier ordre (FSDT), les théories de la déformation d'ordre élevé (HSDT) etc.

II.1 Loi des comportement des stratifiés :

L'étude des **comportement des plaques stratifiées** composites est basée sur **la théorie des stratifiés**. C'est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges [5], Cette étude comportera deux phases :

- ✓ L'étude du comportement mécanique de chaque pli.
- ✓ L'étude du comportement globale du matériau constitué de plusieurs plis et désigné généralement par le comportement du stratifiés.

II.3.1 Loi de Hooke généralisée :

C'est une relation entre **les contraintes** (σ_{ij}) et **les déformations** (ε_{kl}) Cette relation est exprimée [18], sous la forme :

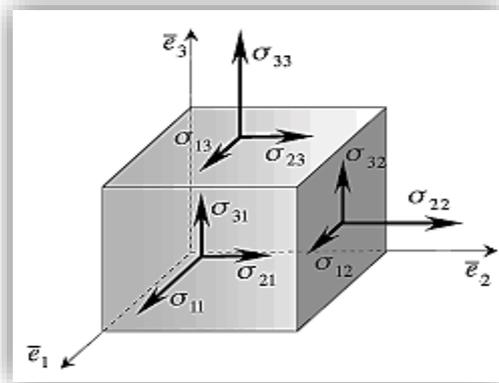


Figure II. 2: Composantes d'un tenseur de contraintes.

$$\sigma = C\varepsilon \quad (2.1)$$

ε Est le tenseur de déformations, et σ est le tenseur de contraintes.

Nous pouvons réduire le nombre de composants du tenseur contrainte-déformation à six composants indépendants en raison de leur symétrie. Ainsi, la notation tensorielle peut être contractée en utilisant la notation suivante [18] :

$$\text{Le tenseur des contraintes : } \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{\sigma\} = \{\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{31} \sigma_{12}\} = \{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6\} \quad (2.2)$$

$$\text{Le tenseur des déformations : } \{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} \varepsilon_{23} \varepsilon_{31} \varepsilon_{12}\} = \{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6\} \quad (2.3)$$

II.3.2 Différents types de matériaux :

II.3.2.a Matériaux anisotropes :

Les matériaux anisotropes sont des matériaux dont ses propriétés varient selon une direction considérée mais ils ne présentent pas de plans de symétrie [19]. La *loi de Hooke* peut être exprimée par [20] :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \times \varepsilon_{kl} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \times \sigma_{kl} \quad (2.1)$$

Avec : C_{ijkl} : tenseur des rigidités.

S_{ijkl} : tenseur de souplesse.

Comme $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ le tenseur de rigidité a 81 coefficients. La même chose pour le tenseur de souplesse, chaque tenseur se réduisent a 36, car on a alors :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$$

Il reste donc finalement 21 composantes indépendantes, pour le cas d'un solide totalement anisotrope. Donc la nouvelle forme du tenseur de rigidité permet alors de lui associer une matrice carrée (6,6) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & sym & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

La forme inverse de l'équation (2.2), est écrite sur la forme :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ & & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ & & & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ & sym & & & s_{55} & s_{56} \\ & & & & & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

II.3.2.b Matériaux orthotropes (orthogonal + anisotrope) :

Un **matériau orthotrope** est un matériau présentant en tout point en termes de propriétés mécaniques deux plans de symétrie, ces deux plans étant perpendiculaires l'un à l'autre. Ce mode de comportement est relativement bien réalisé pour les composites unidirectionnels.[21]

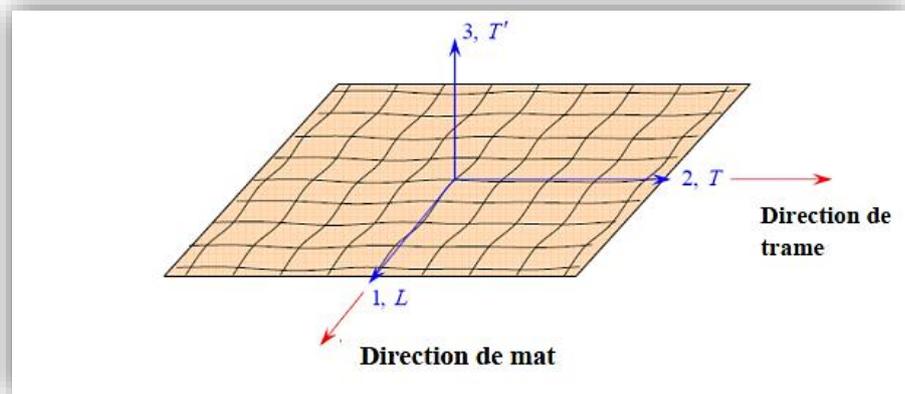


Figure II. 3:Matériaux orthotropes .[22]

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_1} & -\frac{\nu_{32}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Où : E_1, E_2, E_3 sont les modules élastiques longitudinaux.

G_{23}, G_{13}, G_{12} Sont les modules de cisaillement.

$\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$ Sont les coefficients de Poisson.

De plus, la symétrie de **la matrice contrainte-déformation** ci-dessus conduit aux relations suivantes :

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}; \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}; \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$$

II.3.2.c Matériaux transversalement isotropes :

Un **matériau isotrope transverse** est un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution et admet le plan (2,3) comme un plan d'isotropie (voir Figure II. 4). Donc le nombre de coefficients indépendants se réduit à **5 coefficients**. La relation de comportement s'écrit alors :

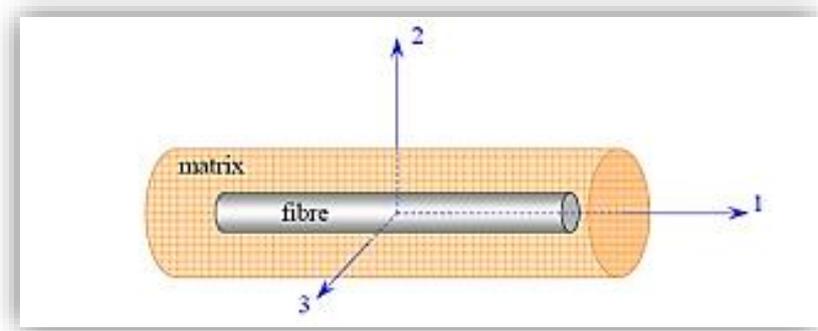


Figure II. 4: Matériaux transversalement isotropes. [22]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & sym & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Les propriétés suivant les axes 2 et 3 sont identiques, donc :

$$C_{22} = C_{33} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_2 \Delta} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \quad C_{12} = C_{13} = \frac{\nu_{21} + \nu_{21}\nu_{23}}{E_2 E_2 \Delta} = \frac{\nu_{21} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_2 \Delta},$$

$$C_{55} = C_{66} = 2G_{12}, \quad C_{44} = C_{22} - C_{23} = \frac{E_2}{1 + \nu_{23}}, \quad C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_2 \Delta},$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité ($E_1, E_2 = E_3, \nu_{12}, G_{12}, G_{23}$).

II.2.2.d Matériaux isotropes :

Matériaux dont les propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions. Donc la relation de comportement s'écrit :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E, \quad \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = \nu, \quad G_{12} = G_{23} = G_{31} = G$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Avec :
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

II.3.3 Théorie des plaques minces :

La théorie des plaques minces, ou théorie de Kirchhoff-Love, suppose que [23] :

- ✓ Le plan moyen (équivalent de la courbe moyenne des poutres) est initialement plan ;

- ✓ Le feuillet moyen (équivalent de la fibre neutre des poutres) ne subit pas de déformation dans son plan ; on ne considère que le déplacement transversal w des points du feuillet moyen ;
- ✓ **Modèle de Kirchhoff** : les sections normales au feuillet moyen restent normales lors de la déformation ; en conséquence, on peut négliger l'effet de cisaillement ;
- ✓ **L'épaisseur est faible** ; en conséquence, les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ;

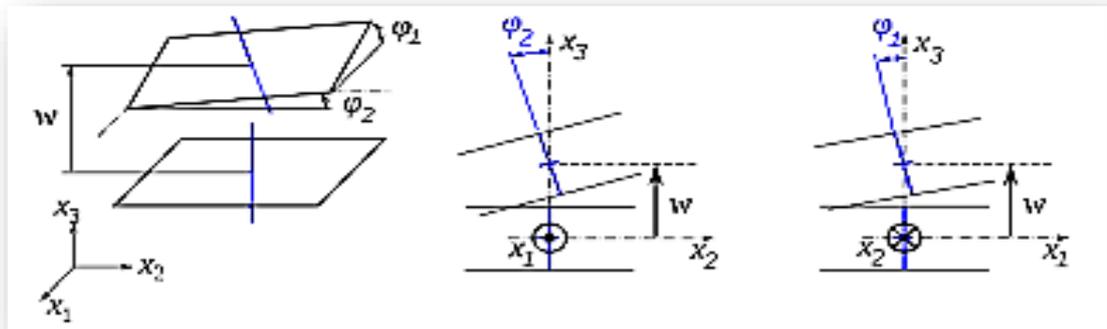


Figure II. 5: Déformation d'une plaque mince avec mise en évidence du déplacement d'un élément de matière, de son feuillet moyen et de sa fibre normale.

II.3.4 Relation contrainte-déformation plane :

Pour un matériau orthotrope, et dans le cas d'un état de **contrainte plane**, la relation contrainte déformation peut être donnée par [24] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ & Q_{22} & Q_{26} \\ sym & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Les coefficients Q_{ij} sont appelés les constantes de rigidité réduites dans un état de contrainte plane :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (2.8)$$

Les constantes de rigidité sont liées aux modules d'élasticité (E_1, E_2, ν_{12} et G_{12}), qui sont déjà déterminés à partir des essais de laboratoire.

II.3.5 Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres :

Lorsque l'orientation des fibres ne coïncide pas avec le système d'axe du composite x et y présenté sur la Figure II.6, les états de contraintes et de déformation sur deux repères orthonormés différents seront définis par [25] :

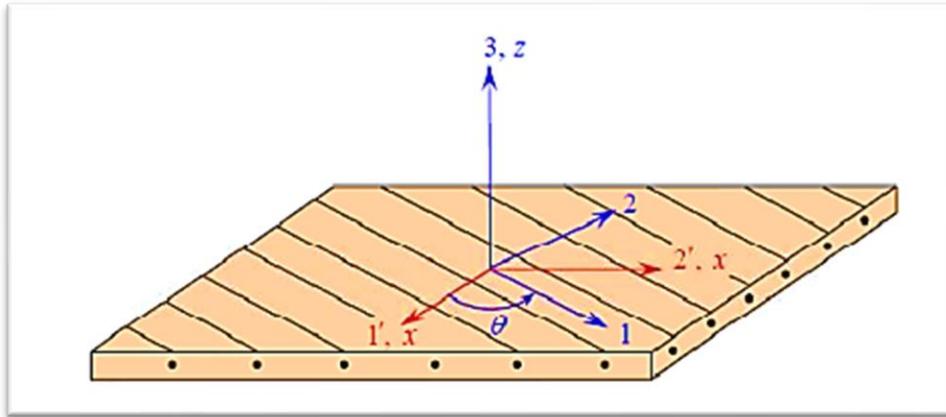


Figure II. 6: Axes principaux (1,2 ,3) d'une couche et référentiel (1',2',3') ou (x, y, z) du stratifié.

La matrice de passage du système (1,2,3) au système de référence (x, y, z) est :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Les équations de transformation de base des contraintes (3.9) et des déformations (3.10) peuvent être réécrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{21} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{21} \end{Bmatrix}$$

La substitution de la relation (3.10) et (3.11) dans les équations contraintes-déformation (3.7), permet d'exprimer la loi de comportement d'un pli composite a renforcement unidirectionnel dans le système d'axes arbitraires x et y .

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Avec :
$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T]_\varepsilon$$

La relation (3.10) devient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Dont les rigidités réduites transformées \bar{Q}_{ij} sont données par la relation (3.12), avec

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + Q_{22}s^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 \end{aligned}$$

II.2 Théories utilisées dans la formulation analytique de structures composites :

Dans les années passées, de nombreuses théories différentes du déplacement et de la déformation ont été découvertes. Comme le début est fait, ils l'ont utilisé pour modéliser des structures métalliques (dans des matériaux isotropes), puis étendu à l'étude de structures composites (dans des matériaux anisotropes, orthotropes ou isotropes transverses).

II.3 Théorie classique des stratifiées (CLT) :

La théorie classique des stratifiées est basée sur les hypothèses cinématiques de **Kirchhoff-Love**, employées pour l'étude de structures mince du type plaque et coque courbe.

D'après cette théorie, une ligne droite et perpendiculaire à la surface moyenne de la structure avant déformation, reste droite et perpendiculaire à cette surface, ne changeant pas sa forme dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire, elle reste inextensible dans cette direction (voir **Figure II. 7**). Cette hypothèse néglige l'effet du cisaillement transverse. :

$$\gamma_{xz} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 0$$

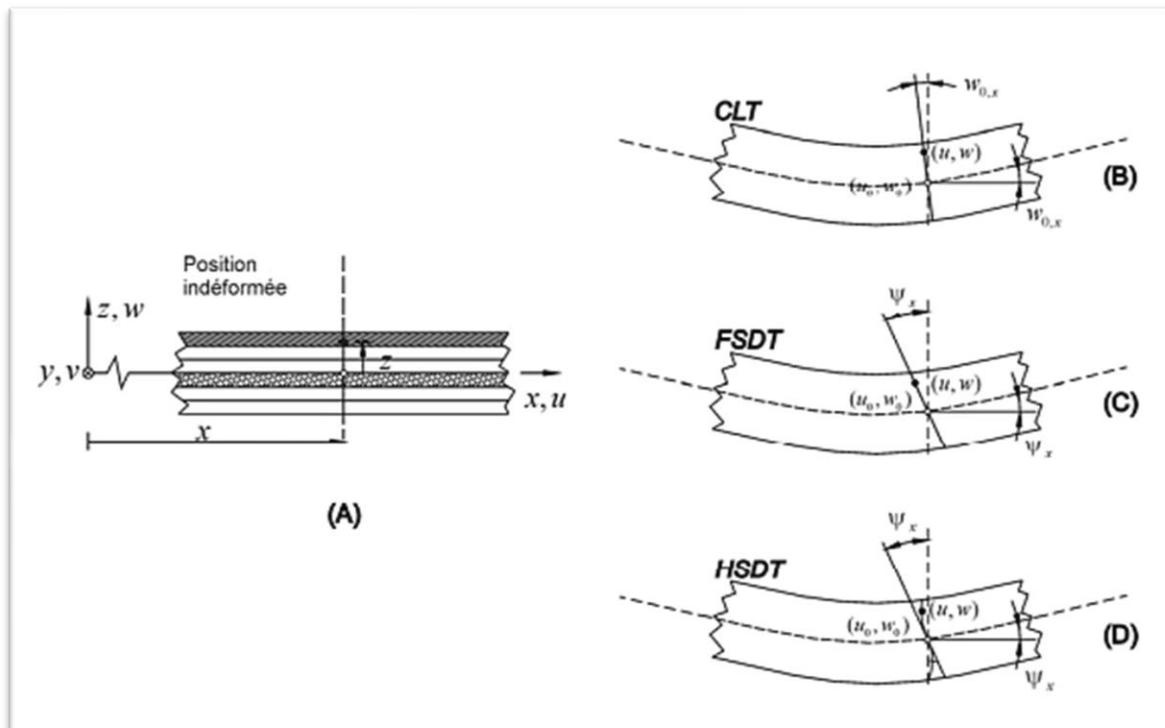


Figure II. 7 : Plaque en matériaux composites et une illustration de la cinématique de déformation présentée par couche équivalent, en utilisant les théories : (B) CLT (C) FSDT et (D) HSDT [26].

Selon [27] et [28], dans la théorie CLT, les effets des déformations de cisaillements transversaux (γ_{xz}, γ_{yz}) et la déformation normale transversale (ε_{zz}), ne sont pas considérés.

Les autres hypothèses adoptées pour la formulation de la théorie CLT sont :

1. Les plis sont parfaitement liés les uns aux autres, c'est-à-dire qu'entre eux il n'existe pas de glissement, ou décollement.
2. Les déplacements selon des plis sont continus.
3. Le matériau de chaque pli présente un comportement élastique.
4. Le stratifiés est considéré mince-
5. Les difformations les déplacements et les rotations sont petits.

Selon [27], le champ de déplacements de la théorie *CLT* est donné par l'expression suivante :

$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

u_0 Et v_0 : sont les déplacements membranaires de la feuille moyenne.

w_0 : est le déplacement hors plan de la feuille moyenne de la plaque.

II.5.1 Relation déformations-déplacements (Cinématique) :

Dans le domaine de l'élasticité linéaire, les relations de déplacement et de déformation sont utilisées au niveau des couches de copeaux.

Donc, selon [27], ces relations sont exprimées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left[-\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left[-\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Le champ des déformations est bien la superposition :

✚ Des déformations de *membrane* :

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

S'exprimant en fonction des déplacements (u_0, v_0) des points situés dans le plan (o, y, z) .

✚ Des déformations en **flexion et torsion** :

$$\varepsilon_f = z\kappa(x, y) = z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

κ_x, κ_y et κ_{xy} sont les courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Finalement le champ des déformations s'écrit : $\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_f$ (2.17)

A partir de l'équation (2.17) les contraintes dans une couche k , s'expriment par :

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ sym & & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\text{où} \quad \sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k \kappa(x, y) \quad (2.18)$$

$\sigma_k(M)$ Représente la vecteur de contrainte dans la couche k :

La matrice de rigidité réduite \bar{Q}_k varie d'une couche à l'autre. Il en résulte donc **une discontinuité** du champ des contraintes dans les couches successives.

