

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département de génie civil
Ref :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة المدنية
المرجع: /.....

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de
Doctorat en sciences
Spécialité : Structures

**Comportement Non Linéaire Géométrique et Matériel
Des Anneaux De Tenségrité
Relâchement et Plastification Des Câbles**

Présentée par : **Khellaf Nadia**
Soutenue publiquement le **10 /12/ 2014**

Devant le jury composé de :

Dr. Rachid	Chébili	Professeur.	Président	Univ. Biskra
Dr. Khelifa	Kebiche	Professeur.	Directeur de Thèse	Univ. Sétif
Dr. Djemal	Hamadi	Professeur.	Examineur	Univ. Biskra
Dr. Salah	Khalfallah	Professeur.	Examineur	Univ. Jijel
Dr. Zineddine	Boudaoud	Professeur.	Examineur	Univ. Oum Bouagui

DEDICACE :

À mon mari Zine el abidine

À ma mère et mon père

À Akram et Mohamed

Avant propos

Cette thèse est l'aboutissement de plusieurs années de recherches effectuées au niveau du département de Génie Civil de l'Université Sétif 1. Le domaine de recherche sur les structure de tenségrité étant nouveau, vaste, est très riche en issues de travail, le présent, a du passer par plusieurs modifications et ajouts avant de prendre sa forme finale, que l'on met aujourd'hui entre vos mains.

Cette humble contribution dans le domaine des structures légères a été réalisée sous la direction de Monsieur Kebiche Khelifa, professeur au département de Génie Civil de l'Université Sétif 1. Auquel j'adresse ma gratitude de m'avoir permis l'occasion de travailler sur un sujet aussi passionnant, ainsi que de m'avoir donné la liberté de développer les axes de ce thème, en étant dans le besoin, favorablement présent avec son expérience acquise dans ce domaine.

Un remerciement spéciale est dédié à Monsieur Chaoui Zine El Abidine professeur de la faculté des sciences pour son encouragement permanent, sa patience durant toute la période de réalisation de ce travail, ainsi que son précieux soutien moral et technique surtout au niveau de la programmation, domaine dans le quel il excelle.

Je remercie vivement Monsieur **Chebili Rachid** d'avoir accepter de présider le jury de soutenance.

Je remercie également Monsieur **Hamadi**, professeur de l'université de Biskra, Monsieur **Khalfallah**, professeur de l'Université de Jijel, sans oublier Monsieur **Boudaoud**, professeur de l'Université d'Oum Bouagui et Monsieur **Mimoune** professeur de l'Université de Constantine, de me faire l'honneur d'examiner et de rapporter ce manuscrit.

Résumé : Le travail présenté dans cette thèse a pour objectif de proposer un modèle d'analyse non linéaire géométrique et matériel et de l'appliquer sur des structures constituées d'anneaux de tensegrité obéissant au principe de la tension intégrale et représentant la dernière génération de type de configuration architectural. L'algorithme de calcul proposé est nouveau et prend en considération ; le relâchement et la plastification des câbles. La méthode de résolution itérative de Newton Raphson en formulation Lagrangienne actualisée a été adoptée. Cette étude montre que les anneaux de tensegrité sont moins flexibles que les structures de tensegrité classique. Il a été démontré que le couplage entre les effets du relâchement et la plastification des câbles dans un modèle de calcul non linéaire est indispensable pour se rapprocher le mieux de la réponse réelle des structures à base de tensegrité.

ملخص: في هذه الأطروحة يتم وصف و تطبيق محاكاة النموذج اللاخطي المركب (الهندسي و المادي) على هياكل مكونة من حلقات التونسيغريتي و هي حلقات خاضعة لمبدأ الشد و التكامل و تمثل آخر جيل لهذه الأنساق الهندسية. النموذج الخوارزمي المحصل عليه في هذه الدراسة، يعتبر حديثا و يأخذ بعين الإعتبار ارتخاء و تصفح الكابلات. تم استعمال طريقة نيوتن رافسن التكرارية في صياغة لاغرانج المحدثة. تظهر هذه الدراسة أن حلقات نظام التونسيغريتي أقل مرونة إذا قورنت بأنظمة التونسيغريتي الكلاسيكية. بالتركيز على تأثيري التراخي و التصفح في الكابلات على السلوك الكلي اللاخطي للأنظمة المدروسة، تبين أن الجمع بين هذين التأثيرين في نموذج التحليل اللاخطي مهم لفهم أفضل لردة فعل الهياكل المكونة من حلقات التونسيغريتي.

