

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed khider –Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie civil et d'Hydraulique
Référence :/2022



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم الهندسة المدنية و الري
المرجع/2022

Mémoire de Master

Filière: Génie civil

Spécialité: structure

Thème

Flambage mécanique des plaques FGM par la méthodes des éléments finis

Nom et Prénom de l'étudiant :
MERZOUG Amal

Encadreur : TATI Abdelouahab

Promotion: Juin 2022

Remerciements

En premier lieu, je remercie Dieu le tout –puissant qui nous a procuré la volonté, la force et la connaissance pour accomplir ce travail.

Je tiens à remercier Monsieur TATI Abdelouahab mon ancien encadreur dans l'ingénierie et mon directeur de recherche maintenant, pour son aide précieuse, ses conseils judicieux et son orientation.

Mes plus vifs remerciements vont aussi aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je souhaite également remercier chaleureusement la doctorante Amira et le doctorant ZERGIN Saleh pour ses informations

Je ne saurai oublier mes parents, ma sœur, mes amies, mes collègues pour leur soutien moral et leur précieuse aide.

Dédicace

Je dédie ce travail

A ma mère, pour son amour, ses encouragements, et ses sacrifices.

A mon père, pour son soutien, son affection et la confiance qu'il m'a accordé.

A la plus belle sœur de monde Selma que sa présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

A mon cher mari Mourad

A tous les membres de ma famille et mes chères amies

Et tous ceux qui m'aiment

Je vous dis merci

Sommaire

INTRODUCTION GÉNÉRALE 1

I : Etude bibliographique et généralité sur les matériaux FGM	
I.1. Introduction	4
I.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués	4
I.3. Historique du développement des matériaux à gradient de propriétés	7
I.4. Propriétés matérielles effectives des FGMs	10
I.4.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM (loi de puissance)	12
I.4.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM	13
I.4.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM	14
I.5. Conclusion	15
Chapitre II : Comportement des matériaux fonctionnellement gradués FGM	
II.1. Introduction	16
II.2. Comportement mécanique des plaques FGM selon la théorie de 1er ordre	16
II.2.1. Théorie classique des stratifiés CLT	16
II.2.2 Théorie de la déformation de cisaillement du 1er ordre (FSDT)	17
II.2.3 Théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT)	18
II.3. Caractéristiques mécaniques d'un pli	19
II.3.1. Module d'Young longitudinal E_1	19
II.3.2. Module d'Young transversal	21
II.3.3. Coefficient de poisson longitudinal	22
II.3.4. Module de cisaillement G_{12}	23
II.3.5. Loi de Hooke Généralisée	24
II.3.5.1 Etat de contraintes planes	26
II.3.5.2 Efforts résultants membranaires et flexionnels	27
II.3.6. Equation constitutive	29
II.4 Conclusion	31
Chapitre III : Présentation de l'élément fini utilisé	
III.1. Introduction	32
III.2. Domaines d'application	32

III.3. Formulation mathématique :.....	33
III.3.1. Champ de déplacement et cinématique	33
III.3.2. Relations constitutive.....	34
III.3.3. Les résultantes de la force et du moment.....	35
III.4. Formulation éléments finis	38
III.4.1 Relations. cinématiques.....	38
III.4.2. Dérivation de la matrice de rigidité élémentaire.....	40
III.5. Présentation du programme	41
III.5.2. Organigramme du programme	42
III.5.3. Description des « routines » du programme	44
III.6. Validation de l'élément fini dans l'analyse du flambage mécanique	44
III.7. CONCLUSION	47
VI. Validation et étude paramétrique	48
VI -1. Introduction :.....	48
VI.2. CONCLUSION.....	51

Résumé

Le présent travail consiste à étudier le comportement de plaques rectangulaires fonctionnellement graduées sous chargement mécanique à l'aide d'un élément fini à quatre nœuds basé sur une simple théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé développé par Tati (2021). Contrairement à d'autres théories de déformation par cisaillement d'ordre élevé qui utilisent un grand nombre d'inconnues, le présent élément n'a que cinq degrés de liberté par nœud. Le principe de l'énergie potentielle totale est utilisé pour dériver les matrices de rigidité et géométriques. De plus, la technique de déformation de cisaillement naturelle supposée est introduite pour élever tout phénomène de blocage de cisaillement. Le modèle proposé tient compte de la variation quadratique des contraintes de cisaillement transversales à travers l'épaisseur et satisfait les conditions aux limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, aucun facteur de correction de cisaillement n'est nécessaire. Des études de convergence et de comparaison ont montré la stabilité et la précision de l'élément fini actuel dans la prédiction de la charge de flambement critique des plaques fonctionnellement graduées de matériaux isotropes.

Mots clés : plaques fonctionnellement graduées, éléments finis, flambement mécanique

ملخص:

يهدف هذا العمل في التحقيق في سلوك الصفائح المستطيلة المترجة وظيفيًا تحت تأثير التحميل الميكانيكي، بواسطة عنصر رباعي العقد، بناءً على نظرية تشوه القص البسيطة عالية الترتيب التي طورها (Tati 2021)، على عكس نظريات تشوه القص عالية الترتيب الأخرى التي تستخدم عددًا كبيرًا من العناصر المجهولة، فإن هذا العنصر لديه خمس درجات فقط من الحرية لكل عقدة. يتم استخدام مبدأ الطاقة الكامنة الإجمالية لاشتقاق المصفوفات الهندسية والصلابة. بالإضافة إلى ذلك، تم إدخال تقنية تشوه القص الطبيعي المفترض لرفع أي ظواهر حجب القص. يأخذ النموذج المقترح في الاعتبار التباين التريبي لضغوط القص المستعرضة من خلال السماكة ويلبي الشروط الحدودية للتوتر الصفري على الأسطح العلوية والسفلية للوحة، لذلك لا حاجة إلى عامل تصحيح القص. أظهرت دراسات التقارب والمقارنة استقرار و دقة العنصر المحدود الحالي في التنبؤ بحمل الالتواء الحرج للألواح المترجة وظيفيًا للمواد المتماثلة.

الكلمات المفتاحية: الصفائح المترجة وظيفيًا، العناصر المنتهية، الانبعاج الميكانيكي

Liste des notations

C_{ij}	: Coefficients de la matrice de rigidité $[C]$
$[C]$: Matrice des complaisances ou des rigidités
E_i	: Module d'Young dans la direction i
h	: Epaisseur de la plaque
a	: Longueur de la plaque
b	: Largeur de la plaque
F_x, F_y	: les forces planes de bords.
G_{ij}	: Module de cisaillement
ν_{ij}	: Coefficient de poisson
ε_i	: Déformation relative dans la direction i
σ_i	: Contrainte dans la direction i
θ	: Angle d'orientation des fibres
C_{ijkl}	: Tenseur de rigidités
Q_{ij}	: Tenseur de rigidité de plaque
S_{ij}	: Les constantes de souplesse.
Q_x, Q_y	: Forces de cisaillement respectivement dans les directions x et y
M_x, M_y	: Moment de flexion
M_{xy}	: Moment de torsion
N_x, N_y, N_{xy}	: Résultantes en membrane
u, v, w	: Composantes du vecteur des déplacements dans les directions x, y, z
U	: L'énergie de déformation potentielle
ρ	: Masse volumique
ρ_s	: Masse surfacique
$[\bar{B}_s]$: la matrice de relation déformation-déplacement naturelle
$[N]$: la matrice des contraintes résultant du chargement

Liste des figures

Figure I.1	: Concept des matériaux à gradient de propriétés (Houari, 2011)	6
Figure I.2	: Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM (Houari, 2011)	7
Figure I.3	: Formes de conversion d'énergies couvertes par la partie II du projet de FGM (Koizumi, 1997)	9
Figure I.4	: Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel..	11
Figure I.5	: Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM	12
Figure I.6	: Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM	14
Figure I.7	: Variation du module de Young de la plaque E-FGM	15
Figure II.1	: Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff	17
Figure II.2	: Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin	17
Figure II.3	: Essai de traction longitudinale (Gay et Hoa, 2007)	20
Figure II.4	: Essai de traction transversale	21
Figure II.5	: Essai de cisaillement longitudinal (Phan et Reddy, 1985)	23
Figure II.6	: Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre	24
Figure II.7	: Schématisation des résultantes membranaires des actions exercées sur un stratifié (Tati et Hessini, 2014)	28
Figure II.8	: Schématisation des résultantes en cisaillement (Berthelot, 1999)	28
Figure II.9	: Schématisations des moments de flexion et de torsion (Tati et Hessini, 2014)	29
Figure III.1	: Domaine d'applications de la méthode d'éléments finis (Zine, 2011)	32
Figure III.2	: Géométrie d'une plaque rectangulaire FGM	33
Figure III.3	: Position du plan physique neutre d'une plaque FGM	35
Figure III.4	: Géométrie et variables nodales de l'élément fini	38
Figure III.5	: Charges en plan d'une plaque rectangulaire en FGM	39
Figure III.6	: Organigramme du programme	43
Figure III.7	: Géométrie de la plaque étudiée	44
Figure III.8	: Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM Simplement appuyé (SSSS) ET $L_x = L_y$	46

Figure III.9	: Charge de flambement Critique sans dimension d'une Plaque FGM simplement appuyé (SSSS) ET $L_x = 2L_y$	47
Figure VI.2	Figure VI.1 : Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM Simplement appuyis(SSSS) sous chargement uiaxial, ($L_x / L_y = 1$) $L_x=10$ ET (P : variante) .	48
Figure VI.2	: Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM encastrée (EEEE) sous chargement uiaxial, ($L_x / L_y = 1$) $L_x=10$ ET (P : variante) .	49
Figure VI. 3	: Charge de flambement Critique sans dimension d'une plaque FGM encastrée (EEEE ET SSSS) sous chargement uiaxial, ($L_x / L_y = 1$) $L_x=10$ ET (P : variante) .	49
Figure VI.4	: Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM Simplement appuyis (SSSS) avec chargement uiaxial, $L_x=10$ ET (P : variante)	50

Liste des tableaux

Tableau I-1	: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	05
Tableau I-2	: Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon	9
Tableau III-1	: Fonctions des sous-routines	44
Tableau III .2	: Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM Sous chargement Uniaxiale (EL: SSSS $L_x/L_y = 1$ $L_x=10$)	45
Tableau III .3	: Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM Uniaxiale (EL : SSSS $L_x/L_y = 2$ $L_x=20$).....	46
Tableau VI.1	: Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM Simplement appuyés(SSSS) sous chargement uniaxial, ($L_x /L_y =1$) $L_x=10$ ET (P : variante)	48
Tableau VI.2	: Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM encastree (EEEE) sous chargement uniaxial, ($L_x /L_y =1$) $L_x=10$ ET (P : variante)	49
Tableau VI.3	: Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM Simplement appuyés (SSSS) avec chargement uniaxial, $L_x=10$ ET (P : variante)	50

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont une nouvelle classe de matériaux composites généralement constitués de métal et de céramique, dans lesquels les propriétés des matériaux varient de manière continue et régulière à travers l'épaisseur d'un élément structurel. Ils sont introduits pour éliminer la concentration de contraintes locales rencontrées dans les matériaux composites traditionnels qui peuvent échouer par délaminage. Ces nouveaux matériaux ont d'abord été proposés pour des applications de génie thermique en raison de leur ténacité apportée par le constituant métallique et de leur haute résistance thermique apportée par la céramique (Koizumi, 1993 ; Yamanouchi et al., 1990). Récemment, les FGM ont été développés pour être utilisés dans divers domaines industriels et d'ingénierie. Par conséquent, en raison des hautes performances des matériaux FGM, de nombreux chercheurs ont été attirés par l'étude de leurs comportements statiques, dynamiques, de flambage et de vibration en utilisant différentes approches et méthodes (Birman, 1995 ; Vel et Batra, 2002).

Les éléments en matériau à gradient fonctionnel sont soumis à des contraintes de compression d'origine thermique ou mécanique. Ces contraintes de compression peuvent augmenter à tel point qu'un flambage se produit. Par conséquent, le flambement est d'une grande importance lors de la conception de ces structures des éléments tels que des plaques.

Birman (1995), Feldman et Aboudi (1997) peuvent être considérés parmi les premiers auteurs traitant du comportement en flambement des plaques fonctionnellement graduées. Kyung et Kim (2006) ont utilisé un élément fini solide tridimensionnel à 18 nœuds pour analyser le comportement de flambement thermomécanique de plaques composites fonctionnellement graduées. Les chercheurs ont supposé que les propriétés des matériaux dépendent de la température. Zhao et al. (2009) ont présenté une étude sur le comportement de flambement mécanique et thermique des plaques FGM à géométrie arbitraire en utilisant la théorie des plaques de déformation par cisaillement du premier ordre, en conjonction avec la méthode k_p -Ritz sans élément. Les auteurs ont supposé que la propriété matérielle de chaque plaque varie de façon exponentielle à travers l'épaisseur. Huang et Li (2010) ont utilisé une nouvelle approche pour l'analyse du flambement mécanique des poteaux circulaires cylindriques fonctionnellement gradués en tenant compte de la déformation par cisaillement et en considérant l'état de la surface sans traction des poteaux cylindriques. Talha et Singh (2011) ont présenté l'analyse de flambement de plaques céramique-métal (FGM) à gradient fonctionnel soumises à une charge thermomécanique. Les propriétés matérielles des plaques FGM sont supposées dépendre de la

température et varient dans le sens de l'épaisseur en fonction de la distribution de la loi de puissance. Les auteurs ont utilisé un élément fini efficace basé sur une théorie améliorée des plaques de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. L'approche variationnelle est utilisée pour dériver les équations fondamentales des plaques FGM. Fekrar et al. (2012) ont étudié le comportement de flambement mécanique des plaques hybrides fonctionnellement graduées en utilisant une nouvelle théorie des plaques de déformation par cisaillement raffinée à quatre variables. Les auteurs ont utilisé le principe de l'énergie potentielle totale minimale pour dériver les équations gouvernantes et la méthode de Navier pour obtenir la solution de forme fermée. Valizadeh et al. (2012) ont utilisé une méthode d'éléments finis isogométriques basée sur des B-splines rationnelles non uniformes basée sur la théorie des plaques de déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) pour étudier le comportement de flambement statique-dynamique et thermique des plaques en matériau à gradient fonctionnel (FGM). Pour atténuer le blocage par cisaillement, les auteurs ont utilisé le principe d'équivalence énergétique pour évaluer les facteurs de correction de cisaillement. Zhang et al. (2014) ont étudié les comportements de flambage mécanique et thermique de plaques céramiques-métalliques à gradient fonctionnel (FGP) en utilisant une méthode sans maille. Les équations gouvernantes étaient basées sur la théorie des plaques de déformation par cisaillement du premier ordre. Cette étude a supposé que les propriétés du matériau de la plaque changeaient de façon exponentielle le long de le sens de l'épaisseur. Récemment, de nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude du comportement du flambement mécanique et thermique des plaques et coques fonctionnellement graduées en utilisant différentes méthodes analytiques et numériques. Parmi ces études, les travaux présentés par Hassan et Kurgan (2019), Trabelsi et al. (2019), Huang et Rao (2020), Vaghefi (2020), Jedrysiak et Kazmierczak (2020), Gao et al. (2020) et autres.