II.5.2 Expression des résultantes et des moments :

II.5.2.a Résultantes en membrane :

D'après [4], les résultantes des forces qui agissent sur le stratifié peuvent être obtenus en intégrant les contraintes dans chaque couche à travers son épaisseur

$$\begin{aligned}
 N(x, y) &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz & (2.19) \\
 &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z \bar{Q}_k \kappa(x, y)] dz \\
 &= \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \\
 &= \left[\sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y)
 \end{aligned}$$

Soit, en définitive :

$$N(x, y) = A_{ij} \varepsilon_m(x, y) + B_{ij} \kappa(x, y) \quad (2.20)$$

avec
$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \quad (2.21)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (2.22)$$

N_x , N_y et N_{xy} sont les résultantes par unité de longueur. Les efforts suivant x et y et les efforts de cisaillement dans le Planson schématisées sur la Figure II. 8.

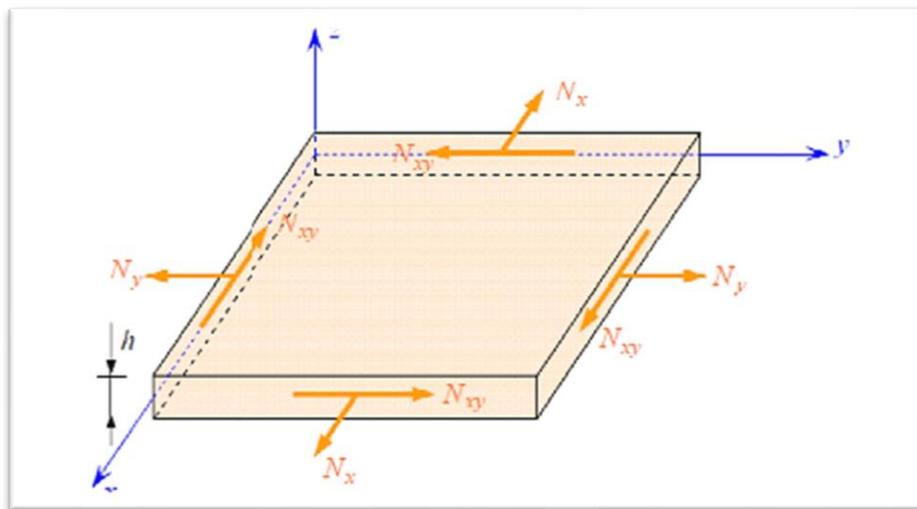


Figure II. 8 : Schématisation des résultantes en membrane.[24]

II.5.2.b Moment de flexion et de torsion :

Les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} M(x, y) &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z \bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 \bar{Q}_k \kappa(x, y)] dz \\ &= \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[\bar{Q}_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h^2_k - h^2_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[\frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h^3_k - h^3_{k-1}) \bar{Q}_k \right] \kappa(x, y) \end{aligned}$$

Soit, en définitive :

$$M(x, y) = B_{ij} \varepsilon_m(x, y) + D_{ij} \kappa(x, y) \quad (2.24)$$

avec $B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h^2_k - h^2_{k-1})$ (2.25)

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}]_k (h^3_k - h^3_{k-1}) \quad (2.26)$$

M_x Et M_y sont les moments de flexion et M_{xy} le moment de torsion.

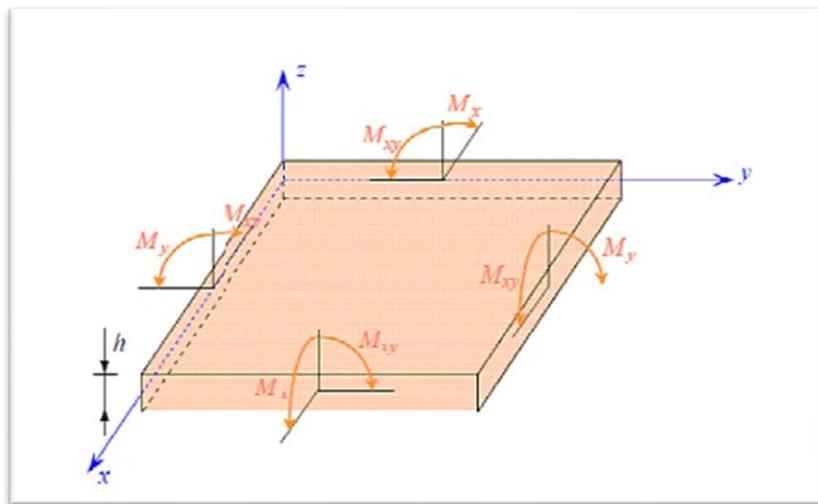


Figure II. 9 : Schématisation des moments de flexion et de torsion.[24]

Connaissant que $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y$ et κ_{xy} sont indépendants de z , les vecteurs forces et moments résultant peuvent être assemblés sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} A_{ij} = \sum_{k=1}^N [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [\bar{Q}_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{cases} \quad (2.27)$$

Sous cette écriture, l'analyse de la matrice de rigidité assemblée du stratifié (la matrice **ABD**) permet de mettre en évidence certains comportements élastiques caractéristiques des stratifiés :

- ✓ La matrice **A** correspond au comportement de *membrane*,
- ✓ La matrice **D** correspond au comportement de *flexion*,
- ✓ La matrice **B** correspond aux termes de *couplage* entre les phénomènes de *membrane* et de *flexion*.

Dans le cas d'un stratifiée symétrique, le couplage membrane-flexion-torsion est nul ($B=0$).

II.6 Influence de l'empilement des couches :

II.6.1 Couche isotrope :

Dans le cas d'une plaque en matériau *homogène isotrope*, le comportement élastique est décrit par le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν .

- ✓ Les *résultantes en membrane* (N_x, N_y, N_{xy}) dépendent uniquement des *déformations en membrane* ($\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$).
- ✓ Les *moments déflexion et torsion* (M_x, M_y, M_{xy}) dépendent uniquement des *courbures* du plan moyen ($\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$).

Dans le cas d'une plaque isotrope, il n'existe donc pas de couplage membrane-flexion/torsion.

II.6.2 Stratifiés symétriques :

II.6.4.c Cas général :

Un stratifié est *symétrique* si le plan *moyen* est plan de symétrie (voir **Figure II. 10**).

Deux couches symétriques ont [4] :

- La même matrice de rigidité réduite $[\bar{Q}_{ij}]_k$,
- La même épaisseur h_k ,

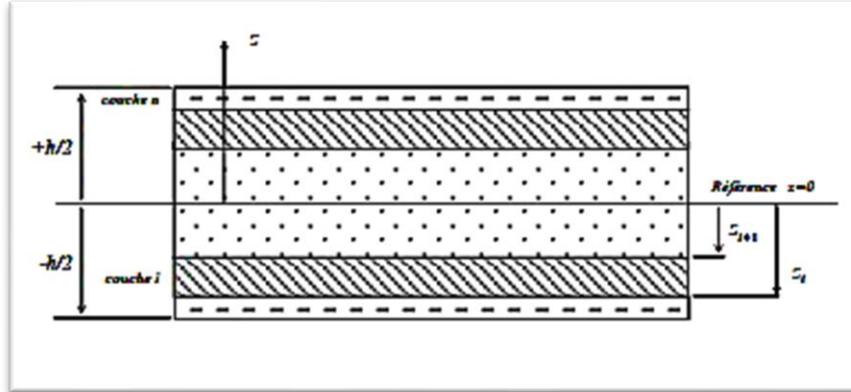


Figure II. 10:Section d'une plaque stratifiée symétrique.[29]

Il en résulte que les coefficients B_{ij} de la matrice de rigidité du stratifié sont **nuls**. L'équation constitutive est de la forme générale :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

On remarque qu'il n'existe pas de *couplage membrane-flexion* dans le cas des stratifiés symétriques. Il en résulte que le comportement des stratifiés symétriques est plus simple à analyser que celui des stratifiés présentant un couplage membrane-flexion/torsion.

II.6.4.d Stratifiés symétriques dont les axes des matériaux de toutes les couches coïncident avec les axes du stratifié (symétrie miroir) :

La matrice de rigidité réduite de chaque couche s'exprime par la matrice suivante :

$$[Q]_K = \begin{bmatrix} Q_{11}^K & Q_{12}^K & 0 \\ Q_{12}^K & Q_{22}^K & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^K \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Où les coefficients de rigidité réduite s'expriment en fonction des modules de l'ingénieur de chaque couche.

Les coefficients de rigidité du stratifié s'expriment :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{K=1}^N Q_{ij}^k h_k & A_{ij} &= \sum_{K=1}^N \frac{1}{3} Q_{ij}^k h_k^3 \\
 A_{16} = A_{26} &= 0 & B_{ij} &= 0 & D_{16} = D_{26} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

D'où l'équation constitutive du stratifié :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.35}$$

Outre que l'absence de couplage membrane flexion/torsion, il y a également l'absence de couplages en traction- cisaillement et en torsion-flexion. Dans le cas de la symétrie miroir des couches d'un matériau composite stratifié, les caractéristiques élastiques équivalentes sont :

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{hA_{22}} & E_y &= \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{hA_{11}} \\
 \nu_{xy} &= \frac{A_{12}}{A_{22}} & \nu_{yx} &= \frac{A_{21}}{A_{11}} & G_{xy} &= \frac{A_{33}}{h}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

II.7 La Loi de comportement des stratifiées hygrothermique :

Les relations contraintes-déformations dans le système de coordonnées locales des fibres d'un stratifié soumis à une variation de température et d'humidité, sont données par [30],[31] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^H \\ \varepsilon_2^H \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \tag{2.37}$$

Où 1 et 2 désignent respectivement la direction longitudinale des fibres et la direction transversale normale aux fibres dans le plan de la plaque.

ε_1^T Et ε_2^T sont les déformations d'origine thermique et qui sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{Bmatrix} = \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

ε_1^H Et ε_2^H sont les déformations due à une variation d'humidité et qui sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^H \\ \varepsilon_2^H \\ 0 \end{Bmatrix} = \Delta H \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

Avec :

α_1 Et α_2 : les coefficients de dilatation thermique longitudinal et transversal, respectivement.

ΔT : la variation de température.

β_1 Et β_2 : les coefficients d'humidité longitudinal et transversal, respectivement.

ΔH : la variation d'humidité.

Les relations contraintes-déformations de la couche "k" dans le repère global du stratifié, sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}_k \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k - \Delta H \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix}_k \right\} \quad (2.41)$$

Les efforts à mi-plan d'une plaque et les moments sont liés aux déformations et aux courbures par les expressions suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \\ M_x^H \\ M_y^H \\ M_{xy}^H \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Où :

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_L^0 \\ K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N^T \\ M^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N^H \\ M^H \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

- Les résultantes de force et de moment thermique sont définies par :

$$N^T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\overline{Q_{ij}} \right]_k \left[\Delta T \{ \alpha \}^T \right] dz \quad (2.46)$$

$$M^T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\overline{Q_{ij}} \right]_k \left[\Delta T \{ \alpha \}^T \right] z dz$$

- Les résultantes de force et de moment l'humidité sont définies par :

$$N^H = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\overline{Q_{ij}} \right]_k \left[\Delta H \{ \beta \}^T \right] dz \quad (2.47)$$

$$M^H = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[\overline{Q_{ij}} \right]_k \left[\Delta H \{ \beta \}^T \right] z dz$$

CHAPITRE III :

Étude théorique les différents critère D'endommagement.

III.1 Introduction :

D'une manière générale, la limite d'élasticité dans les matériaux composites est liée à la forme d'apparition des écrasements fins : micro-cassures de matrice, rupture des fibres, désadhésion de la matrice, etc.

Il est essentiel de comprendre quel processus mécanique (casse ou fissuration) à l'intérieur du matériau produit une "coupe". Si les pressions qui lui sont appliquées peuvent conduire à sa détérioration au point de le casser ou de le déformer définitivement ou de perdre sa solidité. Il doit être pris en charge pour éviter tout dommage pouvant entraîner la fin de sa validité.

Dans ce chapitre, nous allons discuter des différents mécanismes et critères de défaillance des composites unidirectionnels et des stratifiés.

III.2 Définition des critères de résistance :

Connaissant un état de contrainte σ , on cherche à réaliser une condition du type

$$F(\sigma) \leq 1 \quad (3.1)$$

$F(\sigma)$: Fonction scalaire du tenseur des contraintes.

Il existe de nombreuses expressions de cette fonction. Les plus connues étant celle de **Hill**, **Tsaï-Wu**, **Hoffman**, **Contrainte Maximale**, **Déformation Maximale** [33].

III.3 Historique des Critères de résistance ou rupture [33] :

- ✓ **Léonard de Vinci (1500)** : relation contrainte / rupture.
- ✓ **Galilée (1638)** : travaux sur la rupture des matériaux.
- ✓ **Tresca (1864)** : Cisaillement max.
- ✓ **Von Mises (1928)** : Critères quadratiques.
- ✓ **Hill (1948)** : Von Mises pratique.

- ✓ **Gol'denblatt et Kopnov (G&K,1965)** : écriture tensorielle générale des critères de rupture (tous les autres critères sont un cas simplifié et plus pratique de l'écriture de G&K).
- ✓ **Tsaï et Hill (1965)** : redéfinition du critère de Hill.
- ✓ **Tsaï et Wu (1971)** : formulation pratique de G&K pour les stratifiés.

III.4 Divers mécanismes de rupture dans un composite unidirectionnel :

Les plaques composites peuvent subir des détériorations dues à différents modes d'endommagement tels que la fissuration de la matrice, le relâchement des couches intermédiaires, la fissuration des fibres, etc.

Pour une matrice à fibres longues, lorsqu'elle est exposée à n'importe quel type de pression externe, une « **fissuration transversale** » est observée en premier. Au début de l'entretien du châssis, il peut apparaître dans la formation de zones de départ pour d'autres mécanismes de dommages plus graves (voir Figure III. 1).

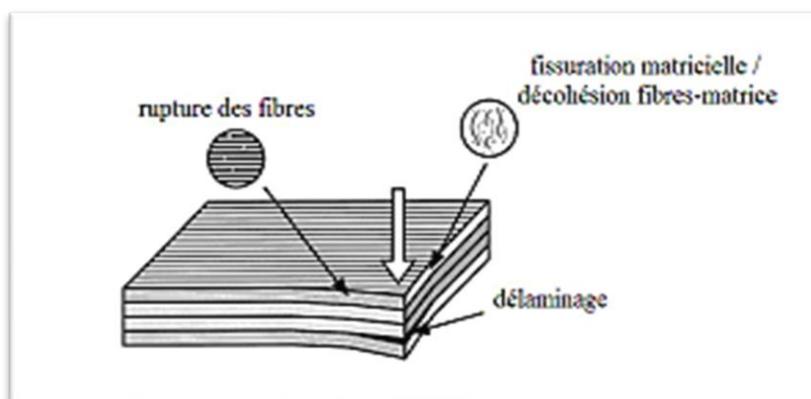


Figure III. 1: Mécanismes de rupture observés dans un stratifié.

Les principaux modes d'endommagement des nappes de fibres longues peuvent être classés en quatre classes :

III.4.1 Rupture des fibres :

Dans un matériau composite unidirectionnel soumis à des sollicitations mécaniques, la rupture des fibres intervient lorsque la contrainte de traction dans une fibre σ_f atteint la contrainte à la rupture de la fibre σ_{Fu} (voir Figure III. 2)[4]

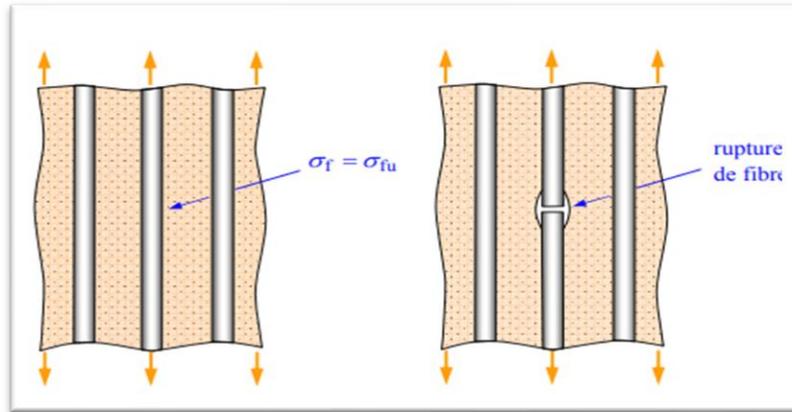


Figure III. 2 : Rupture de fibre.[34]

La rupture de la fibre crée une concentration de contrainte au voisinage de la rupture. La redistribution des contraintes et par conséquent le processus de rupture résultant, dépend principalement [4] :

- De la contrainte à la rupture des fibres,
- De la capacité de la matrice à absorber l'énergie libérée,
- Des propriétés de l'interface fibres/matrice... etc.

Les figures suivantes montrent les différents processus de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre :

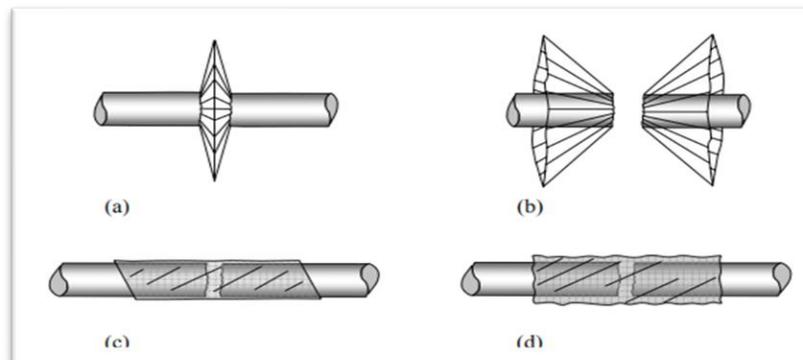


Figure III. 3: Les différents processus de rupture de la matrice associés à la rupture d'une fibre : (a) Rupture transverse de la matrice ; (b) Rupture en cisaillement de la matrice ; (c) Décohésion de l'interface fibre-matrice ; (d) Ruptures longitudinale de la matrice.[4]

Ce dernier mode de rupture appelé « **splitting** », se produit lorsque la contrainte de décohésion est supérieure à la contrainte en cisaillement à la rupture de la matrice : $\tau_d > \tau_{mu}$. Dans le cas contraire où $\tau_d < \tau_{mu}$, il se produit une rupture par décohésion de l'interface fibre-matrice.

