

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département de Génie civil et d'Hydraulique
Ref :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة المدنية والري
المرجع:.....

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de

Magister

Spécialité : **Hydraulique**

Option : **Hydraulique urbaine**

Thème

Contribution à l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal de forme rectangulaire

Présenté par : **LOUGHRAICHI Yazid**

Soutenu le : 29/01/ 2015 devant le jury composé de

ACHOUR	Bachir	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
DEBABECHE	Mahmoud	Professeur	Examineur	Université de Biskra
OUAMANE	Ahmed	Professeur	Examineur	Université de Biskra
BOUZIANE	Toufik	Professeur	Examineur	Université de Biskra

∞ Remerciements ∞

Avant tout, je remercie DIEU qui a illuminé mon chemin et qui m'a armé de courage pour achever mes études.

Et

«Quiconque ne remercie pas les gens, ne remercie pas Dieu»

*Je remercie fortement mon encadreur **Mr Bachir ACHOUR** de m'avoir orienté par ses conseils judicieux dans le but de mener à bien ce travail.*

*Je remercie le laboratoire de recherche en hydraulique souterraine et de surface (**LARHYSS**) pour nous facilité de choisir le thème de recherche.*

Je tiens à remercier aussi :

- ✚ Les membres de jury pour avoir accepté d'évaluer mon travail.*
- ✚ Le corps enseignant et les étudiants de l'université de Biskra.*
- ✚ Tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*

LOUGHRAICHI.Yazid

∞ *Dédicace* ∞

Je dédie ce modeste travail en signe de reconnaissance et de respect à :

- ✚ mes parents*
- ✚ à toute ma famille*
- ✚ Mes amis*
- ✚ Les gérants de société « MATHE » et tout mes collègues de Travail*

En fin qu'ils trouvent ici mes sincères excuses, tous ceux dont leurs noms ne figurent guère.

LOUGHRAICHI.Yazid

ملخص

يركز عملنا على دراسة الجريان المنتظم في قناة على شكل مربع . واستندت الدراسة إلى علاقات شيزي وماننغ. اعتمدنا في دراستنا على حالتين الأولى يكون فيها معامل المقاومة ثابت والأخرى متغير. بالاعتماد على العلاقة العامة للتدفق. قمنا باستنتاج معامل مقاومة التدفق شيزي و معامل الخشونة ماننغ. التمثيل البياني لكل من المعاملين اظهر أن كلاهما يمر عبر قيمة حدية قصوى. في حالة عدم معرفة عرض القناة. طريقة النموذج الخشن تسمح بحساب هذين المعاملين عن طريق علاقات صريحة قابلة للتطبيق من أجل كل مجال الجريان المضطرب. كما قمنا بدراسة خاصة عن الجريان الحرج تسمح بطرح علاقة ممتازة حسابية تقريبية للعمق الحرج في القناة.

Résumé:

Notre travail s'est intéressé à l'écoulement uniforme dans un canal de forme rectangulaire. L'étude s'est basée sur les relations de *Chézy* et de *Manning*. L'analyse de l'écoulement a été menée d'une part à coefficient de résistance constant et à coefficient de résistance variable. En se basant sur la relation générale du débit volume, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* et le coefficient de rugosité de *Manning* ont été exprimés. Leur représentation graphique a montré qu'ils passent tous deux par un maximum. En absence de la largeur du canal, la méthode du modèle rugueux a permis de calculer ces coefficients par des relations explicites applicables dans tout le domaine de l'écoulement turbulent.

Abstract:

Our work takes an interest in uniform flow in an channel shaped rectangular. The study is based on *Chezy's* and *Manning's* relationship. The flow is analyzed firstly under a constant resistance coefficient and secondly with a variable resistance coefficient. Considering the consistent uniform flow relationship, *Chezy's* and *Manning's* coefficients are expressed and their graphical representation shows a maximum. Despite the fact that the wide of the canal is unknown, the rough model method allows the determination of these coefficients from explicit relations applied in the fully turbulent flow domain.

SOMMAIRE

	PAGE
Introduction générale	1
I. ECOULEMENT UNIFORME	4
I.1. Introduction	4
I.2. Formule de <i>Chézy</i>	8
I.2.1. Détermination du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> par la formule de <i>Ganguillet – Kutter</i>	9
I.2.2. Détermination du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> par la formule de <i>Bazin</i>	10
I.2.3. Détermination du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> par la formule de <i>Powell</i>	10
I.3. Formule de <i>Manning-Strickler</i>	11
I.4. Formule de <i>Darcy – Weisbach</i> et évaluation du coefficient de frottement	14
I.5. Équations théoriques de l'écoulement uniforme	16
I.5.1. Distribution de la vitesse dans un écoulement uniforme	16
I.5.2. Équation de <i>Keulegan</i>	17
I.6. Interprétation théorique du coefficient de rugosité de <i>Manning</i>	20
I.7. Méthode de détermination du coefficient de <i>Manning</i>	21
I.8. Calcul de l'écoulement uniforme	22
I.8.1. Conductivité	22
I.8.2. Facteur de section	23
I.8.3. Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite circulaire	27
I.9. Conclusion	29
II. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL RECTANGULAIRE	31
II.1. Introduction	31
II.2. Dimensionnement par la méthode du modèle rugueux	32
II.2.1. Caractéristiques géométriques et hydrauliques	32
II.2.2. Caractéristiques du modèle rugueux de référence	33
II.2.3. Relation de <i>Darcy-Weisbach</i> appliquée au modèle rugueux	35
II.2.4. Facteur de correction des dimensions linéaires	36
II.2.5. Dimensionnement du canal par la relation de <i>Darcy-Weisbach</i> pour un rapport d'aspect imposé	40
Exemple d'application 2.1.	41
II.2.6. Dimensionnement du canal par la relation de <i>Darcy-Weisbach</i> pour une profondeur normale imposée	43
Exemple d'application 2.2.	48
II.2.7. Dimensionnement du canal par la relation de <i>Chézy</i> pour une profondeur normale imposée	50
Exemple d'application 2.3.	55
II.2.8. Dimensionnement du canal par la relation de <i>Chézy</i> pour un rapport d'aspect imposé	59
II.3. Détermination de la profondeur normale	60
II.3.1. Calcul de la profondeur normale par la relation de <i>Darcy-Weisbach</i>	60
Exemple d'application 2.4.	64

II.3.2.	Calcul de la profondeur normale par la relation de <i>Chézy</i>	66
	Exemple d'application 2.5.	70
II.3.3.	Calcul de la profondeur normale par la relation de <i>Manning</i>	72
II.3.3.1.	Résolution par le théorème de <i>Lagrange</i>	73
II.3.3.2.	Résolution par la méthode du point fixe	76
II.3.3.3.	Résolution par une équation approchée	76
II.3.3.4.	Résolution par la méthode du modèle rugueux	77
	Exemple d'application 2.6.	82
II.4.	Etude de l'écoulement a coefficient de résistance variable	84
II.4.1.	Expression du coefficient de <i>Chézy</i> dans un canal rectangulaire	84
II.4.2.	Variation du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i>	86
II.4.3.	Etapes de calcul du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i>	90
II.4.4.	Exemple de calcul du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i>	91
II.4.5.	Expression du coefficient adimensionnel de <i>Manning</i> dans un canal rectangulaire	94
II.4.6.	Variation du nombre adimensionnel <i>N</i> de <i>Manning</i>	95
II.5.	Calcul du coefficient <i>N</i> de <i>Manning</i> par la MMR	100
II.5.1.	Exemple de calcul du coefficient <i>N</i> de <i>Manning</i> par la MMR	104
II.6.	Conclusion	106
	Conclusion générale	107
	Références bibliographiques	112

INTRODUCTION GENERALE

En pratique, l'écoulement uniforme est quasiment impossible à obtenir car, d'un point de vue théorique, le canal doit avoir une longueur infinie. Pourtant, c'est sous le caractère d'uniformité de l'écoulement que les conduites et canaux sont dimensionnés.

L'écoulement uniforme est caractérisé par l'invariabilité de ses paramètres, tels que la profondeur, l'aire de la section mouillée ou le débit volume. Ajoutons à cela que la ligne de charge totale et la pente géométrique du canal sont parallèles.

L'étude de l'écoulement uniforme comprend, en règle générale, le calcul des dimensions du canal comme par exemple la largeur d'un canal de forme rectangulaire, ainsi que le calcul de la profondeur de l'écoulement dite profondeur normale. Ce sont les deux types de problèmes que l'ingénieur est appelé à résoudre.

L'écoulement uniforme peut être considéré comme tel dans des canaux naturels tels que les rivières, ou artificiels tels que les canaux conçus en béton. C'est ce type de canaux qui concernent la présente étude.

Les paramètres connus en pratique, lors de l'étude de l'écoulement uniforme, sont le débit volume Q écoulé par le canal, la pente géométrique i de celui-ci, la nature de la paroi interne du canal représentée par la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Lorsqu'il s'agit de dimensionner le canal, c'est à dire de déterminer ses dimensions linéaires, le rapport d'aspect ou la profondeur normale de l'écoulement est un paramètre imposé. Le rapport d'aspect est noté η et se définit comme étant le rapport de la profondeur normale y_n à la dimension linéaire du canal. Dans le cas du canal de forme rectangulaire qui intéresse notre étude, le rapport d'aspect est $\eta = y_n / b$, où b désigne la largeur du canal. Lorsqu'il s'agit de calculer la profondeur normale y_n de l'écoulement, alors aux données ci-dessus citées s'ajoute la dimension linéaire du canal.

L'écoulement uniforme est régi par des relations que l'on appelle « relations de l'écoulement uniforme ». Dans la pratique, les relations les plus usuelles sont la relation de *Darcy-Weisbach*, la relation de *Chézy* et enfin la relation de *Manning*.

Sous leur forme classique, les relations de l'écoulement uniforme sont difficiles à appliquer, voire même impossible à appliquer. Cela s'explique par le fait le coefficient de frottement f figurant dans la relation de *Darcy-Weisbach*, le coefficient de résistance à l'écoulement C de la relation de *Chézy* ou le coefficient n de la relation de *Manning* n'est pas une donnée du problème. Ces différents coefficients sont extrêmement difficile à évaluer, surtout lorsqu'il

s'agit de dimensionner le canal, c'est-à-dire lorsque la dimension linéaire du canal n'est pas connu.

Dans la bibliographie, nous pouvons relever que différentes formules ont été proposées pour exprimer ces coefficients de résistance à l'écoulement. Le coefficient de frottement f est, par exemple, modélisé par la formule de *Colebrook-White*. Le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est, par exemple, modélisé par la formule *Ganguillet-Kutter*. Le coefficient n de *Manning* n'est quant à lui modélisé par aucune relation connue. Les relations les plus significatives destinées à l'évaluation des coefficients de résistance à l'écoulement seront exposées et commentées au cours du chapitre consacré à l'état de connaissances sur l'écoulement uniforme.

Lorsque nous considérons la relation de *Colebrook-White* pour l'évaluation du coefficient de frottement, on s'aperçoit qu'il dépend du diamètre hydraulique de l'écoulement et du nombre de *Reynolds* caractérisant celui-ci. Or, ces deux paramètres ne peuvent être déterminés lorsque la dimension linéaire du canal n'est pas une donnée du problème. C'est le cas également des relations destinées à l'évaluation du coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*.

L'un des problèmes que nous traitons dans notre étude est bien la possibilité d'évaluer de manière explicite les coefficients de résistance à l'écoulement. Pour cela, une nouvelle méthode est introduite sous le nom de « méthode du modèle rugueux » que nous allons largement exposer dans le second chapitre de notre mémoire, lorsqu'il s'agira d'appliquer les relations usuelles de l'écoulement uniforme. La méthode du modèle rugueux offre la possibilité de lever toutes les difficultés rencontrées dans l'application de ces relations, notamment leur caractère implicite.

L'objectif principal de notre étude est donc de présenter des méthodes de calcul aussi bien qu'explicites que fiables, destinées à évaluer la largeur b d'un canal de forme rectangulaire et la profondeur normale y_n de l'écoulement.

Pour mener à bien notre étude, il a été nécessaire de subdiviser notre travail en deux principaux chapitres. Le premier chapitre est entièrement consacré à un état de connaissances sur l'écoulement uniforme, à travers lequel sont rappelées les relations usuelles de l'écoulement y compris celles qui modélisent les coefficients de résistance, les conditions hydrauliques de l'établissement de l'écoulement et les équations théoriques régissant l'écoulement. Le second chapitre par contre est dans sa totalité dédié à notre propre contribution à l'étude de l'écoulement uniforme. Les deux principaux problèmes rencontrés dans l'étude de l'écoulement uniforme sont examinés dans les détails. Les relations usuelles

de l'écoulement uniforme sont appliquées pour le dimensionnement et pour le calcul de la profondeur normale, avec une approche tout à fait nouvelle. Nous verrons que ce calcul devient quasi expéditif lorsque l'on fait appel à la méthode du modèle rugueux. Nous verrons également que, grâce à cette méthode, les coefficients de résistance à l'écoulement peuvent être évalués de manière fiable et surtout explicite. A chacune des applications des relations de l'écoulement uniforme, les étapes de calcul sont proposées et des applications sont présentées pour mieux illustrer ces étapes.

I. ECOULEMENT UNIFORME

I.1. Introduction

Un écoulement est considéré comme étant uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Ces caractéristiques sont la profondeur h ou y_n de l'écoulement appelée aussi profondeur normale, l'aire de la section mouillée A , la vitesse V de l'écoulement et le débit Q . La ligne de charge totale est à la fois parallèle à la ligne piézométrique et à la pente géométrique du canal.

D'un point de vue pratique, la constance de la vitesse V est généralement associée à la constance de la vitesse moyenne de l'écoulement; mais de façon plus rigoureuse, cela signifie que l'écoulement est caractérisé par une vitesse constante en tout point de son domaine. En d'autres termes, la distribution des vitesses dans chacune des sections transversales de l'écoulement est uniforme, correspondant à une couche limite pleinement développée.

Bien que la condition d'un écoulement uniforme, dans le sens stricte du terme, ne soit pratiquement jamais satisfaite, elle est cependant fréquemment admise lors du calcul des caractéristiques d'un écoulement en canaux et rivières. Cette approche, bien que simplifiée, donne des résultats assez satisfaisants dans bon nombre de cas pratiques.

L'écoulement uniforme peut être soit en régime laminaire soit en régime turbulent, mais il se produit sous de grandes vitesses. A vitesse élevée, l'écoulement uniforme est instable et il est le siège d'un fort entraînement d'air.

Dans les canaux ouverts, l'écoulement uniforme se développe lorsque les forces de résistance s'opposant à l'écoulement sont équilibrées par les forces de gravité. Les forces de résistances sont proportionnelles à V^2 .

Lorsqu'un écoulement entrant dans un canal s'effectue de façon lente, la vitesse et par conséquent la résistance à l'écoulement sont faibles. Les forces de gravité sont alors prédominantes et l'écoulement subit alors une accélération depuis l'amont. La vitesse ainsi que la résistance augmentent au fur et à mesure que l'on se déplace vers l'aval, jusqu'à ce que les forces de gravité soient équilibrées. A cet instant, l'écoulement uniforme apparaît. La zone sur laquelle s'étend l'écoulement accéléré, et au-delà de laquelle l'écoulement uniforme apparaît, est dite zone de transition. Si la longueur du canal est inférieure à la longueur de la zone transitoire, l'écoulement uniforme ne peut être atteint.

Plus à l'aval de l'écoulement uniforme, les forces de gravité deviennent de plus en plus prédominantes en raison de l'accélération que subit l'écoulement. L'écoulement uniforme disparaît alors

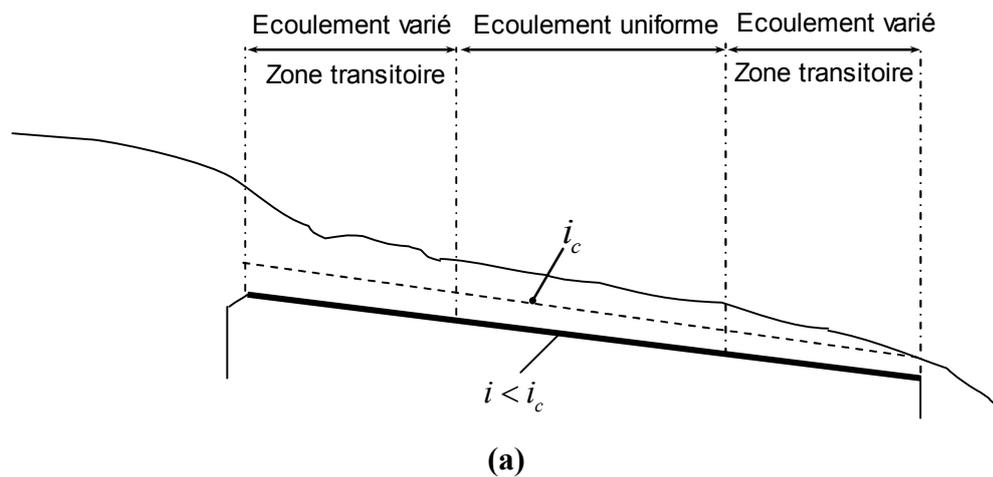
en laissant place à un écoulement varié. La figure 1.1 montre l'état d'un écoulement à l'entrée et à l'intérieur d'un canal rectangulaire de grande longueur et de différentes pentes géométriques i . La pente i est comparée à la pente critique i_c .

Lorsque la pente i est suave (figure 1.1.a), la zone transitoire se présente sous l'aspect d'ondulations. L'écoulement est uniforme au milieu du canal mais varie aux extrémités de celui-ci. D'un point de vue théorique, l'écoulement varié tend vers l'écoulement uniforme de manière graduelle et asymptotique. On considère généralement dans la pratique que la profondeur de l'écoulement reste constante si la variation qu'elle subit n'excède pas 1% de la valeur moyenne de la profondeur normale.

Lorsque la pente i correspond à la pente critique i_c (figure 1.1.b), la surface libre de l'écoulement critique est instable. Des ondulations peuvent se produire au milieu du canal, mais la profondeur oscille autour d'une valeur moyenne et l'écoulement est alors considéré comme étant uniforme.

Lorsque la pente i est supercritique ou prononcée (figure 1.1.c), la surface libre dans la zone transitoire chute de manière graduelle d'un niveau subcritique ou suave à un niveau supercritique ou prononcé. Au-delà de la zone transitoire, l'écoulement devient uniforme.

La longueur sur laquelle s'étend la zone transitoire dépend essentiellement du débit volume Q entrant dans le canal ainsi que des caractéristiques de celui-ci, telles que la rugosité absolue, la pente et la géométrie d'entrée. D'un point de vue hydrodynamique, la longueur de la zone transitoire ne doit pas être inférieure à la longueur pour laquelle, sous des conditions données de l'écoulement, la couche limite est pleinement développée.



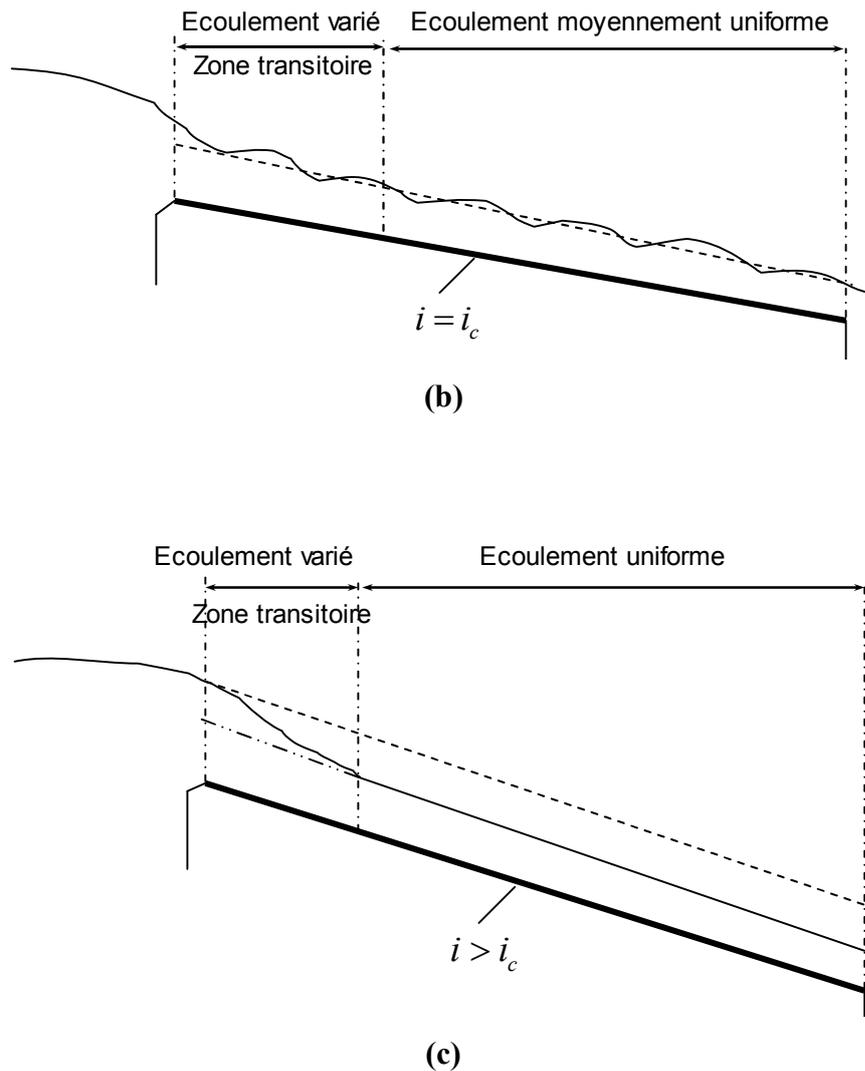


Figure 1.1 : Établissement de l'écoulement uniforme dans un canal de grande longueur.
 (- - -): profondeur critique. (—): profondeur normale de l'écoulement uniforme.

Le calcul de la profondeur d'un écoulement uniforme, appelée profondeur normale de l'écoulement est très important. Le classement des profils géométriques par exemple est tributaire de la valeur de la profondeur normale. Comme le montre la figure 1.1.c, la profondeur normale est inférieure à la profondeur critique et c'est cette inégalité qui permet de conclure sur le caractère prononcé ou supercritique de la pente géométrique du canal.

Le calcul de la profondeur normale dans les canaux se base sur les relations dites " relations de l'écoulement normal ". Celles-ci expriment, de manière approximative, la vitesse moyenne V de l'écoulement sous l'hypothèse d'un régime turbulent. Les formules pratiques de l'écoulement uniforme s'expriment généralement sous la forme $V = C R_h^\beta J^\gamma$ où R_h est le rayon hydraulique et J est la pente de la ligne de charge. Comme nous l'avons déjà indiqué, J correspond également à la pente i . Le paramètre C traduit la résistance de l'écoulement et dépend de V , de R_h , de la rugosité absolue ε caractérisant les

parois du canal, de la viscosité du liquide et de beaucoup d'autres facteurs.

La distinction doit être faite entre l'écoulement uniforme se produisant d'une part dans les canaux artificiels et dans les canaux naturels d'autre part. Dans la pratique, l'écoulement dans les canaux naturels est considéré comme étant uniforme à condition que la profondeur de l'écoulement ne subisse pas de variation brusque pouvant être causée par les irrégularités des parois du canal. L'application des relations de l'écoulement uniforme aux canaux naturels mène à des résultats plutôt approximatifs en raison du fait que l'écoulement dépend en réalité d'un plus grand nombre de facteurs que ceux qui influencent l'écoulement dans les canaux artificiels. Selon *Schnackenberg* (1951), une bonne relation de l'écoulement uniforme dans un canal naturel sans transport de sédiments est celle qui devrait tenir compte d'au moins 10 paramètres qui sont A , V , V_{ms} qui correspond à la vitesse maximale à la surface, le périmètre mouillé P , R_h , la profondeur maximale y de l'écoulement, la pente S_w de la surface libre, le coefficient n qui caractérise la rugosité du canal, la viscosité dynamique μ du liquide et la température T .

Lorsque l'on se réfère à la bibliographie (*Houk*, 1918; *Forchheimer*, 1930 ; *Lindquist*, 1933; *Vladislavjevitch*, 1951), on peut s'apercevoir que de très nombreuses relations ont été proposées au calcul de l'écoulement uniforme. Cependant, aucune d'entre elles ne répond au qualificatif de " bonne relation " selon la conception de *Schnackenberg*.

Différentes approches ont été également présentées au calcul de la vitesse de l'écoulement dans les canaux naturels, telle que celle de *Toebes* (1955). Dans cette approche, une analyse par corrélation multiple est appliquée aux différents facteurs influençant la vitesse de l'écoulement dans un canal naturel. Ces facteurs, selon *Toebes* (1955) sont A , V_{ms} , S_w , n et T . Par cette approche, il est possible d'estimer l'influence de chacun des dits facteurs sur la vitesse V et la valeur de celle-ci est égale à la somme algébrique des diverses contributions de chacun des paramètres en question. Cependant, la méthode de *Toebes* (1955) ne peut être appliquée que dans la région géographique pour laquelle a été faite l'analyse de l'influence des facteurs ci-dessus cités, ce qui malheureusement exclut toute généralisation de cette méthode.

A travers de nombreux exemples pratiques concernant l'écoulement uniforme, on peut s'apercevoir que les formules dites de *Chézy* et de *Manning* (ou de *Manning – Strickler*) sont les plus largement utilisées. La forme de leur expression est telle que nous l'avons déjà indiqué $V = C R_h^\beta J^\gamma$ où les exposants β et γ ont des valeurs bien déterminées. En raison de leur utilisation fiable et très répandue, ces relations seront développées aussi clairement que possible, en tentant d'éclaircir leur limite et leur domaine d'applicabilité. D'autres relations seront également exposées, telle que la formule de *Darcy – Weisbach* dont l'application est universelle. Cette relation joue un rôle important dans le calcul des écoulements évoluant dans les conduites, et sa généralisation aux canaux ouverts connaît un grand succès.

Notre travail se présente en deux grandes parties. La première partie est consacrée à un état de connaissances sur l'écoulement uniforme. Elle se propose de passer en revue les principales formules de l'écoulement uniforme, en mettant l'accent sur les relations de *Chézy*, *Manning – Strickler* et de *Darcy – Weisbach*.

Dans la deuxième partie de notre étude, nous avons tenté d'exposer notre contribution au calcul de l'écoulement uniforme. Notre recherche a pour principal objectif de proposer des relations approchées fiables au calcul de la profondeur normale ainsi que celles destinées au dimensionnement de la conduite considérée. Ces relations sont applicables dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, comprenant l'écoulement lisse, de transition et turbulent rugueux.

I.2. Formule de *Chézy*

La formule de *Chézy* est probablement la première formule destinée au calcul de l'écoulement uniforme. La vitesse moyenne V s'exprime par :

$$V = C \sqrt{R_h J} \quad (1.1)$$

Rappelons que R_h est le rayon hydraulique, J est la pente de la ligne de charge totale ou gradient de perte de charge (J étant également la pente i du canal) et C est le facteur caractérisant la résistance de l'écoulement. Le facteur C est habituellement appelé coefficient de *Chézy*.

Chézy stipule que la force de résistance s'opposant à l'écoulement et par unité de surface de canal est proportionnelle au carré de la vitesse moyenne V . Cette force peut donc s'écrire : $F_r (1m^2) = K V^2$, où K est le facteur de proportionnalité. Comme le montre la figure 1.2, la surface du canal en contact avec le liquide est égale au produit du périmètre mouillé P par la longueur L du canal. La force totale F_r mise en jeu s'écrit ainsi :

$$F_r = K V^2 P L \quad (1.2)$$

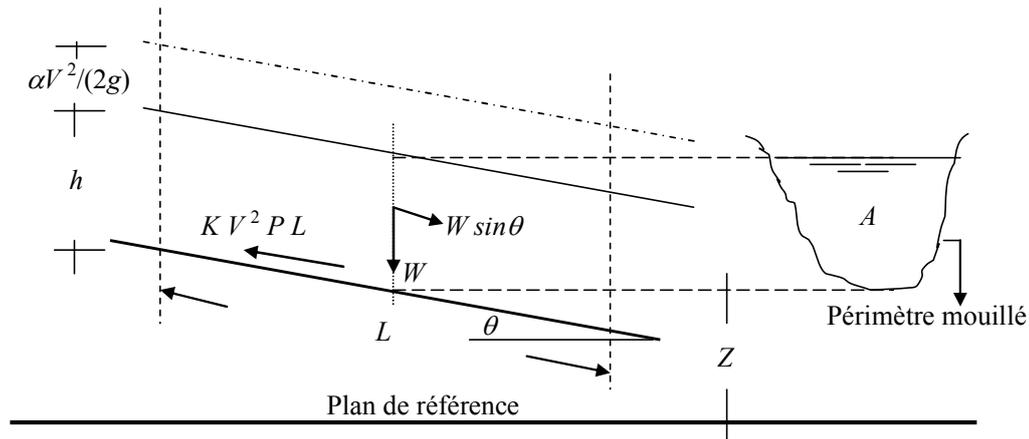


Figure 1.2: Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de la formule de *Chézy*.

Nous avons déjà indiqué que l'écoulement uniforme s'établit lorsque les forces de gravité sont équilibrées par les forces de résistance F_r . La quantité $(W \sin \theta)$, représentée sur la figure 1.2, correspond à la composante tangentielle du poids propre W du liquide. C'est cette composante qui intervient dans l'écoulement et qui doit être équilibrée par la force F_r . Le poids propre W peut s'écrire $W = \rho g A L$ où ρ est la masse volumique du liquide, g est l'accélération de la pesanteur. Le produit $(A L)$ désigne le volume de liquide sur toute la longueur L considérée. Ainsi, nous pouvons écrire $\rho g A L \sin \theta = K V^2 P L$, soit : $V^2 = (\rho g / K) (A / P) \sin \theta$. La quantité A / P représente par définition le rayon hydraulique R_h . En désignant par $C^2 = (\rho g / K)$ et par $J = \sin \theta$, il vient que :

$$V = C R_h^{1/2} J^{1/2} \quad (1.3)$$

Comme l'exige la relation (1.3), le coefficient C de *Chézy* doit avoir pour unité $[L^{1/2} T^{-1}]$. Plusieurs relations ont été proposées au calcul du coefficient C et nous verrons dans ce qui suit les plus importantes d'entre elles.

I.2.1. Détermination du coefficient C de *Chézy* par la formule de *Ganguillet – Kutter*.

La formule de *Ganguillet – Kutter* (1869) exprime le coefficient C de *Chézy* en fonction de la pente J ou i du canal, du rayon hydraulique R_h et du coefficient de rugosité n . Elle a été élaborée à partir de mesures expérimentales effectuées sur divers types de canaux et rivières naturelles :

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{J} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{J}\right) \frac{n}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.4)$$

Le coefficient n de la relation (1.4) est connu sous le nom de " coefficient n de *Kutter* ". Bien que la

relation (1.4) apparaisse quelque peu encombrante, elle donne néanmoins des résultats assez satisfaisants. De nombreux auteurs proposent d'éliminer le terme contenant la pente J , afin de simplifier la forme de l'équation. On peut en effet s'apercevoir que le terme $0,00155/J$ n'a pas d'effet significatif sur la valeur du coefficient C , pour une même valeur du coefficient de rugosité n et du rayon hydraulique R_h . A titre indicatif, pour $n = 0,01$ et $R_h = 1,20$ m, C ne subit pratiquement aucun changement dans une large gamme de valeurs de J : $102 \leq C \leq 103$ lorsque $0,00005 \leq J \leq 0,01$.