Abstract: Modeling with a combined geometric and material nonlinear analysis is described in this manuscript and applied to tensegrity rings representing the last generation of the tensegrity systems. The resulting algorithm model is new; it takes into account slackening and yielding of cables. The usual Newton-Raphson iterative method is used but in an updated Lagrangian formulation. It is shown that the tensegrity rings are less flexible compared to the classical tensegrity systems. Special attention is paid to the influence of the slackening and yielding of cables on the total nonlinear behavior. It has been found that their combination in a nonlinear analysis model is important for a better understanding of the response of tensegrity rings.

MOTS - CLÉS

ANNEAU DE TENSÉGRITÉ
CABLE ET BARRE
GRAND DÉPLACEMENT
DÉFORMATION PLASTIQUE
NON LINÉARITÉ GÉOMÉTRIQUE
NON LINÉARITÉ MATÉRIELLE
RELACHEMENT DES CABLES
PLASTIFICATION DES CABLES

KEY -WORDS

TENSEGRITY RING
CABLE AND STRUT
LARGE DISPLACEMENT
PLASTIC STRAIN
GEOMETRIC NONLINEARITY
MATERIEL NONLINEARITY
CABLE SLACKENING
CABLE YIELDING

Table des matières

Introduction Générale

- État de la Question.....1
- But de la Thèse.....2
- Plan de la Thèse.....3

Chapitre 1 : Introduction Aux Systèmes De Tenségrité

1.1. Introduction.....	5
1.2. Introduction aux systèmes de tenségrité..... ;.....	5
1.3. Définitions du Concept de Tenségrité.....	7
1.4. Caractéristiques de Base.....	8
1.5. Mécanique des Systèmes de Tenségrité.....	10
1.5.1 La Recherche de Forme	10
1.5.1.1. Méthode de recherche de forme.....	14
1.5.1.2. Recensement des États d'Autocontrainte et des Mécanismes....	16
1.5.1.3. Le Test de Stabilité.....	17
1.5.2. Conception de Systèmes de Tenségrité Complexes.....	18
1.6. Domaines d'Applications du Concept de Tenségrité.....	21
1.6.1 Architecture – Bâtiment ou Travaux Publics.....	21
1.6.2 Conquête spatiale.....	22
1.6.3 Biologie – Biomécanique.....	22
1.6.4 Technologie robotique.....	24
1.7. Conclusion.....	25

Chapitre 2 : Anneaux De Tenségrité

2.1. Introduction.....	26
2.2. Présentation des Anneaux de Tenségrité.....	26
2.3. Construction d'Anneaux de Tenségrité.....	29
2.4. Variétés Géométriques.....	31
2.4.1 Exemple de Détermination de la Géométrie d'un Anneau.....	32
2.5. Conception des Nœuds.....	35
2.6. Assemblages linéiques d'anneaux de tenségrité.....	39

2.7. États d'Autocontrainte De l'Anneau de Tensegrité	40
2.8. Conclusion.....	45
Chapitre 3 : Analyse Du Comportement Mécanique	
3.1. Introduction.....	46
3.2. Bases de la théorie non linéaires.....	46
3.2.1. Non linéarité géométrique.....	47
3.2.1.1.Principe des Déplacements Virtuels et Équilibre du Corps.....	47
3.2.1.2. Principe des Déplacements virtuel en (F.L.A).....	49
3.2.1.3. Discrétisation par Éléments Finis du Principe Incremental des Déplacements Virtuels.....	50
3.2.2. Non linéarité matérielle.....	52
3.2.2.1. Hypothèse de la Théorie Incrementale de Plasticité.....	53
3.2.2.2. Critère de Plasticité.....	54
3.2.2.3. Loi d'Écrouissage.....	54
3.2.2.4. Bilan de la Théorie Incrementale de Plasticité.....	55
3.2.3. Non linéarité combinée	55
3.3. Application de la Formulation Non linéaire aux Structures de Tensegrité	56
3.3.1. Discrétisation, et Formulation Matricielle.....	57
3.3.2. Méthode d'Analyse Non-Linéaire	61
3.3.3. Les Équations Élément Finis.....	62
3.3.3.1. Méthode de Résolution.....	65
3.4. Problème Lié au Comportement Unilatéral Des Câbles.....	70
3.5. Méthode De Contrôle des Câbles Relâchés.....	71
3.6. Conclusion.....	72
Chapitre 4 : Validation du Modèle De Calcul et Applications	
4.1. Introduction.....	73
4.2. Validation du Modèle de Calcul.....	73
4.3. Application du Modèle de Calcul.....	79
4.3.1 Influence de la Rigidité Relative des Éléments.....	80
4.3.2 Effet du Relâchement des Câbles.....	84