III.4.2 Rupture transverse de la matrice :

Lorsque la contrainte en traction dans la matrice atteint la contrainte à la rupture de la matrice (voir Figure III. 4).[4]

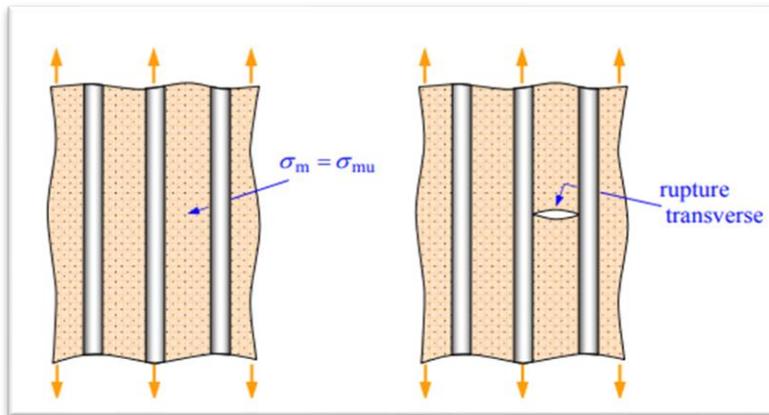


Figure III. 4: Rupture transverse de la matrice.[34]

III.4.3 Rupture longitudinale de la matrice :

Lorsque la contrainte de cisaillement τ_m dans la matrice atteint la contrainte en cisaillement à la rupture τ_{mu} (voir Figure III. 5)[4].

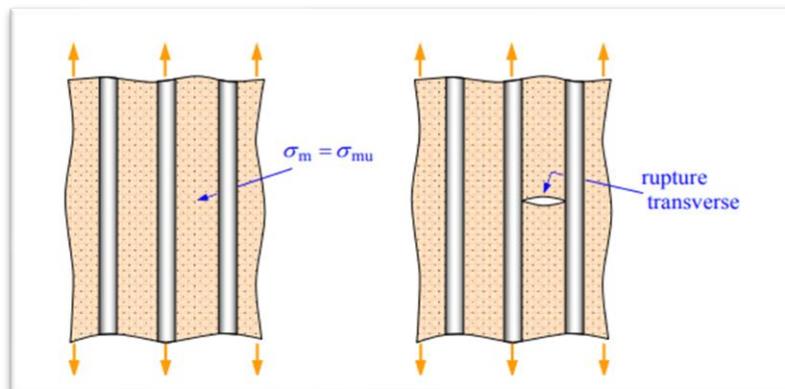


Figure III. 5: Rupture longitudinale de la matrice.[34]

III.4.4 Rupture de l'interface fibre-matrice :

L'interface fibre –matrice, de la fraction volumique des fibres, de l'état et des conditions de sollicitation mécaniques imposées (voir Figure III. 6)[4].

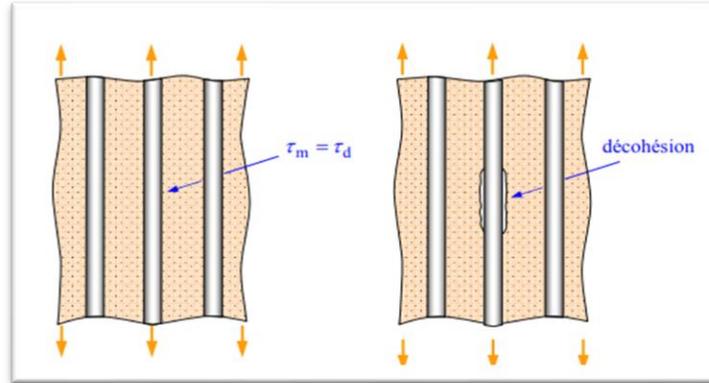


Figure III. 6: Décohésion fibre- matrice.[34]

III.5 Rupture des stratifiés :

Dans le cas de stratifiés, s'ajoute un mécanisme de rupture entre les couches, appelé rupture par délaminage. Les mécanismes de rupture induits dépendent de la nature des constitués de l'architecture des couches et du mode de sollicitation mécanique imposé (voir Figure III.7).[4]

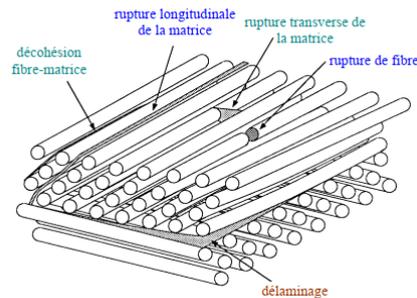


Figure III. 7: Mécanismes de rupture observés dans les stratifiés.

Un exemple intéressant est celui d'une plaque trouée, constituée d'un stratifié [0/45/90] et soumise à une traction dans la direction 0 (voir Figure III. 8). [4]

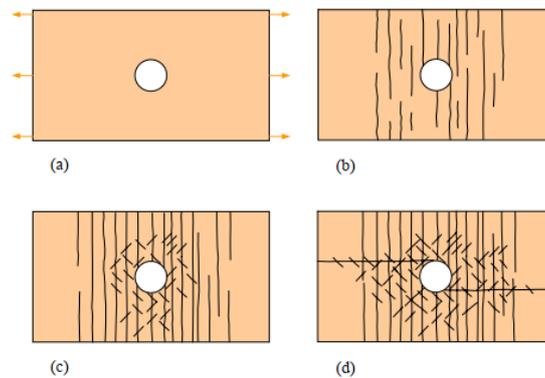


Figure III. 8 : Fissuration d'un stratifié [0/45/90]. (a) plaque avec un trou en son centre soumise à une charge de traction (b) 1^{ère} phase : fissuration dans les couches à 90 (c) 2^{ème} phase : fissuration dans les couches à 45 (d) 3^{ème} phase : rupture dans les couches à 0.

III.6 Critères de rupture des matériaux composites :

En effet, l'étude de la résistance à la rupture des matériaux composites est connue pour être plus complexe, notamment lors de sollicitations mécaniques ou thermiques. Les processus de rupture des composites sont donc d'une grande diversité et ne peuvent être décrits que si l'on connaît [35] :

- Le critère de résistance de chaque phase.
- L'état des contraintes et des déformations dans le matériau.
- Les phénomènes de propagation de fissure dans la microstructure.
- La nature de l'interface entre la matrice et le renfort.

Les critères de rupture sont établis dans le cas d'une couche (pli) d'un stratifié et peuvent être classés suivant [9] :

- Des critères en contraintes maximales.
- Des critères en déformations maximales.
- Des critères interactifs, souvent appelés critères énergétiques.

III.6.1 Critères en contraintes maximales :

III.6.1.a Critères dans les axes principaux :

Les critères en contraintes maximales font intervenir [4] :

X_t, X_c : Les contraintes à la rupture suivant l'axe longitudinal en traction et en compression, respectivement.

Y_t, Y_c : Les contraintes à la rupture suivant l'axe transversal en traction et en compression, respectivement.

S : La contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan de la couche.

L'axe longitudinal et l'axe transversal sont pris suivant les axes des matériaux de la couche (Figure III. 9).

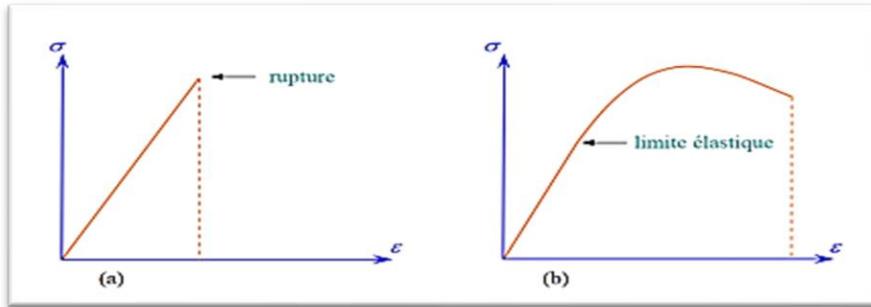


Figure III. 9: Comportements fragile et “ductile” d'un matériau.[33]

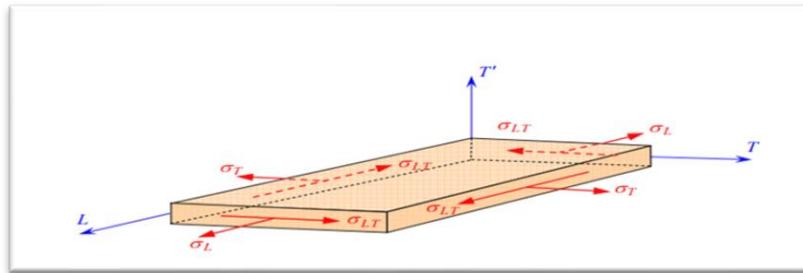


Figure III. 10: Contraintes dans les axes des matériaux d'une couche.[34]

Les grandeurs à la rupture sont les valeurs positives des contraintes à la rupture mesurées dans des essais de traction, compression ou cisaillement. Dans le cas d'une couche soumise à un état de contraintes planes $(\sigma_L, \sigma_T, \sigma_{LT})$ dans les axes des matériaux, les critères en contraintes maximales stipulent que la résistance mécanique de la couche est atteinte lorsque l'une des trois contraintes auxquelles la couche est soumise atteint la valeur de la contrainte à la rupture correspondante. Les critères de rupture s'écrivent ainsi sous la forme [4] :

$$\begin{aligned}
 -X_c < \sigma_L < X_t \\
 -Y_c < \sigma_T < Y_t \\
 -S < \sigma_{LT} < S
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Si les six inéquations sont vérifiées, l'état de contraintes limite n'est pas atteint et la rupture de la couche ne se produit pas. Si l'une quelconque des inéquations n'est plus vérifiée, l'état limite est atteint : la rupture se produit suivant le mécanisme correspondant à la contrainte de l'inéquation non vérifiée.

III.7 Critères de rupture en-dehors des axes des matériaux :

Dans le cas où l'état des Contraintes est exprimé dans des axes de référence (x, y, z) (voir Figure III.11), il est nécessaire de se ramener aux axes des matériaux par une rotation d'angle θ .

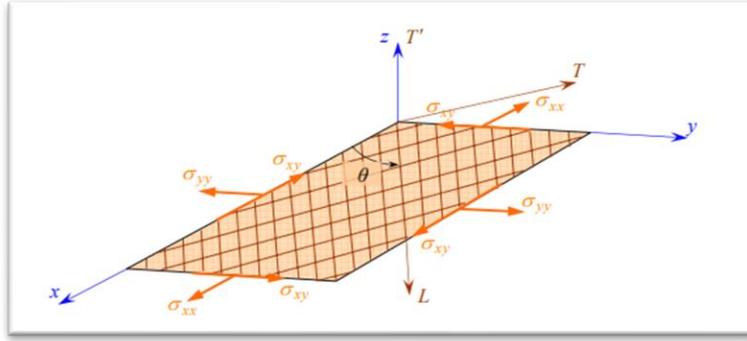


Figure III. 11: Couche rapportée à des axes de référence quelconques.[34]

Les contraintes exprimées dans les axes des matériaux s'écrivent [4] :

$$\begin{aligned}\sigma_L &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_T &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_{Lt} &= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)\end{aligned}\quad (3.3)$$

Les critères (3.3) en contraintes maximales s'expriment suivant :

$$\begin{aligned}-X_c &< \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta < X_t \\ -Y_c &< \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta + 2\sigma_{xy} \sin \theta \cos \theta < Y_t \\ -S &< (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) < S\end{aligned}\quad (3.4)$$

III.8 Traction ou compression en-dehors des axes des matériaux :

Dans le cas d'une traction ou d'une compression en-dehors des axes des matériaux (voir **Figure III. 12**), les contraintes se réduisent à [4] :

$$\begin{aligned}\sigma_L &= \sigma_{xx} \cos^2 \theta \\ \sigma_T &= \sigma_{xx} \sin^2 \theta \\ \sigma_{Lt} &= -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\quad (3.5)$$

Les critères en contraintes maximales s'expriment :

$$\begin{aligned}-X_c &< \sigma_{xx} \cos^2 \theta < X_t \\ -Y_c &< \sigma_{xx} \sin^2 \theta < Y_t \\ -S &< -\sigma_{xx} \sin \theta \cos \theta < S\end{aligned}\quad (3.6)$$

Ce critère peut être représenté graphiquement en traçant la valeur maximale σ_{xu} de la contrainte σ_{xx} de traction ou compression pour laquelle l'un des critères est atteint, en fonction de l'angle θ entre la direction du chargement et les directions du matériau.[4]

Dans un essai de traction, la contrainte de traction σ_{xu} correspond à la plus petite des valeurs :

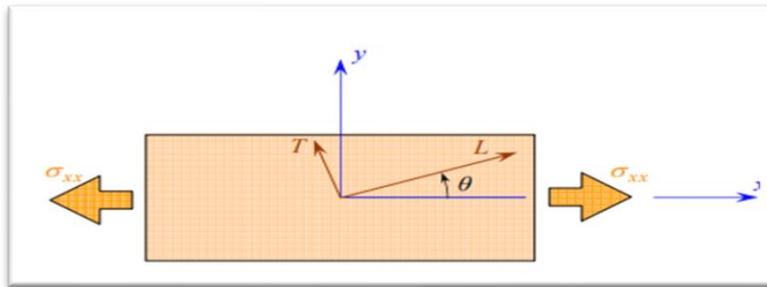


Figure III. 12: Traction en-dehors des axes des matériaux.[34]

$$\sigma_{xu} = \frac{X_t}{\cos^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{Y_t}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}, \quad (3.7)$$

Et dans un essai de compression, la contrainte de compression σ_{xu} correspond à la plus petite des valeurs :

$$\sigma_{xu} = \frac{X_c}{\cos^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{Y_c}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma_{xu} = \frac{S}{\sin \theta \cos \theta}, \quad (3.8)$$

La valeur σ_{xu} étant alors la détermination positive de la contrainte.

III.9 Critères en déformations maximales :

III.9.1 Critère dans les axes des matériaux :

Les critères en **déformations maximales** sont transposés des critères en contraintes maximales. Les déformations étant bornées, au lieu des contraintes. Les critères en déformations font intervenir :

$X_{el}(X_{ec})$: La déformation à la rupture **en traction (ou compression)** suivant l'axe longitudinal.

$Y_{el}(Y_{ec})$: La déformation à la rupture **en traction (ou compression)** suivant l'axe transversal.

S_{ε} : La déformation à la rupture **en cisaillement** dans le plan de la couche.

Les critères en déformations maximales s'écrivent donc sous la forme :

$$\begin{aligned}
 -X_{\varepsilon c} < \varepsilon_L < X_{\varepsilon t} \\
 -Y_{\varepsilon c} < \varepsilon_T < Y_{\varepsilon t} \\
 -S_{\varepsilon} < \gamma_{Lt} < S_{\varepsilon}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

III.9.2 Critères interactifs :

Les critères en contraintes maximales et en déformations maximales ne permettent pas de rendre compte de l'ensemble des résultats expérimentaux. D'autre part, ces critères excluent l'existence d'interactions entre les contraintes ou déformations dans les axes des matériaux : les mécanismes de rupture longitudinale, transversale ou en cisaillement sont supposés se produire indépendamment. [33]

Des critères interactifs ont alors été recherchés en étendant aux matériaux orthotropes le critère de Von Mises, utilisé pour les matériaux isotropes. Le critère de Von Mises est relié à l'énergie de déformation emmagasinée par unité de volume du matériau déformé. C'est la raison pour laquelle ces critères interactifs sont parfois appelés critères énergétiques. (Ferdous, 2020)

Toutefois, dans le cas de matériaux orthotropes, ces critères ne sont plus reliés exclusivement à l'énergie de déformation.

III.9.2.a Théorie générale de Tsai-Wu :

III.9.2.a.1 Formulation.

S.W. Tsai et E.M. Wu [36] ont admis que la rupture d'un matériau anisotrope est atteinte lorsque l'égalité suivante est vérifiée

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, 6, \tag{3.10}$$

Où les constantes F_i et F_{ij} sont les composantes de deux tenseurs respectivement de rang 2 et de rang 4, respectivement :

$$\begin{aligned}
 &F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + F_4 \sigma_4 + F_5 \sigma_5 + F_6 \sigma_6 \\
 &+ F_{11} \sigma_1^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2F_{14} \sigma_1 \sigma_4 + 2F_{15} \sigma_1 \sigma_5 + 2F_{16} \sigma_1 \sigma_6 \\
 &+ F_{22} \sigma_2^2 + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2F_{24} \sigma_2 \sigma_4 + 2F_{25} \sigma_2 \sigma_5 + 2F_{26} \sigma_2 \sigma_6 \\
 &+ F_{33} \sigma_3^2 + 2F_{34} \sigma_3 \sigma_4 + 2F_{35} \sigma_3 \sigma_5 + 2F_{36} \sigma_3 \sigma_6 \\
 &+ F_{44} \sigma_4^2 + 2F_{45} \sigma_4 \sigma_5 + 2F_{46} \sigma_4 \sigma_6 \\
 &+ F_{66} \sigma_6^2 = 1
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Plusieurs caractéristiques de ce critère de résistance proposé sont les suivantes :

1. C'est une équation scalaire et elle est fixée automatiquement.
2. Les composantes de résistance exprimées en tenseurs, leurs relations de transformation et les constantes associées sont bien établies.
3. Les propriétés de symétrie des tenseurs de résistance et le nombre de composants indépendants et non nuls ne peuvent être décrits avec précision comme d'autres propriétés.
4. Connaissant les relations de transformation, nous pouvons facilement faire tourner les axes physiques de F_i et F_{ij} dans l'équation (3.10).
5. Étant une constante, l'équation (3.10) est valable pour tous les systèmes de coordonnées lorsqu'elle est valable pour un seul système de coordonnées.
6. Certains termes de stabilité sont incorporés dans le tenseur de résistance.