I.2.2. Détermination du coefficient C de Chézy par la formule de Bazin

Bazin (1897) considère que la valeur du coefficient C de Chézy dépend du rayon hydraulique R_h mais ne dépend pas de la pente J du canal. Le coefficient C peut alors être déterminé par la relation :

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.5)$$

m est le coefficient de rugosité dépendant de la nature du matériau constituant le canal considéré et dont la valeur est tabulée. Les valeurs de m sont sans commune mesure avec celles qui correspondent au coefficient de rugosité n figurant dans la relation (1.4) de Ganguillet – Kutter et ceci pour le même matériau. A titre indicatif, pour le cas d'un canal fabriqué en ciment lisse, les tables de valeurs indiquent que $n = 0,01$ et $m = 0,11$.

La formule de Bazin a été développée à l'origine pour de petits canaux, si bien que sa généralisation ne donne pas d'aussi bons résultats que ceux obtenus par la formule de Ganguillet – Kutter.

I.2.3. Détermination du coefficient C de Chézy par la formule de Powell

Powell (1950) propose une relation de type logarithmique au calcul du coefficient C de Chézy, mais elle se présente sous une forme implicite :

$$C = -23,2 \log \left(\frac{1,811C}{R} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.6)$$

" log " désigne le logarithme décimal, R est le nombre de Reynolds, ε est la rugosité absolue des parois du canal. A l'origine, la formule de Powell a été présentée en unité anglaise et les constantes figurant dans la relation (1.6) sont alors différentes et beaucoup plus simples :

$$C = -42 \log \left(\frac{C}{4R} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.7)$$

Pour le cas des canaux rugueux, l'écoulement est en général turbulent correspondant aux valeurs élevées du nombre de Reynolds. Le terme $C/(4R) \rightarrow 0$ et la relation (1.7) devient :

$$C = -42 \log \left(\frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.8)$$

Par contre, pour les canaux lisses, l'effet de la rugosité est tellement faible que la relation (1.7) peut s'écrire :

$$C = -42 \log \left(\frac{C}{4R} \right) \quad (1.9)$$

I.3. Formule de *Manning-Strickler*

La vitesse moyenne V de l'écoulement uniforme peut être également évaluée par la formule dite de *Manning* (1891). La vitesse V est liée au coefficient C de résistance de l'écoulement, au rayon hydraulique R_h et à la pente J du canal. A l'origine, la formule de *Manning – Strickler* se présentait sous une forme compliquée, puis elle a été simplifiée pour s'écrire, avec $C = k$:

$$V = k R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.10)$$

La relation (1.10) a été ensuite modifiée par plusieurs auteurs pour s'écrire, en unité métrique :

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.11)$$

(n selon *Manning* et $1/n = k$ selon *Strickler*).

La conversion en unité anglaise de la relation (1.10) donne :

$$V = \frac{1,486}{n} R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (1.12)$$

Dans cette conversion, la valeur numérique du coefficient de rugosité n reste inchangée et la même valeur est utilisée dans les deux systèmes d'unité. Comme l'exige la forme de la relation (1.10), le coefficient n doit avoir pour dimension $[TL^{-1/3}]$. Cependant, il paraît physiquement injustifié que la dimension de temps

T puisse intervenir dans l'unité d'une rugosité puisqu'elle celle-ci ne devrait dépendre que de la nature du matériau constituant les parois du canal considéré. Pour cette raison, certains auteurs énoncent que le numérateur de la relation (1.10) devrait contenir le terme \sqrt{g} , où g est l'accélération de la pesanteur, ce qui conduirait à donner à n la dimension $[L^{1/6}]$. En outre, il a été démontré que le coefficient de rugosité n pouvait s'écrire :

$$n = [\phi(R_h / \varepsilon)] \varepsilon^{1/6} \quad (1.13)$$

où ε est la rugosité absolue. Si la fonction $\phi(R_h / \varepsilon)$ doit être considérée comme étant adimensionnelle, le coefficient de rugosité n doit alors avoir la même dimension que $\varepsilon^{1/6}$, c'est à dire $[L^{1/6}]$. Hager (1989) a pu montrer que la rugosité absolue ε et le coefficient k de Strickler sont liés par la relation :

$$\frac{k \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{g}} = 1 \quad (1.14)$$

D'autre part, il est également possible d'admettre que le terme $1,486/n$ figurant dans la relation (1.12) puisse contenir de manière implicite la dimension $[L^{1/3} T^{-1}]$, ou que $\phi(R_h / \varepsilon)$ contienne un facteur ayant une dimension. Ceci rendrait alors le coefficient n adimensionnel. Sous cette dernière condition, la conversion en unité anglaise conduit à la constante $(3,2808)^{1/3} = 1,486$, puisque $1\text{m} = 3,2808\text{ ft}$.

Si l'on considère que la dimension de n est $[L^{1/6}]$, sa valeur numérique en unité anglaise doit être différente de sa valeur en unité métrique, à moins de tenir compte d'un facteur de correction ou de compensation.

Si n est la valeur du coefficient de rugosité en unité métrique et n' en unité anglaise, on peut écrire alors $n' = (3,2808)^{1/6} n = 1,219 n$. Lorsque la formule de Manning subit la conversion de l'unité métrique vers l'unité anglaise, la constante figurant dans l'expression qui en résulte est égale à $(3,2808)^{1/3 + 1/6} = \sqrt{3,2808} = 1,811$ et la dimension de n est alors $[L^{1/6}]$.

En raison de sa forme simplifiée et aux résultats satisfaisants auxquels elle aboutit, la formule de Manning – Strickler est celle qui est largement utilisée pour les écoulements uniformes dans les canaux ouverts.

De nombreuses applications ont montré que les valeurs de n de Manning et n de Kutter sont pratiquement identiques lorsque la pente du canal est supérieure ou égale à 0,0001 pour un rayon hydraulique variant approximativement entre 0,30 m et 9 m.

En comparant la formule de Manning – Strickler, exprimée en unité métrique, à celle de Chézy,

on peut écrire $C = (1/n)R_h^{1/6}$. Ainsi, la formule de *Manning – Strickler* est souvent considérée comme une variante de la formule de *Chézy*.

De nombreuses études dont celle de *Bazin*, et qui concernent les canaux artificiels, ont montré que l'exposant de R_h ne serait pas égal à $2/3$ comme le suggère *Manning*, mais sa valeur moyenne varie entre 0,6499 et 0,8395 suivant la forme du canal et la rugosité de celui-ci. Des études telle que () suggère de prendre la valeur $3/4$ pour l'exposant de R_h , tandis que *Blench* (1939) considère le coefficient C comme une variable qui dépend non seulement de n mais aussi de R_h et dont l'exposant dépend à son tour de n et de R_h ; c'est la formule dite de *Pavlovski* (1940) qui s'exprime, en unité métrique, par :

$$C = (1/n) R_h^y \quad (1.15)$$

où $y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - \frac{3}{4}\sqrt{R_h}(\sqrt{n} - 0,10)$.

La relation (1.15) est applicable pour un rayon hydraulique variant entre 0,10 m et 3 m et pour n compris entre 0,011 et 0,04. Des relations approchées au calcul de l'exposant y ont été également proposées : $y = 1,5\sqrt{n}$ pour $R_h < 1$ m et $y = 1,3\sqrt{n}$ pour $R_h > 1$ m.

L'application de la formule de *Manning – Strickler*, comme celle d'ailleurs de *Ganguillet – Kutter* est tributaire de la valeur du coefficient n . Il n'existe aucune méthode exacte qui permet d'évaluer n . Évaluer n revient à estimer la résistance de l'écoulement dans un canal donné, ce qui nécessite beaucoup d'expérience et de pratique. En se référant à la bibliographie, plusieurs auteurs concluent que pour estimer n les étapes suivantes sont nécessaires :

1. Recenser puis apprécier l'influence des paramètres pouvant affecter le coefficient n , tels que la présence de végétation dans le canal, la dimension moyenne des grains du matériaux constituant les parois du canal, l'irrégularité du canal due à la présence de courbures ou de variation même réduite de la section transversale de l'écoulement, etc...
2. Consulter les tables de valeurs de n déjà évalué pour des canaux de différents types.
3. Examiner et s'informer de l'état physique caractérisant des canaux existants et dont la valeur de n a déjà été déterminée.
4. Déterminer la valeur de n par une approche analytique basée sur la répartition théorique de la vitesse dans les sections transversales de l'écoulement.

1.4. Formule de *Darcy – Weisbach* et évaluation du coefficient de frottement

La formule de *Darcy – Weisbach* exprime la proportionnalité entre le gradient de la perte de charge J , la vitesse moyenne V de l'écoulement et le diamètre hydraulique $D_h = 4A/P = 4R_h$. Le facteur de proportionnalité étant le coefficient de frottement f . Le gradient J est inversement proportionnel à D_h et proportionnel au carré de la vitesse V :

$$J = \frac{f V^2}{D_h 2g} \quad (1.16)$$

La formule (1.16) est aussi bien valable pour les canaux ouverts que pour les conduites fermées.

Le coefficient de frottement f peut être évalué par diverses relations, selon la nature du régime d'écoulement.

La formule de *Colebrook – White* permet d'évaluer le coefficient de frottement f lorsque l'écoulement est en régimes de transition, turbulent rugueux et lisse :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) , R > 2300 \quad (1.17)$$

Dans le cas où le régime d'écoulement est de transition, le coefficient de frottement dépend à la fois de la rugosité relative ε/D_h et du nombre de *Reynolds* R . La représentation graphique de la relation (1.17) dans un système d'axes de coordonnées à divisions logarithmiques montre que, pour la même valeur de ε/D_h , le coefficient de frottement f diminue lorsque R augmente. Pour des valeurs données de ε/D_h et de R , l'évaluation du coefficient de frottement f , par application de la relation (1.17), nécessite un procédé itératif. Une excellente relation approchée de (1.17) a été proposée par *Achour* (*Achour, 2007*):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \quad (1.18)$$

A partir d'une valeur $R = R_{lim}$ dépendant de la valeur de ε/D_h , le coefficient de frottement demeure pratiquement inchangé avec l'augmentation de R . Cette particularité caractérise la nature de l'écoulement dans la zone de pleine turbulence ou domaine rugueux. Dans ce domaine, le coefficient de frottement f peut être évalué par la relation explicite de *Nikuradse* :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / D_h}{3,7} \right) \quad (1.19)$$

La relation (1.19) peut être obtenue à partir des relations (1.17) ou (1.18), en écrivant que $R \rightarrow \infty$.

Dans le domaine pratiquement lisse correspondant à $\varepsilon / D_h \rightarrow 0$, la relation (1.17) mène à écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right) \quad (1.20)$$

et l'évaluation de f nécessite également un procédé itératif. Dans le même domaine d'écoulement, ce procédé itératif peut être évité par l'application de la relation (1.18) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \quad (1.21)$$

Dans la large gamme $2,35 \cdot 10^3 \leq R \leq 10^9$, l'application de la relation (1.21) occasionne un écart relatif inférieur à 0,7% par rapport à (1.20).

La formule de *Swamee* et *Jain* (1976) permet également d'évaluer de manière explicite le coefficient f dans le domaine pratiquement lisse :

$$f = \left[2 \log \left(\frac{5,74}{R^{0,9}} \right) \right]^{-2} \quad (1.22)$$

Mais, dans la même gamme de valeurs ci-dessus indiquée de R , l'application de (1.22) occasionne un écart relatif atteignant 2,8% par rapport à (1.20). Dans une gamme plus restreinte de R telle que $5 \cdot 10^3 < R < 10^8$, cet écart se réduit mais atteint tout de même 1,5%.

En comparant les relations (1.1) et (1.16), on peut montrer que le coefficient C de *Chézy* est étroitement lié au coefficient de frottement f :

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (1.23)$$

1.5. Équations théoriques de l'écoulement uniforme

1.5.1. Distribution de la vitesse dans un écoulement uniforme

La distribution de la vitesse dans un écoulement turbulent demeure quasi uniforme lorsque la couche limite est pleinement développée, et suit approximativement une loi logarithmique. La contrainte de cisaillement ou tangentielle en n'importe quel point de l'écoulement turbulent se produisant au-dessus d'une paroi solide est donnée par la relation de *Prandtl* (1926) :

$$\tau = \rho l^2 (dv/dy)^2 \quad (1.24)$$

ρ est la masse volumique du liquide en écoulement, l est une longueur caractéristique dite longueur de mélange, dv/dy est le gradient de vitesse à la hauteur y de la paroi solide et normale à celle-ci. La longueur de mélange peut être interprétée comme étant la longueur au-delà de laquelle la particule liquide voit sa quantité de mouvement diminuer.

Dans la région proche de la paroi solide, *Prandtl* utilise deux approches:

1. La longueur de mélange est proportionnelle à y , soit $l = Ky$ où K est le facteur de proportionnalité entre l et y et dont la valeur a été estimée à 0,40 environ.
2. La contrainte tangentielle est constante.

Puisque la contrainte tangentielle à la surface est égale à la force tractrice unitaire τ_0 , la constance de la contrainte tangentielle implique que $\tau = \tau_0$. La relation (1.16) devient :

$$dv = \frac{1}{K} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{dy}{y} \quad (1.25)$$

L'intégration de la relation (1.25) mène à :

$$v = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \operatorname{Ln} \frac{y}{y_0} \quad (1.26)$$

" Ln " désigne le logarithme népérien et y_0 représente la constante d'intégration. La force tractrice τ_0 s'exprime par la relation $\tau_0 = (\varpi R_h J)$ où $\varpi = \rho g$ est le poids spécifique du liquide et J est la pente du canal. On peut alors écrire que $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{g R_h J} = v_f$, où v_f a la dimension d'une vitesse et elle est connue

sous le nom de vitesse de frottement. La relation (1.26) devient alors :

$$v = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \frac{y}{y_0} \quad (1.27)$$

La relation (1.27) indique que la vitesse dans un écoulement turbulent est une fonction logarithmique de la distance y . Elle est connue sous le nom de loi universelle de *Prandtl – Von – Karman* de la distribution des vitesses. Cette loi a été vérifiée par plusieurs expériences et les résultats ont montré une remarquable similitude entre la distribution des vitesses observée expérimentalement et celle issue de la théorie. Lorsque la surface solide est lisse, la constante y_0 ne dépend que de la vitesse de frottement v_f et de la viscosité cinématique ν du liquide :

$$y_0 = m_o \frac{\nu}{v_f} \quad (1.28)$$

m_o est une constante égale à 1/9 lorsque la surface solide est lisse. Cette constante a été déduite des essais de *Nikuradse* concernant les conduites lisses. La combinaison des relations (1.27) et (1.28) donne ainsi, pour les surfaces lisses, la répartition de la vitesse dans un écoulement turbulent :

$$v = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \frac{9y v_f}{\nu} \quad (1.29)$$

Lorsque la surface est rugueuse, la constante y_0 dépend de la rugosité absolue ε :

$$y_0 \approx m_o \varepsilon \quad (1.30)$$

La constante m_o est approximativement égale à 1/30.

La relation (1.27) devient alors :

$$v = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \frac{30y}{\varepsilon} \quad (1.31)$$

1.5.2. Équation de *Keulegan*

En utilisant la loi universelle de *Prandtl – Von – Karman* de la distribution des vitesses, *Keulegan* (1938) aboutit à des équations donnant la vitesse moyenne d'un écoulement turbulent dans les canaux ouverts par une approche théorique simple. En se basant sur l'équation de continuité, le débit volume Q passant par une section quelconque de l'écoulement peut s'écrire :

$$Q = VA = \int_{\delta_0=0}^{y=h} v B dy \quad (1.32)$$

V est la vitesse moyenne de l'écoulement, h est la profondeur, A est l'aire de la section mouillée, B est la longueur de la courbe d'égale vitesse (figure 1.3) et y est la profondeur verticale comptée à partir de la surface jusqu'à la courbe d'égale vitesse. la sous-couche laminaire d'épaisseur δ_0 est considérée comme étant très mince ($\delta_0 = 0$).

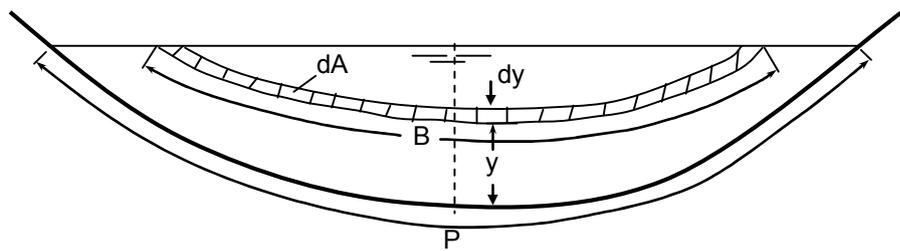


Figure 1.3 : Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de l'équation de Keulegan.

Le maximum de vitesse est supposé être à la surface et que la longueur B est proportionnelle à la distance y ; ceci permet d'écrire :

$$B = P - \gamma y \quad (1.33)$$

P est le périmètre mouillé de la surface considérée et γ est une fonction dépendant de la forme de la section. Ainsi, l'aire de la section mouillée A est :

$$A = \int_0^h B dy = Ph - \frac{1}{2} \gamma h^2 \quad (1.34)$$

La combinaison des relations (1.27), (1.32), (1.33) et (1.34) permet d'écrire, après intégration :

$$V = v_f \left[5,75 \log \left[\frac{h}{m_o R_h} \exp \left(-1 - \frac{\gamma h^2}{4A} \right) \right] + 5,75 \log \frac{m_o R_h}{y_o} \right] \quad (1.35)$$

Le premier terme du membre droit de l'équation (1.35) est une fonction de la forme de la section du canal considéré. Cependant, la variation que subit ce terme pour différentes formes de canaux est

relativement faible et il a été remplacé par une constante désignée par A_0 . La relation (1.35) prend alors une forme plus simplifiée et s'écrit :

$$V = v_f \left[A_0 + 5,75 \log \frac{m_o R_h}{y_o} \right] \quad (1.36)$$

La relation (1.36) représente l'équation théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts.

Pour les canaux à parois lisses, l'étude de *Keulegan*, basée sur les valeurs expérimentales de *Nikuradse*, montre que $A_0 \approx 3,25$. Ainsi, l'équation théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts à parois lisses est, en tenant compte de (1.28):

$$V = v_f \left[3,25 + 5,75 \log \left(\frac{R_h v_f}{\nu} \right) \right] \quad (1.37)$$

En ce qui concerne les canaux ouverts à parois rugueuses, *Keulegan* montre, après avoir analysé les mesures de *Bazin*, que la constante A_0 varie dans une large gamme, en fonction de la forme de la section du canal ($3,23 \leq A_0 \leq 16,92$), et la valeur moyenne $A_0 = 6,25$ est alors adoptée. Ainsi, l'expression théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts à parois rugueuses est, en tenant compte de (1.30):

$$V = v_f \left[6,25 + 5,75 \log \left(\frac{R_h}{\varepsilon} \right) \right] \quad (1.38)$$

En combinant les expressions $V = C \sqrt{R_h J}$ de *Chézy* (relation 1.1) et $\sqrt{g R_h J} = v_f$ de la vitesse de frottement, on peut écrire :

$$\frac{V}{v_f} = \frac{C}{\sqrt{g}} \quad (1.39)$$

ou bien, en faisant appel à (1.23):

$$\frac{V}{v_f} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{f}} \quad (1.40)$$

En tenant compte de (1.39) et de la définition du nombre de *Reynolds* modifié tel que $R = VR_h/\nu$, les

relations (1.37) et (1.38) permettent d'exprimer les coefficients C et f , respectivement pour un canal à parois lisses et rugueuses :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = 3,25 + 5,75 \log \left(\frac{R\sqrt{g}}{C} \right) \quad (1.41)$$

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = 6,25 + 5,75 \log \left(\frac{R_h}{\varepsilon} \right) \quad (1.42)$$

ou bien :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,231 + 2,033 \log (R\sqrt{f}) \quad (1.43)$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,210 + 2,033 \log \left(\frac{R_h}{\varepsilon} \right) \quad (1.44)$$

I.6. Interprétation théorique du coefficient de rugosité de *Manning*

En éliminant le coefficient C de *Chézy* entre les relations $C = (1/n)R_h^{1/6}$ et (1.42), le coefficient n de *Manning* s'écrit :

$$n = \varepsilon^{1/6} \phi(R_h / \varepsilon) \quad (1.45)$$

avec :

$$\phi(R_h / \varepsilon) = \frac{\left(\frac{R_h}{\varepsilon} \right)^{1/6}}{\sqrt{g} \left[6,25 + 5,75 \log \frac{R_h}{\varepsilon} \right]} \quad (1.46)$$

La représentation graphique de (1.46), pour une large gamme de valeurs de la rugosité relative (R_h / ε) , se traduit par une courbe plate presque horizontale. La fonction $\phi(R_h / \varepsilon)$ peut alors être remplacée par une constante dont la valeur est approximativement égale à 0,0342.

Si l'on admet que la fonction $\phi(R_h / \varepsilon)$ est constante, la relation (1.45) indique alors que le coefficient n de *Manning* varie en fonction de la puissance 1/6 de la rugosité absolue ε . En d'autres termes, lorsque ε subit une variation de 1/1000 ème, le coefficient n ne varie que de 1/3 environ. Ainsi, ε

est donc plus sensible que le coefficient n . En conséquence, l'application de la relation (1.45) n'entraîne qu'une erreur relativement faible sur le calcul du coefficient n .

L'étude comparative de *Bakhmeteff* et *Feodoroff* (1943) entre les formules de *Manning*, de *Ganguillet – Kutter* et de *Prandtl – Von – Karman* mise sous une forme identique à celle de la relation (1.45), montre que la formule de *Manning* est la plus adaptée.

I.7. Méthode de détermination du coefficient de *Manning*

Deux méthodes de détermination du coefficient n de *Manning*, basées sur la répartition théorique des vitesses dans un canal à parois rugueuses, ont été développées. La première méthode, dite méthode liée à la mesure de la rugosité, admet la validité de la relation (1.46). Ainsi, la valeur de n peut être calculée en application de (1.45) pour la valeur connue de la rugosité absolue ε .

La seconde méthode est dite méthode liée à la mesure de la vitesse. En se référant à la loi logarithmique de la répartition de la vitesse exprimée par (1.31), on peut s'apercevoir que cette répartition dépend de la rugosité absolue ε liée au coefficient n de *Manning* par la relation (1.45). En d'autres termes, la rugosité dans le sens du coefficient n de *Manning* peut être considérée comme le facteur prédominant affectant la répartition de la vitesse. Si celle-ci était connue, le coefficient n de *Manning* peut alors être évalué.

On définit $V_{0,2}$ la vitesse aux deux dixièmes de la profondeur ou à la distance $0,8y$ comptée à partir du fond du canal de grande largeur et à parois rugueuses; y représente la profondeur de l'écoulement. En vertu de la relation (1.31), on peut écrire:

$$V_{0,2} = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \left(\frac{24y}{\varepsilon} \right) \quad (1.47)$$

$$V_{0,8} = \frac{5}{2} v_f \operatorname{Ln} \left(\frac{6y}{\varepsilon} \right) \quad (1.48)$$

En éliminant la vitesse v_f entre les relations (1.47) et (1.48), on peut écrire en posant $X = V_{0,2} / V_{0,8}$:

$$(1 - X) \operatorname{Ln} \frac{y}{\varepsilon} = X \operatorname{Ln} 6 - \operatorname{Ln} 24$$

ou bien :

$$Ln \frac{y}{\varepsilon} = \frac{1,792 X - 3,178}{1 - X} \quad (1.49)$$

L'équation (1.38), qui exprime la vitesse moyenne de l'écoulement dans un canal à parois rugueuses, devient alors pour un canal de grande largeur ($R_h = y$):

$$\frac{V}{v_f} = \frac{1,775 X + 1,686}{X - 1} \quad (1.50)$$

En outre, la combinaison des relations $C = (1/n)R_h^{1/6}$ et (1.38), pour $R_h = y$, donne :

$$\frac{V}{v_f} = \frac{y^{1/6}}{n \sqrt{g}} \quad (1.51)$$

Ainsi, le coefficient n de *Manning* peut être évalué à partir de l'égalité des relations (1.50) et (1.51), soit :

$$n = \frac{y^{1/6} (X - 1)}{1,775 \sqrt{g} (X + 0,95)} \quad (1.52)$$

La relation (1.52) permet ainsi d'évaluer le coefficient n de *Manning* pour le cas d'un canal de grande largeur à parois rugueuses et dans l'hypothèse que la distribution de la vitesse suit une loi logarithmique.

I.8. Calcul de l'écoulement uniforme

I.8.1. Conductivité

Le débit volume Q de l'écoulement uniforme dans une conduite ou un canal s'exprime par le produit de la vitesse moyenne V et l'aire de la section mouillée A :

$$Q = VA = CAR_h^\beta J^\gamma \quad (1.53)$$

La relation (1.53) peut aussi s'écrire :

$$Q = KJ^\gamma \quad (1.54)$$

où :

$$K = CAR_h^\beta \quad (1.55)$$

Le facteur K est connu sous le terme de conductivité de la conduite ou du canal. Il s'agit de la capacité d'évacuation de la section de la conduite ou du canal considéré, étant donné que K est directement lié au débit volume Q .

Lorsque l'une des relations de *Chézy* ou de *Manning* est utilisée, correspondant à $\gamma = 1/2$, la relation (1.54) permet alors de déduire que la conductivité est :

$$K = Q / \sqrt{J} \quad (1.56)$$

La relation (1.56) peut être utilisée pour calculer la conductivité K lorsque le débit volume Q et la pente J sont donnés.

Lorsque la formule de *Chézy* est utilisée, correspondant à $\gamma = 1/2$, l'équation (1.55) devient :

$$K = CAR_h^{1/2} \quad (1.57)$$

C est le coefficient de résistance de *Chézy*.

Lorsque la relation de *Manning* est utilisée, la conductivité K s'écrit :

$$K = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \quad (1.58)$$

Les relations (1.57) et (1.58) peuvent être utilisées pour calculer la conductivité K , lorsque la géométrie de la section ainsi que le coefficient de résistance sont connus.

I.8.2. Facteur de section

L'expression $AR_h^{2/3}$ est appelée facteur de section au calcul de l'écoulement uniforme. Selon la relation (1.58), nous pouvons écrire :

$$AR_h^{2/3} = nK \quad (1.59)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (1.56) :

$$AR_h^{2/3} = \frac{nQ}{\sqrt{J}} \quad (1.60)$$

Le second terme de la relation (1.60) contient les paramètres n , Q et J , alors que le premier terme dépend de la géométrie de la section mouillée de la conduite ou du canal considéré. Pour les valeurs données de n , Q et J , il n'existe qu'une profondeur possible pour maintenir l'écoulement uniforme, à condition toutefois que $AR_h^{2/3}$ augmente avec l'accroissement de la profondeur. Cette profondeur est la profondeur normale.

Lorsque n et J sont connus, la relation (1.60) donne un seul débit pour maintenir l'écoulement uniforme dans la section considérée de la conduite ou du canal, à condition toutefois que $AR_h^{2/3}$ augmente avec l'accroissement de la profondeur. Ce débit est appelé débit normal.

Notons que dans le cas le plus général, la quantité $AR_h^{2/3}$ augmente avec l'accroissement de la profondeur, à l'exception du cas des conduites dont le toit est graduellement fermé telle que la conduite de forme circulaire. Dans ce cas, $AR_h^{2/3}$ augmente dans un premier temps avec l'accroissement de la profondeur, puis décroît dans un second temps en fonction de la profondeur à l'approche de la pleine section. La valeur maximale de $AR_h^{2/3}$ est atteinte à une profondeur légèrement inférieure à la profondeur de pleine section. En conséquence, il est possible d'avoir deux profondeurs pour la même valeur de $AR_h^{2/3}$; une profondeur inférieure et l'autre supérieure à la profondeur correspondant au maximum de $AR_h^{2/3}$.

La relation (1.60) peut être très utile pour l'analyse et le calcul de l'écoulement uniforme. Lorsque le débit volume Q , la pente J et n sont connus, cette relation donne la valeur du facteur de section $A_n R_{h,n}^{2/3}$, où l'indice n désigne l'écoulement normal, et par suite la profondeur normale y_n . D'autre part, lorsque n , J et y_n sont donnés, la relation (1.60) permet de calculer le débit volume normal Q_n .

Dans le but de simplifier le calcul, des courbes adimensionnelles ont été tracées pour le cas de la conduite de forme circulaire en particulier, montrant la relation entre la profondeur et le facteur de section $AR_h^{2/3}$. Ces courbes sont un moyen de détermination de la profondeur pour un facteur de section $AR_h^{2/3}$ donné et vice-versa.

Pour le cas de la conduite de forme circulaire de diamètre D , le tableau de valeurs suivant a été dressé (*Chow*, 1973) et a permis le tracé de la courbe de la figure 1.4.

Tableau 1.1 : Valeurs du facteur de section relatif en fonction de la profondeur relative pour le cas de la conduite de forme circulaire (Chow, 1973)

y_n / D	$AR_h^{2/3} / D^{8/3}$
0,01	0,0000
0,02	0,0002
0,03	0,0005
0,04	0,0009
0,05	0,0015
0,06	0,0022
0,07	0,0031
0,08	0,0040
0,09	0,0052
0,10	0,0065
0,11	0,0079
0,12	0,0095
0,13	0,0113
0,14	0,0131
0,15	0,0152
0,16	0,0173
0,17	0,0196
0,18	0,0220
0,19	0,0247
0,20	0,0273
0,21	0,0301
0,22	0,0333
0,23	0,0359
0,24	0,0394
0,25	0,0427

Tableau 1.1 (Suite) : Valeurs du facteur de section relatif en fonction de la profondeur relative pour le cas de la conduite de forme circulaire (Chow, 1973)

y_n / D	$AR_h^{2/3} / D^{8/3}$
0,26	0,0464
0,27	0,0497
0,28	0,0536
0,29	0,0571
0,30	0,0610
0,31	0,0650
0,32	0,0690
0,33	0,0736
0,34	0,0776
0,35	0,0820
0,36	0,0864
0,37	0,0909
0,38	0,0955
0,39	0,1020
0,40	0,1050
0,41	0,1100
0,42	0,1147
0,43	0,1196
0,44	0,1245
0,45	0,1298
0,46	0,1348
0,47	0,1401
0,48	0,1452
0,49	0,1505
0,50	0,1558
0,55	0,1825
0,60	0,2092
0,65	0,2358
0,70	0,2608
0,75	0,2840
0,80	0,3045
0,85	0,3212
0,90	0,3324
0,95	0,3349
1,00	0,3117

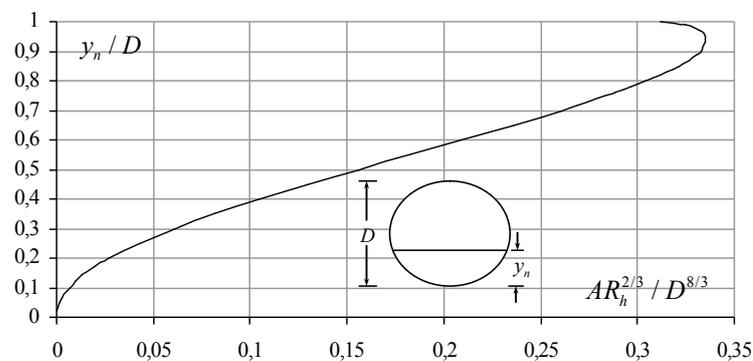


Figure 1.4 : Facteur de section relatif en fonction de la profondeur normale relative pour le cas de la conduite de forme circulaire. Courbe tracée selon les valeurs du tableau 1.1.

I.8.3. Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite circulaire

En prenant pour exemple la conduite circulaire, les courbes adimensionnelles pour les quantités $AR_h^{2/3} / A_o R_{h,o}^{2/3}$ et $R_h^{2/3} / R_{h,o}^{2/3}$, où l'indice « o » est relatif à l'état plein de la conduite, sont représentées sur la figure 1.5 (Camp, 1946).