Dans cette étude, le comportement de flambement de plaques fonctionnellement graduées sous chargement mécanique a été réalisé à l'aide d'un élément fini à quatre nœuds basé sur une simple théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé. Contrairement à d'autres théories de déformations d'ordre élevé qui utilisaient un grand nombre d'inconnues, la présente étude n'a que cinq degrés de liberté par nœud. Le principe de l'énergie potentielle a été utilisé pour dériver les matrices de rigidité et géométriques. De plus, la technique de contrainte de cisaillement supposée a été introduite pour atténuer tout phénomène de blocage par cisaillement. Le modèle proposé tient compte d'une variation quadratique des déformations de cisaillement transversales à travers l'épaisseur et satisfait les conditions aux limites de traction nulle sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Par conséquent, aucun facteur de correction de cisaillement n'est nécessaire.

Le présent travail traite la le flambement mécanique des plaque FGM. Pour atteindre nos objectifs, ce travail de mémoire s'articule autour de quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré à donner une définition des matériaux à gradient de propriétés (FGMs), l'histoire de leur développement, applications des ces structures ainsi que les différentes méthodes d'homogénéisation utilisées pour le calcul de leurs propriétés effectives et une comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels.

Le deuxième chapitre rassemble une étude sur le comportement de post flambement des plaques à gradient de propriétés (FGMs).

Le troisième chapitre, rassemble un Bref historique des méthodes des éléments finis utilisées dans le traitement du comportement de flambement mécanique de la plaque FGM.

Le dernier chapitre est consacré pour les résultats des études comparatives réalisées et les commentaires sur les résultats. A la fin de ce travail, nous avons terminé par une conclusion générale sur l'ensemble de ces travaux qui permet de revenir sur les résultats importants de ce travail, et qui envisage des perspectives pour les futurs travaux.

Chapitre I

Etude bibliographique et
généralité sur les matériaux

BB FGM

I.1. Introduction :

Les matériaux à gradient de propriétés fonctionnel (en anglais : Functionally Graded Material " F.G.M "); un type de matériaux composites produit en changeant sans interruption les fractions de volume dans la direction d'épaisseur pour obtenir un profil bien déterminé. Ce type de matériaux, a suscité beaucoup d'attention récemment en raison des avantages de diminuer la disparité dans les propriétés matérielles et de réduire les contraintes thermiques. Compte tenu de l'augmentation significative de l'activité de recherche et de publications dans les FGMs et les structures au cours des dernières années, le présent chapitre est une tentative d'identifier et de mettre en évidence les sujets qui sont les plus pertinents pour les structures FGMs. En raison de la croissance extensive des connaissances en FGMs dans les deux dernières décennies, il est prudent de réduire l'examen à un niveau acceptable en se concentrant sur les problèmes des plaques FGMs seulement.

I.2. Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Le concept des matériaux à gradient de propriétés FGM fut proposé à la fin des années 1980 par un groupe de chercheurs au laboratoire national d'aérospatial (National Aerospace Laboratory, STA) au japon pour développer des pièces capables de résister aux sollicitations thermiques et mécaniques dans les systèmes de propulsion et le fuselage des navettes spatiales [Niino et al., 1988] . Une pièce peut être qualifiée de matériau FGM lorsqu'elle est composée d'au moins deux matériaux ou alliages primaires qui sont distribués continuellement ou discontinuellement à l'intérieur de la structure. Lorsque la distribution est continue, on parle alors de matériaux à gradient continu [Kawasaki et Watanabe , 1997]. Dans ce cas, la composition et la microstructure du matériau changent graduellement à l'intérieur de la pièce. Cette distribution des matériaux permet de modifier les propriétés à l'intérieur même de la pièce. Des

gradients de propriétés peuvent ainsi être réalisés au niveau mécanique, physique, chimique, etc. Le FGM consiste en l'association de deux matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux. Généralement, les FGM sont des matériaux constitués de plusieurs couches contenant des composants différents tels que les céramiques et les métaux. Les vides sont également considérés comme une composante des matériaux FGM [Kokini et Takeuchi, 1990]. Ils sont donc des composites présentant des caractéristiques macroscopiquement inhomogènes.

La plupart des « FGM » sont constitués des céramiques et des métaux dont les propriétés mécaniques sont comparés dans le tableau I.1

Tableau I.1: Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal.

La face à haute température	Céramique	- Bonne résistance thermique ; - Bonne résistance à l'oxydation ; - Faible conductivité thermique
Continuité du matériau d'un point à l'autre « couches intermédiaires »	Céramique-métal	-Élimination des problèmes de l'interface ; -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	Bonne résistance mécanique ; - Conductivité thermique élevée, - Très bonne ténacité.

Le changement continu dans la composition et donc dans la microstructure d'un matériau FGM est illustré dans la figure I.1. Il en résulte un gradient qui déterminera les propriétés des FGM. Dans certains

cas, on peut avoir un FGM constitué d'un même matériau mais de microstructure différente [Boch et al., 1986].

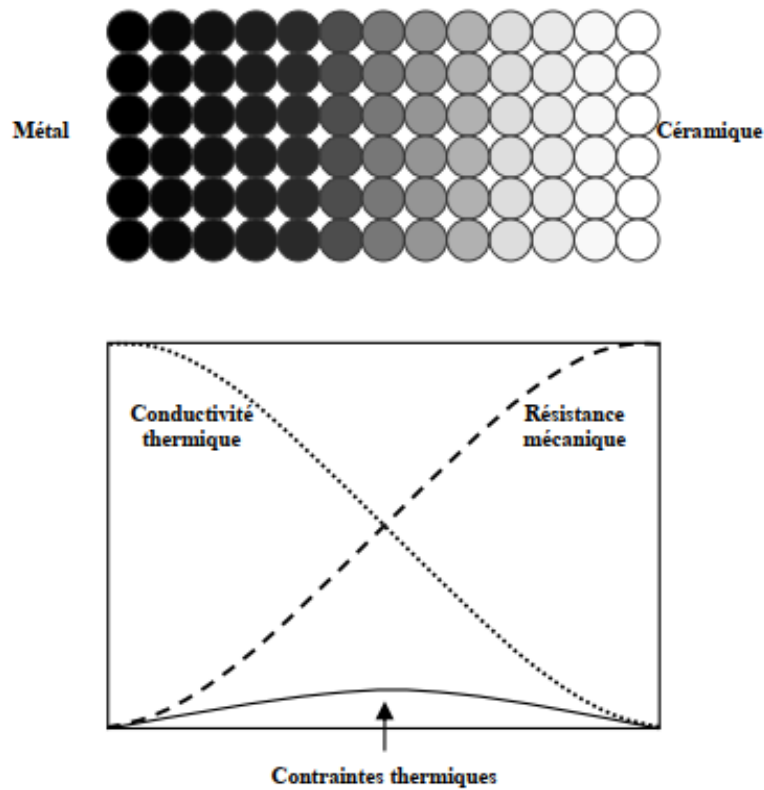


Fig I.1 : Concept des matériaux à gradient de propriétés [Houari, 2011].

La figure I.2 montre les concentrations de contraintes dans les panneaux de protection thermiques conventionnels au niveau des interfaces (changement brutale de composition). Il montre également comment un FGM peut alléger. Ces concentrations de contraintes en changeant graduellement les propriétés matérielles et assure toujours la protection thermique trouvée dans les barrières thermiques conventionnelles.

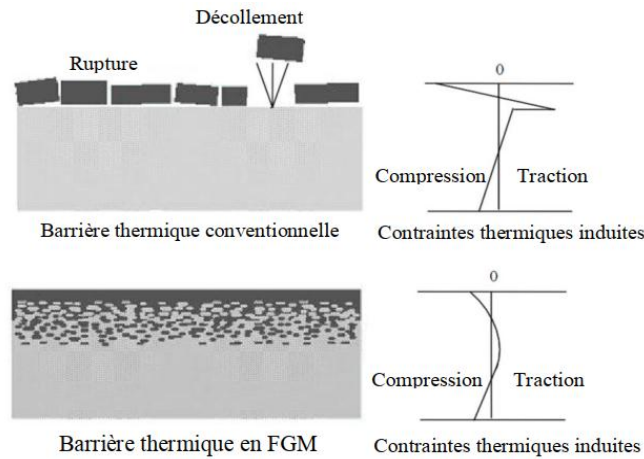


Fig I.2 : Protection thermique des Matériaux FGM et Non FGM [Houari, 2011].

I.3. Historique du développement des matériaux à gradient de propriétés

Le concept de FGM est né au milieu des années quatre vingt dans le laboratoire national d'aérospatial au Japon, qui fût suivit par d'autres pays : l'Allemagne, la Suisse, Les EtatsUnis, la Chine et la Russie. En 1984 M. Niino et ses collègues à Sendai. Ont eu l'idée de réaliser des matériaux utilisés comme barrière thermique dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion [KOIZUMI, 1992]. Les changements continus dans la composition, dans la microstructure, et même dans la porosité de ces matériaux a comme conséquences des gradients des propriétés matérielles telles que les propriétés mécaniques et la conductivité thermique [Nguyen et al., 2007]. Cette nouvelle classe de matériaux composites peuvent être utilisés pour différentes applications, telles que les enduits des barrières thermiques pour les moteurs en céramique, turbines à gaz, couches minces optiques [Okamura, 1991].

En 1987, un vaste programme pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques c'est-à-dire des matériaux constituant les parois des engins spatiaux pouvant travailler à des

températures de surface de 1800°C et à un gradient de température de l'ordre de 1300°C [Nguyen et al., 2007].

En 1987-1989, c'est la fabrication de petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures de surfaces maximales de 2000K et à un gradient de température de 1000K.

Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure ; les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes : le système SiC/C par C.V.D., le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres, le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température, et enfin le système (Ni-Cr-Al-Y)/(ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches [Okamura, 1991].

En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques....etc. [Okamura, 1991].

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [Kieback et al., 2003].

A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure », communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie.

La figure I.3 [Koizumi, 1997] montre les formes de conversion d'énergie visée par le présent projet de recherche. Les énergies solaire et nucléaire sont considérées comme les sources d'énergie en vue d'éventuelles applications extensives.

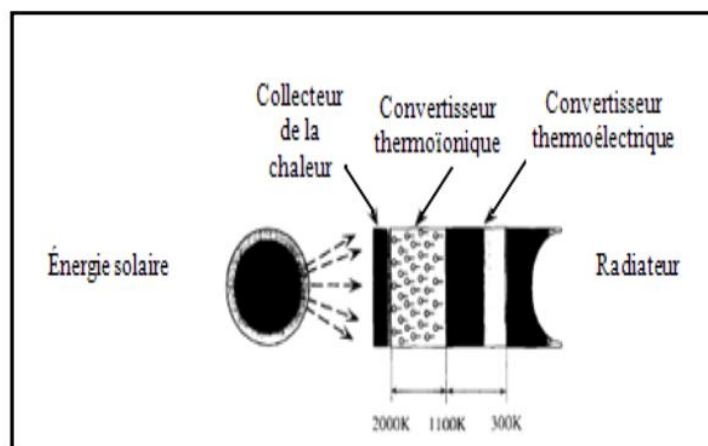


Figure I.3 : Formes de conversion d'énergies couvertes par la partie II du projet de FGM [Koizumi, 1997].

Les progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon sont résumés dans le tableau I.2.

Tableau I.2 : Progrès de la recherche sur les matériaux FGM

Année	Progrès de recherche de FGM
1984	Concept initial par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon).
1986	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA).
1987-1989	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques. FGM partie I-phase (1).
1988	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1er Colloque sur FGM organisé par FGMF.
1989	Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) a Kôln, (Allemagne).

1990	1er Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM).
1990- 1991	FGM partie I-phase (2).
1992	Etude de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA. 2 ème colloque international sur FGM et atelier international Japon-Allemagne-USA à San Francisco, (USA).
1993	Projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM. FGM partie II- phase(1).
1994	3 ^{ème} colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse).
1995	Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95),(Sendai).
1996	4 ^{ème} colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon).

I.4. Propriétés matérielles effectives des FGMs

Les FGMs sont très hétérogènes, il sera très utile de les idéaliser comme continua avec leurs propriétés mécaniques variant continûment par rapport aux coordonnées spatiales. Les schémas d'homogénéisation sont nécessaires pour simplifier leurs microstructures hétérogènes complexes afin de les analyser d'une manière efficace. Des solutions fermées de certains problèmes fondamentaux de la mécanique des solides peuvent être obtenues par cette idéalisation et aussi il aidera à l'évolution et le développement de modèles numériques des structures faites par les

FGMs. Il est à noter que la répartition de matière dans les structures des FGMs peut être conçue pour diverses spécifications spatiales.

Un FGM typique représente un composite de particules avec une distribution prescrite des fractions de volume des phases constitutives. Les propriétés des matériaux sont généralement supposées suivre une gradation à travers l'épaisseur d'une manière continue. Deux types de fraction volumique (variations/gradations) sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants :

1. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c- à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (figure I.4.a);
2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure I.4.b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z).