III.9.2.a.2 Expression des constantes :

Nous nous intéressons, dans ce paragraphe, au cas d'un matériau composite orthotrope soumis à un état de contraintes planes dans le plan $(1, 2) = (L, T)$. La relation (3.11) s'écrit alors [4] :

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_6\sigma_6 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + 2F_{12}\sigma_2 = 1, \quad (3.12)$$

ou

$$F_1\sigma_L + F_2\sigma_T + F_6\sigma_{LT} + F_{11}\sigma_L^2 + F_{22}\sigma_T^2 + F_{66}\sigma_{LT}^2 + 2F_{12}\sigma_L\sigma_T = 1,$$

Les paramètres F_i, F_{ij} peuvent être exprimés à l'aide des contraintes à la rupture, mesurées dans divers essais.

Dans le cas d'un essai de traction suivant la direction L , la contrainte à la rupture X_t est telle que :

$$F_1X_t + F_{11}X_t^2 = 1 \quad (3.13)$$

Et dans un essai de compression :

$$F_1X_c + F_{11}X_c^2 = 1 \quad (3.14)$$

De ces deux relations, nous tirons :

$$F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \quad (3.15)$$

$$F_{11} = \frac{1}{X_t X_c}$$

Par analogie, nous avons de même :

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, \quad (3.16)$$

$$F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c},$$

Dans le cas d'un essai de cisaillement dans le plan (L, T) (voir **Figure III.13.a**), la contrainte à la rupture $SL+T$ est telle que :

$$F_6 S_{lt}^+ + F_{66} S_{lt}^{+2} = 1 \quad (3.17)$$

En inversant le sens des contraintes (**Figure III. 13.b**), la contrainte à la rupture $SL-T$ est telle que :

$$F_6 S_{lt}^- + F_{66} S_{lt}^{-2} = 1 \quad (3.18)$$

Ces deux relations conduisent à :

$$F_6 = \frac{1}{S_{lt}^+} - \frac{1}{S_{lt}^-}, \quad (3.19)$$

$$F_{66} = \frac{1}{S_{lt}^+ S_{lt}^-}, \quad (3.20)$$

La contrainte à la rupture étant indépendante du signe de la contrainte de cisaillement, nous avons :

$$S_{lt}^+ = S_{lt}^- = S_{lt} \quad (3.21)$$

Il en résulte que dans le cas de matériaux orthotropes :

$$F_6 = 0 \quad (3.22)$$

$$F_{66} = \frac{1}{S_{lt}^2} \quad (3.23)$$

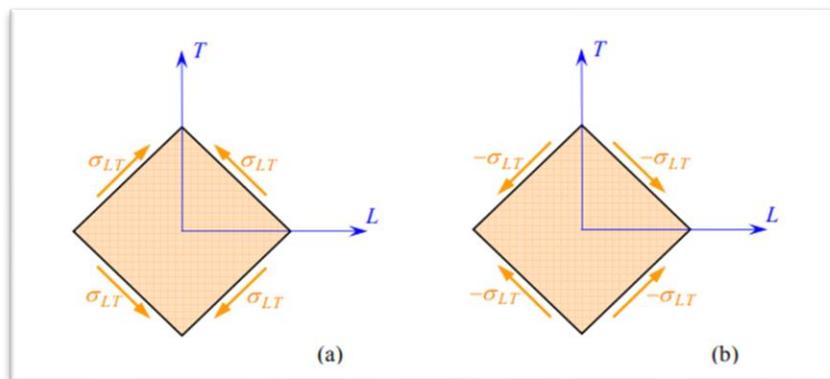


Figure III. 13 : Essais de cisaillement.[33]

Il reste à déterminer le **paramètre de couplage** F_{12} . Ce paramètre peut être déterminé dans un essai biaxial, par exemple une traction biaxiale. Un tel essai est effectué en exerçant la même contrainte dans les directions 1 et 2 du matériau. Les contraintes sont alors : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, les autres contraintes étant nulles. Le critère (3.12) s'écrit [4] :

$$(F_1 + F_2)\sigma + (F_{11} + F_{22} + 2F_{12})\sigma^2 = 1 \quad (3.24)$$

D'où l'expression du paramètre d'interaction :

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[1 - \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma + \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} \right) \sigma^2 \right] \quad (3.25)$$

La valeur de F_{12} de la contrainte mesurée lors de la σ correspond à la valeur rupture dans l'essai de traction biaxiale.

Dans la pratique, le coefficient d'interaction F_{12} peut également être déterminé dans un essai de traction (ou compression) à 45° des axes du matériau orthotrope. Dans ce cas, les contraintes dans les axes du matériau sont :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_6 = \frac{\sigma_{45}}{2}, \quad \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0 \quad (3.26)$$

Où σ_{45} est la contrainte de traction exercée. Le critère s'écrit dans ce cas :

D'où l'expression du paramètre F_{12} obtenue dans cet essai :

$$F_{12} = \frac{2}{\sigma_{45}^2} \left[1 - \frac{\sigma}{2} \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) - \frac{\sigma}{4} \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{S_{tt}^2} \right) \right] \quad (3.27)$$

La valeur de F_{12} correspond à la valeur de σ_{45} mesurée lors de la rupture dans un essai de traction à 45°.

III.9.2.a.3 Critère de Tsai-Wu en contraintes planes :

Selon [4], en tenant compte des résultats précédents, le critère de **Tsai-Wu**, dans un état de contraintes planes, s'écrit sous la forme :

$$\left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma_t + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_t + \frac{\sigma_t^2}{XX} + \frac{\sigma_t^2}{YY} + \frac{\sigma_t^2}{S_{tt}^2} + \frac{\sigma_t \sigma_t}{X_t X_c} = 1 \quad (3.28)$$

$$F_{12}^* = \frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 1 - \left[X_c - X_t + \frac{X_c - X_t}{Y_c - Y_t} (Y_c - Y_t) \right] \sigma + \left(1 + \frac{X_c - X_t}{Y_c - Y_t} \sigma^2 \right) \right\} \quad (3.29)$$

Ou

$$F_{12}^* = \frac{2}{\sigma_{45}^2} \left\{ 1 - \left[X_c - X_t + \frac{X_c - X_t}{Y_c - Y_t} (Y_c - Y_t) \right] \frac{\sigma_{45}^2}{2} + \left(1 + \frac{X_c - X_t}{Y_c - Y_t} + \frac{X_t X_c}{S_t^2} \right) \frac{\sigma_{45}^2}{4} \right\} \quad (3.30)$$

Ou σ et σ_{45} Sont les contraintes à la rupture déterminées, respectivement, dans un essai bi axial et dans une traction à 45°. Bien souvent, le coefficient de couplage F_{12}^* est considéré comme un coefficient empirique, ajusté en fonction des résultats expérimentaux.

Dans le cas où le coefficient de couplage est pris égal à $-\frac{1}{2}$

Le critère de **Tsai-Wu** en contraintes planes s'écrit :

$$\left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right) \sigma_l + \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right) \sigma_t + \frac{\sigma_l^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_t^2}{Y_t Y_c} + \frac{\sigma_l^2}{S_t^2} + \frac{\sigma_l \sigma_t}{X_t X_c} = 1 \quad (3.31)$$

III.10 Conclusion :

Au début de ce chapitre, nous avons parlé de la définition des critères et des types de critères de défaillance qui sont présents dans le composé unidirectionnel. Au sein de ces critères de défaillance, il existe deux ensembles de théories :

- ✓ Théorie non interactive.
- ✓ Théorie interactive.

Dans cette étude, nous avons utilisé la théorie interactive, qui nous a permis de calculer tous les résultats expérimentaux, en excluant la présence d'interactions entre contraintes ou déformations dans les axes du matériau.

CHAPITRE IV :

FORMULATION ELEMENTS FINIS ET PROGRAMMATION

IV.1 Introduction :

En général, il existe certaines structures qui ne peuvent pas être résolues analytiquement pour raisons de complexité du domaine discrétisé du problème ou des conditions aux limites. Nous recourons le plus souvent à l'utilisation de méthodes numériques qui nécessitent l'utilisation d'ordinateurs pour déterminer les charges critiques et extraire la solution.

Les structures en plaque composites sont l'une de ces structures complexes (pour la forme des entretoises et le chargement indéfini) que seule la méthode des éléments finis peut résoudre.

Dans ce chapitre, nous utiliserons un programme FORTRAN77 pour calculer les déplacements et les charges mécaniques de rupture ou bien les charges ultimes hygrothermiques pour des structures en panneaux composites. Ensuite, nous passons à la validation du programme en comparant ses résultats avec les résultats analytiques.

IV.1 Définition de la MEF :

En analyse numérique, la méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles. Où la structure continue est remplacée par une structure idéalisée équivalente composée d'un ensemble d'élément appelé « élément finis », supposés liés les uns aux autres en un nombre fini de points appelés nœuds.[37]

IV.2 Historique :

Historiquement, la méthode des éléments finis a fait ses débuts vers les années 1940. C'était lorsque les ingénieurs aéronautiques américains cherchaient à obtenir des modèles mathématiques fidèles pour calculer les corps d'avions modernes aux formes plus complexes. Il a été impossible de déterminer la rigidité et le comportement de la structure (poutres et de plaques métalliques) lorsqu'elles sont exposées à diverses contraintes.

En 1941, un ingénieur américain A.HRENNIKOFF, a proposé d'assimiler les plaques à un ensemble de plusieurs poutres de rigidité connus. Les résultats obtenus étaient satisfaisants pour les pièces rectangulaires mais médiocres pour les autres formes.

Parallèlement, S. LEYY (1953) et deux Britanniques ont mis au point la méthode d'analyse matricielle des structures.

Avec aide informatique, ils ont travaillé sur la résolution de systèmes équations linéaires. Donc Il faut dire que sans le développement des technologies de l'information, la méthode des éléments finis, aussi efficace soit-elle, ne réussira pas courant.

Enfin, la méthode des éléments finis a été étendue à d'autres domaines (thermodynamique, mécanique des fluides, acoustique, médecine, sismologie, et bien d'autres).[38]

IV.3 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis :

Les avantages de la MEF par rapport aux autres méthodes numériques sont [32] :

- ✓ La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa généralité et sa souplesse ;
- ✓ Elle peut être applicable à une variété de problèmes physiques. La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de nature quelconque ;
- ✓ Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite ;
- ✓ Toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur (sélection du type de problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites) ;

La méthode des éléments finis a néanmoins quelques inconvénients [32] :

- ✓ Elle donne un résultat numérique particulier pour un problème spécifique ;
- ✓ Elle ne fournit aucune forme de solution susceptible de permettre une étude analytique de l'effet d'un changement de paramètre par exemple ;
- ✓ Un ordinateur, un programme fiable et une utilisation intelligente sont nécessaires ;
- ✓ Les programmes généraux de calcul doivent être fortement documentés ;
- ✓ L'expérience et un grand sens de l'ingénieur sont indispensables à la définition d'un bon modèle ;
- ✓ La plupart des problèmes comportent un grand nombre de données et une foule de résultats qu'on doit dépouiller avec méthode pour une compréhension optimale ;

Élément utilisé

L'élément utilisé est un élément rectangulaire de (24) degrés de liberté. La [figure IV. 1](#) montre la géométrie de l'élément utilisé, les dimensions (a et b) et l'épaisseur (t).

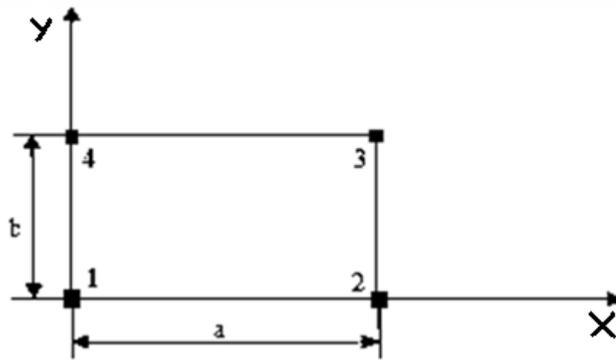


Figure IV. 1: Élément plaque rectangulaire.

IV.4 Fonctions de déplacements de l'élément :

L'élément possède quatre (4) nœud avec (6) degrés de libertés chacun, ces degrés de liberté sont :

- ✓ Deux degrés de libertés dans le plan (x, y) qui sont (u, v) .
- ✓ Quatre degrés de libertés hors plan qui sont : $(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})$.

✚ En membrane :

D'après le triangle de Pascale présenté dans la Figure IV. 2, le champ de déplacements membranaires est donné par la formule suivante :

$$\begin{aligned}
 (x+y)^0 &= && \mathbf{1} \\
 (x+y)^1 &= && x + y \\
 (x+y)^2 &= && x^2 + x^1y^1 + y^2 \\
 (x+y)^3 &= && x^3 + x^2y^1 + x^1y^2 + y^3 \\
 (x+y)^4 &= && x^4 + x^3y^1 + x^2y^2 + x^1y^3 + y^4 \\
 (x+y)^5 &= && x^5 + x^4y^1 + x^3y^2 + x^2y^3 + x^1y^4 + y^5
 \end{aligned}$$

Figure IV. 2 : Triangle de Pascale.

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy && (4.1) \\
 v(x, y) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy
 \end{aligned}$$

On peut écrire ces équations sous forme matricielle :

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

$$\text{Nœud (1) : } (x=0, y=0) \Rightarrow \begin{cases} u_1 \\ v_1 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8$$

$$\text{Nœud (2) : } (x=a, y=0) \Rightarrow \begin{cases} u_2 \\ v_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8$$

$$\text{Nœud (3) : } (x=a, y=b) \Rightarrow \begin{cases} u_3 \\ v_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8$$

$$\text{Nœud (4) : } (x=0, y=b) \Rightarrow \begin{cases} u_4 \\ v_4 \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i=1,8$$

$$\{\delta_m^e\}_{8 \times 1} = [X]_{8 \times 8} \{\alpha_i\}_{8 \times 1} \Rightarrow \{\alpha_i\}_{8 \times 1} = [X]_{8 \times 8}^{-1} \{\delta_m^e\}_{8 \times 1} \text{ Et } \{\delta_m^e\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} [X]^{-1} \{\delta_m^e\}$$

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \end{cases} = \begin{bmatrix} -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} + 1 & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{xy}{ab} & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} + 1 & 0 & \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} & \frac{xy}{ab} & 0 & 0 & \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} \end{bmatrix} \{\delta_m^e\}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \{\delta_m^e\} \quad (4.3)$$

- Calcul les déformations :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \{\alpha_i\} \Rightarrow \{\varepsilon(x, y)\} = [Q]_m \{\alpha_i\}$$

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [Q]_m [X]^{-1} \{\delta_m^e\} \Rightarrow \{\varepsilon(x, y)\} = [B_m] \{\delta_m^e\} \quad (4.4)$$

Alors :

$$[B_m] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & 0 & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & 0 & \frac{y}{ab} & 0 & -\frac{y}{ab} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & 0 & -\frac{x}{ab} & 0 & \frac{x}{ab} & 0 & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} \\ -\frac{1}{b} + \frac{x}{ab} & -\frac{1}{a} + \frac{y}{ab} & -\frac{x}{ab} & \frac{1}{a} - \frac{y}{ab} & \frac{x}{ab} & \frac{y}{ab} & \frac{1}{b} - \frac{x}{ab} & -\frac{y}{ab} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Donc la matrice $[B_m]$ relie les déformations membranaires avec les déplacements nodaux.