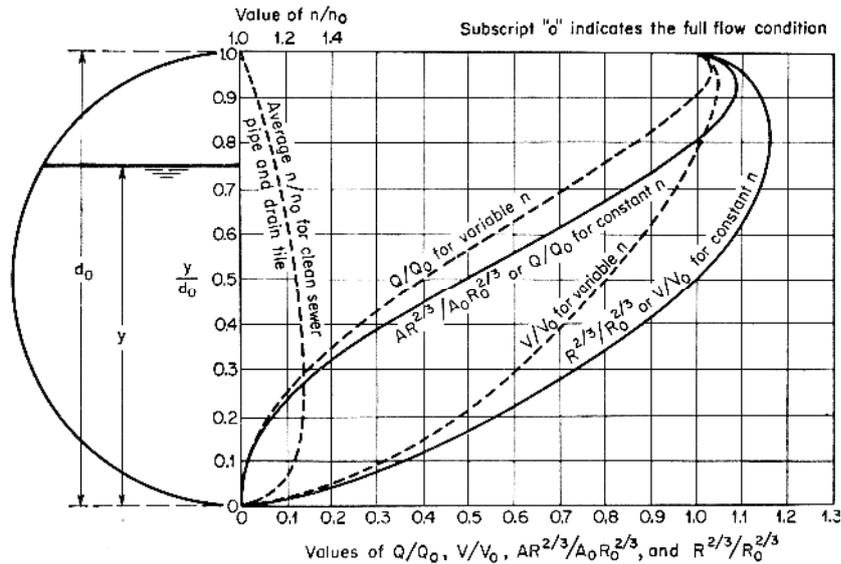


Figure 1.5 : Caractéristiques de l'écoulement dans une conduite circulaire selon Camp (1946).

Si la valeur du coefficient n de Manning est considéré comme une constante ou indépendant de la variation de la profondeur, les deux courbes $AR_h^{2/3} / A_o R_{h,o}^{2/3}$ et $R_h^{2/3} / R_{h,o}^{2/3}$ représentent respectivement la variation du rapport Q/Q_o et V/V_o . Les deux courbes, en trait plein, montre des valeurs maximales qui s'obtiennent à environ $0,938d_o$ et $0,81d_o$ respectivement. D'un point de vue mathématique, la profondeur correspondant au débit maximum, soit $0,938d_o$, peut être simplement obtenue en égalant à zéro la dérivée première de $AR_h^{2/3}$ par rapport à la profondeur y , puisque le débit volume Q , calculé par la formule de Manning, est proportionnel à $AR_h^{2/3}$ pour n et J constants. Parallèlement, puisque la vitesse moyenne V , selon la formule de Manning, est proportionnelle à $R_h^{2/3}$, la profondeur correspondant au maximum de la vitesse, soit $0,81d_o$, peut être obtenue en égalant à zéro la dérivée première de $R_h^{2/3}$ par rapport à la profondeur y .

En outre, la courbe adimensionnelle Q/Q_o de la figure 1.5 montre que, lorsque la profondeur est environ plus grande que $0,82d_o$, il est possible d'avoir deux profondeurs

différentes pour le même débit volume ; une première profondeur au-dessus et une seconde en-dessous de la valeur $0,938d_0$.

En outre, la courbe V/V_0 montre que, lorsque la profondeur est plus grande que $y/d_0 = 1/2$, il est possible d'avoir deux profondeurs différentes pour la même vitesse ; une première profondeur au-dessus et une seconde en-dessous de la valeur $0,81d_0$.

Toutes ces remarques restent valables tant que le coefficient de résistance est supposé être constant, même si la profondeur varie. Il a été cependant constaté (figure 1.5) que le coefficient de résistance augmente de plus de 28% de $1,00 d_0$ à $0,25d_0$ où il apparaît clairement admettre un maximum. Cette variation du coefficient de résistance fait que le maximum de débit et de vitesse apparaît à environ $0,97d_0$ et $0,94d_0$ respectivement. Les courbes correspondantes de Q/Q_0 et de V/V_0 ont été représentées en trait discontinu sur la figure 1.5.

En considérant comme étant constant le coefficient de résistance n , la vitesse moyenne de l'écoulement serait la même que celle de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine que celle de l'écoulement à pleine section. Par contre, si l'on considère que n varie en fonction de la profondeur, comme il est indiqué sur la figure 1.5, alors la vitesse de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine n'est que de 80% de la vitesse à pleine section.

I.9. Conclusion

Le chapitre précédent a eu pour objectif de passer en revue les principaux résultats connus sur l'écoulement uniforme. Nous avons précisé les conditions d'établissement d'un écoulement uniforme dont les caractéristiques ont été représentées sur la figure 1.1, en comparant la pente du canal à la pente critique.

A partir d'un schéma de définition, nous avons montré les différentes forces intervenant dans un volume de contrôle de l'écoulement uniforme, ce qui a conduit à la démonstration de la formule universellement connu de *Chézy*. Nous avons montré que le coefficient de résistance C de *Chézy* est tel que $C = \sqrt{\rho g / K}$, où ρ est la masse volumique du liquide en écoulement, g est l'accélération de la pesanteur et K est un facteur de proportionnalité intervenant dans l'expression de la force de résistance à l'écoulement (Relation 1.2). Nous avons présenté trois relations permettant d'évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. La première relation est celle de *Ganguillet – Kutter* dans laquelle le coefficient

C est tel que $C(J, R_h, n)$, où J est la pente de la ligne de charge totale égale à la pente géométrique du canal, R_h est le rayon hydraulique et n est le coefficient de rugosité. La seconde relation est celle de *Bazin* dans laquelle le coefficient C est tel que $C(R_h, m)$, où m est le coefficient de rugosité dépendant de la nature du matériau constituant le canal considéré. La troisième relation est celle de *Powell*. Elle exprime de manière implicite le coefficient C en fonction du nombre de *Reynolds*, du rayon hydraulique et de la rugosité absolue des parois du canal.

Nous avons présenté la formule de *Manning* ou de *Manning-Strickler* qui exprime la vitesse moyenne du liquide en écoulement. Le coefficient n selon *Manning* et $1/n = k$ selon *Strickler*) a été discuté et son unité a été précisée. Le coefficient k est lié à la rugosité absolue ε par la relation de *Hager*. Nous avons surtout précisé qu'il n'existe aucune méthode analytique d'évaluation du coefficient n de *Manning*, à l'exception du cas d'un canal de grande largeur à parois rugueuses et dans l'hypothèse que la distribution de la vitesse suit une loi logarithmique. Le coefficient n est alors donné par la relation (1.52), après avoir déterminé les vitesses $V_{0,2}$ et $V_{0,8}$. Pour l'évaluation pratique du coefficient n , nous avons présenté les étapes à suivre, préconisées par certains auteurs.

La relation de *Darcy-Weisbach* a été présentée (Relation 1.16). Elle exprime la pente de la ligne de charge totale comme étant un paramètre inversement proportionnel au diamètre hydraulique et directement proportionnel à la hauteur capable de la vitesse de l'écoulement. Le facteur de proportionnalité est représenté par le coefficient f , appelé coefficient de frottement. Celui-ci peut être évalué par la relation de *Colebrook-White* en s'appuyant sur un procédé itératif. Des relations explicites au calcul de f ont été proposées par certains auteurs, tels que *Achour* et *Swamee*.

Le chapitre a été achevé par le calcul de l'écoulement uniforme qui intéresse notre étude. Nous avons rappelé la notion de conductivité qui est représentée par le facteur K . Il s'agit de la capacité d'évacuation de la section de la conduite ou du canal considéré, étant donné que K est directement lié au débit volume Q (Relation 1.56). Nous avons également rappelé la notion de facteur de section dont l'importance est capitale dans le calcul de l'écoulement uniforme. Le facteur de section est représenté par la quantité $AR_h^{2/3}$ et dépend, par conséquent, de la géométrie de la section de la conduite ou du canal considéré. Nous avons indiqué que dans le cas le plus général, la quantité $AR_h^{2/3}$ augmente avec

l'accroissement de la profondeur, à l'exception du cas des conduites dont le toit est graduellement fermé telle que la conduite de forme circulaire. Pour ce type de conduites fermées, le facteur de section $AR_h^{2/3}$ augmente dans un premier temps avec l'accroissement de la profondeur, puis décroît dans un second temps en fonction de la profondeur à l'approche de la pleine section. Cette particularité a été illustrée sur la courbe adimensionnelle de la figure 1.4.

Les courbes adimensionnelles de *Camp* (Figure 1.5) ont permis l'analyse des caractéristiques de l'écoulement dans une conduite de forme circulaire. Le facteur de section, rapporté à celui de la conduite pleine, a été représenté en fonction du paramètre de forme de la section pour les cas d'un coefficient de *Manning* supposé constant et dépendant de la variation de la profondeur. Dans le premier cas, la vitesse moyenne de l'écoulement serait la même que celle de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine que celle de l'écoulement à pleine section. Par contre, dans le second cas, la vitesse de l'écoulement dans la conduite à moitié pleine n'est que de 80% de la vitesse à pleine section.

Les courbes adimensionnelles de *Camp* ont pu mettre en évidence la nature variable du coefficient de *n* de *Manning* et son incidence sur les valeurs maximales du débit volume Q et de la vitesse moyenne V .

II. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL RECTANGULAIRE

II.1. Introduction

L'objectif principal de cette partie de notre étude est l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal de forme rectangulaire. Cette étude comprend le dimensionnement du canal, ce qui revient à déterminer sa largeur et la détermination de la profondeur normale. Ce sont les deux principaux problèmes qui se posent dans l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal de forme rectangulaire.

Le dimensionnement du canal repose sur la théorie du modèle rugueux de référence. Cela consiste à choisir un canal rectangulaire rugueux de rugosité choisie et de déterminer alors ses caractéristiques hydrauliques et géométriques. Ces caractéristiques permettent alors de déterminer celles réelles du canal étudié en appliquant des relations théoriques préalablement établies. Ces relations sont établies sur la base de formules régissant l'écoulement uniforme telles que celles de *Darcy-Weisbach*, de *Chézy* ou de *Manning-Strickler*.

Le calcul de la profondeur normale de l'écoulement dans le canal considéré est issu du théorème de *Lagrange* qui donne la solution du problème en une série illimitée. D'un point de vue théorique, la solution du problème est exacte mais elle est obtenue à l'infini, ce qui n'est pas pratique à l'usage de l'ingénieur. La série obtenue doit être alors tronquée, ce qui mène à une solution approchée du problème.

L'application de la formule de *Chézy* au cas de l'écoulement uniforme dans un canal de forme rectangulaire mène à une équation de troisième ordre. Sa résolution analytique conduit à l'expression exacte de la profondeur normale, en ayant recours aux fonctions trigonométriques. Cependant, l'évaluation de la valeur requise du coefficient C de *Chézy* demeure encore quasi impossible sans l'aide d'un procédé itératif.

En règle générale, l'emploi des formules usuelles de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts ne permet pas une solution directe au problème du calcul de la profondeur normale.

Dans cette étude, nous montrons, à travers l'exemple du canal rectangulaire, que ce problème peut être aisément résolu par simple application du théorème de *Lagrange*. En outre, une méthode fiable est proposée pour l'estimation directe des coefficients de résistance f de *Colebrook-White*, C de *Chézy* et n de *Manning*, applicable à tous les profils géométriques connus et notamment au profil rectangulaire qui intéresse cette étude.

II.2. Dimensionnement par la méthode du modèle rugueux

II.2.1. Caractéristiques géométriques et hydrauliques

Pour les canaux ouverts, le modèle rugueux de référence est caractérisé par une rugosité relative arbitrairement choisie égale à $\bar{\varepsilon} / \bar{D}_h = 3,7 \cdot 10^{-2}$, où $\bar{\varepsilon}$ et \bar{D}_h désignent respectivement la rugosité absolue et le diamètre hydraulique du modèle.

L'écoulement dans le modèle rugueux de référence est considéré comme étant en régime turbulent rugueux et le coefficient de frottement \bar{f} est alors donné par la relation (1.17) pour $D = \bar{D} = \bar{D}_h$.

Le canal de forme rectangulaire est l'un des ouvrages le plus connu et le plus rencontré dans les aménagements hydrauliques. La figure 2.1 montre schématiquement ce canal et ses caractéristiques géométriques.

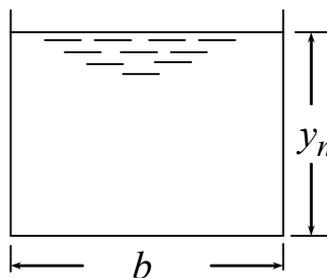


Figure 2.1 : Schéma de définition du canal ouvert de forme rectangulaire

Les parois internes du canal sont caractérisées par la rugosité absolue ε . Le canal écoule le débit volume Q , d'un liquide de viscosité cinématique ν , sous la pente i qui correspond à la pente géométrique de l'ouvrage.

La forme du canal considéré est définie par le paramètre de forme $\eta = y_n / b$, appelé aussi rapport d'aspect, où y_n est la profondeur normale de l'écoulement et b désigne la largeur du canal. Il s'agit alors de dimensionner le canal considéré, ce qui revient à calculer la dimension linéaire b .

L'aire de la section mouillée A de l'écoulement s'écrit :

$$A = b y_n \quad (2.1)$$

qui peut également s'écrire :

$$A = b^2 \eta \quad (2.2)$$

Le périmètre mouillé P est :

$$P = b + 2y_n \quad (2.3)$$

ou bien :

$$P = b(1 + 2\eta) \quad (2.4)$$

Le diamètre hydraulique est par suite :

$$D_h = 4 \frac{A}{P} = 4 \frac{b^2 \eta}{b(1 + 2\eta)}$$

soit :

$$D_h = 4b \frac{\eta}{1 + 2\eta} \quad (2.5)$$

II.2.2. Caractéristiques du modèle rugueux de référence

Le modèle rugueux de référence du canal étudié est représenté schématiquement sur la figure 2.2. Il est caractérisé par la largeur \bar{b} et l'écoulement est de profondeur \bar{y}_n . Le paramètre de forme $\bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b}$ du modèle rugueux de référence est égal à celui du canal à dimensionner, représenté par la figure 2.1, soit :

$$\bar{\eta} = \frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} = \eta = \frac{y_n}{b} \quad (2.6)$$

Le modèle rugueux écoule le même débit volume que celui du canal à dimensionner et sous la même pente i , soit :

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i \quad (2.7)$$

En tenant compte de la relation (2.6), l'aire de la section mouillée \bar{A} du modèle rugueux de référence est donc :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \eta \quad (2.8)$$

Le périmètre mouillé est :

$$\bar{P} = \bar{b} + 2\bar{y}_n \quad (2.9)$$

qui peut s'écrire :

$$\bar{P} = \bar{b}(1 + 2\eta) \quad (2.10)$$

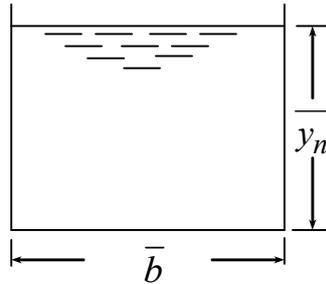


Figure 2.2 : Schéma de définition du modèle rugueux de référence du canal ouvert de forme rectangulaire

Le diamètre hydraulique est par suite :

$$\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{A}}{\bar{P}} = 4 \frac{\bar{b}^2 \eta}{\bar{b}(1 + 2\eta)}$$

soit :

$$\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\eta}{1 + 2\eta} \quad (2.11)$$

Etant donné que la rugosité relative du modèle rugueux de référence est $\bar{\varepsilon} / \bar{D}_h = 3,7 \cdot 10^{-2}$ et que le régime d'écoulement est turbulent rugueux, alors le coefficient de frottement \bar{f} de l'écoulement est donné par la relation bien connue de *Nikuradse*, soit :

$$\bar{f} = \left[-2 \log \left(\frac{\bar{\varepsilon} / \bar{D}_h}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (2.12)$$

Après calcul, le coefficient de frottement \bar{f} prend alors la valeur $\bar{f} = 1/16$. L'écoulement turbulent rugueux se produisant dans le canal de forme rectangulaire de référence est donc caractérisé par un coefficient de frottement constant égal à 1/16.

II.2.3. Relation de *Darcy-Weisbach* appliquée au modèle rugueux

La relation de *Darcy-Weisbach* s'applique également aux canaux à ciel ouvert. Cette relation a été rappelée au cours du premier chapitre de notre étude (relation 1.16) dans laquelle le gradient J de la perte correspond à la pente géométrique i du canal étudié, soit :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad (2.13)$$

La vitesse moyenne V figurant dans la relation (2.13) peut s'écrire, en tenant compte de l'équation de continuité :

$$V = Q / A \quad (2.14)$$

Le diamètre hydraulique est par définition :

$$D_h = 4A / P \quad (2.15)$$

En tenant compte des relations (2.14) et (2.15), la relation (2.13) s'écrit alors :

$$i = \frac{f}{8g} P \frac{Q^2}{A^3} \quad (2.16)$$

En appliquant la relation (2.16) au modèle rugueux de référence, nous obtenons :

$$\bar{i} = \frac{\bar{f}}{8g} \bar{P} \frac{Q^2}{\bar{A}^3} \quad (2.17)$$

Rappelons que $\bar{f} = 1/16$ et que la section mouillée \bar{A} et le périmètre mouillé \bar{P} sont régis respectivement par les relations (2.8) et (2.10). Ainsi, la relation (2.17) s'écrit :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{b}(1+2\eta)}{\bar{b}^6 \eta^3} Q^2 \quad (2.18)$$

Nous pouvons alors tirer de la relation (2.18) que la largeur \bar{b} du modèle rugueux s'écrit :

$$\bar{b} = \left(\frac{1+2\eta}{128\eta^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (2.19)$$

La relation (2.19) permet le calcul explicite de la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence, à partir des valeurs connues du débit volume Q , de la pente i et du paramètre de forme η . Les effets de la viscosité cinématique ν du liquide ne sont pas pris en considération, puisque l'écoulement est, ou supposé être, dans le domaine turbulent rugueux. La profondeur normale \bar{y}_n de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est telle que $\bar{y}_n = \bar{b}\eta$ et qui s'écrit, en tenant compte de la relation (2.19) :

$$\bar{y}_n = \left[\frac{\eta^2 (1+2\eta)}{128} \right]^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (2.20)$$

II.2.4. Facteur de correction des dimensions linéaires

Selon la méthode du modèle rugueux, toute dimension linéaire b d'un canal donné est égale à la dimension linéaire correspondante \bar{b} du modèle rugueux, corrigée par les effets d'un facteur de correction ψ . Cela se traduit par la relation fondamentale :

$$b = \psi \bar{b} \quad (2.21)$$

Etant donné que la dimension linéaire \bar{b} est plus grande que la dimension linéaire b , alors le facteur de correction ψ est inférieur à l'unité, ou bien $0 < \psi < 1$.

Comme le périmètre mouillé P est une dimension linéaire, alors nous pouvons écrire :

$$P = \psi \bar{P} \quad (2.22)$$

En ce qui concerne l'aire de la section mouillée A , celle-ci étant proportionnelle à la dimension linéaire b au carré, nous pouvons alors écrire que :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (2.23)$$

Appliquons les relations (2.22) et (2.23) à la relation (2.16). Nous obtenons :

$$i = \frac{f}{8g} \psi \bar{P} \frac{Q^2}{\psi^6 \bar{A}^3}$$

Soit :

$$i = \frac{f}{8g} \bar{P} \frac{Q^2}{A^3} \frac{1}{\psi^5} \quad (2.24)$$

Remarquons, en vertu de la relation (2.17) que :

$$\frac{1}{8g} \bar{P} \frac{Q^2}{A^3} = \frac{\bar{i}}{f} \quad (2.25)$$

En combinant les relations (2.24) et (2.25), il vient alors que :

$$i = \frac{f}{f} \bar{i} \frac{1}{\psi^5} \quad (2.26)$$

Comme $\bar{f} = 1/16$ et $i = \bar{i}$ en vertu de la condition (2.7), la relation (2.26) s'écrit alors plus simplement :

$$1 = \frac{16f}{\psi^5}$$

Soit :

$$f = \frac{\psi^5}{16} \quad (2.27)$$

Il faut donc noter que le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est étroitement lié au coefficient de frottement f .

Dans cette étape de notre étude, il est nécessaire de faire appel à la formule de *Colebrook-White* exprimant le coefficient de frottement f . Celle-ci correspond à la relation (1.17) que nous avons mentionnée au cours du premier chapitre. Ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right) \quad (2.28)$$

Le diamètre hydraulique D_h figurant dans la relation (2.28) est une dimension linéaire et peut donc s'écrire, en vertu de la relation (2.21) :

$$D_h = \psi \bar{D}_h \quad (2.29)$$

Le nombre de *Reynolds* R figurant dans la relation (2.28) s'écrit, par définition :

$$R = \frac{4Q}{Pv} \quad (2.30)$$

Compte de la relation (2.22), la relation (2.30) devient :

$$R = \frac{4Q}{\psi P v} \quad (2.31)$$

Puisque $Q = \bar{Q}$ en vertu de la condition (2.7), nous pouvons alors remarquer que la quantité $4Q/\bar{P}v$ figurant dans la relation (2.31) correspond au fait au nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux. Ainsi :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}v} \quad (2.32)$$

En combinant les relations (3.31) et (2.32), il ressort que :

$$R = \psi^{-1} \bar{R} \quad (2.33)$$

Introduisons les relations (2.27), (2.29) et (2.33) dans la relation (2.28). Nous obtenons :

$$\frac{4}{\psi^{5/2}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{-1} \bar{R} \psi^{5/2}} \right)$$

Ou bien :

$$\psi^{5/2} \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) = -2 \quad (2.34)$$

Selon la relation (2.34), le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est fonction de la rugosité absolue ε et des caractéristiques hydrauliques \bar{D}_h et \bar{R} de l'écoulement dans le modèle rugueux. La relation (2.34) montre bien qu'elle est implicite vis-à-vis du facteur ψ . Une relation approchée de ψ a été déterminée et les calculs ont montré que le facteur de correction ψ pouvait s'écrire, avec une excellente approximation, sous la forme :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.35)$$

La relation approchée (2.35) a été comparée à la relation exacte (2.34). La comparaison a été menée en respectant les étapes suivantes :

1. On fixe une valeur de la rugosité relative $\varepsilon / \overline{D}_h$ entre les valeurs 0 et 0,05 afin de balayer l'ensemble du diagramme universel de *Moody*.
2. On fait varier le nombre de *Reynolds* \overline{R} avec un pas arbitrairement choisi.
3. Par un procédé itératif, on calcule la valeur du coefficient de correction ψ en application de la relation exacte (2.34).
4. On calcule la valeur approchée de ψ selon la relation proposée (2.35).
5. On calcule enfin l'écart relatif $\Delta\psi / \psi$ (%) entre les valeurs de ψ déterminées au cours des étapes 3 et 4.

Les résultats de cette comparaison ont été tracés graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure 2.3.

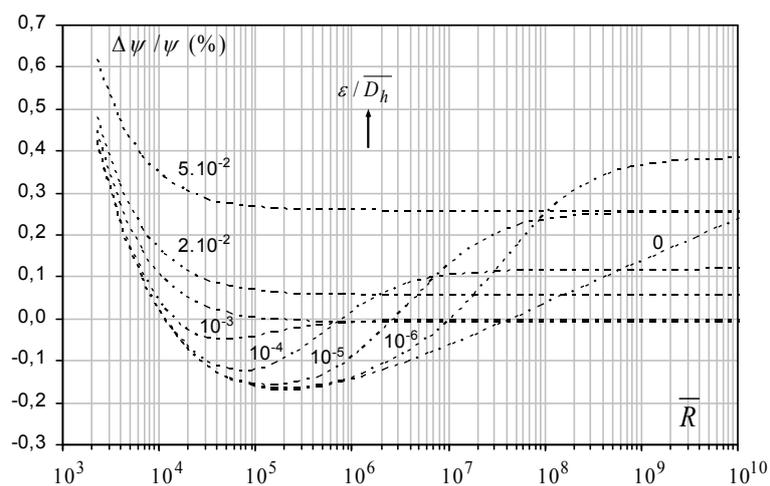


Figure 2.3 : Comparaison entre les valeurs exactes et approchées du coefficient ψ calculées selon les relations (2.34) et (2.35).

Il ressort de la figure 2.3 que, pour les valeurs pratiques $\overline{R} > 10^4$, l'écart relatif entre les

valeurs exactes et approchées de ψ ne dépassent guère 0,4% seulement. Ceci montre clairement la fiabilité de la relation approchée (2.35) qui peut donc être appliquée avec une erreur très acceptable. Notons que la relation approchée (2.35) est applicable à l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent, comprenant le régime d'écoulement lisse, le régime d'écoulement de transition et le régime d'écoulement turbulent rugueux.

II.2.5. Dimensionnement du canal par la relation de *Darcy-Weisbach* pour un rapport d'aspect imposé

Le dimensionnement du canal consiste donc à déterminer la valeur de la dimension linéaire b , correspondant à la largeur du canal. Il faut noter que les paramètres connus du problème sont : le débit volume Q , le paramètre d'aspect ou paramètre de forme η , la rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne du canal, la pente géométrique i du canal et enfin la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. A partir de ces cinq paramètres connus, les étapes suivantes sont recommandées pour déterminer la dimension linéaire recherchée b du canal étudié :

- i. Avec les valeurs connues des paramètres Q , i et η , la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence est déterminée par application de la relation (2.19).
- ii. Connaissant les valeurs de \bar{b} et de η , la relation (2.11) permet de calculer la valeur du diamètre hydraulique \bar{D}_h de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, tandis que le périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux est déterminé par application de la relation (2.10).
- iii. Les valeurs connues des paramètres Q , \bar{P} et ν sont introduites dans la relation (2.32) pour l'évaluation du nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.
- iv. A partir des valeurs connues de ε/\bar{D}_h et de \bar{R} , la relation (2.35) permet le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- v. Enfin, connaissant les valeurs de \bar{b} et de ψ , la valeur recherchée de la dimension linéaire b est directement déduite de la l'application de la relation fondamentale (2.21).

Afin de mieux illustrer les étapes de calcul de dimensionnement ci-dessus indiquées, l'exemple d'application suivant est proposé.

Exemple d'application 2.1 :

Un canal de forme rectangulaire écoule un débit volume $Q = 3,861 m^3 / s$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} m^2 / s$ sous une pente géométrique $i = 10^{-3}$. Sachant que la rugosité absolue caractérisant l'état des parois internes du canal est $\varepsilon = 10^{-3} m$ et que le paramètre de forme de la section mouillée est $\eta = y_n / b = 0,60$, déterminez la largeur b du canal.

Solution

i. La dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.19) :

$$\bar{b} = \left(\frac{1+2\eta}{128\eta^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} = \left(\frac{1+2 \times 0,6}{128 \times 0,6^3} \right)^{1/5} \times \left(\frac{3,861^2}{9,81 \times 10^{-3}} \right)^{1/5} = 2,609143174 m$$

ii. Le diamètre hydraulique \bar{D}_h du modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (2.11) :

$$\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\eta}{1+2\eta} = 4 \times 2,609143174 \times \frac{0,6}{1+2 \times 0,6} = 2,84633801 m$$

tandis que le périmètre mouillé \bar{P} est, selon la relation (2.10) :

$$\bar{P} = \bar{b}(1+2\eta) = 2,609143174 \times (1+2 \times 0,6) = 5,740114982 m$$

iii. Le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.32) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}\nu} = \frac{4 \times 3,861}{5,740114982 \times 10^{-6}} = 2690538,438$$

iv. La relation (2.35) permet ainsi le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ , soit :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times$$

$$\left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 2,84633801}{4,75} + \frac{8,5}{2690538,438} \right) \right]^{-2/5} = 0,766792905$$

v. La dimension linéaire recherchée est, selon la relation fondamentale (2.21) :

$$b = 0,766792905 \times 2,609143174 = 2,000672474 \text{ m} \approx 2 \text{ m}$$

A titre indicatif, nous pouvons conclure que la profondeur normale y_n de l'écoulement est : $y_n = \eta b = 0,6 \times 2 = 1,2 \text{ m}$

vi. Cette étape vise à vérifier la valeur donnée de la pente longitudinale i du canal par application de la relation de *Darcy-Weisbach*, pour la valeur calculée de la dimension linéaire b , soit :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Le diamètre hydraulique D_h est donné par la relation (2.5), soit :

$$D_h = 4b \frac{\eta}{1+2\eta} = 4 \times 2 \times \frac{0,6}{1+2 \times 0,6} = 2,18181818 \text{ m}$$

L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (2.2):

$$A = b^2 \eta = 2^2 \times 0,6 = 2,4 \text{ m}^2$$

Le coefficient de frottement f est évalué par application de la relation (2.27), soit :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = 0,766792905 / 16 = 0,016568014$$

La pente longitudinale i est par suite, selon la relation de *Darcy-Weisbach* :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,016568014}{2,18181818} \times \frac{3,861^2}{2 \times 9,81 \times 2,4^2} = 0,001001682 \approx 10^{-3}$$

Il s'agit bien de la valeur de i donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

Notons que le dimensionnement du canal n'aurait pas pu être effectué en application directe de la relation de *Darcy-Weisbach*, puisque aussi bien le coefficient de frottement f , l'aire de la section mouillée et le diamètre hydraulique sont des paramètres inconnus, dépendants de la

dimension linéaire recherchée b . Cette impossibilité de calcul a été judicieusement levée grâce au facteur de correction des dimensions linéaires ψ , lié au coefficient de frottement f par la relation (2.27). La méthode du modèle rugueux a ainsi permis de déterminer d'abord les caractéristiques du modèle rugueux par application de relations explicites, puis de déduire celles de l'écoulement dans le canal étudié. La méthode utilise en outre des données pratiques, telle que la rugosité absolue ε dont la valeur est définissable, contrairement au coefficient de Chézy C ou celui de Manning n pour lesquels il n'existe à l'heure actuelle aucune relation explicite permettant de les calculer.

II.2.6. Dimensionnement du canal par la relation de *Darcy-Weisbach* pour une profondeur normale imposée

Le problème consiste à déterminer la largeur b du canal lorsque le débit volume Q , la pente géométrique i , la rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne du canal, la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement et la profondeur normale y_n sont les paramètres connus ou constituent les données de ce problème. Dans ce cas, le paramètre d'aspect ou paramètre de forme η n'est plus une donnée du problème et seule la profondeur normale y_n est imposée.

Pour les données de ce problème, il est nécessaire de considérer que le rapport d'aspect η dans le canal étudié est différent du rapport d'aspect dans le modèle rugueux de référence, soit $\eta \neq \bar{\eta}$, et que la profondeur normale y_n dans le canal considéré est, dans un premier temps, égale à celle \bar{y}_n de l'écoulement dans le modèle rugueux. Sous la condition $\eta \neq \bar{\eta}$, la relation (2.20) devient :

$$\bar{y}_n = \left[\frac{\bar{\eta}^{-2} (1 + 2\bar{\eta})}{128} \right]^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (2.36)$$

Introduisons la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gi y_n^5}} \quad (2.37)$$

Tenant compte de (2.37), la relation (2.36) permet de déduire que :

$$Q^{*-2} = \frac{\bar{\eta}^2(1+2\bar{\eta})}{128} \quad (2.38)$$

En développant la relation (2.38), nous pouvons écrire que :

$$\bar{\eta}^3 + \frac{1}{2}\bar{\eta}^2 - 64Q^{*-2} = 0 \quad (2.39)$$

Nous obtenons ainsi une équation de troisième degré en $\bar{\eta}$, comprenant un terme de second ordre. L'équation obtenue se présente sous la forme :

$$\bar{\eta}^3 + a\bar{\eta}^2 + b\bar{\eta} + c = 0 \quad (2.40)$$

Avec :

$$a = 1/2, \quad b = 0, \quad c = -64Q^{*-2}$$

En procédant au changement de variables :

$$\bar{\eta} = x - a/3 = x - 1/6$$

on obtient alors une équation de troisième degré en x , sans terme du second ordre :

$$x^3 + px + q = 0$$

où :

$$p = b - \frac{a^2}{3} = -\frac{1}{12}$$

$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = \frac{1}{108} - \frac{64}{Q^{*2}}$$

Le discriminant de l'équation en x est :

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Soit, après simplifications et réarrangements :

$$\Delta = -\frac{8}{27Q^{*4}}(Q^* - 24\sqrt{6})(Q^* + 24\sqrt{6})$$

Il apparaît donc que lorsque la conductivité relative est telle que $Q^* \leq 24\sqrt{6}$, alors le discriminant Δ est positif ou nul ($\Delta \geq 0$). Pour $Q^* = 24\sqrt{6}$, la valeur du paramètre de forme $\bar{\eta}$ est, selon l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}$: $\bar{\eta} = 1/6$.