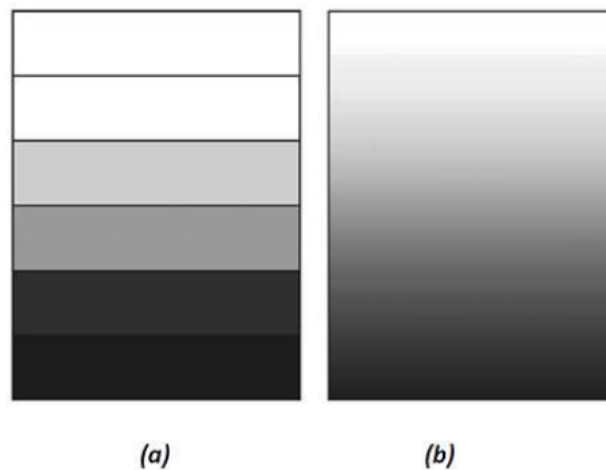


Fig I.4 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel (Ref : NA KIM .J.H)

I.4.1. Propriétés matérielles de la plaque P-FGM (loi de puissance) :

La fraction volumique dans les P-FGM est assurée par une loi de puissance sous la forme :

$$V(z) = \left[\frac{\left(z + \frac{h}{2} \right)}{h} \right]^p \quad \text{I-1}$$

Où p est un paramètre du matériau et h est l'épaisseur de la plaque. Une fois que la fraction de volume local $V(z)$ est définie, les propriétés matérielles d'une plaque P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m)V(z) \quad \text{I-2}$$

Où E_m et E_c sont respectivement les modules de Young de la surface inférieure ($z=-h/2$) et de la surface supérieure ($z=h/2$) de la plaque FGM, la variation de la fraction volumique des phases en termes de p est représentée sur la figure I.5, il apparaît clairement que la fraction volumique change rapidement près de surface inférieure pour $p < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

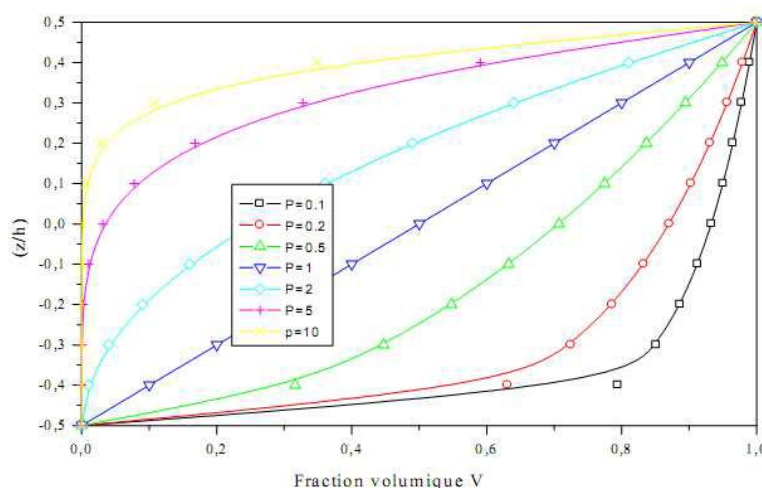


Fig I.5 : Variation de la fraction volumique dans une plaque P-FGM

(Ref :reddy j1997)

I.4.2. Propriétés matérielles de la plaque S-FGM :

Dans le cas d'ajoute une plaque P-FGM d'une simple fonction de loi de puissance à une plaque composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent sur l'interfaces où le matériau est continu mais change rapidement [23]. Par conséquent, Chung et chi [24] ont défini la fraction de volume de la plaque FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Cette distribution appelée la fonction sigmoïde. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{si} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad \text{I-3.a}$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} - z}{\frac{h}{2}} \right)^k \quad \text{si} \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \text{I-3.b}$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la plaque S-FGM peut être calculé par :

$$E(z) = V_1(z)E_1 + [1 - V_1(z)]E_2 \quad \text{si} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad \text{I-4.a}$$

$$E(z) = V_2(z)E_1 + [1 - V_2(z)]E_2 \quad \text{si} \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad \text{I-4.b}$$

La figure I.6 montre que la variation de la fraction volumique dans les équations (I.3.a) et (I.3.b) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

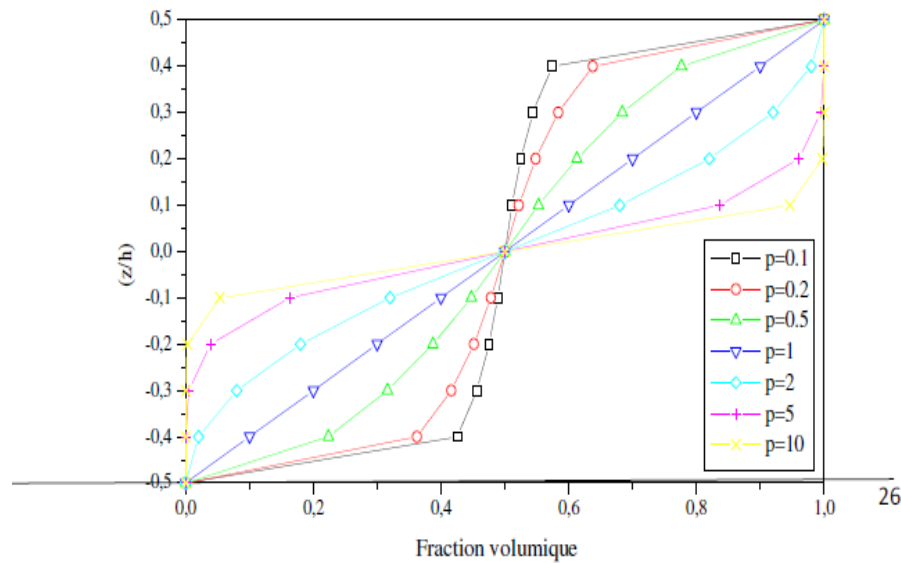


Fig I.7 : Variation de la fraction volumique dans une plaque S-FGM

(Ref :redy j 1997)

I.4.3. Propriétés matérielles de la plaque E-FGM :

Cette idéalisation particulière pour la modélisation des FGMs est très répandue dans les études de mécanique de la rupture [23]. Pour une structure faite de FGM avec 'h' une épaisseur uniforme, les propriétés typiques des matériaux P(z) à tout point situé à une distance "z" de la surface de référence est donné par :

$$S(z) = Ae^{B\left(\frac{z+h}{2}\right)} \tag{I-5.a}$$

$$A = S_2, B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{S_1}{S_2}\right) \tag{I-5.b}$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée dans la figure I.7.

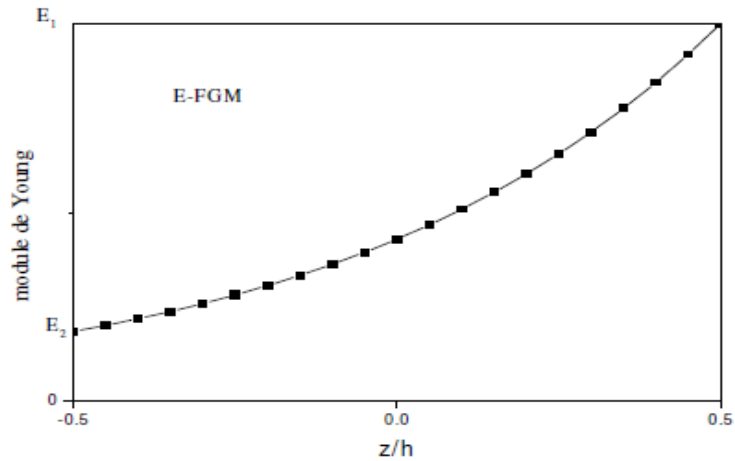


Fig I-8 : Variation du module de Young de la plaque E-FGM

I.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés et leurs domaines d'application. La variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application dans les structures spéciales en génie civil.

Chapitre II

Comportement des Matériaux fonctionnellement gradués

FGM

II.1. Introduction :

Les technologies modernes ont besoin de matériaux qui allient à la fois une rigidité, une résistance mécanique et une grande légèreté. Pour atteindre cet objectif il faut nécessairement utiliser un matériau composite, dans ce domaine, les matériaux composites à base de fibres jouent un rôle de plus en plus important dans les techniques avancées. Les propriétés mécaniques des composites fibreux dépendent de la quantité, de la taille et surtout de l'orientation des fibres (SEDIRA ; 2013).

II.2. Comportement mécanique des plaques FGM selon la théorie de 1^{er} ordre:

Il existe plusieurs théories utilisées pour décrire le comportement mécanique des matériaux multicouches. On peut citer la théorie classique de la plaque stratifiée (CLPT), la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDT), les théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT),

II.2.1. Théorie classique des stratifiés CLT :

Basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, et qui néglige les déformations de cisaillement transverse et suppose que la normale au feuillet moyen reste normale après déformation. Selon Reddy (1997), le champ de déplacements de la théorie *CLT* est donné par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y}, \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y), \end{aligned} \quad \text{II-1}$$

Avec (u_0, v_0, w_0) sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z=0$).

Puisque cette théorie ne tient pas en compte l'effet de cisaillement transverse, il donne des résultats imprécis pour les plaques épaisses.

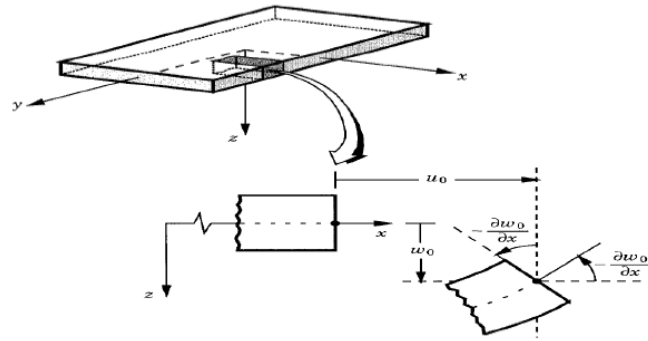


Fig II.1: Géométries déformées et non-déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Kirchhoff

II.2.2 Théorie de la déformation de cisaillement du 1^{er} ordre (FSDT) :

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse, dans ce cas les contraintes et les déformations sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque, ce qui oblige l'introduction d'un du facteur de correction. Qui a mené au modèle de plaque de Reissner-Mindlin. Ainsi que Timoshenko et Woinowsky-Krieger (BOUKHARI ; 2016).

La théorie du premier ordre est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \varphi_x(x, y) \tag{II-2}$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \varphi_y(x, y) \tag{II-3}$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \tag{II-4}$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et (φ_x, φ_y) sont les déplacements en moyenne et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

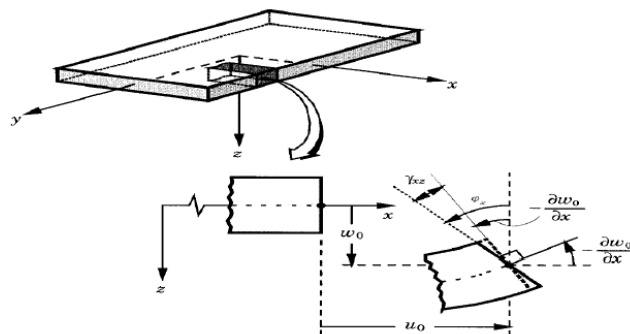


Fig II.2: Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque sous l'hypothèse de Reissner-Mindlin

II.2.3 Théories de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT) :

La théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale (BOUKHARI ; 2016).

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z u_1(x, y) + z^2 u_2(x, y) + z^3 u_3(x, y) + \dots \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z v_1(x, y) + z^2 v_2(x, y) + z^3 v_3(x, y) + \dots \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) + z w_1(x, y) + z^2 w_2(x, y) + z^3 w_3(x, y) + \dots \end{aligned} \quad \text{II-5}$$

$u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ et $w(x, y, z)$ sont les composantes vectoriels du déplacement, $u(x, y)$, $v(x, y)$ et $w(x, y)$ sont des fonctions doivent être déterminés dans le plan (x, y) .

Dans ce travail en adoptant la théorie de premier ordre (FSDT).

Le champ des déformations II s'écrit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \varepsilon_x^0 + z k_x + \varepsilon_x^{nl} \quad \text{II-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \varepsilon_y^0 + z k_y + \varepsilon_y^{nl} \quad \text{II-7}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}^0 + z k_{xy} + \gamma_{xy}^{nl} \quad \text{II-8}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{II-9}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{II-10}$$

L'état de déformation en un point quelconque de la plaque globale est donné par les deux vecteurs de déformation suivants :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z \{k\} + \{\varepsilon^{nl}\} \quad \text{II-11}$$

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{II-12}$$

$\{\varepsilon_0\}$ Les déformations membranaires :

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{II-13}$$

La matrice $\{k\}$ est appelée *matrice des courbures* de la plaque sollicitée en flexion.

Les déformations non linéaires :

$$\{\varepsilon^{nl}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{nl} \\ \varepsilon_y^{nl} \\ \gamma_{xy}^{nl} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{II-14}$$

II.3. Caractéristiques mécaniques d'un pli :

Le problème de détermination des modules d'élasticité d'un matériau composite unidirectionnel consiste à rechercher des expressions de ces modules (5 modules indépendants) en fonction des caractéristiques mécaniques et géométriques des constituants.

La détermination des modules d'élasticité d'un composite unidirectionnel consiste à rechercher les expressions de ces modules en fonction des modules d'élasticité de la matrice et des fibres (E_m, E_f), fraction volumique de la matrice et de fibres (V_m, V_f), les coefficients de Poisson (ν_m, ν_f), longueur des fibres, etc.

II.3.1. Module d'Young longitudinal E_1 :

Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinal.

