

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département de Génie civil et d'Hydraulique
Réf. :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة المدنية والري
المرجع:

Thèse présentée en vue de l'obtention du Diplôme de
Doctorat en sciences
Spécialité : **Hydraulique**

Option : **Ouvrages Hydrauliques**

Thème

**Introduction a l'étude de l'écoulement uniforme dans
quelques aqueducs de Rome par la méthode du modèle
rugueux de référence (MMR)**

Présenté par : **LAMRI Ahmed Amine**

Soutenu le : 14 Octobre 2021

Devant le jury composé de:

REMINI Boualem	Professeur	Président	Université de Blida
BOUZIANE M Tewfik	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
MIMECHE Leila	MCA	Examineur	Université de Biskra
BERREKSI Ali	MCA	Examineur	Université de Bejaïa

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله و الصلاة و السلام على رسول الله و على آله و أصحابه أجمعين

أما بعد:

يقول تعالى " أو لم ير الذين كفروا أن السماوات و الأرض كانتا رتقا ففتقناهما و جعلنا من الماء كل شئ حي أفلا يؤمنون " {الأنبياء 30}.

REMERCIEMENTS

Louange Dieu tout puissant pour tout ce qu'il m'a donné afin que je puisse terminer ce travail.

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement et très fort mon promoteur Dr. Mohamed. T. BOUZIANE, professeur à l'Université de Biskra pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de diriger ce travail. Je le remercie infiniment pour son aide, pour ses conseils judicieux et ses orientations, afin que je puisse mener ce travail à terme.

Je remercie chaleureusement Dr. Remini. Boualem, professeur, à l'Université de Blida qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance. Je tiens à lui exprimer ma plus profonde gratitude.

J'exprime mes plus sincères remerciements à Dr. Mimeche. Leila, maitre de conférence A à l'Université de Biskra, à Dr. Berreksi. Ali, maitre de conférence A à l'Université de Bejaia, pour intérêt qu'ils portent à ce travail en acceptant de le juger.

A tous mes professeurs qui ont contribué à ma formation de près ou de loin.

Je tiens à remercier profondément Dr. Said, M. Easa, professeur à l'université de Ryerson, Toronto pour toutes ces participations dans la préparation et rédaction des articles et son soutien.

Mes remerciements s'adressent également à Dr. Willi H, Hager, Professeur Émérite à ETH Zurich pour ses documentations utilisées dans la présente thèse.

Enfin, je dédie ce modeste travail à mes parents, qui m'ont donnée de soutien et l'encouragement permanent.

A mes parents

Résumé

La conception des conduites et canaux sous conditions d'écoulement uniforme implique la détermination des paramètres suivants : les pertes de charges, le diamètre de la conduite, les profondeurs normales et critiques, ainsi que l'identification de l'état de stabilité de l'écoulement.

Les équations de résistance gouvernantes de l'écoulement ont des formes implicites en fonction de ces paramètres. Les équations de ces paramètres peuvent être résolues traditionnellement par le processus itératif.

La présente étude a pour objectif de développer des solutions explicites directes des paramètres de l'écoulement uniforme utilisant le théorème de Lagrange et la fonction W -Lambert. L'avantage des solutions développées est qu'elles sont plus efficaces et plus exactes que les meilleures solutions avancées.

De plus, un nouveau critère d'identification de l'état de la stabilité de l'écoulement a été développé en combinant le nombre de Vedernikov avec la loi logarithmique de résistance, permettant l'identification directe de l'état de la stabilité en introduisant le concept de la pente d'énergie minimale de la stabilité neutre.

Ces solutions peuvent être utilisées avec avantage dans les études d'optimisation des réseaux d'alimentation d'eau potable, d'assainissement, d'irrigation et de drainage.

Mots Clés : Solutions explicites, conduit circulaire, pertes de charges, théorème de Lagrange, résistance, canaux a surface libre; profondeurs normale et critique, écoulement uniforme, stabilité.

Abstract

The design of pipes and open channels under uniform flow conditions involves the determination of the following parameters: head loss, pipe diameter, normal depth, and critical depth, and the identification of the state of the stability of the flow.

The resistance governing equations are implicit with respect to these parameters. Traditionally, the corresponding equations can be solved by the iterative process.

The present study aims to develop direct, explicit solutions for uniform flow parameters using the Lagrange theorem and the *W*-Lambert function. The advantage of the developed solutions is that they are more efficient and more accurate than the best-advanced solutions.

Furthermore, a new criterion for identifying the state of flow stability is developed by a combination of the Vedernikov number and the logarithmic law of resistance, enabling the flow stability state to be directly identified by introducing the concept of the minimal energy slope of the neutral stability.

These solutions can be used with advantage in optimisation studies for water supply, sewers, irrigation and drainage systems.

Keywords: Explicit solutions, pipe, head loss, Lagrange theorem, resistance, open channels, normal and critical depths, uniform flow, stability.

المُلخَص

إن تصميم القنوات المملوءة و المفتوحة يتطلب تحديد عوامل الجريان الآتية: فقدان الطاقة, قطر القناة, العمق الطبيعي و العمق الحرج, و تعيين حالة استقرار الجريان.

معادلات الجريان الحاكمة لهذه العوامل ذات طبيعة معقدة. تقليدياً, يمكن حل هذه المعادلات عن طريق العملية التكرارية.

هدف الدراسة الحالية هو تطوير حلول مباشرة مبتكرة لعوامل الجريان باستخدام نظرية لاجرانج و معادلة لامبرت. الحلول المُطَوَّرَة أكثر دقة و فعالية مقارنة بأحسن الحلول المتقدمة الموجودة.

و في هذه الرسالة تم أيضا تطوير معيار جديد لتحديد حالة استقرار التدفق أو اضطرابه عن طريق تركيب عدد فادارنيكوف مع المعادلة اللوغارتمية لمقاومة الجريان, مما يسمح بتعيين مباشر لحالة استقرار الجريان عن طريق إدخال تصور ميل الطاقة الأدنى للاستقرار الحيادي .

يمكن استعمال الحلول المقترحة بأداء أفضل في دراسات, شبكات التزويد بالمياه الصالحة للشرب, شبكات التطهير أو الصرف الصحي و الري, و شبكات تصريف المياه.

الكلمات المفاتيح: حلول مباشرة, قناة دائرية, فقدان الطاقة, نظرية لاجرانج, مقاومة, قنوات مفتوحة, العمق الطبيعي و الحرج, جريان منتظم, استقرار.

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	01
----------------------------	----

CHAPITRE I ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Introduction.....	05
I.2. Développement de l'écoulement uniforme.....	05
1.2.1 Description.....	05
1.2.2 Régimes d'Écoulement.....	06
I.3. Formules Empirique de l'Écoulement Uniforme.....	09
I.3.1 Formule de Chézy.....	09
I.3.1. A. La formule de Ganguillet et Kutter.....	09
I.3.1. B. La formule de Bazin.....	10
I.3.1.C. La formule de Powell.....	11
I.3.2 Formule de Manning.....	11
I.4. Distribution des Vitesses dans l'Écoulement Turbulent.....	13
I.4.1 Interprétation théorique du coefficient de Manning.....	15
I.5. Perte de Charges.....	16
I.6. Problèmes de Conception de Conduite Circulaire en Charge.....	17
I.6.1 Problème de Débit.....	17
I.6.2 Détermination des Pertes de Charges.....	18
I.6.3 Détermination du Diamètre.....	20
I.7. Problèmes de Conception des Conduite et Canaux à Surface libre.....	22
I.7.1 Problème de Débit.....	22
I.7.2 Détermination des Pertes de Charges.....	23
I.7.3 Détermination du Diamètre.....	23
I.7.4 Détermination de la Profondeur Normale.....	24
I.7.4.1 Conduite circulaire.....	24
I.7.4.2 Canal Triangulaire.....	27
I.7.4.3 Canal Rectangulaire.....	28
I.7.4.4 Canal Parabolique.....	33
I.7.4.5 Tunnels de Formes non Circulaires.....	36
I.7.4.5.1 Tunnel de forme Ovoïdal (Gill 1987).....	37
I.7.4.5.2 Tunnel de Forme Fer a Cheval Type I.....	39

I.8. Les Contraintes des Vitesses.....	40
I.9. L'Écoulement Critique.....	42
I.9.1 Conduite Circulaire.....	42
I.9.2 Autres Formes de Sections Pratiques.....	44
I.9.3 Sections non Circulaires.....	44
I.10. Identification de l'Instabilité de l'Écoulement Uniforme par le Critère d'Iwasa (1954).....	46
I.10.1 Dérivation du Critère de Stabilité pour un Canal Rectangulaire Rugueux.....	47
I.10.2 Dérivation du critère de stabilité pour un canal rectangulaire Lisse.....	49
I.11. Identification de l'Instabilité de l'Écoulement Uniforme par le Critère de Bijankhan et Kouchakzadeh.....	51
I.12. Entrainement d'Air.....	53
Synthèse et Conclusion.....	53

CHAPITRE II

DETERMINATION DES PERTES DE CHARGES

II.1. Introduction.....	55
II. 2. Méthodologie et Théorème de Lagrange.....	55
II. 3. Détermination des pertes de charges pour la conduite circulaire sous pression.....	56
Exemple. 1.1.....	58
II. 4. Problème des Pertes de Charges pour les Canaux a Surface Libre.....	59
Exemple. 2.1.....	61
II. 5. Problème des Pertes de Charges pour les Canaux Très Larges.....	61
II.5.1 Validation par des essais expérimentaux.....	63
Conclusion.....	64

CHPITRE III

DETERMINATION DU DIAMETRE DE LA CONDUITE

III.1. Introduction.....	65
III. 2. Méthodologie et la Fonction W-Lambert.....	65
III.3. Détermination du Diamètre de la Conduite Circulaire Sous Pression (Pipe).....	66
III. 4. Problème du Diamètre pour les Canaux a Surface Libre.....	70
Conclusion.....	71

CHAPITRE IV

DETERMINATION DES PROFONDEURS NORMALES ET CRITIQUES

IV.1. Introduction.....	72
IV. 2. Problème de Détermination de la Profondeur Normale.....	72
IV. 2.1 Canal Triangulaire.....	73
IV. 2.2. Canal Rectangulaire.....	76
IV. 2.2.1. Équation de Manning.....	76
IV. 2.2.2. Équation de Chézy.....	78
Exemple.4.1.....	80
IV. 2.3. Canal Rectangulaire Large.....	80
IV.2.3.1 Validation par des Essais Expérimentaux.....	83
IV. 2.4. Canal Naturel de Profile Cosinus.....	85
Exemple.4.2.....	91
IV. 2.5. Canal Parabolique.....	91
IV. 2.5.1. Équation de Manning.....	91
IV. 2.5.2. Équation de Chézy.....	93
Exemple.4.3.....	94
IV. 2.6. Conduite de Forme Circulaire.....	95
IV. 2.6.1 Équation de Manning.....	95
IV. 2.6.2. Équation de Chézy.....	98
IV. 2.6.2.1 Profondeur Normale Utilisant la Sensitivité Hydraulique.....	100
Exemple.4.4.....	102
IV. 2.7. Conduites de Forme non Circulaire.....	102
IV. 2.7. A. Tunnel de Forme Ovoïdale (Gill 1987).....	102
IV. 2.7. A.1 Éléments Géométriques.....	102
IV. 2.7. A.2 Équation de Manning.....	104

IV. 2.7. A.2 Variation des Vitesses et Débits.....	105
IV. 2.7. A.3 Équation de Chézy.....	109
Exemple.4.5.....	111
IV. 2.7. B. Tunnel de Forme Fer a Cheval Type I.....	112
IV. 2.7. B.1 Éléments Géométriques.....	112
IV. 2.7. B.2 Équation de Manning.....	113
IV. 2.7. B.3. Variation des Vitesses et Débits.....	114
IV. 2.7. B.4 Équation de Chézy.....	118
Exemple4.6.....	120
Exemple4.7.....	121
IV. 3. Problème de Détermination de la Profondeur Critique.....	122
IV. 3.1. Conduite Circulaire.....	122
IV. 3.2. Tunnel de Forme Ovoïdal (Gill 1987).....	124
IV. 3.3. Tunnel de Forme Fer à Cheval Type I.....	124
Exemple.4.8.....	125
Conclusion.....	125

CHPITRE V

CRITERE DE STABILITE DE L'ECOULEMENT

V. 1. Introduction.....	126
V.2 Canal Rectangulaire.....	126
V.3 Comparaison avec des Données Expérimentales.....	129
V.4. Canal Parabolique.....	130
V.5. Conduite Circulaire.....	132
V.6. Canal Triangulaire.....	133
V.7. Tunnel Ovoïdal (Gill 1987).....	134

V.8. Tunnel de Forme Fer à Cheval Type I.....135

 Conclusion.....137

CONCLUSION GENERALE.....138

NOTATIONS.....141

REFERENCES.....142

LISTE DES FIGURES

Figure. 1.1. Relation profondeur vitesse pour quatre régimes (d'après Robertson et Rouse 1941).....	09
Figure.1. 2. Relation entre ψ et D/ε d'après l'équation (1.45).....	21
Figure.1.3. géométrie du canal parabolique.....	33
Figure .1.4. Géométrie de la section ovoïdale (Gill 1987)	37
Figure.1.5. Variation de la sensibilité relative selon l'équation (1.128)	38
Figure.1.6. Coupes des sections du tunnel fer à cheval type I.....	39
Figure.1.7 Régimes d'écoulements pour le tunnel ovoïdale.....	45
Figure.1.8. Critère de stabilité pour le canal hydrauliquement rugueux.....	49
Figure.1.9. Critère de stabilité pour le canal hydrauliquement lisse.....	50
Figure.1.10. Zones de stabilités pour le tunnel ovoïdale.....	52
Figure. 2.1. Pourcentage d'erreur utilisant l'équation (2.24).....	62
Figure. 2.2. Pourcentage d'erreur utilisant l'équation (3.15).....	69
Figure. 4.1. Pourcentage d'erreur utilisant les équations (4.16).....	76
Figure. 4.2. Pourcentage d'erreur utilisant les équations (4.18) et (4.19).....	77
Figure. 4.3. Pourcentage d'erreur utilisant l'équation (4.39).....	82
Figure. 4.4. Pourcentage d'erreur utilisant l'équation (4.40).....	83
Figure. 4.5. Géométrie du canal naturel.....	85
Figure. 4.6. Pourcentage d'erreur utilisant l'équation (4.63).....	89
Figure. 4.7. Pourcentage d'erreur utilisant l'équation (4.64).....	90
Figure. 4.8. Pourcentage d'erreur utilisant les équations (4.68).....	92
Figure. 4.9. Pourcentage d'erreur utilisant les équations (4.72).....	93
Figure. 4.10. Courbe des variations du débit et vitesse relatifs.....	96
Figure. 4.11. Courbe des variations du débit et vitesse relatifs du tunnel ovoïdal.....	99
Figure 4.12. Variation de la sensitivity relative selon l'équation (4.84).....	100
Figure. 4.13. Courbe des variations du débit et vitesse relatifs pour la section ovoïdale.....	104

Figure. 4.14. Courbe des variations du débit relatif pour la section ovoïdale selon pour $\varepsilon/R_h=0$	106
Figure. 4.15. Courbe des variations du débit relatif pour la section ovoïdale selon pour $\varepsilon/R_h=0.01$	106
Figure. 4.16. Courbe des variations des vitesses relatives pour la section ovoïdale pour $\varepsilon/R_h=0$	108
Figure. 4.17. Courbe des variations des vitesses relatives pour la section ovoïdale pour $\varepsilon/R_h=0.01$	108
Figure. 4.18. Courbe des variations du débit et vitesse relatifs du tunnel ovoïdal (Chézy).....	110
Figure. 4.19. Courbe des variations du débit et vitesse relatifs du tunnel fer a cheval type I (Manning)..	113
Figure. 4.20. Courbe des variations du débit relatif pour la section fer a cheval type I pour $\varepsilon/R_h=0$	115
Figure. 4.20. Courbe des variations du débit relatif pour la section fer a cheval type I pour $\varepsilon/R_h=0.01$...	115
Figure. 4.22. Courbe des variations des vitesses relatives pour la section fer a cheval pour $\varepsilon/R_h=0$	117
Figure. 4.21. Courbe des variations des vitesses relatives pour la section fer a cheval pour $\varepsilon/R_h=0.01$...	117
Figure. 4.24. Courbe des variations du débit et de vitesse relatifs du tunnel fer a cheval type I (Chézy).	119
Figure. 4.25. Régimes d'écoulements pour une conduite circulaire.....	122
Figure. 5.1. Zones de stabilité pour le canal rectangulaire.....	127
Figure.5.2. Représentation graphique des données expérimentales.....	130
Figure. 5.3. Zones de stabilité pour le canal parabolique.....	131
Figure. 5.4. Zones de stabilité pour la conduite circulaire.....	132
Figure. 5.5. Zones de stabilité pour le tunnel ovoïdal (Gill 1987).....	134
Figure. 5.6. Zones de stabilité pour le tunnel de forme fer à cheval.....	136

LISTE DES TABLEAUX

Tableau.1.1. $v(t)$ pour l'eau d'après Hager et Schleiss (2009)	07
Tableau. 1.2 Coefficient de rugosité $K = 1/n[m^{1/3}s^{-1}]$ de la formule Manning Strickler.....	12
Tableau.1.3. Coefficient de rugosité $\varepsilon(mm)$	15
Tableau.1.4. Vitesses d'auto curage	41
Tableau.1.5. Vitesses de décapage.....	41
Tableau. 2.1. Comparaison des solutions développées avec les solutions existantes.....	58
Tableau.2.2. Validation de l'équation proposée par comparaison avec les données expérimentales.....	63
Tableau.3.1. Comparaison des erreurs relatives des solutions développées avec les solutions existantes..	69
Tableau.4.1. Validation par comparaison des données expérimentales avec les équations proposées.....	84
Tableau.5.1. Données expérimentales publiées par Cristo et al. (2010).....	129

INTRODUCTION GENERALE

Depuis plusieurs siècles, la résistance à l'écoulement dans les conduites et canaux a attiré l'attention des ingénieurs hydrauliciens. Même la simple question de quelle manière – et sur combien- la pente d'un canal affecte –t- elle les aspects de base de la conception du canal ? Les anciens canaux des civilisations égyptienne, sumérienne, et indienne ainsi que les aqueducs de Rome montrent de considérables compétences de planification. Des essais de mesures, comme le redressement des rivières, avaient été tenté et à la fin du dix-septième siècle un article sur les rivières hydrauliques a été publié (Rouse 1965).

La connaissance de l'écoulement uniforme est essentielle pour la conception de différents ouvrages hydrauliques, notamment les conduites circulaires et non circulaires, et les canaux à surface libre, qui sont utilisés pratiquement dans le réseau d'alimentation en eau potable, l'assainissement, dans l'irrigation et le drainage. De nouvelles approches et méthodes sont publiées pendant les trente dernières années dans les revues des sciences hydrauliques, notamment ceux de ASCE, Journal of Hydraulic Research, et Flow Measurement and Instrumentation....et d'autres. Les solutions de ces problèmes sont étudiées par l'utilisation des lois de résistance classique (de Chézy et Manning) et les lois de résistances logarithmiques développées à partir de la loi universelle de distribution des vitesses de Prandtl-Von Karman (Karman 1930). Une combinaison entre les deux types de solutions est développée théoriquement à l'aide de l'équation de Darcy Weisbach (Swamee et Rathie 2004, Swamee et Swamee 2008).

- 1) Les équations de type Chézy et Manning qui exprime la vitesse de l'écoulement en fonction des coefficients de résistance C et n : $V = C\sqrt{R_h S_0}$ et $V = 1/nR_h^{2/3}\sqrt{S_0}$ respectivement.
- 2) Les équations logarithmiques qui expriment le coefficient de frottement f de la formule de Darcy-Weisbach en fonction de la rugosité des parois internes ε et de la viscosité cinématique ν et qui représentent les paramètres de résistance.

La formule de Darcy-Weisbach qui calcule la pente d'énergie par la mesure des pertes de charge sur la longueur du canal a plus de signification physique que la formule la plus utilisée de Manning. Malgré la publication de plusieurs articles et livres dans le domaine de l'hydraulique, il a été remarqué peu d'application dans la conception des ouvrages hydrauliques (Rouse 1943). En outre f est couramment utilisé dans nombreuse autres branches d'ingénierie (par exemple : la conception des canalisations de pétrole) et fournit probablement la seule base pour mettre en commun toute les expériences sur la résistance du frottement dans les conduites ouvertes et fermées. Par conséquent, il est recommandé par la Comité de ASCE (1963) que les enseignants en génie et les chercheurs

mettent l'accent sur l'utilisation du facteur de frottement f tel que défini dans la formule de Darcy-Weisbach. (ASCE 1963).

Les problèmes de l'écoulement uniforme impliquent, en général, les paramètres suivants : Q le débit du fluide, h_f les pertes de charge (ou pression Δp) à travers la longueur de la conduite L , la viscosité cinématique du fluide ν , le diamètre D ou la largeur B du canal, la profondeur normale de l'eau y_n ou la profondeur non-dimensionnelle $\eta = y_n / D$.

Ces problèmes sont à priori : **1)** de déterminer les pertes de charge, **2)** de trouver le débit, **3)** de déterminer le diamètre, **4)** de calculer les profondeurs normale et critique, et **5)** d'identifier l'état de stabilité de l'écoulement, quand les autres variables sont données.

Utilisant les équations de Chézy ou de Manning, les trois premiers problèmes ont des expressions explicites, par contre celui de la profondeur normale à une forme implicite où sa détermination traditionnelle fait recours à la procédure itérative.

L'équation gouvernante de base de ces problèmes est la formule de résistance de Darcy-Weisbach. L'obstacle principal pour l'obtention des solutions directes pour ces problèmes est la forme implicite de la loi logarithme en fonction de ces paramètres recherchés.

1) Le calcul des pertes de charge peut être effectué à l'aide de l'équation de Darcy-Weisbach et une équation de type Colebrook (1939). Pour les écoulements turbulents, il faut faire usage du diagramme de Moody (1944) ou de Rouse (1943), mais les solutions graphiques engendrent toujours d'immenses erreurs de lecture. Traditionnellement, la valeur de f peut être calculée à l'aide de la procédure itérative.

2) Pour le calcul du débit, Swamee et Jain (1976) et Swamee (1994) ont pu trouver la solution analytique exacte.

3) En formant des groupes des différents paramètres de l'écoulement, (sous forme non-dimensionnelle), des solutions directes du problème de diamètre sont obtenues par Rajaratnam (1960), Ranja Raju et Garde (1966), Swamee et Jain (1976) et par Swamee et Rathie (2007).

4) Hager (1989) dans sa discussion bien connue a donné les conditions et les limites d'utilisation de la formule de Manning, laquelle est valable uniquement pour le régime turbulent rugueux pour une rugosité relativement moyenne. Pour la conception des conduites circulaires et non-circulaires il met l'accent sur la résolution du problème de la profondeur normale quand les autres paramètres sont donnés.

Cinq ans plus tard Swamee (1994) dans son fameux article "Normal depth equations for irrigation canals" a pu développer des équations explicites pour le calcul direct de la profondeur normale pour les canaux triangulaire, rectangulaire, rectangulaire large, trapézoïdal et circulaire en utilisant la loi logarithmique de résistance ASCE (1963), des groupes de variable non-dimensionnelles et des régressions. Également, une année avant, Swamee (1993) a développé des équations directes pour le calcul de la profondeur critique utilisant l'énergie spécifique minimale (Chow 1959). De nouvelles formules ont été développées par Swamee et Rathie (2016) pour le calcul direct de la profondeur

normale du canal parabolique utilisant la loi de résistance logarithmique à l'aide de groupes de variables et la méthode de régression. Aussi de diverses méthodes ont été utilisées dans la dernière décennie pour le développement du calcul de la profondeur normale utilisant la formule de Manning.

5) Plusieurs auteurs ont essayé de développer des critères pour la classification de l'état de la stabilité de l'écoulement, comme Craya (1952) et Iwasa (1954) dont les critères mènent à des résultats similaires à ceux de Vedernikov (1945) pour des conditions spécifiques. Bijankhan et Kouchakzadeh (2011) ont développés une méthode pour l'identification de la stabilité de l'écoulement uniforme en utilisant le nombre de Vedernikov (Poweel 1948) et la formule de Manning, en introduisant un facteur de pente non-dimensionnel S qui est une fonction implicite du rapport d'aspect pour la condition de la stabilité neutre $V_n = 1$. La pente non-dimensionnelle S est implicite par rapport au rapport d'aspect où sa solution implique l'utilisation de la méthode itérative. Les auteurs ont développé des équations explicites du rapport d'aspect de la stabilité neutre en fonction de la pente non-dimensionnelle S , permettant l'identification de la zone de l'état stabilité de l'écoulement pour une conduite de forme ovoïdale (Gill 1987) utilisant le coefficient de résistance de Manning.

Les problèmes rencontrés en général dans la conception des conduites et canaux sont la détermination du débit, des pertes de charge, du diamètre, de la profondeur normale d'eau, de la profondeur critique et l'identification de l'état de stabilité de l'écoulement. La solution traditionnelle est la procédure d'essai et erreur. Ces problèmes seront résolus en se basant sur le principe d'énergie et les pertes de charge, lesquelles ont des formes implicites.

Dans la présente étude, des tentatives de développement des solutions explicites pour la détermination de la profondeur normale en fonction des autres paramètres, sera effectuée en utilisant le théorème de Lagrange et la loi logarithmique de résistance pour les canaux triangulaire, rectangulaire large et naturel. Des équations approchées seront développées pour la profondeur normale des conduites circulaire et non-circulaire utilisant le critère du débit maximal de Swamee et Swamee (2008) qui permet le calcul de η en deux étapes seulement. Une solution analytique est développée pour la résolution du problème de détermination du diamètre de la conduite en utilisant la fonction W -Lambert.

La profondeur d'eau de l'écoulement est utilisée comme le paramètre de classification de l'écoulement. L'état de l'écoulement est classé selon les groupes de paramètres par rapport à la viscosité (nombre de Reynolds) et par rapport à la gravité (le nombre de Froude). Les deux nombres sont utilisés dans la présente étude permettant la classification de la stabilité de l'écoulement en combinant le nombre de Vedernikov et la loi logarithmique de résistance à l'écoulement (Robertson et Rouse 1941, Rouse 1944). Utilisant le critère proposé, des équations explicites seront développées pour la prédiction du rapport d'aspect de la stabilité neutre en fonction des paramètres ν et ε comme

paramètres de résistance, permettant l'identification directe de l'état de la stabilité en introduisant le concept de la pente minimale de la stabilité neutre.

L'étude est organisée en cinq chapitres :

- 1) Chapitre I : Étude Bibliographique
- 2) Chapitre II : Détermination des Pertes de Charges.
- 3) Chapitre III : Détermination du Diamètre de la Conduite
- 4) Chapitre IV : Détermination des Profondeurs Normales et Critiques
- 5) Chapitre V : Critère de Stabilité de l'Écoulement

D'un point de vue pratique, les sections étudiées dans la présente étude sont les sections circulaire, triangulaire, rectangulaire, naturel et parabolique, utilisées dans la modélisation des rivières et cours d'eaux naturels et dans le drainage des autoroutes (FHWA 2005). Ces sections sont également destinées pour la conception des réseaux d'alimentation en eau potable, d'assainissement, d'irrigation et de drainage. Les sections non circulaires graduellement variées ; de forme fer à cheval et ovoïdale sont destinées pour la conception des collecteurs d'assainissement. L'utilisation du théorème de Lagrange et le développement des équations approchées donnent des solutions directes aux problèmes pratiques de conception des conduites et canaux avec plus d'exactitude et de simplicité par rapport à la littérature disponible.

Par conséquent, la présente thèse est une contribution au **Développement des Solutions Explicites des Paramètres de l'Écoulement Uniforme Utilisant le Théorème de Lagrange et la Fonction W-Lambert.**

Ces solutions peuvent être utilisées avec avantage dans les études d'optimisation des réseaux d'alimentation d'eau potable, d'assainissement, d'irrigation et de drainage.

CHAPITRE I

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. Introduction

Le présent chapitre est consacré à la définition de l'écoulement uniforme et les conditions de sa formation.

Ce chapitre présente les différentes relations gouvernantes de l'écoulement uniforme et analyse leurs coefficients de résistance. L'estimation de leurs coefficients de résistance est discutée et comparée.

Les approches existantes pour la détermination des paramètres de l'écoulement uniforme sont présentées et une synthèse générale est élaborée.

I.2. Développement de l'Écoulement Uniforme

I.2.1. Description

L'écoulement du fluide dans une conduite peut être à surface libre ou sous pression. Les deux types d'écoulement sont beaucoup similaires mais différent dans un seul aspect, l'écoulement à surface libre doit avoir une surface libre, autrement les conduites fermées n'ont en pas, puisque le fluide doit remplir la conduite entière. Une surface libre est exposée à la pression atmosphérique. L'écoulement sous pression reste confiné dans une conduite fermée, n'exerce pas une pression atmosphérique mais seulement une pression hydraulique.

L'écoulement uniforme ne peut se développer que si

- 1) La profondeur d'eau, l'aire de la section mouille (canal prismatique), vitesse et débit sont constants dans chaque section tout au long de la conduite considérée.
- 2) La ligne d'énergie, la ligne d'eau, le lit du canal sont tous parallèles ; leurs tangentes sont égales. Pour but de pratique l'écoulement possède une vitesse constante a travers la section tout au long du canal, la distribution des vitesses a travers la section est invariable dans le long du canal ; tel distribution des vitesses peut être atteinte seulement quand la couche limite est pleinement développée.

1.2.2. Régimes d'Écoulements

L'équation de continuité pour tout écoulement d'un fluide incompressible est (Chow. 1959) :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

Où Q est le débit et A est l'aire de la section normale à la direction de l'écoulement x .

Si l'écoulement est permanent (le débit Q est constant) et $\partial A / \partial t = 0$, l'équation de continuité se réduit à

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

Dans la plupart des problèmes de l'écoulement stationnaire, le débit est constant tout au long du canal sous considération. L'écoulement est continu si le débit pourra être exprimé par

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 = \dots \quad (1.3)$$

C'est l'équation de la continuité de l'écoulement stationnaire. Où V est la vitesse moyenne dans la section A .

L'état d'écoulement est basiquement gouverné par l'effet de la viscosité et la gravité relative à la force d'inertie de l'écoulement.

L'effet de la viscosité relative à l'inertie peut être présenté par le nombre de Reynolds définie par

$$R = \frac{4VR_h}{\nu} \quad (1.4)$$

Où $R_h = A/P$ est le rayon hydraulique, P est le périmètre mouille et ν est la viscosité cinématique définie par

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.5)$$

Où ρ est la masse volumique et μ est la viscosité dynamique définie d'après Hager et Schleiss (2009) par

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \exp\left[\frac{b}{c+t} - \frac{b}{c+t_0}\right] \quad (1.6)$$

Où t est la température du fluide, pour l'eau $\mu_0 = 17.91 \times 10^{-4} \text{ Nsm}^{-2}$, $b = 511.6K$, $c = -149.4K$, $t_0 = 273K$

t(°C)	-10	0	10	20	30	50	100
$10^6 \nu(m^2s^{-1})$	2.573	1.791	1.316	1.010	0.803	0.549	0.287

Tableau.1.1. ν (t) pour l'eau d'après Hager et Schleiss (2009) p. 583.

Pour l'eau pure ν peut se calculer selon la formule de Poiseuille par la formule suivante

$$\nu[m^2s^{-1}] = \frac{1.78 \times 10^{-6}}{1 + 0.0337t + 0.00022t} ; -20^{\circ}C < t < 100^{\circ}C \quad (1.7)$$

L'écoulement est considéré laminaire si $R \leq 2300$; les forces visqueuses sont si fortes par rapport au force d'inerties. Si $R > 2300$ l'écoulement est turbulent ; les forces visqueuses sont plus faible par rapport au force d'inerties

L'effet de la gravite sur l'état d'écoulement est représenté par le rapport des forces d'inertie au forces gravitaires. Ce rapport est donné par le nombre de Froude défini par

$$F = \frac{V}{\sqrt{g(A/T)}} \quad (1.8)$$

Où F est le nombre de Froude et T est la largeur du plan d'eau, ce concept est dérivé d'après l'état critique de l'écoulement qui est le minimum de l'énergie spécifique.

La hauteur total Y d'un point dans une section dans une ligne de courant est donnée par

$$Y = z + y \cos \theta + \frac{V^2}{2g} \quad (1.9)$$

Où z est l'élévation du point par rapport à un niveau de référence fixé, y la profondeur d'eau,

θ l'angle d'inclinaison du canal et $\frac{V^2}{2g}$ la hauteur des vitesses de l'écoulement dans une ligne

de courant.

L'énergie spécifique E est l'énergie mesurée par rapport au lit du canal ; $z=0$, équation (1.9) donne

$$E = y \cos \theta + \frac{V^2}{2g} \quad (1.10)$$

Introduisant l'équation de continuité $Q = VA$ et dérivant l'équation. (1.9) par rapport à y ,

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dy} = 1 - \frac{V^2}{gA} \frac{dA}{dy} \quad (1.11)$$

$\frac{dA}{dy} = T$, à l'état critique de l'écoulement, l'énergie spécifique est minimale ($dE/dy = 0$)

donc l'équation (1.11) devient

$$\alpha \frac{V^2}{g} = \frac{A \cos \theta}{T} \quad (1.12)$$

Où est α est le coefficient d'énergie.

Le nombre de Froude pour les fortes pentes peut être défini comme

$$F = \frac{V}{\sqrt{g(A/T) \cos \theta / \alpha}} \quad (1.13)$$

L'écoulement est considéré critique quand $F=1$. Si $V < \sqrt{g(A/T)}$ l'écoulement est subcritique ; les forces gravitaire sont plus prononcées et l'écoulement décrit comme tranquille ou fluvial. Si $V > \sqrt{g(A/T)}$ l'écoulement est supercritique ; les forces d'inertie deviennent dominantes, l'écoulement a une très importante vitesse et appelle usuellement torrentiel.

Une combinaison des effets de viscosité et de gravité peut produire l'un des quatre régimes d'écoulement à surface libre

- 1) Subcritique laminaire, quand $F < 1$ et $R \leq 2300$.
- 2) Supercritique laminaire, quand $F > 1$ et $R \leq 2300$.
- 3) Supercritique turbulent, quand $F > 1$ et $R > 2300$.
- 4) Subcritique turbulent, quand $F < 1$ et $R > 2300$

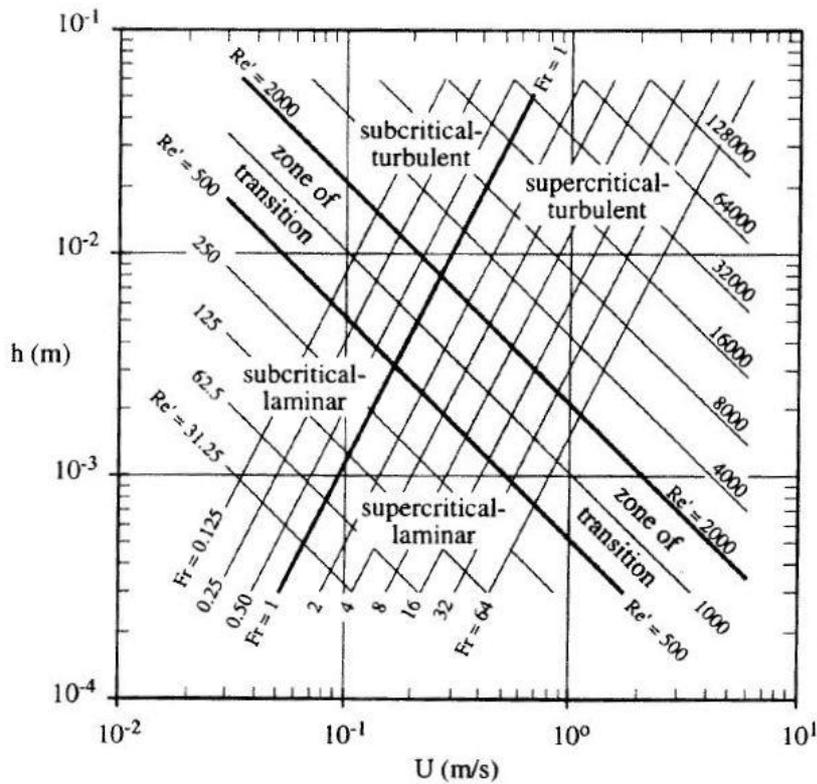


Figure. 1.1. Relation profondeur vitesse pour quatre régimes (d'après Robertson et Rouse 1941)

La zone de transition et la droite $F=1$ divise le graphe en quatre régimes, les deux premiers régimes sont rarement rencontrés en pratique des écoulements hydrauliques à surface libre car l'écoulement est généralement turbulent.

I.3. Formules Empiriques de l'Écoulement Uniforme

Ces formules ont une forme générale simple de la vitesse moyenne de l'écoulement en fonction du rayon hydraulique, la pente de la ligne d'énergie et le coefficient de rugosité.

I.3.1 Formule de Chézy

En 1769 l'ingénieur français Antoine Chézy a découvert probablement la première formule de l'écoulement uniforme qui porte son nom, qui peut être écrite

$$V = C\sqrt{R_h S_0} \quad (1.14)$$

Où C est le coefficient de résistance à l'écoulement en $m^{1/2}s^{-1}$ et S_0 représente la pente de la ligne d'énergie.

Trois importantes formules de détermination de C sont données comme suit

I.3.1 .A. La Formule de G.K

En 1869 deux ingénieurs suisses Ganguillet et Kutter ont publié une formule de C en fonction de R_h, S_0 et n ,

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{S_0} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{S_0}\right) \frac{n}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.15)$$

Où n est le coefficient de Manning, quelques auteurs ont suggéré que le terme $0.00155/S_0$ être éliminé pour simplifier l'apparence de la formule et pour donner des résultats générales plus satisfaisantes, des solutions graphiques sont disponible mais la formule dépend toujours du coefficient de Manning.

I.3.1 .B . La Formule de Bazin

En 1897 l'hydraulicien français Bazin propose une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.16)$$

Cette formule est en fonction du rayon hydraulique et du coefficient de rugosité m proposé par Bazin, ce dernier a été comparé avec les valeurs de n Kutter par Ivan E. Houk (1918) ; cette comparaison montre que la valeur de variation des moyennes indique que la formule de Bazin n'est pas mieux que celle de Kutter.

I.3.1 .C. La Formule de Powell

En 1950 Powell propose une formule logarithmique implicite en C

$$C = -42 \log \left(\frac{C}{4R} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.17)$$

Pour le régime rugueux

$$C = -42 \log \left(\frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.18)$$

Pour le régime lisse l'équation se réduit à

$$C = -42 \log \left(\frac{C}{4R} \right) \quad (1.19)$$

La formule de Powell est développée à partir d'expériences limitées dans le laboratoire pour les canaux rugueux et lisses, l'application pratique de cette formule est limitée car plusieurs expériences sont nécessaires pour la détermination correcte de la valeur de ε .

I.3.2. Formule de Manning

En 1889 l'ingénieur irlandais Robert Manning présente une formule bien connue, applicable aux régimes moyennement rugueux

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{S_0} \quad (1.20)$$

Où n est le coefficient de rugosité en $m^{-1/3} s$, d'après Hager et Schleiss (2009) cette formule semble la meilleure des formules empiriques au vu des résultats de mesures de Strickler (1923). Ce dernier calcule le coefficient de rugosité pour le régime rugueux par l'équation

$$n = \frac{d^{1/6}}{6.7\sqrt{g}} \quad (1.21)$$

Où d est la hauteur de la rugosité ; qui représente la médiane de la taille du tamis.

Le tableau 1.2 présente des valeurs du coefficient de rugosité $1/n$ de différentes parois pour la formule de Manning d'après Hager et Schleiss (2009), Chow (1959) présente un énorme tableau des valeurs du coefficient de rugosité n pour différents types de canaux (p.110-113).

Christensen (1984) restreint la gamme d'application de l'équation (1.20) comme suivant

$$0.004 < \frac{\varepsilon}{R_h} < 0.04 \quad (1.22)$$

Hager (1989) présente ces deux conditions applicabilité de l'équation (1.20)

$$\varepsilon > 30\nu \left[Q(gS_0)^2 \right]^{-1/5} \quad (1.23)$$

et simultanément

$$0.002 < \frac{\varepsilon}{R_h} < 0.2 \quad (1.24)$$

Le tableau suivant présente les valeurs de $1/n$ pour des différentes parois du canal

Natures des parois	Bon état	Assez bon état	Mauvais état
En fonte, sans enduit	85	70	65
En fonte, avec enduit	90	85	75
En acier	75	65	60
En grès (pour les canalisations)	90	75	65
Ordinaires en argile (pour les drainages)	85	70	60
En béton de ciment	85	65	60
Parois en ciment lissé	90	85	75
Canaux revêtus de béton	85	65	55

Tableau. 1.2 Coefficient de rugosité $K = 1/n [m^{1/3} s^{-1}]$ de la formule Manning Strickler (Hug 1975) et Hager et Schleiss (2009).