✚ **En flexion :**

$$w(x, y) = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \\ \alpha_{12} x^2 y^2 + \alpha_{13} xy^3 + \alpha_{14} x^3 y^2 + \alpha_{15} x^2 y^3 + \alpha_{16} x^3 y^3 \end{bmatrix}$$

$$w(x, y) = \{P(x, y)\} \{\alpha\}^T$$

Avec :

$$\{\alpha\}^T = \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10} \ a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ a_{15} \ a_{16}\}$$

$$\{P(x, y)\} = \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ x^2y^2 \ xy^3 \ x^3y^2 \ x^2y^3 \ x^3y^3\}$$

L'élément plaque nécessite donc quatre degrés de liberté par nœud

$$\{w_i\} = \left\{ \begin{array}{c} w_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial x} \\ \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \end{array} \right\}, i = 1, 4$$

Ce qui explique l'introduction de la dérivée seconde par rapport à x et y .

$$\left\{ \begin{array}{c} w(x, y) \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & x^2y^2 & xy^3 & x^3y^2 & x^2y^3 & x^3y^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & 2xy^2 & y^3 & 3x^2y^2 & 2xy^3 & 3x^2y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 2x^2y & 3xy^2 & 2x^3y & 3x^2y^2 & 3x^3y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2x & 2y & 0 & 3x^2 & 4xy & 3y^2 & 6x^2y & 6xy^2 & 9x^2y^2 \end{array} \right] \{\alpha_i\}$$

Nœud (1) : $(x=0, y=0) \rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{c} w_1 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \{\alpha_i\}, i = 1, 16$$

Nœud (2) : $(x=a, y=0) \rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_2 \\ \frac{\partial w_2}{\partial x} \\ \frac{\partial w_2}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i = 1,16$$

Nœud (3) : $(x=a, y=b) \rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_3 \\ \frac{\partial w_3}{\partial x} \\ \frac{\partial w_3}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_3}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & a^2b^2 & ab^3 & a^3b^2 & a^2b^3 & a^3b^3 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & 2ab^2 & b^3 & 3a^2b^2 & 2ab^3 & 3a^2b^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 2a^2b & 3ab^2 & 2a^3b & 3a^2b^2 & 3a^3b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a & 2b & 0 & 3a^2 & 4ab & 3b^2 & 6a^2b & 6ab^2 & 9a^2b^2 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}$$

Nœud (4) : $(x=0, y=b) \rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} w_4 \\ \frac{\partial w_4}{\partial x} \\ \frac{\partial w_4}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 w_4}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{\alpha_i\}, i = 1,16$$

$$\{\delta_f^e\}_{16 \times 1} = [X]_{16 \times 16} \{\alpha_i\}_{16 \times 1} \Rightarrow \{\alpha_i\}_{16 \times 1} = [X]_{16 \times 16}^{-1} \{\delta_f^e\}_{16 \times 1}$$

$$\{w(x, y)\} = \{P(x, y)\} [X]^{-1} \{\delta_f^e\}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow w_1^*(x, y) &= (1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}) (1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}) w_1 + (-x(\frac{x}{a} - 1)^2) (1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}) \theta_{x1} + \\ & (1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}) y(\frac{y}{b} - 1)^2 \theta_{y1} + (-x(\frac{x}{a} - 1)^2) y(\frac{y}{b} - 1)^2 \theta_{xy1} \end{aligned}$$

$$\triangleright w^*_2(x, y) = \left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_2 + \left(-x\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) \left(1 - 3\frac{y^2}{b^2} + 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x2} +$$

$$\left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) y\left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 \theta_{y2} + \left(-x\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) y\left(\frac{y}{b} - 1\right)^2 \theta_{xy2}$$

$$\triangleright w^*_3(x, y) = \left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_3 + \left(-x\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x3} +$$

$$\left(3\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x^3}{a^3}\right) y\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{y3} + \left(-x\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x}{a}\right)\right) y\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{xy3}$$

$$\triangleright w^*_4(x, y) = \left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) w_4 + \left(-x\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2\right) \left(3\frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y^3}{b^3}\right) \theta_{x4} +$$

$$\left(1 - 3\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{x^3}{a^3}\right) y\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{y4} + \left(-x\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2\right) y\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{y}{b}\right) \theta_{xy4}$$

$$\{w(x, y)\} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad \dots \quad N_{13} \quad N_{14} \quad N_{15} \quad N_{16}] \{\delta_f^e\} \text{Et}$$

$$\{\delta_f^e\}^T = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \theta_{xy1} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \quad \theta_{xy4}\}$$

• **Relation cinématiques :**

L'élément utilisé est basé sur la théorie de Kirchhoff, alors les déplacements dans le plan et hors le plan sont donnés par :

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

Les déformations sont données par :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 x} = z k_x$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial^2 y} = z k_y$$

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = z k_{xy}$$

Avec k_x , k_y et k_{xy} sont les courbures.

$$\{k(x, y)\} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \{P(x, y)\} [X]^{-1} \{\delta_f^e\} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \{P(x, y)\}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \{P(x, y)\}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \{P(x, y)\}}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} [X]^{-1} \{\delta_f^e\}$$

$$\{k(x, y)\} = [Q]_{3 \times 16} [X]_{16 \times 16}^{-1} \{\delta_f^e\}_{16 \times 1} = [B_f]_{3 \times 16} \{\delta_f^e\}$$

1. Loi de comportement :

D'après (Berthelot J), les résultantes des forces, les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x^H \\ N_y^H \\ N_{xy}^H \\ M_x^H \\ M_y^H \\ M_{xy}^H \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^H \\ M^H \end{Bmatrix}$$

2. Détermination de la matrice de rigidité

L'énergie potentielle totale de déformation d'une plaque soumise à un chargement transversal répartie à travers sa surface est donnée par :

$$\Pi = U + V'$$

La configuration d'équilibre est définie par la minimisation de l'énergie potentielle totale qui signifie l'annulation de sa première variation.

$$\delta \Pi = \delta U + \delta V = 0$$

3. Travaux virtuels des efforts :

$$\iint \{\partial\delta\}^T \left\{ [B_m]^T [A][B_m] + [B_m]^T [B][B_f] + [B_f]^T [B][B_m] + [B_f]^T [D][B_f] \right\} \{\delta\} ds$$

On pose :

$$[K^e] = \iint \left\{ [B_m]^T [A][B_m] + [B_m]^T [B][B_f] + [B_f]^T [B][B_m] + [B_f]^T [D][B_f] \right\} ds$$

La matrice $[K^e]$ peut être écrite sous la forme :

$$[K^e] = [K_1^e] + [K_2^e] + [K_3^e] + [K_4^e]$$

Avec :

$$[K_1^e] = [B_m]^T [A][B_m] : \text{Matrice de rigidité élémentaire membranaire.}$$

$$[K_2^e] = [B_m]^T [B][B_f] : \text{Matrice de rigidité élémentaire de couplage membrane-flexion.}$$

$$[K_3^e] = [B_f]^T [B][B_m] : \text{Matrice de rigidité élémentaire de couplage flexion-membrane.}$$

$$[K_4^e] = [B_f]^T [D][B_f] : \text{Matrice de rigidité élémentaire flexionnelle.}$$

Le travail virtuel s'écrit :

$$\delta U = \{\partial\delta\}^T [K^e] \{\delta\}$$

$[K^e]$ Est la matrice de rigidité élémentaire ; la matrice de rigidité globale de la structure s'obtient par assemblage des matrices de rigidité élémentaires.

4. Travaux virtuels des forces extérieures

Soit $\{\partial\delta\}$ le vecteur des déplacements virtuel, alors le travail des forces appliquées à l'élément donné par :

$$\delta V = \{\partial\delta\}^T \{f^e\}$$

En équilibre, les travaux virtuels sont égaux, alors on aura :

$$\delta U = \delta V$$

$$\{\partial\delta\}^T [K^e] \{\delta\} = \{\partial\delta\}^T \{f^e\}$$

Ce qui permet d'obtenir l'équation d'équilibre suivante :

$$[K^e] \{\delta\} = \{f^e\}$$

Après assemblage, on obtient l'équation d'équilibre globale :

$$[K_G]\{\delta_G\} = \{f_G\}$$

Où $[K_G]$ est la matrice de rigidité globale, $\{\delta_G\}$ est le vecteur déplacement global et $\{f_G\}$ est le vecteur force global.

IV.5 Les étapes à suivre afin de calculer la charge de rupture :

- 1) Calculer les valeurs de la matrice de rigidité réduite $[Q]$ pour chaque pli, à l'aide de ses quatre modules élastiques E_1 , E_2 , ν_{12} , and G_{12} .
- 2) Trouver les valeurs de la matrice de rigidité réduite transformée $[\bar{Q}]$ pour chaque pli, en utilisant la matrice calculée à l'étape 1 et l'angle du pli.
- 3) Avoir l'épaisseur, t_k , de chaque pli, trouver les coordonnées de la surface supérieure et inférieure h_i , $i = 1 \dots, n$, de chaque pli en utilisant l'équation suivante :

$$h = \sum_{k=1}^n t_k$$

L'emplacement du plan médian est $h/2$, à partir de la surface supérieure ou inférieure du stratifié. La coordonnée z de chaque surface de pli k (supérieure et inférieure) est donné par :

1. Pli 1 :

$$h_0 = -h/2 \quad (\text{Surface supérieure}).$$

$$h_1 = -h/2 + t_1 \quad (\text{Surface inférieure}).$$

2. Pli k : ($k= 2, 3, \dots, n-2, n-1$)

$$h_{k-1} = -h/2 + \sum_{i=1}^{k-1} t_i \quad (\text{Surface supérieure}).$$

$$h_k = -h/2 + \sum_{i=1}^k t_i \quad (\text{Surface inférieure}).$$

3. Pli n :

$$h_{n-1} = h/2 - t_n \quad (\text{Surface supérieure}).$$

$$h_n = h/2 \quad (\text{Surface inférieure}).$$

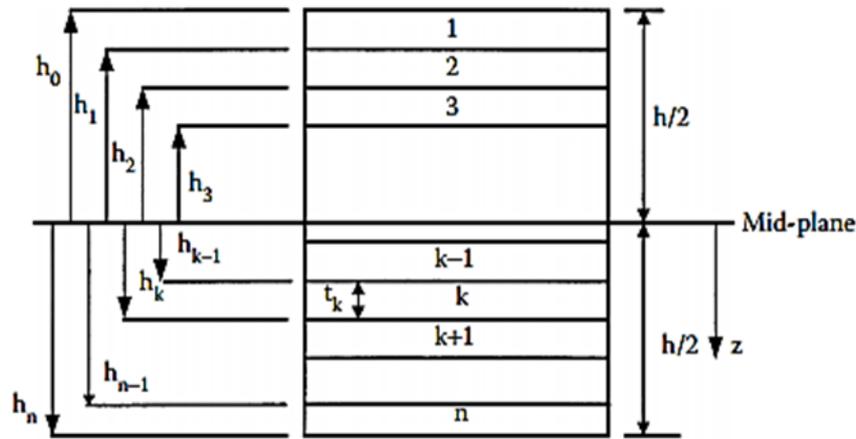


Figure IV. 2 : L'emplacement des plis dans un stratifié.

Considérons un stratifié composé de n couches comme illustré à la Figure 4.6. Chaque couche a une épaisseur t_k . Donc, l'épaisseur totale de ce stratifié 'h' est :

$$h = \sum_{k=1}^n t_k$$

- 4) Utiliser les matrices de rigidité transformée de l'étape 2 et l'emplacement de chaque couche, de l'étape 3, pour trouver les trois matrices de rigidité [A], [B] et [D].
- 5) Remplacer les valeurs de la matrice de rigidité trouvées à l'étape 4 et les forces et moments appliqués dans l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^H \\ M^H \end{Bmatrix}$$

- 6) Résolvez les six équations simultanées pour trouver les déformations et les courbures du plan moyen.
- 7) Maintenant que l'emplacement de chaque couche est connu, trouver les déformations globales dans chaque couche en utilisant l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}$$

- 8) Pour trouver les contraintes globales, utilisez la relation contrainte-déformation :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

- 9) Pour trouver les déformations locales, utilisez l'équation de transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix}$$

10) Pour trouver les contraintes locales, utilisez l'équation de transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

IV.6 Validation de l'élément dans l'analyse statique des plaques :

Dans cette partie, nous allons étudier différents tests ~~sur~~ en utilisant un élément rectangulaire à quatre nœuds afin de vérifier la précision et la convergence des résultats. Les résultats (les flèches et les efforts), seront comparés à ceux obtenus analytiquement.

Ces tests permettent aussi de déterminer le maillage approprié qui permet de donner les meilleurs résultats.

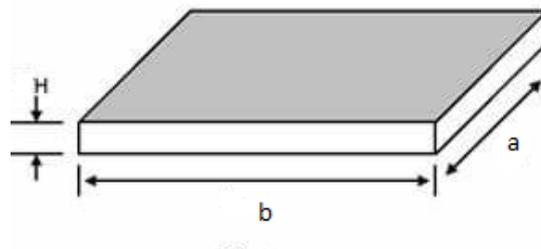


Figure IV. 3 : Géométrie de la plaque.

Les conditions aux limites considérées pour une plaque :

SSSS : Plaque simplement appuyée sur les quatre bords.

EEEE : Plaque encastrée sur les quatre bords.

ESES : Deux bords opposés encastrés et deux autres bords simplement appuyés.

ELEL : Deux bords opposés encastrés et deux autres bords libres

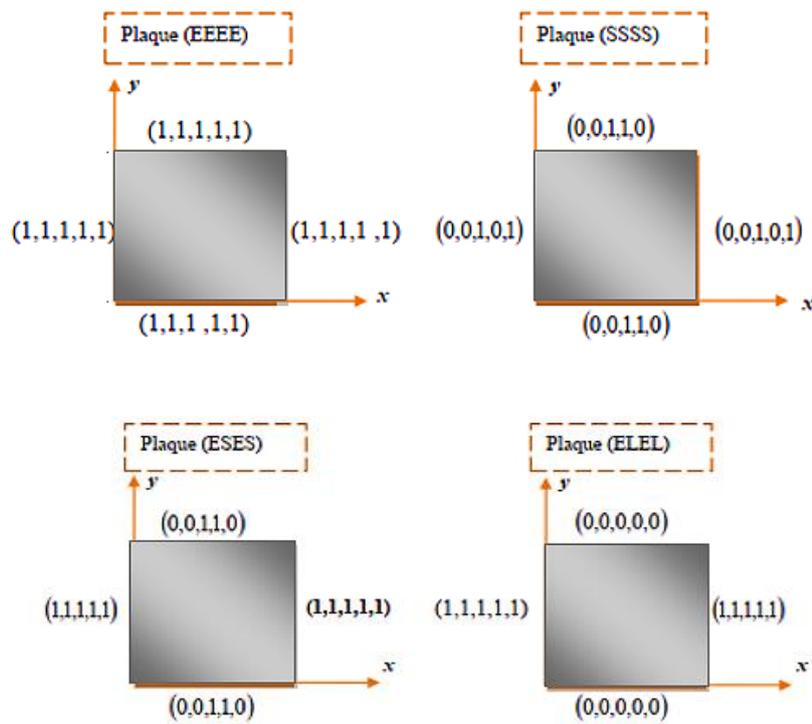


Figure IV. 4 : Conditions aux limites.[39]

IV.8.1 Plaque isotrope simplement appuyée (SSSS) :

La première structure test est une plaque carrée, chargée par une charge répartie de 1MPa, dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont regroupées au (tableau IV.1) :

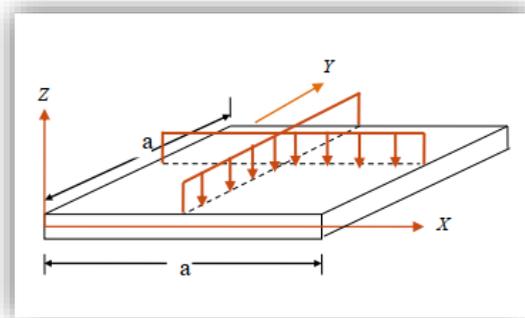


Figure IV. 5 : Plaque carrée isotrope simplement appuyée sous chargement uniformément répartie.[39]

Tableau IV. 1: Propriétés géométriques et mécaniques de la première plaque test.

E	ν	G	ρ	$a = b$	a / h
10.920	0.3	4,2	1	1	0.1

Les valeurs des fréquences propres sont normalisées par la relation suivante :

$$\bar{w} = w \frac{D}{pa^4}$$

Où la rigidité en flexion D est prise comme :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

La convergence du déplacement obtenu est regroupée dans le **tableau (IV. 3)** et tracée sous forme de graphe (**Figure IV.8**)

Tableau IV. 2 : La flèche maximale d'une plaque isotrope simplement appuyée.

Maillage Références	La flèche maximale \bar{w}	Erreur (%)
Présent élément (2*2)	0.0041227	-0.034496
Présent élément (4*4)	0.0040653	-0.047939
Présent élément (6*6)	0.0040629	-0.048501
Présent élément (8*8)	0.0040625	-0.048594
Présent élément (10*10)	0.004024	-0.0576112
Analytique [39]	0.004270	

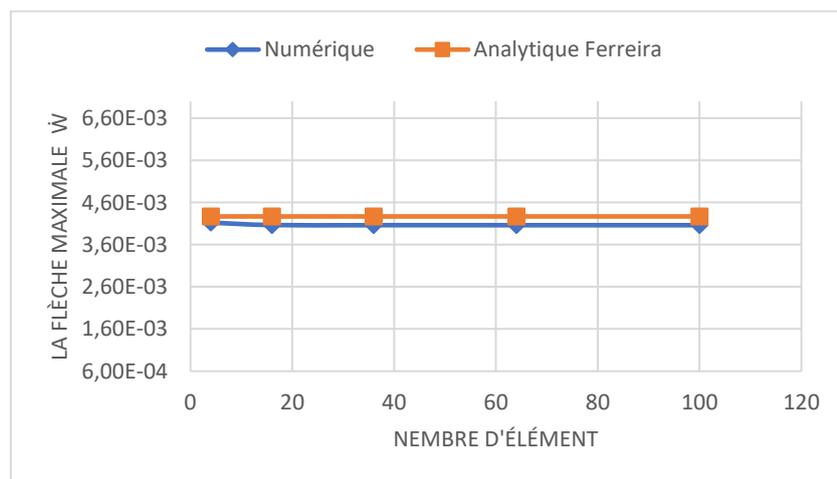


Figure IV.6 : Convergence de la flèche maximale d'une plaque isotrope simplement appuyée (SSSS), en fonction de nombre des éléments.

A travers les résultats trouvés nous observons un très bon accord entre les valeurs de flèche calculées par le programme (numériques) et analytique à partir d'un maillage (10*10), et une erreur de -0.05%.

IV.8.2 Plaque composite simplement appuyée sur tout le pourtour :

Dans cet exemple, la structure test est **une plaque composite stratifiée**, qui a un rapport de $a/h = 100$ comme épaisseur et **charge uniforme $q=1$ MPa**, dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont regroupées au (tableau III.5). Ces propriétés ont été choisies pour être identiques à celles utilisées dans l'article [27]

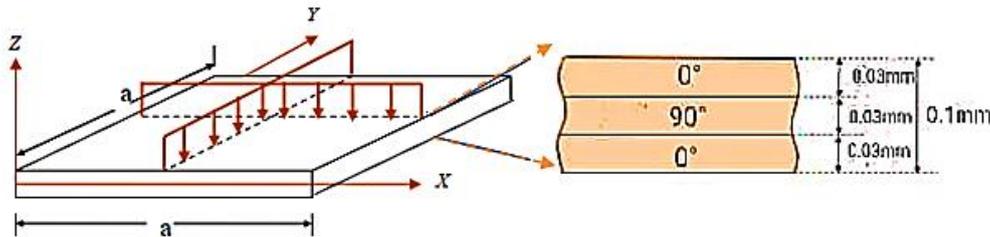


Figure IV. 7: Plaque composite stratifiée [0°/90°/0°].