Autrement dit, si $\bar{\eta} \geq 1/6$, ce qui est le cas le plus courant, alors $Q^* \leq 24\sqrt{6}$ et le discriminant Δ est négatif ou nul ($\Delta \leq 0$).

Dans ce cas, la solution réelle de l'équation du troisième degré en x est unique et elle s'obtient après avoir calculé l'angle α tel que :

$$ch(3\alpha) = \frac{3q}{2\sqrt{\frac{p^3}{3}}}$$

soit :

$$ch(3\alpha) = 1 - \frac{6912}{Q^{*2}} \quad (2.41)$$

La racine réelle de l'équation de troisième degré en x est :

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}ch(\alpha)$$

soit :

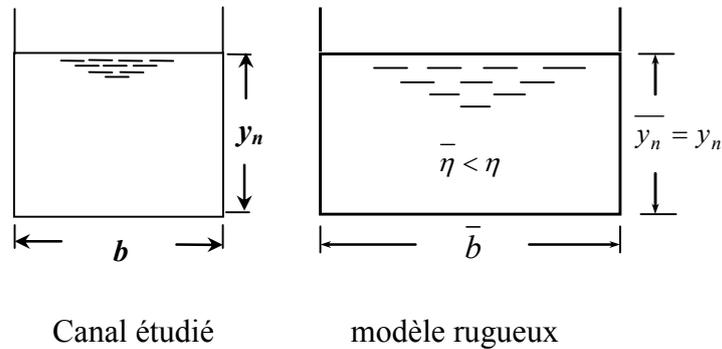
$$x = \frac{1}{3}ch(\alpha)$$

En tenant compte du changement de variables adopté, la racine réelle de l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}$ est donc :

$$\bar{\eta} = \frac{1}{3} \left[ch(\alpha) - \frac{1}{2} \right] \quad (2.42)$$

Pour résoudre le problème du dimensionnement du canal lorsque la profondeur normale y_n est imposée, il faut donc supposer dans un premier temps que la profondeur normale \bar{y}_n de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence soit égale à celle y_n de l'écoulement dans le canal étudié.

En outre, si l'on faisait écouler le même débit volume $Q = \bar{Q}$ dans le modèle rugueux et dans le canal, sous la même pente géométrique $i = \bar{i}$, alors la largeur \bar{b} du modèle rugueux de référence devrait être nécessairement différente de la largeur b ($b \neq \bar{b}$), voire même supérieure ($\bar{b} > b$). Nous obtenons schématiquement ce qui suit :



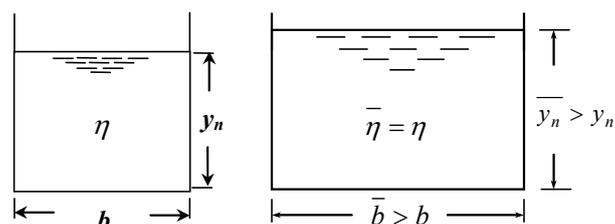
Cela revient à dire que pour obtenir, pour le même débit volume Q et la pente géométrique i , la même profondeur normale, il est nécessaire de d'étirer ou de rallonger dans le sens horizontal le modèle rugueux, c'est-à-dire augmenter sa dimension linéaire \bar{b} .

En réalité, il est nécessaire de préciser que la profondeur normale y_n est différente de son homologue \bar{y}_n dans le modèle rugueux. Pour obtenir le même rapport d'aspect η dans le canal étudié et dans le modèle rugueux ($\eta = \bar{\eta}$), il est nécessaire que la profondeur normale dans le modèle rugueux soit telle que $\bar{y}_n = y_n / \psi$. Cela revient donc à dire que pour la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g i (y_n / \psi)^5}}$$

l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}$ exprimée par la relation (2.39) mènerait à $\bar{\eta} = \eta$. Ceci permettrait alors de déduire la valeur recherchée de la dimension linéaire b , puisque $b = y_n / \eta$.

Le schéma suivant permet d'illustrer l'état de l'écoulement dans le canal étudié et dans le modèle rugueux, pour le rapport d'aspect $\bar{\eta} = \eta$.



Afin de mieux préciser cette démarche de calcul qui consiste à évaluer la largeur b du canal pour une valeur imposée de la profondeur normale, les étapes suivantes sont recommandées :

1. Pour les valeurs connues des paramètres Q , i et y_n , et en admettant dans un premier temps que $y_n = \bar{y}_n$, calculer selon la relation (2.37) la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g i \bar{y}_n^5}} = \frac{Q}{\sqrt{g i y_n^5}}$$

2. Pour la valeur connue de la conductivité relative Q^* , on détermine par application de la relation (2.41) la valeur de l'angle α . Notons qu'il faudra toujours considérer la valeur absolue de $ch3\alpha$ par application de la relation (2.41).
3. Une fois déterminée la valeur de l'angle α , la relation (2.42) permet de calculer la valeur du rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux de référence.
4. Pour les valeurs ainsi connues des paramètres $y_n = \bar{y}_n$ et de $\bar{\eta}$, nous pouvons alors déduire la valeur de la dimension linéaire $\bar{b} = y_n / \bar{\eta}$ du modèle rugueux.
5. Avec les valeurs calculées de \bar{b} et de $\bar{\eta}$, les relations (2.9), (2.11) et (2.32) permettent d'évaluer respectivement le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de *Reynolds* \bar{R} .
6. Les valeurs connues des paramètres ε , \bar{D}_h et \bar{R} seront introduites dans la relation (2.35) pour la détermination du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
7. Une fois la valeur de ψ déterminée, il faut maintenant affecter à l'écoulement dans le modèle rugueux la profondeur normale $\bar{y}_n = y_n / \psi$, pour la valeur imposée de la profondeur normale y_n .
8. On calcule pour la valeur de la profondeur normale \bar{y}_n de l'étape 7, la nouvelle valeur de la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g i \bar{y}_n^5}} = \frac{Q}{\sqrt{g i (y_n / \psi)^5}}$$

9. Cette nouvelle valeur de la conductivité relative permet, selon la relation (2.41) la valeur de l'angle α .
10. Avec la valeur connue de l'angle α , l'application de la relation (2.42) conduit à la valeur du rapport d'aspect $\bar{\eta} = \eta$.

11. Une fois la valeur de η déterminée, la dimension linéaire recherchée b est directement déduite de la relation $b = y_n / \eta$.

L'exemple d'application suivant est proposé pour mieux illustrer les étapes de calcul ci-dessus indiquées du dimensionnement du canal étudié lorsque la profondeur normale est imposée. Par souci de comparaison, cet exemple d'application reconduit les données de l'exemple d'application 2.1.

Exemple d'application 2.2.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 2.1, soient :

$$Q = 3,861 \text{ m}^3 / \text{s}, \quad i = 10^{-3}, \quad \varepsilon = 10^{-3} \text{ m}, \quad y_n = 1,2 \text{ m}, \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}.$$

La profondeur normale y_n a été évaluée au cours de l'exemple d'application 2.1 et elle est imposée dans le présent exemple. Il s'agit alors d'évaluer la dimension linéaire b du canal. Le résultat attendu devra être le même que celui obtenu lors de la solution de l'exemple d'application 2.1.

Solution

i. Admettons dans un premier temps que la profondeur normale \bar{y}_n de l'écoulement dans le modèle rugueux soit la même que celle y_n dans le canal étudié. Calculons alors la conductivité relative Q^* en application de la relation (2.37) :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g i \bar{y}_n^5}} = \frac{Q}{\sqrt{g i y_n^5}} = \frac{3,861}{\sqrt{9,81 \times 10^{-3} \times 1,2^5}} = 24,71224397$$

ii. En application de la relation (2.41), nous déduisons que :

$$ch(3\alpha) = \left| 1 - \frac{6912}{Q^{*2}} \right| = \left| 1 - \frac{6912}{24,71224397^2} \right| = +10,31825212$$

L'angle α est alors :

$$\alpha = \frac{1}{3} \arg sh(10,31825212) = 1,008235028 \text{ radians}$$

Par suite :

$$ch(\alpha) = ch(1,008235028) = 1,552810882$$

iii. Compte tenu de la relation (2.42), le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux est :

$$\bar{\eta} = \frac{1}{3} \left[ch(\alpha) - \frac{1}{2} \right] = (1,552810882 - 0,5) / 3 = 0,350936961$$

iv. La dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux est par suite :

$$\bar{b} = \frac{\bar{y}_n}{\bar{\eta}} = \frac{y_n}{\eta} = \frac{1,2}{0,350936961} = 3,419417545 \text{ m}$$

v. Avec les valeurs calculées de \bar{b} et de $\bar{\eta}$, les relations (2.9), (2.11) et (2.32) permettent d'évaluer respectivement le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de Reynolds \bar{R} . Soit :

$$\bar{P} = \bar{b}(1 + 2\bar{\eta}) = 3,419417545 \times (1 + 2 \times 0,350936961) = 5,819417545 \text{ m}$$

$$\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\bar{\eta}}{1 + 2\bar{\eta}} = 4 \times 3,419417545 \times \frac{0,350936961}{1 + 2 \times 0,350936961} = 2,820420444 \text{ m}$$

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}\nu} = \frac{4 \times 3,861}{5,819417545 \times 10^{-6}} = 2653873,842$$

vi. Avec les valeurs ainsi calculées de \bar{D}_h et de \bar{R} , la relation (2.35) permet d'évaluer le facteur de correction des dimensions linéaires ψ , soit :

$$\begin{aligned} \psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 2,820420444}{4,75} + \frac{8,5}{2653873,842} \right) \right]^{-2/5} = 0,767095457 \end{aligned}$$

vii. Si l'on affectait à l'écoulement dans le modèle rugueux la profondeur normale :

$$\bar{y}_n = y_n / \psi = 1,2 / 0,767095457 = 1,564342468 \text{ m}$$

alors la relation (2.42) donnerait une valeur de $\bar{\eta}$ égale à celle de η dans le canal étudié. Cette valeur $\bar{\eta} = \eta$ doit être calculée avec la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gJ(\bar{y}_n / \psi)^5}} = \frac{3,861}{\sqrt{9,81 \times 10^{-3} \times (1,2 / 0,767095457)^5}} = 12,73607797$$

viii. Selon la relation (2.41), l'angle α est tel que :

$$ch(3\alpha) = 1 - \frac{6912}{Q^{*2}} = \left| 1 - \frac{6912}{12,73607797^2} \right| = +41,61203852$$

soit :

$$\alpha = \frac{1}{3} \arg sh(41,61203852) = 1,473797428 \text{ radian}$$

Ainsi :

$$ch(\alpha) = ch(1,473797428) = 2,297418231$$

ix. Par suite, la relation (2.42) mène à :

$$\bar{\eta} = \eta = \frac{1}{3} \left[ch(\alpha) - \frac{1}{2} \right] = (2,297418231 - 0,5) / 3$$

soit :

$$\bar{\eta} = \eta = 0,59913941 \approx 0,60$$

x. Enfin, nous pouvons déduire la valeur recherchée de la dimension linéaire b du canal, puisque :

$$b = \frac{y_n}{\eta} = \frac{1,2}{0,6} = 2m$$

Il s'agit bien de la valeur de b calculée au cours de l'exemple d'application 2.1.

II.2.7. Dimensionnement du canal par la relation de *Chézy* pour une profondeur normale imposée

Dans cette partie de notre étude, le problème consiste à déterminer la dimension linéaire b du canal par application de la relation de *Chézy*, tout en imposant une valeur de la profondeur normale y_n .

L'une des difficultés du problème est l'évaluation du coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. En pratique, la valeur de ce coefficient n'est pas donnée et seule la valeur de la rugosité absolue ε peut être évaluée. Pour contourner cette difficulté, le recours à la méthode du modèle rugueux de référence est d'une grande utilité.

Le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est étroitement lié au coefficient de frottement f par la relation bien connue :

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (2.43)$$

Définissons pour le modèle rugueux de référence le coefficient de résistance à l'écoulement \bar{C} de *Chézy*. Selon la relation (2.43), nous pouvons écrire que :

$$\bar{C} = \sqrt{\frac{8g}{\bar{f}}} \quad (2.44)$$

Or, nous avons déjà établi au cours des paragraphes précédents que le coefficient de frottement \bar{f} de l'écoulement dans le modèle rugueux est constant et est tel que $\bar{f} = 1/16$. En introduisant cette valeur dans la relation (2.44), il vient que :

$$\bar{C} = 8\sqrt{2g} \quad (2.45)$$

Ainsi, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* dans le modèle rugueux est aussi une constante.

Il faut noter que dans le canal étudié, le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* n'est pas une constante. Il dépend à la fois essentiellement de la dimension linéaire b , de la rugosité absolue ε et du rapport d'aspect η .

En combinant les relations (2.27) et (2.43), nous pouvons aisément déduire que :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (2.46)$$

Ainsi, comme pour le coefficient de frottement f , le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est étroitement lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

Selon *Chézy*, le débit volume Q écoulement par le canal est donné par la relation :

$$Q = CA\sqrt{R_h i} \quad (2.47)$$

où R_h désigne le rayon hydraulique, tel que $R_h = D_h / 4$. Le diamètre hydraulique D_h est donné par la relation (2.5), ce qui permet d'écrire que pour le canal de forme rectangulaire :

$$R_h = b \frac{\eta}{1+2\eta} \quad (2.48)$$

L'aire de la section mouillée A , figurant dans la relation (2.47), est régie par la relation (2.2). Ainsi, en introduisant les relations (2.2) et (2.48) dans la relation (2.47) de *Chézy*, il vient que :

$$Q = Cb^2\eta\sqrt{b\frac{\eta}{1+2\eta}i}$$

Soit :

$$Q = Cb^{5/2} \frac{\eta^{3/2}}{\sqrt{1+2\eta}} \sqrt{i} \quad (2.49)$$

En élevant d'une part au carré les deux membres de l'équation (2.49), nous pouvons écrire :

$$Q^2 = C^2 b^5 \frac{\eta^3}{1+2\eta} i \quad (2.50)$$

En divisant d'autre part les membres de l'équation (2.50) par y_n^5 , il vient que :

$$\frac{Q^2}{y_n^5} = C^2 \frac{b^5}{y_n^5} \left(\frac{\eta^3}{1+2\eta} \right) i \quad (2.51)$$

Ou bien, en tenant compte du fait que $\eta = y_n / b$:

$$\frac{Q^2}{C^2 y_n^{5/2} i} = \frac{1}{\eta^2 (1+2\eta)} \quad (2.52)$$

Introduisons la conductivité relative Q^* , telle que :

$$Q^* = \frac{Q}{C y_n^{5/2} \sqrt{i}} \quad (2.53)$$

La relation (2.52) devient alors :

$$Q^{*2} = \frac{1}{\eta^2 (1+2\eta)} \quad (2.54)$$

En développant la relation (2.54), nous obtenons l'équation de troisième degré suivante :

$$\eta^3 + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2Q^{*2}} = 0 \quad (2.55)$$

Il s'agit donc d'une équation de troisième degré en η , avec un terme du second ordre.

Adoptons le changement de variables suivant :

$$\eta = x - \frac{1}{6}$$

La relation (2.55) prend alors la forme suivante :

$$x^3 + px + q = 0 \quad (2.56)$$

avec :

$$p = -1/12$$

$$q = \frac{(Q^* - 3\sqrt{6})(Q^* + 3\sqrt{6})}{108Q^{*2}}$$

Le discriminant de l'équation (2.56) est donné par :

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Soit :

$$\Delta = -\frac{3}{(6Q^*)^4} (Q^* - 3\sqrt{3})(Q^* + 3\sqrt{3})$$

Nous pouvons donc conclure que :

1. Lorsque $Q^* \geq 3\sqrt{3}$, alors $\Delta \leq 0$ et la racine réelle de l'équation de troisième degré en x exprimée par la relation (2.56) est :

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos(\beta/3)$$

Soit :

$$x = \frac{1}{3} \cos(\beta/3)$$

où l'angle β est tel que :

$$\cos(\beta) = \frac{3q}{2\sqrt{\frac{p^3}{3}}}$$

$$\cos(\beta) = 1 - \frac{54}{Q^{*2}} \quad (2.57)$$

En tenant compte du changement de variables que nous avons adopté, la racine réelle en η exprimé par la relation (2.55) est par suite :

$$\eta = \frac{1}{3} \left[\cos(\beta/3) - \frac{1}{2} \right] \quad (2.58)$$

2. Lorsque $Q^* \leq 3\sqrt{3}$, alors $\Delta \geq 0$ et la racine réelle de l'équation de troisième degré en x exprimée par la relation (2.56) est :

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{ch}(\beta/3)$$

Soit :

$$x = \frac{1}{3} \operatorname{ch}(\beta/3)$$

où β est tel que :

$$ch(\beta) = \frac{3q}{2\sqrt{\frac{p^3}{3}}}$$

Soit :

$$ch(\beta) = 1 - \frac{54}{Q^{*2}} \quad (2.59)$$

En tenant compte du changement de variables que nous avons adopté, la racine réelle de l'équation du troisième degré en η exprimée par la relation (2.55) est :

$$\eta = \frac{1}{3} \left[ch(\beta/3) - \frac{1}{2} \right] \quad (2.60)$$

Une fois le rapport d'aspect η est évalué par application de l'une ou l'autre des relations (2.58) et (2.60), la dimension linéaire recherchée b est directement déduite de la relation $b = y_n / \eta$, sachant que la profondeur normale y_n est imposée et donc connue.

Pour résoudre le problème du dimensionnement du canal lorsque la profondeur normale est imposée, il est nécessaire d'adopter les conditions suivantes :

$$\bar{Q} = Q, \bar{i} = i, \bar{y}_n = y_n$$

Cela revient à dire que le canal étudié et le modèle rugueux écoulent le même débit volume Q , sous la même pente géométrique i et pour une même profondeur normale y_n dans un premier temps.

Sous ces conditions, il faut appliquer les relations (2.58) et (2.60) au modèle rugueux de référence, pour la conductivité relative :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\bar{C} y_n^{5/2} \sqrt{i}} \quad (2.61)$$

La conductivité relative \bar{Q}^* est bien définie, puisque le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy \bar{C} est donné par la relation (2.45) et que le débit volume Q , la profondeur normale y_n et la pente géométrique i sont des données du problème. Cette conductivité relative \bar{Q}^* doit être comparée à la constante $3\sqrt{3}$ et lorsque :

1. $\bar{Q}^* \geq 3\sqrt{3}$, le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ est donné par la relation (2.58), en remplaçant η par $\bar{\eta}$, soit :

$$\bar{\eta} = \frac{1}{3} \left[\cos(\beta/3) - \frac{1}{2} \right] \quad (2.62)$$

2. $\bar{Q}^* \leq 3\sqrt{3}$, le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ est donné par la relation (2.60), en remplaçant η par $\bar{\eta}$, soit :

$$\bar{\eta} = \frac{1}{3} \left[ch(\beta/3) - \frac{1}{2} \right] \quad (2.63)$$

Une fois le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ déterminé, il permet l'évaluation de la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence par simple application de la relation $\bar{b} = y_n / \bar{\eta}$. Pour les valeurs ainsi connues des paramètres $\bar{\eta}$ et \bar{b} , les relations (2.10), (2.11) et (2.32) permettent de calculer respectivement le diamètre hydraulique \bar{D}_h , le périmètre mouillé \bar{P} et le nombre de Reynolds \bar{R} . Les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence sont donc bien déterminées et elles permettent surtout le calcul du coefficient de correction des dimensions linéaires ψ par application de la relation (2.35).

Si l'on affectait au modèle rugueux de référence la profondeur normale $\bar{y}_n = y_n / \psi$ et dont la valeur est bien déterminée, alors les rapports d'aspect η et $\bar{\eta}$ deviennent identiques. Ceux-ci sont donnés par les relations (2.60) ou (2.62) selon la valeur de la conductivité relative \bar{Q}^* dont la valeur doit être déterminée par application de la relation :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\bar{C}(y_n / \psi)^{5/2} \sqrt{i}}$$

Ou bien :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2g}(y_n / \psi)^{5/2} \sqrt{i}} \quad (2.64)$$

La détermination de la valeur du rapport d'aspect η mène enfin à celle de la dimension linéaire recherchée b , par application de la relation $b = y_n / \eta$.

Afin de mieux illustrer les étapes de calcul de la dimension linéaire b par application de la formule de Chézy et lorsque la profondeur normale est imposée, l'exemple d'application suivant est proposé.

Exemple d'application 2.3.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 2.1, soient :

$$Q = 3,861 \text{ m}^3 / \text{s}, \quad i = 10^{-3}, \quad \varepsilon = 10^{-3} \text{ m}, \quad y_n = 1,2 \text{ m}, \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}.$$

Il s'agit de déterminer la dimension linéaire b du canal de forme rectangulaire, en ayant

recours à la formule de *Chézy*. Il faut noter que le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* n'est pas une donnée du problème. Seule la rugosité absolue ε , liée à la nature du matériau constituant la paroi interne du canal, est connue.

Solution

- i. Calculons la conductivité relative \bar{Q}^* par application de la relation (2.61) pour le coefficient de résistance à l'écoulement $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$:

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2g}y_n^{5/2}\sqrt{i}} = \frac{3,861}{8 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,2^{5/2} \sqrt{0,001}} = 2,184274411$$

- ii. La valeur ainsi calculée de \bar{Q}^* est inférieure à $3\sqrt{3}$, l'angle β doit donc être calculé par application de la relation (2.59). Soit :

$$ch(\beta) = 1 - \frac{54}{\bar{Q}^{*2}} = \left| 1 - \frac{54}{2,184274411^2} \right| = 10,31825212$$

Soit :

$$\beta = 3,024705084 \text{ radians}$$

- iii. Selon la relation (2.63), le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux est :

$$\bar{\eta} = \frac{1}{3} \left[ch(\beta/3) - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{3} \times \left[ch(3,024705084/3) - \frac{1}{2} \right] = 0,350936961$$

- iv. La dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence est donc :

$$\bar{b} = y_n / \bar{\eta} = 1,2 / 0,350936961 = 3,419417545 \text{ m}$$

- v. En vertu de la relation (2.11), le diamètre hydraulique \bar{D}_h est :

$$\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\bar{\eta}}{1+2\bar{\eta}} = 4 \times 3,419417545 \times \frac{0,350936961}{1+2 \times 0,350936961} = 2,820420444 \text{ m}$$

- vi. Le périmètre mouillé \bar{P} est, selon la relation (2.10) :

$$\bar{P} = \bar{b}(1+2\bar{\eta}) = 3,419417545 \times (1+2 \times 0,350936961) = 5,819417545 \text{ m}$$

- vii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est, selon la relation (2.32) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P_V} = \frac{4 \times 3,861}{5,819417545 \times 10^{-6}} = 2653873,842$$

- viii. Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est, en application de la relation (2.35) :

$$\begin{aligned}\psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 2,820420444}{4,75} + \frac{8,5}{2653873,842} \right) \right]^{-2/5} = 0,767095457\end{aligned}$$

ix. Si la profondeur normale de l'écoulement dans le modèle rugueux était égale à :

$$y_n / \psi = 1,2 / 0,767095457 = 1,564342468 m$$

alors le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle serait égal au rapport d'aspect η dans le canal étudié, pour la conductivité relative \bar{Q}^* donnée par la relation (2.64). Soit :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2g}(y_n / \psi)^{5/2} \sqrt{i}} = \frac{3,861}{8 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,564342468^{5/2} \times \sqrt{0,001}} = 1,125720887$$

x. Cette conductivité relative est aussi inférieure à $3\sqrt{3}$ et l'angle β doit donc être calculé par application de la relation (2.59). Soit :

$$ch(\beta) = 1 - \frac{54}{Q^{*2}} = \left| 1 - \frac{54}{1,125720887^2} \right| = 41,61203852$$

Soit :

$$\beta = 4,421392284 \text{ radians}$$

Selon la relation (2.63), le rapport d'aspect est tel que :

$$\bar{\eta} = \eta = \frac{1}{3} \left[ch(\beta/3) - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{3} \times \left[ch(4,421392284/3) - \frac{1}{2} \right] = 0,59913941 \approx 0,6$$

xi. La dimension linéaire recherchée b est par suite :

$$b = y_n / \eta = 1,2 / 0,6 = 2 m$$

Il s'agit bien encore une fois de la dimension linéaire b calculée au cours des exemples d'application (2.1) et (2.2).

xii. Cette étape vise à vérifier les calculs effectués en déterminant le débit volume Q par la formule de Chézy, pour la dimension linéaire b calculée.

Le débit volume selon Chézy s'exprime par la relation (2.47), soit :

$$Q = CA\sqrt{R_h i}$$

Le coefficient C de Chézy peut être évalué par application de la relation (2.46), soit :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,767095457^{5/2}} = 68,75684845 m^{0,5} / s$$

L'aire de la section mouillée A est telle que :

$$A = b^2 \eta = 2^2 \times 0,6 = 2,4 \text{ m}^2$$

Le périmètre mouillé P est :

$$P = b(1 + 2\eta) = 2 \times (1 + 2 \times 0,6) = 4,4 \text{ m}$$

Par suite, le rayon hydraulique est :

$$R_h = A / P = 2,4 / 4,4 = 0,54545455 \text{ m}$$

Ainsi, le débit volume Q serait, selon Chézy :

$$Q = CA\sqrt{R_h i} = 68,75684845 \times 2,4 \times \sqrt{0,54545455 \times 0,001} \approx 3,854 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons donc constater que l'écart relatif entre la valeur ainsi calculée de Q par application de la relation de Chézy et la valeur de Q donnée à l'énoncé est inférieur à 0,2% seulement. Ceci confirme la validité des calculs effectués au cours de l'exemple d'application considéré.

xiii. La vérification des calculs peut être également effectuée par la détermination du débit volume Q par application de la relation générale de Achour et Bedjaoui (2006). Cette relation générale est applicable à l'ensemble des profils géométriques connus, en particulier au profil rectangulaire qui intéresse notre étude. Selon Achour et Bedjaoui (2006), le débit volume Q est donné par la relation :

$$Q = -4\sqrt{2g}A\sqrt{R_h i} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right)$$

où \bar{R} est un nombre de Reynolds régi par la relation :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu}$$

Ainsi :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{giR_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,001 \times 0,54545455^3}}{10^{-6}} = 1805665,614$$

Le débit volume Q serait donc égal à :

$$Q = -4\sqrt{2g}A\sqrt{R_h i} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right) = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,4 \times \sqrt{0,54545455 \times 10^{-3}} \times \log\left(\frac{10^{-3}}{14,8 \times 0,54545455} + \frac{10,04}{1805665,614}\right) = 3,8612 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Il s'agit bien de la même valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré. Ceci confirme encore une fois la validité des calculs que nous avons effectués au cours de l'exemple d'application.

II.2.8. Dimensionnement du canal par la relation de *Chézy* pour un rapport d'aspect imposé

Le problème consiste à déterminer la dimension linéaire b correspondant à la largeur du canal étudié pour les valeurs connues du débit volume Q , de la rugosité absolue ε , de la pente géométrique i , de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement et pour la valeur imposée du rapport d'aspect η ou paramètre de forme.

Reprenons la relation (2.49), soit :

$$Q = C b^{5/2} \frac{\eta^{3/2}}{\sqrt{1+2\eta}} \sqrt{i}$$

De cette relation, nous pouvons déduire que la dimension linéaire b est :

$$b = \left(\frac{Q}{C \sqrt{i}} \right)^{2/5} \frac{(1+2\eta)^{1/5}}{\eta^{3/5}} \quad (2.65)$$

Les paramètres connus dans la relation (2.65) sont le débit volume Q , la pente géométrique i et le rapport d'aspect η . Le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy n'est pas connu et la relation (2.65) ne peut donc permettre sous sa forme actuelle l'évaluation de la dimension linéaire b . Cette difficulté peut être contournée en ayant recours à la méthode du modèle rugueux.

Appliquons la relation (2.65) au modèle rugueux de référence, pour $\bar{Q} = Q$, $\bar{i} = i$. Nous obtenons alors l'expression de la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux, soit :

$$\bar{b} = \left(\frac{Q^2}{\bar{C}^2 i} \right)^{1/5} \left(\frac{1+2\bar{\eta}}{\bar{\eta}^3} \right)^{1/5} \quad (2.66)$$

Rappelons que le coefficient de résistance à l'écoulement \bar{C} de *Chézy* pour le modèle rugueux est donné par la relation (2.45) et il est donc bien déterminé. La relation (2.66) devient alors :

$$\bar{b} = \left(\frac{Q^2}{g i} \right)^{1/5} \left(\frac{1+2\bar{\eta}}{128\bar{\eta}^3} \right)^{1/5} \quad (2.67)$$

Admettons, dans un premier, que le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux soit le même que celui de l'écoulement dans le canal étudié, soit $\bar{\eta} = \eta$. La relation (2.67) s'écrit alors :

$$\bar{b} = \left(\frac{Q^2}{g i} \right)^{1/5} \left(\frac{1+2\eta}{128\eta^3} \right)^{1/5} \quad (2.68)$$

Ainsi, tous les paramètres figurant dans le membre droit de l'équation (2.68) sont bien déterminés et cette équation permet donc d'évaluer de manière explicite la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux. Ce qu'il faut noter c'est que la relation (2.68) est identique à la relation (2.19) obtenue par la transformation de la relation de *Darcy-Weisbach*. Ceci revient à dire que le dimensionnement du canal par application de la relation de *Chézy* s'effectue selon les mêmes étapes que celles indiquées dans le paragraphe II.2.5.

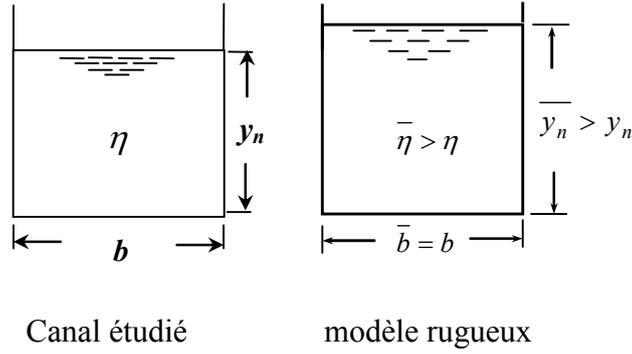
II.3. Détermination de la profondeur normale

L'un des problèmes rencontrés dans l'étude de l'écoulement uniforme est la détermination de la profondeur normale y_n . Pour cela, les paramètres connus sont : le débit volume Q écoulé par le canal, la dimension linéaire b correspondant à la largeur du canal, la pente géométrique i du canal, la rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne du canal et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Le but du calcul est de déterminer le rapport d'aspect η et de déduire la profondeur normale y_n par la relation $y_n = b\eta$. Nous verrons dans cette partie de notre étude que le calcul est en grande partie facilité par la méthode du modèle rugueux.

II.3.1. Calcul de la profondeur normale par la relation de *Darcy-Weisbach*

On considère un modèle rugueux de référence de forme rectangulaire dont la largeur est $\bar{b} = b$, écoulant un débit $\bar{Q} = Q$ sous la pente géométrique $\bar{i} = i$. La dimension linéaire b , le débit volume Q et la pente géométrique i sont donc identiques dans le canal étudié et dans le modèle rugueux.