Comparant les formules Chézy et Manning on trouve (Chow 1959, ASCE 1963 task force, Henderson 1966, Rouse 1943)

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{C} \quad (1.25)$$

I.4. Distribution des Vitesses dans l'Écoulement Turbulent

La distribution des vitesses dans un écoulement uniforme sera stable seulement quand la couche limite est pleinement développée, laquelle est approximativement logarithmique.

La contrainte de cisaillement τ a un point en mouvement dans un écoulement turbulent a travers une surface solide est donner par Prandtl (1926)

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 \quad (1.26)$$

Où l est la longueur de mélange (mixing length) et dv/dy est le gradient de vitesse a une distance normal y de la surface du solide. Prandtl introduit les deux suppositions suivantes,

$l = k \times y$, ou k est une constante de proportionnalité et $\tau = \rho g y S$.

L'équation (1.26) peut être écrite

$$v = 2.5V_f \ln \frac{y}{y_0} \quad (1.27)$$

L'équation (1.27) est la loi universelle de distribution des vitesses Prandtl-von Karman. (von Karman. 1930).

Où $k=0.4$, y_0 constante de l'intégration et $V_f = \sqrt{gR_h S_0}$ est la vitesse de cisaillement.

Cette loi a été beaucoup vérifiée expérimentalement (Vanoni .1941), pour cette raison que la loi logarithmique est utilisée dans les problèmes pratiques.

Quand la surface est lisse, la constante y_0 dépend uniquement de la vitesse de cisaillement et de la viscosité cinématique

$$y_0 = \frac{mV}{V_f} \quad (1.28)$$

$m=1/9$ pour les surface lisse.

L'équation (1.27) et l'équation (1.28) donne

$$v = 5.75V_f \ln \frac{9yV_f}{\nu} \quad (1.29)$$

Pour les surfaces rugueuses y_0 dépend de la rugosité absolue.

$$y_0 = m\varepsilon \quad (1.30)$$

$m=1/30$, l'équation (1.27) et l'équation (1.29) donne

$$v = 5.75V_f \ln \frac{30y}{\varepsilon} \quad (1.31)$$

Les constantes m sont dérivés des données expérimentales de Nikuradse (1932 et 1933) sur les conduites circulaires en charge lisses et rugueuses.

Keulegan (1938) développe des formules pour les canaux à surface libre

$$V = V_f \left(3.25 + 5.75 \log \left(\frac{RV_f}{\nu} \right) \right) \quad \text{pour canaux lisses} \quad (1.32)$$

$$V = V_f \left(6.25 + 5.75 \log \left(\frac{R_h}{\varepsilon} \right) \right) \quad \text{pour canaux rugueux} \quad (1.33)$$

$$\frac{V}{V_f} = \frac{C}{\sqrt{g}} \quad (1.34)$$

Substituant l'équation (1.34) et le nombre de Reynolds, équations (1.30) et (1.30) se réduites

$$C = 32.6 \log \left(\frac{20.8R}{C} \right) \quad (1.35)$$

$$C = 32.6 \log \left(\frac{12.2R_h}{\varepsilon} \right) \quad (1.36)$$

Le tableau suivant présente les valeurs de ε pour des différentes parois du canal

Type de tuyaux et matériaux	ε (mm)
Tuyaux en acier soudé, neufs, revêtus de bitume	0.05
Tuyaux en acier rivés, intérieurement goudronnés ou enduits	1.2-1.3
Tuyaux en acier galvanisé, galvanisation ordinaire	0.1-0.15
Tuyaux en tôle galvanisée, en service avec l'eau	0.18
Tuyaux en fonte, corrodés	1-1.5
Tuyaux en béton, bonne surface, avec lissage	0.3-0.8
Tuyaux en béton armé	2.5
Tuyaux en fibrociment, neufs	0.05-0.1
Tuyaux en ciment, bruts	1.0-2

Le tableau 1.3 Coefficient de rugosité ε (mm), (Idelcik 1986) et Hager et Schleiss (2009).

I.4.1 Interprétation Théorique du Coefficient de Manning

Utilisant les équations (1.21), (1.25) et (1.36) on trouve l'équation suivante

$$n = \frac{\left(\frac{R_h}{d} \right)^{1/6} d^{1/6}}{21.9 \log(12.2R_h / \varepsilon)} \quad (1.27)$$

Si la valeur multiplier par $d^{1/6}$ est supposée constante (Chow 1959, p.206) ; cela conduit que le coefficient de Manning varie avec la puissance 1/6 de la rugosité. Par conséquent, les erreurs dues à l'estimation de la rugosité pour le calcul du coefficient de Manning par l'équation (1.27) est comparativement faible.

I.5. Pertes de Charges

La perte de charge h_f divisée par la longueur du canal L est appelée pente de la ligne d'énergie $S_0 = h_f / L$, exprimée selon Darcy Weisbach par la formule suivante

$$\frac{h_f}{L} = \frac{fV^2}{8gR_h} \quad (1.28)$$

Où f est le coefficient de résistance, qui a été déterminé expérimentalement par plusieurs chercheurs, pour les conduites circulaire en charge, la formule de Colebrook semble la plus convenable pour les calculs des conduites de commerce en régime turbulent, proposée en 1939 par

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{R\sqrt{f}} \right) ; 2300 \leq R \leq 10^8 ;$$
$$10^{-6} \leq \frac{\varepsilon}{D} \leq 10^{-2} \quad (1.29)$$

Où D est le diamètre de la conduite.

La formule de Colebrook engendre une erreur de 5-10% des données expérimentales de Colebrook et White (1937) pour déterminer le coefficient de frottement f (Yozo Mikata et al. 2017).

Beaucoup de formules ont été proposées pour les canaux à surface libre.

Thijssse (1949) propose une formule pour la conduite circulaire laquelle est similaire à celle de Colebrook, et une formule pour les canaux larges exprimée par

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.03 \log \left(\frac{\varepsilon}{12.2R_h} + \frac{3.04}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.30)$$

Un groupe de chercheurs d'ASCE (R. W. Carter, H. A. Einstein, Julian Hinds, R. W. Powell et E. Silberman) en 1963 proposent une formule de résistance générale pour les conduites et canaux à surface libre

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{2.5}{R\sqrt{f}} \right); 10^3 \leq \frac{R}{4} \leq 10^8;$$

$$10^{-6} \leq \frac{\varepsilon}{R_h} \leq 10^{-2} \quad (1.31)$$

I.6. Problèmes de Conception de Conduite Circulaire en Charge (Pipe)

I.6.1. Détermination du Débit

Ranga Raju et Garde (1966) proposent des équations pour résoudre les problèmes de l'écoulement dans une conduite circulaire en charge utilisant la formule de Colebrook comme suivant

$$\left(\frac{Q}{\varepsilon \nu} \right) \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{8/3} = 2.51 \left(\frac{g \varepsilon^3 S_0}{\nu^2} \right)^{0.547} \quad (1.32)$$

$$\text{Pour } \frac{g \varepsilon^3 S_0}{\nu^2} < 0.35 \text{ ou } \left(\frac{Q}{\nu \varepsilon} \right) \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{8/3} < 1.6$$

$$\text{Et } \left(\frac{Q}{\varepsilon \nu} \right) \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{8/3} = 2.4 \left(\frac{g \varepsilon^3 S_0}{\nu^2} \right)^{0.507} \quad (1.33)$$

$$\text{Pour } \frac{g \varepsilon^3 S_0}{\nu^2} > 0.35 \text{ ou } \left(\frac{Q}{\nu \varepsilon} \right) \left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{8/3} > 1.6$$

En utilisant les équations (1.2) et (1.33) les erreurs dans le calcul du débit sont de l'ordre de 5%, ceux du diamètre sont de l'ordre de 3% et de S_0 sont de l'ordre de 10% jusqu'à 15%.

Swamee et Jain (1976) ont trouvé la solution exacte du débit en utilisant la formule de Colebrook, la vitesse est déduite par l'équation de continuité

$$Q = - \frac{\pi D^2 \sqrt{g D S_0}}{\sqrt{2}} \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7 D} + \frac{1.78 \nu}{\sqrt{g D^3 S_0}} \right) \quad (1.34)$$

I.6.2. Détermination des Pertes de Charges

Les pertes de charges sont déterminées par la formule de Darcy Weisbach, où f est le coefficient de frottement de Colebrook exprimé d'une forme implicite, des diagrammes pour la détermination de f pour les conduites de commerce ont été présentées par plusieurs auteurs ; Rouse (1943), Moody (1944), mais les solutions graphiques ont une grande erreur de lectures.

Plusieurs essais de calcul de f d'une manière analytique explicite sont élaborés, notamment celle de Swamee et Jain (1976)

$$f = 0.25 \left[\log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{5.74}{R^{0.9}} \right) \right]^{-2} \quad (1.35)$$

Pour $10^{-6} \leq \varepsilon/D \leq 10^{-2}$ et $5 \times 10^3 \leq R \leq 10^8$, Les erreurs de l'équation (1.35) par rapport aux valeurs exactes de l'équation (1.29) sont inférieurs à 1%.

En 2007 Swamee et Rathie ont essayé de développer une solution pour le calcul exact de f en utilisant le théorème de Lagrange (1770) comme suivant

Tout fonction de ζ exprimée comme

$$\zeta = a + t\phi(\zeta) \quad (1.36)$$

Où ζ est une solution de l'équation (1.36), a = constante, t =paramètre et ϕ =fonction, peut être développée comme une série de puissance en t par la formule

$$f(\zeta) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [f'(a)[\phi(a)]^n] \quad (1.37)$$

Cette solution est donnée par Joseph Lagrange en 1770 (Whittaker and Watson, 1915)

$$f_s^{-1/2} = b + b \ln b \left[-\frac{0.8678}{b} + \left(\frac{0.8678}{b} \right)^2 + \left(\frac{0.6895}{b} \right)^3 \ln \left(\frac{b}{7.389} \right) + \dots \right] \quad (1.38a)$$

Où f_s est le coefficient de frottement pour les conduites lisse et $b = 0.8687 \ln(R/2.51)$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{f_r}}{\sqrt{f}} = & 1 - \frac{8.0676D}{\varepsilon R} + \left(\frac{8.0676D}{\varepsilon R} \right)^2 \left(1 + \frac{0.5756}{\sqrt{f_r}} \right) \\ & - \left(\frac{8.0676D}{\varepsilon R} \right)^3 \left(1 + \frac{0.3132}{\sqrt{f_r}} \right) \left(1 + \frac{1.4144}{\sqrt{f_r}} \right) \\ & \left(\frac{8.0676D}{\varepsilon R} \right)^4 \left(1 + \frac{0.2232}{\sqrt{f_r}} \right) \left(1 + \frac{0.6663}{\sqrt{f_r}} \right) \left(1 + \frac{2.5639}{\sqrt{f_r}} \right) \end{aligned} \quad (1.38b)$$

L'équation (1.38b) est la solution générale pour l'écoulement turbulent, ou f_r est le coefficient de frottement pour les conduites rugueuses. La solution développée pour le régime lisse est exacte mais celle du régime de transition est discutée par Vatankhah et Kouchakzadeh (2009), où été montré que l'erreur de l'équation (1.39) dépasse les 100% pour la majorité des valeurs de ε/D et R .

Puis les approches de f sont développées en utilisant la fonction W Lambert ; notamment Sonnad et Goudar (2006), Mikata et Walter (2015), Biberg (2017). Vatankhah (2018) a présenté des solutions pour f avec les critères de simplicité et exactitude comme suivants

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.8686 \ln \left[\frac{0.3984R}{(0.8686)^{\frac{s}{s+1.1}}} \right] \quad (1.39)$$

$$\text{Où la quantité } s = 0.12363R(\varepsilon/D) + \ln(0.3984R) \quad (1.40)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.8686 \ln \left[\frac{0.3984R}{(0.8686)^{\frac{s-0.645}{s+0.39}}} \right] \quad (1.41)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.8686 \ln \left[\frac{0.3984R}{(0.8686)^{\frac{s}{s+\lambda}}} \right] \quad (1.42)$$

$$\text{Où } \lambda = 1 + \left[\frac{1+s}{0.5 \ln(0.8686s)} - \frac{1+4s}{3(1+s)} \right] \quad (1.43)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.39) est inférieure à 0.25%, et ceux des équations (1.41) et (1.42) sont inférieures à 0.054% et 0.0028% respectivement.

I.6.3. Détermination du Diamètre

Après Advani (1957), Rajaratnam est peut être le deuxième auteur qui a développé une solution direct pour déterminer le diamètre de conduite circulaire, en 1960 il a développé une méthode analytique directe pour déterminer le diamètre d'une conduite circulaire en charge en régime turbulent rugueux a partir de la formule de Darcy Weisbach comme suivant

$$\frac{S_0}{Q^2} = \frac{16}{2\pi^2 g f D^5} \quad (1.44)$$

Où $1/\sqrt{f} = 2 \log(D/2\varepsilon) + 1.74$ est le coefficient de frottement du régime rugueux.

Multipliant l'équation (1.44) par ε^5 on trouve

$$\varphi g \varepsilon^5 = \frac{16}{2\pi^2 [2 \log(D/2\varepsilon) + 1.74]^2} \frac{1}{(D/\varepsilon)^5} \quad (1.45)$$

$$\text{Où } \varphi = \frac{S_0}{Q^2} \quad (1.46)$$

Une formule pour déterminer le diamètre a été proposée

$$\psi = \varphi g \varepsilon^5 = 0.1178 (\varepsilon/D)^{5.297} \quad (1.47)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.47) est inférieure à 16 % pour la gamme $1.81 \times 10^{-8} \geq \psi \geq 3.6 \times 10^{-21}$ et $5000 \geq D/\varepsilon \geq 20$.

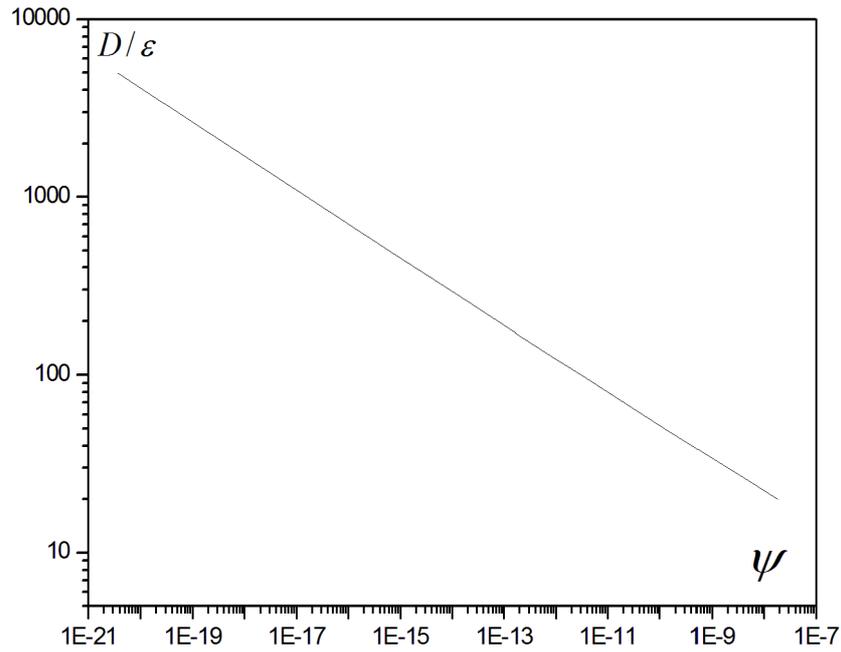


Figure. 1.2. Relation entre ψ et D/ε d'après l'équation (1.45).

La quantité $\varphi g \varepsilon^5$ a été tracée graphiquement (figure.2) à l'aide de l'équation (1.45) pour différentes valeurs de ε/D , et l'équation (1.47) est une formule approchée de ce graphe. Connaissant les valeurs des variables ; S_0, Q, ν, ε le diamètre D peut être calculé directement à partir des équations (1.46) et (1.47).

Swamee et Jain (1976) ont trouvé une solution approchée du diamètre utilisons les groupes de variable suivantes

$$D_* = D \left(\frac{g S_0}{Q^2} \right)^{0.2} \quad (1.48)$$

$$\varepsilon_* = \varepsilon \left(\frac{g S_0}{Q^2} \right)^{0.2} \quad (1.49)$$

$$\nu_* = \nu \left(\frac{1}{g S_0 Q^3} \right)^{0.2} \quad (1.50)$$

L'équation de Colebrook est convertie à

$$D_* = 0.726 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon_*}{3.7D_*} + \frac{1.78\nu_*}{D_*^{1.5}} \right) \right]^{-0.4} \quad (1.51)$$

La solution de l'équation (1.51) est donnée par

$$D_* = 0.66 \left(\varepsilon_*^{1.25} + \nu_* \right)^{0.04} \quad (1.52)$$

L'erreur de l'équation (1.52) est de l'ordre de 2%.

En 2007 Swamee et Rathie, utilisent ces mêmes groupes des variables pour développer des solutions exactes pour le calcul du diamètre utilisant le théorème de Lagrange comme suit

$$D_*^{-5/2} = d + 0.964 \ln \left(\frac{0.1515\varepsilon_*}{\nu_*} d^{2/5} + d^{3/5} \right) \\ \times \left[-1 + \frac{0.5788(0.1012\varepsilon_* + \nu_* d^{1/5})}{(0.1518\varepsilon_* + \nu_* d^{1/5})d} + \dots \right] \quad (1.53)$$

avec $d = 0.9647 \ln \left[\frac{1}{1.78\nu_*} \right]$. L'erreur maximale de l'équation (1.52) est inférieure à 2.5%

dans toute la gamme pratique.

I.7. Problèmes de Conception de Conduite et Canaux a Surface Libre

I.7.1. Détermination du Débit

Utilisant l'équation de coefficient de frottement ASCE (1963), Swamee (1994) a donné la solution directe et exacte du débit pour l'écoulement uniforme à surface libre

$$Q = -2.457A\sqrt{gR_h S_0} \ln \left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{0.221\nu}{\sqrt{gR_h^5 S_0}} \right) \quad (1.54)$$

I.7.2. Détermination des Pertes de Charges

Yen (1991) a proposé la formule suivante

$$f = 0.25 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{1.95}{R^{0.9}} \right) \right]^{-2} \quad (1.55)$$

Pour $\varepsilon / R_h < 0.05$ et $R > 3 \times 10^4$.

Les pertes de charges sont déterminées par la formule approchée de l'équation (1.31), par Swamee (2002)

$$f = \frac{4}{3} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{5.676}{R^{0.9}} \right) \right]^{-2} \quad (1.56)$$

I.7.3. Détermination du Diamètre

Le diamètre est calculé directement d'après la formule de Manning par Sharma et Swamee (2008)

$$D^{8/3} = \frac{P^{*2/3}}{A^{*5/3}} \left(\frac{Qn}{S_0^{1/2}} \right) \quad (1.57)$$

$$\text{Où } A^* = A/D \quad (1.58)$$

$$\text{et } P^* = P/D \quad (1.59)$$

Hager (1989) trouve une formule pour la détermination du coefficient de Manning

$$n = \frac{\varepsilon^{1/6}}{8.2\sqrt{g}} \quad (1.60)$$

Cette formule est dérivée de la formule du diamètre pour le régime rugueux Hager et Schleiss (2009)

$$D_* = \varepsilon_*^{1/16} / 1.422 ; 7 \times 10^{-4} < \varepsilon < 7 \times 10^{-2} \quad (1.61.a)$$

La formule du diamètre pour le régime lisse d'après Hager et Schleiss (2009) est

$$D_* = \varepsilon_*^{0.03} / 1.853 ; 10^{-8} < \varepsilon < 7 \times 10^{-4} \quad (1.61.b)$$

Swamee (1995) à donné des différents diamètres des canaux d'irrigation uniquement pour les sections optimales, Swamee (2001) donne l'équation du diamètre pour la conduite circulaire

$$D = K_D \left[\varepsilon \left(\frac{Q^2}{gS_0} \right) + \frac{8\nu Q^{9.4}}{(gS_0)^{5.2}} \right]^{0.04} \quad (1.62)$$

$$\text{Ou } K_D = \frac{0.442}{\eta^{0.8}} + 0.164\eta + \left(\frac{\eta}{1.2} \right)^{16} \quad (1.63)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.63) est inférieure à 0.5%.

Swamee et Swamee (2008) ont présenté le diamètre seulement de 0.75 du taux de remplissage pour les conduites circulaire et non circulaire

$$D = K_D \left[\varepsilon \left(\frac{Q^2}{gS_0} \right) + \frac{8\nu Q^{9.4}}{(gS_0)^{5.2}} \right]^{0.04} \quad (1.64)$$

Ou K_D est un coefficient de la forme de section.

I.7.4. Détermination de la Profondeur Normale

I.7.4.1. Conduite Circulaire

Swamee (1994) donne la profondeur normale de la une conduite circulaire utilisant le coefficient de résistance ASCE (1963) par l'équation suivante

$$\begin{aligned}
\eta = & 0.34H_D^{0.74} \left(\frac{\varepsilon}{D} H_D^{0.4} + 9.25 \frac{\nu}{D\sqrt{gDS_0}} \right)^{0.05} \\
& + 0.0056H_D^{1.84} \left[\left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{1.4} H_D^{1.6} + 9.3 \frac{\nu}{D\sqrt{gDS_0}} \right]^{0.1} \\
& + 0.0005H_D^4 \left[\left(\frac{\varepsilon}{D} \right)^{10} + \left(\frac{3.981\nu}{D\sqrt{gDS_0}} \right)^{10} \right]^{0.05}
\end{aligned} \tag{1.65}$$

$$\text{Où } \eta = y_n / D \text{ et } H_D = Q / D^2 \sqrt{gDS_0} \tag{1.66}$$

L'équation (1.66) a une erreur maximale de 1%, valable pour $\eta \leq 0.944$.

Swamee (2001) présente une formule pour la profondeur normale

$$\eta = 0.943 \left(0.0683 \left[\left(\frac{Q_{\max}}{Q} \right)^{0.886} \left[1 + \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{1.69} \right] - 2 \right] + 1 \right)^{-12.25} \tag{1.67}$$

L'erreur maximale associée de l'équation (1.67) est 1.5% pour $\eta \leq 0.3$.

$$\text{Où } Q_{\max} = -\sqrt{gD^5 S_0} \ln \left[\varepsilon / (3.46D) + 1.43\nu / \sqrt{gD^3 S_0} \right] \tag{1.68}$$

$$\text{et } V_{\max} = -1.355\sqrt{gDS_0} \ln \left[\varepsilon / (3.65D) + 1.32\nu / \sqrt{gD^3 S_0} \right] \tag{1.69}$$

Les équations (1.68) et (1.69) sont déduites à partir de l'équation (1.54) pour les profondeurs d'eau 0.943 et 0.813 respectivement.

Swamee et Rathie (2004) dans leur réponse de Swamee et Rathie (2007) sur la discussion de Kouchakzadeh et Vatankhah (2007) proposent et corrigent des équations pour la profondeur normale utilisant le théorème de Lagrange et les formules de résistance de Chézy et Manning, mais aussi ces résultats modifiés ne donnent aucune valeur de la profondeur normale pour la conduite circulaire. Kouchakzadeh et Vatankhah mentionnent leur formule (2001)

$$\eta = 1.32N_D^{(0.51+0.5N_D-2.5N_D^2)} \tag{1.70}$$

$$\text{Où } N_D = Qn / (D^{8/3} \sqrt{S_0}) \tag{1.71}$$

L'erreur maximale associée de l'équation (1.70) est 1.2%.

Swamee et Swamee (2008) proposent une équation pour la profondeur normale utilisant le coefficient de résistance ASCE (1963) et le débit maximal ($\eta = 0.943$).

$$\eta = 0.943 \left[0.823 \left(Q / Q_{\max} - 1 \right)^{0.665} + 1 \right]^{-1} \quad (1.72)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.72) est inférieure à 1%.

Abed (2010) a proposé une équation utilisant les formules de Chézy et Manning

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left(1.525 M_D^{0.52} \right) \quad (1.73)$$

$$\text{Ou } M_D = Q / C \sqrt{D^5 S_0} \quad (1.74)$$

L'erreur maximale de (1.73) est inférieure à 0.4% pour la gamme $0.15 \leq \eta \leq 0.85$.

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left(1.614 N_D^{0.485} \right) \quad (1.75)$$

L'erreur maximale de (1.75) est 0.48 % pour la gamme $0.15 \leq \eta \leq 0.75$.

Vatankhah et Easa (2010) proposent la formule suivante

$$\eta = 1.025 N_D^{(-0.55 N_D^{1.1} - 14.55 N_D^{4.136} + 0.4645)} \quad (1.76)$$

L'erreur maximale associée de l'équation (1.76) est 0.35% dans la gamme $0.005 \leq \eta \leq 0.82$.

Elhakeem et Sattar (2017) proposent une formule pour la profondeur normale

$$\eta = 0.935 - \left(0.6 \cos^{-1} \sqrt{2.98 N_D} \right)^{1.183} \quad (1.77)$$

L'erreur maximale associée de l'équation (1.77) est 1.14 % dans la gamme $0.02 \leq \eta \leq 0.98$.

L'équation (1.77) couvre presque toute la gamme de la profondeur normale.

I.7.4.2. Canal Triangulaire

Swamee (1994) donne la profondeur normale du canal triangulaire comme suivant

$$y_n = 0.468 \left[\varepsilon \frac{(1+m^2)^{2.9}}{m^{15.4}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gS_0}} \right)^{9.6} + 7\nu \frac{(1+m^2)^{3.1}}{m^{15.6}} \frac{Q^{9.4}}{(gS_0)^{5.2}} \right]^{0.04} \quad (1.78)$$

L'erreur maximale associée de l'équation (1.78) est 1 %.

Swamee (1996) arrange cette équation en groupes non dimensionnel

$$y_{n*} = 0.468(\varepsilon_* + 7\nu_*)^{0.04} \quad (1.79)$$

$$\text{Où } y_{n*} = \frac{y_n m^{0.6}}{(1+m)^{0.1}} \left(\frac{gS_0}{Q^2} \right)^{0.2} \quad (1.80)$$

$$\varepsilon_* = \varepsilon \left(\frac{1+m^2}{m} \right)^{0.4} \left(\frac{gS_0}{Q^2} \right)^{0.2} \quad (1.81)$$

$$\nu_* = \nu \left(\frac{1+m^2}{m} \right)^{0.6} (gS_0 Q^3)^{-0.2} \quad (1.82)$$

L'équation (1.79) est identique à l'équation (1.78) exprimée en groupes non dimensionnel.

Swamee et Rathie (2012) proposent des équations pour le canal triangulaire utilisant une limite minimale de la fonction W Lambert

Pour le régime rugueux

$$y_n = 1.157 \frac{(1+m^2)^{0.1} Q^{0.4}}{m^{0.6} (gS_0)^{0.2}} \left\{ W_0 \left[\frac{127mQ}{(1+m^2)\varepsilon^2 \sqrt{g\varepsilon S_0}} \right] \right\}^{-0.4} \quad (1.83.a)$$

Pour le régime lisse

$$y_n = 0.9836 \frac{(1+m^2)^{0.1} Q^{0.4}}{m^{0.6} (gS_0)^{0.2}} \left\{ W_0 \left[2.1 \frac{mQ}{1+m^2} \left(\frac{gS_0}{\nu^5} \right)^{1/3} \right] \right\}^{-0.4} \quad (1.83.b)$$

$$\text{Où } \ln x - \ln \ln x \leq W_0(x) \leq \ln x \quad (1.84)$$

L'erreur de la limite minimale de l'équation (1.84) est de l'ordre de 1 % pour les calculs de la profondeur normale.

I.7.4.3. Canal Rectangulaire

L'équation (1.85) est utilisée aussi pour calculer la profondeur normale pour le canal rectangulaire large comme suivant

Pour le régime rugueux

$$y_n = 0.72 \left\{ \frac{b\sqrt{gS_0}}{Q} W_0 \left(\frac{25.378Q}{b\varepsilon\sqrt{g\varepsilon S_0}} \right) \right\}^{-2/3} \quad (1.85.a)$$

Pour le régime lisse

$$y_n = 0.5492 \left\{ \frac{b\sqrt{gS_0}}{Q} W_0 \left(1.842 \frac{Q}{bv} \right) \right\}^{-2/3} \quad (1.85.b)$$

Swamee (1994) donne la profondeur normale du canal rectangulaire utilisant le coefficient de résistance ASCE (1963)

Pour un canal étroit

$$y_n = 0.576 \frac{Q}{\sqrt{gb^3 S_0}} \left[\ln \left(\frac{6\sqrt{gb^3 S_0}}{\varepsilon\sqrt{gb S_0} + 3.75v} \right) \right]^{-1} \quad (1.86)$$

Pour un canal large

$$y_n = 0.213 \left\{ \varepsilon \left(\frac{Q}{b\sqrt{gS_0}} \right)^{10.444} + 70v^{1.2} \left[\frac{Q}{b(gS_0)^{0.561}} \right]^{9.911} \right\}^{0.06} \quad (1.87)$$

Pour un canal de transition entre (1.86) et (1.87)

$$y_n = 0.213 \left\{ \left[\varepsilon \left(\frac{Q}{b\sqrt{gS_0}} \right)^{10.444} + 70\nu^{1.2} \left[\frac{Q}{b(gS_0)^{0.561}} \right]^{9.911} \right]^{0.12} + 7.3 \frac{Q^2}{gb^3S_0} \left[\ln \left(\frac{6\sqrt{gb^3S_0}}{\varepsilon\sqrt{gbS_0} + 3.75\nu} \right) \right]^{-2} \right\}^{0.5} \quad (1.88)$$

L'erreur maximale des équations (1.87) et (1.88) sont 1% et 3% respectivement.

Swamee (1996) arrange l'équation (1.87) en groupes non dimensionnel

$$y_{n+} = 0.213 \left[\varepsilon_+ + 70 \left(\frac{\nu b}{Q} \right)^{1.2} \right]^{0.06} \quad (1.89)$$

$$\text{Où } y_{n+} = y_n \left(\frac{gb^2S_0}{Q^2} \right)^{1/3} \quad (1.90)$$

$$\varepsilon_+ = \varepsilon \left(\frac{gb^2S_0}{Q^2} \right)^{1/3} \quad (1.91)$$

L'équation (1.88) peut être écrite sous combinaison de (1.86) et (1.89) sous forme non dimensionnelle.

Swamee et Rathie (2004) donnent la valeur exacte de la profondeur normale du canal rectangulaire sous forme d'une solution trigonométrique utilisant la formule de Chézy

Pour $M_b \leq \sqrt{27/32}$

$$\eta = \left(\frac{M_b^2}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32M_b^2}{27}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32M_b^2}{27}} \right)^{1/3} \right] \quad (1.92)$$

Pour $M_b \geq \sqrt{27/32}$

$$\eta = 2\sqrt{\frac{2}{3}} M_b \cos \frac{\psi}{3} \quad (1.93)$$

$$\text{Où } \cos \psi = \frac{1}{M_b} \sqrt{\frac{27}{32}} \quad (1.94)$$

Où $\eta = y_n / b$ et $M_b = Q / C \sqrt{b^5 S_0}$

La profondeur normale utilisant la formule de Manning a été développée par le théorème de Lagrange, l'équation gouvernante de la profondeur normale est écrite

$$\eta = N_b^{3/5} (1 + 2\eta)^{2/5} \quad (1.95)$$

$$\text{Où } N_b = Qn / (b^{8/3} \sqrt{S_0}) \quad (1.96)$$

Pour les canaux rectangulaires larges

$$\begin{aligned} \eta = N_b^{3/5} &+ \left(\frac{N_b}{1.2044} \right)^{6/5} + \left(\frac{N_b}{2.7679} \right)^{9/5} - \left(\frac{N_b}{2.355} \right)^{12/5} \\ &+ \left(\frac{N_b}{2.2124} \right)^{18/5} - \left(\frac{N_b}{2.3624} \right)^{21/5} + \dots \end{aligned} \quad (1.97)$$

Pour les canaux rectangulaires étroits

$$\begin{aligned} \eta = \frac{2^{-2/3}}{N_b} &- \left(\frac{0.363708}{N_b} \right)^2 + \left(\frac{0.39685}{N_b} \right)^3 - \left(\frac{0.439845}{N_b} \right)^4 \\ &+ \left(\frac{0.478982}{N_b} \right)^5 - \left(\frac{0.513012}{N_b} \right)^6 + \left(\frac{0.542458}{N_b} \right)^7 + \dots \end{aligned} \quad (1.98)$$

Les formules de Chézy et Manning sont exprimées en fonction du coefficient de frottement ASCE (1963)

$$C = -2.457 \sqrt{g} \ln \left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{0.221\nu}{\sqrt{gR_h^3 S_0}} \right) \quad (1.99)$$

$$n = \left[\frac{2.457 \sqrt{g}}{R_h^{1/6}} \ln \left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{0.221\nu}{\sqrt{gR_h^3 S_0}} \right) \right]^{-1} \quad (1.100)$$

Les valeurs arbitraires $C = 100m^{1/2} / s$ et $n = 0.015s / m^{1/3}$ sont choisies pour calculer la première valeur de la profondeur normale, connaissant η , R_h les coefficients de rugosité

révisés peuvent être obtenus des équations (1.99) et (1.100), utilisant ce dernier dans l'équation de la profondeur normale correspondante la valeur de η est améliorée, répétant le processus la valeur de la profondeur normale est obtenue.

Achour et Bejaoui (2006) dans leur discussion ont proposé une procédure pour calculer ces profondeurs normales. Le coefficient de frottement arbitraire est choisi $f=1/16$, la profondeur normale initiale peut être calculée par le coefficient $C = \sqrt{8g \times 16}$. Ce dernier sera utilisé pour le calcul de \bar{A} et \bar{P} ($\bar{}$ signifie valeur arbitraire), ces deux derniers sont utilisés pour le calcul du coefficient du frottement à partir d'une équation approchée :

$$f = \frac{(1.35)^5}{16} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} \quad (1.101)$$

Le coefficient de rugosité C est recalculé par l'équation (1.101) $C = \sqrt{8g / f}$, M_b et puis la profondeur normale correspondante est recalculée.

Cette méthode de calcul a été dérivée en introduisant la valeur arbitraire 1/16 dans la formule de Darcy Weisbach comme suivant

$$\bar{S}_0 = \frac{1}{16} \frac{Q^2 \bar{P}}{8g A^3} \quad (1.102)$$

Divisant l'équation (1.102) par l'équation de Darcy Weisbach donne

$$\frac{\bar{P} A^3}{P A^3} = 16f \quad (1.103)$$

La solution de l'équation (1.103) est

$$A = (16f)^{2/5} \bar{A} \quad (1.104)$$

$$P = (16f)^{1/5} \bar{P} \quad (1.105)$$

D'après les équations (1.104) et (1.105) les valeurs de diamètre hydraulique

$$D_h = 4 \frac{A}{P} = \psi \bar{D}_h \text{ et le nombre de Reynolds } R = \frac{4Q}{P\nu} = \psi^{-1} \bar{R} \text{ sont déduites ou } f = \psi^5 / 16,$$

l'insertion de ces derniers dans l'équation de Colebrook donne :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{3.7\psi} + \frac{10.04}{\psi^{3/2} \overline{R}} \right) \quad (1.106)$$

L'équation (1.101) est une équation approchée est une équation approchée de l'Eq. (1.106).

Finalement le coefficient de rugosité C est recalculé par l'équation (1.101) $C = \sqrt{8g/f}$ et puis la profondeur normale correspondante est recalculée.

Srivastava (2006) dans sa discussion donne une solution itérative pour le calcul de la profondeur normale de l'équation (1.95) par l'algorithme

$$\eta_0 = 0$$

$$\eta_1 = N_b^{3/5} (1 + 2(\eta_0))^{2/5} = N_b^{3/5}$$

$$\eta_2 = N_b^{3/5} (1 + 2(\eta_1))^{2/5} = N_b^{3/5} (1 + 2N_b^{3/5})^{2/5}$$

$$\eta_3 = N_b^{3/5} (1 + 2(\eta_2))^{2/5} = N_b^{3/5} \left(1 + 2N_b^{3/5} (1 + 2N_b^{3/5})^{2/5} \right)^{2/5}$$

L'équation suivante est basée sur l'algorithme itératif tronqué

$$\eta = N_b^{3/5} \left[1 + 2.404 N_b^{0.6321} (1 + 2.03 N_b^{0.9363})^{0.3929} \right]^{2/5} \quad (1.107a)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.107a) est inférieure à 0.06 % dans la gamme $0 \leq \eta \leq 100$

Kouchkzadeh et Vatankhah (2007) dans leur discussion mentionnent leur formule (2001)

$$\eta = N_b^{0.6} \left[1 + 2N_b^{0.6} (1 + 0.86 N_b^{0.6}) \right]^{0.4} \quad (1.107b)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.107b) est inférieure à 0.3 % dans la gamme $0 \leq \eta \leq 4$.

Vatankhah et Easa (2011) proposent la formule suivante

$$\eta = N_b^{3/5} \left[1 + 2N_b^{3/5} + 1.712 N_b^{6/5} \right]^{2/5} \quad (1.108a)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.108a) est inférieure à 0.08 % dans la gamme $0 \leq \eta \leq 3$.

Vatankhah (2015) propose une nouvelle formule pour le calcul de la profondeur normale

$$\eta = \left(N_b^{2.3733} + 4.3957 N_b^{3.0319} + 6.2205 N_b^{3.9556} \right)^{0.2528} \quad (1.108b)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.108) est inférieure à 0.12 % dans la gamme $0 \leq \eta \leq 10000$.

L'équation (1.108b) est une combinaison des trois formules de la profondeur normale de forme puissance (power Law fonctions), correspond aux trois asymptotes ; une correspond aux petites valeurs de N_b , la deuxième aux larges valeurs de N_b et la troisième correspond aux valeurs de N_b entre les deux.

I.7.4.4. Canal Parabolique

Babaeyan-Koopaei (2001) a présenté la géométrie du canal de forme parabolique

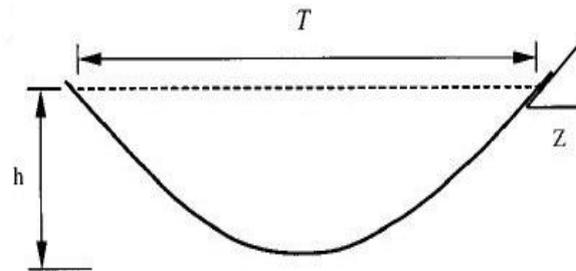


Figure 1.3. Géométrie du canal parabolique.

La géométrie de la section parabolique est décrite par l'équation $Y = kX^2$.

La section et le périmètre mouillés, la largeur du plan d'eau sont exprimés par

$$A = \frac{2}{3} yT' = \frac{8}{3} y^2 z \quad (1.110)$$

$$P = 2yz^2 \left[\frac{1}{z} \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} + \ln \left(\frac{1}{z} + \sqrt{1 + \frac{1}{z^2}} \right) \right] \quad (1.111)$$

$$T = 4zy \quad (1.109)$$

Achour et Khattaoui (2008) ont proposé des équations pour la profondeur normale de forme puissance utilisant les formules de Chézy et Manning

$$\eta = aN_p^b \text{ et } \eta = aM_p^b \quad (1.112)$$

$$\text{Où } \eta = \sqrt{y/B} = y/T', B = 4/k \text{ et } B = T'^2 / y \quad (1.113)$$

$$N_p = nQ/B^{8/3} \sqrt{S_0} \quad (1.114)$$

$$M_p = Q/CB^{5/2} \sqrt{S_0} \quad (1.115)$$

a et b sont des coefficients variable d'une gamme de la profondeur normale a une autre, l'erreur maximale de l'équation (1.112) est de l'ordre de 1%.

Vatankhah (2013) propose une solution précise pour le calcul de la profondeur normale

$$s = \delta^{2/13} \left(\ln(s_0 + \sqrt{1+s_0})^{1/s_0} + \sqrt{1+s_0} \right)^{2/13} \quad (1.116)$$

$$\text{Où } s_0 = \frac{1 + 1.12\delta^{0.167}}{(1.16 + 0.947\delta^{-0.177})^{0.841}} \quad (1.117)$$

$$s = 2\sqrt{ky} = 4\eta \quad (1.118)$$

$$\text{et } \delta = \left(\frac{18nk^{8/3}Q}{3^{1/3}\sqrt{S_0}} \right)^{3/2} \quad (1.119)$$

L'erreur maximale l'équation (1.116) est inférieure a $8 \times 10^{-3}\%$ pour la gamme $0 \leq s \leq 200$.