Tableau IV. 3 : Propriétés géométriques et mécaniques de la première plaque test.

$E_1(GPa)$	$E_2(GPa)$	$G_{12} = G_{13}(GPa)$	$G_{23}(GPa)$	$\nu_{12} = \nu_{13}$	$a = b$	Stratification
174.6	7	3.5	1.4	0.25	10	[0°/90°/0°]

Les valeurs de déplacement sont normalisées par la relation suivante :

$$\bar{w} = \frac{wE_2h^3}{q_0a^4} \times 10^2$$

Tableau IV. 4: La flèche maximale d'une plaque stratifiée (0°/90°/0°) simplement appuyé.

Maillage Références	La flèche maximale \bar{w}	Erreur (%)
Présent élément (2*2)	0.679014	1.2697 ^E -2
Présent élément (4*4)	0.667807	-4.0164 ^E -3
Présent élément (6*6)	0.667604	-4.31916 ^E -3
Présent élément (8*8)	0.667583	-4.36092 ^E -3
Présent élément (10*10)	0.667576	-4.36092 ^E -3
Analytique (REDDY, 1997.) [27]	0.6705	

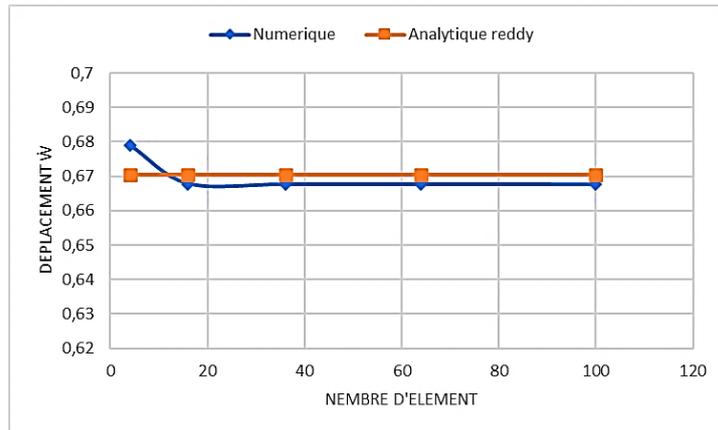


Figure IV. 8 : Convergence du déplacement pour une plaque stratifiée (0°/90°/0°) simplement appuyé (SSSS).

Tableau IV. 5: La flèche maximale d'une plaque stratifiée (0°/90°/0°) Encastree appuyé (EEEE).

Maillage Références	La flèche maximale \bar{w}	Erreur (%)
Présent élément (2*2)	2241.7	0.10777
Présent élément (4*4)	1962.9	-0.033041
Présent élément (6*6)	1962.8	-0.030090
Présent élément (8*8)	1962.8	-0.030090
Présent élément (10*10)	1962.9	-0.033041
Analytique	2023.694	

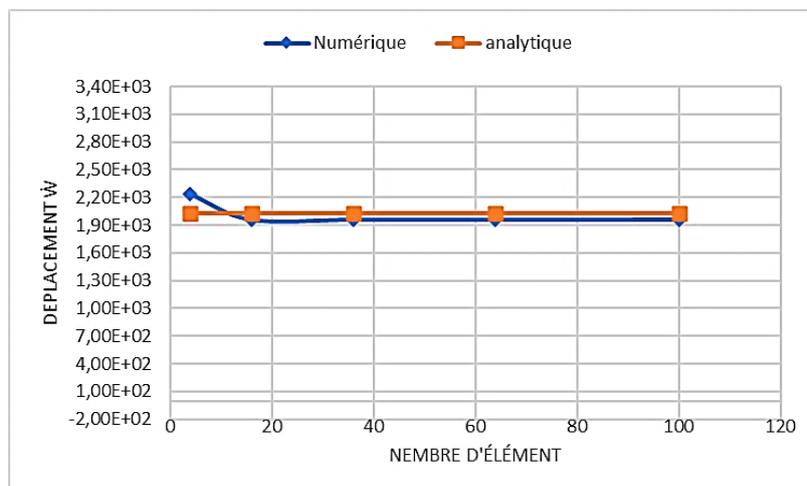


Figure IV. 9: Convergence pour une plaque stratifiée (0°/90°/0°) Encastree appuyé (EEEE).

➤ **Interprétation des résultats :**

Les figures (IV. 9) et (IV. 10) montrent la convergence de la flèche d'une plaque stratifiée constituée de 3 couches ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) simplement appuyée et encastrée respectivement.

D'après les résultats des flèches obtenues on remarque que : Les résultats convergent vers le résultat analytique.

IV.8.3 Plaque composite stratifiée ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$) sous une charge hygrothermique :

Dans cet exemple, on considère une plaque stratifiée croisé symétrique constitué (figure IV. 12) de 3 couches unidirectionnelles de 1 mm d'épaisseur et simplement appuyée 2 cotés, avec une stratification.

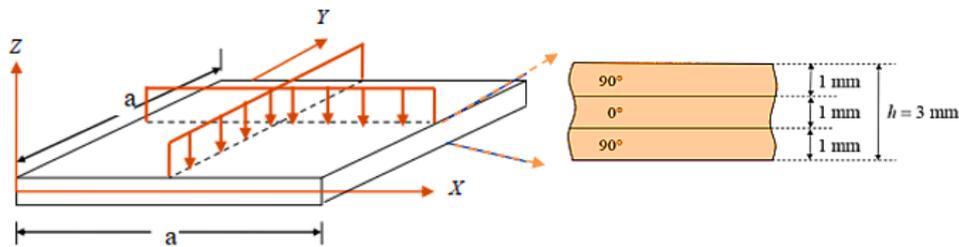


Figure IV. 10: Plaque composite stratifiée [$90^\circ/0^\circ/90^\circ$].

Tableau IV.3 : Propriétés géométriques et mécaniques d'une plaque stratifiée.

E_L	E_T	G_{LT}	ν_{LT}	$a = b$	α_L	α_T	β_L	β_T	ΔH
45	10	4.5	0.31	10	5×10^{-6}	20×10^{-6}	0	0.6	1

La polymérisation du stratifié a été effectuée à une température de 120 °C. Nous voulons déterminer les contraintes résiduelles à la température d'utilisation de 20 °C.

Tableau IV. 6 : Comparaison des efforts obtenus numériquement et analytiquement pour une charge thermique.

Maillage 10*10	Effort N_x^*	Effort N_x^*	Erreur (%)
Présent élément	733.7	806.7	0
Analytique (Berthelot J) [41]	733.7	806.7	0

Tableau IV.7: Comparaison des efforts obtenus numériquement et analytiquement pour une plaque dans un milieu humide.

Maillage 10*10	Effort N_x^*	Effort N_y^0	Erreur (%)
Présent élément	14.162	9.932	0
Analytique	14.162	9.932	0

D'après les résultats donnés par l'étude théorique des forces et des résultats obtenus par notre élément dans le cas d'une charge thermique et de l'humidité, on peut constater que les résultats sont tout à fait identiques.

IV.8.4 Plaque composite stratifiées simplement sur deux côtés :

La structure test est une plaque composite stratifiée simplement sur les deux côtés. Le nombre des couches dans cette plaque est 6 couches. L'épaisseur de chaque couche est 0.1mm. Les dimensions et les propriétés mécaniques sont regroupées au (tableau V.9).

Tableau IV.8: Propriétés géométriques et mécaniques de la poutre test.

$E_1(MPa)$	$E_2(MPa)$	$G_{12}(MPa)$	ν_{12}	$a = b$	h	α_1	α_2
141000	9340	4500	0.35	10	0.6	1^{E-6}	3.5^{E-5}
$X_t(MPa)$	$Y_t(MPa)$	$X_c(MPa)$	$Y_c(MPa)$	$S(MPa)$	β_1	β_2	L'orientation des fibres
1500	180	1000	2400	150	1^{E-2}	3.8^{E-1}	$[0^\circ/90^\circ / 0^\circ]_s$

Dans cet **exemple (1)**, notre plaque soumise à une température varie de 100 à 502 et une humidité fixée 0.02. A travers ce test, nous souhaitons de déterminer la température maximale que peut cette plaque supportée.

Pour un maillage de 10x10, les résultats numériques obtenus sont regroupés dans les tableaux (IV-9et IV-10).

- Pour une température $\Delta T = 100^\circ$ et humidité $\Delta H = 0.02$.

Tableau IV. 9 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche.

Température	Humidité	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de rupture	Coeff.de rupture (Analytique)	Rupture ?	
						Oui	Non
100	0.02	0°	TOP 1	2.6838	2.684		X
			BOT 1	2.6838	2.684		X
		90°	TOP 2	2.2619	2.262		X
			BOT 2	2.2619	2.262		X
		0°	TOP 3	2.6838	2.684		X
			BOT 3	2.6838	2.684		X
		0°	TOP 4	2.6838	2.684		X
			BOT 4	2.6838	2.684		X
		90°	TOP 5	2.2619	2.262		X
			BOT 5	2.2619	2.262		X
		0°	TOP 6	2.6838	2.684		X
			BOT 6	2.6838	2.684		X

• Pour une température $\Delta T=502^\circ$ et humidité $\Delta H=0.02$.

Tableau IV. 10 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche.

Température	Humidité	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de rupture	Coeff.de rupture (Analytique)	Rupture ?	
						Oui	Non
502	0.02	0°	TOP 1	1.1846	1.185		X
			BOT 1	1.1846	1.185		X
		90°	TOP 2	0.9984	0.998	X	
			BOT 2	0.9984	0.998	X	
		0°	TOP 3	1.1846	1.185		X
			BOT 3	1.1846	1.185		X
		0°	TOP 4	1.1846	1.185		X
			BOT 4	1.1846	1.185		X
		90°	TOP 5	0.9984	0.998	X	
			BOT 5	0.9984	0.998	X	

		0°	TOP 6	1.1846	1.185		X
			BOT 6	1.1846	1.185		X

Dans cet **exemple (2)**, notre plaque soumise à une humidité varie de 0.01 à 0.057 et une température fixée 100°. A travers ce test, nous souhaitons de déterminer la valeur maximale d'humidité que peut cette plaque supportée.

Pour un maillage de 10*10, les résultats numériques obtenus sont regroupés dans les tableaux (IV-11 et IV-12)

- Pour une température $\Delta T=100^\circ$ et humidité $\Delta H=0.01$.

Tableau IV. 11 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche.

Température	Humidité	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de rupture	Coeff.de rupture (Analytique)	Rupture ?	
						Oui	Non
100°	0.01	0°	TOP 1	4.0824	4.082		X
			BOT 1	4.0824	4.082		X
		90°	TOP 2	3.4406	3.441		X
			BOT 2	3.4406	3.441		X
		0°	TOP 3	4.0824	4.082		X
			BOT 3	4.0824	4.082		X
		0°	TOP 4	4.0824	4.082		X
			BOT 4	4.0824	4.082		X
		90°	TOP 5	3.4406	3.441		X
			BOT 5	3.4406	3.441		X
		0°	TOP 6	4.0824	4.082		X
			BOT 6	4.0824	4.082		X

- Pour une température $\Delta T=100^\circ$ et humidité $\Delta H=0.057$.

Tableau IV. 12 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche.

Température	Humidité	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de rupture	Coeff.de rupture (Analytique)	Rupture ?	
						Oui	Non
100°	0.057	0°	TOP 1	1.1836	1.184		X
			BOT 1	1.1836	1.184		X
		90°	TOP 2	0.9975	0.997	X	
			BOT 2	0.9975	0.997	X	
		0°	TOP 3	1.1836	1.184		X
			BOT 3	1.1836	1.184		X
		0°	TOP 4	1.1836	1.184		X
			BOT 4	1.1836	1.184		X
		90°	TOP 5	0.9975	0.997	X	
			BOT 5	0.9975	0.997	X	
		0°	TOP 6	1.1836	1.184		X
			BOT 6	1.1836	1.184		X

➤ Interprétation des résultats :

- D'une manière générale, lorsque nous augmentons l'humidité ou la température, il y a une diminution du coefficient de rupture.
- Dans tous les cas, la couche endommagée est 90°.

IV.7 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons présenté l'élément fini utilisé dans le calcul déplacements, les efforts et charges de ruptures pour des plaques isotropes et stratifiées. Notre étude porte sur la validation des résultats obtenus numériquement et les comparer avec ceux obtenus analytiquement pour des plaques avec différents conditions aux limites, en traçant des courbes pour faciliter l'interprétation et la comparaison avec les résultats analytiques.

Chapitre V : Etude Paramétrique

V.1 Introduction :

D'abord, après avoir s'être assuré du bon fonctionnement de notre programme, nous allons maintenant exploiter ce dernier pour analyser numériquement l'influence de stratification des couches sur les charges de ruptures.

Afin d'évaluer l'effet de la température et de l'humidité sur la rupture des plaques stratifiées, on propose de procéder à une étude paramétrique, qui a comme objectif de déterminer les valeurs maximales de la température et de l'humidité et les zones des points d'endommagement.

V.2 Effet de la température et de l'humidité sur l'endommagement des plaques :

La structure test est une plaque composite stratifiée encadrée sur les deux côtés. Le nombre des couches dans cette plaque est 3 couches. L'épaisseur de chaque couche est 0.1 mm. Les dimensions et les propriétés mécaniques sont regroupées au (tableau V.1).

Tableau V. 1: Propriétés géométriques et mécaniques de la plaque stratifiée.

$E_1(MPa)$	$E_2(MPa)$	$G_{12}(MPa)$	ν_{12}	$a = b$	h	α_1	α_2
141000	9340	4500	0.35	10	0.3	1×10^{-6}	3.5×10^{-5}
$X_t(MPa)$	$Y_t(MPa)$	$X_c(MPa)$	$Y_c(MPa)$	$S(MPa)$	β_1	β_2	L'orientation des fibres
1500	180	1000	2400	150	1×10^{-2}	3.8×10^{-1}	[0°/90°/0°]

✚ Dans exemple 01, notre plaque soumise à une humidité varie de 0.02 à 0.07 et une température varie de 50° à 150°. Dans chaque cas, nous allons fixer la température et changer la valeur de l'humidité afin de déterminer la valeur d'humidité critique et la température correspondante. Travers ce test, nous souhaitons aussi de déterminer les points d'endommagement et la couche endommagée.

Pour un maillage de 10x10, les résultats obtenus sont regroupés dans les tableaux (V-II, VIII et V-IV)

• Pour T=50° :

Tableau V. 2 : Coefficients de ruptures pour une plaque composite [0°/90°/0°] pour une température 50°.

Température	Humidité	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de rupture	Rupture ?	
					Oui	Non
50°	0.02	0°	TOP 1	3.1852		X
			BOT 1	3.1852		X
		90°	TOP 2	2.6844		X
			BOT 2	2.6844		X
		0°	TOP 3	3.1852		X
			BOT 3	3.1852		X
	0.03	0°	TOP 1	2.2645		X
			BOT 1	2.2645		X
		90°	TOP 2	1.9084		X
			BOT 2	1.9084		X
		0°	TOP 3	2.2645		X
			BOT 3	2.2645		X
	0.04	0°	TOP 1	1.7567		X
			BOT 1	1.7567		X
		90°	TOP 2	1.4805		X
			BOT 2	1.4805		X
		0°	TOP 3	1.7567		X
			BOT 3	1.7567		X
	0.05	0°	TOP 1	1.4349		X
			BOT 1	1.4349		X
		90°	TOP 2	1.2093		X
			BOT 2	1.2093		X
		0°	TOP 3	1.4349		X
			BOT 3	1.4349		X
	0.06	0°	TOP 1	1.2128		X
			BOT 1	1.2128		X
		90°	TOP 2	1.0221		X
			BOT 2	1.0221		X
		0°	TOP 3	1.2128		X
			BOT 3	1.2128		X
0.062	0°	TOP 1	1.1764		X	
		BOT 1	1.1764		X	
	90°	TOP 2	0.9914	X		
		BOT 2	0.9914	X		
	0°	TOP 3	1.1764		X	
		BOT 3	1.1764		X	

• POUR T=100 :

Tableau V. 3: Coefficients de ruptures pour une plaque composite [0°/90°/0°] pour une température 100°.

Température	Humidité	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de rupture	Rupture ?	
					Oui	Non
100°	0.02	0°	TOP 1	2.6838		X
			BOT 1	2.6838		X
		90°	TOP 2	2.2619		X
			BOT 2	2.2619		X
		0°	TOP 3	2.6838		X
			BOT 3	2.6838		X
	0.03	0°	TOP 1	1.9990		X
			BOT 1	1.9990		X
		90°	TOP 2	1.6847		X
			BOT 2	1.6847		X
		0°	TOP 3	1.9990		X
			BOT 3	1.9990		X
	0.04	0°	TOP 1	1.5926		X
			BOT 1	1.5926		X
		90°	TOP 2	1.3422		X
			BOT 2	1.3422		X
		0°	TOP 3	1.5926		X
			BOT 3	1.5926		X
	0.05	0°	TOP 1	1.3235		X
			BOT 1	1.3235		X
		90°	TOP 2	1.1154		X
			BOT 2	1.1154		X
		0°	TOP 3	1.3235		X
			BOT 3	1.3235		X
	0.06	0°	TOP 1	1.1836		X
			BOT 1	1.1836		X
		90°	TOP 2	0.9975	X	
			BOT 2	0.9975	X	
		0°	TOP 3	1.1836		X
			BOT 3	1.1836		X

•POUR T=150 :

Tableau V. 4:Coefficients de ruptures pour une plaque composite [0°/90°/0°] pour une température 150°.