L'hypothèse simplificatrice est de supposer une déformation uniforme dans la fibre et dans la matrice. Cette hypothèse conduit à la formule suivante :

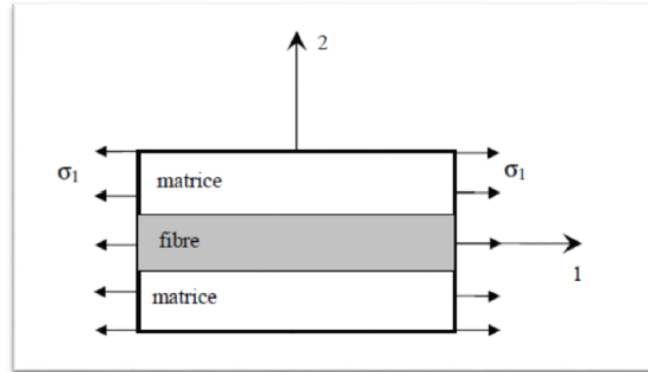


Fig II.3 : Essai de traction longitudinale (Gay et Hoa ; 2007)

Déformation uniforme et identique dans la fibre et dans la matrice.

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{II-15}$$

Où l est la longueur de cellule considérée. L'identité des déformations dans la fibre et dans la matrice impose :

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_l \quad \text{II-16}$$

Si la fibre et la matrice ont un comportement élastique, les contraintes dans la fibre et la matrice sont exprimées par :

$$\sigma_f = E_f \cdot \varepsilon_l \quad \text{II-17}$$

$$\sigma_m = E_m \cdot \varepsilon_l \quad \text{II-18}$$

La charge totale appliquée est :

$$f_1 = \sigma_f \cdot S_f + \sigma_m \cdot S_m \quad \text{II-19}$$

Où S_f et S_m sont respectivement les aires des sections droites de la fibre et de la matrice.

Si S est l'aire de la section droite de la cellule moyenne, la contrainte moyenne

$\sigma_1 = \frac{F_1}{S}$ s'écrit :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_f \cdot S_f + \sigma_m \cdot S_m}{S} \quad \text{II-20}$$

Donc les fractions volumiques de renfort et de la matrice sont :

$$V_f = \frac{S_f}{S}, V_m = \frac{S_m}{S}$$

Donc

$$\sigma_1 = \sigma_f \cdot V_f + \sigma_m (1 - V_f) \quad \text{II-21}$$

Cette contrainte moyenne est liée à la déformation de la cellule par le module d'Young longitudinal :

$$\sigma_1 = E_L \cdot \varepsilon_1 \quad \text{II-22}$$

La combinaison des relations (2.17), (2.18) à (2.22) conduit à l'expression du module d'Young longitudinal :

$$E_L = E_f \cdot V_f + E_m (1 - V_f) \quad \text{II-23}$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi des mélanges* pour le module d'Young dans la direction des fibres.

II.3.2. Module d'Young transversal :

Le module d'Young transversal est déterminé dans un essai de traction transversale (figure II.4). Dans cet essai, on suppose que la contrainte transversale est la même dans la fibre et dans la matrice.

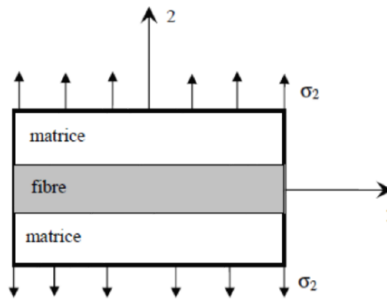


Fig II.4 : Essai de traction transversale [20]

La hauteur des couches doit simplement vérifier :

$$V_f = \frac{h_f}{h_f + h_m}, 1 - V_f = \frac{h_m}{h_f + h_m} \quad \text{II-24}$$

La charge F_2 imposée suivant la direction transversale est transmise intégralement dans la fibre et dans la matrice, imposant des contraintes égales :

$$\sigma_m = \sigma_f = \sigma_2 \quad \text{II-25}$$

Il en résulte que les déformations respectives de la fibre et de la matrice dans la direction transverse s'écrivent :

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f}, \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \quad \text{II-26}$$

L'allongement transverse d'une cellule élémentaire résulte des allongements cumulés dans la fibre et la matrice.

Soit :

$$\Delta l_2 = \varepsilon_f h_f + \varepsilon_m h_m \quad \text{II-27}$$

Et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_2}{h_f + h_m} = \varepsilon_f \frac{h_f}{h_f + h_m} + \varepsilon_m \frac{h_m}{h_f + h_m} \quad \text{II-28}$$

Soit :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f V_f + \varepsilon_m (1 - V_f) \quad \text{II-29}$$

Cette déformation est liée à la contrainte imposée par le module transverse sur la cellule :

$$\sigma_2 = E_T \varepsilon_2 \quad \text{II-30}$$

La combinaison des expressions (2.26) à (2.30) conduit à l'expression du module transverse :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{1 - V_f}{E_m} \quad \text{II-31}$$

Cette expression est connue sous le nom de *loi inverse des mélanges* et peut être réécrite, en rapportant le module transverse au module d'Young de la matrice, suivant une relation sans dimension sous la forme [1] :

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1}{1 + \left(\frac{E_m}{E_f} - 1 \right) V_f} \quad \text{II-32}$$

II.3.3. Coefficient de poisson longitudinal ν_{12} :

Le coefficient de Poisson longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinal. En utilisant l'approche du comportement mécanique du matériau, Les déformations transverses dans la matrice et dans les fibres s'écrivent :

$$\varepsilon_{2m} = -\nu_m \varepsilon_1, \varepsilon_{2f} = -\nu_f \varepsilon_1 \quad \text{II-33}$$

L'allongement transverse de la cellule élémentaire est :

$$\Delta l_t = -\nu_m \varepsilon_1 h_m - \nu_f \varepsilon_1 h_f \quad \text{II-34}$$

Et la déformation transverse s'écrit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta l_t}{h_f + h_m} = -\left[\nu_m (1 - V_f) + \nu_f V_f \right] \varepsilon_1 \quad \text{II-35}$$

D'où l'expression du coefficient de poisson :

$$V_{LT} = \nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f) \quad \text{II-36}$$

Cette expression est la loi des mélanges pour le coefficient de Poisson longitudinal.

Les valeurs de ν_m et ν_f sont assez proches (voisines de 0,3). [Berthelot ; 2005].

II.3.4. Module de cisaillement G_{12} :

Le module de cisaillement longitudinal G_{LT} est déterminé dans un essai de cisaillement longitudinal schématisé sur la figure II.5, Les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales, du fait des contraintes τ imposées sur la cellule.

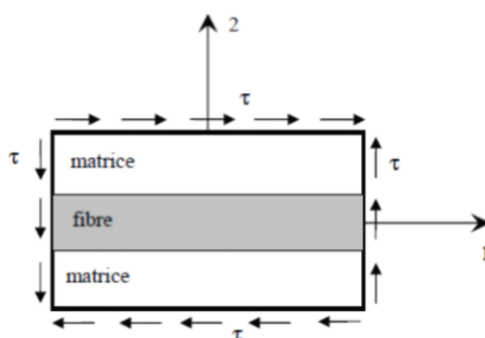


Fig II.5: Essai de cisaillement longitudinal [Phan et Reddy ; 1985]

Les déformations en cisaillement de la fibre et de la matrice s'expriment donc suivant:

$$\gamma_f = \frac{\tau}{G_f}, \gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \quad \text{II-37}$$

Les déformations induites dans la fibre et dans la matrice (figure II.5) sont :

$$\delta_f = h_f \gamma_f, \delta_m = h_m \gamma_m \quad \text{II-38}$$

La déformation totale de la cellule (figure II.5) est :

$$\delta = \delta_f + \delta_m = h_f \gamma_f + h_m \gamma_m \quad \text{II-39}$$

Et l'angle de cisaillement de la cellule est déterminé par l'expression :

$$\gamma = \frac{\delta}{h_f + h_m} = \gamma_f V_f + \gamma_m (1 - V_f) \quad \text{II-40}$$

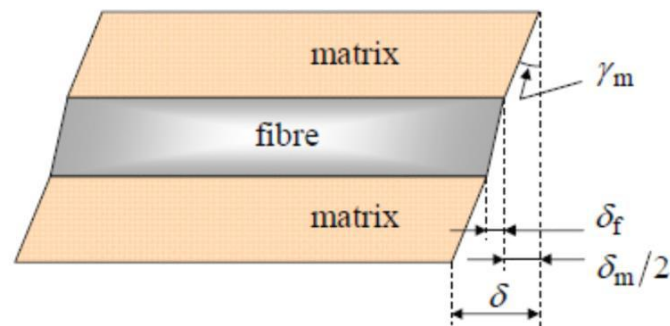


FIG II.6 : Déformations en cisaillement de la matrice et de la fibre.

Cet angle est lié à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement longitudinal G_{LT} suivant la relation :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{LT}} \quad \text{II-41}$$

En combinant les expressions (II.37) à (II.41), nous obtenons :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{1 - V_f}{G_m} \quad \text{II-42}$$

II.3.5. Loi de Hooke Généralisée :

La loi de Hooke a été généralisée par Cauchy (1789-1857), qui a proposé d'exprimer chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations. La loi de Hooke est donc aujourd'hui souvent écrite sous la forme :

$$\sigma = C \cdot \varepsilon \quad \text{II-43}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad \text{II-44}$$

Où C est un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur des rigidités ou tenseur d'élasticité (les composantes covariantes de ce tenseur sont C_{ijkl}). Les déformations sont reliées linéairement aux contraintes par la relation inverse :

$$\varepsilon = S.\sigma \quad \text{II-45}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad \text{II-46}$$

Où S est le tenseur des compliances ou tenseur des complaisances élastiques des matériaux (ses composantes covariantes sont S_{ijkl}) [Phan et Reddy ; 1985].

Pour un matériau orthotrope les matrices de rigidité et de souplesse s'écrivent sous la forme :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad \text{II-47}$$

Où

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, C_{12} = \frac{\nu_{21} - \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} - \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta},$$

$$C_{13} = \frac{\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{32}}{E_1 E_2 \Delta}, C_{23} = \frac{\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, C_{44} = G_{23},$$

$$C_{55} = G_{13}, C_{66} = G_{12}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

Avec les constantes de souplesse :

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{12} &= \frac{\nu_{12}}{E_1} & S_{13} &= \frac{\nu_{13}}{E_1} \\
 S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{23} &= \frac{\nu_{23}}{E_2} & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \\
 S_{44} &= \frac{1}{E_{23}} & S_{55} &= \frac{1}{E_{13}} & S_{66} &= \frac{1}{E_{12}}
 \end{aligned}$$

II.3.5.1 Etat de contraintes planes :

Pour un matériau orthotrope, et dans le cas d'un état de *contrainte plane*, La relation contrainte déformation peut être donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x^k \\ \sigma_y^k \\ \tau_{xy}^k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 \\ Q_{21}^k & Q_{22}^k & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^k \\ \varepsilon_2^k \\ \gamma_{12}^k \end{Bmatrix} \quad \text{II-48}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad \text{II-49}$$

Les composantes de la rigidité Q_{ij} sont données par :

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{LT}} & Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{LT}} & S_{13} &= \frac{\nu_{13}}{E_1} \\
 Q_{12} &= Q_{21} \frac{\nu_{LT}\nu_{LT}}{1 - \nu_{LT}\nu_{LT}} & Q_{44} &= G_{13} & S_{33} &= \frac{1}{E_3} \\
 Q_{55} &= G_{23} & Q_{66} &= G_{LT} & S_{66} &= \frac{1}{E_{12}}
 \end{aligned}$$

La matrice de rigidité réduite hors axes est donnée par l'expression :

$$[\bar{Q}] = [T^{-1}] \{Q\} [T] \quad \text{II-50}$$

Avec :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad \text{II-51}$$

$$\bar{Q}_{11} = c^4 Q_{11} + s^4 Q_{11} + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) s^2 c^2 \quad \text{II-52}$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 + Q_{12}(s^4 + c^4) \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})sc^3 + (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66})s^3c \\ \bar{Q}_{22} &= s^4Q_{11} + c^4Q_{22} + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{11} - Q_{12} + 2Q_{66})sc^3 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66}))s^2c^2 + Q_{66}(s^4 + c^4)\end{aligned}$$

Les relations contraintes-déformations, pour une couche k , exprimées dans le repère global, est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} \quad \text{II-53}$$

Où \bar{Q}_{ij} sont les coefficients de la matrice de rigidité d'une couche k donné [Tati et Hessini ; 2014], θ est l'angle d'orientation de la fibre.

II.3.5.2 Efforts résultants membranaires et flexionnels :

Résultantes en membrane :

Le vecteur résultantes en membrane noté $N(x, y)$ et défini par :

$$N(x, y) = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_k dz \quad \text{II-55}$$

Où σ_k est la matrice en membrane $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ dans la couche k

Le vecteur $N(x, y)$ peut s'écrire :

$$N(x, y) = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad \text{II-56}$$

N_x, N_y , et N_{xy} sont les résultantes, par unité de longueur, des contraintes normales et de cisaillement dans le plan (x, y) . Elles sont schématisées sur la figure (II -8)

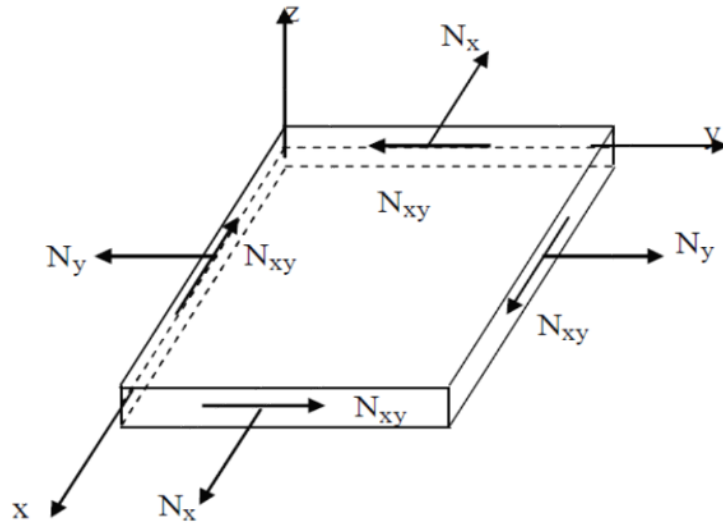


Fig II.7: Schématisation des résultantes membranaires des actions exercées sur un stratifié [Tati et Hessini ; 2014]

❖ **Résultantes en cisaillement :**

Les résultantes en cisaillement sont définies de la manière suivante:

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix}_k dz \quad \text{II-57}$$

Les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié, elles sont schématisées sur la figure (II-8)

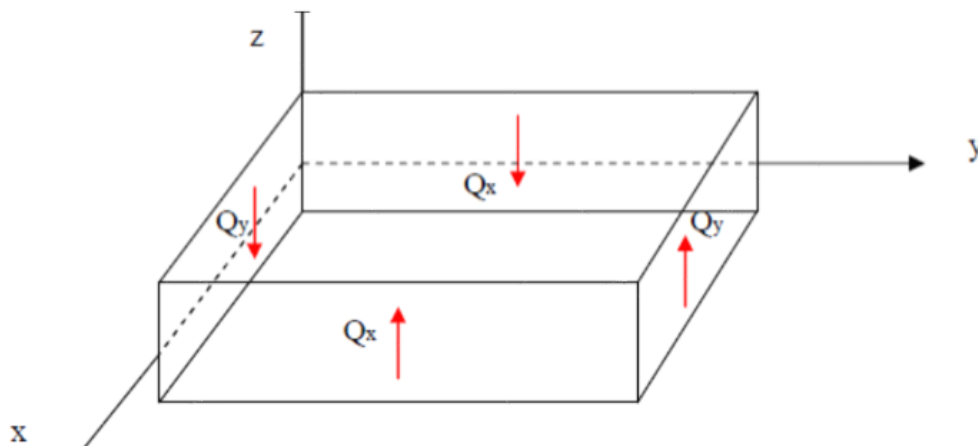


Fig II.8 : Schématisation des résultantes en cisaillement [Berthelot ; 1999]

❖ **Moment de flexion et de torsion :**

Les moments de flexion et de torsion sont définie par :

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k z dz \quad \text{II-58}$$

M_x et M_y sont les moments de flexion et M_{xy} le moment de torsion, ils sont schématisés sur la figure (II.9).