Zhang et Wu (2014) ont proposé une formule dans une gamme plus large pour la profondeur normale où l'équation gouvernante de la profondeur normale est transformée comme suit

$$0.5684\varepsilon_p = \frac{\eta_p^3}{\left[2\eta_p \sqrt{1+4\eta_p^2} + \ln(2\eta_p + \sqrt{1+4\eta_p^2}) \right]^{2/5}} \quad (1.120)$$

$$\text{Où } \eta_p = \sqrt{ky} \text{ et } \varepsilon_p = k^{8/5} \left(\frac{nQ}{\sqrt{S_0}} \right)^{3/5}$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_p &= e^{-0.016+0.075\sqrt{\varepsilon_p}+0.383\ln \varepsilon_p} & \varepsilon_p &\leq 1 \\ \eta_p &= 0.055 + 0.99\varepsilon_p^{5/11} & \varepsilon_p &> 1 \end{aligned} \right\} \quad (1.121)$$

L'erreur maximale l'équation (1.121) est inférieure à 1% et la minimale est 0.0057%.

Li and Gao (2014) ont proposé une formule dans une gamme plus large pour la profondeur normale

$$\eta = \frac{\delta}{4k} \left[\sqrt{e^\alpha (1 + e^\alpha)} + \ln \left(\sqrt{e^\alpha} + \sqrt{1 + e^\alpha} \right) \right]^{4/15} \quad (1.122.a)$$

$$\text{Où } \alpha = 0.02(\ln \delta)^2 + 1.22 \ln k + 0.26 \quad (1.122.b)$$

L'erreur maximale l'équation (1.122) est inférieure à 0.34% pour la gamme $0.04 \leq s \leq 400$.

Vatankhah (2015) propose une nouvelle solution pour le calcul de la profondeur normale

$$s = \left[\left(16\delta_p^{15} \right)^{\frac{319}{780}} + \delta_p^{\frac{29}{4}} \right]^{\frac{60}{319}} = \left(\delta_p^{7.25} + 3.108\delta_p^{6.135} \right)^{0.18808} \quad (1.123)$$

$$\text{Où } \delta_p = \left(\frac{18nk^{8/3}Q}{3^{1/3}\sqrt{S_0}} \right)^{2/5} \quad (1.124)$$

L'équation (1.123) est une combinaison de deux formules directes de la profondeur normale de forme puissance, correspond aux deux asymptotes ; une correspond aux petites valeurs de δ_p , la deuxième aux larges valeurs de δ_p . L'erreur maximale l'équation (1.123) est inférieure à 0.07% .

Swamee et Rathie (2016) ont présenté une nouvelle formule de la profondeur normale utilisant le coefficient de frottement ASCE (1963) et les groupes de variables non dimensionnels $G_a = Q/\sqrt{ga^5 S_0}$, $v^* = v/\sqrt{ga^3 S_0}$ et $\varepsilon_* = \varepsilon/a$.

Où $a = 1/k$, k est défini a par l'équation (1.109).

Pour le régime rugueux

$$\eta_n = 0.1343 \left(1 + 2.23\varepsilon_*^{0.1581} \right) G_a^{0.5/(1+0.12\varepsilon_*^{0.235})} \quad (1.125)$$

avec $\eta_n = y/a$, dans les gammes suivante $0.1 \leq G_a \leq 10$ et $10^{-6} \leq \varepsilon_* \leq 10^{-2}$.

Pour le régime lisse

$$\eta_n = 0.148(1 + 3.08\nu^{*0.188})G_a^{0.5/(1+0.275\nu^{*0.181})} \quad (1.126)$$

L'équation (1.126) est applicable dans les gammes suivante $0.1 \leq G_a \leq 10$ et $10^{-6} \leq \nu^* \leq 10^{-2}$.

La combinaison des équations (1.125) et (1.126) donne la profondeur normale pour la zone de transition

$$\eta_n = (\eta_{nr}^{20} + \eta_{nl}^{20})^{0.05} \quad (1.127)$$

Où les indices r et l signifient les régimes rugueux et lisse respectivement.

L'erreur maximale de l'équation (1.127) est approximativement 1 % dans les gammes $0.1 \leq G_a \leq 10$, $10^{-6} \leq \varepsilon_* \leq 10^{-2}$ et $10^{-6} \leq \nu^* \leq 10^{-2}$.

Vatankhah (2018) dans sa discussion a présenté graphiquement les pourcentages d'erreurs associées de l'équation du régime de transition (1.127) pour différents valeurs de ν^* et ε_* en fonction de η_n ; ou l'erreur maximale dépasse les 6 %.

Zarei et Bijankhan (2018) dans leurs discussion ont présenté graphiquement et par des tableaux les pourcentages d'erreurs associées de des équations des régimes rugueux, lisse et de transition (1.125), (1.126) et (1.127) pour différents valeurs de ν^* , ε_* et gammes de η_n en fonction des valeurs de G_a . L'erreur maximale l'équation (1.125) est l'ordre de 1.64 %, celle de (1.126) est de l'ordre de 6% et celle de l'équation (1.127) est 6.86 %.

1.7.4.5. Tunnels de Forme non Circulaire

Les tunnels non circulaires sont généralement prévus pour combiner les eaux pluviales avec l'égout. Babbitt et Baumann (1958) ont indiqué que parmi les raisons de l'utilisation des sections non circulaire : raison structurelle pour sécuriser les grandes force pour résister au charges, raisons économiques pour réduire les couts de construction et raison pour améliorer la vitesse de l'écoulement de petites profondeurs et faibles débits pour satisfaire les conditions d'auto curage.

I.7.4.5. 1. Tunnel de Forme Ovoïdale (Gill 1987)

Bijankhan et Kouchakzadeh (2011) ont proposé une formule de la profondeur normale pour la section ovoïdale (Gill 1987, figure 1.4) utilisant la sensibilité hydraulique.

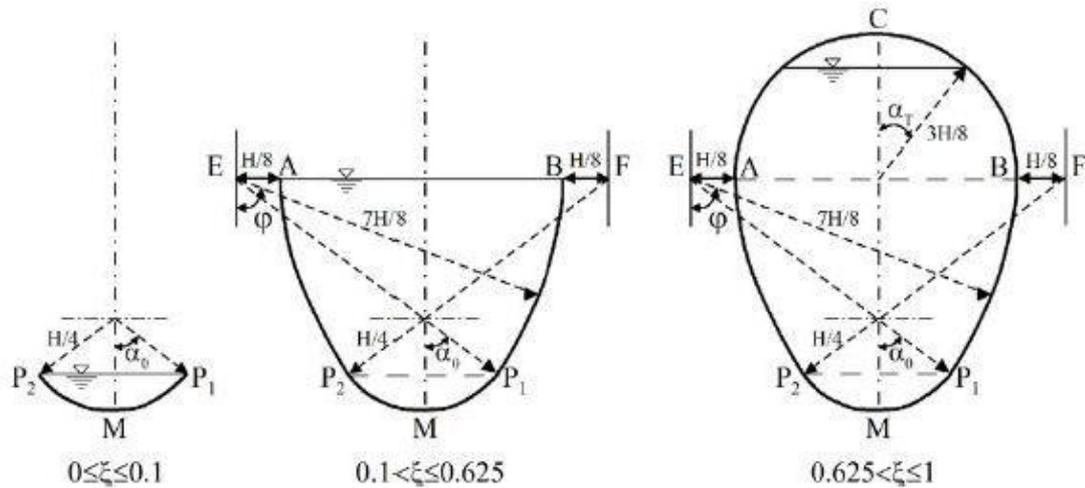


Figure 1.4. Géométrie de la section ovoïdale (Gill 1987).

La sensibilité hydraulique est défini par le rapport de la variation de sortie au la variation d'entrée (Renault et Hemakumara 1999), par conséquent l'indice de la sensibilité hydraulique a la forme

$$S_h = \frac{d\xi / \xi}{dN_0 / N_0} \quad (1.128)$$

Où $\xi = \eta = y_n / H$, S_h est la sensibilité hydraulique et $N_0 = nQ / H^{8/3} \sqrt{S_0}$; H est le diamètre horizontal du tunnel ovoïdale.

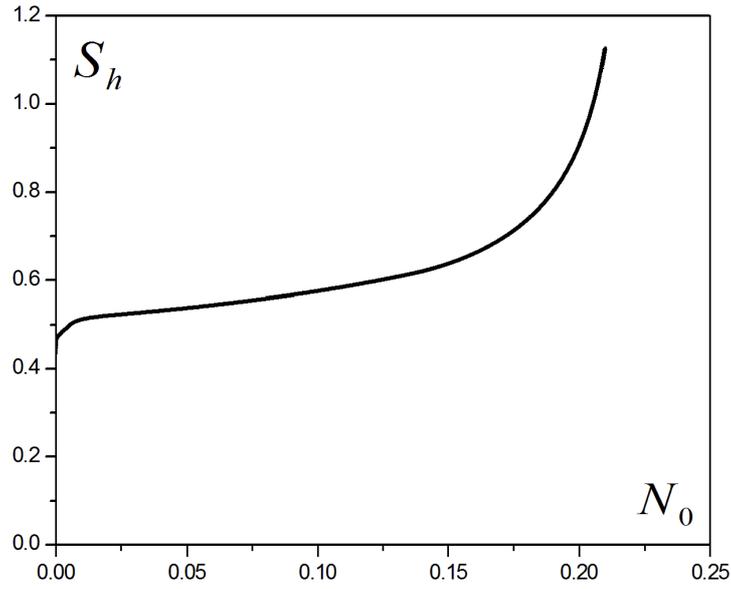


Figure 1.5. Variation de la sensitivity relative selon l'équation (1.128).

S_h est une fonction de N_0 (figure.5), une formule approchée de S_h est obtenu comme suivant

$$S_h = 259.44N_0^4 - 7.885N_0^3 - 5.8378N_0^2 + 1.1622N_0 + 0.4974 \quad (1.129)$$

Intégrant l'équation (1.128)

$$\eta = e^{\left(\int \frac{S_h}{N_0} dN_0 \right)} \quad (1.130)$$

Substituant l'équation (1.129) dans (1.130), après intégration et régression la profondeur normale est donnée par

$$\eta = \exp\left(3.86N_0^{0.153} - 3.199N_0^{0.1227} + 25.9961N_0^{3.758} + 0.439 \ln N_0 + 0.0527\right) \quad (1.131)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.131) est inférieure à 1 % pour $0.02 \leq \eta \leq 0.86$ correspond a $0.000146 \leq N_0 \leq 0.20983$.

I.7.4.5. 2. Tunnel de Forme Fer a Cheval Type I

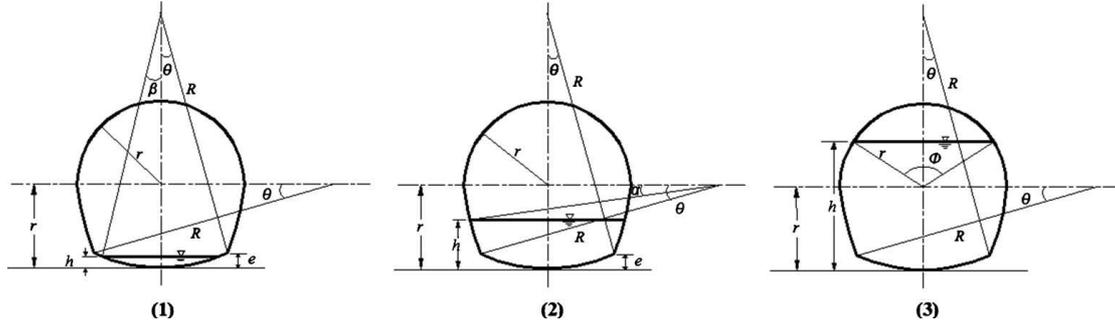


Figure 1.6. Coupes des sections du tunnel fer à cheval type I.

Li et al (2010) ont donné la géométrie et la profondeur normale du tunnel de forme fer a Cheval type I (figure .6) et type II.

Pour $Q \leq Q_e$

$$\eta = (0.057t^2 - 0.3738t + 1.3849)N_H^{(0.0036t^2 - 0.021t + 0.801)} \quad (1.132)$$

Pour $Q_e \leq Q \leq Q_r$

$$\eta = (0.199t^2 - 1.124t + 0.9243)N_H^2 + (0.0956t^2 - 0.5401t + 1.8479)N_H + (0.002t^2 - 0.0166t + 0.0524) \quad (1.133)$$

Pour $Q \geq Q_r$

$$\eta = (-0.0111t^2 + 0.0501t - 2.8232)N_H^2 + (0.0381t^2 - 0.2063t - 0.3739)N_H + (0.0001t^2 - 0.0063t + 0.3789) \quad (1.134)$$

$$\text{Ou } \eta = h_n / 2r, \text{ et } N_H = \left(\frac{nQ}{\sqrt{S_0} (2r)^{8/3}} \right)^{3/5} \quad (1.135)$$

$$\text{Pour le type I, } t=3, Q_e = 0.029178 \frac{\sqrt{S_0}}{n} r^{8/3} \text{ et } Q_r = 1.167115 \frac{\sqrt{S_0}}{n} r^{8/3}$$

Les équations (1.132), (1.133) et (1.134) calculent les profondeurs normales pour la section circulaire(t=1), et aussi pour le tunnel fer à cheval type II (t=2).

L'erreur maximale des équations (1.132), (1.133) et (1.134) est inférieure à 0.5 % pour la gamme $0 < \eta < 0.75$.

Hosieni et Raee (2012) dans leur discussion ont signalé une erreur typographique dans l'équation (1.134) et corrigé comme suivant

Pour $Q \geq Q_r$

$$\eta = \left(-0.0111t^2 + 0.0501t + 2.8232\right)N_H^2 + \left(0.0381t^2 - 0.2063t - 0.3739\right)N_H + \left(0.0001t^2 - 0.0063t + 0.3789\right) \quad (1.136a)$$

Les intervenants (discussors) mentionnent que les limites du paramètre adimensionnel x doit être déterminées. Et préfèrent une seule équation pour la détermination de la profondeur normale dans la gamme $0.05 \leq \eta \leq 0.82$ comme celle de Vatankhah et Easa (2011)

$$\eta = 0.5N_h^{(-1.788N_h^{0.892} - 17.6N_h^{4.2} + 0.3956)} \quad (1.136b)$$

Où $N_h = N_H^{5/3}$.

Bijankhan et al. (2012) dans leur discussion proposent une seule équation pour la détermination de la profondeur normale pour les différentes zones du tunnel fer à cheval type I

$$h_* = \frac{1.231N_h^{1.5274} + 0.344N_h^{0.464} + 0.194N_h^{1.63}}{\left(-0.1237N_h^{1.103} + 0.22934N_h^{0.8303} + 0.94778\right)^{1/3}} \quad (1.137)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.137) est inférieure à 0.7 % pour $0.1 \leq \eta \leq 0.85$ correspond a $0.000146 \leq N_o \leq 0.20983$.

I.8. Les Contraintes des Vitesses

Le dimensionnement de la conduite d'assainissement doit être vérifié pour la vitesse d'auto curage et la vitesse maximale admissible. Pour les débits faibles, la vitesse peut être aussi faible que l'égout est capable de transporter uniquement la matière en suspension fine et le reste est déposé dans le fond de l'égout. La vitesse qui est suffisante de prévenir la déposition est appelée la vitesse d'auto curage. Elle dépende du type de la matière en suspension présente dans l'égout, et du diamètre de l'égout comme donner dans le tableau. 1.4.

Diamètre de l'égout (cm)	Vitesse d'auto curage (m/s)
15 à 25	1
30 à 60	0.75
Plus de 60	0.6

Tableau 1.4. Vitesses d'auto curage, d'après Swamee et al. (1987).

L'autre contrainte de la vitesse, pertinente à la limite de la vitesse maximale réalisable, est qu'elle doit être inférieure à la vitesse de décapage, car cette dernière dépende de la matière de l'égout comme donner dans le tableau 1.5.

Matériaux de l'égout	Vitesse de décapage (m/s)
Fonte	3.5-4.5
grès	3.0-4.5
béton	2.4-3.0
Brique	1.5-2.5

Tableau 1.5. Vitesses de décapage, d'après Swamee et al. (1987).

Hager (2010) a cité d'autres conditions à satisfaire pour le débit et vitesse minimales d'égout.

I.9. L'Écoulement Critique

L'écoulement critique est considéré critique quand le nombre de Froude $F=1$. La condition de criticité est importante dans la classification des écoulements et dans l'analyse de l'écoulement graduellement varié. L'équation gouvernante de la profondeur critique est donnée par Bakhmeteff (1932), substituant $F=1$ dans l'équation (1.8) on trouve

$$1 = \frac{V}{\sqrt{g(A/T)}} \quad (1.138)$$

I.9.1. Conduite Circulaire

Swamee (1993) a donné une formule de la profondeur critique pour la conduite circulaire

$$\eta_c = [0.77F_D^{-6} + 1]^{-0.085} \quad (1.139)$$

Où $\eta_c = y_c / D$, y_c est la profondeur critique et $F_D = Q / \sqrt{gD^5}$

L'erreur maximale de l'équation (1.139) est inférieure à 1.25 %.

Hager (1999) a donné une simple formule pour la profondeur critique

$$y_c = (Q / \sqrt{gD})^{0.5} \quad (1.140)$$

L'équation (1.140) n'est pas exacte pour les valeurs élevées de la profondeur critique.

Vatankhah et Bijankhan (2010) ont proposé une équation pour la profondeur critique

$$\eta_c = \frac{0.9584\epsilon_c^{0.25}}{(1 + 0.0106\epsilon_c^{0.26} - 0.0132\epsilon_c^{1.863})^{-10.022}} \quad (1.141)$$

Où $\epsilon_c = F_D^2$, l'erreur maximale de l'équation (1.141) est inférieure à 0.25 % pour $0 \leq \eta_c \leq 0.92$.

Zhao et al. (2008) ont proposé une équation pour la profondeur critique suivante

$$\eta_c = 1.0211\varepsilon_c^{0.2555} \quad (1.142)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.142) est inférieure à 0.85 % pour $0.05 \leq \eta_c \leq 0.85$.

Abed (2010) a donné l'équation pour la profondeur critique suivante

$$\eta_c = (1/0.3) \sinh^{-1}(0.312F_D^{0.52}) \quad (1.143)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.143) est inférieure à 0.42 % pour $0.2 \leq \eta_c \leq 0.8$.

Vatankah et Easa (2011) ont proposé une équation pour la profondeur critique

$$\eta_c = \left(1 + 13.6\varepsilon_c^{-2.1135} - 13\varepsilon_c^{-2.1}\right)^{-0.1156} \quad (1.144)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.144) est inférieure à 0.27 % pour $0.01 \leq \eta_c \leq 1$.

Elhakeem et Sattar (2017) ont proposé l'équation suivante

$$\eta_c = \left[0.6 \tan^{-1}(1.94\varepsilon_c^2)\right]^{0.1273} \quad (1.145)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.145) est inférieure à 1.23 % pour $0.02 \leq \eta_c \leq 0.98$.

Vatankhah (2018) dans sa discussion a mentionné que l'équation de Swamee (1.139) a une erreur maximale inférieure à 1.46% et quelle est préférable à celle de Elhakeem et Sattar (1.145) pour sa simplicité et sa gamme d'application qui est $0.02 \leq \eta_c \leq 1$. Il a re-calibré l'équation de Swamee pour plus d'exactitude comme suivant

$$\eta_c = \left(1 + 0.83\varepsilon_c^{-2.7}\right)^{-0.0942} \quad (1.146)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.146) est inférieure à 1.25 % pour $0.02 \leq \eta_c \leq 1$.

Après il a proposé une équation qui recouvre toute la gamme d'application $0 \leq \eta_c \leq 1$ avec une erreur maximale inférieure à 0.13%

$$\eta_c = \left(1 + \frac{1.36}{1.2\varepsilon_c^{2.46} + \varepsilon_c^{2.13}}\right)^{-0.1175} \quad (1.147)$$

I.9.2. Autres Formes de Sections Pratiques

Pour le canal triangulaire la hauteur critique y_c est donnée par Swamee (1993)

$$y_c = \left(\frac{2Q^2}{gm^2} \right)^{1/5} \quad (1.148)$$

Celle du canal rectangulaire peut être déduite comme

$$\eta_c = \left(\frac{Q^2}{gb^5} \right)^{1/3} \quad (1.149)$$

Et celle de la section parabolique est donnée par Swamee (1993) et (2016)

$$y_c = \left(\frac{27kQ^2}{32g} \right)^{1/4} \quad (1.150)$$

I.9.3. Sections non Circulaires

Bijankhan and Kouchakzadeh (2011) ont substitué le nombre de Froude $F=1$ et le facteur de la pente critique S_c dans la formule de Manning donnant

$$S_c = \frac{T^{1/2} H^{1/6}}{A^{1/2} R_h^{2/3}} \quad (1.151)$$

$$\text{Où } S_c = H^{1/6} \sqrt{S_0} / (n \sqrt{g \cos \theta}) \quad (1.152)$$

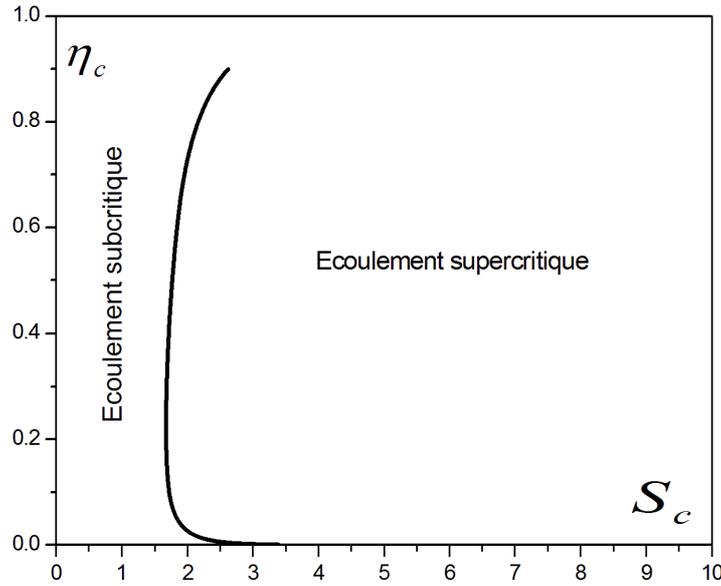


Figure 1.7. Régimes d'écoulements pour le tunnel ovoïdale.

L'équation (1.151) exprime la pente critique distinguant les régimes d'écoulements subcritique et supercritique représentée dans la figure.7. L'équation de la profondeur critique du tunnel ovoïdale $\eta_c = y_c / H$ est une fonction du S_c et proposée comme suivant

$$\eta_c = \frac{(-22.408 + 5.3163S_c^{0.1368} + 40.188 \ln S_c)^{-1.1096}}{(14.0502S_c^6 - 592.662 \ln S_c)^{0.1364}} \quad \text{pour } S_c < 1.673 \quad (1.153)$$

$$\eta_c = \frac{(-27.38S_c^{-8.7282} + 0.3752S_c^{-0.3558})^{0.1075}}{(1 + 30.4S_c^{-15.96} + 1.33S_c^{-7.956})^{25.9}} \quad \text{pour } S_c > 1.673 \quad (1.154)$$

Les erreurs maximales des équations (1.153) et (1.154) sont inférieures à 1.98% (pour $0.038 \leq \eta_c \leq 0.221$ ou $1.9059 \leq S_c \leq 1.6703$) et 2 % (pour $0.223 \leq \eta_c \leq 0.845$ ou $1.6703 \leq S_c \leq 2.318$) respectivement.

Vatankhah et Easa (2011) ont proposé la profondeur critique pour le tunnel de forme fer à cheval par la formule suivante

$$\eta_c = \frac{\left(1.7\varepsilon_c^{10.7} + 0.000006\varepsilon_c^{8.877}\right)^{0.02799}}{\left(1 + 1.6\varepsilon_c^{2.4}\right)^{0.11}} \quad (1.155)$$

L'erreur maximale de l'équation (1.155) est inférieure à 0.65 % pour $0.01 \leq \eta_c \leq 0.988$.

I.10. Identification de l'Instabilité de l'Écoulement Uniforme par le Critère d'Iwasa (1954)

L'écoulement uniforme devient instable quand la vitesse de l'écoulement est très grande ou la pente du canal est très inclinée. Si c'est le cas l'instabilité de la surface libre est caractérisée par la formation des vagues roulantes. Plusieurs auteurs ont essayé de développer un critère pour identifier ce phénomène.

Iwasa (1954) a développé un critère utilisant l'équation dynamique de mouvement pour l'écoulement instationnaire graduellement varié (Koloseus et Davidian 1966a)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \beta V \frac{\partial V}{\partial x} + g \cos \theta \frac{\partial y_0}{\partial x} + (1 - \beta) \frac{V}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = g S_0 - \frac{\tau}{\rho R_h} \quad (1.156)$$

Où β est le facteur de distribution des vitesses $\int v^2 dA / V^2 A$, v est la vitesse a un point.

y_0 est la hauteur de l'écoulement mesurée normale au lit du canal.

L'équation de continuité unidimensionnelle est

$$\frac{\partial A}{\partial t} + V \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (1.157)$$

Utilisant les équations (1.156) et (1.157), son résultat général a la forme

$$-\frac{A}{\left(\frac{\partial \tau}{\partial V}\right)} \left[\frac{\partial \tau}{\partial A} - \frac{\tau}{R_h} \left(\frac{\partial R_h}{\partial A} \right) \right] \begin{matrix} \text{[Unstable]} > \\ \text{[Stable]} < \end{matrix} < \left[\beta - 1 \pm \sqrt{\beta^2 - \beta + \frac{S_0}{\left(\frac{V^2}{g R_h \cos \theta}\right) \left(\frac{dA}{dy_0}\right)}} \right] V \quad (1.158)$$

L10.1. Dérivation du Critère de Stabilité pour un Canal Rectangulaire Rugueux

La dérivation est obtenue à partir du critère d'Iwasa (1954) et la loi logarithmique de résistance

$$f = \left[2 \log \left(\frac{4R_h}{\varepsilon} C_1 \right) \right]^{-2} \quad (1.159)$$

Où $C_1 = \text{constante}$.

f est définie par

$$f = \frac{8\tau}{\rho V^2} = \frac{8gR_h S_0}{V^2} \quad (1.160)$$

L'utilisation des équations (1.159) et (1.160) dans la différentiation de l'équation (1.158) mène à

$$\frac{V}{\sqrt{\frac{gA \cos \theta}{\frac{dA}{dy_0}}}} = F \begin{matrix} \left[\begin{matrix} \text{instable} \\ \text{stable} \end{matrix} \right] > \\ < \end{matrix} F_s = \left\{ \left[\frac{A \left(\frac{dR_h}{dy_0} \right)}{R_h \left(\frac{dA}{dy_0} \right)} \left(0.8686\sqrt{f} + 0.5 \right) - (\beta - 1) \right]^2 - \beta(\beta - 1) \right\}^{-1/2} \quad (1.161)$$

F_s est la valeur limite du nombre du Froude pour l'écoulement stable, appelée la limite de l'écoulement stable.

Equation (1.161) est le critère de stabilité de l'écoulement dans un canal rugueux.

L'écoulement est classifié stable si le nombre de Froude est inferieur a la limite de l'écoulement stable, et il est classifié instable si le contraire est juste.

Le rapport F / F_s est appelé le degré de stabilité, s'il est inférieur à l'unité l'écoulement est considéré stable ; s'il est supérieur à l'unité, l'écoulement est considéré instable.

β peut être bien déterminé pour n'importe quelle formule de f (Rouse 1950), elle peut être approximative par l'expression

$$\beta = 1 + 0.78f \quad (1.162)$$

L'équation (1.162) pour le canal rectangulaire se réduit à

$$\frac{V}{\sqrt{gy_n \cos \theta}} = F \begin{matrix} \left[\begin{matrix} \text{Instable} \\ \text{Stable} \end{matrix} \right] \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \\ F_s = \end{matrix} \left[\left(\frac{0.8686\sqrt{f} + 0.5}{\left(\frac{B}{y_0}\right) + 1} - 0.781f \right)^2 - 0.781f(1 + 0.781f) \right]^{-2} \quad (1.163)$$

B : est la largeur du canal.

L'équation (1.163) exprime le critère de stabilité de l'écoulement dans un canal rectangulaire rugueux.

L'équation (1.163) est représentée graphiquement dans la figure.1.8. Chaque ligne est la limite de l'écoulement stable pour une valeur particulière du rapport d'aspect B / y_0 . L'état d'évaluation de stabilité peut déterminer de la figure.1.8 si l'ordonnée représente F et F_s , car l'état de l'écoulement doit être instable si ses nombre de Froude et coefficient de résistance sont tel que le point tracé au dessus de sa limite de l'écoulement stable, l'inverse est juste s'il est tracé au dessous de sa limite. Si la distribution des vitesses est considérée uniforme $\beta = 1$, le graphe sous cette condition est tracé par une ligne pointillée dans la figure 1.8.

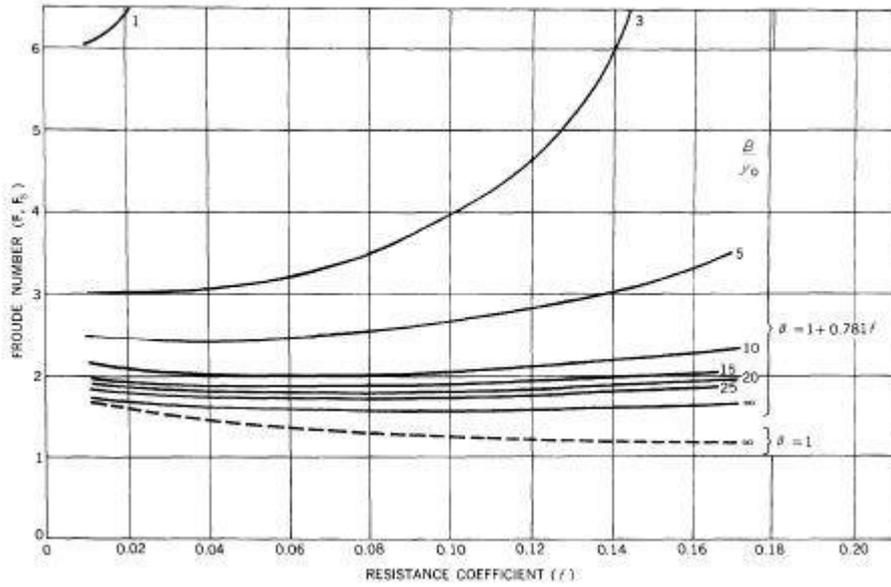


Figure 1.8. Critère de stabilité pour le canal hydrauliquement rugueux d'après Koloseus et Davidian (1966a).

I.10.2. Dérivation du Critère de Stabilité pour un Canal Rectangulaire

Lisse

La dérivation est obtenue à partir du critère d'Iwasa (1954) et la loi de résistance dans un canal lisse

$$f = \left[2 \log(R\sqrt{f}C_2) \right]^{-2} \quad (1.164)$$

Où $C_2 = \text{constante}$. D'après les équations (1.160), (1.161) et (1.164), le critère de la stabilité pour un écoulement dans un canal lisse est obtenu

$$\frac{V}{\sqrt{\frac{gA \cos \theta}{dA}}} = F \begin{matrix} \left[\begin{matrix} \text{instable} \\ \text{stable} \end{matrix} \right] > \\ < \end{matrix} F_s = \left\{ \left[\frac{A \left(\frac{dR_h}{dy_0} \right)}{R_h \left(\frac{dA}{dy_0} \right)} (1.3029\sqrt{f} + 0.5) - (\beta - 1) \right]^2 - \beta(\beta - 1) \right\}^{-1/2} \quad (1.165)$$

Si le canal est rectangulaire, l'équation (1.165) se réduit à

$$\frac{V}{\sqrt{gy_n \cos \theta}} = F \begin{matrix} \left[\begin{matrix} \text{Instable} \\ \text{Stable} \end{matrix} \right] \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \\ F_s = \end{matrix}$$

$$\left[\left(\frac{1.303\sqrt{f} + 0.5}{\frac{2}{\left(\frac{B}{y_0}\right) + 1} - 0.781f} \right)^2 - 0.781f(1 + 0.781f) \right]^{-2} \quad (1.166)$$

L'équation (1.166) exprime le critère de stabilité de l'écoulement dans un canal rectangulaire lisse. La figure 1.9 est la représentation graphique de l'équation (1.166), le critère de stabilité pour un écoulement avec une distribution des vitesses uniforme $\beta = 1$ est représenté par une ligne pointillée.

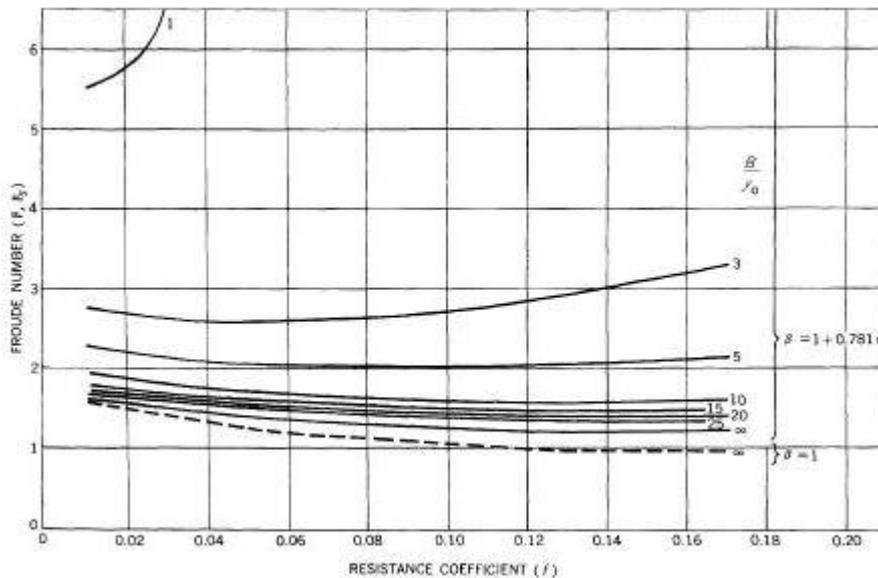


Figure 1.9. Critère de stabilité pour le canal hydrauliquement lisse d'après Koloseus et Davidian (1966a).

D'après les figures 1.8 et 1.9, l'état de la stabilité de l'écoulement pourra être identifié utilisant le critère d'Iwasa (1954) en traçant la limite de stabilité pour chaque point donné sur le graphe, ce qui est un manque de généralisation dans ce critère.

I.11. Identification de l'Instabilité de l'Écoulement Uniforme par le Critère de Bijankhan et Kouchakzadeh (2011)

L'écoulement uniforme devient instable quand la vitesse de l'écoulement est très grande ou la pente du canal est très inclinée. Si c'est le cas l'instabilité de la surface libre est caractérisée par la formation des vagues roulantes. Plusieurs auteurs ont essayé de développer un critère pour identifier ce phénomène. Vedernikov (1945) a développé un critère de stabilité de l'écoulement uniforme exprimé par (Chow 1959)

$$V_n = \chi \gamma F \quad (1.167)$$

Où $\chi = 0.5$ pour l'écoulement turbulent si la formule de Chézy est utilisée

$\chi = 2/3$ pour l'écoulement turbulent si la formule de Manning est utilisée.

γ est un facteur de forme du canal défini par

$$\gamma = 1 - R_h \frac{dP}{dA} \quad (1.168)$$

Si le nombre de Vedernikov $V_n < 1$, les vagues sont atténuées et l'écoulement est stable. Et si $V_n \geq 1$ les vagues s'amplifient et l'écoulement devient instable.

Bijankhan and Kouchakzadeh (2011) ont substitué le nombre de Vedernikov $V_n = 1$ et le facteur de la pente de l'écoulement stable S dans la formule de Manning donnant

$$S = \frac{H^{1/6} P^{2/3}}{\chi \gamma T^{1/2} A^{1/6}} \quad (1.169)$$

$$\text{Où } S = H^{1/6} \sqrt{S_0} / (n \sqrt{g \cos \theta}) \quad (1.170)$$

Equation (1.169) exprime la pente stable distinguant les zones d'écoulements stable et instable représentée dans la figure.10. L'équation de la profondeur stable du tunnel ovoïdale $\eta_s = y_s / H$ est une fonction du S et proposée comme suivant

$$\eta_s = \frac{(-40.0757 + 39.155S^{-1.237} + 28.164 \ln S)^{6.375}}{(0.27864S^6 - 645.66 \ln S)^{2.368324}} \quad \text{pour } S < 4.1354 \quad (1.171)$$

$$\eta_c = \frac{-2.1794 + 11.4679S^{-3.1301} + 1.51131S^{0.21865}}{-2.78007 + 2.064S^{0.1947424} + 86.963S^{-4.179708}} \quad \text{pour } S > 4.1354 \quad (1.172)$$

Les erreurs maximales des équations (1.171) et (1.172) sont inférieures à 2.48 % (pour $0.023 \leq \eta_s \leq 0.08$ ou $4.6618 \leq S \leq 4.1441$) et 2.24 % (pour $0.096 \leq \eta_s \leq 0.827$ ou $4.1361 \leq S_c \leq 63.21961$) respectivement.

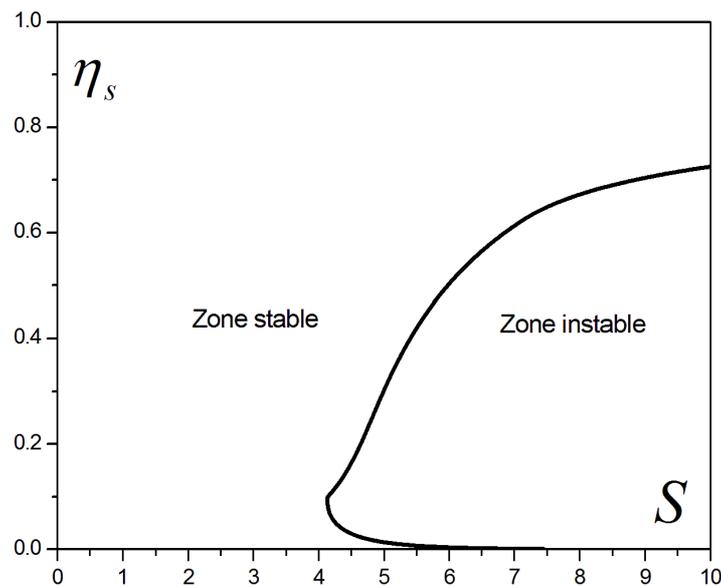


Figure 1.10. Zones de stabilité pour le tunnel ovoïdale.

L'équation (1.169) est représentée graphiquement dans la figure 1.10, où la pente S varie en fonction du rapport d'aspect η_s .

I.11. Entraînement d'Air

La concentration d'air moyenne dans une section \bar{C} , dépend du nombre de Boussinesq $B = V / \sqrt{gR_h}$. Pour un écoulement d'aération uniforme, Volkart (1985) a trouvé

$$\bar{C} = 1 - \left[1 + 0.02(B - 6)^{3/2} \right]^{-1} \quad (1.173)$$

Où $\bar{C} = \frac{\text{Volume}(\text{air})}{\text{Volume}(\text{air} + \text{eau})}$. D'après Hager (2010), le commencement de l'aération dans un

égout circulaire est défini par $B=6$, correspondant à une vitesse V supérieure à $6\sqrt{gR_h}$.

Synthèse et Conclusion

La littérature montre que les coefficients de résistance à l'écoulement de Chézy et Manning sont définis approximativement en fonction de la matière des parois internes du canal sans mesures physiques associées.

Par conséquent tous les problèmes de l'écoulement (sauf la détermination des profondeurs normale et critique, et la stabilité) peuvent être résolus aisément à partir de ces relations de résistance, ce qui implique une erreur dans les calculs des paramètres de l'écoulement uniforme due à l'erreur pertinente de ces coefficients.

Pour résoudre le problème de définition du coefficient de résistance (plus exacte), la loi logarithmique a été adoptée pour la résistance à l'écoulement « dérivée depuis la loi universel de Prandtl-von Karman ». Cette loi a été étudiée expérimentalement par un grand nombre de chercheurs, notamment par Nikuradse où la rugosité absolue des parois interne ε a été définie par le diamètre d'équivalent des grains de sable ; homogènes et uniformément repartis qui provoqueraient la même perte de charge que la surface de rugosité naturelle d'une conduite de commerce.

Ce concept a plus de signification physique car il est relié par l'énergie perdue mesurée en pression par l'utilisation du coefficient de frottement de Darcy Weisbach. La rugosité absolue ε est plus significative et plus juste que celle des coefficients de Manning n et de Chézy C .

À part le problème du débit, l'utilisation de la loi logarithmique dans la résolution des problèmes de l'écoulement n'est pas aisée à cause de sa nature implicite.

Pour les régimes turbulents; ASCE (1963) a recommandé de baser les calculs sur la loi logarithmique impliquant les paramètres de résistance ε et ν et que la formule de Manning

doit être utilisée uniquement pour le régime turbulent rugueux.

Les valeurs du coefficient de rugosité de Manning n peuvent être estimées à l'aide des tableaux (voir Chow 1959) avec une précision moins bonne que celle du diamètre des grains de sable ε .

Les solutions du problème de pertes de charges développées par la fonction W -Lambert impliquent des erreurs élevées pour les grandes valeurs du nombre de Reynolds. Pour combler cette lacune, une nouvelle solution du problème de pertes de charges sera développée dans la présente thèse utilisant le théorème de Lagrange.