Le paramètre de forme ou rapport d'aspect de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est donc tel que $\bar{\eta} \neq \eta$, correspondant à $\bar{y}_n \neq y_n$. Nous pouvons même écrire que $\bar{\eta} > \eta$ et $\bar{y}_n > y_n$. Nous avons alors schématiquement ce qui suit :



L'application de la relation de *Darcy-Weisbach* au modèle rugueux de référence à conduit à l'établissement de la relation (2.20) qui, pour $\bar{\eta} \neq \eta$, devient :

$$\bar{y}_n = \left[\frac{\bar{\eta}^{-2} (1 + 2\bar{\eta})}{128} \right]^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (2.69)$$

En divisant les deux membres de l'équation (2.69) par b et en remarquant que $\bar{\eta} = \bar{y}_n / b$, il est aisé de montrer que :

$$\bar{\eta} = \left[\frac{\bar{\eta}^{-2} (1 + 2\bar{\eta})}{128} \right]^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gib^5} \right)^{1/5}$$

Ou bien :

$$1 = \left[\frac{\bar{\eta}^{-2} (1 + 2\bar{\eta})}{128\bar{\eta}^{-5}} \right]^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gib^5} \right)^{1/5}$$

Soit, après simplifications :

$$1 = \left[\frac{1 + 2\bar{\eta}}{128\bar{\eta}^{-3}} \right]^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gib^5} \right)^{1/5} \quad (2.70)$$

Introduisons, par définition, la conductivité relative rapportée à la dimension linéaire b :

$$Q_b^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} \quad (2.71)$$

La relation (2.70) prend alors la forme :

$$1 = \left[\frac{1 + 2\bar{\eta}}{128\bar{\eta}^{-3}} \right]^{1/5} Q_b^{*2/5} \quad (2.72)$$

Ou bien, plus simplement :

$$1 = \frac{1+2\bar{\eta}}{128\bar{\eta}^3} Q_b^{*2} \quad (2.73)$$

L'on peut donc remarquer que la relation (2.73) est une équation de troisième degré en $\bar{\eta}$, sans terme du second ordre. Cette équation s'écrit :

$$\bar{\eta}^3 - \frac{Q_b^{*2}}{64} \bar{\eta} - \frac{Q_b^{*2}}{128} = 0 \quad (2.74)$$

La conductivité relative Q_b^* est la variable connue de l'équation (2.74) et celle-ci permet alors de déterminer le rapport d'aspect $\bar{\eta}$. L'équation (2.74) se présente sous la forme :

$$x^3 - px - q = 0 \quad (2.75)$$

Avec : $x = \bar{\eta}$, $p = Q_b^{*2} / 64$, $q = Q_b^{*2} / 128$

Le discriminant de l'équation (2.75) est :

$$\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3$$

Soit :

$$\Delta = \left(\frac{Q_b^*}{16}\right)^4 \left(1 - \frac{Q_b^*}{6\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{Q_b^*}{6\sqrt{3}}\right)$$

Nous pouvons donc écrire que :

1. Lorsque $Q_b^* \geq 6\sqrt{3}$, le discriminant Δ est négatif ou nul et la racine réelle de l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}$ exprimée par (2.74) s'écrit :

$$\bar{\eta} = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos(\beta/3)$$

Soit :

$$\bar{\eta} = \frac{Q_b^*}{4\sqrt{3}} \cos(\beta/3) \quad (2.76)$$

Où l'angle β est tel que :

$$\cos(\beta) = \frac{3q}{2\sqrt{\frac{p^3}{3}}}$$

Soit :

$$\cos(\beta) = \frac{6\sqrt{3}}{Q_b^*} \quad (2.77)$$

2. Lorsque $Q_b^* \leq 6\sqrt{3}$, le discriminant Δ est positif ou nul et la racine réelle de l'équation de troisième degré en $\bar{\eta}$ est :

$$\bar{\eta} = 2\sqrt{\frac{p}{3}} ch(\beta/3)$$

Soit :

$$\bar{\eta} = \frac{Q_b^*}{4\sqrt{3}} ch(\beta/3) \quad (2.78)$$

Où l'angle β est tel que :

$$ch(\beta) = \frac{3q}{2\sqrt{\frac{p}{3}}}$$

Soit :

$$ch(\beta) = \frac{6\sqrt{3}}{Q_b^*} \quad (2.79)$$

Notons que, par des considérations trigonométriques, la racine réelle exprimée par la relation (2.78) peut s'écrire :

$$\bar{\eta} = \left(\frac{Q_b^{*2}}{256} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}} \right)^{1/3} \right] \quad (2.80)$$

Nous venons donc d'établir les relations (2.76) et (2.80) permettant de calculer le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux de référence, à partir de la valeur connue de la conductivité relative Q_b^* .

Une fois la valeur de $\bar{\eta}$ déterminée et compte tenu de la valeur connue de la dimension linéaire b correspondant également à \bar{b} , les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence sont alors bien définies. C'est en particulier le cas du périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et du nombre de *Reynolds* \bar{R} . Ces paramètres sont déterminés respectivement par application des relations (2.10), (2.11) et (2.32). Ainsi et selon la relation (2.35), le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est par suite un paramètre bien défini que l'on peut calculer aisément.

Si l'on affectait au modèle rugueux de référence la dimension linéaire $\bar{b} = b/\psi$, alors le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux serait égal à celui η dans le canal étudié,

soit $\bar{\eta} = \eta$. Ce rapport d'aspect est calculé par application de l'une des relations (2.76) ou (2.80), selon que la conductivité relative Q_b^* est supérieure ou inférieure à $6\sqrt{3}$. Notons que le calcul doit être effectué pour la conductivité relative :

$$Q_b^* = \frac{Q}{\sqrt{gi(b/\psi)^5}} \quad (2.81)$$

Une fois le rapport d'aspect $\bar{\eta} = \eta$ déterminé, la valeur de la profondeur normale y_n recherchée est déduite de la relation $y_n = b\eta$.

Afin d'illustrer la démarche de calcul que nous venons d'exposer et qui mène au calcul de la profondeur normale y_n , l'exemple d'application suivant est proposé. Par souci de comparaison, nous reprenons les données de l'exemple d'application 2.1.

Exemple d'application 2.4.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 2.1, soient :

$$Q = 3,861 \text{ m}^3 / \text{s}, \quad i = 10^{-3}, \quad \varepsilon = 10^{-3} \text{ m}, \quad b = 2 \text{ m}, \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}.$$

Il s'agit de calculer la valeur de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme rectangulaire étudié.

Solution

i. Les données du problème sont telles que la conductivité relative Q_b^* :

$$Q_b^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} = \frac{3,861}{\sqrt{9,81 \times 10^{-3} \times 2^5}} = 6,891127872$$

Ainsi :

$$Q_b^* < 6\sqrt{3} = 10,39230485$$

Le discriminant Δ de l'équation est par suite positif et le paramètre de forme $\bar{\eta}$ est alors donné par l'une des relations (2.78) ou (2.80), soit :

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= \left(\frac{Q_b^{*2}}{256}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}}\right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{6,891127872^2}{256}\right)^{1/3} \times \\ &\left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{6,891127872^2}{108}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{6,891127872^2}{108}}\right)^{1/3} \right] = 1,0470522833\end{aligned}$$

ii. Avec la valeur donnée de $b = \bar{b}$ et celle calculée de $\bar{\eta}$, les relations (2.10), (2.11) et (2.32) permettent de déterminer le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de Reynolds \bar{R} :

$$\bar{P} = \bar{b}(1 + 2\bar{\eta}) = 2 \times (1 + 2 \times 1,0470522833) = 6,188211334 \text{ m}$$

$$\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\bar{\eta}}{1 + 2\bar{\eta}} = 4 \times 2 \times \frac{1,0470522833}{1 + 2 \times 1,0470522833} = 2,707219329 \text{ m}$$

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 3,861}{6,188211334 \times 10^{-6}} = 2495713,085$$

iii. Selon la relation (2.35), le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est donc :

$$\begin{aligned}\psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h + 8,5}{4,75 + \bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \\ &\left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 2,707219329 + 8,5}{4,75 + 2495713,085} \right) \right]^{-2/5} = 0,768455839\end{aligned}$$

iv. Si l'on affectait au modèle rugueux de référence la dimension linéaire :

$$\bar{b} = b / \psi = 2 / 0,768455839 = 2,602621907 \text{ m}$$

alors l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}$ donnerait une valeur de $\bar{\eta}$ égale à celle de la section mouillée de l'écoulement dans le canal étudié, soit $\eta = \bar{\eta}$. Cette nouvelle valeur de $\bar{\eta}$ doit être calculée pour la conductivité relative Q_b^* exprimée par la relation (2.81):

$$Q_b^* = \frac{Q}{\sqrt{g_i(b/\psi)^5}} = \frac{3,861}{\sqrt{9,81 \times 10^{-3} \times (2,602621907)^5}} = 3,567283257$$

Cette nouvelle valeur de la conductivité relative est encore inférieure à $6\sqrt{3}$ et le rapport

d'aspect $\bar{\eta}$ doit être calculé par l'une ou l'autre des relations (2.78) ou (2.80) :

$$\begin{aligned}\bar{\eta} = \eta &= \left(\frac{Q_b^{*2}}{256}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}}\right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{3,567283257^2}{256}\right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3,567283257^2}{108}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3,567283257^2}{108}}\right)^{1/3} \right] = 0,603067235\end{aligned}$$

La profondeur normale y_n recherchée est par suite :

$$y_n = b\eta = 2 \times 0,603067235 = 1,206134471 \text{ m} \approx 1,206 \text{ m}$$

Le calcul effectué au cours de l'exemple d'application (2.1) a conduit à la valeur de la profondeur normale $y_n = 1,2 \text{ m}$. Nous pouvons donc noter que l'écart relatif entre les valeurs de la profondeur normale de l'exemple d'application 2.1 et du présent exemple n'est que de 0,5% seulement, ce qui indique que les calculs que nous venons d'effectuer sont tout à fait acceptables.

II.3.2. Calcul de la profondeur normale par la relation de Chézy

La relation de Chézy peut être utilisée pour déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans un canal de forme rectangulaire. Pour calculer y_n par la relation de Chézy, il est nécessaire de connaître le débit volume Q , la pente géométrique i , l'aire de la section mouillée A , le rayon hydraulique R_h et enfin le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy. Cependant, c'est ce coefficient de résistance qui n'est pas connu en pratique et il n'existe aucune relation explicite qui permet de l'évaluer. En pratique, seule la valeur de la rugosité absolue, liée à la nature du matériau constituant la paroi interne du canal, peut être définie et bien déterminée. Cette impossibilité de disposer de la valeur du coefficient de résistance C de Chézy a été levée au cours du paragraphe II.2.7, puisque nous avons établi la relation 2.46 qui lie le coefficient C au facteur de correction des dimensions linéaires ψ . C'est donc grâce à la méthode du modèle rugueux de référence que le coefficient de résistance C a pu être évalué, lors de la résolution du problème de dimensionnement du canal. Pour le calcul de la profondeur normale, le coefficient de résistance C n'est pas une donnée du problème et il est, à juste titre, légitime de se demander si le coefficient C peut aussi être évalué en ayant recours à la méthode du modèle rugueux.

Au cours du paragraphe II.2.7, nous avons établi la relation (2.50) qui regroupe les paramètres

de l'écoulement uniforme par l'usage de la formule de *Chézy*. Pour rappel, cette relation est :

$$Q^2 = C^2 b^5 \frac{\eta^3}{1+2\eta} i \quad (2.50)$$

En introduisant la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 b^5 i}} \quad (2.82)$$

la relation (2.50) s'écrit alors :

$$\eta^3 - 2\eta Q^{*2} - Q^{*2} = 0 \quad (2.83)$$

Nous obtenons ainsi une équation de troisième degré en η , sans terme du second ordre, qui permettrait de déterminer le rapport d'aspect η , à condition de connaître la valeur de la conductivité relative Q^* . Cette conductivité relative ne peut être évaluée a priori sans la valeur du coefficient de résistance C .

Réolvons l'équation du troisième degré (2.83), en ayant recours aux fonctions trigonométriques. L'équation (2.83) se présente sous la forme :

$$x^3 - px - q = 0 \quad (2.84)$$

Avec : $x = \eta$, $p = 2Q^{*2}$, $q = Q^{*2}$

Le discriminant de l'équation (2.84) est :

$$\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3$$

Soit :

$$\Delta = \frac{Q^{*4}}{4} \left(1 - \frac{32}{27} Q^{*2} \right)$$

Nous pouvons alors conclure que :

1. Lorsque $Q^* \geq \sqrt{27/32}$, le discriminant Δ est négatif ou nul et la racine réelle de l'équation de troisième degré (2.83) est :

$$\eta = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos(\beta/3)$$

Soit :

$$\eta = 2\sqrt{\frac{2}{3}} Q^* \cos \frac{\beta}{3} \quad (2.85)$$

L'angle β est tel que :

$$\cos(\beta) = \frac{3q}{2\sqrt{\frac{p^3}{3}}}$$

Soit :

$$\cos \beta = \frac{1}{Q^*} \sqrt{\frac{27}{32}} \quad (2.86)$$

2. Lorsque $Q^* \leq \sqrt{27/32}$, le discriminant Δ est positif ou nul et la racine réelle de l'équation de troisième degré (2.83) est :

$$\eta = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{ch}(\beta/3)$$

Soit :

$$\eta = 2\sqrt{\frac{2}{3}} Q^* \operatorname{ch} \frac{\beta}{3} \quad (2.87)$$

Où l'angle β est tel que :

$$\operatorname{ch}(\beta) = \frac{3q}{2\sqrt{\frac{p^3}{3}}}$$

Soit :

$$\operatorname{ch} \beta = \frac{1}{Q^*} \sqrt{\frac{27}{32}} \quad (2.88)$$

Notons que, par des considérations trigonométriques, l'équation (2.87) peut également s'écrire :

$$\eta = \left(\frac{Q^{*2}}{2}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} Q^{*2}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} Q^{*2}}\right)^{1/3} \right] \quad (2.89)$$

Ainsi, si la conductivité relative Q^* est connue, les relations (2.85), (2.87) ou (2.89) permettent de calculer le rapport d'aspect η dans le canal considéré et par suite la détermination de la profondeur normale $y_n = b\eta$. La difficulté réside dans la détermination de la conductivité relative Q^* , puisque le coefficient de résistance C n'est pas a priori une donnée du problème.

Pour résoudre le problème de la détermination de la profondeur normale y_n par l'usage des relations (2.85), (2.87) ou (2.89), les étapes suivantes sont recommandées pour mener à bien le calcul :

- i. Les données du problème sont le débit volume Q , la pente géométrique i , la dimension linéaire b correspondant à la largeur du canal, la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Considérons le coefficient de résistance à l'écoulement \bar{C} de Chézy dans le modèle rugueux de référence. Le coefficient de résistance \bar{C} est, pour rappel, donné par la relation (2.45) et il est donc connu, soit :

$$\bar{C} = 8\sqrt{2g}$$

Pour le coefficient \bar{C} , calculons la conductivité relative \bar{Q}^* dans le modèle rugueux, selon la relation (2.82), pour $\bar{b} = b$:

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{\bar{C}^2 b^5 i}} = \frac{Q}{\sqrt{128 g b^5 i}}$$

- ii. Cette conductivité relative doit être ensuite comparée à la valeur $\sqrt{27/32}$, ce qui permettra de choisir l'une des relations (2.85) ou (2.89) pour le calcul explicite du rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux.
- iii. Admettons encore que $\bar{b} = b$. Pour les valeurs connues de la dimension linéaire \bar{b} et du rapport d'aspect $\bar{\eta}$, appliquons respectivement les relations (2.10), (2.11) et (2.32) pour calculer tour à tour le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de Reynolds \bar{R} .
- iv. Puisque les valeurs de \bar{D}_h , ε et \bar{R} sont maintenant connues, appliquons la relation (2.35) pour l'évaluation du coefficient de correction des dimensions linéaires ψ .
- v. Avec la valeur ainsi calculé du coefficient de correction ψ , appliquons la relation (2.46) pour évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy dans le canal considéré.
- vi. Une fois la valeur du coefficient de résistance C déterminée, calculons alors la conductivité relative Q^* dans le canal étudié, en application de la relation (2.82).
- vii. Comparons ensuite la valeur de la conductivité relative Q^* que nous venons de calculer à la valeur $\sqrt{27/32}$, ce qui permettra de choisir l'une ou l'autre des relations (2.85) ou (2.89) pour le calcul explicite du rapport d'aspect η dans le canal.
- viii. La valeur ainsi déterminée du rapport d'aspect η permet de déduire celle de la profondeur normale $y_n = b\eta$.

Il faut noter que le rapport d'aspect η peut être également déterminé par l'application de l'une des relations (2.85) ou (2.89) pour la conductivité relative $Q^* = Q / \sqrt{gi(b/\psi)^5}$.

Afin de mieux apprécier les étapes de calcul ci-dessus indiquées de la profondeur normale y_n dans le canal de forme rectangulaire par l'usage de la relation de *Chézy*, considérons alors l'exemple d'application suivant. Il s'agit de l'exemple d'application 2.1 dont nous reprenons les données par souci de comparaison.

Exemple d'application 2.5.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 2.1, soient :

$$Q = 3,861 m^3 / s, \quad i = 10^{-3}, \quad \varepsilon = 10^{-3} m, \quad b = 2 m, \quad \nu = 10^{-6} m^2 / s.$$

Il s'agit de calculer la valeur de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme rectangulaire étudié en ayant recours à la relation de *Chézy*.

Solution

- i. Calculons la conductivité relative \bar{Q}^* dans le modèle rugueux de référence pour le coefficient de résistance $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$. Pour se faire, utilisons la relation (2.82) :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{\bar{C}^2 b^5 i}} = \frac{Q}{\sqrt{128gb^5i}} = \frac{3,861}{\sqrt{128 \times 9,81 \times 2^5 \times 0,001}} = 0,609095406$$

- ii. Cette valeur de la conductivité relative \bar{Q}^* est inférieure à $\sqrt{27/32} = 0,918558654$. Ceci permet de conclure que le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux doit être évalué par la relation (2.89), soit :

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \left(\frac{\bar{Q}^{*2}}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{Q}^{*2}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{Q}^{*2}} \right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{0,609095406^2}{2} \right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,609095406^2} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,609095406^2} \right)^{1/3} \right] \end{aligned}$$

$$= 1,047052833$$

- iii. Pour $\bar{b} = b$, les relations (2.10), (2.11) et (2.32) donnent respectivement :

$$\bar{P} = \bar{b}(1 + 2\bar{\eta}) = 2 \times (1 + 2 \times 1,047052833) = 6,188211334 \text{ m}$$

$$\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\bar{\eta}}{1 + 2\bar{\eta}} = 4 \times 2 \times \frac{1,047052833}{1 + 2 \times 1,047052833} = 2,707219329 \text{ m}$$

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 3,861}{6,188211334 \times 10^{-6}} = 2495713,085$$

- iv. Ainsi, le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est, selon la relation (2.35) :

$$\begin{aligned} \psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h + 8,5}{4,75 + \frac{8,5}{\bar{R}}} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \\ &\left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 2,707219329 + 8,5}{4,75 + \frac{8,5}{2495713,085}} \right) \right]^{-2/5} = 0,768455839 \end{aligned}$$

- v. Selon la relation (2.46), le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy dans le canal considéré est :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,768455839^{5/2}} = 68,45295518 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$$

- vi. Pour cette valeur du coefficient de résistance C de Chézy, déterminons celle de la conductivité relative Q^* dans le canal considéré par application de la relation (2.82) :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 b^5 i}} = \frac{3,861}{\sqrt{68,45295518^2 \times 2^5 \times 0,001}} = 0,315306273$$

- vii. Cette valeur de la conductivité relative Q^* est toujours inférieure à la valeur $\sqrt{27/32} = 0,918558654$, ce qui permet de conclure que le rapport d'aspect η dans le canal étudié doit être évalué par la relation (2.89), soit :

$$\begin{aligned} \eta &= \left(\frac{Q^{*2}}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} Q^{*2}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} Q^{*2}} \right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{0,315306273^2}{2} \right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,315306273^2} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,315306273^2} \right)^{1/3} \right] \\ &= 0,603067235 \end{aligned}$$

- viii. Finalement, la profondeur normale y_n recherchée est :

$$y_n = b\eta = 2 \times 0,603067235 = 1,206 \text{ m}$$

La résolution du problème aurait pu également être effectuée en appliquant la relation (2.89) pour la conductivité relative $Q^* = Q / \sqrt{gi(b/\psi)^5}$.

Nous pouvons ainsi conclure que, comparativement au résultat obtenu au cours de l'exemple d'application 2.1 et pour lequel $y_n = 1,2 m$, l'écart relatif est de l'ordre de 0,5% seulement, ce qui indique que les calculs que nous venons d'effectuer sont acceptables.

II.3.3. Calcul de la profondeur normale par la relation de *Manning*

La formule de *Manning* (1891) figure parmi les équations régissant l'écoulement uniforme les plus utilisées dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien. Le débit volume Q est exprimé par :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (2.90)$$

Le coefficient n est le coefficient de *Manning* et dont la valeur est étroitement liée à celle du coefficient k de *Strickler* puisque $n = k^{-1}$.

Dans la relation (2.90), l'aire de la section mouillée A et le rayon hydraulique R_h sont donnés respectivement par les relations (2.2) et (2.48). En introduisant ces relations dans (2.90), il vient que :

$$Q = \frac{1}{n} b^2 \eta b^{2/3} \frac{\eta^{2/3}}{(1+2\eta)^{2/3}} \sqrt{i}$$

Ou bien :

$$Q = \frac{1}{n} b^{8/3} \frac{\eta^{5/3}}{(1+2\eta)^{2/3}} \sqrt{i} \quad (2.91)$$

Nous pouvons tirer de la relation (2.91) le paramètre adimensionnel ou conductivité relative :

$$Q^* = \frac{nQ}{b^{8/3} \sqrt{i}} \quad (2.92)$$

En combinant les relations (2.91) et (2.92), il vient que :

$$Q^* = \frac{\eta^{5/3}}{(1+2\eta)^{2/3}} \quad (2.93)$$

Le problème posé consiste donc à déterminer la profondeur normale y_n , ce qui revient à évaluer le rapport d'aspect η et par suite $y_n = b\eta$. Lorsque l'on examine la forme de la relation

(2.93), il apparaît que le rapport d'aspect η ne peut être déterminé de manière explicite. En pratique, les paramètres connus du problème sont la dimension linéaire b , la rugosité absolue ε , la pente géométrique i du canal, le débit volume Q et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Le coefficient n de *Manning* n'est donc pas une donnée du problème et, de ce fait, la conductivité relative Q^* de la relation (2.93) ne peut être évaluée. Ainsi, la détermination du rapport d'aspect η par application de la relation implicite (2.93) n'est pas aisée, voire impossible sous sa forme actuelle.

II.3.3.1. Résolution par le théorème de *Lagrange*

Admettons que le coefficient n de *Manning* soit un paramètre que l'on peut calculer. Cela revient donc à dire que la conductivité relative Q^* de la relation (2.93) est aussi un paramètre connu.

La relation (2.93) permet aisément de d'écrire que :

$$\eta = Q^{*3/5} (1 + 2\eta)^{2/5} \quad (2.94)$$

Etabli en 1770, le théorème de *Lagrange* permet d'obtenir la solution d'une équation implicite en termes d'une série infinie. Ce théorème énonce que :

sous certaines conditions, une fonction $f(y)$, où y est la racine de l'équation

$$y = a + \theta \phi(y) \quad (2.95)$$

dans laquelle a est une constante et θ un paramètre, est donnée par :

$$f(y) = f(a) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta^i}{\Gamma(i+1)} \left\{ \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [f'(x)\phi^i(x)] \right\}_{x=a} \quad (2.96)$$

Dans la relation (2.96), le paramètre Γ représente en fait la fonction bien connue Γ définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \text{ et dont les principales propriétés sont :}$$

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1); \Gamma(p+1) = p!$$

En comparant les relations (2.94) et (2.95), et pour $f(y) = y$, nous pouvons écrire que :

$$y = \eta ; a = 0 ; \theta = Q^{*2/5} ; \phi(y) = (1 + 2\eta)^{2/5}$$

Dans la relation (2.96), il apparaît que :

$$f(y) = y = \eta ; f(a) = f(0) = 0 ; \theta^i = Q^{*3i/5} ; f'(x) = 1 ; \phi^i(x) = (1 + 2x)^{2i/5}$$

Ainsi, la relation (2.96) devient :

$$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q^{*3i/5}}{\Gamma(i+1)} \left\{ \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [(1+2x)^{2i/5}] \right\}_{x=0} \quad (2.97)$$

Nous pouvons également écrire que :

$$\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} (1+2x)^{2i/5} = C_{2i/5}^{i-1} (i-1)! (1+2x)^{2i/5-(i-1)} 2^{i-1}$$

Soit :

$$\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} (1+2x)^{2i/5} = C_{2i/5}^{i-1} (i-1)! (1+2x)^{-3i/5+1} 2^{i-1} \quad (2.98)$$

Or, nous savons que :

$$C_{2i/5}^{i-1} = \frac{(2i/5)!}{(i-1)!(2i/5-i+1)!} = \frac{\Gamma(2i/5+1)}{(i-1)!(-3i/5+1)!} = \frac{\Gamma(2i/5+1)}{(i-1)!\Gamma(-3i/5+2)} \quad (2.99)$$

En introduisant les relations (2.98) et (2.99) dans la relation (2.97), il vient que :

$$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q^{*3i/5} (i-1)! 2^{i-1} \Gamma(2i/5+1)}{\Gamma(i+1) (i-1)! \Gamma(-3i/5+2)}$$

Ou bien, après simplifications :

$$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1} Q^{*3i/5} \Gamma(2i/5+1)}{\Gamma(i+1) \Gamma(-3i/5+2)} \quad (2.100)$$

Pour :

- $i=1$, nous obtenons :

$$\eta = \frac{Q^{*3/5} \Gamma(2/5+1)}{\Gamma(2) \Gamma(-3/5+2)} = \frac{Q^{*3/5} \Gamma(7/5)}{\Gamma(2) \Gamma(7/5)} = \frac{Q^{*3/5}}{1!} = Q^{*3/5}$$

- $i=2$

$$\eta = \frac{2Q^{*6/5} \Gamma(4/5+1)}{\Gamma(2+1) \Gamma(-6/5+2)} = \frac{2Q^{*6/5} \Gamma(9/5)}{2! \Gamma(4/5)} = \frac{(4/5) Q^{*6/5} \Gamma(4/5)}{\Gamma(4/5)} = \frac{4}{5} Q^{*6/5}$$

- $i=3$

$$\eta = \frac{2^2 Q^{*9/5} \Gamma(6/5+1)}{\Gamma(3+1) \Gamma(-9/5+2)} = \frac{4Q^{*9/5} \Gamma(11/5)}{3! \Gamma(1/5)} = \frac{4Q^{*9/5} 6 \Gamma(6/5)}{6 \times 5 \Gamma(1/5)} = \frac{4}{5} Q^{*9/5} \frac{1}{5} \frac{\Gamma(1/5)}{\Gamma(1/5)} = \frac{4}{5^2} Q^{*9/5}$$

- $i = 4$

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{2^3 Q^{*12/5} \Gamma(8/5 + 1)}{\Gamma(4 + 1) \Gamma(-12/5 + 2)} = \frac{2^3 Q^{*12/5} \Gamma(13/5)}{4! \Gamma(-2/5)} = \frac{2^3 Q^{*12/5} (8/5) \Gamma(8/5)}{4! \Gamma(-2/5)} \\
&= \frac{2^3 Q^{*12/5} (8/5)(3/5) \Gamma(3/5)}{4! \Gamma(-2/5)} = \frac{2^3 Q^{*12/5} (8/5)(3/5)(-2/5) \Gamma(-2/5)}{4! \Gamma(-2/5)} \\
&= \frac{2^3 Q^{*12/5} (8/5)(3/5)(-2/5) \Gamma(-2/5)}{4! \Gamma(-2/5)} = \frac{2^3 Q^{*12/5} (8/5)(3/5)(-2/5)}{4!} \\
&= \frac{2^3 Q^{*12/5} (8/5)(3/5)(-2/5)}{4!} = -\frac{16}{5^3} Q^{*12/5}
\end{aligned}$$

- $i = 5$

$$\eta = \frac{2^4 Q^{*15/5} \Gamma(10/5 + 1)}{\Gamma(5 + 1) \Gamma(-15/5 + 2)} = \frac{2^4 Q^{*15/5} 2!}{5! \Gamma(-1)} = \frac{2^4 Q^{*15/5} 2}{5!(-2) \Gamma(-2)} \rightarrow 0$$

- $i = 6$

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{2^5 Q^{*18/5} \Gamma(12/5 + 1)}{\Gamma(6 + 1) \Gamma(-18/5 + 2)} = \frac{2^5 Q^{*18/5} \Gamma(17/5)}{6! \Gamma(-8/5)} = \frac{2^5 Q^{*18/5} (12/5) \Gamma(12/5)}{6! \Gamma(-8/5)} \\
&= \frac{2^5 Q^{*18/5} (12/5)(7/5) \Gamma(7/5)}{6! \Gamma(-8/5)} = \frac{2^5 Q^{*18/5} (12/5)(7/5)(2/5) \Gamma(2/5)}{6! \Gamma(-8/5)} \\
&= \frac{2^5 Q^{*18/5} (12/5)(7/5)(2/5)(-3/5) \Gamma(-3/5)}{6! \Gamma(-8/5)} = \frac{2^5 Q^{*18/5} (12/5)(7/5)(2/5)(-3/5)(-8/5) \Gamma(-8/5)}{6! \Gamma(-8/5)} \\
&= \frac{2^5 Q^{*18/5} (12/5)(7/5)(2/5)(-3/5)(-8/5)}{6!} = \frac{896}{5^6} Q^{*18/5}
\end{aligned}$$

Finalement, nous pouvons écrire la relation (2.100) sous la forme :

$$\eta = Q^{*3/5} + \frac{4}{5} Q^{*6/5} + \frac{4}{5^2} Q^{*9/5} - \frac{16}{5^3} Q^{*12/5} + \frac{896}{5^6} Q^{*18/5} + \dots \quad (2.101)$$

Nous obtenons, d'un point de vue purement théorique, la solution exacte du rapport d'aspect η , sous la forme d'une série illimitée, à condition toutefois que la conductivité relative Q^* soit connue. Le calcul de la conductivité Q^* est tributaire de la valeur du coefficient n de *Manning*.

L'inconvénient majeur de la relation (2.101) est qu'elle ne donne la valeur exacte du rapport d'aspect η qu'à l'infini. Pour obtenir la valeur du rapport d'aspect η par la relation (2.101), il est nécessaire de la tronquer, cela revient à arrêter le calcul à un certain ordre i jusqu'à ce que la valeur calculée de η pour l'ordre $(i-1)$ soit très proche de la valeur de η calculée à l'ordre i . Ainsi, l'application de la relation (2.101) ne donne qu'une valeur approchée du rapport d'aspect η .

II.3.3.2. Résolution par la méthode du point fixe

La relation implicite (2.93) exprimant $\eta(Q^*)$ conduit à écrire que :

$$\eta = Q^{*3/5} (1 + 2\eta)^{2/5} \quad (2.102)$$

La résolution de l'équation (2.102) par la méthode du point fixe consiste à choisir une première valeur η_0 de η arbitrairement choisie et de calculer ensuite, selon la relation (2.102), la valeur η_1 telle que :

$$\eta_1 = Q^{*3/5} (1 + 2\eta_0)^{2/5}$$

Avec la valeur ainsi calculée de η_1 , on calcule la valeur η_2 telle que :

$$\eta_2 = Q^{*3/5} (1 + 2\eta_1)^{2/5}$$

On poursuit le calcul pour déterminer la valeur de η_3 telle que :

$$\eta_3 = Q^{*3/5} (1 + 2\eta_2)^{2/5}$$

Le procédé itératif se poursuit ainsi et nous pouvons écrire que :

$$\eta_4 = Q^{*3/5} (1 + 2\eta_3)^{2/5}$$

.....

$$\eta_{i-1} = Q^{*3/5} (1 + 2\eta_{i-2})^{2/5}$$

$$\eta_i = Q^{*3/5} (1 + 2\eta_{i-1})^{2/5}$$

On arrête le processus itératif lorsque les valeurs calculées de η_i et de η_{i-1} sont très proches. Il est bien évident que la rapidité de convergence du processus itératif dépend fortement de la valeur initialement choisie de η_0 .