4.3.3 Effet Couplé du Relâchement et de la Plastification des Câbles.....	92
4.4. Conclusion.....	103
Conclusion Générale.....	106
ANNEXE A	
A. Autocontrainte.....	109
A.1. Obtention des bases des états d’autocontrainte et des mécanismes.....	109
ANNEXE B :	
B. Détermination de la Géométrie de l’Anneau de Tensegrité	113
B.1 Géométrie d’un Anneau à Base Carrée.....	113
B.2 Géométrie d’un Anneau à Base Pentagonale.....	115
ANNEXE C :	
C. État d’autocontrainte conforme.....	117
C.1. La méthode conditionnelle.....	117
C.1.1. Exemple de résolution.....	117
C.2. État d’Autocontrainte Retenu pour l’Anneau à base Pentagonale.....	119
C.2.3. vecteur d’autocontrainte.....	121
C.3. État d’autocontrainte pour l’anneau à base Carrée.....	123
C.3.3. vecteur d’autocontrainte.....	124
BIBLIOGRAPHIE.....	126
TABLE DES ILLUSTRATIONS.....	130

Symboles

$\{.\}$	Vecteur
$\{.\}^t$	Vecteur transposé
$[.]$	Matrice
$[.]^t$	Matrice transposée
.	Produit scalaire
=	Égalité exacte
\approx	Égalité approchée
$ker[\]$	Noyau d'une matrice
$\sum_{\exists ij}$	Sommation à effectuer sur tous les éléments j aboutissant au nœud i

Notations*Scalars*

A_b	Section de transversale de l'élément barres
A_c	Section de transversale de l'élément cables
b	Nombre total d'éléments dans un système
$(d_{ix}, d_{iy}, d_{iz}); (d_{hx}, d_{hy}, d_{hz})$	Composantes du déplacement des nœuds
e_j	Coefficient de variation de longueur de l'élément j
E_b	Module d'élasticité pour l'élément barre
E_c	Module d'élasticité pour l'élément barre
\bar{e}_{ij}	Accroissement de déformation
\bar{f}_i	Action extérieure appliquée au nœud i.
${}^t f_i$	Force de masse à t
F_o	Surface de plasticité

G^0	Configuration de tensegrité de référence
I_d	Nombre d'itérations nécessaires
I_p	Nombre d'itérations possibles
k	Nombre total de degrés de liberté bloqués
l_j^{lib}	Longueurs des composants dans un état libre de toute contrainte
l_j^0	Longueurs dans l'état de référence
l_j	Longueurs dans l'état chargé
M_t	Moment de torsion
m	Nombre de mécanismes
N	Nombre de degrés de liberté
n	Nombre total de nœuds
P_β	Sollicitations extérieures indépendantes des déplacements.
tP	Force de pression à t
q_j	Coefficient de densité de force
Q	Forces internes
R	Forces résiduelles
r_A	Rang de la matrice d'équilibre
tS	Surface latérale à t
s	Nombre d'états d'autocontrainte
T_j'	effort d'autocontrainte initiale dans l'élément j
T_j	Tension dans un élément pour un système dans un état assemblé chargé
tV	volume à l'instant t

${}^t(W)_{ext}$ Travail total des forces extérieures à t

w Énergie de déformation

$(x_i, y_i, z_i); (x_h, y_h, z_h)$ Positions de référence des nœuds i et h

Y_f Critère de plastification

Δl_j^0 Variation de longueur entre l'état libre et l'état de référence

Δl_j Variation de longueur entre l'état de référence et l'état chargé

$(\overline{\Delta L})$ Longueur d'arc imposée

τ Tenseur des contraintes de Cauchy

δ_t Variation à la date 't'

ρ Masse volumique

σ Contraintes de Cauchy

ε Déformations d'ingénieur

$d\varepsilon$ Variation de la déformation

ε_{ij}^e Déformation élastique

ε_{ij}^p Déformation plastique

$\overline{\sigma}_y$ Limite élastique initiale en traction pure

\square_{ij} Déviateur des contraintes

σ_c Contrainte de comparaison

λ Paramètres de charge

Θ angle de torsion

Matrices

$[\Delta A_\delta]$ Matrice des déplacements relatifs dus au mécanisme δ

$[A]$ Matrice d'équilibre

$[C]$ Matrice de connectivité

$[D^o]$ Matrice de connexion des coefficients d'autocontrainte

$[K_\tau]$ Matrice de rigidité tangente

$[K]$ Matrice de rigidité des petits déplacements

$[K_\sigma]$ Matrice des contraintes initiales

$[K_1], [K_2], [K_3], [K_{12}]$: Matrices de rigidité du second ordre

$[Q_o]$ Matrice diagonale des coefficients d'autocontrainte

Vecteurs

$\{d\}$ Vecteur des déplacements nodaux

$\{e\}$ Vecteur des coefficients de variation de longueur des éléments.