Les solutions existantes du problème de détermination du diamètre engendrent des erreurs élevées. Une nouvelle solution du problème de détermination du diamètre sera développée dans la présente thèse utilisant la fonction W -Lambert.

Les formules explicites de profondeur normale (par exemple de Swamee 1994 et Swamee et Rathie 2016) sont directes et nécessitent une seule étape de calcul. De nouvelles solutions explicites des profondeurs normales plus exactes seront développées dans la présente thèse pour les canaux triangulaire, rectangulaire et naturel en utilisant le théorème de Lagrange.

Ainsi, la méthode du concept du débit maximale développée par Swamee et Swamee (2008) donne le calcul de la profondeur normale des conduites circulaires et non-circulaires dans deux étapes seulement. Par conséquent, dans la présente étude des formules directes des profondeurs normales seront proposées en fonction de débit maximale pour les conduites circulaire, fer a cheval type I et la conduite ovoïdale (Gill 1987).

Des tentatives de résolutions des problèmes de conception des conduites et canaux seront basées sur les lois logarithmiques, de Manning, de Chézy, et des combinaisons de ces dernières. Les résultats vont être discutés et comparés à ceux de la littérature.

Le critère d'identification de la stabilité de l'écoulement analytique utilisant la loi logarithmique n'est étudié que par Iwasa (1954). Sa méthode de déterminer l'état de stabilité de l'écoulement peut être effectuée seulement en traçant la limite de stabilité pour chaque hauteur d'eau, ce qui est un manque de généralisation dans ce critère. Bijankhan et Kouchakzadeh. (2011) ont pu calculer le rapport d'aspect de stabilité neutre ($V_n = 1$) en fonction de la pente non dimensionnelle S et le coefficient de résistance à l'écoulement de Manning en développant des équations explicites générales. Dans la présente étude le nombre de Vedernikov (Powell 1948) sera combiné avec la loi logarithmique, permettant une identification plus rationnelle des zones de stabilité de l'écoulement pour différents conduites et canaux pratiques en introduisant le concept de la pente minimale de la stabilité neutre.

Les chapitres suivants seront consacrés au **Développement des Solutions Explicites des Paramètres de l'Écoulement Uniforme Utilisant le Théorème de Lagrange et la Fonction W -Lambert.**

CHAPITRE II

DETERMINATION DES PERTES DE CHARGES

II. 1. Introduction

Le présent chapitre a pour but de développer des solutions explicites pour résoudre les problèmes de détermination des pertes de charge de la conduite circulaire sous pression et des canaux à surface libre.

La méthodologie et le théorème de Lagrange sont définis. La solution des pertes de charges sera développée en utilisant le théorème de Lagrange.

La solution développée est comparée avec les solutions existantes les plus avancées en termes de simplicité et d'exactitude.

Les équations développées sont comparées avec des résultats expérimentaux et des exemples d'application sont présentés pour illustration.

II. 2. Méthodologie et Théorème de Lagrange

La méthode utilisée est l'application du théorème de Josef Lagrange (1770) lequel est défini comme suit :

Si une équation est implicite en fonction de ζ et peut être exprimée comme

$$\zeta = a + t\phi(\zeta) \quad (2.1)$$

Où ζ est un variable, a = constante, t =paramètre et ϕ =fonction.

Une solution de l'équation (2.1) peut être développée sous forme d'une série de puissance en t par la formule

$$f(\zeta) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [f'(a)[\phi(a)]^n] \quad (2.2)$$

L'équation (2.2) est une solution explicite de l'Eq. (2.1) sous forme d'une série de puissance en t (Whittaker and Watson, 1915).

II. 3. Détermination des pertes de charges pour la conduite circulaire sous pression (Pipe)

L'équation de Colebrook peut être écrite comme

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = a - 2 \log \left(\frac{\varepsilon R}{9.287D} + \frac{1}{\sqrt{f}} \right) \quad (2.3)$$

$$\text{Où } a = 2 \log \left(\frac{R}{2.51} \right) \quad (2.4)$$

En appliquant le théorème de Lagrange, l'équation (2.3) est convertie à

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-2}{\ln 10} \right)^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left\{ \left[\ln \left(\frac{\varepsilon R}{9.287D} + a \right) \right]^n \right\} \quad (2.5)$$

Par l'expansion de l'équation (2.5), la série suivante est obtenue

$$\begin{aligned} f^{-1/2} = & a + 2 \log c \left[-1 + \frac{2}{\ln 10} c^{-1} \times \left[1 + c^{-1} \left(\log c - \frac{2}{\ln 10} \right) \right. \right. \\ & + \left. \left. \left(\frac{c^{-1}}{\ln 10} \right)^2 \left(1 + \frac{4 \ln c}{\sqrt{33}-9} \right) \left(4 + \frac{(\sqrt{33}-9) \ln c}{3} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[(1-2 \ln c)(2-\ln c)(4-\ln c) + \left(\frac{\ln c}{3} \right) (5 \ln c - 6) \right] \left(\frac{c^{-1}}{\ln 10} \right)^3 \right] + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{où } c = \left(\frac{\varepsilon R}{9.287D} + a \right) \quad (2.7)$$

En prenant deux et trois termes de l'équation (2.6) et régressant, on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = a + 2 \log c \left(\frac{0.8645}{c} - 1 \right) \quad (2.8)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = a + 2 \log c \left(-1 + 0.862 \left[c^{-1} + \log \left(\frac{c}{e^2} \right)^{c^{-2}} \right] \right) \quad (2.9)$$

L'erreur maximale de l'équation (2.8) est inférieure à 0.15 %, et celle de l'équation (2.9) est inférieure à 0.04 % dans toute la gamme pratique. Les équations (2.8) et (2.9) sont respectivement plus simples et plus exactes que les équations (1.39) et (1.41) de Vatankhah (2018).

En utilisant quatre termes de l'équation (2.6) et régressant, l'équation suivante est trouvée

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{f}} = a + 2 \log c & \left[-1 + 0.8682 \left(c^{-1} + \log \left(\frac{c}{e^2} \right)^{c^{-2}} \right) \right. \\ & \left. + \left(\frac{0.161}{c^3} \right) \left(1 + \frac{4 \ln c}{\sqrt{33} - 9} \right) \left(4 + \frac{(\sqrt{33} - 9) \ln c}{3} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

L'erreur maximale de l'équation (2.10) est inférieure à 0.002 % laquelle est plus exacte que l'équation (1.42) de Vatankhah (2018).

Les solutions présentées sont mieux que ceux de Vatankhah (2018) dans les deux critères de simplicité et d'exactitude.

Le tableau suivant présente une comparaison des solutions proposées avec les solutions existantes les plus avancées.

Reference	Critere				Methode Analytique
	Exactitude	Efficacite de calcul			
	Erreur Max Relative (%)	No. de Logarit hmes	No. de Puissances non-Intégré	N	
Haland 1983	1.780	1	1	2	Regression
Mikata and Walczak 2016	1.620	3	0	3	<i>n</i> th Formula
Biberg 2017	0.153	2	0	2	Function W Lambert
Vatankhah 2018	0.0028	3	1	4	Mathematique
Proposee (2 termse)	0.149	2	0	2	T-L ^c
Proposee (3 termse)	0.040	3	0	3	T-L
Proposee (4 termes)	0.002	5	0	5	T-L

^cT-L = Théorème de Lagrange.

Tableau. 2.1. Comparaison des solutions développées avec les solutions existantes.

Le nombre de logarithmes et des puissances non-intégrés (N) est utilisé par Clamond (2009) comme paramètres de mesures de l'efficacité (temps) des calculs des pertes de charges pendant la simulation utilisant les solutions explicites.

Le tableau montre que la solution proposée utilisant deux termes, et la solution de Biberg (2017), sont les plus efficaces (plus rapide dans les calculs) parmi les solutions existantes les plus avancées. Ainsi que les solutions proposées sont parmi les solutions existantes les plus exactes (voir Brkic et Stajic 2021).

Exemple. 1.1 :

Calculer la perte des charges pour les données suivantes

$D = 0.4m$, $Q = 0.15m^3 / s$, $\nu = 0.8 \times 10^{-6} m^2 / s$, $L = 20m$ (la longueur de la conduite)

et $\varepsilon = 0.5mm$.

Utilisant les éléments géométriques de la conduite circulaire en charge on trouve

$A = 0.12566m^2$, $P = 1.25663m$, $R = 596831.04$, l'insertion dans la formule (2.8)

donne $f = 0.0211837$ et puis par l'équation de Darcy Weisbach $S_0 = 0.003846$.

Et par conséquent la perte des charges est $h_f = S_0 \times L = 0.0769m$.

II. 4. Problème des Pertes de Charges pour les Canaux a Surface Libre

Pour le régime lisse

En substituant $\zeta = f^{-1/2}$ dans l'équation (1.31), on trouve

$$\zeta = b - \frac{2}{\ln 10} \ln(\zeta) \quad (2.11)$$

$$\text{où } b = 2 \log\left(\frac{R}{2.5}\right) \quad (2.12)$$

En appliquant le théorème de Lagrange, l'équation (2.11) est réécrite

$$f_s^{-1/2} = b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-2}{\ln 10}\right)^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^{n-1}}{db^{n-1}} \{[\ln(b)]^n\} \quad (2.13)$$

L'expansion de l'équation (2.13) donne

$$f_s^{-1/2} = b + 2 \log b \left[-1 + \frac{2}{b \ln 10} + \frac{2}{(b \ln 10)^2} \ln\left(\frac{b}{e^2}\right) + \dots \right] \quad (2.14)$$

En prenant trois termes, l'erreur maximale de l'équation (2.14) est inférieure à 0.11 % ,

Pour la région de transition

En substituant $\zeta = f^{-1/2}$, l'équation (1.31) est réarrangée

$$\zeta = b - 2 \log\left(\frac{\varepsilon R}{30R_h} + \zeta\right) \quad (2.15)$$

En appliquant le théorème de Lagrange, l'équation (2.15) est réécrite

$$f^{-1/2} = b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-2}{\ln 10}\right)^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^{n-1}}{db^{n-1}} \left\{ \left[\ln \left(\frac{\varepsilon R}{30R_h} + b \right) \right]^n \right\} \quad (3.16)$$

L'expansion de l'équation (2.16) donne la série suivante

$$f^{-1/2} = b + 2 \log c \left[-1 + \frac{2}{\ln 10} c^{-1} \times \left[1 + \left(\log c - \frac{2}{\ln 10} \right) c^{-1} + \left(1 + \frac{4 \ln c}{\sqrt{33} - 9} \right) \left(4 + \frac{(\sqrt{33} - 9) \ln c}{3} \right) \frac{c^{-2}}{(\ln 10)^2} + \dots \right] \right] \quad (2.17)$$

$$\text{Où } c = \left(\frac{\varepsilon R}{30R_h} + b \right) \quad (3.18)$$

En prenant quatre termes de l'équation (2.17), l'erreur maximale est inférieure à 0.0035 %.

Prenant deux et trois termes de l'équation (2.17) et régressant (Srivastava 2007, Vatankhah et al. 2008) les équations suivantes sont trouvées

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = b + 2 \log c \left(\frac{d}{c} - 1 \right) \quad (2.19)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = b + 2 \log c \left(-1 + h \left[c^{-1} + \log \left(\frac{c}{e^2} \right)^{c^{-2}} \right] \right) \quad (2.20)$$

Où $d = 0.8625$ et $h = 0.86128$.

L'erreur maximale de l'équation (2.19) est inférieure à 0.13 %, et celle de l'équation (2.20) est inférieure à 0.03 % dans toutes les gammes pratiques.

Exemple.2.1:

Calculer la perte de charge d'une conduite circulaire à surface libre pour les données suivantes

$D = 0.6m, Q = 0.5m^3/s, \nu = 0.8 \times 10^{-6} m^2/s, \eta = y_n/D = 0.5, L = 40m$ (la longueur de la conduite) et $\varepsilon = 0.3mm$.

En utilisant les éléments géométriques de la conduite circulaire à surface libre on trouve : $A = 0.227m^2, P = 1.257m, R = 1989436.8$, l'insertion dans la formule (2.19) donne $f = 0.0170406$ et puis par l'équation de Darcy Weisbach $S_0 = 0.0058$.

Et par conséquent la perte de charge est $h_f = S_0 \times L = 0.231837m$.

II. 5. Problème des Pertes de Charges pour les Canaux Très Larges

Le canal rectangulaire large est largement utilisé dans les rivières et cours d'eaux naturelles.

Thijsee (1949) a proposé la loi de résistance à l'écoulement pour les canaux larges à surface libre par la formule suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2.03 \log \left[\left(\frac{3.04}{R\sqrt{f}} + \frac{\varepsilon}{12.2R_h} \right) \right] \quad (2.21)$$

L'équation (2.21) est l'équation de résistance de résistance à l'écoulement pour les canaux très larges.

L'équation (2.21) est implicite en f et la solution traditionnelle est l'essai et l'erreur.

L'équation (2.21) est réécrite comme :

$$f^{-1/2} = b - 2.03 \log \left(\frac{\varepsilon R}{37.088R_h} + \frac{1}{\sqrt{f}} \right) \quad (2.21)$$

$$\text{où } b = 2.03 \log \left(\frac{R}{3.04} \right) \quad (2.22)$$

En appliquant le théorème de Lagrange, l'équation (2.21) donne

$$f_s^{-1/2} = b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-2.03}{\ln 10}\right)^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^{n-1}}{db^{n-1}} \left\{ \left[\ln \left(\frac{\varepsilon R}{37.088 R_h} + b \right) \right]^n \right\} \quad (2.23)$$

L'expansion de l'équation (2.23) donne la série suivante

$$f_s^{-1/2} = b + 2.03 \log c \left[-1 + \frac{2.03}{c \ln 10} + 0.5 \left(\frac{2.03}{c \ln 10} \right)^2 \ln \left(\frac{c}{e^2} \right) + \left(\frac{2.03}{c \ln 10} \right)^3 \left(\frac{\ln c}{3} - \frac{9 - \sqrt{33}}{12} \right) \left(\ln c - \frac{9 + \sqrt{33}}{4} \right) + \dots \right] \quad (2.24)$$

$$\text{où } c = \left(\frac{\varepsilon R}{37.088 R_h} + b \right) \quad (2.25)$$

L'équation (2.25) est la formule directe du calcul des pertes de charges pour le canal rectangulaire large. Utilisant trois termes de l'Eq. (2.24) l'erreur maximale engendrée est inférieure à 0.12% dans les gammes $10^{-6} \leq \varepsilon/R_h \leq 10^{-2}$ et $4000 \leq R \leq 10^8$ comme montré dans la figure 2.1.

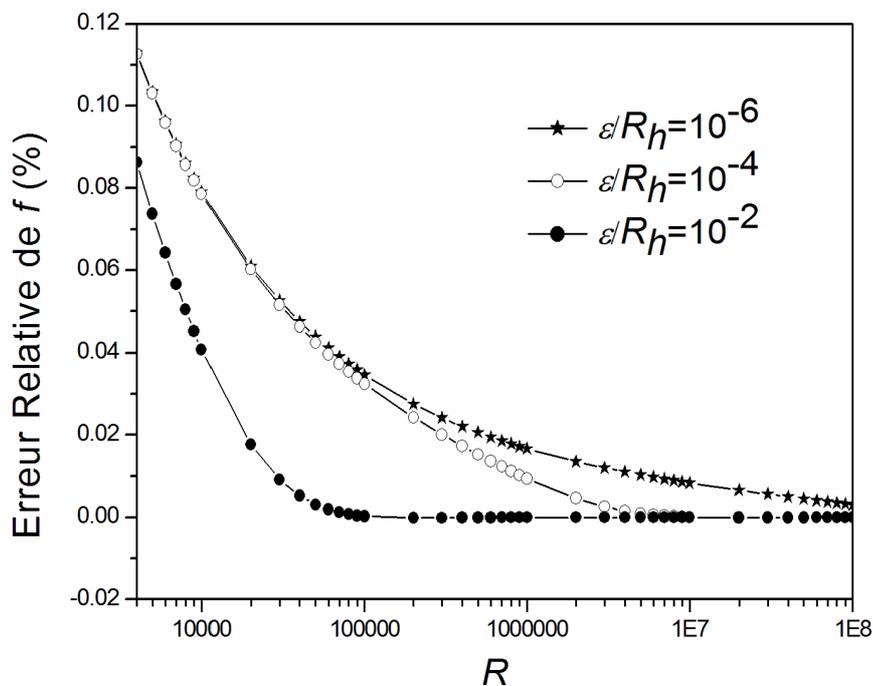


Figure. 2.1. Pourcentage d'erreur utilisant l'équation (2.24).

La figure 2.1 montre que l'erreur maximale de l'équation (2.24) utilisant trois termes est inférieure à 0.12% dans les gammes d'application $10^{-6} \leq \varepsilon/R_h \leq 10^{-2}$ et $4000 \leq R \leq 10^8$.

II.5.1 Validation par des essais expérimentaux

La solution présentée par l'équation (2.24) est validée en utilisant les données expérimentales publiées par Di Cristo et .al. (2010) dans le tableau suivant :

N.Test	S_0	Q (m^3/s)	ε / R_h	Coef Frot, f		
				f_{exact}	$f_{proposed}$ Eq. (2.24)	Erreur (%)
NR1	0.552	4.04	0.0013	0.0169	0.0169	0.0015
NR2	0.552	7.49	0.0038	0.0202	0.0202	0.0001
NR3	0.552	8.30	0.0035	0.0197	0.0197	0.0001
NR4	0.552	9.00	0.0036	0.0199	0.0199	8×10^{-5}
NR5	0.602	13.26	0.0059	0.0223	0.0223	2×10^{-5}
NR6	0.602	13.18	0.074	0.0494	0.0494	1×10^{-7}
R1	0.602	1.98	0.0214	0.0324	0.0324	8×10^{-5}
R2	0.602	1.98	0.1474	0.0661	0.0661	2×10^{-6}
R3	0.602	3.13	0.0142	0.0286	0.0286	7×10^{-5}
R4	0.603	4.00	0.0025	0.0189	0.0189	0.0001
R5	0.602	3.16	0.1145	0.0591	0.0591	1×10^{-6}
R6	0.148	5.44	0.0036	0.02	0.02	0.0001
R7	0.148	3.00	0.0129	0.0278	0.0278	8×10^{-5}
R8	0.148	10.38	0.0027	0.0186	0.0186	0.0001
R9	0.046	3.90	0.0446	0.041	0.041	6×10^{-6}
R10	0.04	0.18	0.2000	0.0775	0.0775	0.0001
R11	0.133	0.95	0.1889	0.0743	0.0743	7×10^{-6}
R12	0.203	1.31	0.1142	0.0592	0.0592	1×10^{-5}
R13	0.148	3.09	0.0104	0.0262	0.0262	0.0001
R14	0.148	10.40	0.0073	0.0235	0.0235	2×10^{-5}
R15	0.242	5.72	0.0165	0.0297	0.0297	1×10^{-5}
R16	0.053	3.30	0.0362	0.0381	0.0381	1×10^{-5}
R17	0.603	21.48	0.0023	0.0177	0.0177	4×10^{-5}
R18	0.046	11.22	0.0183	0.0305	0.0305	3×10^{-6}

Tableau.2.2. Validation de l'équation proposée (2.24) par comparaison avec les données expérimentales de Di Cristo et .al. (2010).

Le Tableau.2.2. montre que l'erreur engendrée en utilisant l'équation des pertes de charges est inférieure à 0.001%, ce qui confirme la validité des équations explicites proposées dans la présente étude.

Conclusion

Ce chapitre a pour but de développer des solutions pour le problème des pertes de charges. Les solutions sont développées en utilisant le théorème de Lagrange sous forme de séries infinies rapidement convergentes.

Les solutions sont efficaces dans le calcul des pertes de charges pendant les simulations. La solution a différents degrés d'exactitude qui dépendent du nombre de termes de la série utilisé. La solution présente a plus d'exactitude que les solutions existantes dans la littérature.

La solution présentée utilisant deux termes est la plus efficace (en terme de temps) dans le calcul des pertes de charges pendant la simulation des réseaux d'alimentation d'eau potable et des pipelines (voir Brkic et Stajic 2021).

CHPITRE III

DETERMINATION DU DIAMETRE DE LA CONDUITE

III. 1. Introduction

La conception de la conduite circulaire sous pression nécessite la détermination de deux principaux paramètres de l'écoulement : 1) les pertes de charges et 2) le diamètre de la conduite circulaire du commerce.

Le présent chapitre présente une solution directe au problème de détermination du diamètre de la conduite circulaire sous pression utilisant la fonction *W-Lambert*.

Ce chapitre est consacré au développement des solutions explicites pour résoudre le problème de déterminations du diamètre de la conduite circulaire sous pression et des diamètres des canaux à surface libre.

La méthodologie et la fonction *W-Lambert* sont définies. La solution du diamètre de la conduite sera développée en utilisant la fonction *W-Lambert* sous forme de séries de puissance.

L'exactitude de la solution développée est comparée avec les solutions existantes pour le calcul du diamètre de la conduite circulaire sous pression.

III. 2. Méthodologie et la Fonction *W-Lambert*

La méthode utilisée est la fonction *W-Lambert*. La fonction établit que si une fonction de x a la forme suivante

$$xe^x = y \tag{3.1}$$

Elle pourra être exprimée en terme de la fonction *W-Lambert* comme suit

$$x = W(y) \tag{3.2}$$

La fonction *W-Lambert* pourra être expansée sous forme d'une série de puissance par la formule suivante (Corless et al. 1996)

$$W(y) = \ln y - \ln \ln y + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{km} (\ln \ln y)^m (\ln y)^{-k-m} \quad (3.3)$$

Où c_{km} = nombre de Stirling (Comtet 1974).

Par l'expansion de l'Eq. (3.3), la série suivante est obtenue

$$W(y) = \ln y - \ln \ln(y) + \frac{\ln \ln(y)}{\ln(y)} + \frac{\ln \ln(y)[-2 + \ln \ln(y)]}{2[\ln(y)]^2} + \frac{\ln \ln(y)\{6 - 9 \ln \ln(y) + 2[\ln \ln(y)]^2\}}{6[\ln(y)]^3} + \dots \quad (3.4)$$

III.3. Détermination du Diamètre de la Conduite Circulaire Sous Pression (Pipe)

La combinaison de la formule de Darcy-Weisbach et de Colebrook donne

$$\frac{Q\sqrt{2L}}{\pi\sqrt{gh_f D^5}} = -\log\left(\frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51\sqrt{Lv}}{\sqrt{2gh_f D^3}}\right) \quad (3.5)$$

Le débit Q peut être calculé directement depuis l'Eq. (3.5) si les autres variables sont connues. Pour Q , h_f , L , ε , et v données, le diamètre de la conduite ne pourra pas être calculé à partir de l'Eq. (3.5). la solution traditionnelle est l'utilisation du procédé itératif. Par conséquent, le développement d'une solution direct pour résolution du problème de calcul du diamètre a de grand intérêt.

En utilisant les groupes de paramètres adimensionnels utilisés par Swamee et Jain (1976) : $D^* = D(gS_0/Q^2)^{1/5}$, $\varepsilon^* = \varepsilon(gS_0/Q^2)^{1/5}$ et $v^* = v(gS_0/Q^3)^{-1/5}$, la formule de Colebrook est convertie en équation gouvernante du diamètre comme suit:

$$\frac{1}{\sqrt{D^{*5}}} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{\varepsilon^*}{3.7D^*} + \frac{2.51v^*}{\sqrt{2D^{*3/2}}}\right) \quad (3.6)$$

Pour le régime rugueux ($v = 0$), l'Eq. (3.6) est réduite a

$$\ln\left(\frac{3.7D_r^*}{\varepsilon^*}\right) = \frac{\sqrt{2} \ln(10)}{\pi D_r^{*5}} \quad (3.7)$$

En réarrangeant et appliquant la fonction W -Lambert à l'Eq. (3.7), le diamètre pour le régime rugueux est résolu :

$$\frac{5\sqrt{2} \ln(10)}{2\pi D_r^{*5}} = W\left[\frac{5\sqrt{2} \ln(10)}{2\pi} \left(\frac{3.7}{\varepsilon^*}\right)^{5/2}\right] \quad (3.8)$$

L'équation (3.8) peut être résolue en utilisant trois termes de la série de l'Eq. (3.4) comme suit

$$\frac{5\sqrt{2} \ln(10)}{2\pi D_r^{*5}} = \ln(z_1) - \ln(\ln(z_1)) + \ln(\ln(z_1)) / \ln(z_1) \quad (3.9)$$

Ou

$$z_1 = \frac{5\sqrt{2} \ln(10)}{2\pi} \left(\frac{3.7}{\varepsilon^*}\right)^{5/2} \quad (3.10)$$

Pour le régime rugueux, la solution de l'équation (3.9) en utilisant 3 termes est comparée avec les valeurs exactes de l'équation (3.7) dans les gammes $3.42 \times 10^{-7} \leq \varepsilon^* \leq 0.0283$ et $0.342 \leq D^* \leq 0.566$, où l'erreur maximale en utilisant l'équation (3.9) est inférieure à 0.013%.

Pour le régime lisse ($\varepsilon = 0$), l'Eq. (3.6) est réduite à

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2} D_s^{*3/2}}{2.51 \nu^*}\right) = \frac{\sqrt{2} \ln(10)}{\pi D_s^{*5}} \quad (3.11)$$

En réarrangeant et appliquant la fonction W -Lambert à l'Eq. (3.11), le diamètre pour le régime lisse est résolu :

$$\frac{5\sqrt{2}\ln(10)}{3\pi D_s^{*5/2}} = W \left[\frac{5\sqrt{2}\ln(10)}{3\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2.51\nu^*} \right)^{5/3} \right] \quad (3.12)$$

L'équation (3.8) peut être résolue en utilisant trois termes de la série de l'Eq. (3.4) comme suivant

$$\frac{5\sqrt{2}\ln(10)}{3\pi D_s^{*5}} = \ln(z_2) - \ln(\ln(z_2)) + \ln(\ln(z_2))/\ln(z_2) \quad (3.13)$$

ou

$$z_2 = \frac{5\sqrt{2}\ln(10)}{3\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2.51\nu^*} \right)^{5/3} \quad (3.14)$$

Pour le régime lisse, la solution de l'équation (3.13) en utilisant 3 termes est comparée avec les valeurs exactes de l'équation (3.11) dans les gammes $1.267 \times 10^{-8} \leq \nu^* \leq 0.000828$ et $0.335 \leq D^* \leq 0.512$, où l'erreur maximale en utilisant l'équation (3.13) est inférieure à 0.013%.

Pour la région de transition une solution pour le calcul du diamètre est trouvée par la formule

$$D^* = 1.019 \left(D_r^{*20} + 1.9 D_s^{*20.9} \right)^{0.051} \quad (3.15)$$

Pour la région de transition, la solution de l'équation (3.15) en utilisant 3 termes est comparée avec les valeurs exactes de l'équation (3.6) dans les gammes $3.45 \times 10^{-7} \leq \varepsilon^* \leq 0.02883$, $7.5 \times 10^{-9} \leq \nu^* \leq 0.000828$ et $0.3453 \leq D^* \leq 0.577$, où l'erreur maximale en utilisant l'équation (3.15) est inférieure à 0.77% comme le montre la figure 2.2.

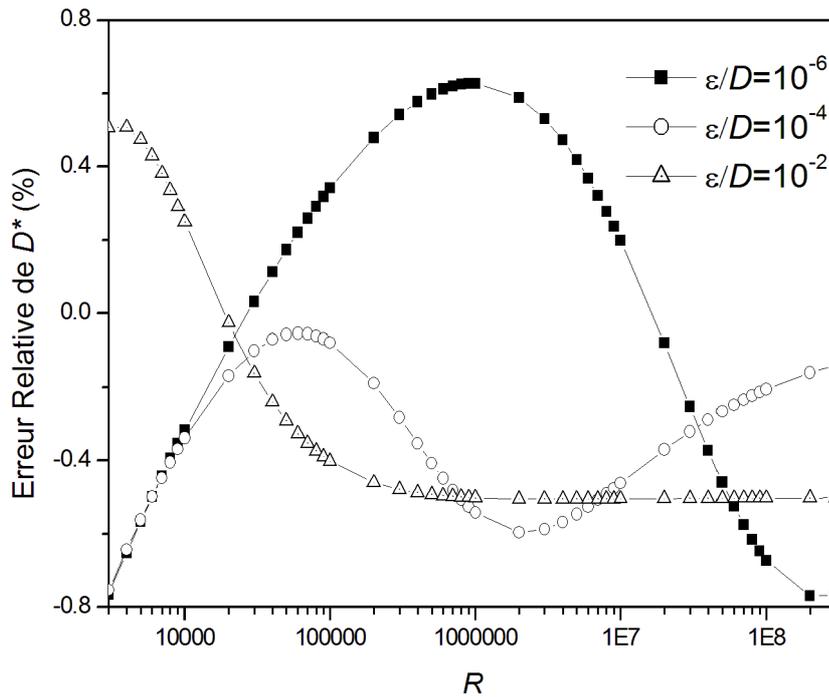


Figure. 2.2. Pourcentage d'erreur utilisant l'équation (3.15).

La figure 2.2 montre que l'erreur maximale engendrée par l'utilisation de l'équation (3.15) utilisant trois termes de l'Eq. (3.4) est inférieure à 0.77% dans les gammes d'application $10^{-6} \leq \varepsilon/D \leq 0.05$ et $4000 \leq R \leq 3 \times 10^8$.

Le tableau suivant présente une comparaison des solutions proposées avec les solutions existantes.

Reference	Methode de Solution	Les Erreurs Relatives Maximales (%)
Rajaratnam (1960)	Regression	16%
Ranja Raju and Garde (1966)	Regression	3%
Swamee et Jain (1976)	Regression	5.8%
Swamee et Rathie (2007)	Theoreme de Lagrange	2.5%
Proposee Eq. (3.15)	Fonction <i>W</i> -Lambert	0.77%

Tableau. 3.1. Comparaison des erreurs relatives des solutions développées avec les solutions existantes.

Le Tableau. 2.2 montre que la solution présentée par l'équation (3.15) est plus exacte que les meilleures solutions existantes.

III. 4. Problème du Diamètre pour les Canaux a Surface Libre

Adoptant les groupes non dimensionnels suivants

$$D^* = D \left(\frac{gS_0 A^{*3}}{P^* Q^2} \right)^{1/5} \quad (3.16)$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon \left(\frac{gS_0 A^{*3}}{P^* Q^2} \right)^{1/5} \quad (3.17)$$

$$\nu^* = \nu \left(\frac{P^*}{gS_0 A^{*3} Q^3} \right)^{1/5} \quad (3.18)$$

L'équation (1.31) est réécrite comme suit

$$\frac{1}{\sqrt{D^{*5}}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon^* P^*}{12A^* D^*} + \frac{P^* \nu^*}{3.2\sqrt{2} D^{*3/2}} \right) \quad (3.19)$$

Pour le régime rugueux $\nu^* = 0$, l'Eq. (3.19) est simplifier a

$$\sqrt{D^{*5}} \ln \left(\frac{12A^* D^*}{\varepsilon^* P^*} \right) = \frac{\ln 10}{4\sqrt{2}} \quad (3.20)$$

L'application de la fonction de W -Lambert sur l'équation (3.20) donne

$$D^* = 1.007 \left[W \left(507.615 \left(\frac{A^*}{\varepsilon^* P^*} \right)^{5/2} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.21)$$

Pour le régime lisse $\varepsilon^* = 0$, l'Eq. (3.19) est réduite a

$$\sqrt{D^*}^5 \ln\left(\frac{3.2\sqrt{2}D^{*3/2}}{P^*v^*}\right) = \frac{\ln 10}{4\sqrt{2}} \quad (3.22)$$

En appliquant fonction de W Lambert sur l'équation (3.22), on trouve

$$D^* = 0.856 \left[W \left(8.4 \left(\frac{1}{P^*v^*} \right)^{5/3} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.23)$$

La solution du diamètre est en fonction de W -Lambert basée sur la série infinie donnée par l'équation (3.4).

En utilisant trois termes de l'équation (3.4) pour la solution des équations (3.21) et (3.23), les erreurs maximales engendrées sont inférieures à 0.0072 % et 0.024 % respectivement.

Conclusion

L'objectif de ce chapitre a été de développer une solution directe pour la résolution du problème de calcul du diamètre en utilisant l'équation de Colebrook et de Darcy-Weisbach.

La méthode est basée sur l'application de la fonction W -Lambert sur l'équation gouvernante du diamètre.

Les solutions sont sous la forme d'une série infinie pour les régimes rugueux et lisse et une combinaison entre les deux est dérivée pour la région de transition.

La solution présentée a plus d'exactitude que les solutions existantes dans la littérature.

CHAPITRE IV

DETERMINATION DES PROFONDEURS NORMALES ET CRITIQUES

IV. 1. Introduction

Le présent chapitre est consacré à la détermination des profondeurs normales et critiques lesquelles sont implicites dans leurs équations gouvernantes.

Les équations de résistance à l'écoulement, la loi logarithmique et la formule Darcy-Weisbach, ont été converties à des équations équivalentes implicites par rapport à la profondeur normale adimensionnelle. L'application du théorème de Lagrange à ces derniers permet la résolution du problème de détermination de la profondeur normale.

L'avantage de cette nouvelle application du théorème de Lagrange dans le présent chapitre est de pouvoir trouver des solutions directes avec hautes exactitudes pour la détermination de la profondeur normale.

Les solutions développées sont comparées avec des résultats expérimentaux et des exemples d'application sont présentés pour illustration.

IV. 2. Problème de Détermination de la Profondeur Normale

La relation du débit (stage-discharge) de l'écoulement uniforme est déduite par la combinaison de la loi logarithmique de résistance avec la formule de Darcy-Weisbach et les éléments géométriques de chaque type de canaux. Ces équations sont implicites par rapport aux profondeurs normales.

Le problème du calcul de la profondeur normale est résolu par l'application du théorème de Lagrange sur différents types de conduite et canaux à surface libre.

IV. 2.1 Canal Triangulaire

La relation du débit de l'écoulement uniforme pour le canal triangulaire est déduite par la combinaison de la loi logarithmique (Eq. 1.31) de résistance avec la formule de Darcy-Weisbach et les éléments géométriques du canal triangulaire comme suit:

$$\frac{Q(m^2 + 1)^{1/4}}{\sqrt{gm^3 y_n^5 S_0}} = -4 \log \left(\frac{\varepsilon \sqrt{m^2 + 1}}{6m y_n} + \frac{\nu (m^2 + 1)^{3/4}}{1.6 \sqrt{gm^3 y_n^3 S_0}} \right) \quad (4.1)$$

ou y_n = profondeur normale et $m = \text{ctg}$ de l'angle d'inclinaison du canal.

L'équation (4.1) est implicite par rapport à y_n et sa résolution a recours aux méthodes itératives.

Utilisant les groupes non dimensionnels suivants

$$y_n^* = y_n \left(\frac{g S_0 m^3}{2Q^2 \sqrt{m^2 + 1}} \right)^{1/5} \quad (4.2)$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon \left(\frac{g S_0 m^3}{2Q^2 \sqrt{m^2 + 1}} \right)^{1/5} \quad (4.3)$$

$$\nu^* = \nu \left(\frac{2\sqrt{m^2 + 1}}{g S_0 m^3 Q^3} \right)^{1/5} \quad (4.4)$$

L'équation (4.1) est convertie à la forme non-dimensionnelle suivante:

$$\frac{1}{\sqrt{y_n^{*5}}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon^* \sqrt{m^2 + 1}}{6m y_n^*} + \frac{\nu^* \sqrt{m^2 + 1}}{1.6\sqrt{2} y_n^{*3/2}} \right) \quad (3.5)$$

Pour le régime rugueux $\nu^* = 0$, l'Eq. (4.5) est simplifier a

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{y_n^{*5}}} = d - \frac{1.6\sqrt{2}}{\ln 10} \ln(\zeta) \quad (4.6)$$

$$\text{ou } d = 4\sqrt{2} \log \left(\frac{6m}{\varepsilon^* \sqrt{m^2 + 1}} \right) \quad (4.7)$$

En appliquant le théorème de Lagrange avec $f(\zeta) = \zeta$, l'Eq. (4.6) donne

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{y_n^{*5}}} = d + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-1.6\sqrt{2}}{\ln 10}\right)^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^{n-1}}{dd^{n-1}} \{[\ln(d)]^n\} \quad (4.8)$$

L'équation (4.8) est réduite a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{y_n^{*5}}} = d + \ln d \left[\frac{-1.6\sqrt{2}}{\ln 10} + d^{-1} \left(\frac{1.6\sqrt{2}}{\ln 10} \right)^2 + \frac{d^{-2}}{2} \left(\frac{1.6\sqrt{2}}{\ln 10} \right)^3 \ln \left(\frac{d}{e^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{d^{-3}}{3} \left(\frac{1.6\sqrt{2}}{\ln 10} \right)^4 \left(\ln d - \frac{9 + \sqrt{33}}{4} \right) \left(\ln d - \frac{12}{9 + \sqrt{33}} \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

En utilisant 3 termes de l'équation (4.9), l'erreur maximale engendrée est inférieure à 0.001%, dans les gammes $0.228547 \leq y_n^* \leq 0.318857$ et $571 \times 10^{-7} \leq \varepsilon^* \leq 7.971 \times 10^{-4}$.

Pour le régime lisse $\varepsilon^* = 0$, l'Eq. (4.5) est simplifier a

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{y_n^{*5}}} = h - \frac{2.4\sqrt{2}}{\ln 10} \ln(\zeta) \quad (4.10)$$

$$\text{ou } h = 4\sqrt{2} \log \left(\frac{1.6\sqrt{2}}{v^* \sqrt{m^2 + 1}} \right) \quad (4.11)$$

En appliquant le théorème de Lagrange avec $f(\zeta) = \zeta$, l'Eq. (4.10) donne

$$\frac{1}{\sqrt{y_n^{*5}}} = h + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-2.4\sqrt{2}}{\ln 10}\right)^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} \{[\ln(h)]^n\} \quad (4.12)$$

L'équation (4.12) est réduite a

$$\frac{1}{\sqrt{y_n^{*5}}} = h + \ln h \left[\frac{-2.4\sqrt{2}}{\ln 10} + h^{-1} \left(\frac{2.4\sqrt{2}}{\ln 10} \right)^2 + \frac{h^{-2}}{2} \left(\frac{2.4\sqrt{2}}{\ln 10} \right)^3 \ln \left(\frac{h}{e^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{h^{-3}}{3} \left(\frac{2.4\sqrt{2}}{\ln 10} \right)^4 \left(\ln h - \frac{9 + \sqrt{33}}{4} \right) \left(\ln h - \frac{12}{9 + \sqrt{33}} \right) + \dots \right] \quad (4.13)$$

En utilisant trois termes de l'équation (4.13), l'erreur maximale engendrée est inférieure à 0.005%, dans les gammes $0.2366 \leq y_n^* \leq 0.3463$ et $5.38 \times 10^{-8} \leq v^* \leq 9.19 \times 10^{-5}$.

L'équation (4.5) est réécrite

$$\zeta = y_n^{*-5/2} = h + \frac{-4\sqrt{2}}{\ln 10} \ln \left(\frac{\sqrt{2}\varepsilon^*}{3.75m\nu^*} \zeta^{2/5} + \zeta^{3/5} \right) \quad (4.14)$$

En appliquant le théorème de Lagrange avec $f(\zeta) = \zeta$, l'Eq. (4.14) est résolue

$$\frac{1}{\sqrt{y_n^{*5}}} = h + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-4\sqrt{2}}{\ln 10} \right)^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^{n-1}}{dh^{n-1}} \left\{ \left[\ln \left(\frac{\sqrt{2}\varepsilon^*}{3.75m\nu^*} h^{2/5} + h^{3/5} \right) \right]^n \right\} \quad (4.15)$$

L'équation (4.15) est résolue

$$\frac{1}{\sqrt{y_n^{*5}}} = h + 4\sqrt{2} \log(\beta h^{2/5} + h^{3/5}) \left[-1 + \frac{0.8\sqrt{2}(2h + 3h^{1/5})}{\ln 10(\beta h + h^{6/5})} + \dots \right] \quad (4.16)$$

$$\text{Ou } \beta = \frac{\sqrt{2}\varepsilon^*}{3.75m\nu^*} \quad (4.17)$$

En utilisant 2 termes de l'équation (4.16) l'erreur maximale engendrée est inférieure à 0.65%. La distribution d'erreur de y_n^* pour différents valeurs de ε/R_h est tracée dans la Figure.4.1 pour $0.237872 \leq y_n^* \leq 0.350316$, $5.95092 \times 10^{-8} \leq \varepsilon^* \leq 87.8592 \times 10^{-5}$ et $3.9931 \times 10^{-8} \leq v^* \leq 91.909 \times 10^{-5}$. Comme notée, l'erreur maximale est inférieure à 0.65%. L'erreur augmente pour les valeurs élevées de ε/R_h et la meilleure précision est pour $\varepsilon/R_h = 10^{-4}$ comme montré dans figure suivante.