Température	Humidité	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de rupture	Rupture ?		
					Oui	Non	
150°	0.02	0°	TOP 1	2.3188		X	
			BOT 1	2.3188		X	
		90°	TOP 2	1.9542		X	
			BOT 2	1.9542		X	
		0°	TOP 3	2.3188		X	
			BOT 3	2.3188		X	
	0.03	0°	TOP 1	1.7892		X	
			BOT 1	1.7892		X	
		90°	TOP 2	1.5079		X	
			BOT 2	1.5079		X	
		0°	TOP 3	1.7892		X	
			BOT 3	1.7892		X	
	0.04	0°	TOP 1	1.4566		X	
			BOT 1	1.4566		X	
		90°	TOP 2	1.2275		X	
			BOT 2	1.2275		X	
		0°	TOP 3	1.4566		X	
			BOT 3	1.4566		X	
			0°	TOP 1	1.2282		X

	0.05	90°	BOT 1	1.2282		X
			TOP 2	1.0351		X
			BOT 2	1.0351		X
		0°	TOP 3	1.2282		X
			BOT 3	1.2282		X
			0°	TOP 1	1.1730	
	0.053	90°	BOT 1	1.1730		X
			TOP 2	0.9886	X	
			BOT 2	0.9886	X	
		0°	TOP 3	1.1730		X
			BOT 3	1.1730		X

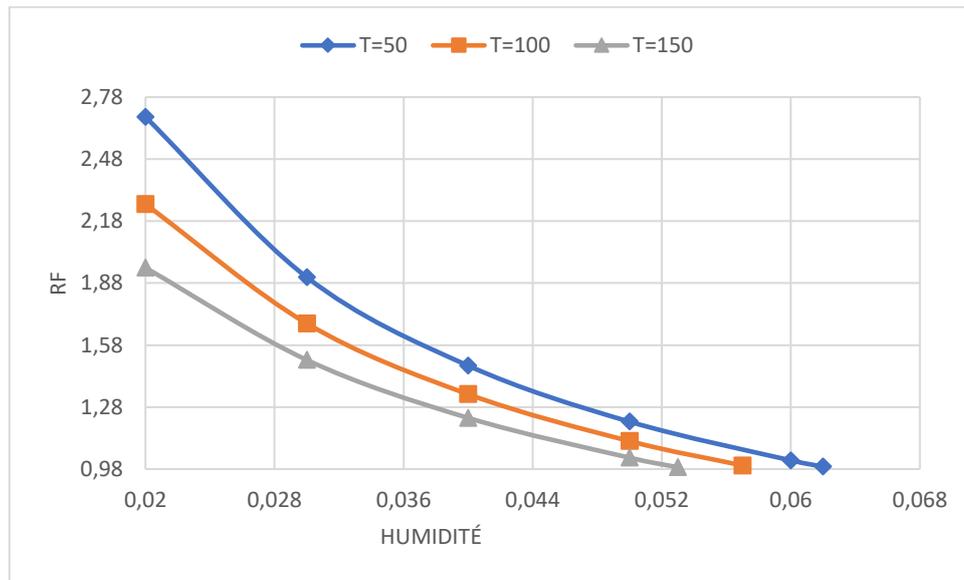


Figure V. 1: Variation du coefficient de rupture en fonction de l’humidité pour une plaque stratifiée.

➤ **Interprétation des résultats :**

D’après Les tableaux (V.2, V.3 et V.4) et les la figure (V.1) on remarque que :

- D’une manière générale, lorsque nous augmentons l’humidité, il y a une diminution du coefficient de rupture.
- Plus nous augmentons la valeur de la température, le coefficient de rupture diminue rapidement.
- Dans tous les cas, la couche endommagée est 90°.

✚ Dans exemple 02, notre plaque soumise à une température varie de 50 à 40 et une humidité varie de 0.03 à 0.05. Dans chaque cas, nous allons fixer l’humidité et changé la valeur de la température afin de déterminer la température critique et l’humidité

correspondante. A travers ce test, nous souhaitons aussi de déterminer les points d'endommagement et la couche endommagée.

Pour un maillage de 10x10, les résultats obtenus sont regroupés dans les tableaux (V.5, V.6 et V.7).

•Pour H=0.03 :

Tableau V. 5: Coefficients de ruptures pour une plaque composite [0°/90°/0°] pour une humidité de 0.03.

Humidité	Température	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de rupture	Rupture ?	
					Oui	Non
0.03	50	0°	TOP 1	2.2645		X
			BOT 1	2.2645		X
		90°	TOP 2	1.9084		X
			BOT 2	1.9084		X
		0°	TOP 3	2.2645		X
			BOT 3	2.2645		X
	100	0°	TOP 1	1.9990		X
			BOT 1	1.9990		X
		90°	TOP 2	1.6847		X
			BOT 2	1.6847		X
		0°	TOP 3	1.9990		X
			BOT 3	1.9990		X
	150	0°	TOP 1	1.7892		X
			BOT 1	1.7892		X
		90°	TOP 2	1.5079		X
			BOT 2	1.5079		X
		0°	TOP 3	1.7892		X
			BOT 3	1.7892		X
	200	0°	TOP 1	1.6193		X
			BOT 1	1.6193		X
		90°	TOP 2	1.3647		X
			BOT 2	1.3647		X
		0°	TOP 3	1.6193		X
			BOT 3	1.6193		X
	250	0°	TOP 1	1.4788		X
			BOT 1	1.4788		X
		90°	TOP 2	1.2463		X
			BOT 2	1.2463		X
		0°	TOP 3	1.4788		X
			BOT 3	1.4788		X
	300°	0°	TOP 1	1.3608		X
			BOT 1	1.3608		X
		90°	TOP 2	1.1469		X
			BOT 2	1.1469		X
		0°	TOP 3	1.3608		X
			BOT 3	1.3608		X
393°	0°	TOP 1	1.1849		X	
		BOT 1	1.1849		X	
	90°	TOP 2	0.9986	X		
		BOT 2	0.9986	X		
	0°	TOP 3	1.1849		X	
		BOT 3	1.1849		X	

•Pour H=0.04 :

Tableau V. 6: Coefficients de ruptures pour une plaque composite [0°/90°/0°] pour une humidité de 0.04.

Humidité	Température	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de rupture	Rupture ?	
					Oui	Non
0.04	50	0°	TOP 1	1.7567		X
			BOT 1	1.7567		X
		90°	TOP 2	1.4805		X
			BOT 2	1.4805		X
		0°	TOP 3	1.7567		X
			BOT 3	1.7567		X
	100	0°	TOP 1	1.5926		X
			BOT 1	1.5926		X
		90°	TOP 2	1.3422		X
			BOT 2	1.3422		X
		0°	TOP 3	1.5926		X
			BOT 3	1.5926		X
	150	0°	TOP 1	1.4566		X
			BOT 1	1.4566		X
		90°	TOP 2	1.2275		X
			BOT 2	1.2275		X
		0°	TOP 3	1.4566		X
			BOT 3	1.4566		X
	200	0°	TOP 1	1.3419		X
			BOT 1	1.3419		X
		90°	TOP 2	1.1309		X
			BOT 2	1.1309		X
		0°	TOP 3	1.3419		X
			BOT 3	1.3419		X
	250	0°	TOP 1	1.2440		X
			BOT 1	1.2440		X
		90°	TOP 2	1.0484		X
			BOT 2	1.0484		X
		0°	TOP 3	1.2440		X
			BOT 3	1.2440		X
	284	0°	TOP 1	1.1852		X
			BOT 1	1.1852		X
90°		TOP 2	0.9989	X	X	
		BOT 2	0.9989	X	X	
0°		TOP 3	1.1852		X	
		BOT 3	1.1852		X	

•POUR H=0.05 :

Tableau V. 7: Les coefficients de ruptures pour une plaque composite [0°/90°/0°] pour une humidité de 0.05.

Humidité	Température	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de rupture	Rupture ?	
					Oui	Non
0.05	50	0°	TOP 1	1.4349		X
			BOT 1	1.4349		X
		90°	TOP 2	1.2093		X
			BOT 2	1.2093		X
		0°	TOP 3	1.4349		X
			BOT 3	1.4349		X
	100	0°	TOP 1	1.3235		X
			BOT 1	1.3235		X
		90°	TOP 2	1.1154		X
			BOT 2	1.1154		X
		0°	TOP 3	1.3235		X
			BOT 3	1.3235		X
	150	0°	TOP 1	1.2282		X
			BOT 1	1.2282		X
		90°	TOP 2	1.0351		X
			BOT 2	1.0351		X
		0°	TOP 3	1.2282		X
			BOT 3	1.2282		X
	175	0°	TOP 1	1.185		X
			BOT 1	1.185		X
		90°	TOP 2	0.9999	X	
			BOT 2	0.9999	X	
		0°	TOP 3	1.185		X
			BOT 3	1.185		X

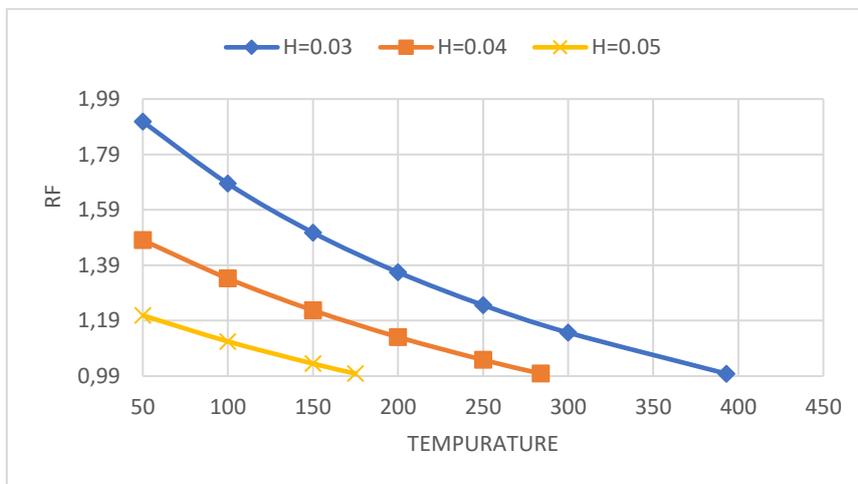


Figure V. 2: Variation du coefficient de rupture en fonction de la température et humidité pour une plaque stratifiée.

➤ **Interprétation des résultats :**

D’après Les tableaux (V.5, V.6 et V.7) et les figures (V.2) on remarque que :

- D’une manière générale, lorsque nous augmentons la température, il y a une diminution du coefficient de rupture.
- Plus nous augmentons la valeur de l’humidité, le coefficient de rupture diminue rapidement.

- Dans tous les cas, la couche endommagée est 90°.

V.3 L’effet du rapport coefficient dilatation et humidité sur l’endommagement des plaques :

Dans cette section, nous allons montrer l’effet du rapport des coefficients de dilatation sur l’endommagement des plaques en présence de l’humidité et la température. Donc, nous utiliserons les mêmes propriétés géométriques et mécaniques présentées au (tableau IV.1).

- Dans le premier exemple, nous allons changer les valeurs du coefficient de dilatation de 0.0286 à 0.00285 pour des valeurs constantes de la température et de l’humidité.

•Pour T=50 et H= 0.02 :

Tableau V. 8: Coefficients de ruptures pour une plaque composite [0°/90°/0°] pour T=50° et H=0.02.

Température	Humidité	α_1/α_2	L’orientation des fibres	Couche	Coeff.de rupture	Rupture ?	
						Oui	Non
50°	0.02	0.0263	0°	TOP 1	3.1852		X
				BOT 1	3.1852		X
			90°	TOP 2	2.6844		X
				BOT 2	2.6844		X
			0°	TOP 3	3.1852		X
				BOT 3	3.1852		X
		0.01	0°	TOP 1	2.3470		X
				BOT 1	2.3470		X
			90°	TOP 2	1.9780		X
				BOT 2	1.9780		X
			0°	TOP 3	2.3470		X
				BOT 3	2.3470		X
		0.005	0°	TOP 1	1.6706		X
				BOT 1	1.6706		X
			90°	TOP 2	1.4080		X
				BOT 2	1.4080		X
			0°	TOP 3	1.6706		X
				BOT 3	1.6706		X
		0.00333	0°	TOP 1	1.2969		X
				BOT 1	1.2969		X
			90°	TOP 2	1.0930		X
				BOT 2	1.0930		X
			0°	TOP 3	1.2969		X
				BOT 3	1.2969		X
0.00285	0°	TOP 1	1.1664		X		
		BOT 1	1.1664		X		
	90°	TOP 2	0.9830	X			
		BOT 2	0.9830	X			
	0°	TOP 3	1.1664		X		
		BOT 3	1.1664		X		

•Pour T=100 et H= 0.02 :

Tableau V. 9: Coefficients de ruptures pour une plaque composite [0°/90°/0°] pour T=100° et H=0.02.

Température	Humidité	$\alpha 1/\alpha 2$	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de ruinture	Rupture ?	
						Oui	Non
100°	0.02	0.0286	0°	TOP 1	2.6838		X
				BOT 1	2.6838		X
			90°	TOP 2	2.2619		X
				BOT 2	2.2619		X
			0°	TOP 3	2.6838		X
				BOT 3	2.6838		X
		0.01	0°	TOP 1	1.6755		X
				BOT 1	1.6755		X
			90°	TOP 2	1.4120		X
				BOT 2	1.4120		X
			0°	TOP 3	1.6755		X
				BOT 3	1.6755		X
		0.00555	0°	TOP 1	1.1457		X
				BOT 1	1.1457		X
			90°	TOP 2	0.9655	X	
				BOT 2	0.9655	X	
			0°	TOP 3	1.1457		X
				BOT 3	1.1457		X

•Pour T=150 et H= 0.02 .:

Tableau V. 10: Coefficients de ruptures pour une plaque composite [0°/90°/0°] pour T=100°et H=0.02.

Température	Humidité	$\alpha 1/\alpha 2$	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de ruinture	Rupture ?	
						Oui	Non
150°	0.02	0.0286	0°	TOP 1	2.3188		X
				BOT 1	2.3188		X
			90°	TOP 2	1.9542		X
				BOT 2	1.9542		X
			0°	TOP 3	2.3188		X
				BOT 3	2.3188		X
		0.01	0°	TOP 1	1.3027		X
				BOT 1	1.3027		X
			90°	TOP 2	1.0979		X
				BOT 2	1.0979		X
			0°	TOP 3	1.3027		X
				BOT 3	1.3027		X
		0.007143	0°	TOP 1	1.0260		X
				BOT 1	1.0260		X
			90°	TOP 2	0.8647	X	
				BOT 2	0.8647	X	
			0°	TOP 3	1.0260		X
				BOT 3	1.0260		X

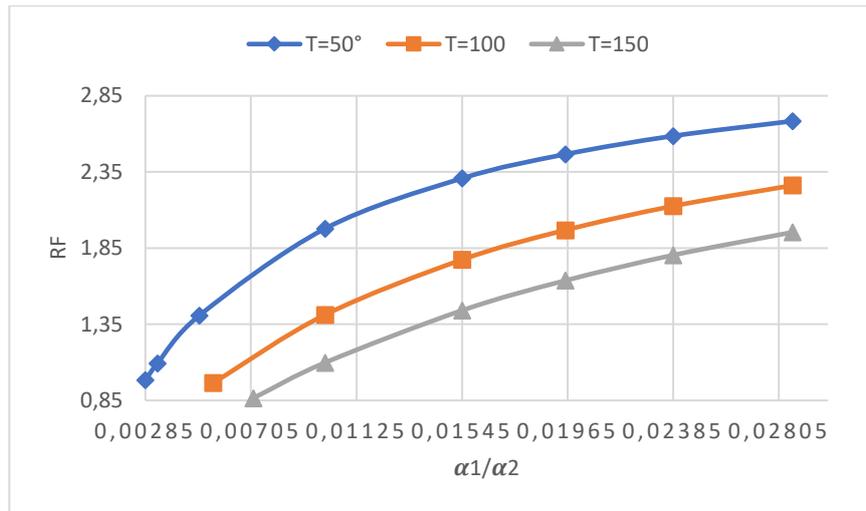


Figure V. 3: Variation du coefficient de rupture en fonction du rapport de coefficient de dilatation.

➤ **Interprétation des résultats :**

D’après les tableaux (V.8, V.9 et V.10) et la figure (V.3) on remarque que :

- D’une manière générale, lorsque la valeur du rapport α_1/α_2 augmente, il y a une augmentation du coefficient de rupture.
- Les plaques sont dans des situations de rupture pour des valeurs minimales de α_1/α_2 .
- Dans tous les cas, la couche endommagée est 90°.

✚ Dans le deuxième exemple, nous allons changer les valeurs du coefficient de l’humidité de 0.0263 à 0.00285 pour des valeurs constantes de la température et de l’humidité.

•Pour T=50 et H= 0.03 :

Tableau V. 11 : Coefficients de ruptures pour une plaque composite [0°/90°/0°] pour T=50° et H=0.03.

Température	Humidité	β_1/β_2	L’orientation des fibres	Couche	Coeff.de rupture	Rupture ?	
						Oui	Non
		0.0263	0°	TOP 1	3.1852		X
				BOT 1	3.1852		X
			90°	TOP 2	2.6844		X
				BOT 2	2.6844		X
			0°	TOP 3	3.1852		X
				BOT 3	3.1852		X
		0°	TOP 1	2.5205		X	
			BOT 1	2.5205		X	

50°	0.02	0.02	90°	TOP 2	2.1242		X
				BOT 2	2.1242		X
			0°	TOP 3	2.5205		X
				BOT 3	2.5205		X
		0.0143	0°	TOP 1	1.8700		X
				BOT 1	1.8700		X
			90°	TOP 2	1.5760		X
				BOT 2	1.5760		X
			0°	TOP 3	1.8700		X
				BOT 3	1.8700		X
		0.011	0°	TOP 1	1.4864		X
				BOT 1	1.4864		X
			90°	TOP 2	1.2527		X
				BOT 2	1.2527		X
		0°	TOP 3	1.4864		X	
			BOT 3	1.4864		X	
		0.0087	0°	TOP 1	1.1831		X
				BOT 1	1.1831		X
			90°	TOP 2	0.9971	X	
				BOT 2	0.9971	X	
0°	TOP 3		1.1831		X		
	BOT 3		1.1831		X		

•Pour T=50 et H= 0.02 :

Tableau V.1: Coefficients de ruptures pour une plaque composite [0°/90°/0°] pour T=50° et H=0.02.