$\{f\}$ Vecteur des composantes des actions extérieures

$\{q\}$ Vecteur des coefficients de densité de force

$\{T^l\}$ Autocontrainte initiale

$\{T_j\}$ vecteur des forces dans les éléments

$\{x\}$ coordonnées des nœuds

$\{\delta\}$ Vecteur mécanisme

Introduction Générale

- État de la question
- But de la thèse
- Plan de la thèse

- **État de la Question**

Le domaine des structures spatiales, notamment légères, connaît ces dernières années un développement accru, et constitue de ce fait, une réponse conforme à l'apparition de nouveaux besoins dans le paysage architectural actuel tel que les grandes surfaces commerciales, les aires d'expositions et de manifestations culturelles et sportives. Le souci majeur de ce développement consiste à rompre avec l'orientation vers les édifices à structures massives et parfois agressives, certains estiment qu'il est grand temps de chercher la solution dans la nature avec les formes souples et agréables qu'elle offre et dont l'équilibre structurel répond souvent à des critères d'économie en effort et en matière. Pour d'autres il est nécessaire de redéfinir la notion de durée de vie d'un ouvrage à la lumière de son utilisation présente ou à venir et par là même offrir à leurs successeurs la possibilité de le modifier de le déplacer ou de le supprimer à moindre frais.

Pour répondre à ces nouveaux besoins, les concepteurs développent des recherches originales sur les formes structurales de l'architecture, en particulier sur les systèmes à base de tensegrité qui constituent une réponse efficace dans la recherche d'une structure optimale idéale, pouvant accepter un état de sollicitation interne sans massif d'ancrage extérieur. Ces structures, servent bien entendu, comme couvertures pour ces grandes surfaces.

Pour mieux clarifier le propos, citons à juste titre, la couverture des installations des jeux olympiques de Munich réalisé dans les années 70. Cet ouvrage, de part son importance et la nature des innovations apportées, a servi de catalyseur en démontrant de façon spectaculaire la faisabilité de tels projets et a inscrit dans l'imaginaire collectif, *les structures légères* en tant que perspectives d'avenir [Mau98].

La réalisation de telle structures, implique, par voie de conséquence, le développement de nouvelles méthodes de calcul, de nouvelles approches et de nouveaux procédés de réalisation ainsi que des avancés technologiques considérables. C'est donc, dans une optique d'extension de ces méthodes que ce situent les axes de recherche proposés dans cette thèse.

Une des difficultés majeures que peut rencontrer un chercheur qui s'intéresse aux structures légères à base de tensegrité, est que ces structures très particulières ne peuvent être traitées par les logiciels classiques utilisés en mécanique des structures, ce qui conduit, souvent ces chercheurs à élaborer leurs propres modèles de calcul. La difficulté est d'autant plus amplifiée notamment quand l'étude est menée dans l'hypothèse des non linéarités géométriques associées aux non linéarités matérielles, comme c'est le cas de cette thèse, puisque ces structures sont très flexibles et exhibent de grands déplacements.

Le défi à relever est donc de taille, il s'agit d'abord d'adapter les approches théoriques existantes aux systèmes de tensegrité dans un modèle numérique fiable de calcul traduisant le comportement mécanique de ces structures en adéquation avec leurs particularités, pouvant être résumés en ;

1. *les mécanismes* développés par ces structures, qui peuvent être éliminés par la conception d'une *configuration stable* admettant un *état d'autocontrainte conforme* avec le comportement unilatéral des câbles,
2. les phénomènes d'instabilité partielle due au *relâchement* ou à la *rupture de câbles* et quelque fois au *flambement des barres au cours du chargement*.

- **But de la Thèse**

Le travail présenté dans cette thèse porte principalement sur le développement d'une procédure d'analyse en non linéarité géométrique et matérielle d'une famille de systèmes mécaniques constructifs innovant : les anneaux de tensegrité. Ces structures présentent plusieurs atouts pour de multiples domaines d'application. En plus de l'aspect architectural et esthétique, ces structures offrent comme qualités essentielles : performance mécanique, légèreté et pliability.

Dans cette étude principalement, les effets individuels et combinés dus au relâchement de certains câbles et à la plastification d'autres sur l'amplification de la réponse non-linéaire des structures étudiées sont visés.

En dépit de plusieurs études présentées sur le comportement non-linéaire des structures de tensegrité, jusqu'à ce jour aucune n'a été conduite pour examiner le comportement non-linéaire élasto plastique des anneaux de tensegrité après relâchement des câbles. La non prise en compte de ces deux formes de ruine partielle (relâchement et plastification des câbles) entraînerait une erreur considérable dans l'estimation de la réponse de ces structures au cours de l'analyse du comportement non-linéaire.