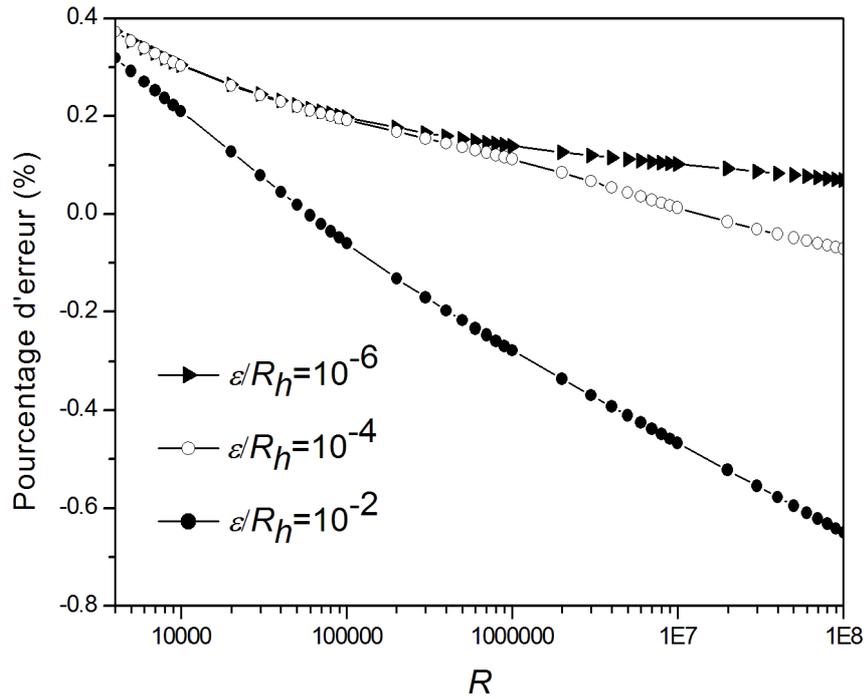


Figure. 4.1. Pourcentage d'erreur utilisant les équations (4.16)

IV. 2.2. Canal Rectangulaire

IV. 2.2.1. Équation de Manning

Les équations régressées sont plus exactes que ceux tronqués, prenant quatre termes des équations (1.97) et (1.98) de Swamee et Rathie (2004) et régressant (Srivastava 2007) on trouve les équations suivantes

$$\eta = \frac{N_b^{0.6001}}{0.99879} + \frac{N_b^{1.2098}}{1.208} + \frac{N_b^{1.866}}{6.505} - \frac{N_b^{2.1434}}{8.122} \quad (4.18)$$

$$\eta^{-1} = \frac{0.59773}{N_b^{0.97344}} - \frac{0.078234}{N_b^{2.035}} + \frac{0.01997}{N_b^{2.7695}} - \frac{0.00193}{N_b^{3.472}} \quad (4.19)$$

Les erreurs des équations (4.18) et (4.19) sont présentées graphiquement dans la figure. 4.2 et comparées avec les équations (1.97) et (1.98) tronquées pour quatre termes, la figure. 4.2 indique que les équations (3.52) et (3.53) sont plus exactes.

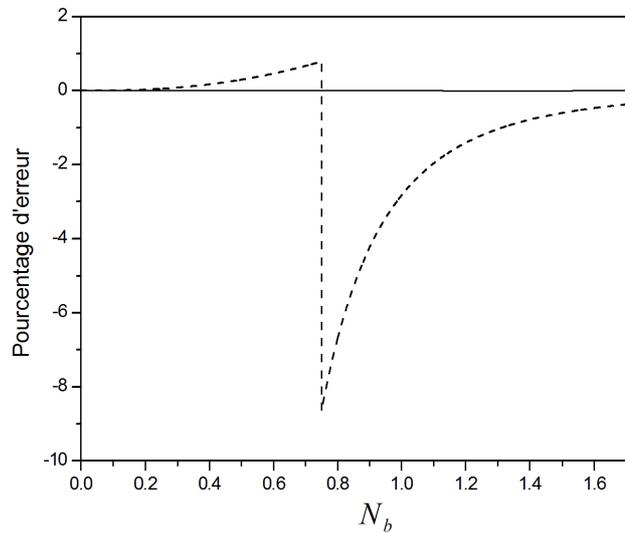


Figure. 4.2. Pourcentage d'erreur utilisant les équations (4.18) et (4.19) et les équations (1.97) et (1.98) tronquées pour quatre termes. Ligne continue — équations (4.18) et (4.19); ligne pointillée - - - les équations (1.97) et (1.98)

L'équation (4.18) est valable pour $0.0001 \leq \eta \leq 1.4496$ correspond à $2.154 \times 10^{-7} \leq N_b \leq 0.749485$, et l'équation (4.19) est valable pour $1.4496 < \eta \leq 3$ correspond à $0.749485 < N_b \leq 1.711536$.

Les équations (4.18) et (4.19) engendrent une erreur maximale inférieure à 0.034 % et sont plus exactes aussi que l'équation (1.106) de Srivastava (2006), et que l'équation (1.108) de Vatankhak et al. (2011 et 2015).

IV. 2.2.2. Équation de Chézy

L'équation gouvernante est déduite par la combinaison de la formule de Chézy et les éléments géométriques de la section du canal rectangulaire comme suivant

$$G_b = \frac{Q}{C\sqrt{b^5 S_0}} = \frac{\eta^{3/2}}{(2\eta + 1)^{1/2}} \quad (4.20)$$

ou $\eta = y_n/b$. y_n = profondeur normale et b = largeur du canal.

L'équation (4.20) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\eta = G_b^{2/3} (1 + 2\eta)^{1/3} \quad (4.21)$$

En appliquant le théorème de Lagrange avec $f(\zeta) = \zeta$, l'Eq. (4.21) est résolue

$$\zeta = \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_b^{2n/3}}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} (1 + 2\zeta)^{n/3} \right]_{\zeta=0} \quad (4.22)$$

L'équation (4.22) peut être réécrite:

$$\zeta = \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_b^{2n/3}}{\Gamma(n+1)} \left[2^{n-1} \left(\frac{n}{3}\right) \left(\frac{n}{3} - 1\right) \dots \left(\frac{n}{3} - n + 2\right) \right] \quad (4.23)$$

L'équation (4.23) est réduite a

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} G_b^{2n/3}}{\Gamma(n+1)} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{3} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{-2n}{3} + 2\right)} \quad (4.24)$$

En développant l'Eq. (4.24), η est donnée comme suit

$$\eta = G_b^{2/3} + \frac{2}{3}G_b^{4/3} + 0G_b^2 - \frac{8}{81}G_b^{8/3} + \frac{16}{243}G_b^{10/3} - \left(\frac{2}{3}\right)^8 G_b^{14/3} + \frac{640}{19683}G_b^{16/3} - \frac{39424}{3^{13}}G_b^{20/3} + \dots \quad (4.25)$$

En comparant les valeurs exactes de l'Eq. (4.20) par la solution explicite de l'Eq. (4.25), (utilisant sept termes), l'erreur maximale de l'Eq. (4.25) est inférieure à 0.45%. L'équation (4.25) est valable pour $0 \leq \eta \leq 1.4496$ correspondant à $9.999 \times 10^{-7} \leq G_b \leq 0.8838$.

Pour $G_b > 0.8838$, substituant $\zeta = 1/\eta$, l'Eq. (3.20) est réécrite comme:

$$\zeta = G_b^{-1}(\zeta + 2)^{-1/2} \quad (4.26)$$

En appliquant le théorème de Lagrange avec $f(\zeta) = \zeta$, l'Eq. (4.26) donne

$$\zeta = 1/\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_b^{-n}}{\Gamma(n+1)} \left[\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} (\zeta + 2)^{-n/2} \right]_{\zeta=0} \quad (4.27)$$

L'équation (4.27) peut être réécrite:

$$\zeta = \eta^{-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_b^{-n}}{\Gamma(n+1)} \left[2^{-3n/2} \left(\frac{-n}{2}\right) \left(\frac{-n}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{-n}{2} - n + 2\right) \right] \quad (4.28)$$

L'équation (4.28) est réduite à

$$\eta^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G_b^{-n} 2^{-\frac{3n}{2}+1} \Gamma\left(\frac{-n}{2} + 1\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma\left(\frac{-3n}{2} + 2\right)} \quad (4.29)$$

En développant l'Eq. (4.27), η est donné comme suit

$$\zeta = 1/\eta = \frac{G_b^{-1}}{\sqrt{2}} - \frac{G_b^{-2}}{8} + \frac{5 \times 2^{-7/2}}{8G_b^3} - \frac{G_b^{-4}}{32} + \frac{2^{-13/2} \times 231}{128G_b^5} - \dots \quad (4.30)$$

En comparant les valeurs exactes de l'Eq. (3.26) par la solution explicite de l'Eq. (4.30), (utilisant cinq termes), l'erreur maximale de l'Eq. (4.30) est inférieure ou égale à 2.25%. L'équation (4.30) est valable pour $1.4496 < \eta \leq 3$ correspondant à $0.8838 \leq G_b \leq 1.9709$.

Exemple.4.1 :

Calculer la profondeur normale d'un canal rectangulaire à surface libre pour les données suivantes

$$Q = 10^3 \text{ m}^3 / \text{s} , n = 0.02 \text{ m}^{-1/3} \text{ s} , S_0 = 0.0002 , \text{ et } B = 45 \text{ m} .$$

Utilisant l'équation (1.96) on trouve $N_b = 0.0552012$, par conséquent la profondeur normale peut être calculée par l'équation (3.39) ou $\eta \approx 0.202$ et $y_n = 9.083 \text{ m}$

IV. 2.3. Canal Rectangulaire Large

La relation du débit de l'écoulement uniforme pour le canal rectangulaire large est déduite par la combinaison de la loi logarithmique (Thijsee 1949) de résistance avec la formule de Darcy-Weisbach et les éléments géométriques du canal rectangulaire large comme suivant:

$$\frac{Q}{B\sqrt{2gy_n^3S_0}} = -4.06 \log \left[\frac{\varepsilon}{12.2y_n} + \frac{0.38\nu}{\sqrt{2gS_0}y_n^{3/2}} \right] \quad (4.31)$$

Où y_n est la profondeur normale et B est la largeur du canal. L'équation (4.31) est implicite par rapport à y_n et sa résolution se recour aux méthodes itératives.

Adoptant les groupes non-dimensionnels suivants

$$y_n^* = y_n \left(\frac{gS_0B^2}{Q^2} \right)^{1/3} \quad (4.32)$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon \left(\frac{gS_0B^2}{Q^2} \right)^{1/3} \quad (4.33)$$

$$\nu^* = \left(\frac{\nu B}{Q} \right) \quad (4.34)$$

L'équation (4.31) peut être convertie sous la forme non-dimensionnelle suivante :

$$\frac{1}{y_n^{*3/2}} = d - 4.06\sqrt{2} \log\left(\frac{8\sqrt{2}\varepsilon^*}{37.088\nu^* y_n^*} + \frac{1}{y_n^{*3/2}}\right) \quad (4.35)$$

Ou

$$d = 4.06\sqrt{2} \log\left(\frac{8\sqrt{2}}{3.04\nu^*}\right) \quad (4.36)$$

L'équation (4.35) est implicite par rapport à y_n^* , la résolution traditionnelle est la méthode d'essai et l'erreur.

En appliquant le théorème de Lagrange, l'équation (4.35) est résolue comme suit

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{y_n^3}} = d + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4.06\sqrt{2}}{\ln 10}\right)^n \frac{d^{n-1}}{d d^{n-1}} \left\{ \ln(hd^{2/3} + d) \right\}^n \quad (4.37)$$

ou

$$h = \frac{8\sqrt{2}\varepsilon^*}{37.088\nu^*} \quad (4.38)$$

L'expansion l'équation. (4.37), donne la valeur de y_n^* comme suivant

$$\frac{1}{\sqrt{y_n^{*3}}} = d + 4.06\sqrt{2} \log(hd^{2/3} + d) \left[-1 + \frac{4.06\sqrt{2}(2hd^{2/3} + 3d)}{3d \ln 10(hd^{2/3} + d)} + \dots \right] \quad (4.39)$$

La distribution des erreurs de l'équation (4.39) est tracée dans la figure suivante

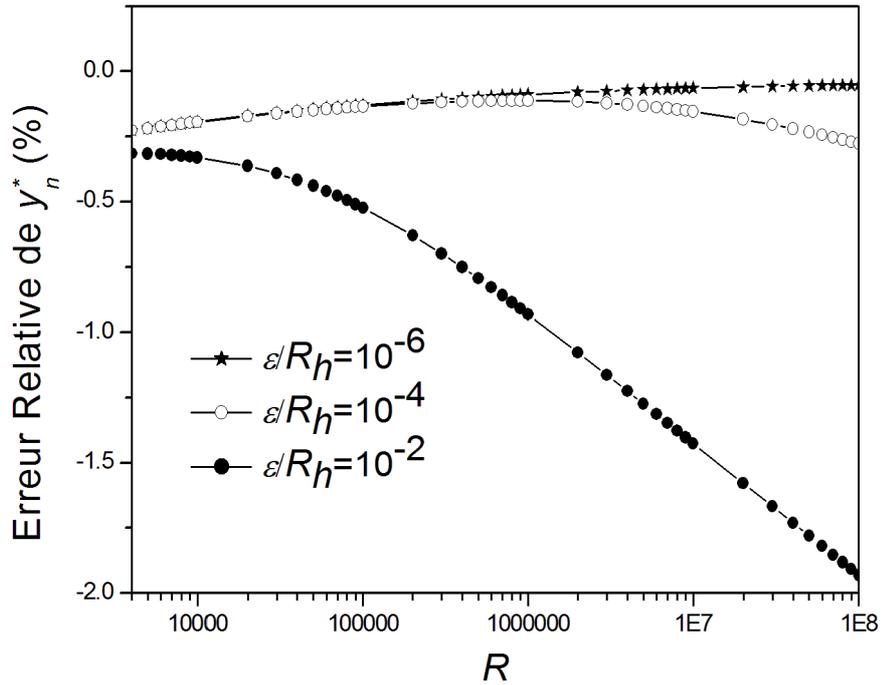


Figure. 4.3. Pourcentage d'erreur utilisant l'équation (4.39)

L'équation (4.39) est la formule directe du calcul de la profondeur normale pour le canal rectangulaire large. Selon la figure.4.3 l'erreur diminue par la diminution de la rugosité relative ε/R_h , et la meilleure exactitude est obtenue pour $\varepsilon/R_h=10^{-6}$. L'erreur maximale engendrée (utilisant deux termes) est inférieure à 1.95% dans la gamme $0.0874 \leq y_n^* \leq 0.1763$, $8.748 \times 10^{-8} \leq \varepsilon^* \leq 0.001763$ et $10^{-8} \leq \nu^* \leq 0.001$. Laquelle est plus efficace que l'équation de Swamee (1994) :

$$y_n^* = 0.213(\varepsilon^* + 70\nu^{*1.2})^{0.06} \quad (4.40)$$

L'équation (4.40) engendre selon la figure. 4.4 une erreur maximale supérieure à 8% par rapport aux valeurs exactes de l'équation (4.35).

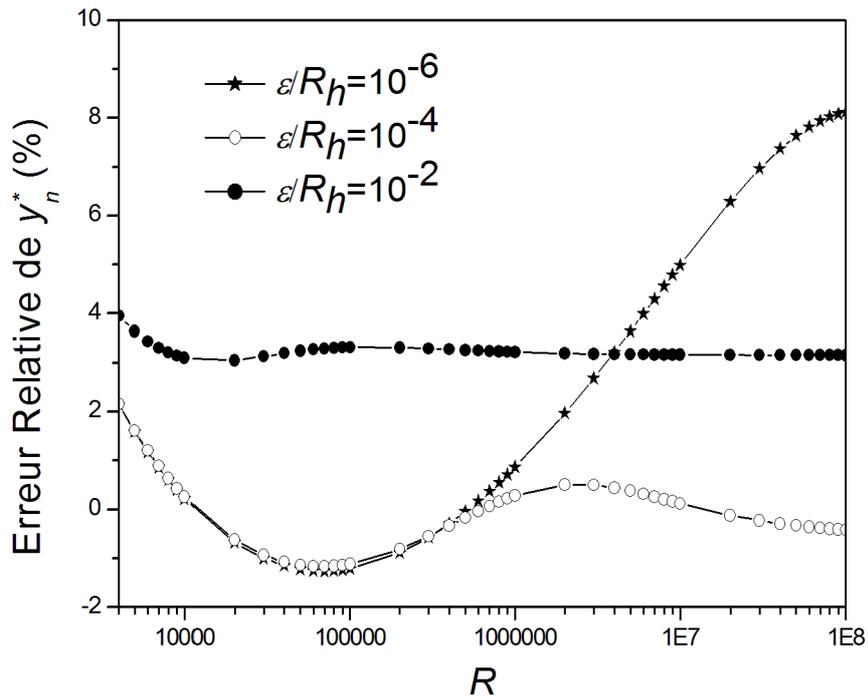


Figure. 4.4. Pourcentage d'erreur utilisant l'équation (4.40).

La comparaison entre les figures 4.3 et 4.4 montre que la solution proposée par l'équation (4.39) en utilisant le théorème de Lagrange est beaucoup plus exacte que la solution de Swamee (1994).

IV.2.3.1 Validation par des Essais Expérimentaux

La solution présentée par l'équation (4.39) est validée en utilisant les données expérimentales publiées par Di Cristo et .al. (2010) dans le tableau suivant :

:

N.Test	S_0	Q (m^3/s)	ε / R_h	Prof. Normal, y_n			Exacte y_n^*
				y_n (m)	y_n Eq. (6.16)	Erreur (%)	
NR1	0.552	4.04	0.0013	0.04	0.04	0.245	0.128
NR2	0.552	7.49	0.0038	0.064	0.0643	0.512	0.136
NR3	0.552	8.30	0.0035	0.068	0.0683	0.499	0.135
NR4	0.552	9.00	0.0036	0.072	0.0723	0.522	0.135
NR5	0.602	13.26	0.0059	0.094	0.0947	0.748	0.140
NR6	0.602	13.18	0.074	0.122	0.1256	2.952	0.183
R1	0.602	1.98	0.0214	0.03	0.0302	0.997	0.159
R2	0.602	1.98	0.1474	0.038	0.0392	3.358	0.202
R3	0.602	3.13	0.0142	0.039	0.0393	0.873	0.152
R4	0.603	4.00	0.0025	0.04	0.0401	0.343	0.133
R5	0.602	3.16	0.1145	0.05	0.0515	3.080	0.194
R6	0.148	5.44	0.0036	0.08	0.0803	0.452	0.135
R7	0.148	3.00	0.0129	0.06	0.0604	0.814	0.151
R8	0.148	10.38	0.0027	0.12	0.1205	0.460	0.132
R9	0.046	3.90	0.0446	0.12	0.1221	1.798	0.172
R10	0.04	0.18	0.2000	0.02	0.0205	2.601	0.213
R11	0.133	0.95	0.1889	0.04	0.0414	3.500	0.210
R12	0.203	1.31	0.1142	0.04	0.041	2.635	0.194
R13	0.148	3.09	0.0104	0.06	0.0604	0.721	0.148
R14	0.148	10.40	0.0073	0.13	0.1310	0.792	0.143
R15	0.242	5.72	0.0165	0.08	0.0808	1.093	0.154
R16	0.053	3.30	0.0362	0.10	0.0101	1.537	0.168
R17	0.603	21.48	0.0023	0.12	0.1206	0.504	0.130
R18	0.046	11.22	0.0183	0.22	0.2229	1.327	0.156

Tableau.4.1. Validation par comparaison des données expérimentales avec les équations proposées.

Le résultat montre que l'erreur engendrée lors de l'utilisation de l'équation de la profondeur normale est inférieure à 1.8% à l'exception des valeurs de y_n^* indiquées en gras et qui dépassent les limites de l'équation (4.39). Cela confirme la validité des équations explicites proposées dans la présente étude.

IV. 2.4. Canal Naturel de Profile Cosinus

La section géométrique du profile du canal naturel stable est défini par Henderson (1966) par la figure suivante

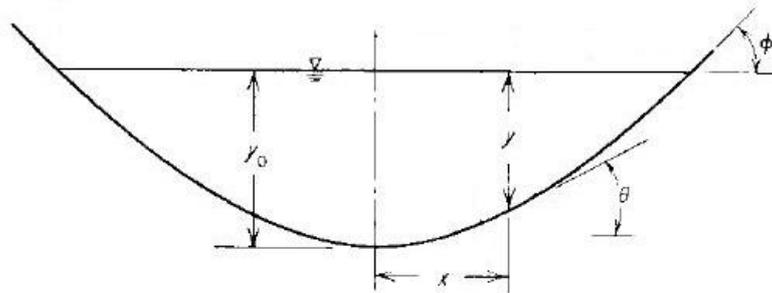


Figure. 4.5. Géométrie du canal naturel (Henderson 1966).

Où x et y sont les axes des coordonnées horizontale et verticale respectivement, ϕ est l'angle du lit latéral et θ est l'angle d'inclinaison de la pente du canal, $y_0=y_n$ est la profondeur normale. Henderson (1966) a donné l'équation suivante pour la géométrie du canal naturel stable de profile cosinus :

$$\frac{y}{y_n} = \cos\left(\frac{x \tan \phi}{y_n}\right) \quad (4.41)$$

Pour le canal naturel d'une section de profil cosinus, les propriétés géométriques sont obtenues par Henderson (1966) :

$$A = \frac{2y_n^2}{\tan \phi} \quad (4.42)$$

$$P = \frac{2y_n E}{\sin \phi} \quad (4.43)$$

$$R_h = \frac{y_n \cos \phi}{E} \quad (4.44)$$

Où E est l'intégral elliptique complet défini par :

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \phi \sin^2 \theta} d\theta \quad (4.45)$$

La relation du débit de l'écoulement uniforme pour le canal naturel de profile cosinus est déduite par la combinaison de la loi logarithmique (Eq. 1.31) de résistance avec la formule de Darcy-Weisbach et les éléments géométriques du canal naturel comme suivant:

$$\frac{Q \sin \phi \sqrt{E}}{\sqrt{2gS_0 \cos^3 \phi y_n^{5/2}}} = -8 \log \left(\frac{\varepsilon E}{12 \cos \phi y_n} + \frac{0.3125 \nu E^{3/2}}{\sqrt{2gS_0 \cos^3 \phi y_n^3}} \right) \quad (4.46)$$

L'équation (4.46) est implicite par rapport à y_n et sa résolution a recours aux méthodes itératives.

Utilisant les groupes de variables suivantes:

$$y_{n^*} = y_n \left(\frac{gS_0 \cos^3 \phi}{\sin^2 \phi E Q^2} \right)^{1/5} \quad (4.47)$$

$$\varepsilon_* = \varepsilon \left(\frac{gS_0 E^4}{Q^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \right)^{1/5} \quad (4.48)$$

$$\nu_* = \nu \left(\frac{E^6}{gS_0 Q^3 \cos^3 \phi \sin^3 \phi} \right)^{1/5} \quad (4.49)$$

En combinant avec la formule de Darcy Weisbach, l'équation (4.46) est convertie à la forme non-dimensionnelle suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{y_{n^*}^5}} = -8\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon_*}{12 y_{n^*}} + \frac{2.5 \nu_*}{8\sqrt{2} y_{n^*}^{3/2}} \right) \quad (4.50)$$

Pour les canaux rugueux $\nu_*=0$, l'Eq. (4.50) est simplifier a

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{y_{n^*}^5}} = b - \frac{3.2\sqrt{2}}{\ln 10} \ln(\zeta) \quad (4.51)$$

$$\text{ou } b = 8\sqrt{2} \log \left(\frac{12}{\varepsilon_*} \right) \quad (4.52)$$

En appliquant le théorème de Lagrange, avec $f(\zeta) = \zeta$, l'Eq. (4.51) donne

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{y_{n^*}^5}} = b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-3.2\sqrt{2}}{\ln 10}\right)^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^{n-1}}{db^{n-1}} \{[\ln(b)]^n\} \quad (4.53)$$

L'équation (4.53) est réduite a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{y_{n^*}^5}} = b + \ln b & \left[\frac{-3.2\sqrt{2}}{\ln 10} + b^{-1} \left(\frac{3.2\sqrt{2}}{\ln 10}\right)^2 + \frac{b^{-2}}{2} \left(\frac{3.2\sqrt{2}}{\ln 10}\right)^3 \ln\left(\frac{b}{e^2}\right) \right. \\ & \left. + \frac{b^{-3}}{3} \left(\frac{3.2\sqrt{2}}{\ln 10}\right)^4 \left(\ln b - \frac{9 + \sqrt{33}}{4}\right) \left(\ln b - \frac{12}{9 + \sqrt{33}}\right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.54)$$

L'erreur maximale engendrée par l'utilisation de l'équation (4.54) (utilisant trois termes), est inférieure à 0.0005%, dans les gammes $0.181 \leq y_{n^*} \leq 0.2627$ et $10^{-6} \leq \varepsilon_* \leq 0.01$.

Pour le régime lisse $\varepsilon_* = 0$, l'Eq. (4.50) est simplifier a

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{y_{n^*}^5}} = c - \frac{4.8\sqrt{2}}{\ln 10} \ln(\zeta) \quad (4.55)$$

$$\text{ou } c = 8\sqrt{2} \log\left(\frac{3.2\sqrt{2}}{\nu_*}\right) \quad (4.56)$$

En appliquant le théorème de Lagrange, avec $f(\zeta) = \zeta$, l'Eq. (4.55) est convertie a

$$\frac{1}{\sqrt{y_{n^*}^5}} = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-4.8\sqrt{2}}{\ln 10}\right)^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}} \{[\ln(c)]^n\} \quad (4.57)$$

L'équation (4.57) est résolue

$$\frac{1}{\sqrt{y_{n^*}^5}} = c + \ln c \left[\frac{-4.8\sqrt{2}}{\ln 10} + c^{-1} \left(\frac{4.8\sqrt{2}}{\ln 10} \right)^2 + \frac{c^{-2}}{2} \left(\frac{4.8\sqrt{2}}{\ln 10} \right)^3 \ln \left(\frac{c}{e^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{c^{-3}}{3} \left(\frac{4.8\sqrt{2}}{\ln 10} \right)^4 \left(\ln c - \frac{9 + \sqrt{33}}{4} \right) \left(\ln c - \frac{12}{9 + \sqrt{33}} \right) + \dots \right] \quad (4.58)$$

L'erreur maximale engendrée de l'équation (4.58) (utilisant trois termes) est inférieure à 0.0009%, dans les gammes $0.1692 \leq y_{n^*} \leq 0.2524$ et $10^{-6} \leq v_* \leq 10^{-3}$.

L'équation (4.50) peut être réécrite comme :

$$\zeta = y_{n^*}^{-5/2} = c + \frac{-2\sqrt{2}}{\ln 10} \ln(d\zeta^{2/5} + \zeta^{3/5}) \quad (4.59)$$

ou

$$d = \frac{\sqrt{2}\varepsilon_*}{3.75v_*} \quad (4.60)$$

En appliquant le théorème de Lagrange, avec $f(\zeta) = \zeta$, l'Eq. (4.59) est résolue

$$\frac{1}{\sqrt{y_{n^*}^5}} = c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{-8\sqrt{2}}{\ln 10} \right)^n}{\Gamma(n+1)} \frac{d^{n-1}}{dc^{n-1}} \left\{ \ln(dc^{2/5} + c^{3/5}) \right\}^n \quad (4.61)$$

En développant l'équation. (4.61), la solution directe de y_n^* est obtenue

$$\frac{1}{\sqrt{y_{n^*}^5}} = c + 8\sqrt{2} \log(dc^{2/5} + c^{3/5}) \\ \times \left[-1 + \frac{1.6\sqrt{2}(2dc^{-4/5} + 3c^{-3/5})}{\ln 10(dc^{1/5} + c^{2/5})} + \dots \right] \quad (4.62)$$

En comparant les valeurs exactes de l'équation (4.50) avec celle de (4.62) dans les gammes $0.321051865 \leq y_{n^*} \leq 0.468742775$, $10^{-6} \leq \varepsilon_* \leq 10^{-2}$ et $10^{-8} \leq v_* \leq 10^{-3}$. L'erreur maximale engendrée en utilisant l'équation (4.62) (utilisant deux termes) est inférieure à 1.45%.

Par régression de l'équation (4.62) on trouve :

$$\frac{1}{\sqrt{y_{n^*}^5}} = c + 2\sqrt{2} \log(dc^{2/5} + c^{3/5}) \times \left[-1 + 1.45 \frac{(2dc^{-4/5} + 3c^{-3/5})}{(dc^{1/5} + c^{2/5})} \right] \quad (4.63)$$

En comparant les valeurs exactes de l'équation (4.50) avec celle de (4.63) dans les gammes $0.321051865 \leq y_{n^*} \leq 0.468742775$, $10^{-6} \leq \varepsilon_* \leq 10^{-2}$ et $10^{-8} \leq v_* \leq 10^{-3}$, l'erreur maximale engendrée en utilisant l'équation (4.63) (utilisant deux termes) est inférieure à 0.44%. Selon la figure 4.6 l'erreur de y_{n^*} diminue par la diminution de la rugosité relative ε/R_h , et la meilleure prédiction de la profondeur normale est obtenue pour $\varepsilon/R_h=10^{-6}$.

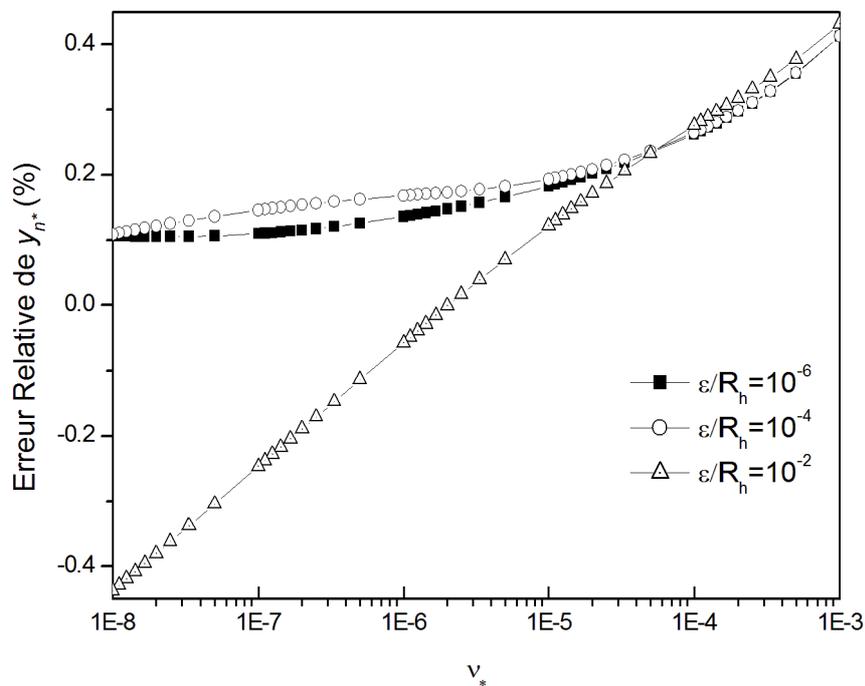


Figure. 4.6. Pourcentage d'erreur utilisant l'équation (4.63).

Swamee et Cahar (2010) ont développés la formule suivante pour la profondeur normale:

$$y_{n*} = 0.31(\varepsilon + 7v_*)^{0.04} \quad (4.64)$$

Selon la figure.4.7, l'erreur maximale engendrée par l'utilisation de l'équation (4.64) dépasse les 3.25% dans les gammes d'application $0.321051865 \leq y_{n*} \leq 0.468742775$, $10^{-6} \leq \varepsilon_* \leq 10^{-2}$ et $10^{-8} \leq v_* \leq 10^{-3}$.

Pour le régime rugueux, l'Eq. (4.64) se réduit a $y_{n*} = 0.31\varepsilon_*^{0.04}$ laquelle engendre une erreur maximale supérieur a 2.4% dans la gamme $0.181 \leq y_{n*} \leq 0.2627$ et $10^{-6} \leq \varepsilon_* \leq 0.01$.

Pour le régime lisse, l'Eq. (4.64) se réduit a $y_{n*} = 0.31(7v_*)^{0.04}$ laquelle engendre une erreur maximale supérieur a 5% dans la gamme $0.1692 \leq y_{n*} \leq 0.2524$ et $10^{-8} \leq v_* \leq 10^{-3}$.

Les résultats obtenus pour la solution de profondeur normale utilisant le théorème de Lagrange pour les régimes rugueux, lisse et de transition entre eux (Eqs. 4.54, 4.58 et 4.64) sont plus exactes que l'équation (4.64) obtenue par Swamee et Cahar (2010).

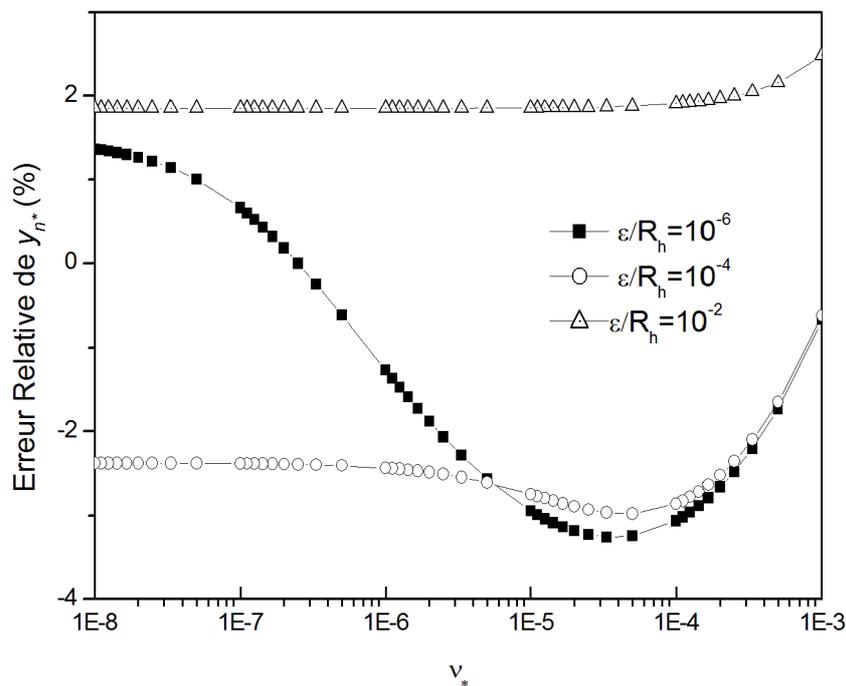


Figure. 4.7. Pourcentage d'erreur utilisant l'équation (4.64).

La comparaison entre les figures 4.6 et 4.7 montre que la solution proposée par l'équation (4.63) en utilisant le théorème de Lagrange est beaucoup plus exacte que la solution de Swamee et Cahar (2010).

Exemple.4.2 :

Calculer la profondeur normale d'un canal naturel pour les données suivantes (Swamee et Cahar 2010) :

$$Q=200 \text{ m}^3/\text{s}, S_0=10^{-4}, \nu=10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \varepsilon=3\text{mm} \text{ et } \phi=30^\circ.$$

Selon l'équation (4.45), $E=1.4675$. Adoptant $g=9.81 \text{ m/s}^2$, en utilisant les équations (4.48) et (4.49), $\varepsilon^*=1.7127 \times 10^{-4}$ et $\nu^*=4.3555 \times 10^{-7}$ respectivement. La valeur exacte de y_{n^*} selon l'Eq. (4.47) est $y_{n^*}=0.21405$ et par conséquent $y_n=6.353 \text{ m}$. en calculant les valeurs de c et d depuis les équations (4.56) et (4.60), on trouve $c=79.384$ et $d=148.302$. En utilisant l'équation (4.63) pour le calcul direct de la profondeur normale on trouve $y_{n^*}=0.2137$ ou $y_n=6.342 \text{ m}$, l'erreur du calcul de la profondeur normale est 0.163%. En utilisant l'équation de Swamee et Cahar (2010) pour le calcul la profondeur normale on trouve : $y_{n^*}=0.31 (\varepsilon^*+7\nu^*)^{0.04}=0.2192$ ou $y_n=6.508 \text{ m}$, laquelle engendre une erreur de 2.447%.

Clairement, les équations développées dans la présente étude en utilisant le théorème de Lagrange sous forme de séries infinies rapidement convergentes, sont plus exactes que celle de Swamee et Cahar (2010) dans toutes les gammes d'applicabilité de l'équation de résistance a l'écoulement d'ASCE (1963).

IV. 2.5. Canal Parabolique

IV. 2.5.1. Équation de Manning

L'équation gouvernante est déduite par la combinaison de la formule de Manning et les éléments géométriques de la section du canal parabolique (Sahtel 2016) comme suivant

$$N_p = \frac{Qn}{B^{8/3} \sqrt{S_0}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\eta^3\right)^{5/3}}{\left\{0.125\left[4\eta\sqrt{1+16\eta^2} + \ln\left(4\eta + \sqrt{1+16\eta^2}\right)\right]\right\}^{2/3}} \quad (4.65)$$

L'équation (4.65) peut être réécrite comme

$$\eta = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} N_p^{1/5} \left\{ 0.125 \left[4\eta \sqrt{1+16\eta^2} + \ln(4\eta + \sqrt{1+16\eta^2}) \right] \right\}^{2/15} \quad (4.66)$$

En appliquant le théorème de Lagrange avec $f(\zeta) = \zeta$, l'Eq. (4.66) donne

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n/3} N_p^{n/5}}{\Gamma(n+1)} \left\langle \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{ 0.125 \left[4x \sqrt{1+16x^2} + \ln(4x + \sqrt{1+16x^2}) \right] \right\}^{2n/15} \right\rangle_{x=0} \quad (4.67)$$

En développant l'Eq. (4.67), on obtient $\eta = 0$ et par conséquent, l'équation (4.67) ne donne pas de solution pour le calcul de la profondeur normale.

Basant sur l'algorithme de Srivastava (2006), l'équation suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale

$$\eta = 1.1295 N_p^{0.23071} \left[1.4037 + 2.6698 N_p^{0.4044} (0.6086 + 2.216 N_p^{0.0484})^{0.856} \right]^{0.09683} \quad (4.68)$$

L'équation (4.68) est valable pour $0.001 \leq \eta \leq 3$ correspond à

$5.08 \times 10^{-14} \leq N_p \leq 17.6998$, avec une erreur maximale inférieure à 0.05 %, laquelle est plus exacte que l'équation (1.112). La distribution d'erreurs de l'équation (4.68) est tracée dans la figure suivante

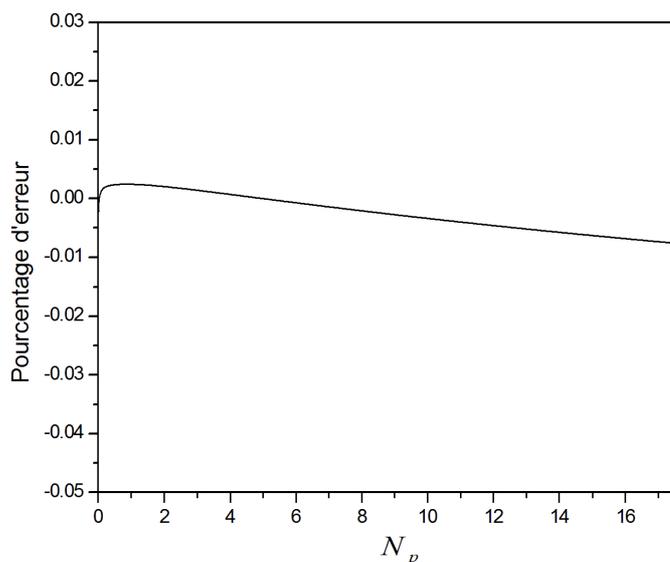


Figure. 4.8. Pourcentage d'erreur utilisant les équations (4.68).

L'équation (4.68) est plus simple que les équations (1.116) et (1.117) de Vatankhah (2013), et plus exacte que les équations (1.121) de Zhang et Wu (2014), et plus exacte aussi que les équations (1.122) de Li and Gao (2014) et que l'équation (1.123) de Vatankhah (2015).

IV. 2.5.2. Équation de Chézy

L'équation gouvernante est déduite par la combinaison de la formule de Chézy et les éléments géométriques de la section du canal parabolique comme suivant

$$M_p = \frac{Q}{C\sqrt{B^5 S_0}} = \frac{\left(\frac{2}{3}\eta^3\right)^{3/2}}{\left\{0.125\left[4\eta\sqrt{1+16\eta^2} + \ln\left(4\eta + \sqrt{1+16\eta^2}\right)\right]\right\}^{1/2}} \quad (4.69)$$

L'équation (4.69) peut être écrite comme

$$\eta = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} M_p^{2/9} \left\{0.125\left[4\eta\sqrt{1+16\eta^2} + \ln\left(4\eta + \sqrt{1+16\eta^2}\right)\right]\right\}^{1/9} \quad (4.70)$$

En appliquant le théorème de Lagrange avec $f(\zeta) = \zeta$, l'Eq. (4.70) donne

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n/3} M_p^{2n/9}}{\Gamma(n+1)} \left\langle \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{0.125\left[4x\sqrt{1+16x^2} + \ln\left(4x + \sqrt{1+16x^2}\right)\right]\right\}^{n/9} \right\rangle_{x=0} \quad (4.71)$$

En développant l'Eq. (4.71), on obtient $\eta = 0$ et par conséquent, l'équation (4.71) ne donne pas de solution pour le calcul de la profondeur normale.