II.3.3.3. Résolution par une équation approchée

Pour calculer le rapport d'aspect η de manière explicite, il est possible de proposer une relation approchée à la relation exacte (2.93). Les calculs ont montré que l'une des relations approchées susceptible de mener à une valeur du rapport d'aspect η proche de la valeur exacte donnée par la relation (2.93) est :

$$\eta \approx Q^{*3/5} \left[1 + 2,404Q^{*0,632} \left(1 + 2,03Q^{*0,936} \right)^{0,393} \right]^{2/5} \quad (2.103)$$

La relation approchée de (1.103) a été établie dans la large gamme $0 \leq \eta \leq 3$, mais elle peut être appliquée dans une gamme plus large.

Nous avons comparé les valeurs approchées de η calculées selon la relation (2.103) aux valeurs exactes de η calculées en application de la relation (2.93). Nous avons alors représenté sur la figure 2.4 les écarts relatifs $\Delta\eta / \eta$ (%) en fonction de la conductivité relative Q^* .

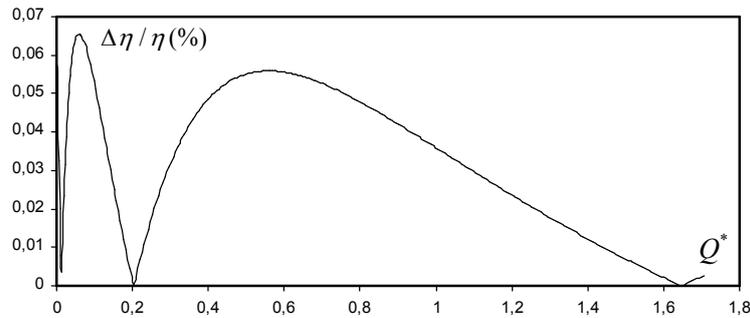


Figure 2.4 : Ecarts relatifs $\Delta\eta / \eta$ (%) entre les valeurs exactes et approchées du rapport d'aspect η , calculées respectivement par les relations (2.93) et (2.103).

La figure 2.4 montre clairement que l'écart relatif maximal entre les valeurs exactes et approchées du rapport d'aspect η ne dépasse guère 0,07%, ce qui confirme bien la validité de la relation approchée (2.103) proposée. Rappelons tout de même que l'application de la relation approchée (2.103) nécessite la connaissance de la conductivité relative Q^* dont la valeur dépend de celle du coefficient n de *Manning*.

II.3.3.4. Résolution par la méthode du modèle rugueux

Appliquons la relation (2.91), issue de la relation de *Manning*, au modèle rugueux de référence sous les conditions $b = \bar{b}$, $Q = \bar{Q}$, $i = \bar{i}$ et $\eta \neq \bar{\eta}$. Nous obtenons :

$$Q = \frac{1}{n} b^{8/3} \frac{\bar{\eta}^{-5/3}}{(1 + 2\bar{\eta})^{2/3}} \sqrt{i} \quad (2.104)$$

Rappelons que le coefficient \bar{n} est le coefficient de *Manning* pour l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.

En comparant les relations de *Chézy* et de *Manning*, nous pouvons aisément déduire que les coefficients C de *Chézy* et n de *Manning* sont liés par la relation :

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{C} \quad (2.105)$$

Rappelons d'une part que le coefficient C de *Chézy* est lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ par la relation (2.46), soit :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (2.46)$$

D'autre part, étant donné que le rayon hydraulique R_h est une dimension linéaire, nous pouvons écrire, selon la relation (2.29) :

$$R_h = \psi \bar{R}_h \quad (2.106)$$

En introduisant les relations (2.46) et (2.106) dans la relation (2.105), il vient que :

$$n = \frac{\psi^{1/6} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g} / \psi^{5/2}}$$

Soit, après simplifications :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (2.107)$$

Appliquée au modèle rugueux de référence, la relation (2.195) s'écrit :

$$\bar{n} = \frac{\bar{R}_h^{-1/6}}{C} \quad (2.108)$$

Rappelons ici que le coefficient \bar{C} est le coefficient de *Chézy* dans le modèle rugueux et qu'il est régi par la relation (2.45), soit :

$$\bar{C} = 8\sqrt{2g} \quad (2.45)$$

Ainsi, la relation (2.108) devient :

$$\bar{n} = \frac{\bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (2.109)$$

Introduisons la relation (2.109) dans la relation (2.104), il vient que :

$$Q = \frac{8\sqrt{2g}}{\bar{R}_h^{-1/6}} b^{8/3} \frac{\bar{\eta}^{-5/3}}{(1+2\bar{\eta})^{2/3}} \sqrt{i} \quad (2.110)$$

Selon la relation (2.48), le rayon hydraulique \bar{R}_h dans le modèle rugueux s'écrit :

$$\bar{R}_h = b \frac{\bar{\eta}}{1+2\bar{\eta}} \quad (2.111)$$

En introduisant la relation (2.111) dans la relation (2.110), il vient que :

$$Q = \frac{8\sqrt{2g}}{b^{1/6}} b^{8/3} \frac{\bar{\eta}^{-5/3} (1+2\bar{\eta})^{1/6}}{\bar{\eta}^{-1/6} (1+2\bar{\eta})^{2/3}} \sqrt{i}$$

Soit, après simplifications :

$$Q = 8\sqrt{2g} b^{5/2} \frac{\eta^{-3/2}}{(1+2\eta)^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.112)$$

La relation (2.112) permet d'écrire que :

$$\frac{Q}{8\sqrt{2g} b^{5/2} \sqrt{i}} = \frac{\eta^{-3/2}}{(1+2\eta)^{1/2}} \quad (2.113)$$

Le membre gauche de l'équation (2.113) représente la conductivité relative \bar{Q}^* dans le modèle rugueux telle que :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2g} b^{5/2} \sqrt{i}} \quad (2.114)$$

La relation (2.113) s'écrit alors :

$$\bar{Q}^* = \frac{\eta^{-3/2}}{(1+2\eta)^{1/2}} \quad (2.115)$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation (2.115), nous obtenons :

$$\bar{Q}^{*2} = \frac{\eta^{-3}}{1+2\eta} \quad (2.116)$$

Nous obtenons finalement l'équation de troisième degré en $\bar{\eta}$ suivante :

$$\bar{\eta}^{-3} - 2\bar{\eta}\bar{Q}^{*2} - \bar{Q}^{*2} = 0 \quad (2.117)$$

La forme de l'équation (2.117) est identique à celle de l'équation (2.83) et admet donc la même résolution. L'équation (2.117) se présente sous la forme :

L'équation (2.83) se présente sous la forme :

$$x^3 - px - q = 0 \quad (2.118)$$

Avec : $x = \eta$, $p = 2\bar{Q}^{*2}$, $q = \bar{Q}^{*2}$

Le discriminant de l'équation (2.118) est :

$$\Delta = (q/2)^2 + (p/3)^3$$

Soit :

$$\Delta = \frac{\bar{Q}^{*4}}{4} \left(1 - \frac{32}{27} \bar{Q}^{*2} \right)$$

Nous pouvons alors conclure que :

1. Lorsque $\bar{Q}^* \geq \sqrt{27/32}$, le discriminant Δ est négatif ou nul et la racine réelle de

l'équation de troisième degré (2.117) est :

$$\bar{\eta} = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos(\beta/3)$$

Soit :

$$\bar{\eta} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \bar{Q}^* \cos \frac{\beta}{3} \quad (2.119)$$

L'angle β est tel que :

$$\cos(\beta) = \frac{3q}{2\sqrt{\frac{p^3}{3}}}$$

Soit :

$$\cos \beta = \frac{1}{\bar{Q}^*} \sqrt{\frac{27}{32}} \quad (2.120)$$

2. Lorsque $\bar{Q}^* \leq \sqrt{27/32}$, le discriminant Δ est positif ou nul et la racine réelle de l'équation de troisième degré (2.117) est :

$$\bar{\eta} = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{ch}(\beta/3)$$

Soit :

$$\bar{\eta} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \bar{Q}^* \operatorname{ch} \frac{\beta}{3} \quad (2.121)$$

Où l'angle β est tel que :

$$\operatorname{ch}(\beta) = \frac{3q}{2\sqrt{\frac{p^3}{3}}}$$

Soit :

$$\operatorname{ch} \beta = \frac{1}{\bar{Q}^*} \sqrt{\frac{27}{32}} \quad (2.122)$$

Notons que, par des considérations trigonométriques, l'équation (2.121) peut également s'écrire :

$$\bar{\eta} = \left(\frac{\bar{Q}^{*2}}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{Q}^{*2}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{Q}^{*2}} \right)^{1/3} \right] \quad (2.123)$$

Pour résoudre le problème de la détermination de la profondeur normale y_n par la méthode du

modèle rugueux de références, les étapes suivantes sont recommandées pour mener à bien le calcul :

- i. Les données du problème sont le débit volume Q , la pente géométrique i , la dimension linéaire b correspondant à la largeur du canal, la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Pour ces données, on calcule la conductivité relative Q^* selon la relation (2.114), soit :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2g} b^{5/2} \sqrt{i}}$$

- ii. Cette conductivité relative doit être ensuite comparée à la valeur $\sqrt{27/32}$, ce qui permettra de choisir l'une des relations (2.119) ou (2.123) pour le calcul explicite du rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux.

- iii. Admettons encore que $\bar{b} = b$. Pour les valeurs connues de la dimension linéaire \bar{b} et du rapport d'aspect $\bar{\eta}$, appliquons respectivement les relations (2.10), (2.11) et (2.32) pour calculer tour à tour le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de *Reynolds* \bar{R} .

- iv. Puisque les valeurs de \bar{D}_h , ε et \bar{R} sont maintenant connues, appliquons la relation (2.35) pour l'évaluation du coefficient de correction des dimensions linéaires ψ .

- v. Avec la valeur ainsi calculé du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique \bar{R}_h , appliquons la relation (2.107) pour évaluer le coefficient n de *Manning*, soit :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}}$$

- vi. Une fois la valeur du coefficient de n déterminée, calculons alors la conductivité relative Q^* dans le canal étudié, en application de la relation (2.92) :

$$Q^* = \frac{nQ}{b^{8/3} \sqrt{i}}$$

- vii. Une fois la conductivité relative Q^* calculée, il faut appliquer soit la relation (2.101) issue du théorème de *Lagrange*, soit la relation (2.102) par la méthode du point fixe ou bien la relation approchée (2.103) pour l'évaluation du rapport d'aspect η .
- viii. La valeur ainsi déterminée du rapport d'aspect η permet de déduire celle de la profondeur normale recherchée $y_n = b\eta$.

Notons aussi que le rapport d'aspect η peut être calculé par l'une des relations (2.119) ou (2.123) pour la conductivité relative Q^* telle que :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2g} (b/\psi)^{5/2} \sqrt{i}}$$

Afin d'illustrer la méthode de calcul de la profondeur normale y_n par la relation de *Manning*, considérons alors un exemple d'application. Reprenons pour se faire les données de l'exemple d'application 2.1, par souci de comparaison.

Exemple d'application 2.6.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 2.1, soient :

$$Q = 3,861 \text{ m}^3 / \text{s}, \quad i = 10^{-3}, \quad \varepsilon = 10^{-3} \text{ m}, \quad b = 2 \text{ m}, \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}.$$

Il s'agit de calculer la valeur de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme rectangulaire étudié en ayant recours à la relation de *Manning*.

Solution

i. Pour ces données, on calcule la conductivité relative Q^* selon la relation (2.114), soit :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2g} b^{5/2} \sqrt{i}} = \frac{3,861}{8 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2^{5/2} \times \sqrt{0,001}} = 0,609095406$$

ii. Cette valeur de la conductivité relative Q^* est inférieure à la valeur $\sqrt{27/32} = 0,918558654$, ce qui permettra de conclure que le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux est régi par la relation (2.123), soit :

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \left(\frac{\bar{Q}^{*2}}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{Q}^{*2}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{Q}^{*2}} \right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{0,609095406^2}{2} \right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,609095406^2} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,609095406^2} \right)^{1/3} \right] \\ &= 1,047052833 \end{aligned}$$

iii. Admettons encore que $\bar{b} = b$. Pour les valeurs connues de la dimension linéaire \bar{b} et du rapport d'aspect $\bar{\eta}$, appliquons respectivement les relations (2.10), (2.11) et (2.32)

pour calculer tour à tour le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de *Reynolds* \bar{R} , soit :

$$\bar{P} = \bar{b}(1 + 2\bar{\eta}) = 2 \times (1 + 2 \times 1,047052833) = 6,188211334 \text{ m}$$

$$\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\bar{\eta}}{1 + 2\bar{\eta}} = 4 \times 2 \times \frac{1,047052833}{1 + 2 \times 1,047052833} = 2,707219329 \text{ m}$$

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}\nu} = \frac{4 \times 3,861}{6,188211334 \times 10^{-6}} = 2495713,085$$

iv. Puisque les valeurs de \bar{D}_h , ε et \bar{R} sont maintenant connues, appliquons la relation (2.35) pour l'évaluation du coefficient de correction des dimensions linéaires ψ , soit :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times$$

$$\left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 2,707219329}{4,75} + \frac{8,5}{2495713,085} \right) \right]^{-2/5} = 0,768455839$$

v. Avec la valeur ainsi calculé du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique $\bar{R}_h = \bar{D}_h / 4 = 0,676804832 \text{ m}$, appliquons la relation (2.107) pour évaluer le coefficient n de *Manning*, soit :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} = \frac{0,768455839^{8/3} \times 0,676804832^{1/6}}{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}} = 0,01310051 \text{ m}^{-1/3} \cdot \text{s}$$

vi. Une fois la valeur du coefficient de n ainsi déterminée, calculons alors la conductivité relative Q^* dans le canal étudié, en application de la relation (2.92), soit :

$$Q^* = \frac{nQ}{b^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0,01310051 \times 3,861}{2^{8/3} \times \sqrt{0,001}} = 0,25190764$$

vii. Appliquons la relation approchée (2.103) pour l'évaluation explicite du rapport d'aspect η , soit :

$$\eta \approx Q^{*3/5} \left[1 + 2,404 Q^{*0,632} (1 + 2,03 Q^{*0,936})^{0,393} \right]^{2/5}$$

$$= 0,25190764^{3/5} \times \left[1 + 2,404 \times 0,25190764^{0,632} \times (1 + 2,03 \times 0,25190764^{0,936})^{0,393} \right]^{2/5}$$

$$= 0,599118132 \square 0,6$$

viii. La valeur ainsi déterminée du rapport d'aspect η permet de déduire celle de la

profondeur normale recherchée $y_n = b\eta$, soit :

$$y_n = b\eta = 2 \times 0,6 = 1,2 \text{ m}$$

Il s'agit bien de la valeur de la profondeur normale donnée à l'énoncé de l'exemple d'application 2.1.

II.4. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A COEFFICIENT DE RESISTANCE VARIABLE

Il est tout à fait justifié d'admettre que, pour le même canal, le coefficient de résistance à l'écoulement varie en fonction du taux de remplissage η . Ceci serait valable aussi bien pour le coefficient de résistance C de *Chézy* que pour le coefficient n de *Manning*. En pratique, lorsqu'il s'agit de dimensionner un canal rectangulaire à écoulement libre, les paramètres connus sont le débit volume Q , la pente longitudinale i du canal, la rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne du canal, le taux de remplissage η et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Notons que ni le coefficient de résistance de *Chézy*, ni celui de *Manning* ne constitue une donnée du problème. Lorsque l'une ou l'autre des formules de *Chézy* et de *Manning* doit être utilisée pour dimensionner le canal, il sera alors nécessaire de déterminer la valeur de C ou celle de n . Ceci constitue l'un des objectifs principaux de cette partie de l'étude.

II.4.1. Expression du coefficient de *Chézy* dans un canal rectangulaire

Le débit volume Q écoulé par un canal de forme quelconque s'exprime par la relation suivante (Achour et Bedjaoui, 2006) :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.124)$$

Où :

A est l'aire de la section mouillée, R_h est le rayon hydraulique, i est la pente du canal et R est un nombre de *Reynolds* défini par la relation suivante :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (2.125)$$

ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Pour un canal de forme rectangulaire, l'aire de la section mouillée A et le périmètre mouillé P s'écrivent respectivement par les relations (2.1) et (2.3) dont nous rappelons les expressions:

$$A = b y_n \quad (2.1)$$

Où b est la largeur du canal et y_n est la profondeur normale de l'écoulement.

$$P = b + 2y_n \quad (2.3)$$

A partir des relations (2.1) et (2.3), nous pouvons écrire que le rayon hydraulique $R_h = A / P$ est :

$$R_h = \frac{by_n}{b + 2y_n} \quad (2.126)$$

La relation (2.126) peut également s'écrire :

$$R_h = \frac{y_n}{y_n \left(\frac{b}{y_n} + 2 \right)}$$

Soit :

$$R_h = \frac{b}{(\eta_0 + 2)} \quad (2.127)$$

Où $\eta_0 = b / y_n$ exprime le paramètre de forme de la section mouillée, ou le rapport d'aspect.

Compte tenu de la relation (2.127), la relation (2.125) peut s'écrire :

$$R = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta_0 + 2)^{3/2}} \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu} \quad (2.128)$$

Désignons par :

$$\varphi(\eta_0) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta_0 + 2)^{3/2}} \quad (2.129)$$

$$R^* = \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu} \quad (2.130)$$

Ainsi, la relation (2.128) s'écrit :

$$R = R^* \varphi(\eta_0) \quad (2.131)$$

D'autre part, la relation de *Chézy* s'écrit :

$$Q = CA\sqrt{R_h i} \quad (2.132)$$

Où C est le coefficient de *Chézy*.

En comparant les relations (2.124) et (2.132), nous pouvons déduire que le coefficient C de *Chézy* est tel que :

$$C = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.133)$$

La relation (2.133) peut s'écrire en termes adimensionnels sous la forme suivante :

$$C / \sqrt{g} = -4\sqrt{2} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.134)$$

En introduisant les relations (2.6) et (2.131) dans la relation (2.134), il vient que :

$$C / \sqrt{g} = -4\sqrt{2} \log\left[\frac{\varepsilon / b}{14,8 / (\eta_0 + 2)} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta_0)}\right] \quad (2.135)$$

En tenant compte de la relation (2.129), la quantité $14,8 / (\eta_0 + 2)$ peut s'écrire :

$$14,8 / (\eta_0 + 2) = \frac{14,8 [\varphi(\eta_0)]^{2/3}}{(32\sqrt{2})^{2/3}}$$

Après calcul, il vient que :

$$14,8 / (\eta_0 + 2) = 1,165 [\varphi(\eta_0)]^{2/3} \quad (2.136)$$

En substituant la relation (2.136) dans la relation (2.135), il vient que :

$$C / \sqrt{g} = -4\sqrt{2} \log\left[\frac{\varepsilon / b}{1,165 [\varphi(\eta_0)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta_0)}\right] \quad (2.137)$$

Dans la relation (2.137), ε / b représente la rugosité relative du canal rectangulaire étudié. Au regard de la relation (2.137), il apparaît que C / \sqrt{g} dépend de trois paramètres qui sont la rugosité relative ε / b , le paramètre de forme η_0 et le nombre de *Reynolds* modifié R^* . Nous pouvons alors écrire la relation fonctionnelle suivante :

$$C / \sqrt{g} = f(\varepsilon / b; \eta_0; R^*) \quad (2.138)$$

II.4.2. Variation du coefficient C de Chézy

Pour représenter la variation du coefficient sans dimension C / \sqrt{g} en fonction du paramètre de forme η_0 , nous pouvons faire appel à la relation (2.137). On fixe une valeur de la rugosité relative ε / b et l'on fait varier le nombre de *Reynolds* modifié R^* . Les tableaux suivants ont été établis selon cette procédure.

La valeur tendant vers zéro du paramètre de forme η_0 correspond, pour un canal rectangulaire donné, à une profondeur d'écoulement très élevée.

Sous chacun des tableaux, nous avons représenté et commenté la variation de C / \sqrt{g} en fonction du paramètre de forme η_0 .

Tableau 2.1 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/b=0$

$\varepsilon/b=0$		$R^*=10^4$	$R^*=10^5$	$R^*=10^6$	$R^*=10^7$	$R^*=10^8$
η_0	$\varphi(\eta_0)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0	16	23,7722866	29,4291409	35,0859951	40,7428494	46,3997036
0,1	14,8708583	23,5924895	29,2493437	34,906198	40,5630522	46,2199065
0,2	13,8685468	23,421058	29,0779123	34,7347665	40,3916208	46,048475
0,3	12,9739799	23,2572484	28,9141026	34,5709569	40,2278111	45,8846654
0,4	12,1716124	23,1004115	28,7572657	34,41412	40,0709742	45,7278285
0,5	11,448668	22,9499779	28,6068321	34,2636864	39,9205406	45,5773949
0,6	10,7945602	22,8054452	28,4622995	34,1191537	39,776008	45,4328622
0,7	10,20045	22,6663679	28,3232222	33,9800764	39,6369307	45,2937849
0,8	9,65890577	22,5323491	28,1892034	33,8460576	39,5029119	45,1597661
0,9	9,16363916	22,4030337	28,059888	33,7167422	39,3735965	45,0304507
1	8,70929686	22,2781027	27,934957	33,5918112	39,2486655	44,9055197
1,1	8,2912963	22,1572686	27,8141229	33,4709771	39,1278314	44,7846856
1,2	7,90569415	22,0402711	27,6971254	33,3539796	39,0108339	44,6676881
1,3	7,54908067	21,9268742	27,5837284	33,2405827	38,8974369	44,5542912
1,4	7,21849401	21,8168627	27,4737169	33,1305712	38,7874254	44,4442797
1,5	6,91135036	21,7100404	27,3668947	33,0237489	38,6806031	44,3374574
1,6	6,6253866	21,6062276	27,2630818	32,9199361	38,5767903	44,2336446
1,7	6,35861295	21,5052593	27,1621136	32,8189678	38,4758221	44,1326763
1,8	6,10927369	21,4069839	27,0638381	32,7206924	38,3775466	44,0344009
1,9	5,87581435	21,3112613	26,9681156	32,6249698	38,2818241	43,9386783
2	5,65685425	21,2179624	26,8748167	32,5316709	38,1885252	43,8453794
2,1	5,45116328	21,1269674	26,7838216	32,4406759	38,0975301	43,7543844
2,2	5,25764236	21,0381652	26,6950195	32,3518737	38,008728	43,6655822
2,3	5,07530671	20,9514528	26,608307	32,2651613	37,9220155	43,5788698
2,4	4,90327173	20,8667338	26,5235881	32,1804423	37,8372966	43,4941508
2,5	4,74074074	20,7839189	26,4407731	32,0976274	37,7544816	43,4113359
2,6	4,5869946	20,7029242	26,3597784	32,0166327	37,6734869	43,3303412
2,7	4,44138263	20,6236714	26,2805257	31,9373799	37,5942342	43,2510884
2,8	4,30331483	20,5460873	26,2029415	31,8597958	37,51665	43,1735043
2,9	4,17225512	20,4701029	26,1269572	31,7838114	37,4406656	43,0975199
3	4,04771541	20,3956537	26,0525079	31,7093622	37,3662164	43,0230707

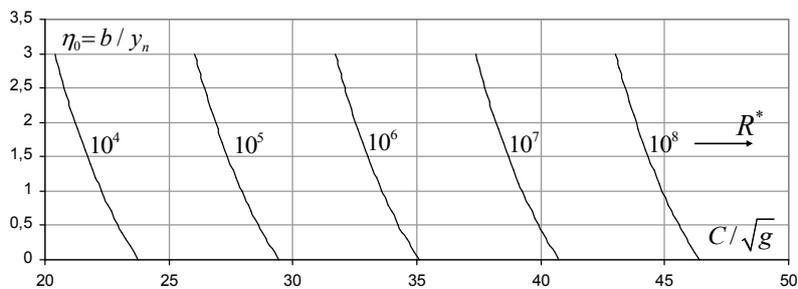


Figure 2.5 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η_0 , pour $\varepsilon/b=0$.
(Ecoulement lisse)

La figure 2.5 montre clairement que pour un nombre de *Reynolds* modifié R^* fixé, le coefficient C/\sqrt{g} augmente au fur et à mesure que le paramètre de forme η_0 diminue. Cela signifie que pour un canal donné dont la largeur b est connue, le coefficient C/\sqrt{g} augmente lorsque la profondeur de l'écoulement y_n augmente. Nous pouvons également constater que pour un paramètre de forme η_0 fixé, le coefficient C/\sqrt{g} augmente avec l'accroissement du nombre de *Reynolds* modifié R^* .

Tableau 2.2 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/b = 10^{-4}$

$\varepsilon/b = 10^{-4}$		$R^* = 10^4$	$R^* = 10^5$	$R^* = 10^6$	$R^* = 10^7$	$R^* = 10^8$
η_0	$\varphi(\eta_0)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0	16	23,2929741	26,6068903	27,4321645	27,5322566	27,5424938
0,1	14,8708583	23,1236938	26,4678668	27,30961	27,4121115	27,4226009
0,2	13,8685468	22,9620944	26,3350145	27,1926987	27,2975503	27,3082858
0,3	12,9739799	22,8075041	26,2077953	27,0809304	27,1880763	27,1990525
0,4	12,1716124	22,6593356	26,0857391	26,9738682	27,0832567	27,0944683
0,5	11,448668	22,517073	25,9684326	26,8711291	26,9827113	26,9941535
0,6	10,7945602	22,3802601	25,8555107	26,7723748	26,8861051	26,8977731
0,7	10,20045	22,248492	25,7466492	26,6773054	26,7931405	26,8050302
0,8	9,65890577	22,1214073	25,6415589	26,5856536	26,7035528	26,71566
0,9	9,16363916	21,9986823	25,5399804	26,4971804	26,617105	26,6294258
1	8,70929686	21,8800258	25,4416809	26,4116709	26,5335843	26,5461151
1,1	8,2912963	21,765175	25,3464496	26,3289312	26,4527986	26,4655359
1,2	7,90569415	21,6538917	25,2540961	26,2487862	26,3745744	26,3875149
1,3	7,54908067	21,5459595	25,1644469	26,1710767	26,2987541	26,3118945
1,4	7,21849401	21,4411814	25,0773442	26,0956576	26,2251942	26,2385315
1,5	6,91135036	21,3393769	24,9926436	26,0223968	26,1537636	26,167295
1,6	6,6253866	21,2403811	24,9102126	25,951173	26,0843423	26,0980651
1,7	6,35861295	21,144042	24,8299298	25,8818749	26,0168204	26,0307318
1,8	6,10927369	21,05022	24,7516831	25,8144003	25,9510966	25,965194
1,9	5,87581435	20,9587861	24,675369	25,7486548	25,8870774	25,9013585
2	5,65685425	20,8696211	24,600892	25,684551	25,8246766	25,8391389
2,1	5,45116328	20,7826144	24,5281634	25,6220084	25,7638142	25,7784555
2,2	5,25764236	20,6976635	24,4571009	25,5609518	25,7044161	25,7192343
2,3	5,07530671	20,6146727	24,3876278	25,5013117	25,6464136	25,6614065
2,4	4,90327173	20,5335533	24,3196729	25,4430231	25,5897423	25,6049079
2,5	4,74074074	20,4542222	24,2531693	25,3860256	25,5343425	25,5496788
2,6	4,5869946	20,3766018	24,188055	25,3302626	25,4801583	25,4956634
2,7	4,44138263	20,3006196	24,1242714	25,2756813	25,4271375	25,4428096
2,8	4,30331483	20,2262073	24,0617638	25,2222321	25,375231	25,3910683
2,9	4,17225512	20,1533012	24,000481	25,1698685	25,324393	25,3403938
3	4,04771541	20,0818411	23,9403746	25,1185468	25,2745803	25,2907429

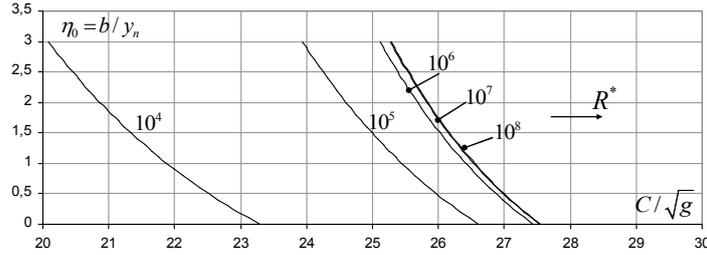


Figure 2.6 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η_0 , pour $\varepsilon/b = 10^{-4}$.

Les courbes se confondent pour $R^* \geq 10^7$.

Il ressort de la figure 2.6 que pour une valeur fixée du nombre de *Reynolds* modifié R^* , le coefficient C/\sqrt{g} augmente avec la diminution du paramètre de forme η_0 , comme dans le cas de la figure 2.5. Nous pouvons également observer que pour un paramètre de forme η_0 donné, le coefficient C/\sqrt{g} augmente avec le nombre de *Reynolds* modifié R^* . Ce qui ressort de particulier de la figure 2.6, c'est le fait qu'au-delà de $R^* = 10^7$ les courbes de variation du coefficient C/\sqrt{g} se confondent. Cela signifie qu'à partir de la valeur $R^* = 10^7$, le nombre de *Reynolds* modifié R^* n'a aucune influence sur la variation du coefficient C/\sqrt{g} et le régime d'écoulement turbulent rugueux est alors atteint. En d'autres termes, il n'y a plus aucune influence de la viscosité cinématique ν au-delà de $R^* = 10^7$.