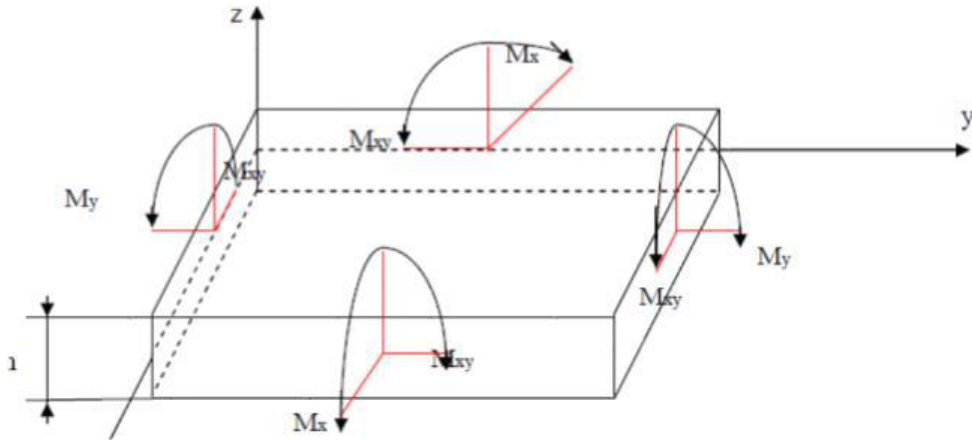


Fig II.9 : Schématisations des moments de flexion et de torsion [Tati et Hessini ; 2014]

II.3.6. Equation constitutive :

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et les moments en fonction des déformations en membrane et des courbures avec pris de cisaillement transverse donnée sous forme matricielle, soit :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad \text{II-59}$$

Avec :

$$N(x, y) = A_{ij} \varepsilon_m(x, y) + B_{ij} k(x, y) \quad \text{II-60}$$

Les matrices, A_{ij} et B_{ij} s'écrivent comme suit :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}]_k \quad \text{II-61}$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) [\bar{Q}]_k \quad \text{II-62}$$

Donc :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II-63}$$

$$M(x, y) = B_{ij} \varepsilon_m(x, y) + D_{ij} k(x, y) \quad \text{II-64}$$

Alors :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{II-65}$$

On a :

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1}) [\bar{Q}]_{ij} \quad \text{II-66}$$

Les efforts résultants au cisaillement s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{II-67}$$

En modifiant la partie relative aux résultantes en cisaillement transverse et remplaçant les coefficients de rigidité F_{ij} par de nouveaux coefficients de rigidité en cisaillement H_{ij} du stratifié :

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} K_{44} F_{44} & K_{45} F_{45} \\ K_{54} F_{54} & K_{55} F_{55} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{II-68}$$

Finalement on peut écrire l'équation du comportement mécanique d'un stratifié sous forme suivante :

$$H_{ij} = k_{ij} F_{ij} \quad \text{II-69}$$

Les paramètres k_{ij} sont des facteurs de correction en cisaillement.

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{54} & H_{55} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{II-70}$$

Finalement on peut écrire l'équation du comportement mécanique d'un stratifié sous forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_f \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & H \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} \quad \text{II-71}$$

La matrice **A** correspond au comportement de **membrane**,

- ✓ La matrice **D** correspond au comportement de **flexion**,
- ✓ La matrice **B** correspond aux termes de **couplage** entre les comportements de **membrane et de flexion**,
- ✓ La matrice **H** correspond au comportement de **cisaillement transverse**.

Dans le cas où le stratifié est symétrique, le couplage membrane-flexion-torsion est nul ($B=0$).

II.4. Conclusion

Les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en sciences et en ingénierie avec de nombreuses applications pratiques. Les besoins de recherche dans ce domaine sont particulièrement nombreux et variés, les FGM promettent des avantages potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants. Dans ce chapitre un examen des différentes recherches menées dans la littérature pour la contrainte, la vibration libre et des analyses de flambement des plaques FGMs a été présenté. Un effort a été fait pour inclure toutes les contributions importantes dans le domaine d'intérêt courant mettant en évidence la littérature la plus pertinente disponible aux ingénieurs de recherche qui étudient les structures en plaques FGMs. L'utilisation des modèles théoriques 2D qui maintenant semblent fournir une précision aussi bonne que les modèles 3D doit être poursuivie dans l'intérêt de coût de calcul et des analyses performantes.

Chapitre III

Présentation de l'élément fini utilisé

III.1. Introduction :

L'idée principale derrière la méthode des éléments finis remonte loin en arrière. Les grecs par exemple avaient reconnu que l'on peut aborder les solutions des problèmes complexes en les divisant en problèmes plus simples. On peut par exemple rapprocher le périmètre d'un cercle en comptant le périmètre d'un polygone à n côtés, à condition que n soit convenablement grand. Il suffit donc de connaître la longueur d'un segment de droite, c'est un problème plus simple que celui de la longueur d'un arc de cercle.

L'application à la solution des équations aux dérivées partielles est évidemment plus récente et est intimement liée au développement de l'outil informatique. Courant (1943) a introduit le concept de formulation variationnelle, qui est la base de toutes les méthodes des éléments finis.

Ritz (1908), a traité les problèmes posés dans un espace de dimension infinie. Nous rapprochons ultérieurement la solution du problème initial en retrouvant une solution dans une suite croissante de sous-espaces de dimension finie. Ces problèmes approchés sont généralement beaucoup plus facile à résoudre. Nous pouvons de plus espérer que la solution du problème en dimension infinie peut être obtenue par un passage à la limite.

III.2. Domaines d'application :

La méthode des éléments finis est appliquée dans la majorité des domaines de la physique figure (III.1). Cela va de la mécanique à l'électronique, en passant par la thermique et la météorologie. Dans tous ces cas, la formulation reste quasiment identique, mais la nature des champs et les lois de comportement sont adaptées au domaine d'application.

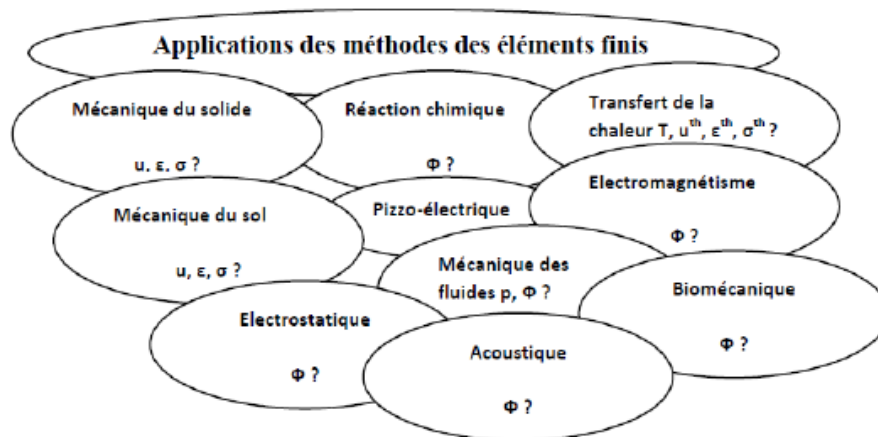


Figure III.1 : Domaine d'applications de la méthode d'éléments finis (Zine, 2011)

III.3. Formulation mathématique :

III.3.1. Champ de déplacement et cinématique :

Les composantes de déplacement dans une plaque selon la Figure III.2 et selon la théorie simple de déformation de cisaillement d'ordre élevé proposée par Tati (2021b) peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y \\ w(x, y, z) &= F(z)w_0(x, y) + (F(z) - 1)G(x, y) \end{aligned} \quad \text{III-1}$$

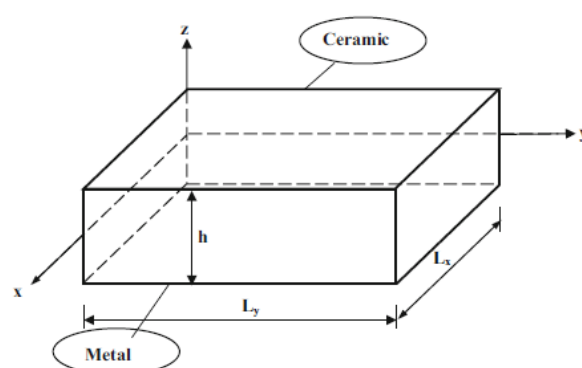


Figure III.2 : Géométrie d'une plaque rectangulaire FGM

Où,

$$F(z) = \frac{5}{4} \left(1 - \frac{4z^2}{h} \right), \quad \varphi_x = \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \text{ et } \varphi_y = \frac{\partial G(x, y)}{\partial y}$$

Selon la relation cinématique non-linéaire de Von Karman, les composantes du vecteur de déformations peuvent être données par :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^l \\ \varepsilon_y^l \\ \gamma_{xy}^l \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{nl} \\ \varepsilon_y^{nl} \\ \gamma_{xy}^{nl} \end{Bmatrix} \quad \text{III-2}$$

$$\{\varepsilon^l\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^l \\ \varepsilon_y^l \\ \gamma_{xy}^l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III-3}$$

$$\{\gamma_z\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = F(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad \text{III-4}$$

$$\{\gamma_z\} = F(z) \{\gamma_z^0\} \quad \text{III-5}$$

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{III-6}$$

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \text{III-7}$$

$$\{\varepsilon^{nl}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{nl} \\ \varepsilon_y^{nl} \\ \gamma_{xy}^{nl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{III-8}$$

$$\{\gamma_z^0\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{III-9}$$

III.3.2. Relations constitutives :

La plaque est constituée d'un matériau qui résulte d'un mélange de céramique et de métal. La face supérieure de la plaque est en céramique pure, tandis que la face inférieure est en métal pur. Les deux matériaux sont gradués en continu dans le sens

de l'épaisseur. Les propriétés du matériau ainsi obtenu sont supposées varier en fonction de l'épaisseur de la plaque selon la loi de puissance suivante :

$$E(z) = E_m + E_{cm} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad \text{III-10}$$

La relation contrainte-déformation pour une plaque FGM élastique est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^l \\ \varepsilon_y^l \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III-12}$$

Les coefficients de rigidités, Q_{ij} sont données par :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{12} &= \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \\ Q_{44} &= Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \end{aligned} \quad \text{III-13}$$

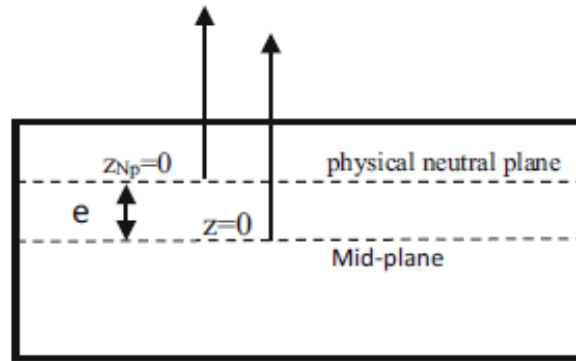


Figure III.3 : Position du plan physique neutre d'une plaque FGM

III.3.3. Les résultantes de la force et du moment

Pour éviter le couplage membrane-flexion causé par l'asymétrie de la plaque en fonction de l'épaisseur, les résultantes de force et de moment sont calculées par rapport au plan neutre physique qui ne coïncide pas avec le plan médian de la plaque comme indiqué sur la figure III.3

La position du plan physique neutre est donnée par Tati (2019 ; 2021a).

$$z_{NP} = z - e$$

$$e = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) z dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz} \quad \text{III-14}$$

Les forces et les moments par unité de longueur exprimés en termes de composantes de contrainte à travers l'épaisseur sont donnés par :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad \text{III-15}$$

$$\{Q_s\} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad \text{III-16}$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} z_{NP} dz \quad \text{III-17}$$

Sous forme matricielle, la relation entre les résultantes des contraintes et les déformations peut s'écrire :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q_s \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & A_s \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \\ \gamma_y \end{Bmatrix} \quad \text{III-18}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}$$

III-19

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$$

III-20

$$[A^s] = \begin{bmatrix} A_{44}^s & 0 \\ 0 & A_{55}^s \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} dz, \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} (z-e)^2 dz \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

III-21

$$A_{44} = A_{55} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{44} F(z)^2 dz$$

III-22

L'énergie potentielle totale de la plaque donnée par :

$$\pi = U + W$$

III-23

Où U et W sont respectivement l'énergie de déformation potentielle et le travail des forces externes.