L'équation suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale

$$\eta = 1.1494M_p^{0.24995} \left[1.1762 + 2.47M_p^{0.5827} \left(0.4712 + 2.3945M_p^{-0.1428}\right)^{0.85735}\right]^{0.07284} \quad (4.72)$$

L'équation (4.72) est valable pour $0.001 \leq \eta \leq 3$ correspond à $5.44 \times 10^{-13} \leq M_p \leq 17.7743$, avec une erreur maximale inférieure à 0.05 %, laquelle est plus exacte que l'équation (1.112). La distribution d'erreurs de l'équation (4.72) est tracée dans la figure suivante

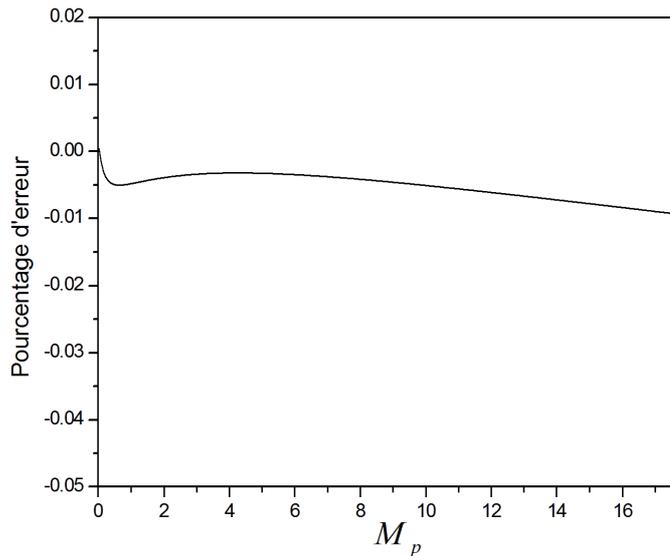


Figure. 4.9. Pourcentage d'erreur utilisant les équations (4.72).

Exemple. 4.3 :

Calculer la profondeur normale d'un canal de forme parabolique à surface libre pour les données suivantes

$$Q = 50m^3 / s, n = 0.01m^{-1/3}s, S_0 = 0.0002, \text{ et } k = 0.4 .$$

Utilisant l'équation (1.114) on trouve $N_p = 0.07617077$, par conséquent la profondeur normale peut être calculée par l'équation (4.68) ou $\eta \approx 0.704$ et

$$y_n = 4.96m$$

IV. 2.6. Conduite de Forme Circulaire

IV. 2.6.1 Équation de Manning

Pour n donné

Utilisant la formule de Manning et les éléments géométriques de la conduite circulaire à surface libre, la figure. 4.10 montre les variations des quantités de débit et vitesse non dimensionnels N_D et V_D avec la profondeur normale, où N_D est calculée par l'équation (1.71). V_D est proportionnelle à $R_h^{2/3}$, Chow (1959) p. 134.

$$V_D = nV / D^{2/3} \sqrt{S_0} \quad (4.73)$$

La valeur maximale $V_D = 0.45242087$ a lieu aux profondeurs normales 0.8127, 0.8128 et 0.8129 et la valeur maximale $N_D = 0.335281967$ a lieu à la profondeur normale 0.9382.

Pour le coefficient de rugosité n considéré comme constant, la figure 4.10 montre que, quand la profondeur normale est supérieure à 0.9382D, le débit N_D a deux différentes profondeurs pour le même débit, l'un au dessous et l'autre au dessus de la valeur 0.9382D. C'est similaire pour la vitesse V_D , si la profondeur normale est supérieure à 0.8128 D, il est possible d'avoir aussi deux profondeurs pour la même vitesse, l'un au dessous et l'autre au dessus de la valeur 0.8128D.

Chacun de ces points maximaux constitue horizontalement la ligne de projection des profondeurs alternatives observées quand la hauteur d'eau approche graduellement du sommet de la conduite en charge.

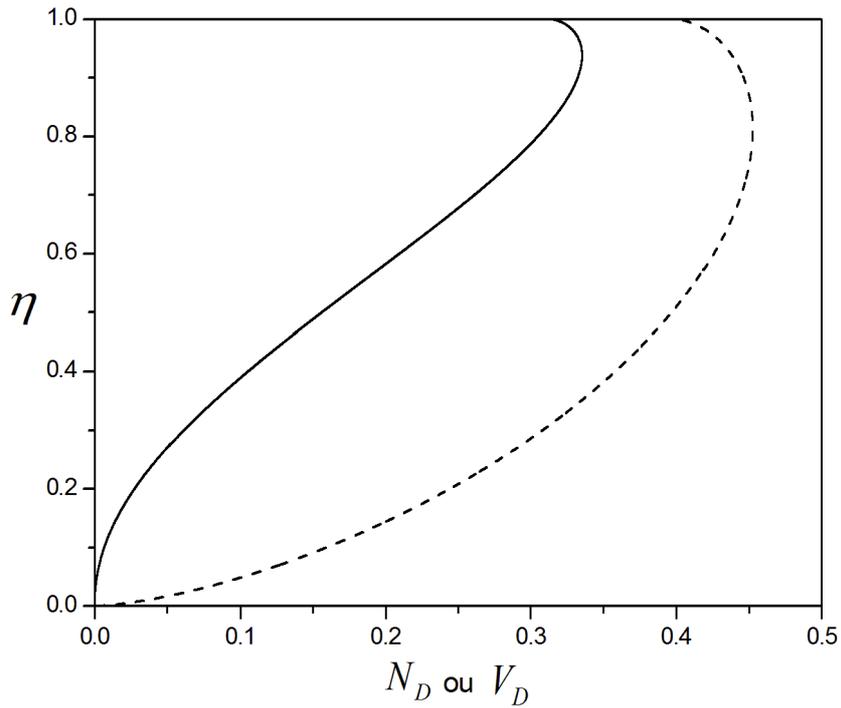


Figure. 4.10. Courbe des variations du débit et vitesse relatifs. Ligne continue — N_D ;
ligne pointillée - - - V_D .

Puisque le débit et les vitesses maximales n'ont pas lieu lorsque la conduite est pleine, cela signifie que la conduite n'écoule pas en pleine capacité quand elle maintienne un écoulement à surface libre dans un niveau uniforme libre d'obstacles.

L'équation gouvernante est déduite par la combinaison de la formule de Manning (considérons le coefficient de résistance $n = \text{constant}$) et les éléments géométriques de la section circulaire à surface libre comme suit

$$N_D = \frac{Qn}{D^{8/3} \sqrt{S_0}} = \frac{(0.25[\cos^{-4}(1-2\eta) - 2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}])^{5/3}}{[\cos^{-1}(1-2\eta)]^{2/3}} \quad (4.74)$$

L'équation (4.74) peut être réécrite sous la forme :

$$\eta = \frac{1}{2} - \frac{4N_D^{3/5} [\cos^{-1}(1-2\eta)]^{2/5} + \cos^{-1}(1-2\eta)}{4\sqrt{\eta(1-\eta)}} \quad (4.75)$$

En appliquant le théorème de Lagrange, l'Eq. (4.75) est convertie a

$$\eta = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)} \left\{ \frac{d^{n-1}}{d^{n-1}x} \left[\frac{4N_D^{3/5} [\cos^{-1}(1-2x)]^{2/5} + \cos^{-1}(1-2x)}{4\sqrt{x(1-x)}} \right]^n \right\}_{x=1/2} \quad (4.76)$$

En développant l'Eq. (4.76), la série suivante est obtenue:

$$\eta = \frac{1}{2} + \left\{ \frac{4N_D^{3/5} [\cos^{-1}(0)]^{2/5} + \cos^{-1}(0)}{2} \right\} \left\{ -1 + \left[\frac{8N_D^{3/5} [\cos^{-1}(0)]^{-3/5}}{5} + 1 \right] + \dots \right\} \quad (4.77)$$

L'équation (4.77) diverge et ne donne aucune solution pour le calcul de la profondeur normale pour la conduite circulaire.

L'équation approchée suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale

$$\eta = 1.00265N_D^{(-0.24836N_D^{0.7976} - 1.782N_D^{2.17} - 237.332N_D^{7.288} + 0.4624)} \quad (4.78)$$

L'équations (4.78) est valable pour $0.005 \leq \eta \leq 0.82$ correspond à $1.04 \times 10^{-5} \leq N_D \leq 0.311811$, avec une erreur maximale inférieure à 0.12 % laquelle est plus exacte que les équations (1.70) et (1.76) de Vatankhah et al (2011) , plus exacte aussi que l'équation (1.77) de Elhakeem et Sattar (2017), et que l'équation (1.76).

Une autre équation approchée est trouvée pour le calcul de la profondeur normale

$$\eta = \left(0.02 - 265e^{-6.8N_D^{0.23}} + 166.25e^{-4.82926N_D^{0.023805}} \right)^{-4.76} \quad (4.79)$$

L'équations (4.79) est valable pour $0.05 \leq \eta \leq 0.82$ correspond à $0.001496 \leq N_D \leq 0.20008$, avec une erreur maximale inférieure à 0.6 %.

Pour ε donné

Utilisant la formule de Manning et la loi logarithmique de résistance, la profondeur normale maximale soit du débit ou de la vitesse dépend de la forme de la conduite, de la viscosité cinématique ν et la rugosité absolue ε .

L'équation suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale

$$\eta = 0.6923 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{\left(-1.289 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{3.061} - 0.264 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{1.016} - 6.857 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{9.152} + 0.4637 \right)} \quad (4.80)$$

Où Q_{\max} est calculé par l'équation (1.68). L'équation (4.80) est valable pour $0.005 \leq \eta \leq 0.82$ correspond à $2.4 \times 10^{-5} \leq \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right) \leq 0.7139$, avec une erreur maximale inférieure à 0.18 % laquelle avec une gamme d'application plus large, est plus exacte que l'équation (1.72) de Swamee et Swamee (2008).

Une autre équation approchée est trouvée pour le calcul de la profondeur normale

$$\eta = \left[0.0883 - 521e^{-9.126 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{-0.215}} + 137.05e^{-4.9125 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0.0323}} \right]^{-3.587} \quad (4.81)$$

L'équation (4.81) est valable pour $0.05 \leq \eta \leq 0.82$ correspond à $0.00342 \leq Q/Q_{\max} \leq 0.7139$, avec une erreur maximale inférieure à 0.62 % laquelle est plus exacte que l'équation (1.72) de Swamee et Swamee (2008).

IV. 2.6.2. Équation de Chézy

Pour C donné

Utilisant la formule de Chézy et les éléments géométriques de la conduite circulaire à surface libre La figure.4.11 montre les variations des quantités de débit et vitesse non dimensionnels M_D et V_{CD} avec la profondeur normale, où M_D est calculée par l'équation (1.74).

V_{CD} est proportionnelle à $R_h^{1/2}$.

$$V_{CD} = V / C \sqrt{DS_0} \quad (4.82)$$

La description du graphe est la même que celle de la figure.4.10, la valeur maximale $V_{CD} = 0.55164156$ a lieu aux profondeurs normales 0.8128 et la valeur maximale $M_D = 0.41249681$ a lieu à la profondeur normale 0.9497.

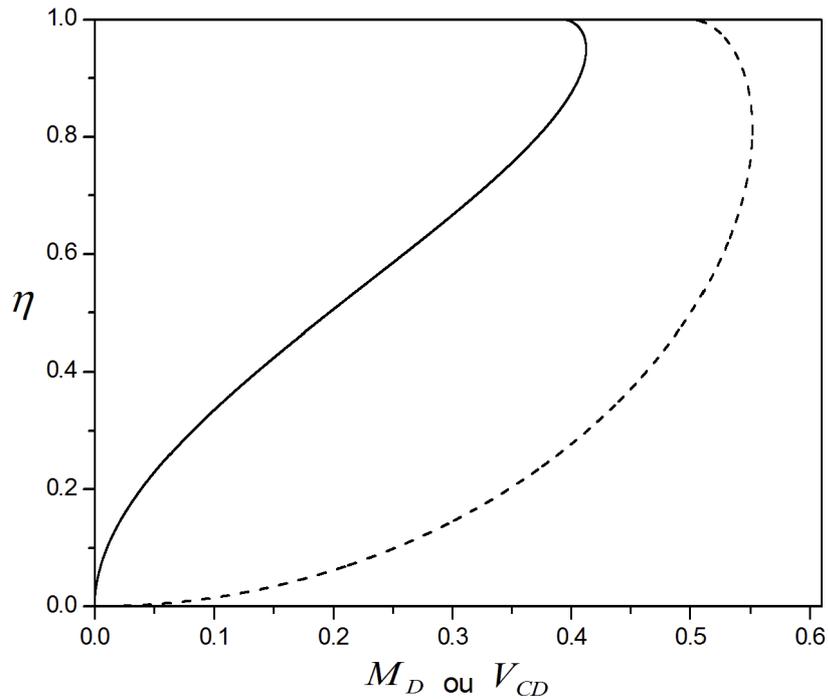


Figure. 4.11. Courbe des variations du débit et vitesse relatifs. Ligne continue — M_D ;
ligne pointillée - - - V_{CD} .

L'équation suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale

$$\eta = 0.9673M_D \left(-0.238M_D^{0.8562} - 1.523M_D^{2.302} - 64.94M_D^{7.21} + 0.5008 \right) \quad (4.83)$$

L'équation (4.83) est valable pour $0.005 \leq \eta \leq 0.82$ correspond à $2.71 \times 10^{-5} \leq M_D \leq 0.380203$, avec une erreur maximale inférieure à 0.08 % laquelle est plus exact que l'équation (1.73).

IV. 2.6.2.1 Profondeur Normale Utilisant la Sensitivité Hydraulique

La sensivité hydraulique pour une conduite circulaire est calculée par

$$S_h = \frac{d\xi / \xi}{dM_D / M_D} \quad (4.84)$$

Ou la profondeur normale peut être déduite par

$$\eta = \exp\left(\int \frac{S_h}{M_D} dM_D\right) \quad (4.85)$$

La sensivité hydraulique est tracée graphiquement dans la figure suivante

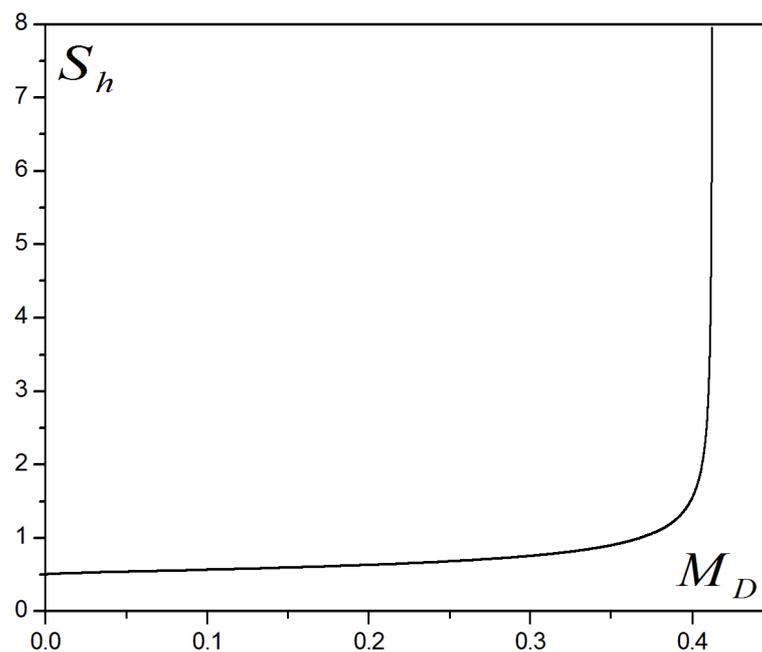


Figure 4.12. Variation de la sensitivity relative selon l'équation (4.84).

Puisque S_h est une fonction de M_D (figure.4.12), une formule approchée de S_h est obtenue comme suit

$$S_h = 48.5M_D^4 - 16.92M_D^3 + 1.49M_D^2 + 0.607M_D + 0.505 \quad (4.86)$$

L'équation (4.86) est applicable pour $0.0001 \leq \eta \leq 0.94$ et $1.088 \times 10^{-8} \leq M_D \leq 0.41222$ ou $0.3333 \leq S_h \leq 7.95$.

Substituant l'équation (4.86) dans (4.85) et intégrant, on trouve l'expression suivante

$$\eta = \exp(12.125M_D^4 - 5.64M_D^3 + 0.745M_D^2 + 0.607M_D + 0.505 \ln M_D + c) \quad (4.87)$$

Où c est la constante de l'intégration, et par régression on trouve $c = 3.712$.

La régression de l'équation (4.87) donne la formule de la profondeur normale comme suit

$$\eta = \exp(1520M_D^{183} + 34.4M_D^{6.46} + 2.483M_D^{0.551} - 2.0526M_D^{0.4833} + 0.511 \ln M_D + 0.0613) \quad (4.88)$$

L'erreur maximale de l'équation (4.88) est inférieure à 0.8 %, pour $0.01 \leq \eta \leq 0.8$ correspond à $0.00010829 \leq M_D \leq 0.3715013$.

L'équation (4.83) est plus simple et plus exacte que l'équation (4.88) dans une gamme d'application plus large.

Pour ε donné

L'équation suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale en fonction de Q/Q_{max}

$$\eta = 0.6397 \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)^{\left(-2.03 \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)^{5.36} - 0.3962 \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)^{1.47} - 8.9 \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)^{19.46} + 0.5047 \right)} \quad (4.89)$$

Où Q_{max} est calculé par l'équation (1.68). L'équation (4.89) est valable pour $0.005 \leq \eta \leq 0.82$ correspond à $6.58 \times 10^{-5} \leq Q/Q_{max} \leq 0.92201$, avec une erreur maximale inférieure à 0.8 %.

Il est important de noter que la gamme d'application de l'équation (4.89) utilisant la formule de Chézy est plus importante que celle de l'équation (4.80) utilisant la formule de Manning en fonction de la même quantité Q/Q_{max} .

Exemple.4.4 :

Calculer la profondeur normale d'une conduite de forme circulaire à surface libre pour les données suivantes

$$Q = 0.2m^3/s, \varepsilon = 1.5mm, S_0 = 0.0003, \nu = 10^{-6}m^2/s \text{ et } D = 0.8m.$$

Utilisant l'équation (1.69) on trouve $Q_{\max} = 0.2315m^3/s$, par conséquent la profondeur normale peut être calculé par l'équation (4.55) ou $\eta \approx 0.77$ et $y_n = 0.615m$.

Utilisant l'équation (1.70) la vitesse maximale que cette conduite peut atteindre est calculée $V_{\max} = 0.4325m/s$.

IV. 2.7. Conduites de Forme non Circulaire

IV. 2.7. A. Tunnel de Forme Ovoïdale (Gill 1987)

IV. 2.7. A.1 Éléments Géométriques

Suivant la même méthode de description de la géométrie de Swamee et Swamee (2008) et Badri (2010), on trouve les éléments géométriques du tunnel ovoïdal de Gill (1987) :

Pour $\eta \leq H/10$

$$A = \frac{H^2}{16} \left[\cos^{-1}(1-4\eta) - 2(1-4\eta)\sqrt{2\eta(1-2\eta)} \right] \quad (4.90)$$

$$P = 0.5H \cos^{-1}(1-4\eta) \quad (4.91)$$

$$T = H\sqrt{2\eta(1-2\eta)} \quad (7.92)$$

Pour $0.1 \leq \eta \leq 5/8$

$$A = H^2 \left[0.55063648 - \frac{49}{64} \sin^{-1} \left(\frac{5-8\eta}{7} \right) + \left(\eta - \frac{15}{80} \right) \sqrt{\frac{3}{8} + \frac{\eta}{0.8} - \eta^2} - \frac{17\eta}{80} \right] \quad (4.93)$$

$$P = 0.25H \left[6.3591 - 7 \sin^{-1} \left(\frac{5-8\eta}{7} \right) \right] \quad (4.95)$$

$$T = 2H \left(\sqrt{\frac{3}{8} + \eta \left(\frac{10}{8} - \eta \right)} - 0.5 \right) \quad (4.96)$$

Pour $5/8 \leq \eta \leq 1$

$$A = H^2 \left[0.58403 - \frac{9}{64} \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} (8\eta - 5) \right) + 0.125(8\eta - 5) \sqrt{(\eta - 0.25)(1 - \eta)} \right] \quad (4.97)$$

$$P = H \left(2.76787 - 0.75 \cos^{-1} \left(\frac{1}{3} (8\eta - 5) \right) \right) \quad (4.98)$$

$$T = 2H \sqrt{(\eta - 0.25)(1 - \eta)} \quad (4.99)$$

IV. 2.7. A.2 Équation de Manning

Pour n donné

Utilisant la formule de Manning et les éléments géométriques de la conduite ovoïdale définie dans la section précédente, la figure. 4.13 montre les variations des quantités de débit et vitesse non dimensionnels N_D et V_D avec la profondeur normale, Où $V_D = Vn / H^{2/3} \sqrt{S_0}$, $N_D = Qn / (H^{8/3} \sqrt{S_0})$. V_D est proportionnelle à $R_h^{2/3}$.

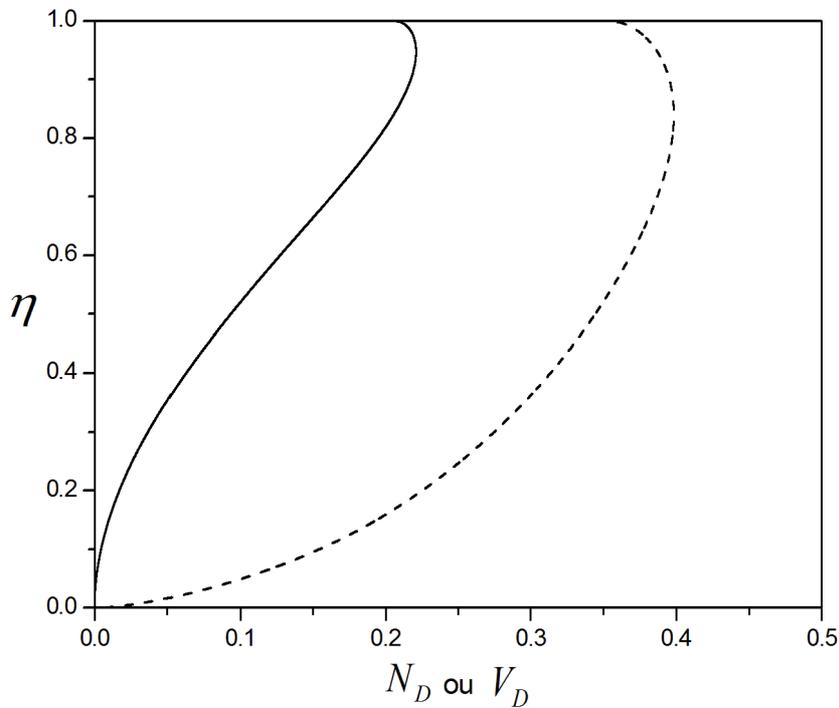


Figure. 4.13. Courbe des variations du débit et vitesse relatifs pour la section ovoïdale. Ligne continue — N_D ; ligne pointillée - - - V_D .

La description du graphe est la même de la figure.4.10, la valeur maximale de N_D est $N_{D_{\max}} = 0.22095725$ pour les profondeurs normales $y_n = 0.9482H$ et $y_n = 0.9483H$.

La valeur maximale $V_{D_{\max}} = 0.39846641$ a lieu aux profondeurs normales 0.8402

L'équation suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale

$$\eta = 1.1061 N_D^{(-0.04086 N_D^{0.596} - 0.573 N_D^{1.378} - 49.8 N_D^{4.285} + 0.4586)} \quad (4.100)$$

L'équation (4.100) est valable pour $0.005 \leq \eta \leq 0.82$ correspond à $7.4 \times 10^{-6} \leq N_D \leq 0.20008$, avec une erreur maximale inférieure à 0.63 % laquelle est plus exacte et simple que l'équation (1.131) de Bijankhan et Kouakzedah (2011).

Pour ε donné

IV. 2.7. A.2 Variation des Vitesses et Débits

Utilisant la formule de Darcy Weisbach et l'équation explicite du coefficient de frottement (2.19), on trouve les équations de la vitesse et le débit relatifs pour le tunnel ovoïdal comme suivant :

$$\frac{V}{\sqrt{gHS_0}} = 2\sqrt{2A^*/P^*} \left[b + 2 \log c \left(\frac{0.8625}{c} - 1 \right) \right] \quad (4.101)$$

et

$$\frac{Q}{H^2 \sqrt{gHS_0}} = 2\sqrt{2A^{*3}/P^*} \left[b + 2 \log c \left(\frac{0.8625}{c} - 1 \right) \right] \quad (4.102)$$

En maximisant l'équation (4.102), la valeur du débit maximale Q_{\max} apparaisse à la profondeur normale $y_n = 0.9579H$.

Les figures suivantes représentent la variation du débit relatif en fonction du nombre de Reynolds pour deux différentes valeurs de la rugosité relative.

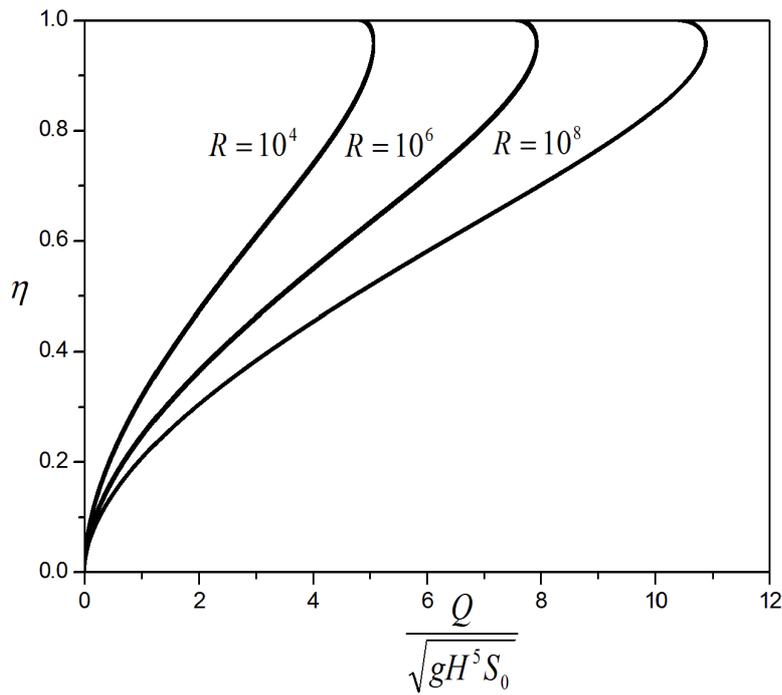


Figure. 4.14. Courbe des variations du débit relatif pour la section ovoïdale selon l'équation (4.102) pour $\varepsilon / R_h = 0$.

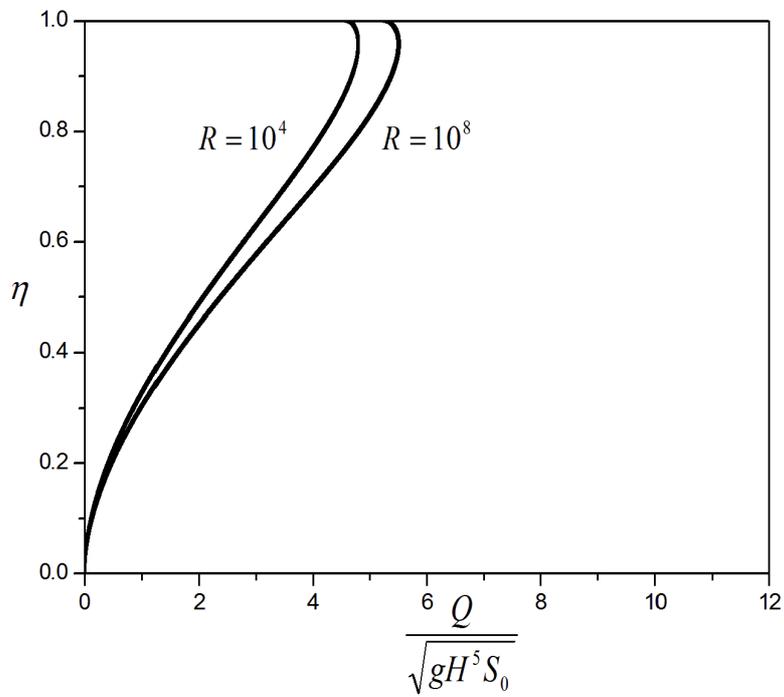


Figure. 4.15. Courbe des variations du débit relatif pour la section ovoïdale selon l'équation (4.102) pour $\varepsilon / R_h = 0.01$.

Les débits maximaux ont été représentés graphiquement en fonction de la profondeur normale pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et de la rugosité relative, à l'aide des éléments géométriques et l'équation explicite du coefficient de frottement (2.19).

La figure. 4.14 montre que le débit varie en fonction du nombre de Reynolds pour la même rugosité relative $\varepsilon/R_h = 0$ et la figure. 4.15 montre que le débit ne varie presque pas (valeurs superposées) en fonction du nombre de Reynolds pour la même rugosité relative $\varepsilon/R_h = 0.01$ et varié légèrement entre deux valeurs de grande différence tel que $R = 10^4$ et $R = 10^8$.

L'équation suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale

$$\eta = 0.6007 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{\left(-0.45 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0.962} - 1.95 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{4.1} - 8.34 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{15.3} + 0.465 \right)} \quad (4.103)$$

L'équation (4.103) est valable pour $0.005 \leq \eta \leq 0.82$ correspond à $3.34 \times 10^{-5} \leq Q/Q_{\max} \leq 0.9055$, avec une erreur maximale inférieure à 0.63 %

Ou Q_{\max} est calculé depuis l'équation (4.102) pour $y_n = 0.9579H$ par la formule suivante

$$Q_{\max} = -1.586 \sqrt{gH^5 S_0} \log \left(\frac{\varepsilon}{2.8603H} + \frac{1.899\nu}{\sqrt{gH^3 S_0}} \right) \quad (4.104)$$

L'équation (4.104) est la formule du calcul du débit maximal pour le tunnel ovoïdale en fonction des paramètres de résistance ε et ν .

En maximisant l'équation (4.101), la vitesse maximale apparaisse pour $y_n = 0.8402H$.

Les figures suivantes représentent la variation de la vitesse relative en fonction du nombre de Reynolds pour deux différentes valeurs de la rugosité relative.

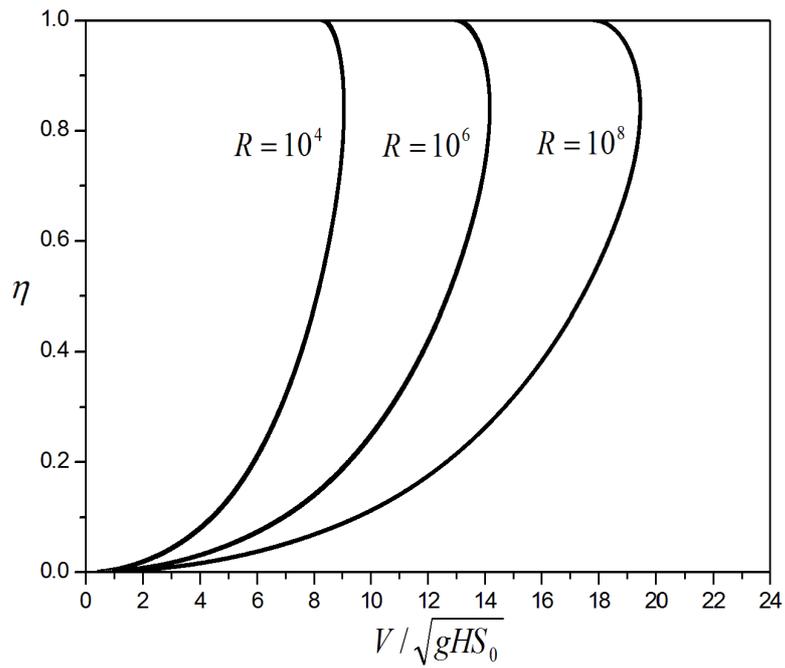


Figure. 4.16. Courbe des variations des vitesses relatives pour la section ovoïdale selon l'équation (4.101) pour $\varepsilon / R_h = 0$.

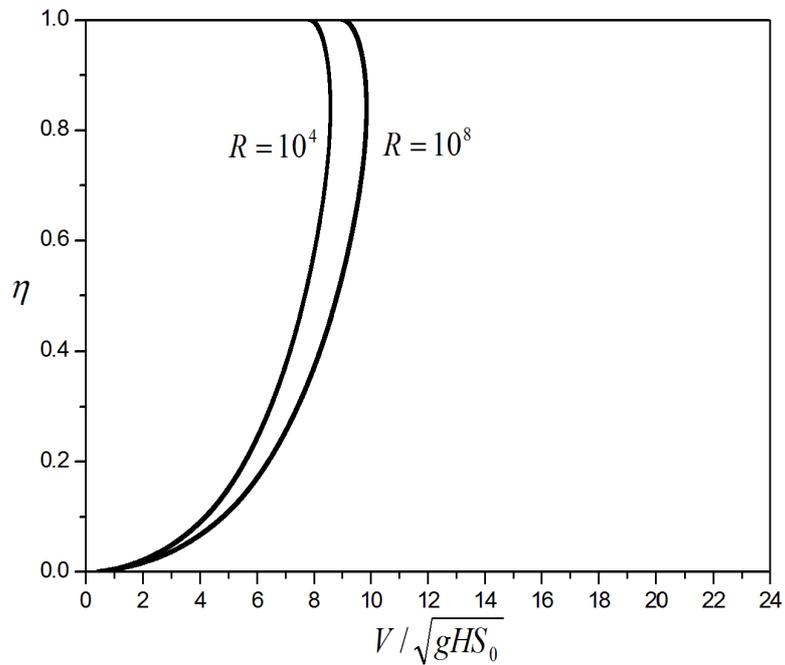


Figure. 4.17. Courbe des variations des vitesses relatives pour la section ovoïdale selon l'équation (4.101) pour $\varepsilon / R_h = 0.01$.

Les vitesses maximales ont été représentées graphiquement en fonction de la profondeur normale pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et de la rugosité relative, à l'aide des éléments géométriques et l'équation explicite du coefficient de frottement (2.19).

La figure. 4.16 montre que la vitesse varie en fonction du nombre de Reynolds pour la même rugosité relative $\varepsilon/R_h = 0$ et la figure. 4.17 montre que la vitesse ne varie presque pas (valeurs superposées) en fonction du nombre de Reynolds pour la même rugosité relative $\varepsilon/R_h = 0.01$ et varie légèrement entre deux valeurs de grande différence tel que $R = 10^4$ et $R = 10^8$.

La vitesse maximale peut être calculée à partir de l'équation (4.101) pour $y_n = 0.8402H$ par la formule suivante

$$V_{\max} = -2.837\sqrt{gHS_0} \log\left(\frac{\varepsilon}{3.0184H} + \frac{1.752\nu}{\sqrt{gH^3S_0}}\right) \quad (4.105)$$

L'équation (4.105) est la formule du calcul de la vitesse maximale pour le tunnel ovoïdale en fonction des paramètres de résistance ε et ν .

IV. 2.7. A.3 Équation de Chézy

Pour C donné

Utilisant la formule de Manning et les éléments géométriques de la conduite ovoïdale définie dans la section précédente, la figure. 4.18 montre les variations des quantités de débit et vitesse non dimensionnels N_D et V_D avec la profondeur normale, Où $M_D = V/CH^{1/2}\sqrt{S_0}$

, $M_D = Q/(CH^{5/2}\sqrt{S_0})$. V_D est proportionnelle à $R_h^{1/2}$.

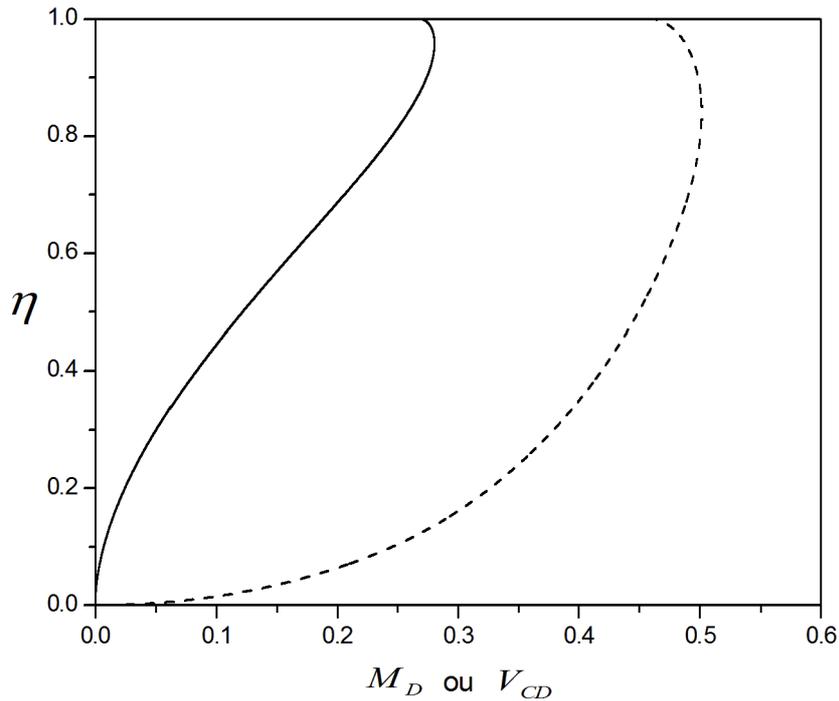


Figure. 4.18. Courbe des variations du débit et vitesse relatifs. Ligne continue — M_D ;
ligne pointillée --- V_{CD} .

La description du graphe est la même que celle de la figure.4.10, la valeur maximale de M_D est $M_{D_{\max}} = 0.280348371$, pour la profondeur normale $y_n = 0.9579H$.

L'équation suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale

$$\eta = 1.105M_D^{(-0.462M_D^{0.69} - 0.819M_D^{2.04} - 22.13M_D^{4.39} + 0.497)} \quad (4.106)$$

L'équation (4.106) est valable pour $0.005 \leq \eta \leq 0.82$ correspond à $1.91 \times 10^{-5} \leq M_D \leq 0.25188$, avec une erreur maximale inférieure à 0.35 %

Comparons les figures (4.10 et 4.13), on trouve que la conduite circulaire écoule un débit faible avec une vitesse moindre que celui écoulé par un tunnel ovoïdal pour la même profondeur d'eau.

Pour ε donné

L'équation suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale en fonction de Q/Q_{max}

$$\eta = 0.6194 \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)^{\left(-0.43 \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)^{0.98} - 1.833 \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)^{4.154} - 7.59 \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)^{15.13} + 0.5027 \right)} \quad (4.107)$$

Où Q_{max} est calculé à partir de l'équation (4.104).

L'équation (4.107) est valable pour $0.005 \leq \eta \leq 0.82$ correspond à $6.82 \times 10^{-5} \leq Q/Q_{max} \leq 0.8984$, avec une erreur maximale inférieure à 0.63 %

Il est important de noter que la gamme d'application de l'équation (4.107) utilisant la formule de Manning est plus importante que celle de l'équation (4.103) utilisant la formule de Chézy en fonction de la même quantité Q/Q_{max} .

Exemple.4.5 :

Calculer la profondeur normale d'un tunnel de forme ovoïdale à surface libre pour les données suivantes (mêmes données de l'exemple.4.4)

$Q = 0.2m^3/s$, $\varepsilon = 1.5mm$, $S_0 = 0.0003$, $\nu = 10^{-6}m^2/s$ et $D = 0.8m$ (la largeur maximale du plan d'eau). $H = 4D/3 = 1.06666m$

Utilisant l'équation (4.104) on trouve $Q_{max} = 0.3317m^3/s$, par conséquent la profondeur normale peut être calculée par l'équation (4.107) ou $\eta \approx 0.62$ et $y_n = 0.66m$.

Utilisant l'équation (4.105) la vitesse maximale que cette conduite peut atteindre est calculée $V_{max} = 0.48m/s$

La capacité d'évacuation du tunnel ovoïdal est plus grande que celle d'une conduite circulaire.