Tableau 2.3 : Valeurs de C/\sqrt{g} pour $\varepsilon/b = 10^{-3}$

$\varepsilon/b = 10^{-3}$		$R^* = 10^4$	$R^* = 10^5$	$R^* = 10^6$	$R^* = 10^7$	$R^* = 10^8$
η_0	$\varphi(\eta_0)$	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}	C/\sqrt{g}
0	16	20,9500361	21,7753102	21,8754024	21,8856396	21,8866656
0,1	14,8708583	20,8110126	21,6527557	21,7552573	21,7657466	21,766798
0,2	13,8685468	20,6781603	21,5358445	21,640696	21,6514315	21,6525077
0,3	12,9739799	20,5509411	21,4240761	21,5312221	21,5421982	21,5432985
0,4	12,1716124	20,4288848	21,317014	21,4264024	21,437614	21,438738
0,5	11,448668	20,3115783	21,2142748	21,3258571	21,3372992	21,3384464
0,6	10,7945602	20,1986564	21,1155205	21,2292508	21,2409189	21,2420887
0,7	10,20045	20,089795	21,0204511	21,1362862	21,1481759	21,149368
0,8	9,65890577	19,9847046	20,9287994	21,0466986	21,0588057	21,0600197
0,9	9,16363916	19,8831262	20,8403261	20,9602508	20,9725716	20,9738071
1	8,70929686	19,7848266	20,7548166	20,87673	20,8892608	20,8905174
1,1	8,2912963	19,6895954	20,672077	20,7959444	20,8086817	20,809959
1,2	7,90569415	19,5972418	20,591932	20,7177202	20,7306606	20,7319584
1,3	7,54908067	19,5075927	20,5142224	20,6418999	20,6550403	20,6563582
1,4	7,21849401	19,42049	20,4388034	20,5683399	20,5816773	20,583015
1,5	6,91135036	19,3357893	20,3655426	20,4969093	20,5104407	20,511798
1,6	6,6253866	19,2533584	20,2943187	20,4274881	20,4412108	20,4425873
1,7	6,35861295	19,1730756	20,2250207	20,3599662	20,3738776	20,375273
1,8	6,10927369	19,0948288	20,1575461	20,2942423	20,3083398	20,309754
1,9	5,87581435	19,0185148	20,0918005	20,2302231	20,2445042	20,2459369

2	5,65685425	18,9440378	20,0276968	20,1678223	20,1822847	20,1837356
2,1	5,45116328	18,8713092	19,9651541	20,1069599	20,1216013	20,1230702
2,2	5,25764236	18,8002466	19,9040976	20,0475619	20,0623801	20,0638668
2,3	5,07530671	18,7307736	19,8444574	19,9895593	20,0045522	20,0060565
2,4	4,90327173	18,6628186	19,7861689	19,932888	19,9480536	19,9495753
2,5	4,74074074	18,5963151	19,7291714	19,8774882	19,8928245	19,8943634
2,6	4,5869946	18,5312007	19,6734084	19,8233041	19,8388092	19,8403651
2,7	4,44138263	18,4674171	19,6188271	19,7702832	19,7859553	19,787528
2,8	4,30331483	18,4049096	19,5653779	19,7183768	19,7342141	19,7358034
2,9	4,17225512	18,3436268	19,5130142	19,6675388	19,6835395	19,6851454
3	4,04771541	18,2835203	19,4616926	19,6177261	19,6338886	19,6355107

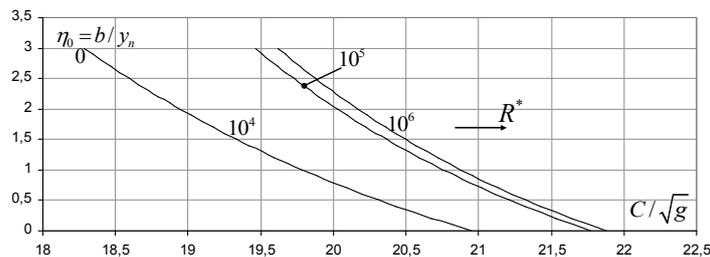


Figure 2.7 : Variation de C/\sqrt{g} en fonction de η_0 , pour $\varepsilon/b = 10^{-3}$.

Les courbes se confondent pour $R^* \geq 10^6$.

Comme dans le cas des figures 2.5 et 2.6, il ressort de la figure 2.7 que pour une même valeur du nombre de Reynolds modifié R^* , le coefficient C/\sqrt{g} augmente au fur et à mesure que le paramètre de forme η_0 diminue. Ceci signifie que le coefficient C/\sqrt{g} augmente lorsque la profondeur y_n de l'écoulement augmente. Nous pouvons également observer que pour un paramètre de forme η_0 fixé, le coefficient C/\sqrt{g} augmente avec le nombre de Reynolds modifié R^* . Pour la valeur de la rugosité relative $\varepsilon/b = 10^{-3}$, les courbes de variation du coefficient C/\sqrt{g} se confondent à partir de la valeur $R^* = 10^6$. L'écoulement turbulent est atteint plus tôt que dans le cas des courbes des figures 2.5 et 2.6. Cela peut se justifier par le fait que plus la rugosité relative ε/b augmente et plus le régime d'écoulement turbulent rugueux est atteint rapidement.

Une conclusion peut être tirée au regard des tableaux 2.1, 2.2 et 2.3 et même des figures 2.5, 2.6 et 2.7, c'est que plus la rugosité relative ε/b augmente et plus le coefficient C/\sqrt{g} diminue, quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds modifié R^* .

II.4.3. Etapes de calcul du coefficient C de Chézy

Pour calculer le coefficient C de Chézy, il est nécessaire que les paramètres suivants soient connus : le débit volume Q , la pente i du canal, la rugosité absolue ε , la largeur b du canal, la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement et l'accélération de la pesanteur g . Avec ces paramètres connus, le paramètre de forme η_0 est déduit, selon les étapes de calcul présentées lors des paragraphes précédents. C'est la relation (2.137) qui régit le coefficient C de Chézy et selon cette relation, les étapes suivantes sont recommandées pour le calcul de C :

- i. On calcule le paramètre de forme η en suivant les étapes indiquées lors des paragraphes précédents.
- ii. Avec la valeur ainsi calculée de η , on calcule la valeur de $\eta_0 = 1/\eta$ ainsi que celle de la fonction $\varphi(\eta_0)$ en application de la relation (2.129). Soit :

$$\varphi(\eta) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta_0 + 2)^{3/2}}$$

- iii. On détermine la valeur de la rugosité relative ε/b .
- iv. On calcule la valeur du nombre de *Reynolds* modifié R^* selon la relation (2.130). Soit :

$$R^* = \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu}$$

- v. Finalement, le coefficient C de *Chézy* est déduit de la relation (2.137). Soit :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left[\frac{\varepsilon/b}{1,165[\varphi(\eta_0)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^*\varphi(\eta_0)} \right]$$

II.4.4. Exemple de calcul du coefficient C de *Chézy*

On souhaite calculer la valeur du coefficient C de *Chézy* pour le cas d'un canal rectangulaire, connaissant les données suivantes :

$$Q = 3,861 \text{ m}^3 / \text{s}, \quad b = 2 \text{ m}, \quad \varepsilon = 0,001 \text{ m}, \quad i = 0,001, \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}.$$

1. On calcule la conductivité relative Q_b^* telle que :

$$Q_b^* = Q / \sqrt{gib^5} = 3,861 / \sqrt{9,81 \times 0,001 \times 2^5} = 6,89112787$$

On peut constater que $Q_b^* < 6\sqrt{3} = 10,3923048$.

2. Ainsi, le discriminant Δ de l'équation de troisième degré (2.74) est positif. Le paramètre de forme $\bar{\eta}$ est donc régi par la relation (2.80). Soit :

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \left(\frac{Q_b^{*2}}{256} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}} \right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{6,89112787^2}{256} \right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{6,89112787^2}{108}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{6,89112787^2}{108}} \right)^{1/3} \right] \\ &= 1,047052833 \end{aligned}$$

3. Avec la valeur ainsi calculée du paramètre de forme $\bar{\eta}$, les caractéristiques hydrauliques du modèle rugueux sont :

L'Aire de la section mouillée \bar{A} , donnée par la relation (2.8). Soit :

$$\bar{A} = b^2 \bar{\eta} = 2^2 \times 1,047052833 = 4,18821133m^2$$

Le périmètre mouillé \bar{P} , donné par la relation (2.10). Soit :

$$\bar{P} = b(1 + 2\bar{\eta}) = 2 \times (1 + 2 \times 1,047052833) = 6,18821133m$$

Le diamètre hydraulique \bar{D}_h est alors :

$$\bar{D}_h = 4\bar{A} / \bar{P} = 4 \times 4,18821133 / 6,18821133 = 2,70721933m$$

Le nombre de Reynolds \bar{R} est par suite :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 3,861}{6,18821133 \times 10^{-6}} = 2495713,09$$

4. Les caractéristiques hydrauliques du modèle rugueux ainsi calculées permettent de déterminer le facteur de correction des dimensions linéaires ψ , selon la relation (2.35). Soit :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{0,001 / 2,7063875}{4,75} + \frac{8,5}{2494946,25} \right) \right]^{-2/5} = 0,76845584 \end{aligned}$$

5. Affectons au modèle rugueux la nouvelle dimension linéaire suivante :

$$\bar{b} = b / \psi = 2 / 0,76845584 = 2,60262191m$$

6. Avec cette nouvelle dimension linéaire, calculons la nouvelle valeur de la conductivité relative, soit :

$$Q_b^* = \frac{Q}{\sqrt{gi} (b/\psi)^5} = \frac{3,861}{\sqrt{9,81 \times 0,001 \times 2,60262191^5}} = 3,56728326$$

7. Nous pouvons constater que la valeur de la conductivité relative ainsi calculée est inférieure à $6\sqrt{3} = 10,3923048$. Ceci permet de conclure que le paramètre de forme $\bar{\eta}$ est régi par la relation (2.80). Soit :

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \left(\frac{Q_b^{*2}}{256} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{Q_b^{*2}}{108}} \right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{3,56728326^2}{256} \right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3,56728326^2}{108}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3,56728326^2}{108}} \right)^{1/3} \right] \\ &= 0,603067235 \end{aligned}$$

Cette valeur calculée du paramètre de forme $\bar{\eta}$ correspond exactement au paramètre de

forme η de l'écoulement dans le canal rectangulaire étudié. Soit :

$$\eta = y_n / b = 0,603067235$$

8. Le paramètre de forme $\eta_0 = b / y_n$ est donc :

$$\eta_0 = \frac{1}{\eta} = \frac{1}{0,603067235} = 1,6581899$$

9. Selon la relation (2.129), la fonction $\varphi(\eta_0)$ est telle que :

$$\varphi(\eta_0) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta_0 + 2)^{3/2}} = \frac{32 \times \sqrt{2}}{(1,6581899 + 2)^{3/2}} = 6,46793439$$

10. La valeur de la rugosité relative ε / b est :

$$\varepsilon / b = 0,001 / 2 = 0,0005$$

11. La valeur du nombre de *Reynolds* modifié R^* est, selon la relation (2.130) :

$$R^* = \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu} = \frac{\sqrt{9,81 \times 0,001 \times 2^3}}{10^{-6}} = 280142,821$$

12. Finalement, la valeur recherchée du coefficient C de *Chézy* est, selon la relation (2.137) :

$$\begin{aligned} C &= -4\sqrt{2g} \log \left[\frac{\varepsilon / b}{1,165 [\varphi(\eta_0)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta_0)} \right] \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left[\frac{0,0005}{1,165 \times 6,46793439^{2/3}} + \frac{10,04}{280142,821 \times 6,46793439} \right] \\ &= 68,9013858 \approx 69m^{0,5} / s \end{aligned}$$

13. Vérifions la valeur ainsi calculée de C par celle issue de la MMR. Selon la MMR, le coefficient C de *Chézy* est donné par la relation suivante :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}}$$

(2.46)

Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ a été calculé à l'étape 4 et vaut :

$$\psi = 0,76845584$$

Le coefficient C de *Chézy* est par suite, selon la relation (2.46) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,76845584^{5/2}} = 68,4529552m^{0,5} / s \approx 68,5m^{0,5} / s$$

Ainsi, nous pouvons constater que l'écart relatif entre les valeurs de C calculées selon la méthode que nous avons présentée et la MMR est de :

$$\frac{\Delta C}{C} = 100 \times \frac{(68,9013858 - 68,4529552)}{68,9013858} = 0,65\%$$

Nous pouvons alors conclure, tenant compte du faible écart relatif obtenu, que les deux méthodes aboutissent pratiquement au même résultat.

II.4.5. Expression du coefficient adimensionnel de *Manning* dans un canal rectangulaire

La relation de *Manning* exprime le débit volume Q écoulé par le canal par la relation suivante :

$$Q = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (2.139)$$

Où n désigne le coefficient de *Manning*.

En comparant la relation (2.139) à la relation générale du débit volume exprimée par (2.124), nous pouvons déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g}R_h^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.140)$$

Le nombre de *Reynolds* R est, pour rappel, donné par la relation (2.128), tandis que le Rayon hydraulique R_h est donné par la relation (2.127). La relation (2.140) montre bien que le coefficient n de *Manning* est fonction de la rugosité absolue ε , du nombre de *Reynolds* R et du rayon hydraulique R_h . Cette dépendance de n vis-à-vis de R_h traduit bien le fait que n varie en fonction du paramètre de forme η_0 de la section mouillée du canal.

En introduisant la fonction $\varphi(\eta_0)$, donnée par la relation (2.129), dans l'expression du rayon hydraulique R_h exprimée par (2.127), nous pouvons écrire :

$$R_h = b \frac{[\varphi(\eta_0)]^{2/3}}{(32\sqrt{2})^{2/3}} \quad (2.141)$$

En remplaçant les relations (2.128) et (2.127), qui expriment le nombre de *Reynolds* R et le rayon hydraulique R_h respectivement, dans la relation (2.140), il vient que :

$$\frac{1}{n} = -\frac{4}{(32\sqrt{2})^{-1/9}} \sqrt{2g} b^{-1/6} [\varphi(\eta_0)]^{-1/9} \log\left(\frac{\varepsilon/b}{\frac{14,8}{(32\sqrt{2})^{2/3}} [\varphi(\eta_0)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta_0)}\right) \quad (2.142)$$

Après calculs, la relation (2.142) s'écrit en définitive :

$$\frac{1}{n} = -8,64\sqrt{g} b^{-1/6} [\varphi(\eta_0)]^{-1/9} \log\left(\frac{\varepsilon/b}{1,165[\varphi(\eta_0)]^{2/3}} + \frac{10,04}{R^* \varphi(\eta_0)}\right) \quad (2.143)$$

Introduisons le paramètre adimensionnel suivant :

$$N = \frac{b^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (2.144)$$

La relation (2.143) s'écrit alors, en termes adimensionnels, de la manière suivante :

$$N = -8,64[\varphi(\eta_0)]^{-1/9} \log \left(\frac{\varepsilon/b}{1,165[\varphi(\eta_0)]^{2/3} + R^* \varphi(\eta_0)} \right) \quad (2.145)$$

La relation (2.145) constitue l'expression finale du coefficient adimensionnel N de *Manning*. Lorsque les paramètres $\eta_0, \varepsilon, b, i$ et ν sont connus, la relation (2.143) ou (2.145) permet d'évaluer le coefficient n de *Manning*. Au regard de la relation (2.145), nous pouvons écrire la relation fonctionnelle suivante :

$$N = f(\varepsilon/b; \eta_0; R^*) \quad (2.146)$$

II.4.6. Variation du nombre adimensionnel N de *Manning*

Les tableaux suivants donnent la valeur du paramètre adimensionnel N , pour des valeurs fixées de la rugosité relative ε/b et en faisant varier le nombre de *Reynolds* modifié R^* . En-dessous de chaque tableau, nous avons présenté la variation de N en fonction du paramètre de forme η_0 et chacune des courbes obtenues est discutée.

Tableau 2.4 : Valeurs du paramètre N calculées selon la relation (2.145)

$\varepsilon/b = 0$		$R^* = 10^4$	$R^* = 10^5$	$R^* = 10^6$	$R^* = 10^7$	$R^* = 10^8$
η_0	$\varphi(\eta_0)$	N	N	N	N	N
0	16	26,7128956	33,0694973	39,426099	45,7827007	52,1393023
0,1	14,8708583	26,7273148	33,1358171	39,5443195	45,9528218	52,3613242
0,2	13,8685468	26,7396243	33,198007	39,6563898	46,1147725	52,5731552
0,3	12,9739799	26,750053	33,2564612	39,7628693	46,2692775	52,7756857
0,4	12,1716124	26,7587979	33,3115218	39,8642458	46,4169697	52,9696937
0,5	11,448668	26,7660293	33,3634878	39,9609463	46,5584048	53,1558633
0,6	10,7945602	26,7718956	33,4126216	40,0533475	46,6940734	53,3347994
0,7	10,20045	26,7765264	33,4591546	40,1417827	46,8244108	53,5070389
0,8	9,65890577	26,7800358	33,5032922	40,2265485	46,9498049	53,6730612
0,9	9,16363916	26,7825244	33,5452173	40,3079101	47,070603	53,8332959
1	8,70929686	26,7840813	33,5850933	40,3861053	47,1871173	53,9881293
1,1	8,2912963	26,784786	33,6230671	40,4613482	47,2996293	54,1379104
1,2	7,90569415	26,7847094	33,6592708	40,5338322	47,4083936	54,282955
1,3	7,54908067	26,783915	33,6938239	40,6037328	47,5136417	54,4235506
1,4	7,21849401	26,7824598	33,7268345	40,6712093	47,6155841	54,5599589
1,5	6,91135036	26,7803952	33,7584013	40,7364073	47,7144133	54,6924193
1,6	6,6253866	26,7777679	33,7886137	40,7994595	47,8103053	54,8211512
1,7	6,35861295	26,7746199	33,817554	40,860488	47,903422	54,946356
1,8	6,10927369	26,7709896	33,845297	40,9196045	47,993912	55,0682195
1,9	5,87581435	26,7669117	33,871912	40,9769123	48,0819126	55,1869129

2	5,65685425	26,7624181	33,8974622	41,0325064	48,1675505	55,3025946
2,1	5,45116328	26,7575378	33,9220063	41,0864747	48,2509432	55,4154117
2,2	5,25764236	26,7522976	33,9455983	41,138899	48,3321996	55,5255003
2,3	5,07530671	26,7467218	33,9682882	41,1898546	48,411421	55,6329874
2,4	4,90327173	26,740833	33,9901226	41,2394121	48,4887016	55,7379911
2,5	4,74074074	26,7346519	34,0111444	41,2876369	48,5641293	55,8406218
2,6	4,5869946	26,7281976	34,0313938	41,3345901	48,6377863	55,9409826
2,7	4,44138263	26,7214877	34,0509083	41,3803288	48,7097494	56,0391699
2,8	4,30331483	26,7145386	34,0697225	41,4249065	48,7800904	56,1352744
2,9	4,17225512	26,7073654	34,0878693	41,4683732	48,8488771	56,2293809
3	4,04771541	26,6999823	34,1053791	41,5107758	48,9161726	56,3215694
3,1	3,92925045	26,6924021	34,1222804	41,5521586	48,9820368	56,411915
3,2	3,81645337	26,6846372	34,1386	41,5925629	49,0465257	56,5004885
3,3	3,70895165	26,6766987	34,1543633	41,6320278	49,1096923	56,5873568
3,4	3,60640367	26,6685973	34,1695938	41,6705902	49,1715866	56,6725831
3,5	3,50849565	26,6603428	34,1843138	41,7082848	49,2322559	56,7562269
3,6	3,41493888	26,6519444	34,1985445	41,7451446	49,2917447	56,8383448
3,7	3,32546738	26,6434106	34,2123055	41,7812004	49,3500953	56,9189902
3,8	3,23983569	26,6347496	34,2256157	41,8164818	49,4073479	56,998214
3,9	3,157817	26,6259688	34,2384927	41,8510166	49,4635405	57,0760643
4	3,07920144	26,6170755	34,2509533	41,8848312	49,518709	57,1525869
4,1	3,00379454	26,6080761	34,2630134	41,9179507	49,572888	57,2278253
4,2	2,93141592	26,5989769	34,2746879	41,9503989	49,6261099	57,3018209
4,3	2,86189801	26,5897839	34,2859912	41,9821985	49,6784058	57,3746131
4,4	2,79508497	26,5805025	34,2969368	42,0133711	49,7298054	57,4462396
4,5	2,73083174	26,5711138	34,3075376	42,0439371	49,7803367	57,5167362
4,6	2,66900307	26,5616952	34,3178057	42,0739162	49,8300267	57,5861372
4,7	2,60947279	26,5521787	34,3277529	42,103327	49,8789011	57,6544753
4,8	2,55212303	26,542593	34,3373902	42,1321873	49,9269845	57,7217816
4,9	2,4968436	26,5329421	34,3467281	42,1605142	49,9743002	57,7880862
5	2,44353135	26,5232299	34,3557769	42,1883238	50,0208707	57,8534177

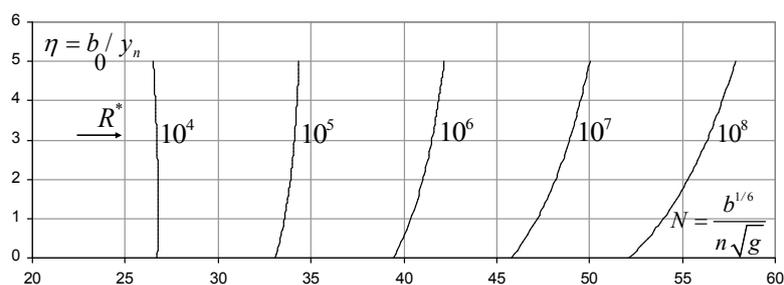


Figure 2.8 : Variation de N en fonction de η_0 , pour $\varepsilon / b = 0$
(Ecoulement lisse)

La figure 2.8 montre clairement que pour un nombre de *Reynolds* modifié R^* fixé, le paramètre adimensionnel N augmente avec l'accroissement du paramètre de forme η_0 . Cependant, nous pouvons constater que la courbe correspondant à $R^* = 10^4$ fait exception. En effet, pour cette valeur de R^* , la courbe subit une légère augmentation dans un premier temps, puis diminue très lentement. Mais, cette variation de N n'est pas significative et l'on peut

considérer que N demeure pratiquement constant. Au fur et à mesure que R^* augmente, l'accroissement de N est plus rapide. Pour un canal rectangulaire donné, c'est-à-dire pour une largeur b connue, l'augmentation du paramètre adimensionnel N signifie que $1/n$ augmente ou que n diminue, lorsque le paramètre de forme $\eta_0 = b/y_n$ augmente ou que la profondeur y_n diminue. Cette constatation est tout à fait physiquement justifiée. Nous pouvons enfin constater que pour une valeur donnée du paramètre de forme η_0 , le paramètre adimensionnel N augmente avec l'accroissement du nombre de *Reynolds* modifié R^* . Cela signifie que le coefficient n diminue au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de *Reynolds* modifié R^* .

Tableau 2.5 : Valeurs du paramètre N calculées selon la relation (2.145)

$\varepsilon/b = 10^{-4}$		$R^* = 10^4$	$R^* = 10^5$	$R^* = 10^6$	$R^* = 10^7$	$R^* = 10^8$
η_0	$\varphi(\eta_0)$	N	N	N	N	N
0	16	26,1742926	29,8981371	30,8254969	30,9379703	30,9494738
0,1	14,8708583	26,1962285	29,9847547	30,9383435	31,0544648	31,0663479
0,2	13,8685468	26,2156294	30,0664638	31,0456746	31,1653827	31,1776394
0,3	12,9739799	26,2327655	30,143717	31,1479807	31,2712179	31,2838425
0,4	12,1716124	26,2478694	30,2169085	31,2456897	31,3724018	31,385389
0,5	11,448668	26,2611423	30,2863833	31,3391774	31,4693132	31,4826579
0,6	10,7945602	26,27276	30,3524455	31,4287757	31,5622866	31,575984
0,7	10,20045	26,2828759	30,4153641	31,5147788	31,6516187	31,6656643
0,8	9,65890577	26,2916253	30,4753783	31,5974492	31,7375741	31,7519637
0,9	9,16363916	26,2991277	30,5327018	31,6770214	31,8203897	31,8351191
1	8,70929686	26,3054892	30,5875261	31,7537067	31,9002783	31,9153436
1,1	8,2912963	26,3108041	30,6400235	31,8276951	31,977432	31,9928295
1,2	7,90569415	26,315157	30,6903495	31,8991589	32,0520246	32,0677506
1,3	7,54908067	26,3186236	30,7386453	31,9682544	32,1242138	32,140265
1,4	7,21849401	26,321272	30,7850387	32,035124	32,1941435	32,2105165
1,5	6,91135036	26,3231637	30,8296466	32,0998975	32,2619448	32,2786365
1,6	6,6253866	26,3243545	30,8725755	32,162694	32,327738	32,3447454
1,7	6,35861295	26,3248947	30,9139231	32,2236228	32,3916335	32,4089535
1,8	6,10927369	26,3248304	30,953779	32,2827842	32,4537328	32,4713627
1,9	5,87581435	26,3242034	30,9922258	32,340271	32,5141296	32,5320667
2	5,65685425	26,3230519	31,0293394	32,3961689	32,5729105	32,591152
2,1	5,45116328	26,321411	31,0651902	32,4505569	32,6301555	32,648699
2,2	5,25764236	26,3193128	31,0998432	32,5035088	32,6859392	32,7047821
2,3	5,07530671	26,3167869	31,1333589	32,5550928	32,7403306	32,7594706
2,4	4,90327173	26,3138604	31,1657932	32,6053727	32,7933941	32,8128289
2,5	4,74074074	26,3105584	31,1971984	32,6544076	32,8451897	32,864917
2,6	4,5869946	26,3069041	31,2276231	32,702253	32,8957736	32,9157912
2,7	4,44138263	26,3029189	31,2571126	32,7489608	32,9451981	32,965504
2,8	4,30331483	26,2986227	31,2857096	32,7945795	32,9935126	33,0141046
2,9	4,17225512	26,2940339	31,3134536	32,8391547	33,040763	33,0616392
3	4,04771541	26,2891697	31,340382	32,8827291	33,0869928	33,1081512
3,1	3,92925045	26,2840459	31,3665297	32,9253429	33,1322426	33,1536813
3,2	3,81645337	26,2786775	31,3919295	32,9670341	33,1765509	33,1982681
3,3	3,70895165	26,2730783	31,4166125	33,0078383	33,2199537	33,2419477
3,4	3,60640367	26,2672612	31,4406078	33,0477893	33,2624854	33,2847543
3,5	3,50849565	26,2612383	31,4639427	33,0869188	33,3041782	33,3267202

3,6	3,41493888	26,2550209	31,4866433	33,1252569	33,3450625	33,3678761
3,7	3,32546738	26,2486196	31,508734	33,1628323	33,3851673	33,4082508
3,8	3,23983569	26,2420444	31,530238	33,1996718	33,42452	33,4478719
3,9	3,157817	26,2353046	31,5511773	33,2358012	33,4631466	33,4867652
4	3,07920144	26,2284089	31,5715726	33,2712446	33,5010717	33,5249556
4,1	3,00379454	26,2213655	31,5914437	33,3060253	33,5383189	33,5624665
4,2	2,93141592	26,2141824	31,6108092	33,3401652	33,5749103	33,5993203
4,3	2,86189801	26,2068666	31,6296871	33,3736853	33,6108673	33,6355382
4,4	2,79508497	26,1994252	31,6480941	33,4066054	33,6462101	33,6711404
4,5	2,73083174	26,1918646	31,6660464	33,4389445	33,6809579	33,7061464
4,6	2,66900307	26,1841909	31,6835592	33,4707207	33,7151292	33,7405744
4,7	2,60947279	26,17641	31,7006473	33,5019514	33,7487415	33,7744422
4,8	2,55212303	26,1685273	31,7173245	33,5326531	33,7818116	33,8077665
4,9	2,4968436	26,160548	31,733604	33,5628415	33,8143556	33,8405634
5	2,44353135	26,152477	31,7494987	33,5925318	33,8463887	33,8728483

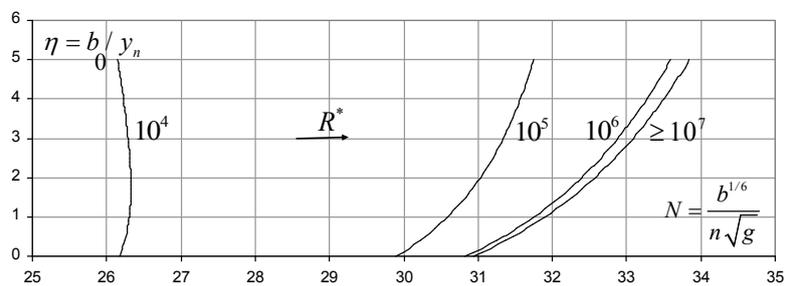


Figure 2.9 : Variation de N en fonction de η_0 , pour $\varepsilon / b = 10^{-4}$

La figure 2.9 montre, à l'exception de la courbe correspondant à $R^* = 10^4$, que le nombre adimensionnel N augmente avec l'accroissement du paramètre de forme $\eta_0 = b / y_n$, pour un nombre de *Reynolds* modifié R^* fixé. Cela signifie que le coefficient n diminue au fur et à mesure que la profondeur y_n de l'écoulement décroît. La courbe de $R^* = 10^4$ fait l'exception, car N augmente dans un premier temps puis diminue dans un second temps. Cependant, cette variation n'est pas très significative. La figure 2.9 montre également que les courbes se confondent lorsque le nombre de *Reynolds* modifié atteint la valeur $R^* = 10^7$. Au-delà de cette valeur, le nombre de *Reynolds* modifié R^* n'a aucune influence sur la variation du nombre N , cela signifie que la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement ne joue aucun rôle. L'état turbulent rugueux de l'écoulement est donc atteint pour $R^* = 10^7$. Seul le paramètre de forme $\eta_0 = b / y_n$ influence la variation de N .

Tableau 2.6 : Valeurs du paramètre N calculées selon la relation (2.145)

$\varepsilon / b = 10^{-3}$		$R^* = 10^4$	$R^* = 10^5$	$R^* = 10^6$	$R^* = 10^7$	$R^* = 10^8$
η_0	$\varphi(\eta_0)$	N	N	N	N	N
0	16	23,5415354	24,4688952	24,5813686	24,5928721	24,5940251
0,1	14,8708583	23,5762523	24,5298411	24,6459625	24,6578456	24,6590367
0,2	13,8685468	23,608081	24,5872919	24,7069999	24,7192566	24,7204852
0,3	12,9739799	23,6373089	24,6415725	24,7648098	24,7774343	24,7786999
0,4	12,1716124	23,6641845	24,6929657	24,8196779	24,832665	24,833967
0,5	11,448668	23,6889248	24,7417189	24,8718547	24,8851994	24,8865373

0,6	10,7945602	23,7117196	24,7880498	24,9215607	24,9352581	24,9366314
0,7	10,20045	23,732736	24,8321507	24,9689906	24,9830362	24,9844446
0,8	9,65890577	23,752122	24,8741928	25,0143178	25,0287073	25,0301502
0,9	9,16363916	23,7700089	24,9143286	25,0576968	25,0724262	25,0739032
1	8,70929686	23,7865141	24,9526947	25,0992663	25,1143316	25,1158424
1,1	8,2912963	23,8017424	24,989414	25,139151	25,1545484	25,1560925
1,2	7,90569415	23,8157881	25,0245975	25,1774632	25,1931892	25,1947664
1,3	7,54908067	23,8287363	25,0583455	25,2143049	25,2303561	25,2319659
1,4	7,21849401	23,8406639	25,0907492	25,2497687	25,2661417	25,2677839
1,5	6,91135036	23,8516406	25,1218915	25,2839388	25,3006305	25,3023047
1,6	6,6253866	23,8617297	25,1518482	25,3168922	25,3338995	25,3356055
1,7	6,35861295	23,8709891	25,1806887	25,3486995	25,3660195	25,3677569
1,8	6,10927369	23,8794715	25,2084767	25,3794254	25,3970553	25,3988238
1,9	5,87581435	23,8872255	25,2352708	25,4091293	25,4270664	25,4288658
2	5,65685425	23,8942952	25,2611247	25,4378663	25,4561079	25,4579379
2,1	5,45116328	23,9007217	25,2860885	25,4656871	25,4842305	25,486091
2,2	5,25764236	23,9065426	25,3102081	25,4926385	25,5114815	25,513372
2,3	5,07530671	23,9117925	25,3335265	25,5187642	25,5379042	25,5398246
2,4	4,90327173	23,9165037	25,3560831	25,5441045	25,5635393	25,5654894
2,5	4,74074074	23,9207059	25,3779151	25,5686972	25,5884245	25,5904041
2,6	4,5869946	23,9244268	25,3990568	25,5925773	25,612595	25,6146037
2,7	4,44138263	23,9276921	25,4195403	25,6157776	25,6360835	25,6381212
2,8	4,30331483	23,9305256	25,4393956	25,6383286	25,6589207	25,6609872
2,9	4,17225512	23,9329497	25,4586508	25,6602592	25,6811354	25,6832305
3	4,04771541	23,9349852	25,4773323	25,681596	25,7027544	25,7048779
3,1	3,92925045	23,9366514	25,4954647	25,7023644	25,7238031	25,7259549
3,2	3,81645337	23,9379667	25,5130713	25,722588	25,7443053	25,746485
3,3	3,70895165	23,938948	25,5301738	25,7422892	25,7642831	25,7664907
3,4	3,60640367	23,9396113	25,5467928	25,761489	25,7837578	25,7859931
3,5	3,50849565	23,9399717	25,5629477	25,7802071	25,8027492	25,805012
3,6	3,41493888	23,9400432	25,5786568	25,7984624	25,821276	25,8235661
3,7	3,32546738	23,9398391	25,5939374	25,8162724	25,8393559	25,8416732
3,8	3,23983569	23,9393719	25,6088057	25,8336539	25,8570057	25,8593501
3,9	3,157817	23,9386534	25,6232773	25,8506227	25,8742413	25,8766125
4	3,07920144	23,9376947	25,6373668	25,8671939	25,8910777	25,8934756
4,1	3,00379454	23,9365064	25,651088	25,8833816	25,9075292	25,9099536
4,2	2,93141592	23,9350983	25,6644543	25,8991993	25,9236093	25,9260601
4,3	2,86189801	23,9334798	25,677478	25,91466	25,9393308	25,941808
4,4	2,79508497	23,9316598	25,6901711	25,9297758	25,9547061	25,9572094
4,5	2,73083174	23,9296468	25,7025449	25,9445584	25,9697468	25,9722761
4,6	2,66900307	23,9274487	25,7146102	25,9590187	25,9844639	25,9870191
4,7	2,60947279	23,9250732	25,7263773	25,9731674	25,9988681	26,001449
4,8	2,55212303	23,9225273	25,737856	25,9870144	26,0129694	26,0155758
4,9	2,4968436	23,919818	25,7490555	26,0005695	26,0267774	26,0294094
5	2,44353135	23,9169518	25,7599849	26,0138418	26,0403014	26,0429587

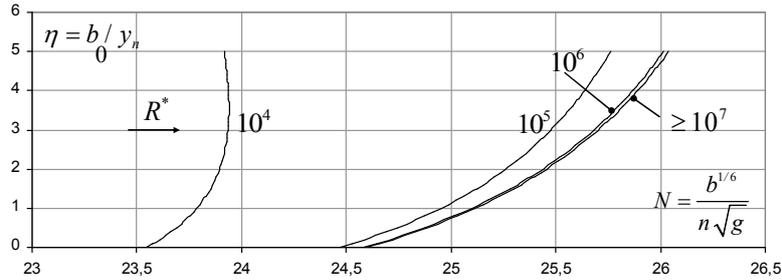


Figure 2.10 : Variation de N en fonction de η_0 , pour $\varepsilon / b = 10^{-3}$

Comme pour les figures 2.8 et 2.9, la figure 2.10 montre que le nombre adimensionnel N augmente avec l'accroissement du paramètre de forme $\eta_0 = b / y_n$, à l'exception de la courbe correspondant à $R^* = 10^4$. Pour cette courbe, le nombre adimensionnel subit une augmentation dans un premier puis une légère diminution au-delà d'une certaine valeur du paramètre de forme η_0 . Pour un paramètre de forme η_0 donné, nous pouvons constater que N augmente avec l'accroissement du nombre de *Reynolds* modifié R^* . Comme nous l'avons constaté sur la figure 2.9, la figure 2.10 montre également que les courbes se confondent lorsque le nombre de *Reynolds* modifié atteint la valeur $R^* = 10^7$. A partir de cette valeur, le régime d'écoulement turbulent rugueux est atteint, et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement n'a aucune influence sur la variation du nombre adimensionnel N . La figure 2.10 montre en particulier que le nombre adimensionnel N ne subit qu'une augmentation toute relative dans l'ensemble de la gamme tracée du paramètre de forme η_0 .