L'énergie de déformation potentielle est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\{\varepsilon^0\}^T [A] \{\varepsilon^0\} + \{k\}^T \{D\} \{k\} + \{\gamma_z^0\}^T \{A_s\} \{\gamma_z^0\} \right) d\Omega$$

III-24

Le travail externe des forces dans le plan dû au chargement mécanique donné par :

$$W = \int_{\Omega} \{\varepsilon^{nl}\} \{N\} d\Omega$$

III-25

III.4. Formulation éléments finis

L'élément fini rectangulaire à quatre nœuds basé sur une simple déformation de cisaillement d'ordre élevé, formulé précédemment par Tati (2021b) pour l'analyse statique des plaques fonctionnellement graduées, est utilisé ici pour le comportement de flambement mécanique des plaques rectangulaires fonctionnellement graduées.

III.4.1. Relations cinématiques

Le vecteur du champ de déplacements de l'élément est défini par la figure 4.

$$\delta_i(x, y) = \sum_{i=0}^4 \Phi_i(x, y) \delta_i^\alpha \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad \text{III-26}$$

Où $\delta_i(x, y)$ est le vecteur de déplacement d'un point générique dans l'élément. δ_i^α et $\Phi_i(x, y)$ sont respectivement le vecteur de déplacement et les fonctions de forme de Lagrange bilinéaires associées au nœud.

$$\delta^\alpha \equiv u_0^\alpha, v_0^\alpha, w_0^\alpha, \varphi_x^\alpha, \varphi_y^\alpha \quad (a = 1, 2, 3, 4)$$

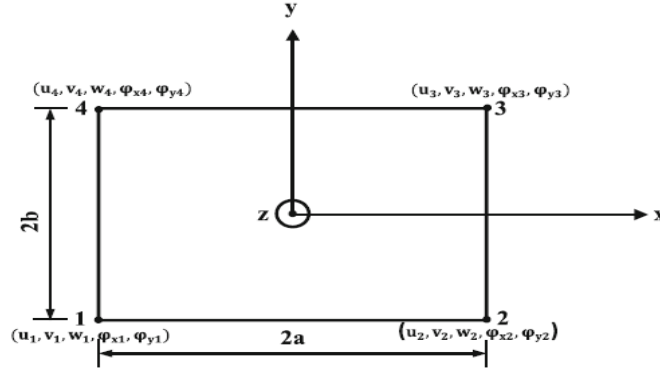


Figure III.4 : Géométrie et variables nodales de l'élément fini

$$\Phi_\alpha(x, y) = \frac{1}{4ab} (a + a_0 x)(b + b_0 y) \quad \text{III-27}$$

Où $a_0 = -1$ pour $\alpha = 1, 4$, $a_0 = 1$ pour $\alpha = 2, 3$; $b_0 = -1$ pour $\alpha = 1, 2$; $b_0 = 1$ pour $\alpha = 3, 4$.

$$\begin{aligned} \{\varepsilon_0\} &= [B_m] \{q\} \\ \{k\} &= [B_b] \{q\} \\ \{\gamma_z^0\} &= [B_s] \{q\} \\ \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} &= [G] \{q\} \end{aligned} \quad \text{III-28}$$

Où

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \Phi_{\alpha,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{\alpha,y} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{\alpha,y} & \Phi_{\alpha,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \quad \text{III-29}$$

m : membrane

$$[B_b] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \Phi_{\alpha,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{\alpha,y} \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{\alpha,y} & \Phi_{\alpha,x} \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \quad \text{III-30}$$

b : flexion

$$[B_s] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi_{\alpha,x} & \Phi_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{\alpha,y} & 0 & \Phi_{\alpha} \end{bmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \quad \text{III-31}$$

s : cisaillement

Pour lever tout éventuel phénomène de blocage par cisaillement, la technique de déformation de cisaillement naturelle supposée est introduite. Par conséquent, la matrice $[B_s]$ est remplacée par la matrice de relation déformation-déplacement naturelle supposée $[\bar{B}_s]$ donnée par Tati (2019 , 2021).

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \text{III-32}$$

$\{q\} = \{u_\alpha \ v_\alpha \ w_\alpha \ \varphi_{x\alpha} \ \varphi_{y\alpha}\}^T$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) est le vecteur de déplacement.

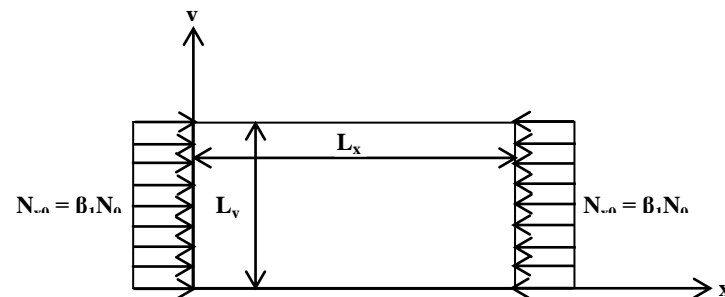


Figure III.5 : Charges en plan d'une plaque rectangulaire en FGM

III.4.2. Dérivation de la matrice de rigidité élémentaire

Le principe de l'énergie potentielle totale a été utilisé pour dériver les matrices élémentaire, de rigidité et géométrique. En utilisant des équations (20), (24), (25), (29), (30) et (31), l'expression de l'énergie potentielle totale de l'équation (26) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\{q\}^T ([B_m][A_m] + [B_b]^T [D][B_b]^T + [B_s]^T [A_s][B_s]) \{q\} dydx \\ & - \int_{-b}^b \int_{-a}^a q(x, y) \{q\}^T \{N(x, y)\}^T dx dy \end{aligned} \quad \text{III-33}$$

Où [N] est la matrice des contraintes résultant du chargement mécanique donnée par :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad \text{III-34}$$

L'annulation de la deuxième variation de l'énergie potentielle totale conduit au problème aux valeurs propres suivant :

$$([K^e] + [K_g^e]) \{q\} = 0 \quad \text{III-35}$$

Où $[K_e]$ est la matrice de rigidité donnée par :

$$[K^e] = \int_{-b}^b \int_{-a}^a ([B_m]^T [A][B_m] + [B_b]^T [D][B_b] + [\bar{B}_s]^T [A_s][\bar{B}_s]) dx dy \quad \text{III-36}$$

Où $[K_g^e]$ est la matrice géométrique élémentaire donnée par :

$$[K_g^e] = \int_{-a}^a \int_{-b}^b ([G]^T [N] [G]) dy dx dz \quad \text{III-37}$$

III.5. Présentation du programme :

III.5.1. Introduction :

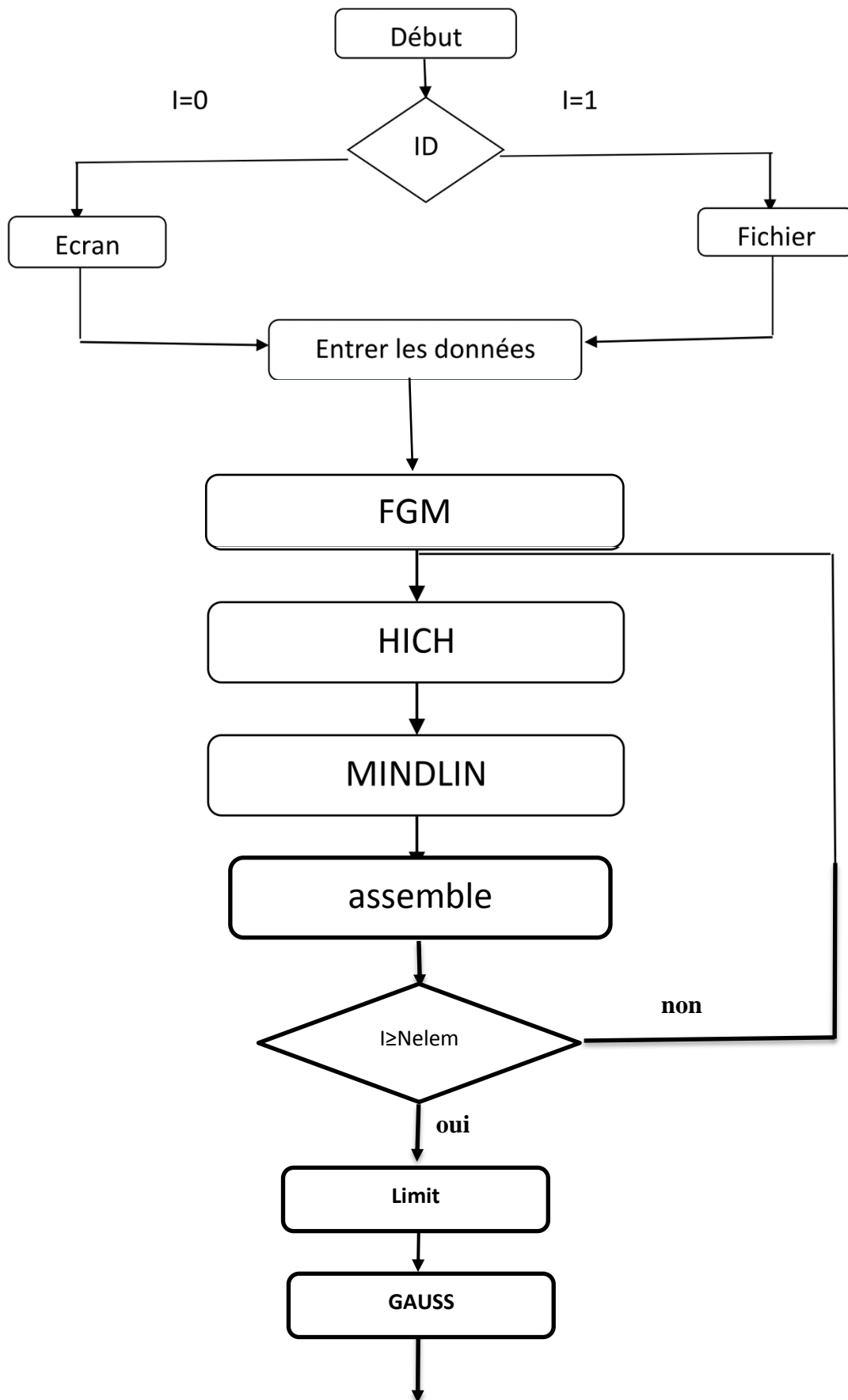
On a présenté les étapes nécessaires à l'obtention la matrice rigidité, et la matrice géométrique. La résolution d'un problème par méthode des éléments finis entraîne le calcul de la matrice rigidité, et la matrice géométrique.

Les valeurs propres 'les charges critiques ' de la structure étaient reliées aux matrices rigidité, et matrice géométrique par l'équation $([K_e] + [K_g^e])\{q\} = 0$

Dans cette méthode, les valeurs inconnues sont les valeurs propres 'les charges critiques' pour le flambage mécanique N_{cr} . Dans cette étude, on utilise programme en langage **FORTRAN77** et un autre programme en langage **MATLAB** le premier programme permet de calculer de la matrice rigidité $[K_e]$, et la matrice géométrique $[K_g^e]$. Le deuxième programme destiné pour trouver les valeurs propres des charges critiques à partir de résoudre l'équation suivante :

$$DET([K] + \lambda[K_g]) = 0 \quad \text{III-35}$$

III.5.2. Organigramme du programme :



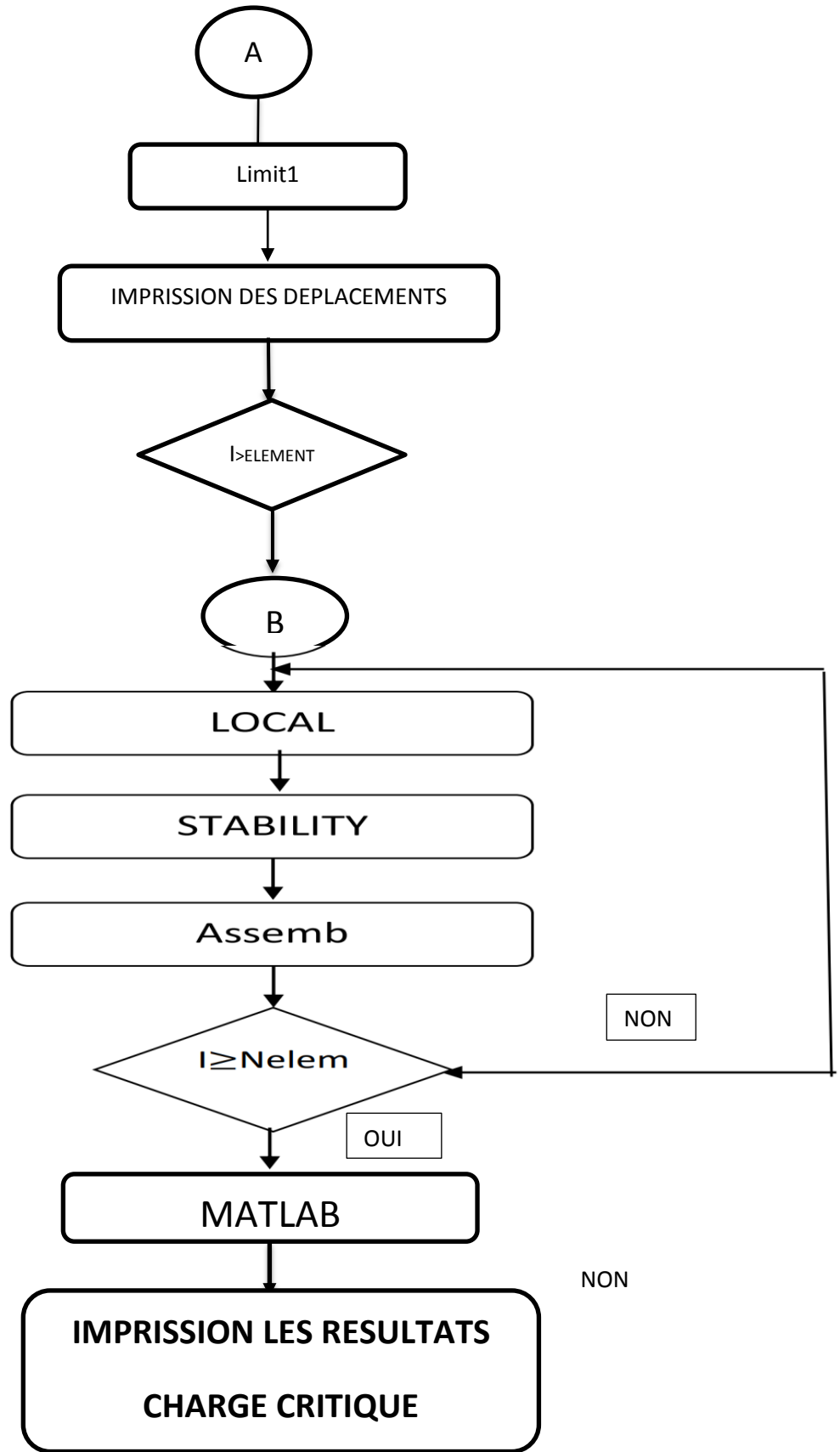


Figure :III .6.Organigramme du programme

III.5.3. Description des « routines » du programme :