IV. 2.7. B. Tunnel de Forme Fer a Cheval Type I

IV. 2.7. B.1 Éléments Géométriques

Suivant la même méthode de description de la géométrie de Swamee et Swamee (2008) et Badri (2010), on trouve la géométrie du tunnel fer à cheval du type I comme suit

Pour $\eta \leq 0.064585442$

$$A = D^2 \left[\frac{9}{4} \cos^{-1} \left(1 - \frac{2\eta}{3} \right) - \left(0.5 - \frac{\eta}{3} \right) \sqrt{27\eta \left(1 - \frac{\eta}{3} \right)} \right] \quad (4.108)$$

$$P = 3D \cos^{-1} \left(1 - \frac{2\eta}{3} \right) \quad (4.109)$$

$$T = 3D \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2\eta}{3} \right)^2} \quad (4.110)$$

Pour $0.064585442 \leq \eta \leq 0.5$

$$A = D^2 \left[1.454489739 - 2.25 \sin^{-1} \left(\frac{1-2\eta}{3} \right) + (\eta - 0.5) \sqrt{2.25 - (\eta - 0.5)^2} - 2\eta \right] \quad (4.111)$$

$$P = D \left[1.76709 - 3 \sin^{-1} \left(\frac{1-2\eta}{3} \right) \right] \quad (4.112)$$

$$T = 2D \left[\sqrt{2.25 - (0.5 - \eta)^2} - 1 \right] \quad (4.113)$$

Pour $0.5 \leq \eta \leq 1$

$$A = D^2 \left[0.847173633 - 0.25 \cos^{-1} (2\eta - 1) + (\eta - 0.5) \sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \quad (4.114)$$

$$P = D[3.337886327 - \cos^{-1}(2\eta - 1)] \quad (4.115)$$

$$T = 2D\sqrt{\eta(1-\eta)} \quad (4.116)$$

IV. 2.7. B.2 Équation de Manning

Pour n donné

Utilisant la formule de Manning et les éléments géométriques de la conduite fer a cheval type I définie dans la section précédente, la figure. 4.19 montre les variations des quantités de débit et vitesse non dimensionnels N_D et V_D avec la profondeur normale, Où

$V_D = Vn / D^{2/3} \sqrt{S_0}$, $N_D = Qn / (D^{8/3} \sqrt{S_0})$. V_D est proportionnel à $R_h^{2/3}$.

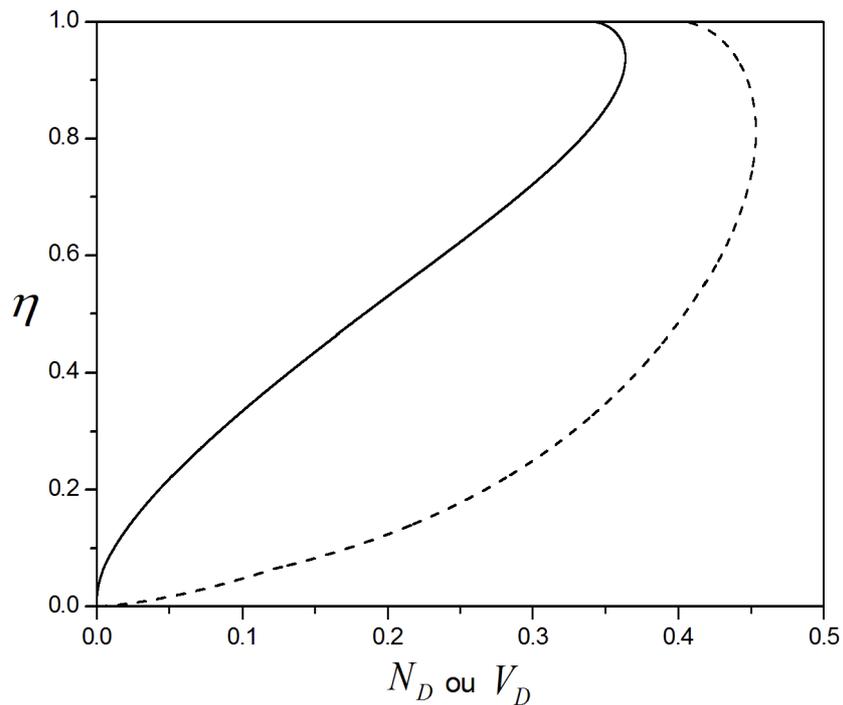


Figure. 4.19. Courbe des variations du débit et vitesse relatifs pour la section fer a cheval type I. Ligne continue — N_D ; ligne pointillée - - - V_D .

La description du graphe est la même de la figure 4.10, la valeur maximale de N_D est $N_{D_{\max}} = 0.36377136$ pour les profondeurs normales $y_n = 0.9377D$ et $y_n = 0.9378D$. La valeur maximale de V_D est $V_{D_{\max}} = 0.4532491$ pour les profondeurs normales $y_n = 0.8121D$ et $y_n = 0.8122D$.

L'équation suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale du tunnel fer a chevale type I

$$\eta = 0.492N_D^{(-1.633N_D^{0.86} - 70N_D^{6.86} - 6N_D^{3.27} + 0.395)} \quad (4.117)$$

L'équation (4.117) est valable pour $0.08 \leq \eta \leq 0.82$ correspond à $0.00747 \leq N_D \leq 0.34037$, avec une erreur maximale inférieure à 0.34 % laquelle est plus exacte que des équations (1.132), (1.133) et (1.134) de Li et al (2010), et plus exacte que les équations (1.136) et (1.137) de Vtankhah et Easa (2011) et Bijankhan et al. (2012).

Pour ε donnée

IV. 2.7. B.3. Variation des Vitesses et Débits

Utilisant la formule de Darcy Weisbach et l'équation (2.19), on trouve

$$\frac{V}{\sqrt{gDS_0}} = 2\sqrt{2A^*/P^*} \left[b + 2 \log c \left(\frac{0.8625}{c} - 1 \right) \right] \quad (4.118)$$

et

$$\frac{Q}{D^2 \sqrt{gDS_0}} = 2\sqrt{2A^{*3}/P^*} \left[b + 2 \log c \left(\frac{0.8625}{c} - 1 \right) \right] \quad (4.119)$$

En maximisant l'équation (4.119), la valeur du débit maximal Q_{\max} apparait à la profondeur normale $y_n = 0.9493D$.

Les figures suivantes représentent la variation des débits relative en fonction du nombre de Reynolds pour deux différentes valeurs de la rugosité relative.

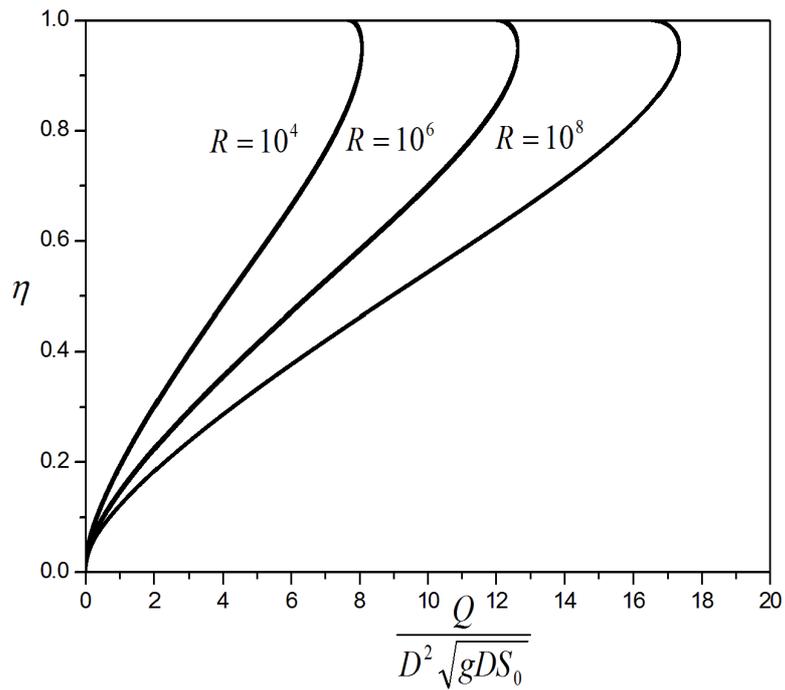


Figure. 4.20. Courbe des variations du débit relatif pour la section fer a cheval type I selon l'équation (4.119) pour $\varepsilon / R_h = 0$.

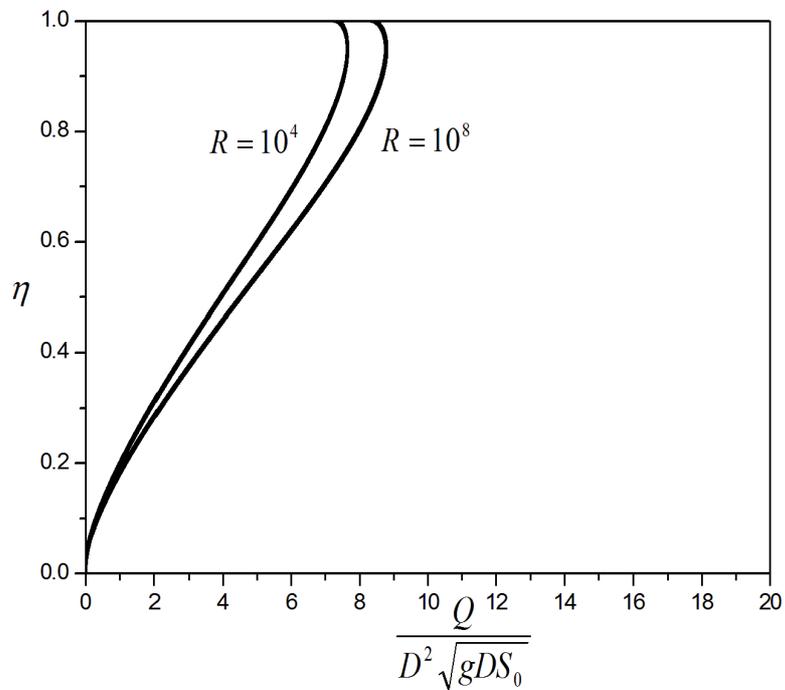


Figure. 4.21. Courbe des variations du débits relatifs pour la section fer a cheval type I selon l'équation (4.119) pour $\varepsilon / R_h = 0.01$.

Les débits maximaux ont été représentés graphiquement en fonction de la profondeur normale pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et de la rugosité relative, à l'aide des éléments géométriques et l'équation explicite du coefficient de frottement (2.19).

La figure.4.20 montre que le débit varie en fonction du nombre de Reynolds pour la même rugosité relative $\varepsilon/R_h = 0$ et la figure.4.21 montre que le débit ne varie presque pas (valeurs superposées) en fonction du nombre de Reynolds pour la même rugosité relative $\varepsilon/R_h = 0.01$ et varie légèrement entre deux valeurs de grande différence tel que $R = 10^4$ et $R = 10^8$.

L'équation suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale en fonction de Q/Q_{max}

$$\eta = 0.448 \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)^{\left(-1.313 \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)^{1.37} - 20.79 \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)^{22.15} - 4.97 \left(\frac{Q}{Q_{max}} \right)^{5.88} + 0.45 \right)} \quad (4.120)$$

L'équation (4.120) est valable pour $0.08 \leq \eta \leq 0.81$ correspond à $0.02054 \leq Q/Q_{max} \leq 0.92609$, avec une erreur maximale inférieure à 0.61 %

Où Q_{max} est calculé depuis l'équation (4.119) pour $y_n = 0.9493D$ par la formule suivante

$$Q_{max} = -2.529 \sqrt{gD^5 S_0} \log \left(\frac{\varepsilon}{3.463H} + \frac{1.425v}{\sqrt{gD^3 S_0}} \right) \quad (4.121)$$

En maximisant l'équation (4.119), la vitesse maximale apparait pour $y_n = 0.8121D$ et $y_n = 0.8122D$.

L'équation (4.121) est la formule du calcul du débit maximal pour le tunnel de forme fer à cheval type I en fonction des paramètres de résistance ε et v .

En maximisant dans l'équation (4.118), la vitesse maximale apparaisse pour $y_n = 0.8402H$.

Les figures suivantes représentent la variation de la vitesse relative en fonction du nombre de Reynolds pour deux différentes valeurs de la rugosité relative.

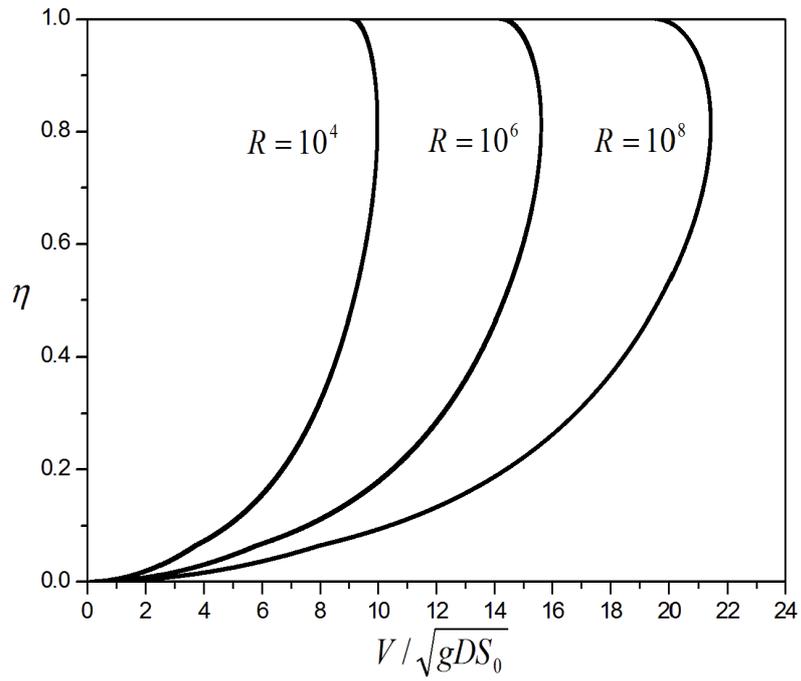


Figure. 4.22. Courbe des variations des vitesses relatives pour la section fer a cheval selon l'équation (4.118) pour $\varepsilon / R_h = 0$.

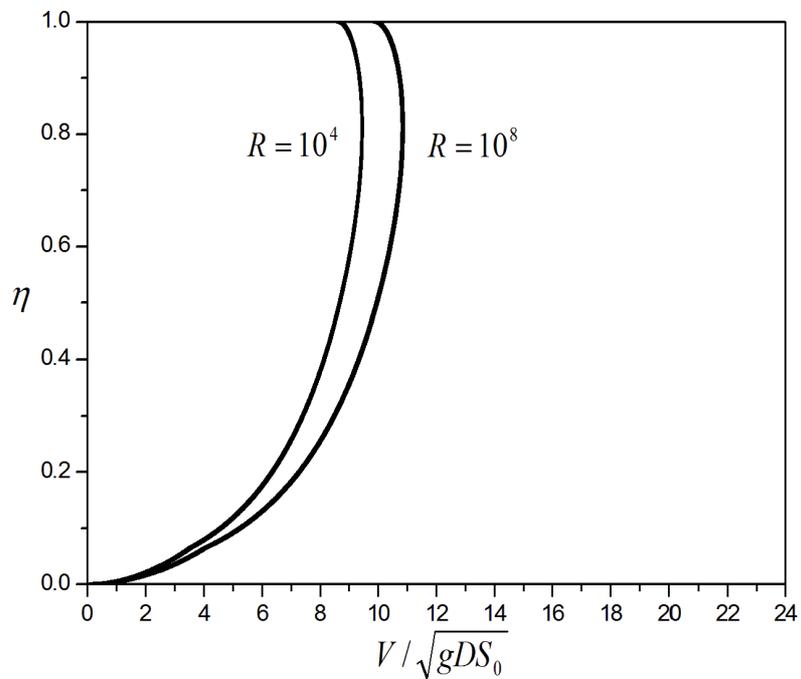


Figure. 4.23. Courbe des variations des vitesses relatives pour la section fer a cheval selon l'équation (4.118) pour $\varepsilon / R_h = 0.01$.

Les vitesses maximales ont été représentées graphiquement en fonction de la profondeur normale pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et de la rugosité relative, à l'aide des éléments géométriques et l'équation explicite du coefficient de frottement (3.15).

La figure. 4.22 montre que la vitesse varie en fonction du nombre de Reynolds pour la même rugosité relative $\varepsilon/R_h = 0$ et la figure. 4.23 montre que la vitesse ne varie presque pas (valeurs superposées) en fonction du nombre de Reynolds pour la même rugosité relative $\varepsilon/R_h = 0.01$ et varie légèrement entre deux valeurs de grande différence tel que $R = 10^4$ et $R = 10^8$.

La vitesse maximale peut être calculée à partir de l'équation (4.18) pour $y_n = 0.8121D$ par la formule suivante

$$V_{\max} = -3.125\sqrt{gDS_0} \log\left(\frac{\varepsilon}{3.662D} + \frac{1.311\nu}{\sqrt{gD^3S_0}}\right) \quad (4.122)$$

L'équation (4.122) est la formule du calcul de la vitesse maximale pour le tunnel ovoïdale en fonction des paramètres de résistance ε et ν .

IV. 2.7. B.4 Équation de Chézy

Pour C donné

Utilisant la formule de Manning et les éléments géométriques de la conduite ovoïdale définie dans la section précédente, la figure. 4.24 montre les variations des quantités de débit et vitesse non dimensionnels N_D et V_D avec la profondeur normale, Où $M_D = V / CD^{1/2} \sqrt{S_0}$, $M_D = Q / (CD^{5/2} \sqrt{S_0})$. V_D est proportionnel à $R_h^{1/2}$.

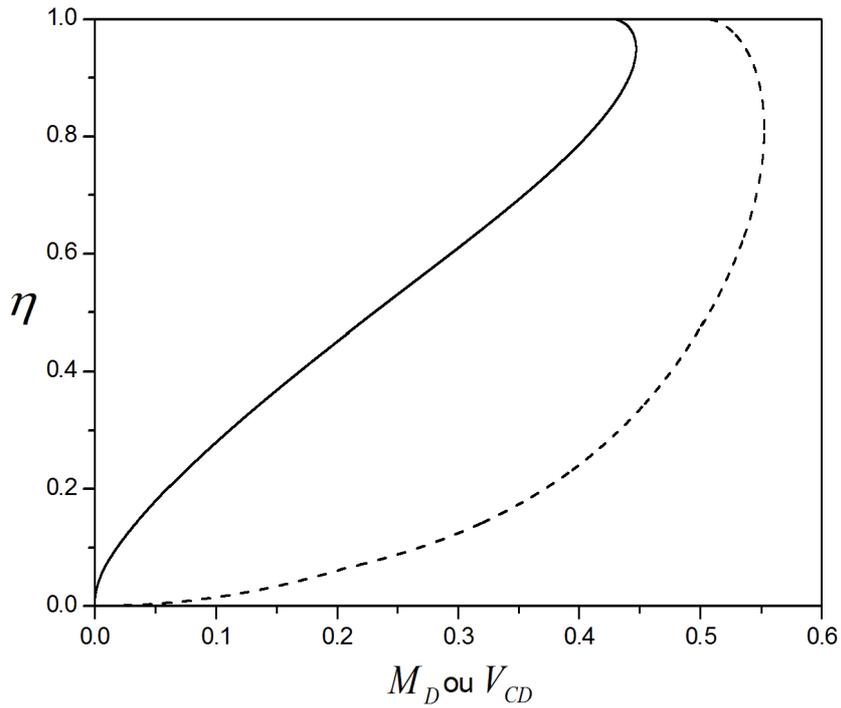


Figure. 4.24. Courbe des variations du débit et de vitesse relatifs. Ligne continue — M_D ;
ligne pointillée --- V_{CD} .

La description du graphe est la même de la figure.4.10, la valeur maximale de M_D est $M_{D_{\max}} = 0.44705271$, pour la profondeur normale $y_n = 0.9493D$. La valeur maximale de V_{CD} est $V_{CD_{\max}} = 0.55239878$, pour les profondeurs normales $y_n = 0.8121D$ et $y_n = 0.8122D$.

L'équation suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale

$$\eta = 0.4372M_D^{(-1.6542M_D^{0.869} - 91.26M_D^{8.5} - 4.854M_D^{3.12} + 0.4207)} \quad (4.123)$$

L'équation (4.123) est valable pour $0.08 \leq \eta \leq 0.82$ correspond à $0.01209 \leq M_D \leq 0.414845$, avec une erreur maximale inférieure à 0.2 %

Pour ε donné

L'équation suivante est trouvée pour le calcul de la profondeur normale en fonction de Q/Q_{\max}

$$\eta = 0.5151 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{\left(-1.113 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{1.517} - 14.33 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{20.51} - 3.827 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{6.07} + 0.5223 \right)} \quad (4.124)$$

Où Q_{\max} est calculé à partir de l'équation (4.121).

L'équation (3.105) est valable pour $0.08 \leq \eta \leq 0.81$ correspond à $0.02704 \leq Q/Q_{\max} \leq 0.9184$, avec une erreur maximale inférieure à 0.67 %

Il est important de noter que la gamme d'application de l'équation (3.101) utilisant la formule de Manning est plus importante que celle de l'équation (4.121) utilisant la formule de Chézy en fonction de la même quantité Q/Q_{\max} .

Exemple.4.6 :

Calculer la profondeur normale d'une conduite de forme fer à cheval à surface libre pour les données suivantes (mêmes données de l'exemple.4.4)

$Q = 0.2 \text{ m}^3 / \text{s}$, $\varepsilon = 1.5 \text{ mm}$, $S_0 = 0.0003$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ et $D = 0.8 \text{ m}$ (la largeur maximale du plan d'eau).

Utilisant l'équation (4.121) on trouve $Q_{\max} = 0.2542 \text{ m}^3 / \text{s}$, par conséquent la profondeur normale peut être calculée par l'équation (4.120) ou $\eta \approx 0.69$ et $y_n = 0.553 \text{ m}$.

Utilisant l'équation (4.122) la vitesse maximale que cette conduite peut atteindre est calculée $V_{\max} = 0.434 \text{ m} / \text{s}$

On déduit que la capacité d'évacuation du tunnel ovoïdal est plus grande que celle d'une conduite circulaire et fer à cheval.

Exemple.4.7 : (Tunnel de Mirwapur, Uttar Pradesh, India)

Gupta et al. (2012) dans leurs discussion ont présenté les données de ce tunnel de forme fer a cheval type II. Ces données seront utilisées pour le calcul de la profondeur normale pour un tunnel de forme fer a cheval type I. les données sont les suivantes

$$Q = 46.46m^3 / s , S_0 = 0.001 , \nu = 10^{-6} m^2 / s \text{ et } D = 5m .$$

Supposant que le tunnel est presque neuf et sa surface intérieure est construite en béton armé, la valeur de la rugosité absolue est estimée par $\varepsilon = 1.5mm$. Utilisant l'équation (4.121) on trouve $Q_{\max} = 59.215m^3 / s$, par conséquent la profondeur normale peut être calculée par l'équation (4.124) ou $\eta \approx 0.69$ et $y_n = 3.45m$, laquelle est proche de $y_n = 3.489m$ celle d'un tunnel fer a cheval type II mesurée dans le tunnel de Mirwapur. Utilisant l'équation (4.122) la vitesse maximale du tunnel est calculée $V_{\max} = 2.944m / s$.

IV. 3. Problème de Détermination de la Profondeur Critique

IV. 3.1. Conduite Circulaire

L'équation suivante est proposée pour la profondeur critique de la conduite circulaire

$$\eta_c = 0.949 \varepsilon_c^{(-0.122 \varepsilon_c^{0.84} - 0.021 \varepsilon_c^{0.272} + 0.2495)} \quad (4.125)$$

L'équation (4.125) est valable pour $0.01 \leq \eta_c \leq 0.97$ correspond à $1.18 \times 10^{-8} \leq \varepsilon_c \leq 1.383$, avec une erreur maximale inférieure à 0.16 %. Laquelle est plus exacte que toutes les équations de (1.139) jusqu'à (1.147).

Utilisant l'équation de Manning et considérons que l'écoulement est critique, on trouve

$$S_c = \frac{H^{1/6} D^{1/2}}{R_h^{2/3}} \quad (4.126)$$

$$\text{Ou } S_c = D^{1/6} S_0^{1/2} / n \sqrt{g \cos \theta} \quad (4.127)$$

La variation de S_c en fonction de la profondeur critique est tracée graphiquement dans la figure 4.25.

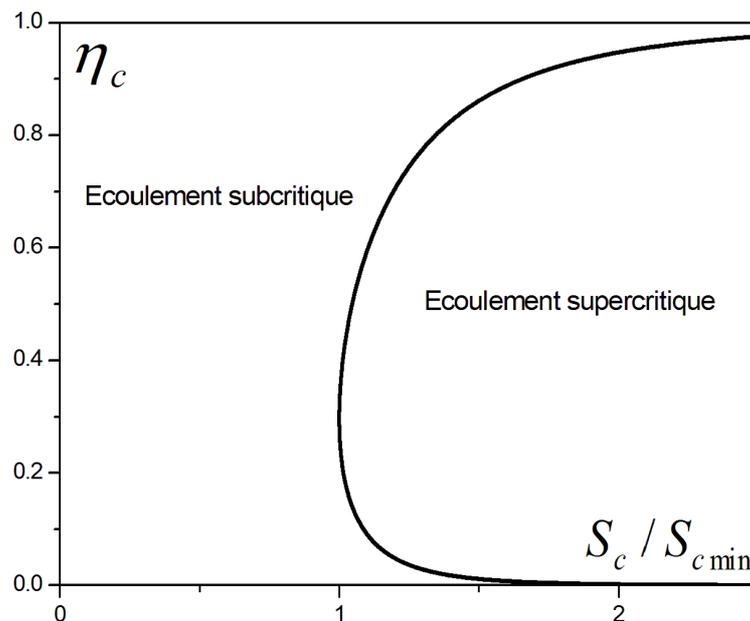


Figure. 4.25. Régimes d'écoulements pour une conduite circulaire utilisant l'équation (4.126).

La Figure 4.25 représente les zones subcritique et supercritique de l'écoulement séparées par la pente critique S_c .

La valeur minimale de S_c apparaît à la profondeur critique $\eta_c = 0.2969$ correspond a $S_{c\min} = 1.5096559$.

Utilisant l'équation (4.127) on trouve que

$$\frac{S_c}{S_{c\min}} = \left(\frac{S_0^4 + S_0^2}{S_L^4 + S_L^2} \right)^{1/4} \quad (4.128)$$

Où S_L est la pente critique minimale appelée (limit slope), voir Swamee (2002).

L'équation suivante est proposée pour S_L

$$S_L = 0.0394 \left[\log \left(\frac{\varepsilon}{2.034D} + 1.788 \left(\frac{Dv}{Q} \right)^{0.9} \right) \right]^{-2} \quad (4.129)$$

Où le coefficient de frottement ASCE (1963) est calculé par la formule approchée

$$f = 0.25 \left[\log \left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{5.48}{R^{0.9}} \right) \right]^{-2} \quad (4.130)$$

Pour une pente inférieure à S_L l'écoulement est subcritique sous conditions de l'écoulement uniforme.

La formule suivante est proposée pour la profondeur critique

$$\eta_c = \left[\frac{10^{-0.0784} \left(-62812 + 67458 \left(\frac{S_c}{S_{c\min}} \right)^{14.653} \right)}{\left(10^{-5} + -24426 \left(\frac{S_c}{S_{c\min}} \right)^{-30.2} + 37903 \left(\frac{S_c}{S_{c\min}} \right)^{11.4814} \right)^{1.0784}} \right]^{0.433} \quad (4.131)$$

L'erreur maximale engendrée par l'utilisation de l'équation (4.131) est inférieure à 0.7 %

pour $0.31 \leq \eta_c \leq 0.8$ dans la gamme $1.000217 \leq \frac{S_c}{S_{c\min}} \leq 1.3438$

Il est important de noter que la gamme d'application de l'équation (4.125) utilisant la condition de criticité seule est plus importante que celle de l'équation (4.131) utilisant la formule de criticité et de Manning en fonction de différentes quantités.

IV. 3.2. Tunnel de Forme Ovoïdal (Gill 1987)

L'équation suivante est proposée pour la profondeur critique du tunnel ovoïdal

$$\eta_c = 0.9546 \varepsilon_c^{(-0.256\varepsilon_c^{0.775} - 0.106\varepsilon_c^{0.2185} + 0.24208)} \quad (4.132)$$

Où $\varepsilon_c = Q^2 / gH^5$. L'équation (4.132) est valable pour $0.01 \leq \eta_c \leq 0.97$ correspond à $5.87 \times 10^{-9} \leq \varepsilon_c \leq 0.657$, avec une erreur maximale inférieure à 0.4 %.

IV. 3.3. Tunnel de Forme Fer à Cheval Type I

L'équation suivante est proposée pour la profondeur critique du tunnel fer à cheval

$$\eta_c = 0.944 \varepsilon_c^{(-0.168\varepsilon_c^{0.307} + 0.1625\varepsilon_c^{0.09} + 0.2184)} \quad (4.133)$$

Où $\varepsilon_c = Q^2 / gD^5$. L'équation (4.133) est valable pour $0.08 \leq \eta_c \leq 0.85$ correspond à $0.0001521 \leq \varepsilon_c \leq 0.6475$, avec une erreur maximale inférieure à 0.6 %.

Exemple.4.8 :

Prenant les mêmes données de l'exemple. 4.4, calculer la profondeur critique d'une conduite circulaire.

$\varepsilon_c = 0.12443$, Utilisant l'équation (4.125) on trouve $\eta_c \approx 0.337$, la profondeur normale est supérieur a la profondeur critique $\eta_c < \eta$, par conséquent le régime de l'écoulement est subcritique.

Conclusion

L'objectif principal de ce chapitre est de développer des solutions explicites pour la détermination des profondeurs normales et critiques de l'écoulement uniforme.

Le théorème de Lagrange a été appliqué pour résoudre le problème de détermination de la profondeur normale des canaux triangulaire, rectangulaire, rectangulaire large et naturel de profile cosinus. Les résultats obtenus sont en forme de séries rapidement convergentes.

Les solutions développées sont plus exactes que les solutions existantes de Swamee (1994) et Swamee et Cahar (2010).

Pour le canal parabolique et les conduites circulaire et non-circulaire, l'application du théorème de Lagrange pour la résolution du paramètre de la profondeur normale diverge et des équations approchées sont proposées.

Les équations développées sont comparées avec des résultats expérimentaux et des exemples d'application sont présentés pour illustration.

La profondeur critique a été développée pour les conduites circulaire et non circulaires permettant la classification des régimes d'écoulements ; subcritique (si $\eta > \eta_c$), critique (si $\eta = \eta_c$) et supercritique (si $\eta < \eta_c$).

CHPITRE V

CRITERE DE STABILITE DE L'ECOULEMENT

V. 1. Introduction

Ce chapitre présente le développement d'un nouveau critère pour l'identification de l'état de stabilité de l'écoulement uniforme.

La profondeur d'eau de l'écoulement est utilisée comme le paramètre de classification de l'écoulement. L'état de l'écoulement est classé selon les groupes de paramètres par rapport à la viscosité (nombre de Reynolds) et par rapport à la gravité (le nombre de Froude).

Les deux nombres sont utilisés dans le présent chapitre pour permettre la classification de la stabilité de l'écoulement en combinant le nombre de Vedernikov et la loi logarithmique de résistance à l'écoulement.

Utilisant le critère proposé, des équations explicites seront développées pour la prédiction du rapport d'aspect de la stabilité neutre en fonction des paramètres ν et ε comme paramètres de résistance, permettant l'identification directe de l'état de la stabilité en introduisant le concept de la pente minimale de la stabilité neutre.

Les solutions développées à partir du critère proposé sont comparées avec des résultats expérimentaux.

V.2 Canal Rectangulaire

La pente non dimensionnelle est calculée par

$$S = \frac{B^{1/6} P^{2/3}}{\chi T^{1/2} A^{1/6}} \quad (5.1)$$

L'équation (5.1) est représentée graphiquement dans la figure. 5.1, la pente non dimensionnelle diminue avec l'accroissement du taux de remplissage jusqu'à la valeur minimale (unité) puis elle augmente par l'accroissement de la profondeur d'eau.

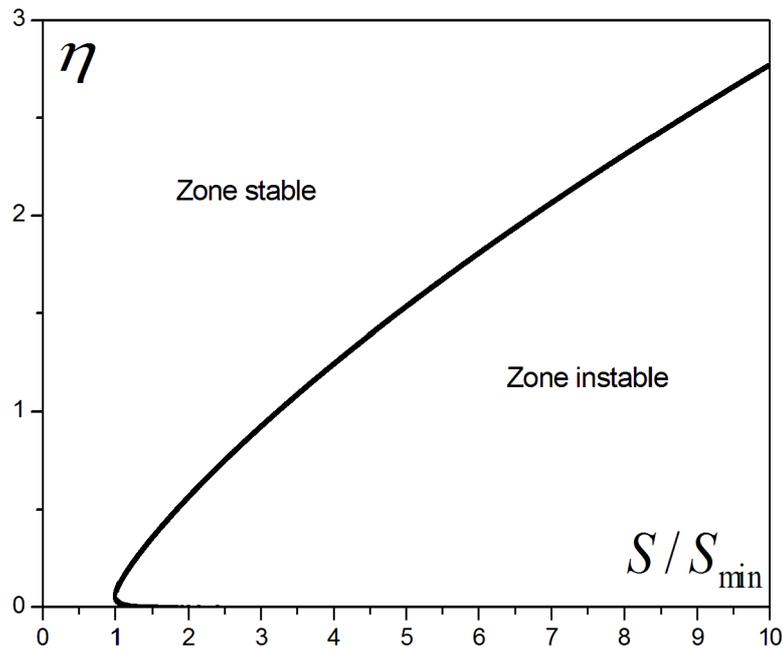


Figure. 5.1. Zones de stabilité pour le canal rectangulaire.

La pente non dimensionnelle S/S_{\min} peut être obtenue à partir de l'équation (1.170) comme suit

$$\frac{S}{S_{\min}} = \left(\frac{S_0^4 + S_0^2}{S_{v\min}^4 + S_{v\min}^2} \right)^{1/4} \quad (5.2)$$

L'équation (5.2) représente le rapport de la pente du canal S_0 par rapport à la pente d'énergie minimale de la stabilité neutre $S_{v\min}$.

Combinons la formule de Darcy Weisbach avec le nombre de Vedernikov $V_n = 1$, la pente d'énergie pour la stabilité neutre est

$$S_v = \frac{P \cos \theta}{8T(\chi\gamma)^2} f \quad (5.3)$$

Sous condition de: $V_n = 1$, où $R = \frac{4Q}{Pv}$ (5.4)

Une solution directe de l'équation (5.3) est impossible à cause de la forme implicite du coefficient de frottement.

Utilisant les équations (5.3) et (2.20) on trouve

$$S_v^2 + S_v^4 = \left(\frac{P}{8T(\chi\gamma)^2} \right)^2 \left[b + 2 \log c \left(-1 + 0.86128 \left[c^{-1} + \log \left(\frac{c}{e^2} \right)^{c^{-2}} \right] \right) \right]^{-4} \quad (5.5)$$

On changeant le variable $\beta = S_v^2$, l'Eq. (5.5) est résolue aisément comme équation quadratique. Minimisant S_v dans l'équation (5.5) la pente minimale $S_{v\min}$ est trouvée

Pour la section rectangulaire, $S_{v\min}$ apparaît pour $\eta=0.0556$ ($S_{\min} = 2.89444864$), pour laquelle l'équation (5.5) se réduit à

$$S_{\min}^2 + S_{\min}^4 = 0.47064 \left[b + 2 \log c \left(-1 + 0.86128 \left[c^{-1} + \log \left(\frac{c}{e^2} \right)^{c^{-2}} \right] \right) \right]^{-4} \quad (5.6)$$

où $R = 3.6Q/Bv$ et $R_h = 0.050036B$.

Utilisant l'algorithme de Srivastava (2006) et régressant on trouve

$$\eta = 0.1197 \left(\frac{S}{S_{\min}} \right)^{1.06} \left[0.1062 \left(\frac{S_{\min}}{S} \right)^{0.587} \left(13.73 - 8.96 \left(\frac{S_{\min}}{S} \right)^{0.9} \right)^{2.263} - 3.44 \right]^{0.43} \quad (5.7)$$

où S/S_{\min} est obtenu à partir des équations (5.2) et (5.6). l'erreur maximale de l'équation

(5.7) est inférieure à 1 % pour $0.13 \leq \eta \leq 3$ correspond à $1.07 \leq \frac{S}{S_{\min}} \leq 11.05$.

V.3 Comparaison avec des Données Expérimentales

En utilisant les données expérimentales publiées par Cristo et .al. (2010) on trouve le tableau suivant :

N. Test	S_0	Q (m^3/s)	ε/R_h	f	y_n (m)
NR1	0.552	4.04	0.0017	0.0169	0.04
NR2	0.552	7.49	0.0037	0.0202	0.064
NR3	0.552	8.30	0.0034	0.0197	0.068
NR4	0.552	9.00	0.0035	0.0199	0.072
NR5	0.602	13.26	0.0055	0.0223	0.094
NR6	0.602	13.18	0.0666	0.0494	0.122
R1	0.602	1.98	0.0200	0.0324	0.03
R2	0.602	1.98	0.1329	0.0661	0.038
R3	0.602	3.13	0.0134	0.0286	0.039
R4	0.603	4.00	0.0028	0.0189	0.04
R5	0.602	3.16	0.1032	0.0591	0.05
R6	0.148	5.44	0.0036	0.02	0.08
R7	0.148	3.00	0.0122	0.0278	0.06
R8	0.148	10.38	0.0027	0.0186	0.12
R9	0.046	3.90	0.0404	0.041	0.12
R10	0.04	0.18	0.1853	0.0775	0.02
R11	0.133	0.95	0.1707	0.0743	0.04
R12	0.203	1.31	0.1035	0.0592	0.04
R13	0.148	3.09	0.0099	0.0262	0.06
R14	0.148	10.40	0.0068	0.0235	0.13
R15	0.242	5.72	0.0152	0.0297	0.08
R16	0.053	3.30	0.0330	0.0381	0.10
R17	0.603	21.48	0.0022	0.0177	0.12
R18	0.046	11.22	0.0166	0.0305	0.22

Tableau.5.1. Données expérimentales publié par Cristo et al. (2010).

Les données du Tableau.5.1 sont tracées graphiquement dans la figure suivante :

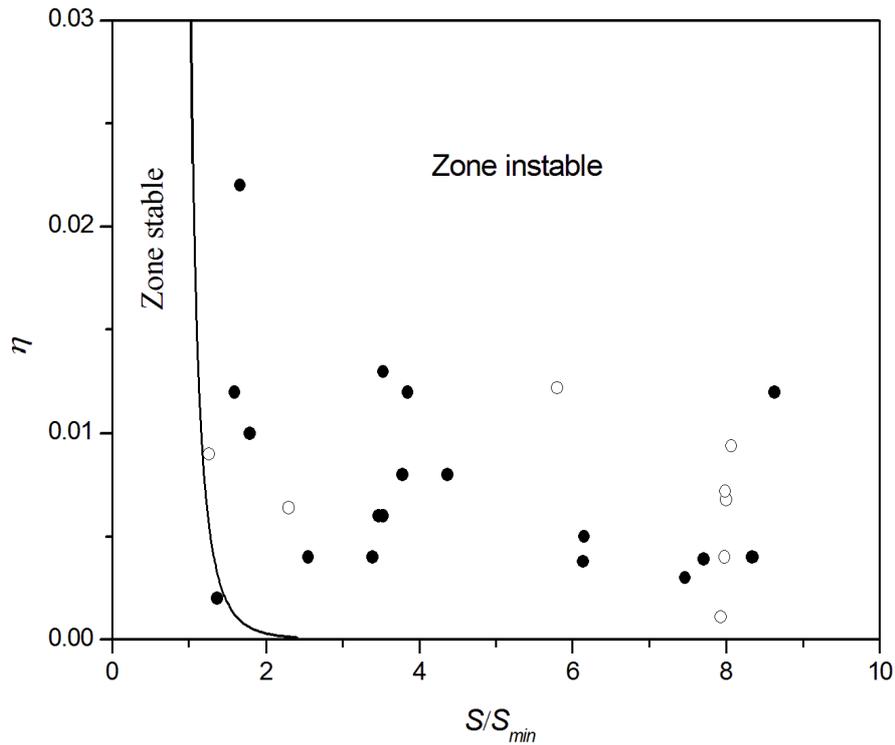


Figure.5.2. Représentation graphique des données expérimentales selon Di Cristo et al. (2010) à l'aide des équations (5.6) et (5.7).

La majorité des essais expérimentaux sont indiqués dans la zone instable, ce qui confirme la validité du critère proposé. Les points vides représentent les données considérées par le critère de Di Cristo et al. (2010) dans la zone stable, ce qui explique que le nombre de Vedernikov surestime l'instabilité de l'écoulement pour les fortes pentes.

V.4. Canal Parabolique

La pente non dimensionnelle pour un canal parabolique est calculée par

$$S = \frac{k^{-1/3} P^{2/3}}{\chi T^{1/2} A^{1/6}} \quad (5.8)$$

$$\text{Où } S = \frac{k^{-1/3} S_0^{1/2}}{n \sqrt{g \cos \theta}}$$

L'équation (5.8) est représentée graphiquement dans la figure. 5.3, la pente non dimensionnelle diminue avec l'accroissement du taux de remplissage jusqu'à la valeur minimale (unité) puis elle augmente par l'accroissement de la profondeur d'eau.