Pour cette effet le présent travail se présentera essentiellement sous forme d'une étude comparative entre quatre types d'analyses : une **Analyse Non-linéaire Elastique (N.E.A)** correspondant à une analyse non-linéaire géométrique avec des déformations élastiques, une **Analyse Non-linéaire Elastique Post-Slackening*** (N.E.PS.A.) avec prise en compte de la stratégie de câbles relâchés présentée dans le paragraphe 4.6, une **Analyse Non-linéaire Elasto-Plastique (N.EP.A.)** correspondant à une analyse en non-linéarité géométrique considérant l'effet éventuel de l'évolution dans le domaine élasto-plastique des éléments câbles et enfin une **Analyse Non-linéaire Elasto-Plastique Post-Slackening*** (N.EP.PS.A) combinant les non-linéarités géométriques et matérielles avec l'inclusion de l'effet de relâchement de câbles. Il est à noter que les charges appliquées au cours de l'analyse ne dépasseront pas la limite de rupture des câbles et le flambage des barres.

Il nous semble important de signaler ici, que l'aspect simulation (programmation numérique) bien qu'ils n'apparaissent pas dans la rédaction de ce manuscrit, nous lui avons consacré un temps considérable pour le développement et l'aboutissement du présent thème de recherche.

1.3 .Plan de la Thèse

Les différentes parties de ce manuscrit seront présentées suivant la répartition ci dessous :

Le chapitre qui va suivre sera consacré à un aperçu sur les systèmes de tensegrité afin de rappeler les bases mécaniques essentielles et spécifiques à ces systèmes.

L'origine de la conception et les étapes de constructions géométriques de l'anneau de tensegrité sont détaillés dans le deuxième chapitre. Trois configurations d'anneaux seront proposées : l'anneau de tensegrité à base carrée, à base pentagonale et à base hexagonale. Les éléments de la structure ainsi que les dispositifs de connexion y sont décrits. Différent modes de montage seront également exposés dans ce chapitre.

Le troisième chapitre concernera le développement théorique de la méthode d'analyse non linéaire et l'algorithme de résolution utilisé.

Le modèle de calcul proposé sera confronté avec quelques résultats expérimentaux et théoriques trouvés dans la littérature dans le quatrième chapitre. Dans cette même partie, des applications du modèle de calcul proposé sont faites sur des mono modules et sur l'assemblage de plusieurs modules suivies de discussions.

Chapitre 1

Introduction Aux

Systèmes De Tensegrité

- 1.1. Introduction
- 1.2. Introduction aux systèmes de tensegrité
- 1.3. Définitions du Concept de Tensegrité
- 1.4. Caractéristiques de Base
- 1.5. Mécanique des Systèmes de Tensegrité
 - 1.5.1 La Recherche de Forme
 - 1.5.1.1. Méthodes de recherche de forme
 - 1.5.1.2. Recensement des États d'Autocontrainte et des Mécanismes
 - 1.5.1.3. Le Test de Stabilité
 - 1.5.2. Conception de Systèmes de Tensegrité Complexes
- 1.6. Domaines d'Applications du Concept de Tensegrité
 - 1.6.1 Architecture – Bâtiment ou Travaux Publics
 - 1.6.2 Conquête spatiale
 - 1.6.3 Biologie – Biomécanique
 - 1.6.4 Technologie robotique
- 1.7. Conclusion

1.1. Introduction

Dans ce chapitre, Nous allons essayer de donner un léger historique sur le développement du concept de tenségrité. Nous parlerons, des caractéristiques de base d'une structure conçue à la base de ce concept, sur les plans géométrique et mécanique.

Bien que les méthodes de recherche de forme de configurations stables ne font partie des axes d'intérêt de ce travail de recherche ; on les abordera, de point de vue de complément bibliographique. Quelques méthodes de recherche de formes, tant en ce qui concerne des modules de tenségrité élémentaires, qu'en ce qui concerne des assemblages multi modulaires, admettant des états d'auto contrainte conformes, au comportement unilatéral des câbles, seront résumés dans ce premier chapitre.

Enfin nous couronnerons ce chapitre avec une présentation de quelques cas d'application réels du principe de tenségrité par rapport à certains axes de recherches très développés.

1.2 Introduction aux systèmes de tenségrité

Jusqu'au 19ème siècle, la majorité des ouvrages était conçus et bâtis en favorisant la résistance en compression. Les matériaux utilisés jusque là (pierres ou briques) faisaient du poids propre la charge prédominante par rapport à la charge d'exploitation. Les nombreux progrès technologiques dans l'élaboration de l'acier, aussi robuste en traction qu'en compression, ont permis l'apparition d'ouvrages moins massifs et plus élancés tout en réduisant le temps et le coût de réalisation. Les premières structures et aussi les plus remarquables du génie civil que l'on peut considérer comme légères et résistantes étaient le pont de Brooklyn (Fig.1.1) et la tour Eiffel (Fig.1.2).