Tableau III-1: Fonctions des routines

Les routines	La fonction
FGM	calculer les caractéristiques mécaniques du matériaux
Hich	Construction du tableau de localisation.
Mindlin	Construction des matrices de rigidité élémentaires
Force	Création du vecteur forces élémentaire.
Assemb	L'assemblage de les matrices de rigidité élémentaires et le vecteur de force élémentaire dans la matrice de rigidité et le vecteur force, globaux respectivement
Limite1	Permet d'introduire les conditions aux limites pour calculer les déplacements
Gauss	Cette routines résout le système d'équation linéaire et calculer les déplacements à partir de l'équation $F = K\delta$
Stabilité	Calcul matrice géométrique élémentaire.
ASSEMB	Calcul la matrice géométrique globale

III.6. Validation de l'élément fini dans l'analyse du flambage mécanique :

Dans cette partie, nous allons étudier la performance de l'élément rectangulaire à quatre nœuds utilisé pour résoudre le problème de flambage mécanique sous l'effet des efforts de compressions membranaires des plaques rectangulaire FGM. Les résultats obtenus seront comparé avec les résultats littérature.

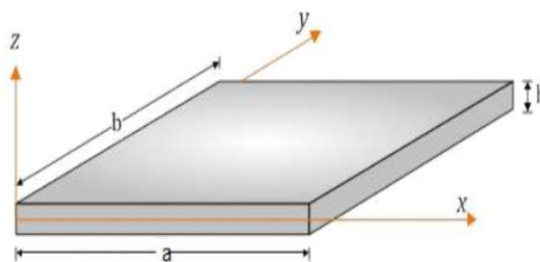


Figure III.7 : Géométrie de la plaque étudiée

Les conditions aux limites considérées pour une plaque simplement appuyée sur les quatre bords.

Dans cette section et pour les résultats d'applications on suppose une plaque FGM constitué d'un Mélange (métal+ céramique). les propriétés mécaniques des constituant suivantes :

- $E_M = 70 \text{ GPa}$,
- $E_C = 380 \text{ GPa}$,
- Le rapport de Poisson de la plaque est considéré comme constant dans l'épaisseur et égale à 0,3. Pour plus de commodité, les quantités non dimensionnelles suivantes sont utilisées pour présenter les résultats numériques sous forme de tableaux :
- Les résultats au calculer suivant la formule :
$$\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} L_x^2}{E_m h^3}$$

1er application :

Tableau III .2: Charge Critique de flambement sans dimension d' une plaque FGM Sous chargement Uniaxiale (EL: SSSS $L_x \backslash L_y = 1$ $L_x = 10$)

Maillage Référence	8*8	12*12	16*16	Reddy	Zenkour
P=0	18,9630	18,7474	18,6729	18,5400	18,5785
P=1	9,5342	9,4248	9,3870	9,2990	9,3391
P=2	7,4030	7,3184	7,2892	–	–
P=5	6,1356	6,0669	6,0432	5,990	6,0330
P=10	5,5358	5,4745	5,4532	5,4200	5,4528

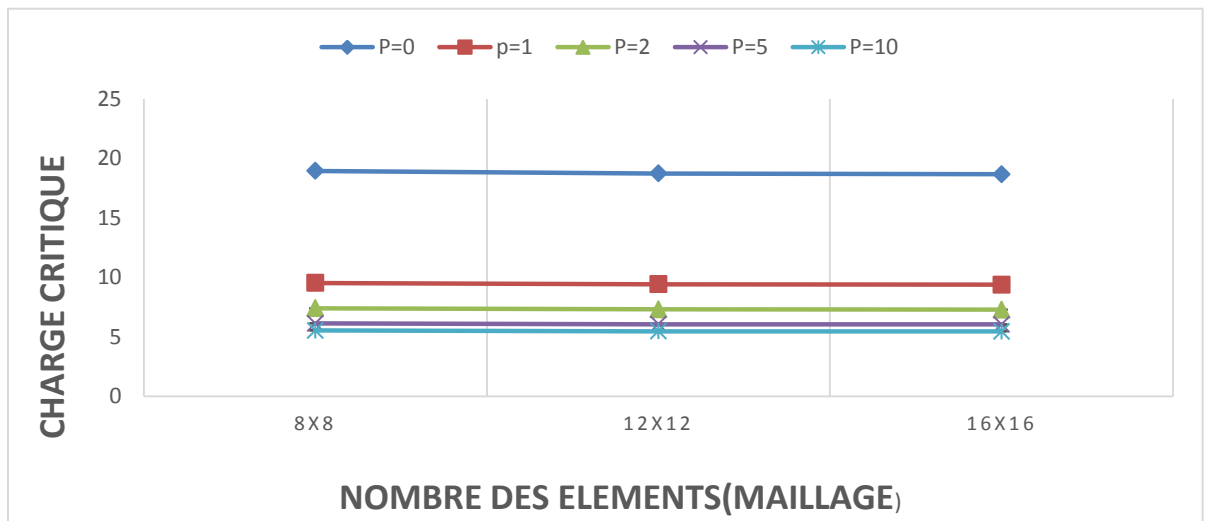


Figure III.8 : Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM Simplement appuyé (SSSS) ET $L_x = L_y$

On peut observer que les résultats calculés à l'aide du modèle proposé sont en excellent accord avec ceux rapportés par Reddy et Zenkour

2em application :

Tableau III .3: Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM Uniaxiale (EL : SSSS $L_x \backslash L_y = 2$ $L_x = 20$)

Maillage Référence	8*16	12*24	16*32	Reddy	Zenkour
P=0	65.1943	64.5559	64.3349	63.7800	64.0842
P=1	33.4879	33.1501	33.0332	32.8979	32.460
P=2	25.6837	25.4290	25.3409	24.8600	25.3726
P=5	20.0730	20.0992	20.0340	19.8400	20.2122
P=10	17.9139	17.7529	17.6971	17.7200	17.9227

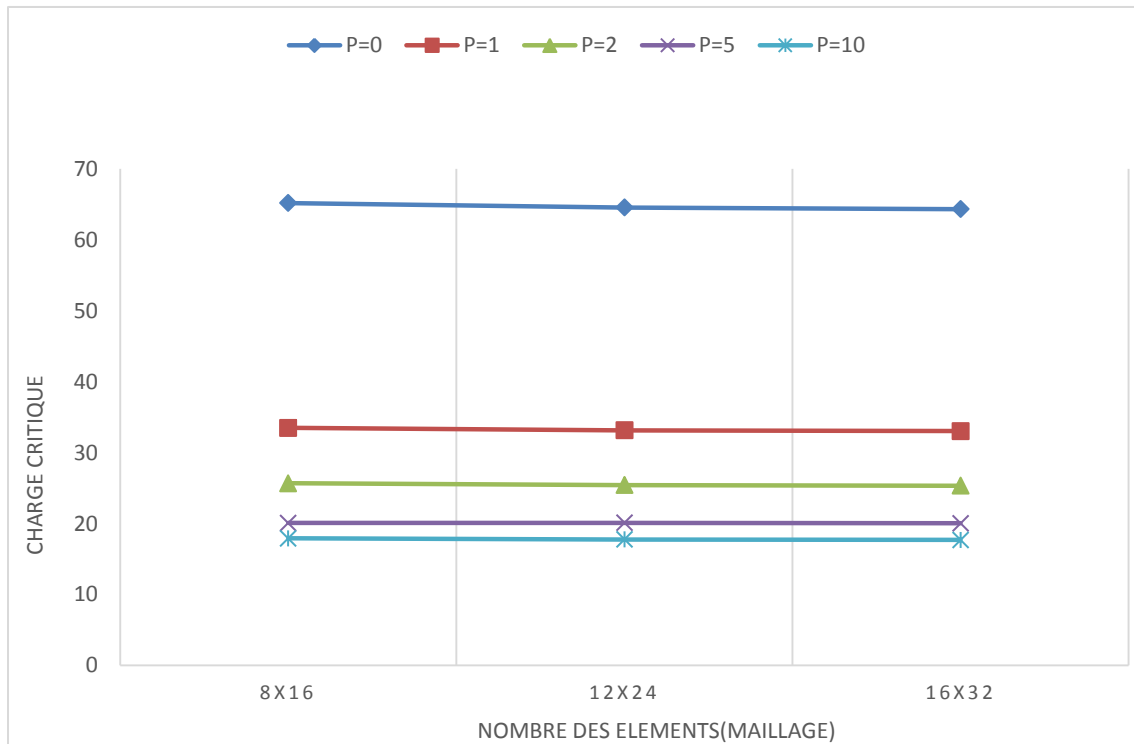


Figure III.9 : Charge Critique de flambement sans dimension d'une Plaque FGM simplement appuyé (SSSS) ET $L_x = 2L_y$.

On peut déduire de cette figure que la charge critique du flambement non dimensionnelle diminue initialement, puis la variation des courbes n'est pas significative en augmentant la valeur de l'indice de la loi de puissance

III.7. CONCLUSION :

Dans ce chapitre, nous avons étudié la validité de l'élément fini pour analyser le Flambage mécanique des plaques FGM En particulier nous sommes intéressés à calculer la charge critique de cette dernière les résultats obtenus par notre élément ont été comparé avec ceux obtenue analytiquement par ZENKOUR et REDDY les différents (Tableau III.2 / Tableau III.3) résultats ont montré la rapidité de convergence et la stabilité de l'élément.

Chapitre VI

ETUDE PARAMETRIQUE

étude paramétrique

VI -1) Introduction :

L'application des efforts de compressions dans un seul sens (le sens des abscisses x-x) de la plaque FGM entraine un flambement mécanique de celle-ci. Par conséquent, il devient nécessaire d'étudier l'effet des efforts de compressions critiques sur la réponse de la plaque FGM en prenant compte toute condition pour éviter la rupture mécanique due à la fatigue de la structure vis à vis aux chargements subies.

Dans notre étude, nous prenons en considération les paramètres suivants :

- les conditions aux limites (SSSS et EEEE).
- le rapport d'épaisseur (Lx/h).

Dans cette étude on adopte un maillage 16X16.

Tableau VI.1 : Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM Simplement appuis(SSSS) sous chargement uiaxial, ($Lx /Ly =1$) $Lx=10$ ET (P : variante) .

	$P=0$	$P=1$	$P=2$	$P=3$	$P=4$	$P=6$	$P=8$	$P=10$
CHARGE CRIYIQUE	18.6707	9.3857	7.2884	6.0065	6.2504	5.8869	5.6450	5.4525

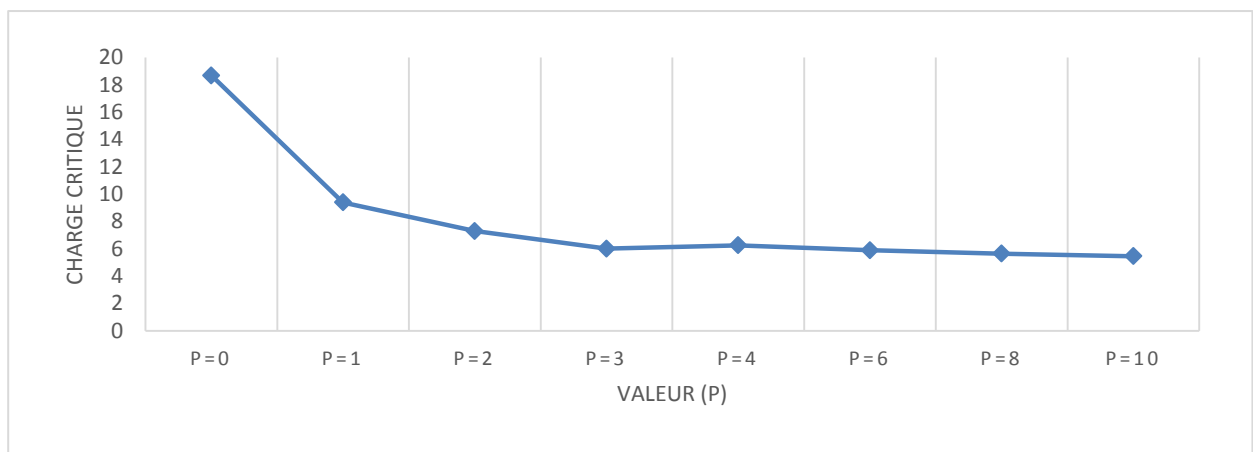


Figure VI.1 : Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM Simplement appuis(SSSS) sous chargement uiaxial, ($Lx /Ly =1$) $Lx=10$ ET (P : variante) .

Tableau VI.2 : Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM encastrée (EEEE) sous chargement uiaxial, ($L_x/L_y = 1$) $L_x=10$ ET (P : variante) .