Au regard des valeurs des tableaux 2.4, 2.5 et 2.6, et également des figures 2.8, 2.9 et 2.10, nous pouvons observer que plus la rugosité relative ε / b augmente et plus le nombre adimensionnel N diminue, quelque soit la valeur du nombre de *Reynolds* modifié R^* . Cela revient à dire que $1/n$ augmente ou que le coefficient n diminue, pour canal rectangulaire donné pour lequel la largeur b est fixée.

II.5. CALCUL DU COEFFICIENT N DE *MANNING* PAR LA MMR

La relation (2.143) ou (2.145) ne permet d'évaluer le coefficient n de *Manning* que si la largeur b du canal rectangulaire est une donnée du problème. Dans le cas où b n'est pas explicitement connu, il est tout de même possible de calculer la valeur de n , à condition d'avoir recours à la méthode du modèle rugueux (MMR). C'est l'un des avantages de cette méthode.

En comparant les relations (2.132) et (2.139) de *Chézy* et de *Manning* respectivement, il est aisé de montrer que :

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{C} \quad (2.147)$$

Par suite, nous pouvons écrire que le coefficient n de *Manning* dans le modèle rugueux est tel que :

$$n = \frac{R_h^{-1/6}}{C} \quad (2.148)$$

Il est utile de rappeler que selon la MMR, le coefficient \bar{C} de *Chézy* dans le modèle rugueux est :

$$\bar{C} = 8\sqrt{2g} \quad (2.45)$$

Le modèle rugueux est un canal rectangulaire de largeur \bar{b} ; il écoule un débit volume \bar{Q} d'un liquide de viscosité cinématique $\bar{\nu}$ correspondant à un taux de remplissage $\bar{\eta}$, pour une pente longitudinale \bar{i} . Pour déterminer le coefficient n de *Manning*, admettons les conditions suivantes :

- i. $\bar{b} \neq b$: cette condition énonce que la largeur du canal et celle du modèle rugueux sont différents.
- ii. $\bar{Q} = Q$: le canal rectangulaire considéré et le modèle rugueux écoulent le même débit volume Q .
- iii. $\bar{i} = i$: le canal rectangulaire considéré et le modèle rugueux sont caractérisés par la même pente longitudinale i .
- iv. $\bar{\eta} = \eta$: le paramètre de forme du canal considéré est égal à celui du modèle rugueux de référence.

$\bar{\nu} = \nu$: le canal rectangulaire considéré et le modèle rugueux écoulent le même liquide.

Le débit volume \bar{Q} écoulé par le modèle rugueux s'écrit, en vertu de la relation (2.139) de *Manning* :

$$\bar{Q} = Q = \frac{1}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{-2/3} \sqrt{\bar{i}} \quad (2.149)$$

L'aire de la section mouillée A ainsi que le rayon hydraulique R_h de l'écoulement dans le canal rectangulaire considéré sont liés à leurs homologues du modèle rugueux \bar{A} et \bar{R}_h par les relations suivantes :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (2.150)$$

$$R_h = \psi \bar{R}_h \quad (2.151)$$

En tenant compte des relations (2.150) et (2.151), la relation de *Manning* devient :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} = \frac{\psi^{8/3}}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{-2/3} \sqrt{\bar{i}} \quad (2.152)$$

En comparant les relations (2.149) et (2.152), il ressort que :

$$n = \bar{n} \psi^{8/3} \quad (2.153)$$

Tenant compte de la relation (2.45), la combinaison des relations (2.148) et (2.153) mène à écrire que :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (2.154)$$

Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est donné par la relation (2.35), dont on rappelle l'expression :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.35)$$

Tenant compte de la relation (2.127), nous pouvons aisément écrire que :

$$\bar{D}_h = 4\bar{R}_h = 4 \frac{\bar{b}}{(\eta_0 + 2)} \quad (2.155)$$

En combinant les relations (2.129) et (2.155), nous pouvons écrire que :

$$\bar{D}_h = \frac{4\bar{b}}{(32\sqrt{2})^{2/3}} [\varphi(\eta_0)]^{2/3} \quad (2.156)$$

Rappelons d'autre part que le nombre de *Reynolds* \bar{R} figurant dans la relation (2.35) est donné par la relation (2.131) sous la forme suivante :

$$\bar{R} = \bar{R}^* \varphi(\eta_0) \quad (2.157)$$

Où \bar{R}^* est donné par la relation (2.130) sous la forme suivante :

$$\bar{R}^* = \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu} \quad (2.158)$$

En tenant compte des relations (2.156) et (2.157), la relation (2.35) devient :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{b}}{1,496 [\varphi(\eta_0)]^{2/3}} + \frac{8,5}{\bar{R}^* \varphi(\eta_0)} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.159)$$

En prenant en compte les relations (2.156) et (2.159), la relation (2.154) permet alors d'écrire que le coefficient n de *Manning* s'écrit finalement :

$$n = \frac{0,129}{\sqrt{g}} \bar{b}^{-1/6} [\varphi(\eta_0)]^{1/9} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{b}}{1,496 [\varphi(\eta_0)]^{2/3}} + \frac{8,5}{\bar{R}^* \varphi(\eta_0)} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.160)$$

Selon la relation (2.160), le coefficient n de *Manning* s'exprime en fonction du paramètre de forme η_0 , de la rugosité absolue ε et des caractéristiques \bar{b} et \bar{R}^* du modèle rugueux. Le

nombre de *Reynolds* \bar{R}^* est régi par la relation (2.158) qui dépend notamment de la largeur \bar{b} du modèle rugueux.

Pour exprimer la largeur \bar{b} du modèle rugueux, il faut faire appel à la relation (2.132) de *Chézy*. Appliquée au modèle rugueux, celle-ci s'écrit :

$$Q = \bar{C} \bar{A} \sqrt{\bar{R}_h i} \quad (2.161)$$

Le coefficient \bar{C} est le coefficient de *Chézy* dans le modèle rugueux donné par la relation (2.45) et vaut $8\sqrt{2g}$. L'aire de la section mouillée \bar{A} de l'écoulement dans le modèle rugueux s'exprime par la relation suivante :

$$\bar{A} = \frac{\bar{b}^2}{\eta_0} \quad (2.162)$$

Où η_0 est, pour rappel, le paramètre de forme tel que $\eta_0 = b / y_n$. Nous rappelons également que le rayon hydraulique \bar{R}_h peut être déduit de la relation (2.156).

Tenant compte de toutes ces considérations, la relation (2.161) s'écrit sous la forme suivante :

$$Q = 8\sqrt{2} \frac{\bar{b}^2}{\eta_0} \sqrt{\frac{\bar{b}}{(32\sqrt{2})^{2/3} [\varphi(\eta_0)]^{2/3}}} i \quad (2.163)$$

Après réarrangements, la largeur \bar{b} du modèle rugueux s'écrit :

$$\bar{b} = \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5} \frac{(32\sqrt{2})^{2/15}}{(8\sqrt{2})^{2/5}} \frac{\eta_0^{2/5}}{[\varphi(\eta_0)]^{2/15}} \quad (2.164)$$

Après calculs, la relation (2.164) s'écrit finalement :

$$\bar{b} = 0,63 \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5} \frac{\eta_0^{2/5}}{[\varphi(\eta_0)]^{2/15}} \quad (2.165)$$

La relation (2.165) permet de calculer la largeur \bar{b} du modèle rugueux, pour les valeurs connues du débit volume Q , de la pente i et du paramètre de forme η_0 .

Les étapes suivantes montrent la procédure de calcul du coefficient n de *Manning*, pour les données suivantes : Q , ε , i , η_0 , ν . Notons que la largeur b du canal rectangulaire considéré n'est pas requise pour le calcul de n .

- i.* Avec la valeur connue du paramètre de forme $\eta_0 = b / y_n$, on calcule la valeur de la fonction $\varphi(\eta_0)$ en application de la relation (2.129). Soit :

$$\varphi(\eta_0) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta_0 + 2)^{3/2}}$$

ii. Avec la valeur connue des paramètres Q , i et $\eta_0 = b / y_n$, on calcule la largeur \bar{b} du modèle rugueux selon la relation (2.165). Soit :

$$\bar{b} = 0,63 \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5} \frac{\eta_0^{2/5}}{[\varphi(\eta_0)]^{2/15}}$$

iii. Avec la valeur connue des paramètres i , \bar{b} et ν , on calcule le nombre de *Reynolds* modifié \bar{R}^* dans le modèle rugueux, en application de la relation (2.158). Soit :

$$\bar{R}^* = \frac{\sqrt{gi\bar{b}^3}}{\nu}$$

iv. Pour la valeur connue des paramètres \bar{b} , $\varphi(\eta_0)$, ε et \bar{R}^* , l'application de la relation (2.160) permet de calculer la valeur recherchée du coefficient n de *Manning*. Soit :

$$n = \frac{0,129}{\sqrt{g}} \bar{b}^{-1/6} [\varphi(\eta_0)]^{1/9} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{b}}{1,496 [\varphi(\eta_0)]^{2/3} + \frac{8,5}{\bar{R}^* \varphi(\eta_0)}} \right) \right]^{-16/15}$$

II.5.1. EXEMPLE DE CALCUL DU COEFFICIENT n DE *MANNING* PAR LA MMR

Reprenons les données de l'exemple d'application II.4.4 et calculons la valeur du coefficient n de *Manning*. Ces données sont :

$$Q = 3,861 m^3 / s, \eta_0 = 1,6581899, \varepsilon = 0,001 m, i = 0,001, \nu = 10^{-6} m^2 / s.$$

i. La valeur de la fonction $\varphi(\eta_0)$ est, selon la relation (2.129) :

$$\varphi(\eta) = \frac{32\sqrt{2}}{(\eta_0 + 2)^{3/2}} = \frac{32 \times \sqrt{2}}{(1,6581899 + 2)^{3/2}} = 6,46793439$$

ii. La largeur \bar{b} du modèle rugueux est, en vertu de la relation (2.165) :

$$\begin{aligned} \bar{b} &= 0,63 \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5} \frac{\eta_0^{2/5}}{[\varphi(\eta_0)]^{2/15}} \\ &= 0,63 \times \left(\frac{3,861}{\sqrt{9,81 \times 0,001}} \right)^{2/5} \times \frac{1,6581899^{2/5}}{6,46793439^{2/15}} = 2,60278499 m \end{aligned}$$

iii. En vertu de la relation (2.158), la valeur du nombre de *Reynolds* modifié \bar{R}^* est :

$$\bar{R}^* = \frac{\sqrt{gi\bar{b}^3}}{\nu} = \frac{\sqrt{9,81 \times 0,001 \times 2,60278499^3}}{10^{-6}} = 415902,896$$

iv. Le coefficient n de *Manning* est finalement, selon la relation (2.160) :

$$n = \frac{0,129}{\sqrt{g}} \bar{b}^{-1/6} [\varphi(\eta_0)]^{1/9} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{b}}{1,496 [\varphi(\eta_0)]^{2/3} + \frac{8,5}{\bar{R}^* \varphi(\eta_0)}} \right) \right]^{-16/15}$$

$$= \frac{0,129}{\sqrt{9,81}} \times 2,60278499^{1/6} \times 6,46793439^{1/9} \times \left[-\log \left(\frac{0,001 / 2,60278499}{1,496 \times 6,46793439^{2/3}} + \frac{8,5}{415902,896 \times 6,46793439} \right) \right]^{-16/15} = 0,01315253 m^{-1/3} s$$

- v. Vérifions les calculs en déterminant la largeur b du canal rectangulaire considéré, en ayant recours à la relation de *Manning* :

$$Q = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \sqrt{i}$$

Rappelons que :

$$A = b^2 / \eta_0, \quad R_h = \frac{b}{(32\sqrt{2})^{2/3}} [\varphi(\eta_0)]^{2/3}$$

En tenant compte de ces considérations, la relation de *Manning* s'écrit :

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[\varphi(\eta_0)]^{4/9}}{(32\sqrt{2})^{4/9} \eta_0} b^{8/3} \sqrt{i}$$

Après réarrangements, la largeur b s'écrit sous la forme suivante :

$$b = (32\sqrt{2})^{1/6} \frac{\eta_0^{3/8}}{[\varphi(\eta_0)]^{1/6}} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8}$$

L'application numérique donne :

$$b = (32 \times \sqrt{2})^{1/6} \times \frac{1,6581899^{3/8}}{6,46793439^{1/6}} \times \left(\frac{0,01315253 \times 3,861}{\sqrt{0,001}} \right)^{3/8} = 1,99673456 m \approx 2m$$

Il s'agit bien de la valeur de la largeur b du canal rectangulaire considéré, imposée dans l'exemple d'application II.4.4. Ceci vérifie bien les calculs effectués sur le coefficient n de *Manning*.

II.6. CONCLUSION

Le second chapitre de notre mémoire a eu pour objectif principal l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal de forme rectangulaire. Cette étude a concerné la résolution de deux problèmes relatifs à l'écoulement uniforme. Le premier problème est lié au dimensionnement du canal, c'est-à-dire à la détermination de la dimension linéaire b horizontale du canal ou la largeur de celui-ci. Le second problème consiste à l'évaluation de la profondeur de l'écoulement uniforme, appelée aussi profondeur normale et notée y_n .

Pour résoudre ces deux types de problèmes, nous avons eu recours aux relations régissant l'écoulement uniforme qui sont la relation de *Darcy-Weisbach*, la relation de *Chézy* et enfin la relation de *Manning*. Il est apparu que l'application de ces relations ne peut être aisée en raison du fait que le coefficient de frottement f , le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* et le coefficient n de *Manning* ne sont connus et ne constituent pas une donnée du problème. Pour contourner cette difficulté majeure, nous avons eu recours à la méthode du modèle rugueux de référence qui a permis de montrer que ces coefficients de résistance sont étroitement liés au coefficient de correction des dimensions linéaires ψ , dont l'expression explicite a été établie grâce à la relation de *Colebrook-White*. Nous avons montré que dans tous les cas, le coefficient ψ pouvait être évalué, ce qui a permis de calculer les coefficients de résistance f , C et n . Pour bien appliquer les relations régissant l'écoulement uniforme pour le dimensionnement du canal et le calcul de la profondeur normale, il a été nécessaire de les appliquer d'abord au modèle rugueux de référence. Ceci permet de connaître les caractéristiques géométriques et hydrauliques de ce modèle et de déduire celle de l'écoulement dans le canal étudié.

Nous avons résolu le problème de dimensionnement et de l'évaluation de la profondeur normale soit par la résolution d'équations de troisième degré, soit par application du théorème de *Lagrange* ou soit par application de la méthode du point fixe. Il est apparu cependant que la méthode du modèle rugueux jouait un rôle primordial dans la résolution du problème de l'écoulement uniforme.

CONCLUSION GENERALE

L'étude de l'écoulement uniforme dans un canal de forme rectangulaire a fait l'objet d'une recherche approfondie. Cette étude a concerné le dimensionnement du canal ainsi que la détermination de la profondeur normale de l'écoulement.

Pour mener à bien notre étude, nous avons subdivisé notre mémoire en deux principaux chapitres.

Le premier chapitre a été consacré à un état de connaissances sur l'écoulement uniforme dans lequel nous avons clairement rappelé les conditions d'établissement de l'écoulement dans un canal de grande longueur.

Dans le premier chapitre, nous avons exposé les différentes relations actuellement en vigueur régissant l'écoulement uniforme, telles que les relations de *Chézy*, de *Manning* et de *Darcy-Weisbach* qui constituent les relations les plus utilisées en pratique. Nous avons également rappelé les formules usuelles destinées à l'évaluation du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* et de *Colebrook*, en mettant l'accent sur leur caractère implicite et l'impossibilité de les évaluer en l'absence de la dimension linéaire du canal.

Le second chapitre du mémoire constitue notre propre contribution à l'étude de l'écoulement uniforme. Cette étude a été basée essentiellement sur les méthodes de détermination de la largeur du canal et de la profondeur de l'écoulement.

En ce qui concerne le dimensionnement du canal, nous avons d'abord fait appel à la relation de *Darcy-Weisbach* et nous avons relevé la difficulté, voire l'impossibilité, de définir le coefficient de frottement f en l'absence de la dimension linéaire du canal. Pour contourner cette difficulté, nous avons utilisé la méthode du modèle rugueux de référence. Après avoir exprimé les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux ainsi que ses caractéristiques géométriques, nous avons explicitement défini le coefficient de frottement \bar{f} de l'écoulement dans le modèle rugueux comme étant une constante. Cette particularité a permis d'établir la relation exprimant la largeur \bar{b} du modèle rugueux en fonction du rapport d'aspect η , du débit volume Q et de la pente géométrique i du canal. Pour un rapport d'aspect imposé, le problème du dimensionnement du canal a nécessité d'établir la relation liant la largeur b recherchée du canal à celle \bar{b} du modèle rugueux. Ces deux largeurs sont liées entre elles par le facteur de correction des dimensions linéaires ψ dont l'expression a été établie en ayant recours à la relation de *Colebrook-White*. La relation obtenue est implicite vis-à-vis du facteur ψ et nous avons proposé une excellente relation approchée permettant le calcul

explicite de ψ avec un écart relatif ne dépassant guère 0,6% seulement. Une fois \bar{b} et ψ déterminés, la dimension linéaire b recherchée s'obtient simplement par application de la relation fondamentale de la méthode du modèle rugueux $b = \psi \bar{b}$.

Le dimensionnement du canal a été également effectué en ayant recours à la relation de *Darcy-Weisbach* pour une profondeur normale imposée. Une nouvelle définition de la conductivité relative a été introduite et qui se rapporte à la profondeur normale y_n . L'application de la relation de *Darcy-Weisbach* a alors montré que cette conductivité relative était liée au rapport d'aspect η par une équation de troisième degré comprenant un terme du second ordre. Pour résoudre cette équation, nous avons eu recours aux fonctions trigonométriques et une racine réelle de l'équation du troisième degré en η a été alors déterminée. Elle donne la solution exacte du rapport d'aspect η en fonction de la conductivité relative connue, rapportée à la profondeur normale y_n . Pour déterminer la dimension linéaire recherchée b , nous avons suggéré d'appliquer l'équation de troisième degré en η au modèle rugueux de référence, afin de déduire de rapport d'aspect $\bar{\eta}$ de celui-ci. Grâce à la valeur calculée de $\bar{\eta}$, la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux est déterminée par application de la relation $\bar{b} = y_n / \bar{\eta}$. Par suite, avec les valeurs connues de $\bar{\eta}$ et de \bar{b} , les caractéristiques hydrauliques du modèle rugueux se déduisent directement, en particulier le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de *Reynolds* \bar{R} . Ces derniers paramètres permettent à leur tour l'évaluation explicite du coefficient de correction des dimensions linéaires ψ et par conséquent la nouvelle valeur de la conductivité relative rapportée à la dimension linéaire b/ψ . Cette nouvelle valeur de la conductivité relative est alors introduite dans l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}$, ce qui conduit enfin à la valeur du rapport d'aspect η . La dimension linéaire recherchée b s'obtient par application de la relation $b = y_n / \eta$.

Le dimensionnement du canal a aussi été effectué en ayant recours à la relation de *Chézy*, pour les deux cas où la profondeur normale et le rapport d'aspect sont imposés. Nous avons d'abord mis l'accent sur la difficulté d'application de la relation de *Chézy* en raison du fait que le coefficient C de *Chézy* n'est pas une donnée du problème. Grâce à la méthode du modèle rugueux de référence, nous avons pu établir que le coefficient C était directement lié au coefficient de correction des dimensions linéaires ψ et qu'il pouvait donc être évalué de manière explicite. Dans le cas où la profondeur normale y_n est imposée, l'application de la

relation de *Chézy* mène aussi à une équation de troisième degré comportant un terme du second ordre. Cette équation lie la conductivité relative rapportée à la profondeur normale y_n au rapport d'aspect η . L'absence de la valeur du coefficient C de *Chézy* ne peut permettre la détermination de la conductivité relative rapportée à la profondeur normale y_n . Pour contourner cette difficulté, nous avons appliqué l'équation du troisième degré au modèle rugueux de référence pour un coefficient de *Chézy* $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$. La résolution de l'équation a été rendue possible grâce aux fonctions trigonométriques. Deux racines réelles ont alors été proposées, selon que la conductivité relative rapportée à la profondeur normale y_n est inférieure ou supérieure à la valeur $3\sqrt{3}$. La résolution de l'équation du troisième degré appliquée au modèle rugueux permet de déterminer les caractéristiques hydrauliques de ce modèle, en particulier le rapport d'aspect $\bar{\eta}$, le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de *Reynolds* \bar{R} . Ces paramètres permettent le calcul du coefficient de correction des dimensions linéaires ψ et par suite la nouvelle valeur de la conductivité relative rapportée à la profondeur normale y_n/ψ . Cette nouvelle conductivité est utilisée pour la résolution de l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}$, qui donne exactement la valeur du rapport d'aspect η de l'écoulement dans le canal. La dimension linéaire recherchée b du canal étudié s'obtient alors très simplement par application de la relation $b = y_n/\eta$.

La relation de *Chézy* a été enfin appliquée pour la détermination de la profondeur normale y_n de l'écoulement. Les données du problème sont le débit volume Q , la largeur b du canal, la pente géométrique i de celui-ci, la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Le coefficient de résistance C de *Chézy* n'est pas, encore pour ce cas, une donnée du problème et, de ce fait, l'application de la relation de *Chézy*, sous sa forme classique, ne peut aboutir à la détermination de la profondeur normale. Fort heureusement, nous avons pu établir la relation liant le coefficient C de *Chézy* au facteur de correction des dimensions linéaires ψ , ce qui permettra d'évaluer de manière explicite le coefficient C . L'application de la relation de *Chézy* pour la détermination de la profondeur normale y_n mène encore une fois à une équation de troisième degré en η , comprenant un terme du second ordre, en fonction de la conductivité relative rapportée à la dimension linéaire connue b du canal. Cette équation du troisième degré a été résolue en ayant recours aux fonctions trigonométriques et deux racines réelles ont été proposées selon que la valeur de la

conductivité relative rapportée à la largeur b est inférieure ou supérieure à la valeur $\sqrt{27/32}$. Ces racines ne donnent pas directement la solution exacte du rapport d'aspect η puisque la conductivité relative rapportée à la largeur b n'est pas connue en l'absence de la valeur du coefficient C de *Chézy*. Pour contourner cette difficulté, l'équation du troisième degré en η a été d'abord appliquée au modèle rugueux de référence pour le coefficient de *Chézy* $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$ et sous la double condition $\bar{Q} = Q$ et $\bar{b} = b$. Ceci a permis de calculer la conductivité relative \bar{Q}^* de l'écoulement dans le modèle rugueux et d déterminer alors le rapport d'aspect $\bar{\eta}$. Ainsi, les paramètres hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux sont alors bien définis, en particulier le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de *Reynolds* \bar{R} . Ces paramètres permettent le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ et par suite la dimension linéaire b/ψ . Celle-ci permet à son tour d'évaluer la nouvelle valeur de la conductivité relative et la détermination du rapport d'aspect $\bar{\eta} = \eta$ de l'écoulement dans le canal considéré. Enfin, la profondeur normale y_n recherchée s'obtient par application de la relation $y_n = b/\eta$.

Le calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal étudié a eu également recours à la relation de *Manning*. Nous avons cependant noté l'absence de la valeur du coefficient n de *Manning* pour ce type de problème, ce qui ne facilite pas l'application de la formule de *Manning* sous sa forme usuelle ou classique. En admettant que le coefficient n est une donnée du problème, l'application de la formule de *Manning* mène à une équation implicite vis-à-vis du rapport d'aspect η en fonction de la conductivité relative rapportée à la largeur b du canal et dont la valeur est bien connue. Pour résoudre cette équation implicite, du avons fait appel au théorème de *Lagrange* qui a permis de donner la solution exacte du paramètre d'aspect η sous la forme d'une série illimitée. La solution exacte de η s'obtient donc théoriquement à l'infini et la série doit donc être tronquée pour obtenir une solution pratique approchée. Nous avons également proposé de résoudre l'équation implicite en η par la méthode du point fixe, après avoir choisi une première valeur η_0 pour le rapport d'aspect. Un processus itératif est alors enclenché pour le calcul de $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{i-1}$ et η_i . Ce processus itératif s'arrête lorsque $\eta_{i-1} \approx \eta_i$. Le calcul du rapport d'aspect η a pu être possible après avoir proposé une relation approchée pour l'équation implicite établie. Nous avons montré que cette relation approchée est tout à fait acceptable puisque la valeur du rapport d'aspect η s'obtient

avec une erreur relative de dépassant guère 0,07% seulement. Une fois η évalué par ces différentes méthodes de calcul, la profondeur normale y_n s'obtient facilement par application de la relation $y_n = b / \eta$

La détermination de la profondeur normale y_n par la relation de *Manning* peut être également effectuée en ayant recours à la méthode du modèle rugueux. Nous avons alors pu établir que le coefficient n de *Manning* est étroitement lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ et l'évaluation du coefficient n est alors aisée. L'application de la méthode du modèle rugueux à la relation de *Manning* mène à une équation du troisième degré en η , identique à celle que nous avons établie lors de l'application de la relation de *Chézy* et dont les étapes de calcul ont été clairement expliquées précédemment dans le paragraphe II.3.2.

Pour illustrer les différentes méthodes de calcul proposées et destinées au calcul de la largeur b du canal ainsi que celui de la profondeur normale, un exemple de calcul a été proposé. Nous avons alors pu constater que ces méthodes aboutissent toutes au même résultat, ce qui a confirmé la fiabilité et la validité des étapes de calcul proposées.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Achour B., *Calcul des conduites et canaux par la MMR – Conduites et canaux en charge*, Larhyss Edition Capitale, Tome 1, 2007, 610p.
- Bakhmeteff B.A., Feodoroff N.V., Discussion on open channel flow, Transactions, American Society of Engineers, Vol.108, p.492-502, 1943.
- Bazin H., Etude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts, Mémoire n°41, Annales des ponts et chaussées, Vol.14, ser.7, 4ème trimestre, p.20-70, 1897.
- Blench T., A new theory of turbulent flow in liquids of small viscosity, Journal, Institution of Civil Engineers, London, Vol.11, n°6, p.611-612, April, 1939.
- Camp T.R., Design of sewers to facilitate flow, Sewage Works Journal, Vol.18, p.1-16, 1946.
- Chow V.T., *Open channel Hydraulics*, McGraw-Hill International Editions, 1973.
- Forchheimer P., Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig and Berlin, p.139-163, 1930.
- Ganguillet E., Kutter W.R., An investigation to establish a new general formula for uniform flow of water in canals and rivers, Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereines, Vol.21, n°1, p.6-25, n°2-3, p.46-59, 1869.
- Houk I.E., Calculation of flow in open channels, Miami Conservancy District, Technical report, Pt. IV, Dayton, Ohio, 1918.
- Keulegan G.H., Laws of turbulent flow in open channels, Research paper RP 1151, Journal of Research, U.S. National Bureau of Standards, Vol. 21, p.707-741, December, 1938.
- Lindquist E., On velocity formulas for open channels and pipes, Transactions of the World Power Conference, Sectional Meeting, Scandinavia, Stockholm, Vol.1, p.177-234, 1933.
- Manning R., On the flow of water in open channels and pipes, Transactions, Institution of Civil engineers of Ireland, Vol.20, p.161-207, Dublin, 1891.
- Pavlovski N.N., "*Handbook of Hydraulic*", *Kratkil Gidravlicheskil, Spravochnik, Gosstrolizdat*, Leningrad and Moscow, 1940, 314p.
- Powell R.W., Resistance to flow in rough channels, Transactions, American Geophysical Union, Vol.31, n°4, p.575-582, August, 1950.
- Prandtl L., On fully developed turbulence, Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics, Zurich, P.62-74, 1926.
- Schnackenberg E.C., Slope discharge formulae for alluvial streams and rivers, Proceeding, New Zealand Institution of Engineers, Vol. 37, p.340-409, Wellington, 1951.
- Sinniger, R.O., Hager W.H., *Constructions hydrauliques*, Traité de Génie Civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Presses Polytechniques Romandes, (15), 1^{ère} Edition, Suisse, 1989.
- Swamee P.K., Jain A.K., Explicit equations for pipe-flow problems, Proc. ASCE, J. Hydraulics Division, Vol.102, HY5, p.657-664, 1976.
- Toebes C., Streamflow : Poly-dimensional treatment of variable factors affecting the velocity in alluvial streams and rivers, Proceedings, Institution of Civil Engineers, London, Vol.4, n°3, pt. III, p.900-938, December, 1955.
- Vladislavljevitch Z., Aperçu critique sur les formules pour la prédétermination de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme, Transactions of the 1st Congress, International Commission on Irrigation and Drainage, New Delhi, Vol.2, rept.12, question 2, p.405-428, 1951.