Fig.1.1 Brooklyn bridge New York 1883

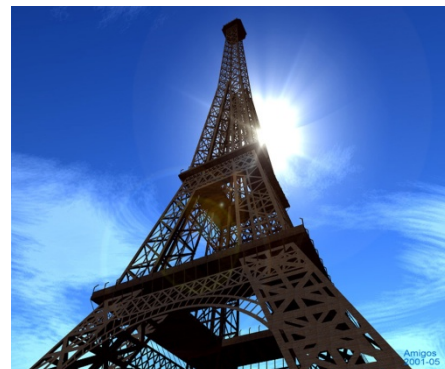


Fig.1.2 Tour Eiffel Paris 1889

Dans le souci de réaliser des structures esthétiques et de plus en plus légères, les chercheurs dans le domaine du génie civil et les architectes, se sont tourné vers la précontrainte. Dans le béton elle permet de réduire fortement les sections et allège la structure; concernant la construction métallique, elle est utilisée dans les structures haubanées ou pour rigidifier des membranes textiles qui constituent de véritables peaux couvrant et protégeant les constructions (Fig.1.3).



Fig.1.3 complexe olympique de Munich, 1972

Par la suite, l'architecture a évoluée vers des systèmes à réseaux de câbles dont la mise en tension nécessite pour introduire les efforts de précontrainte, des massifs d'ancrage qui peuvent être importants (Fig. 1.4) et (Fig.1.5).

L'idée de créer des systèmes pouvant accepter un état de sollicitation interne sans massif d'ancrage extérieur survint alors et grâce à tous ces préalables, on ne parla plus de précontrainte mais d'*autocontrainte*.



Fig.1.4 pont de Tancarville près de l'estuaire de la Seine



Fig. 1.5 Massif d'ancrage

C'est à R. Buckminster Fuller [FUL62], architecte et inventeur américain que l'on doit le mot tenségrity, qui représente la contraction de **tensional** (ou **tensile**) et **integrity**. Cette notion sous-entend un système constructif dont les éléments tendus

forment un réseau continu. Les principaux promoteurs de la tenségrité, qui chacun de son côté, a développé ou utilisé ce concept sont : R. B. Fuller, K. D. Snelson et D. G. Emmerich.

Selon R. Motro [MOT03], c'est Fuller qui a énoncé le concept de tenségrité. Snelson, un de ses élèves, a réalisé les modèles physiques permettant de concrétiser l'idée que Fuller n'avait pu matérialiser. Emmerich [EMM88] quant à lui, d'une façon indépendante, et inspiré par la sculpture *Gleichgewichtkonstruktion* de K. Ioganson 1920 (Fig.1.6), a décrit les structure de tenségrité comme étant des "structures tendues et auto-tendantes" (Fig.1.7).

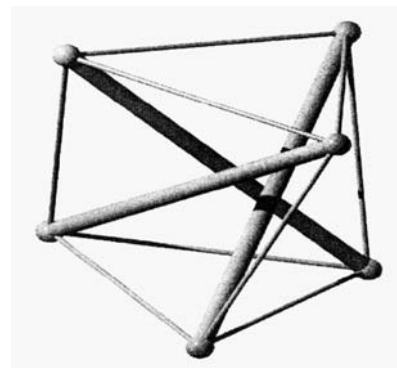
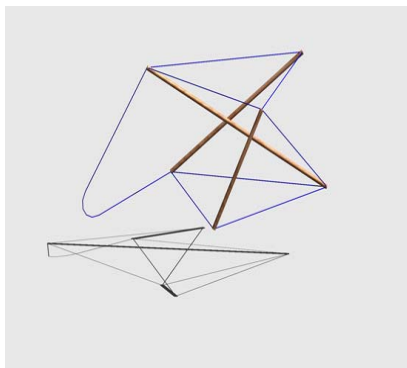


Fig. 1.6 *Gleichgewichtkonstruktion 1920* [EMM88] Fig.1.7 *Emmerich Structure*[EMM88]

1.3. Définitions du Concept de Tenségrité

Le concept de tenségrité chez les différents inventeurs, converge vers un système constructif auto-équilibré ; formé d'un ensemble discontinu d'éléments comprimés inséré dans un réseau continu d'éléments tendus. La traction et la compression s'équilibrent pour former une configuration stable et rigide. Un demi-siècle après l'émergence de la tenségrité, de nombreuses définitions sont proposées par les chercheurs passionnés par cette fascinante structure. Citons comme exemple la définition énoncée par R. Motro [MOT97] : « *Les systèmes des tenségrité sont des systèmes réticulés, spatiaux en état d'autocontrainte. Les éléments ont une fibre moyenne rectiligne et des tailles du même ordre de grandeur. Les éléments comprimés forment un réseau discontinu. Les éléments tendus forment un réseau continu et n'ont pas de rigidité en compression* » (Fig.1.8).