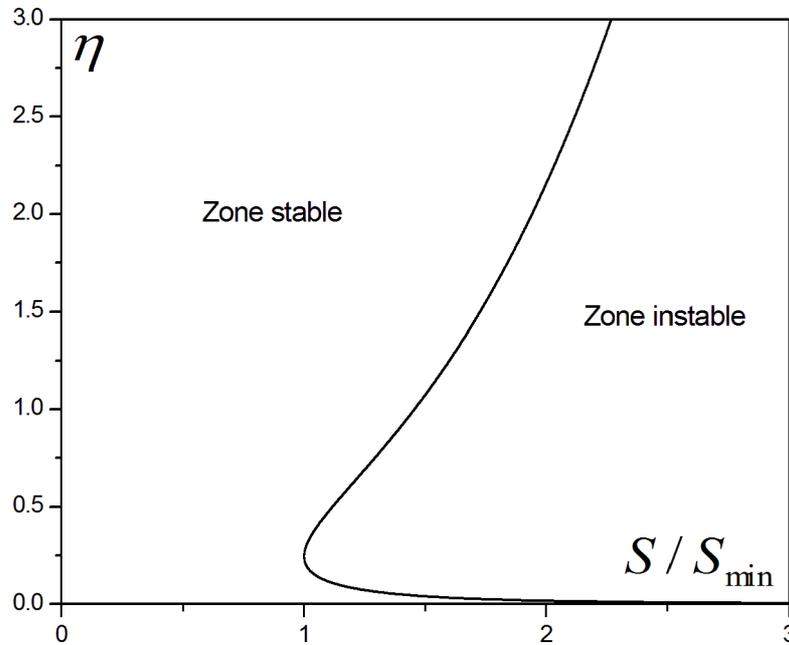


Figure. 5.3. Zones de stabilité pour le canal parabolique.

Pour la section parabolique, $S_{v\min}$ apparaisse pour $\eta=0.2451$ ($S_{\min} = 4.7377996$), pour laquelle l'équation (5.5) se réduit à

$$S_{\min}^2 + S_{\min}^4 = 2.66489 \left[b + 2 \log c \left(-1 + 0.86128 \left[c^{-1} + \log \left(\frac{c}{e^2} \right)^{c^{-2}} \right] \right) \right]^4 \quad (5.9)$$

où $R = 14.283Q/Hv$ et $R_h = 0.03505H$.

L'équation suivante est propose pour la profondeur de stabilité neutre pour le canal parabolique

$$\eta = 0.257 \left(\frac{S}{S_{\min}} \right) \left(4 \left(\frac{S_{\min}}{S} \right)^{7.3} + 1.57 \left(\frac{S_{\min}}{S} \right)^{3.07} + 10.3 \left(\frac{S_{\min}}{S} \right)^{35.8} + 2.86 \right) \quad (5.10)$$

où S/S_{\min} est obtenu a partir des équations (5.2) et (5.9).). L'erreur maximale de l'équation

(5.10) est inférieur a 1 % pour $0.32 \leq \eta \leq 3$ ou $1.015 \leq \frac{S}{S_{\min}} \leq 2.268$.

V.5. Conduite Circulaire

La pente non dimensionnelle pour une conduite circulaire est calculée par

$$S = \frac{D^{1/6} P^{2/3}}{\chi T^{1/2} A^{1/6}} \quad (5.11)$$

L'équation (5.11) est représentée graphiquement dans la figure. 5.4, la pente non dimensionnelle diminue avec l'accroissement du taux de remplissage jusqu'à la valeur minimale (unité) puis elle augmente par l'accroissement de la profondeur d'eau. la pente non dimensionnelle augmente rapidement quand la valeur de η devient plus que 0.7 jusqu'à la valeur maximale ≈ 0.81 .

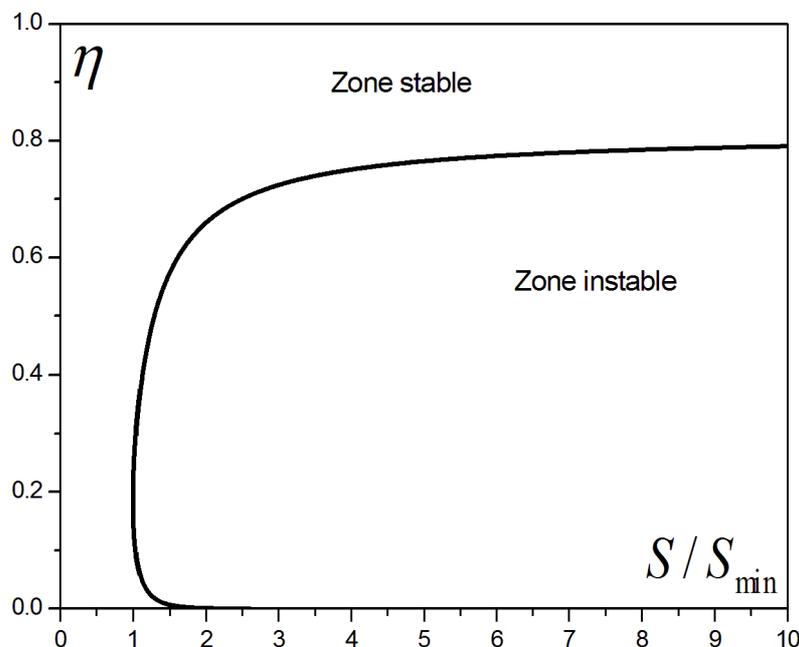


Figure. 5.4. Zones de stabilité pour la conduite circulaire.

Pour la section circulaire, $S_{v\min}$ apparait pour $\eta=0.1844$ ($S_{\min} = 3.6837831$), pour laquelle l'équation (5.5) se réduit à

$$S_{\min}^2 + S_{\min}^4 = 2.11454 \left[b + 2 \log c \left(-1 + 0.86128 \left[c^{-1} + \log \left(\frac{c}{e^2} \right)^{c^{-2}} \right] \right) \right]^{-4} \quad (5.12)$$

où $R = 4.506Q/Dv$ et $R_h = 0.112123D$.

L'équation suivante est proposée pour la profondeur de la stabilité neutre pour la conduite circulaire

$$\eta = \left[0.5717 - 390168e^{\left(-13.47634 \left(\frac{S}{S_{\min}} \right)^{0.094} \right)} \right]^{0.3947} \quad (5.13)$$

où S/S_{\min} est obtenu à partir des équations (5.2) et (5.12). L'erreur maximale de l'équation

(5.13) est inférieure à 1 % pour $0.27 \leq \eta \leq 0.8$ correspond à $1.02 \leq \frac{S}{S_{\min}} \leq 16.783$.

V.6. Canal Triangulaire

La profondeur de la stabilité exacte est déduite comme

$$y_s = \frac{S^6}{1458} \left(\frac{m^2}{1+m^2} \right)^2 \quad (5.14)$$

Où $S = S_0^{1/2} / n\sqrt{g \cos \mathcal{G}}$.

Le coefficient de résistance n pourra être calculé par la formule (1.60), ou S est déduit et y_s est calculée par l'équation (5.14). Avec cette dernière la valeur de n sera corrigée a partir de l'équation (1.100), puis on recalcule S et y_s par l'équation (5.14).

V.7. Tunnel Ovoïdal (Gill 1987)

La pente non dimensionnelle pour une conduite ovoïdale est calculer par

$$S = \frac{H^{1/6} P^{2/3}}{\chi T^{1/2} A^{1/6}} \quad (5.15)$$

L'équation (5.15) est représentée graphiquement dans la figure. 5.5, la pente non dimensionnelle diminue avec l'accroissement du taux de remplissage jusqu'à la valeur minimale (unité) puis elle augmente par l'accroissement de la profondeur d'eau. La pente non dimensionnelle augmente rapidement quand la valeur de η devient plus que 0.7 jusqu'à la valeur maximale ≈ 0.83 .

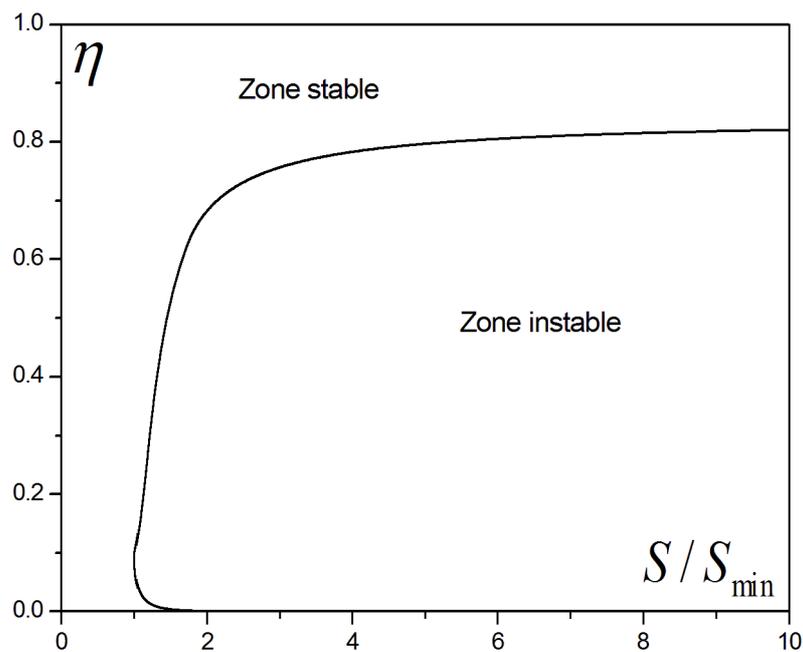


Figure. 5.5. Zones de stabilité pour le tunnel ovoïdal (Gill 1987).

Pour la section ovoïdale, $S_{v\min}$ apparait pour $\eta=0.0921$ ($S_{\min} = 4.1343917$), pour laquelle l'équation (5.5) se réduit à

$$S_{\min}^2 + S_{\min}^4 = 0.66536 \left[b + 2 \log c \left(-1 + 0.86128 \left[c^{-1} + \log \left(\frac{c}{e^2} \right)^{c^{-2}} \right] \right) \right]^{-4} \quad (5.16)$$

où $R = 9.0173Q/Hv$ et $R_h = 0.05600677H$.

L'équation suivante est proposée pour la profondeur de stabilité neutre pour la section ovoïdale

$$\eta = \left[0.7646 - 390168e^{\left(-13.026 \left(\frac{S}{S_{\min}} \right)^{0.1995} \right)} \right]^{0.8575} \quad (5.17)$$

où S/S_{\min} est obtenu à partir des équations (5.2) et (5.16). L'erreur maximale de l'équation

(5.17) est inférieure à 1 % pour $0.3 \leq \eta \leq 0.797$ correspond à $1.2079 \leq \frac{S}{S_{\min}} \leq 5.05$.

V.8. Tunnel de Forme Fer à Cheval Type I

La pente non dimensionnelle pour une conduite fer à cheval est calculée par

$$S = \frac{D^{1/6} P^{2/3}}{\chi T^{1/2} A^{1/6}} \quad (5.18)$$

L'équation (5.18) est représentée graphiquement dans la figure. 5.6, la pente non dimensionnelle diminue avec l'accroissement du taux de remplissage, Le palier est due au changement rapide de la section du tunnel (frontière de la hauteur e) ou S/S_{\min} se change rapidement de la valeur 1.38 jusqu'à la valeur minimale (unité) puis elle augmente par l'accroissement de la profondeur d'eau. La pente non dimensionnelle augmente rapidement quand la valeur de η devient plus que 0.7 jusqu'à la valeur maximale ≈ 0.81 .

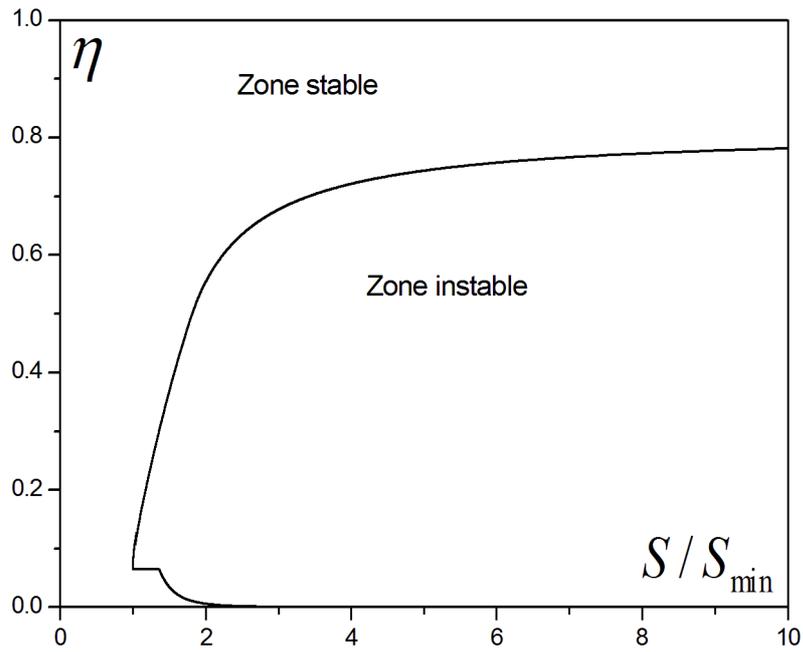


Figure. 5.6. Zones de stabilité pour le tunnel de forme fer à cheval.

Pour la section fer a cheval type I, $S_{v\min}$ apparait pour $\eta=0.1066$ ($S_{\min} = 2.76061255$), pour laquelle l'équation (5.5) se réduit à

$$S_{\min}^2 + S_{\min}^4 = 0.19545 \left[b + 2 \log c \left(-1 + 0.86128 \left[c^{-1} + \log \left(\frac{c}{e^2} \right)^{c^{-2}} \right] \right) \right]^{-4} \quad (5.16)$$

où $R = 4.507Q/Dv$ et $R_h = 0.07394634D$.

L'équation suivante est proposée pour la profondeur de stabilité neutre pour la section ovoïdale

$$\eta = 0.27 \left(\frac{S}{S_{\min}} \right) \left(2.1 \left(\frac{S_{\min}}{S} \right)^{1.1253} - 15.15 \left(\frac{S_{\min}}{S} \right)^{13.867} + 4.2 \left(\frac{S_{\min}}{S} \right)^{5.42} + 0.313 \right) \quad (5.17)$$

où S/S_{\min} est obtenu à partir des équations (5.2) et (5.16).). L'erreur maximale de l'équation

(5.17) est inférieure à 1 % pour $0.3 \leq \eta \leq 0.8$ correspond à $1.1108 \leq \frac{S}{S_{\min}} \leq 11.83$.

Conclusion

Le critère de stabilité développé dans le présent chapitre est plus général et plus simple que celui d'Iwasa (1954) et permet d'identifier la zone de stabilité de l'écoulement sans tracé graphique pour chaque profondeur d'eau.

La méthode est développée par la combinaison du nombre de Vedernikov la loi logarithmique de résistance à l'écoulement.

Si le rapport d'aspect de la stabilité neutre η égale à la profondeur normale cela signifie que l'écoulement est neutre. À l'exception des petites hauteurs ($\eta > \eta_{\min \text{ slope}}$), l'écoulement est considéré stable si $\eta < \eta_n$ et devient instable si $\eta > \eta_n$.

Si la topographie impose la pente du lit du canal, la stabilité de l'écoulement peut être atteinte soit par l'accroissement de la rugosité en changeant la surface des parois internes de la conduite soit en diminuant le diamètre ou la largeur du canal.

Par conséquent, la connaissance des limites de stabilité de l'écoulement développées dans ce chapitre sont nécessaires pour atteindre un écoulement stable pour les cas des vitesses typiquement supérieur à 3 m/s (Hager et Gisonni 2005) ou des pentes très élevées.

CONCLUSION GENERALE

La présente thèse a pour objectif de **Développé des Solutions Explicites des Paramètres de l'Écoulement Uniforme Utilisant le Théorème de Lagrange et la Fonction W-Lambert.**

Les solutions développées pour la détermination des pertes de charge en utilisant le coefficient de résistance à l'écoulement de Colebrook, d'ASCE (1963) et de Thijsee (1949) qui sont basés sur la loi universelle de Prandtl von-Karman, ont été développées en utilisant le théorème de Lagrange. Les résultats sont en forme de séries infinies rapidement convergentes.

La solution développée pour la détermination des pertes de charge en utilisant deux termes a été comparée avec les solutions existantes les plus avancées. La comparaison montre que la solution développée est la plus rapide pour la détermination des pertes de charge pendant les simulations avec une précision largement suffisante pour l'usage pratique en ingénierie.

Les vitesses et débits maximaux des conduites non circulaires ont été déduites à partir et à l'aide du coefficient de frottement développé par l'application du théorème de Lagrange.

Des formules explicites pour la détermination du diamètre pour les régimes : rugueux, lisse et la région de transition ont été développés en utilisant la fonction W -Lambert.

Ces formules ont une grande exactitude et sont dépendantes du nombre de termes de la série utilisés.

Pour le problème de détermination de la profondeur normale, des solutions exactes ont été développées pour le canal triangulaire, rectangulaire large et le canal naturel dans les régimes : rugueux, lisse et de transition en appliquant le théorème de Lagrange, utilisant des groupes non dimensionnels, le coefficient de résistance ASCE (1963), Thijsee (1949) et la formule de Darcy Weisbach. Cette nouvelle méthode est appliquée dans la présente thèse pour les canaux triangulaire, rectangulaire large et le canal naturel.

Pour le canal rectangulaire, utilisant la formule de Chézy, la profondeur normale a été développée sous forme de séries infinie en appliquant le théorème de Lagrange. L'utilisation de l'algorithme itératif de Srivastava (2006) a permis de développer des équations de haute exactitude pour le calcul de la profondeur normale d'un canal parabolique à partir des formules de Chézy et Manning ou leurs erreurs maximales ne dépassent pas les 0.05 %.

La profondeur normale de la conduite circulaire a été développée en fonction des débits relatifs N_D et M_D , lesquelles sont plus exacte et simple que toutes les profondeurs normales développées précédemment.

Les courbes de variations des débits et vitesses relatifs montrent leurs accroissements en fonction de la profondeur normale et puis leur diminution passant par un maximum, où dans cette dernière gamme on peut avoir deux profondeurs normales pour la même vitesse ou débit relatif. Ce phénomène est expliqué par l'instabilité de l'écoulement dans cette zone, c'est la raison pour laquelle que beaucoup d'auteurs ont adapté le dimensionnement des conduites circulaires et non circulaires dans la gamme $0 < \eta \leq 0.82$.

Des formules approchées sont proposées pour la profondeur normale utilisant la méthode de Swamee et Swamee (2008), l'erreur maximale de ces formules en fonction de la quantité Q/Q_{\max} sont inférieure à 0.18 % et 0.8 % utilisant les équations de Manning et Chézy respectivement, la gamme d'application de ces équations approchées utilisant la formule de Chézy est plus importante que celle des équations approchées utilisant la formule de Manning en fonction de la même quantité Q/Q_{\max} .

Les profondeurs normales des tunnels non circulaires ont été développées en fonction des débits relatifs N_D et M_D . La comparaison montre que pour la même profondeur normale les conduites non circulaires écoule un débit relatif plus important que celui d'une conduite circulaire, notamment le tunnel ovoïdal qui a plus de conditions d'auto curage des débits faibles, ou son diamètre vertical $H = 4D/3$. Les débits et vitesses maximales ont été représentés graphiquement en fonction de la profondeur normale pour différentes valeurs du nombre de Reynolds et de la rugosité relative, à l'aide des éléments géométriques développés dans la présente étude et la formule développée pour le coefficient de frottement ASCE (1963). Les débits maximaux des tunnels ovoïdal et fer à cheval apparaissent au profondeurs normales $y_n = 0.9579H$ et $y_n = 0.9493D$, ce qui permet de calculer la capacité d'évacuation maximale de chaque tunnel. Les vitesses maximales des tunnels ovoïdale et fer à cheval apparaissent au profondeurs normales $y_n = 0.8402H$ et $y_n = 0.8122D$, ce qu'il permet de prévenir le dépassement des vitesses limites. Les profondeurs normales suivant la méthode de Swamee et Swamee (2008) ont été développées en fonction de la quantité Q/Q_{\max} avec une erreur maximale inférieure à 0.65 %, la gamme d'application de ces équations approchées utilisant la formule de Manning est plus importante que celle des équations approchées utilisant la formule de Chézy en fonction de la même quantité Q/Q_{\max} . La profondeur critique a été développée pour les conduites circulaire et non circulaires permettant la classification des régimes d'écoulements ; subcritique ($\eta > \eta_c$), critique ($\eta = \eta_c$) et supercritique ($\eta < \eta_c$). La profondeur critique développée pour la conduite circulaire est la plus exacte parmi toutes les solutions disponibles, dans la gamme d'application $0.01 \leq \eta_c \leq 0.97$.

Un nouveau critère de l'identification de l'état de stabilité de l'écoulement a été développé en combinant le nombre de Vedernikov qui est une fonction du nombre de Froude et la loi logarithmique de résistance qui est une fonction du nombre Reynolds, de la forme de la conduite ou canal et de la rugosité des parois internes. Ce critère a permis le développement d'une seule formule pour la limite de la stabilité neutre qui distingue les états d'écoulements stable et instable pour chaque type de conduite ou canal. Cela permet l'identification directe de l'état de la stabilité contrairement au critère développé par Iwasa (1954) qui nécessite de tracer une courbe de la limite de stabilité pour chaque point donné. Si la topographie dicte (impose) la pente du lit du canal, la stabilité de l'écoulement peut être atteinte en utilisant le critère proposé par l'augmentation de la rugosité en changeant la surface (la matière) des parois internes de la conduite ou en diminuant soit le diamètre ou la largeur du canal.

Pour les problèmes de détermination de la perte des charges et la profondeur normale, des formules exactes ont été développées en appliquant le théorème de Lagrange. Une solution analytique est développée pour la résolution du problème de détermination du diamètre de la conduite en utilisant la fonction *W-Lambert*. Les solutions sont en forme de séries infinies rapidement convergentes d'une grande précision.

Par conséquent, la présente thèse est une contribution au **Développement des Solutions Explicites des Paramètres de l'Écoulement Uniforme Utilisant le Théorème de Lagrange et la Fonction *W-Lambert*.**

Espérons que cette contribution apporte des solutions analytiques utiles, et rationalise la conception des conduites et canaux.

NOTATIONS

A = aire de la section mouillée (m^2)

a = constante (-)

b = constante (-)

B = largeur (m)

c = constante (-)

d = constante (-)

h = constante (-)

D = Diamètre ou largeur (m)

e = 2.7182818284 (-)

f = Coefficient de frottement (-)

g = accélération de la gravité (ms^{-2})

h = constante (-)

h_f = perte de charges (m)

L = largeur (m)

n = Coefficient de Manning ($sm^{-1/3}$)

P = périmètre mouillé (m)

Q = débit ($m^3 s^{-1}$)

R = Nombre de Reynolds (-)

R_h = Rayon hydraulique (m)

S_0 = pente d'énergie (-)

t = Paramètre (-)

V = Vitesse moyenne (ms^{-1})

V_n = Nombre de Vedernikov (-)

Γ = la fonction gamma (-)

ε = rugosité absolue (m)

ν = Viscosité cinématique ($m^2 s^{-1}$)

ϕ = fonction (-)

REFERENCES

- ASCE Committee on hydromechanics of the Hydraulic Division. (1963). Friction factors in open channels. *Journal of Hydraulics Division, ASCE* 89(2), 97–143.
- Abed, M. (2010). Contribution a l'étude de l'écoulement uniforme dans une conduite fermée de forme circulaire. Mém de Magister, Univ de Biskra, Algérie.
- Achour, B., and Bejaoui, A. (2006). Discussion of “Exact solutions for normal depth problem” by P.K Swamee, and P.N Rathie. *Journal of Hydraulic Research*; 44(5), 715–717.
- Achour, B., and Khattaoui, M. (2008). Computation of normal and critical depths in parabolic cross sections. *Open Civ. Eng. J.*, 2(1), 9-14.
- Babaeyan-Koopaei, K. (2001). Dimensionless curves for normal depth calculations in canal sections. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE* 127(6), 386–389.
- Babitt, H.E. and Baumann, E.R. (1958). Sewage and sewage treatment. 8 th edn., *John Wiley & Son, Inc.*, New York, N. Y.
- Badri, T. (2010). Contribution a l'étude de l'écoulement uniforme dans une conduite fermée de forme ovoïdale. Mém de Magister, Univ de Biskra, Algérie
- Bakhmettef, B.A. (1932). Hydraulics open channels. *McGraw-Hill Book Co, Inc.*, New York, N.Y.
- Biberg, D. (2017). Fast and accurate approximations for the Colebrook equation. *Journal of Fluids Engineering, ASME*, Vol. 139, 031401-3.
- Bijankhan, M., and Kouchakzadeh, S. (2011). Egg-shaped cross section: Uniform flow direct solution and stability identification. *Flow Measurement and Instrumentation*; 22(2011),511–6.
- Bijankhan, M., and Savan, H. (2012). Discussion of “Iterative formulas and estimations formulas for computing normal depth of horseshoe cross section tunnel” by Lu, J., Wang, Z., and Fang, X. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE* 138, 785–786.
- Brkic, D and Stajic, Z. (2021). “Excel VBA-based user defined functions for highly precise Colebrook’s pipe flow approximations: A Comparative Overview”. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*, 19(2), pp. 253-269.
- Brkic, D. (2011). Review of explicit approximations to the Colebrook relation for flow friction. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, 77 (1) 34-48.
- Chen, Cheng-lung. (1995). Free stability criterion as affected by velocity distribution. *Journal of Hydraulics Engineering, ASCE* 121(10), 736–743.

- Chen, Cheng-lung. (1997). Closure to discussion of “Free stability criterion as affected by velocity distribution”. *Journal of Hydraulics Engineering, ASCE* 123, 666–668.
- Chow, V.T. (1959). Open channel hydraulics. *McGraw-Hill Book Co, Inc., New York, N.Y.*
- Christensen, B.A. (1984). Discussion of “flow velocities in pipelines”. by Richard R.Pomeroy. *Journal of Hydraulic Engineering*; 110(10), 1510-2.
- Clamond, D. (2009). Efficient resolution of the Colebrook equation. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 48(7), pp. 3665-3671.
- Colebrook, C.F. (1939). Turbulent flow in pipe with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws. *Journal, Institution of Civil Engineers, No 5204, 133-156.*
- Colebrook, C.F. and White, C.M. (1937). Experiment with fluid friction in roughened pipes. *Proceedings of the Royal Society of London, Vol 161, No 906, pp 367-381.*
- Comtet, L. (1974). Advanced combinatorics. *D. Reidel Publishing Company. Dordrecht. Holland.*
- Corless, R. M., Gomet, G. H., Hare, D. E. G., Jeffrey, D. J., and Knuth, D. E. (1996). On the Lambert W function. *Adv. Comput. Math.*, 5(4), 329-359.
- Craya, A. (1952). The criterion for the possibility of roll wave formation. *Natl. Bur. Standards, Circ.*, 521, 141-151.
- Di Cristo, C.Di., Iervolino, M., Vacca, A., Zanuttigh, B. (2010). Influence of relative roughness and Reynolds number on the roll waves special evolution. *Journal of Hydraulic Engineering*, 136(1), 24–33.
- Di Cristo, C.Di., Iervolino, M., Vacca, A., Zanuttigh, B. (2008). Minimum channel length for roll-wave generation. *Journal of Hydraulic Research*, 46(1), 73–79.
- Elhakeem, M., and Sattar, A. (2017). Explicit solution for the specific flow depths in partially filled pipes. *Journal of Pipeline Systems and Practice, ASCE* 8(4), 06017004–6.
- Escoffier, F. F. and Boyd, M. B. (1962). Stability aspects of flow in open channels. *ASCE Proc.*, 88 (HY6), 145-166.
- Federal Highway Administration. (2005). *Design of roadside channels with flexible linings.* HWA-NHI-05-114, FHWA, Washington, DC.
- Gill, M.A. (1987). Hydraulics of partially filled eggs sewers. *Journal of Environmental Engineering ASCE* ;113(2), 407-425.
- Gupta, S.K., Singh, Vijay P, and Shukla, S.K. (2012). Discussion of “Iterative formulas and estimations formulas for computing normal depth of horseshoe cross section tunnel” by Lu, J., Wang, Z., and Fang, X. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE* 138, 786–787.
- Henderson, F.M. (1966). Open channel flow. *The MacMillan Co, New York, N.Y.*

- Hager, W.H. (1989). Discussion of ‘Non circular sewer design’ by P.K.Swamee, R.Bhargava and A.K.Sharma. *Journal of Environmental Engineering ASCE* ;115(1), 274-6.
- Hager, W.H. and Schleiss, A.J. (2009). Constructions hydrauliques – Ecoulements stationnaires (Hydraulics structures – Steady flows), ed 2. *Presses Polytechniques et Universitaires Romandes*, Lausanne [in French].
- Hager, W.H. (2010). Wastewater hydraulics: theory and practice. *Springer-Verlag, Heidelberg, , Berlin*.
- Hager, W.H, and Gissoni, C. (2005). Supercritical flow in sewer manholes. *Journal of Hydraulic Research*, 43(6), 600–667.
- Hug, M., ed. (1975). Mécanique des fluide appliqué. *Eyrolles*. Paris.
- Holmes, W.H. Travelling wave in steep channels, *Civil Engineering* 1936; 6, no 7, p. 467-8.
- Hosieni, P., and Raee, N. (2012). Discussion of “Iterative formulas and estimations formulas for computing normal depth of horseshoe cross section tunnel” by Lu, J., Wang, Z., and Fang, X. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE* 138, 784–785.
- Idelcik, I.E. (1986). Memento des pertes de charge. *Eyrolles*. Paris, 3 ed.
- Iwasa, Y. (1954). The criterion for instability of steady uniform flow in open channels. *Kyoto Univ.Fac. Eng. Mem.*, v. 16, no. 4, p. 264-275.
- Julien, P.Y and Hartley, D.M. (1986). Formation of roll waves in laminar sheet flow. *Journal of Hydraulic Research*, 24(1), 5–17.
- Karman, V. T. (1930). Mechanical similarity and turbulence. . *Proceeding of the 2d International Congress of Applied Mechanics*, Stockholm, vol.1, pp. 85-92.
- Koloseus, H. The effect of free surface instability on channel resistance. *Iowa City Iowa Univ., Ph. D dissertation*, 1958.
- Koloseus, H., and Davidian. J. (1966a). Free surface instability correlations. Geological Survey Water Supply Paper 1592-C, U.S. Dept. Of the Interior, U.S. Government PrintingOfc., Washington, D.C.
- Koloseus, H., and Davidian. J. (1966b). Roughness concentrations effects on flow over hydrodynamically rough surfaces. Survey Water Supply Paper 1592-D, U.S. Dept. Of the Interior, U.S. Government Printing Ofc., Washington, D.C.
- Keulegan, G. H. (1938). Law of turbulent flow in open channels. *Journal of Research, National Bureau of Standards, Vol* 21(Dec 1938), 707-741.
- Koulegan, G. H. and Patterson, G. W. (1940). A criterion for instability of flow in steep channels. *Am. Geophys. Union Trans.*, 21, 594-596.
- Lu, J., Wang, Z., and Fang, X. (2010). Iterative formulas and estimations formulas for computing normal depth of horseshoe cross section tunnel . *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE* 136(11), 786–790.

- Mayer, P.G. (1961). Roll waves and slug flows in inclined open channels. *Am. Soc. Civil Engineers Trans.*, 126, 505-534.
- Mikata, Y., and Walczak, S. (2016). Exact analytical solutions of the Colebrook White equation. *Journal of Hydraulics Engineering, ASCE 04015050–6*.
- Mikata, Y., and Walczak, S. (2017). Closure to “Exact analytical solutions of the Colebrook White equation”. *Journal of Hydraulics Engineering, ASCE, Vol. 143(9), 07017008–2*.
- Powell, R. W. (1950). Resistance to flow in rough channels, *Transaction, American Geophysical Union, vol.31, no. 4, 575–582*.
- Powell, R. W. (1949). Resistance to flow in smooth channels, *Transaction, American Geophysical Union, vol.30, no. 6, 875–878*.
- Powell, R. W. (1948). Vedernikov’s criterion for ultra rapid flow. *Am. Geophys. Union Trans.*, v. 29, no. 6 p. 882-886.
- Powell, R. W. (1946). Flow in a channel of definite roughness, *Transaction, ASCE (111), 531–566*.
- Robertson, J.M and Rouse, H. (1941). On the four regimes of open channel flow, *Civil Engineering*; 11(3), 169–171
- Moody, L.F. (1944). Friction factor for pipe flow. *Transaction, ASME 66(11), 671–678*.
- Nikuradse, J. (1932). Gesetzmäßigkeiten der turbulenten stromung in glatten rohren (Law of turbulent flow in smooth pipes). *VDI Forschungsheft, no. 356, 1932*.
- Nikuradse, J. (1933). Stromungsgesetze in rauhen Rohen (Law of flow in rough pipes). *VDI Forschungsheft, no. 361, 1933*.
- Rajaratnam, N. (1960). Direct solution for diameter of pipe in rough turbulent flow. *La Houle Blanche, Societé Hydrotechnique de France. 6(Nov 1960), 714–719*.
- Ranga Raju. K.G. and Garde, R.J. (1966). Direct solution for problems in pipe friction. *La Houle Blanche, Societé Hydrotechnique de France. 8(Dec 1966), 917–919*.
- Rathie, P. N and Silva, P. H. D. (2011). Applications of Lambert W function. *Int. Inequal. Pure Appl. Math.*, 9(2), 1-5.
- Renault, D., and Hemakumara, H.M. (1999). Irrigation oftakes sensitivity. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE 125(3), 131–136*.
- Rosso, M., Schiara, M., Berlamont, J. (1990). Flow stability and friction factor in rough channels. *Journal of Hydraulics Engineering, ASCE 116(9), 1109–1118*.
- Rouse, H. (1943). Evaluation of boundary roughness. *Iowa Hydraulic Bulletin 27, Proceedings of the Second Hydraulics Conference, University of Iowa. Iowa City, Iowa, 105-116*.
- Rouse, H. (1944). Discussion of “Friction factor for pipe flow” by Lewis F. Moody *Transaction, ASME 66(11), 680–682*.

- Rouse, H., Koloseus. H. J and Davidian, J. (1963). The role of the Froude number in open channel resistance. *Journal of Hydraulic Research*, 1(1), 14–19.
- Rouse, H. (1965). Critical analysis for open channel resistance. *Journal of Hydraulics Division, ASCE* 91(4), 1–25.
- Rouse, H. (1950). Engineering Hydraulics. *John Wiley & Son, Inc.*, New York, N. Y.
- Prandtl, L. (1926). On fully developed turbulence. *Proceeding of the 2d International Congress of Applied Mechanics*, Zurich, pp. 62-74.
- Sahtel, S. (2016). Contribution par la MMR au calcul de la profondeur normale Thèse de Doctorat, Univ de Biskra, Algérie
- Sonnad, J.R., Goudar, C.T. (2006). Turbulent flow friction factor calculation using a mathematically exact alternative to the Colebrook Ehte equation. *Journal of Hydraulic Engineering. ASCE*, 132(8), 863-867.
- Sharma, A.K.and Swamee, P.K. (2008). Design method of circular and noncircular sewer sections. *Journal of Hydraulic Research*, 46(1), 133–141.
- Strickler, A. (1923). Some contributions to the problem of the velocity formula and roughness factors for rivers, canals and closed conduits. *Mitteilungen des eidgenossischen Amtes fur Wasserwirtschaft*, Bern, Switzerland, no. 16, 1923.
- Swamee, P.K. and Jain, A.K. (1976). Explicit equations for pipe flow problems. *Journal of Hydraulics Engineering, ASCE* 102(5), 657–664.
- Swamee, P.K., Bhargava, R. And Sharma, A.K. (1987). Non circular sewer design. *Journal of Environmental Engineering ASCE* ;113(4), 824-833.
- Swamee, P.K. (1994). Normal depth Equations for irrigation canals. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE* 120(5), 942–948.
- Swamee, P.K. (1995). Optimal irrigation canal sections. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE* 121(6), 467–469.
- Swamee, P.K. (2001). Design of sewer line. *Journal of Environmental Engineering, ASCE* 127(9), 776–781.
- Swamee, P.K.and Kashyap, D. (2004). Design of minimum seepage-loss nonpolygonal canal section with drainage layer at shallow depth. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE* 130(2), 166–170.
- Swamee, P.K.and Rathie, P.N. (2007). Exact equations for pipe-flow problems. *Journal of Hydraulic Research*, 45(1), 131–134.
- Swamee, P.K.and Cahar, B.R. (2010). Normal depth in natural channel sections. *Journal of Hydraulic Engineering(ISH)*, 16(1), 132–147.

- Swamee, P.K. and Rathie, P.N. (2012). Normal depth equations for wide rectangular and triangular open channel sections involving Lamberts W function. *Journal of Hydraulic Engineering (ISH)*, 18(3), 252–257.
- Swamee, P.K. and Rathie, P.N. (2016). Normal depth equations for parabolic open sections. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. 2016;142 (6)., 06016003.
- Swamee, P.K., and Cahar, B.R. “Design of canals”. *Springer Transaction in Civil and Environmental Engineering*, Springer India; 2015.
- Swamee, P.K. and Swamee, N. (2008). Design of noncircular sewer sections. *Journal of Hydraulic Research*, 46(2), 277–281.
- Swamee, P.K. (2002) Critical slope equations for open channels. *Journal of Hydraulic Engineering* ;8(2), 44–49.
- Swamee, P.K., and Rathie (2004), P.N. “Exact solution for normal depth problem”. *Journal of Hydraulic Research* 2004;42(5), 543–9.
- Srivastava , R. (2006). Discussion of Exact solutions for normal depth problem by P.K Swamee, and P.N Rathie. *Journal of Hydraulic Research* 2006;133(5), 427–28.
- Srivastava , R. (2007). Discussion of Exact equations for critical depth in trapezoidal canal by P.K Swamee, and P.N Rathie. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, ASCE 2007; 44(3), pp. 509.
- Vanoni, V.A. (1941). Velocity distribution in open channels. *Civil Engineering*, vol. 11, no. 6, pp. 356-357.
- Vatankhah, A. and Kouchakzadeh, S. (2008). Discussion of “Turbulent flow friction factor calculation using a mathematically exact alternative to the Colebrook- White equation” by Jagadeesh.R. Sonnad, and Chetan.T. Goudar. *Journal of Hydraulic Engineering (ASCE)*; 134 (8)1187.
- Vatankhah, A. and Kouchakzadeh, S. (2009). Discussion of Exact ‘equations for pipe flow problems’ by P.K Swamee, and P.N Rathie. *Journal of Hydraulic Research*;47(4), 537-8.
- Vatankhah, A.R. and Bijankhn, M. (2010). Choke-free flow in circular and ovoidal channels. *Proceeding of the ICE-Water Management*; 136,207-215.
- Vatankhah, A.R. (2013). Explicit solutions for critical and normal depths in trapezoidal and parabolic open channels. *Ain Shams Engineering Journal* 2013;4,17-23.
- Vatankhah, A. (2018). Discussion of “Explicit solution for the specific flow depths in partially filled pipes” by Elhakeem, M., and Sattar, A. *Journal of Pipeline Systems and Practice*, ASCE 9(4), 07018003-1–2.
- Vatankhah, A. (2018). Discussion of “Normal depth equations for parabolic open sections. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*” by Swamee, P.K. and Rathie, P.N. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, ASCE 144(4), 07018002-1.

- Vatankhah, A. (2018). Approximate analytical solution for the Colebrook equation.. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE* 144(5), 06018007.
- V. V. Vedernikov. (1945). Conditions at the front of a translation wave distributing a steady motion of a real fluid. *Compte Rendus (Doklady) de l'académie des sciences de l'U.R.S.S.*, vol. 48, no. 04, pp. 239-242.
- Volkart, P. (1978). Hydraulic design of partially filled steep sewers. *Gas-Wasser-Abwasser* 58(11) : 658-667 [in German].
- Whittaker, E.T. and Watson, G.N. (1915). A course of modern analysis, 2th Ed. *Cambridge university press*, Cambridge, UK,.
- Yen, B.C. (1991). “Hydraulic resistance in open channels” in Channel Flow Resistance: Centennial of Manning’s Formula, B.C. Yen ,ed., Water Resource Publications, Highlands Ranch, Colo., 1-135.
- Zanke, U.C.E. (2013). *Hydraulik für den Wasserbau. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg* [in German]
- Zarei, M., and Bijankhan, M. (2018). Discussion of “Normal depth equations for parabolic open sections. Journal of Irrigation and Drainage Engineering” by Swamee, P.K. and Rathie, P.N. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, ASCE* 144(4), 07018003–3.
- Zhang, X.Y., and Wu, L. (2014). Direct solutions for normal depths in curved irrigation canals. *Flow Measurement and Instrumentation*;36, 9–13.
- Zhao, Y.F. Song, SB and Li, Y. (2008). An approximate formula for calculating the critical depth at circular cross section. *Advance in Science and Technology*, 28(2), 62–64[in Chinese].