	$P=0$	$P=1$	$P=2$	$P=3$	$P=4$	$P=6$	$P=8$	$P=10$
CHARGE CRIYIQUE	34.5398	32.6232	28.2586	25.8513	23.8061	23.0576	22.3424	17.7421

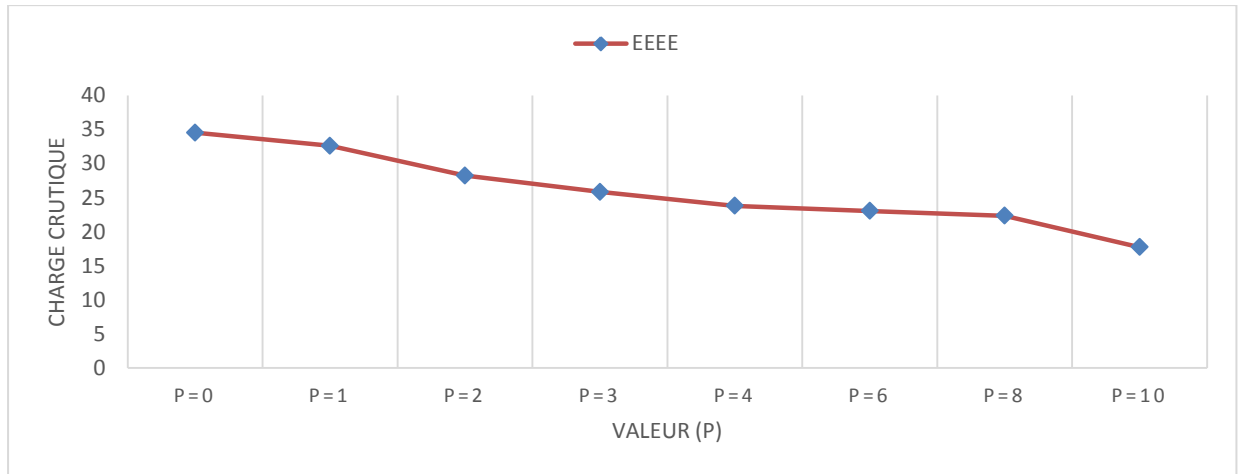


Figure VI.2 : Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM encastrée (EEEE) sous chargement uiaxial, ($L_x/L_y = 1$) $L_x=10$ ET (P : variante) .

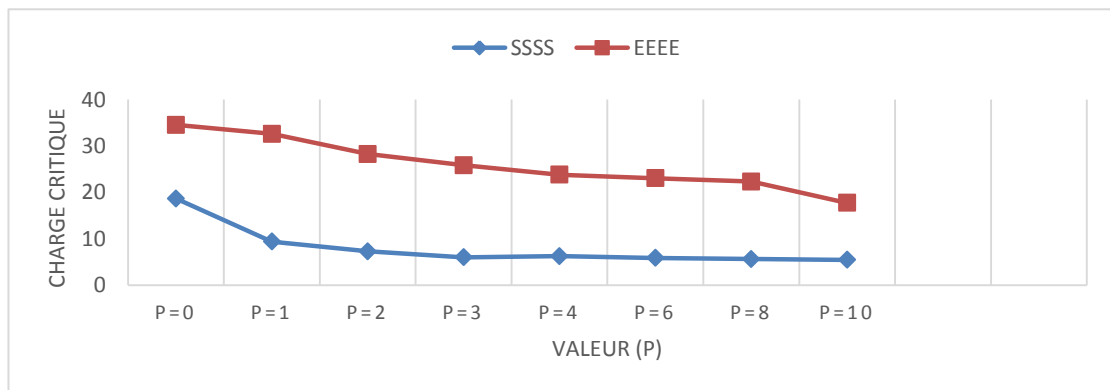


Figure VI. 3 : Charge de flambement Critique sans dimension d'une plaque FGM (EEEE ET SSSS) sous chargement uiaxial, ($L_x/L_y = 1$) $L_x=10$ ET (P : variante) .

Tableau VI.3 : Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM Simply supported (SSSS) avec chargement uniaxial, $L_x=10$ ET (P : variante) .

L_x/h	$P=0$	$P=1$
5	16.0812	8.2568
10	18.6701	9.3853
20	19.4527	9.7173
30	19.6513	9.8036
50	19.6839	9.7697
100	19.7161	9.7833

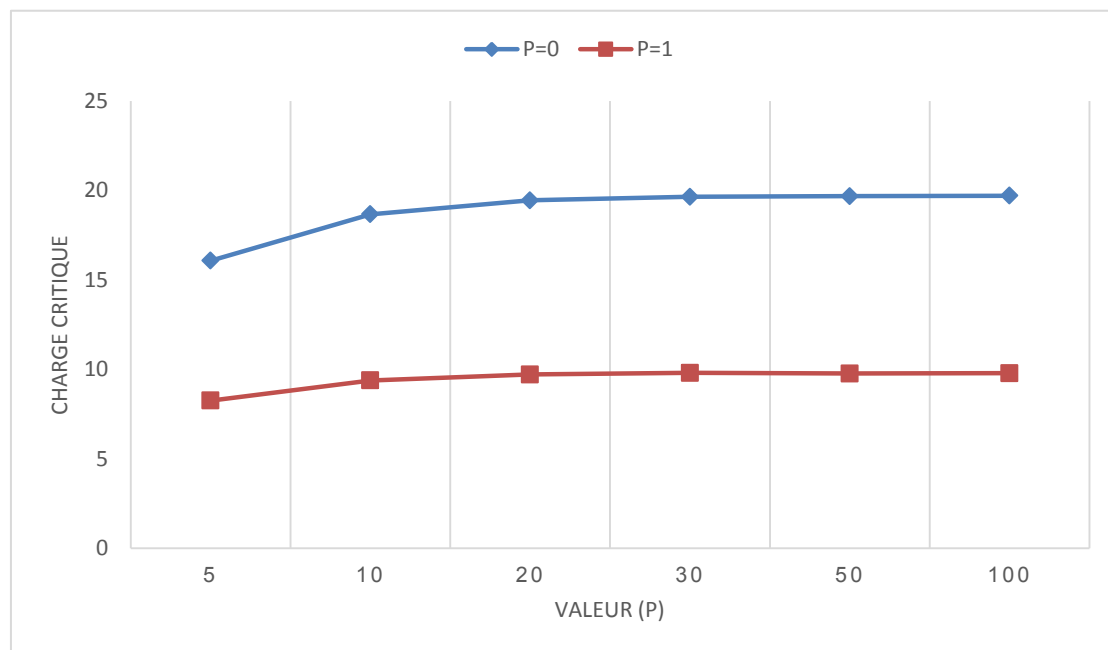


Figure VI.4 : Charge Critique de flambement sans dimension d'une plaque FGM Simply supported (SSSS) avec chargement uniaxial, $L_x=10$ ET (P : variante)

VI.2.Conclusion : Les rapports d'aspect $L_x/L_y = 1$ and $L_x/L_y = 2$ ont été considérés, on peut observer que la charge critique de flambement augmente du coté sur épaisseur jusqu' à $L_x/h=10$, alors qu'un petite changement a mesure que la plaque, et les charge critiques des plaques rectangulaires sous chargement uniaxial sont supérieures à celles des plaques carrées pour $P=0$.

Ce qui correspond à des plaques homogènes (entièrement en céramique), les charges critiques sont nettement supérieures à celles de la plaque à gradient fonctionnel, orque $p>0$ on peut aussi observer que les valeurs de charge critique varient légèrement pour des valeurs de P supérieures .

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- 1 Berthelot J.M. "Matériaux composites." Comportement mécanique et analyse des structures 4 (1999).
- 2 Bessaim A. Etude de l'influence de cisaillement transverse et de la déformation normale sur le comportement statique et dynamique des structures FGM. (2014). Thèse de doctorat.
- 3 Birman V. Buckling of functionally graded hybrid composite plates. In: Proceedings of the 10th Conference on Engineering Mechanics, vol. 2, pp 1199–292 (1995).
- 4 Boch P., Chartier T., Huttepain M. Tape casting of Al₂O₃/ZrO₂ laminated Composites, J. Am. Ceram. Soc; 69 (8):191-192 (1986).
- 5 Courant R.L. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. Bulletin of the American Mathematical Society, 49 :1–23, (1943).
- 6 Bouiadjra M.B., Houari M.S.A., Tounsi A. Thermal buckling of functionally graded plates according to a four-variable refined plate theory. J. Therm. Stress. **35**, 677–694 (2012).
- 7 Boukhari A. Application des théories à ordre élevé de déformation de cisaillement pour l'étude du comportement mécanique des plaques épaisses. Thèse de doctorat en 3ème cycle, université Djillali Liabès, Sidi Bel Abbes (2016).
- 8 Bouyaya L. Etude théorique et numérique du comportement dynamique D'un stratifié composite unidirectionnel, 21ème Congrès Français de Mécanique. Bordeaux, 26 au 30 août (2013).
- 9 Fahsi A. Analyse du flambement des plaques FGM sous différents chargement. (2017). Thèse de doctorat.
- 10 Fekrar A., El Meiche N., Bessaim A., Tounsi A., Adda Bedia, E.A. Buckling analysis of functionally graded hybrid composite plates using a new four variable refined plate theory. Steel Compos. Struct. **13**(1), 91–107 (2012).
- 11 Feldman E., Aboudi J. Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading. Compos. Struct. **38**, 29–36 (1997).
- 12 Gao Y., Xiao W., Zhu H. Snap-buckling of functionally graded multilayer graphene platelet-reinforced composite curved nanobeams with geometrical imperfections. Eur. J. Mech. A/Solids **82**, 2020 (2020).
- 13 Gay D., and HOA S.V. Composite materials: design and applications. CRC press, 2007.
- 14 Hassan A.H.A., Kurgan N. A review on buckling analysis of functionally graded plates under thermo-mechanical loads. Int. J. Eng. Appl. Sci. **11**(1), 345–368 (2019).
- 15 Houari MSA, Analyse des contraintes thermoélastique: lois des puissances. Thèse de Doctorat,

- Université de Djilalli Liabès Sidi Bel Abbès, Algérie (2011).
- 16** Huang Y., Li X.F. Buckling of functionally graded circular columns including shear deformation. *Mater. Des.* **31**(7), 3159–3166 (2010).
- 17** Huang H., Rao D. Thermal buckling of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent elastoplastic properties. *Contin. Mech. Thermodyn.* **32**, 1403–1415 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00854-3>.
- 18** Jędrysiak J., and Kaźmierczak-Sobińska M. Theoretical analysis of buckling for functionally graded thin plates with microstructure resting on an elastic foundation. *Materials* **13**, 4031 (2020).
- 19** Kawasaki A., Watanabe R. Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials. *Ceramics International*, 8842(95):73–83 (1997).
- 20** Kieback B., Neubrand A., Riedel H. Processing techniques for functionally graded materials. *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2):81–106 (2003).
- 21** Koizumi M. Recent Progress of functionally graded materials in Japan. *Ceram. Eng. Sci. Proc*; 13 (7-8): 333-347 (1992).
- 22** Koizumi M. The concept of FGM. *Ceram. Trans. Funct. Grad. Mater.* **34**, 3–10 (1993).
- 23** Koizumi M. FGM activities in Japan. *Composites*; 28 (1-2):1– 4 (1997).
- 24** Kokini K., Takeuchi Y. Multilayer ceramic thermal barrier coatings under transient thermal loads. In *Proceeding of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90-Sendai-Japan*; 31-36 (1990).
- 25** Layachi M. Effet des efforts membranaires sur la vibration des plaques stratifiées en matériaux composite, (2019). Master thesis.
- 26** Layachi S. Vibration des plaques stratifiées menus d'ouvertures rectangulaires excentrées, (2019). Master thesis.
- 27** Meksi A. Comportement Mécanique des Plaques Sandwiches sur Fondations Elastiques, (2015). Thèse de doctorat.
- 28** Mudhaffar I.M., Tounsi A., Chikh A., Al-Osta M.A., Al-Zahrani M.M., Al-Dulaijan S.U. Hygro-thermo-mechanical bending behavior of advanced functionally graded ceramic metal plate resting on a viscoelastic foundation. *Structures* **33**, 2177–2189 (2021).
- 29** Na K.S., Kim J.H. Three-dimensional thermomechanical buckling analysis for functionally graded composite plates. *Compos. Struct.* **73**, 413–422 (2006).
- 30** Niino M., Suzuki A., Hirai T., Watanabe R., Hirano T., Kuroishi N. Method of producing a

- functionally gradient material. U.S. Patent 4571099 (1988).
- 31** Nguyen T. K., Sab K., Bonnet G. Shear correction factors of functionally graded plates. *Mech. Advanced Mater. Struct*; 14 (8): 567-575 (2007).
- 32** Okamura H. State of the art of material design projects for severe service applications, *Mater. Sci. Eng :A*; 143 (1-2): 3-9 (1991).
- 33** Phan N., Reddy J. Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, 12, 2201-2219 (1985).
- 34** Rebai B., Bouhadra A., Bousahla A.A., et al. Thermoelastic response of functionally graded sandwich plates using a simple integral HSDT. *Arch. Appl. Mech.* **91**, 3403–3420 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00419-021-01973-7>
- 35** Reddy J. *Mechanics of Laminated composites plates. Theory and analysis.* CRC Press, Boca Raton (1997).
- 36** Refrafi S. Etude des effets des conditions hygrothermiques sur la réponse mécanique des plaques sandwiches fonctionnellement graduées en utilisant une théorie avancée des plaques. (2020). Thèse de doctorat.
- 37** Ritz W. Ueber eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations probleme der mathematischen Physik. *J. Reine Angew. Math.*, 135 :1–61, (1908).
- 38** Sedira L . Contribution à la Modélisation de Composites 2D/3D à l'Aide d'Eléments Finis Spéciaux (2013). Thèse de doctorat. Reims.
- 39** Strang, G. and G. Fix. *An analysis of the finite element method.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- 40** Talha M. and Singh, B.N. Thermo-mechanical buckling analysis of finite element modeled functionally graded ceramic-metal plates. *Int. J. Appl. Mech.* **3**(4), 867–880 (2011). <https://doi.org/10.1142/S1758825111001275>
- 41** Trabelsi S., Frikha A., Zghal S., Dammak F. A modified FSDT-based four nodes finite shell element for thermal buckling analysis of functionally graded plates and cylindrical shells. *Eng. Struct.* **178**, 444–459 (2019).
- 42** Tati A and Hessini M. Analyse du comportement de flambage des plaques minces stratifiées en matériaux composites par la méthode des éléments finis. 2014.