Cette définition insiste non seulement sur l'auto-équilibre mais intègre aussi la notion de composant au lieu d'élément. En effet, un composant pourrait être une barre ou un ensemble de barres.

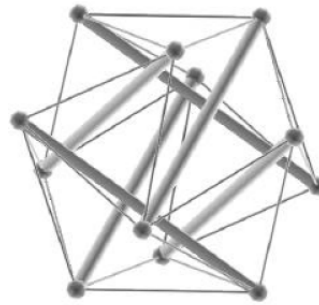


Fig.1.8 Modèle de Structure de Tenségrité 'Octaèdre Expandé'[QUI00]

B. B. Wang [WAN03] pour sa part, propose une autre définition mettant l'accent sur la caractéristique typiquement autoportante des systèmes de tenségrité.

« Les systèmes de tenségrité sont des réseaux autoportants d'éléments réticulés avec un système continu de câbles tendus dans un système discontinu de barres, ainsi que, tous les réseaux autoportants de câbles réticulés, composés d'unités de construction conformes à cette définition ».

1.4. Caractéristiques de Base

- les systèmes de tenségrité sont réticulés, les sollicitations induites dans les éléments sont uniquement des sollicitations de traction ou de compression, lorsque les charges extérieures sont appliquées aux nœuds. Du point de vue du calcul de structures, cela simplifie l'étude puisque trois paramètres seulement vont caractériser l'élément: sa section droite, son module d'élasticité (module de YOUNG) ainsi que sa longueur de fabrication.

- Ils sont spatiaux car ils peuvent rester en équilibre sous des actions extérieures de directions quelconques. Ces actions sont supposées être appliquées sur les nœuds pour ne pas engendrer de sollicitation de flexion ou de torsion dans les éléments.

- Enfin, l'autocontrainte est un état de sollicitation qui est instauré au moment du montage du système. Elle est indépendante de toute liaison avec l'extérieur et elle est fonction d'un coefficient multiplicateur définissant le niveau de l'autocontrainte.

Afin d'expliquer comment cet état de contrainte initial particulier peut exister, [KEB98] et [QUI00] ont précisé que la mise en autocontrainte d'une cellule de tenségrité passe par trois étapes (Fig.1.9).

- Structure relationnelle donnée entre les éléments et absence de forme géométrique,
- A partir de cette structure relationnelle donnée entre les éléments, une géométrie à contraintes initiales nulles est déterminée, géométrie pour laquelle le système est stable sans posséder de rigidité.
- Il faut alors jouer sur les tailles relatives des éléments pour instaurer les sollicitations dans les éléments (T comme tension) qui vont rigidifier le système.

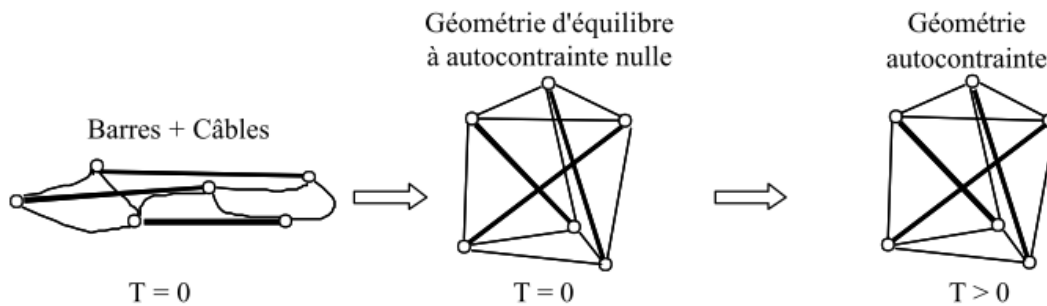


Fig.1.9 Mise en Autocontrainte d'un Système de Tenségrité. [QUI00]

Une autre caractéristique importante des systèmes de tenségrité c'est qu'ils peuvent posséder des mécanismes infinitésimaux. Un mécanisme est défini comme étant un déplacement particulier des nœuds tel que les variations de longueur des éléments induites sont nulles, au moins, au premier ordre (ordre des déplacements nodaux). Si les déformations sont exactement nulles, le mécanisme est dit fini. Cela correspond à un mouvement de corps rigide. Si elles ne sont nulles que jusqu'à un certain ordre, on parle de mécanismes infinitésimaux (Fig.1.10). L'ordre du mécanisme infinitésimal est défini comme étant le dernier ordre pour lequel les déformations sont nulles [VAS00].