Température	Humidité	β_1/β_2	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de rmeture	Rupture ?	
						Oui	Non
50°	0.03	0.0263	0°	TOP 1	2.2645		X
				BOT 1	2.2645		X
			90°	TOP 2	1.9084		X
				BOT 2	1.9084		X
			0°	TOP 3	2.2645		X
				BOT 3	2.2645		X
		0.02	0°	TOP 1	1.7674		X
				BOT 1	1.7674		X
			90°	TOP 2	1.4895		X
				BOT 2	1.4895		X
			0°	TOP 3	1.7674		X
				BOT 3	1.7674		X
		0.0143	0°	TOP 1	1.2940		X
				BOT 1	1.2940		X
			90°	TOP 2	1.0905		X
				BOT 2	1.0905		X
			0°	TOP 3	1.2940		X
				BOT 3	1.2940		X
		0.01299	0°	TOP 1	1.1831		X
				BOT 1	1.1831		X
			90°	TOP 2	0.9971	X	
				BOT 2	0.9971	X	
			0°	TOP 3	1.1831		X
				BOT 3	1.1831		X

•Pour T=50 et H= 0.04 :

Tableau V. 12: Coefficients de ruptures pour une plaque composite [0°/90°/0°] pour T=50° et H=0.04.

Température	Humidité	β_1/β_2	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de ruinture	Rupture ?	
						Oui	Non
50°	0.04	0.0263	0°	TOP 1	1.7567		X
				BOT 1	1.7567		X
			90°	TOP 2	1.4805		X
				BOT 2	1.4805		X
			0°	TOP 3	1.7567		X
				BOT 3	1.7567		X
		0.0172	0°	TOP 1	1.1831		X
				BOT 1	1.1831		X
			90°	TOP 2	0.9971		X
				BOT 2	0.9971		X
			0°	TOP 3	1.1831		X
				BOT 3	1.1831		X

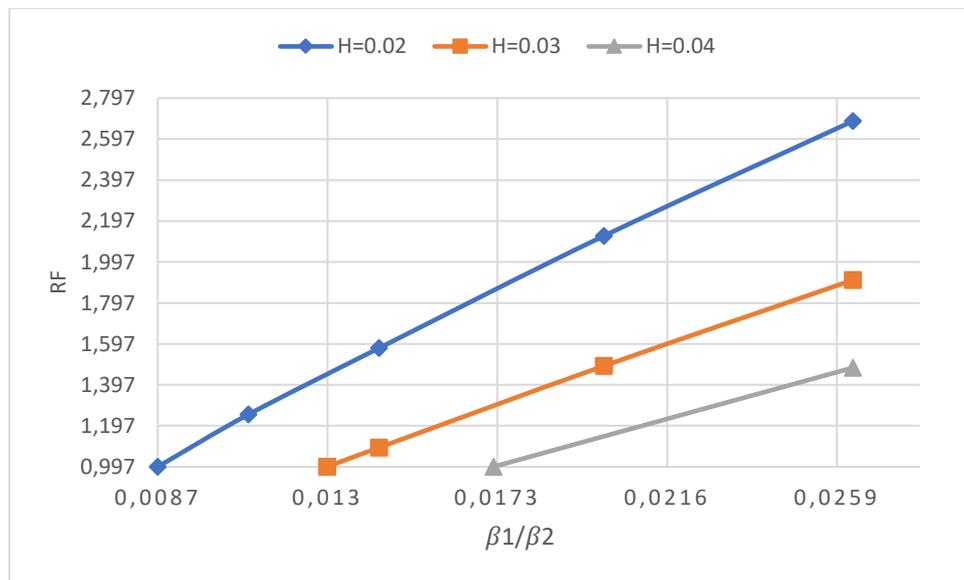


Figure V. 4 : Variation du coefficient de rupture en fonction du rapport de coefficient de l’humidité.

➤ **Interprétation des résultats :**

D’après Les tableaux (V.11, V.12 et V.13) et la figures (V.4) on remarque que :

- D’une manière générale, lorsque la valeur du rapport β_1/β_2 augmente, il y a une augmentation du coefficient de rupture.
- Les plaques sont dans des situations de rupture pour des valeurs minimales de β_1/β_2 .
- Dans tous les cas, la couche endommagée est 90°.

V.4L'effet du la charge membranaire sur l'endommagement des plaques :

Le quatrième structure test est une plaque composite stratifiée avec 3 couches, chargée par une charge membranaire $N_y=130 \text{ N/mm}^2$, une humidité $\Delta H = 0.04$ et une température $\Delta T = 35^\circ$, dont les dimensions et les propriétés mécaniques sont regroupées au (TableauV.1). Les résultats obtenus sont regroupés dans les tableaux V.13 et figure V. 5.

Tableau V. 13 : Variation du coefficient de rupture dans chaque couche.

Température	Humidité	Charge membranaire n_y	Charge membranaire n_x	L'orientation des fibres	Couche	Coeff.de rupture	Rupture ?	
							Oui	Non
35	0.04	130	0	0°	TOP 1	3.242		X
					BOT 1	14.31		X
				90°	TOP 2	0.637	X	
					BOT 2	0.637	X	
				0°	TOP 3	14.31		X
					BOT 3	14.31		X
			44	0°	TOP 1	3.115		X
					BOT 1	3.115		X
				90°	TOP 2	0.858	X	
					BOT 2	0.858	X	
				90°	TOP 3	3.115		X
					BOT 3	3.115		X
			88	0°	TOP 1	2.308		X
					BOT 1	2.308		X
				90°	TOP 2	0.891	X	
					BOT 2	0.891	X	
				90°	TOP 3	2.308		X
					BOT 3	2.308		X
			132	0°	TOP 1	1.798		X
					BOT 1	1.798		X
				90°	TOP 2	0.927	X	
					BOT 2	0.927	X	
				0°	TOP 3	1.798		X
					BOT 3	1.798		X
176	0°	TOP 1	1.462		X			
		BOT 1	1.462		X			
	90°	TOP 2	0.963	X				
		BOT 2	0.963	X				
	0°	TOP 3	1.462		X			
		BOT 3	1.462		X			
219	0°	TOP 1	1.233		X			
		BOT 1	1.233		X			
	90°	TOP 2	1.0	X				
		BOT 2	1.0	X				
	0°	TOP 3	1.233		X			
		BOT 3	1.233		X			

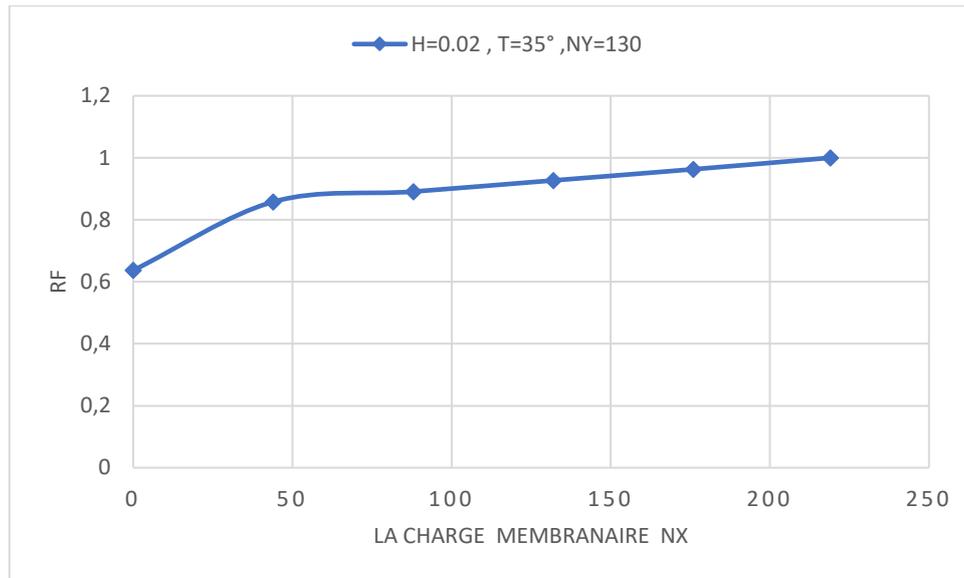


Figure V. 5 : Variation le coefficient de rupture en fonction de la Charge membranaire N_x pour une plaque stratifiée.

➤ **Interprétation des résultats :**

La plaque a été dans une situation de rupture, nous remarquons que si nous chargeons la plaque par des efforts membranaire N_x , les valeurs de coefficient de rupture augmentent. La plaque est dans une situation de sécurité pour $N_x=219$.

Conclusion Générale

Pour l'étude numériquement Effet de l'humidité et de la température sur l'endommagement des plaques en matériaux composites, nous avons présenté un élément fini rectangulaire à 4 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud. En Utilisant la théorie Classique des Stratifiés, Cette théorie ne prend pas en compte les distorsions causées par le cisaillement transverse.

Dans le cas des plaques anisotrope, on a constaté que le programme donne des bons résultats qui convergent mieux vers la solution analytique pour différents maillages. On va essayer de déterminer la température et l'humidité critique qui cause la rupture de ces plaques. D'autre part, plusieurs paramètres, tels que l'orientation des fibres et la stratification des couches.

L'étude paramétrique nous a permet de tirer les remarques suivantes :

- Pour une plaque stratifiée encadrée sur les deux côtés, lorsque nous augmentons l'humidité et température, il y a une diminution du coefficient de rupture.
 - Plus nous augmentons la valeur de la température et humidité, le coefficient de rupture diminue rapidement.
 - Dans tous les cas, la couche endommagée est 90°.
- D'une manière générale, lorsque la valeur du rapport α_1/α_2 ou β_1/β_2 . Augment, il y a une augmentation du coefficient de rupture.
 - Les plaques sont dans des situations de rupture pour des valeurs minimales de α_1/α_2 ou β_1/β_2 .
 - Dans tous les cas, la couche endommagée est 90°.
- Pour une plaque stratifiée encadrée sur toute côtés, si nous chargeons la plaque par des efforts membranaire N_x , les valeurs de coefficient de rupture augmentent. La plaque est dans une situation de sécurité pour $N_x=219$.

Références Bibliographiques

- [1] Gupta, Nikhil (2003). "CHARACTERIZATION OF SYNTACTIC FOAMS AND THEIR". Louisiana state university LSU Digital commons.
- [2] Daniel, I.M. and Ori Ishai, "**Engineering Mechanics of Composite Materials**", Word Université Press Inc, 1994.
- [3]ampcomposite (s.d.). doi: <https://www.amp-composite.com/le-composite/>
- [4]Berthelot J, M."**Matériaux composites: Comportement mécanique et analyse des structures**". 4^{ème} édition, 2010
- [5]Kallel Kamoun, I (1999). "**Analyse mécanique de l'essai de flexion par flambement post-critique**". Ecully, Ecole centrale de Lyon.
- [6] Gornet,Laurent (2011, may 19). "**Généralités sur les matériaux composites**". france, École Centrale de Nantes.
- [7] BOUZGOU,Ahmed Abdelatif (2014, 12 11). "**Étude Numérique de L'effet des Singularités Géométriques sur le Comportement t des Plaques**". Génie Civil.
- [8]**Glossaire Matériaux Composites, CARMA –Actualisation octobre 2006**
- [9]BREK, SAMIR, (2012, 06 21) "**Modélisation numérique de la propagation de l'endommagement et de la rupture dans les matériaux composites stratifiés sous sollicitations thermomécaniques et cycliques**".l'Université Hadj Lakhdar de Batna,GENIE MECANIQUE.
- [10] M. E. Arrakhiz, M. EL Achaby, A.C. Kakou, S. Vaudreuil , K. Benmoussa, R. Bouhfid, O. (2012)." **Processing and properties of sorghum stem fragment-polyethylene composites**". 379–383.
- [11] Faria, A (2010)."**Modélisation par éléments finis de plaques composites : contribution a l'étude de l'amortissement ,endommagement et prise en compte d'incertitudes**". Besançon, Universidade Federal de Uberlândia, france.
- [12] Aicha, Mme REMIL (2020, 06 22). "**Proposition d'une nouvelle cinématique des plaques pour l'étude de la réponse dynamique et statique des plaques composites**". UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES, GENIE CIVIL.
- [13]MANET,Vincent (1998, juillet 17). "**Méthodes d'analyse par éléments finis des contraintes aux interfaces dans les structures sandwich**". France.
- [14]BENAHMED, Abdelkrim (2018). "**Contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques composites en utilisant des théories d'ordre élevé avec un nombre**

réduit de variable". UNIVERSITE DJILLALI LIABES SIDI BEL ABBES, DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL.

[15] Kadda,NEDRI (2015, 11 4)." **Analyse de la vibration libre des plaques composites sur fondation élastique".** UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI BEL ABBES, GENIE CIVIL.

[16] HAMADI,Meryem (2015). "**Etude numérique du comportement dynamique des plaques multicouches".** Université Mohamed Khider – Biskra. Génie civil et Hydraulique.

[17] Batoz J.L, Dhatt G (1999)."**Modélisation des structures par éléments finis".** Volume 2,Poutres et Plaques, Hermes.

[18]CHAMMAH, Safaa (2020)."**L'effet de la température sur l'endommagement des poutres en matériaux composites".** Université Mohamed khider – Biskra, Génie civil et Hydraulique.

[19]NYE, J. F. (1969). "**Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices".** 4.ed. London: Oxford University Press.

[20]Dominique, Rouby (2005). "**introduction aux matériaux composites".** institut national des sciences appliquées de lyon .

[21] Daniel Gay,Suong V. Hoa, Stephen W. Tsai (2003)." **COMPOSITE MATERIALS DESIGN AND APPLICATIONS" .** CRC Press LLC.

[22] Ali, ine (2010). "**Modélisation d'une plaque rectangulaire en composite en variation linéaire d'épaisseur".** Université M'ohamed Bougara Boumerdes, Maintenance industrielle.

[23] CHORFI, SOFIANE (2010)." **ANALYSE DES PLAQUES ORTHOTROPES MINCES SOUS L'EFFET DES CONDITIONS EXTERIEURES".** UNIVERSITE MENTOURI CONSTANTINE, GENIE MECANIQUE.

[24]Elhoussine, ATIKI (2018). "**Vibration des plaques stratifiées en matériaux composite menues d'ouvertures rectangulaires centrales par la méthode des éléments finis".** Université Mohamed Khider de Biskra, Génie Civil et d'Hydraulique.

[25]Kaskas, saliha (2010, avril 29) "**Étude de Leffe du cisaillement transverse sur le comportement mécanique de poutres composites. Université mentouri constantine" .** sciences de l'ingénieur.

[26]ALBERT WILLIAN, FARIA (n.d.). "**Modélisation par éléments finis de plaques composite : contribution a l'étude de l'amortissement, endommagement et prise en compte d'incertitudes".** Université federal de uberalndia,engenharia mecanica.

[27]REDDY, J. N. (1997.) "**Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis".** 2.ed, CRC Press.

- [28]MENDONÇA,P (2005)." **Materiais composto and Estruturas-sanduiche :projeto Analyse**". 1.ed.Manole.
- [29]TAFLA, Achraf (2007). "**ELEMENTS FINIS MIXTES-HYBRIDES NATURELS SANS FACTEURS CORRECTIFS DU CISAILLEMENT POUR LES PLAQUES ET LES COQUES COMPOSITES MULTICOUCHES**". l'Université de Reims Champagne-Ardenne,Mécanique.
- [30]Kaw, K (2006)."**MEchANICS of Composite Materials**". CRC Press Taylor & Francis Group.
- [31]OUNIS, Houdayfa (2015, 11 18). "**Etude numérique par éléments finis de l'effet de la température sur la vibration et la stabilité des plaques stratifiées**". Université Mohamed Khider – Biskra,Génie mécanique.
- [32]Manel,Bennia (2020). "**Analyse numérique du comportement à la rupture en flexion des plaques stratifiées**". BISKRA, Génie civil et Hydraulique.
- [33]BAHLOULI, Nadia."**Cours Matériaux Composites / DESS Mécanique avancée et Stratégie industrielle**" ,IPST-ULP.120
- [34]Ferdous, BEZAOU (2020) " **Etude numérique de l'effet de la stratification des couches sur les mécanismes de rupture des poutres stratifiées**" , Matériaux en Génie Civil.
- [35]V. Reynaud, G. Subra, M. calderini ." **Les matériaux composites**", ENSCM, 1993
- [36]Tsai S.W. et Wu."**A General Theory of Strength for Anisotropic Materials. J.Compos.Mat**".5, 58-80, (1971)
- [37]SEBAA, Halima (2013). "**Analyse de la flexion des plaques stratifiées**". Université Mohamed kheider-Biskra, Génie Civil et Hydraulique
- [38]Julliard, RALIHALIZARA (2006). "**LA METHODE DES ELEMENTS FINIS SOUS MATLAB : Application au calcul des structures**". DEPARTEMENT BATIMENTS ET TRAVAUX PUBLICS, UNIVERSITE D'ANTANANARIVO ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE.
- [39]Ferreira, A. J (2009). "**Matlab codes for Finite Element analysis**". Portugal: Springer.
- [40]BENMESSAOUD, Yousra(2020). "**Etude numérique de l'effet du rapport d'épaisseur sur la flexion des plaques composites stratifiées**". Université Mohamed khider –Biskra, Génie civil.
- [41]Berthelot, Jean-Marie "**Mécanique des Mtériaux et structures composites**", ISMANS Institut des Matériaux et Mécaniques avances, le Mans, France.