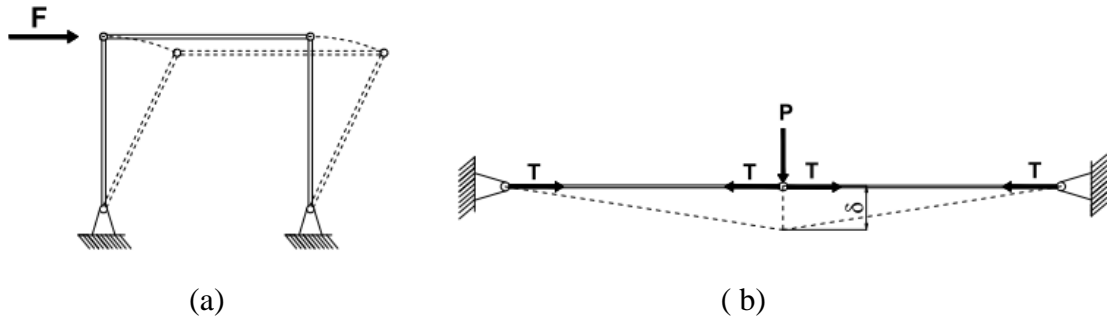


Fig.1.10 a : Mécanisme Finis, b : Mécanisme Infinitésimal[SAN05]

Bien sûr, ces mécanismes sont des faiblesses pour la structure. En fait, c'est l'introduction de contraintes initiales qui va pallier cette souplesse; en agissant comme des forces de rappel. Plus les contraintes initiales seront fortes, plus le mécanisme sera difficilement mobilisable. Il est bien entendu que la mise en place de l'autocontrainte n'est possible que pour des configurations très particulières. Une des premières phases de la conception des systèmes de tenségrité, consiste donc à déterminer des configurations géométriques compatibles avec l'existence d'un état d'autocontrainte. C'est ce qui est appelé la recherche de forme.

Dans le paragraphe qui va suivre il s'agira d'exposer les méthodes de recherche de formes structurelles susceptibles d'être autocontraintes ainsi que les méthodes du recensement des états d'autocontrainte et des mécanismes qui caractérisent les systèmes de tenségrité. Enfin, nous exposerons une méthode permettant de tester la stabilité du système de tenségrité considéré après application de l'autocontrainte.

1.5. Mécanique des Systèmes de Tenségrité.

De nombreuses études ont déjà été menées dans le domaine de la mécanique des systèmes de tenségrité. Entre autre, la recherche de forme et l'étude des états d'autocontrainte et des mécanismes qui caractérisent ces structures.

1.5.1 La Recherche de Forme

Pour concevoir un système de tenségrité, il est indispensable de déterminer une configuration susceptible d'être autocontrainte. Ce processus est conduit selon des méthodes développées pour la recherche de forme autocontrainte [VAS97]. Les deux méthodes proposées par Vassart (**itérative et analytique**) sont basées sur la formulation des densités de forces initialisée par Linkwitz [LIN71] et reprise par

Sheck [SHE74]. Cette formulation est surtout utilisée dans l'étude et le calcul de réseaux de câbles tendus. Avant d'exposer ces méthodes, il serait utile dans un premier temps de présenter quelques notations qui seront utilisées par la suite.

On appelle configuration de référence (G^0), un système de tensegrité non chargé initialement autocontraint. Cette autocontrainte initiale notée $\{T^I\}$, peut avoir des intensités différentes. Elle doit être compatible avec la rigidité unilatérale des composants câbles et doit contribuer à la stabilité du système. La configuration de référence est obtenue sans considérer le poids propre du système et avant tout chargement extérieur. Le nombre total d'éléments dans un système sera noté b . Ces éléments étant chacun reliés à deux nœuds, nous noterons n le nombre total de nœuds dans la structure. Un élément courant sera noté j ($j \in [1, b]$) et un nœud courant i ($i \in [1, n]$). Le nombre total de degrés de liberté bloqués par un bâti éventuel est noté k . De ce fait, le nombre de degrés de liberté N pour une structure spatiale sera $N = 3n - k$. Le nombre d'états d'autocontrainte s et le nombre de mécanismes m sont déterminés selon:

$$s = b - r_A \text{ et } m = N - r_A \quad [\text{VAS97}] \quad (1.1)$$

Delà on peut déduire la relation suivante entre les quatre paramètres (s, b, m, N) :

$$s - b = m - N \quad [\text{VAS97}] \quad (1.2)$$

r_A est le rang de la matrice d'équilibre $[A]$

Les éléments constituant le système assemblé subissent des déformations, depuis leur fabrication jusqu'à leur mise en charge; il est ainsi nécessaire d'identifier les longueurs selon trois états :

- Les longueurs des composants dans un état libre de toute contrainte (l_j^{lib}) qui sont celles mesurées avant l'assemblage. Elles sont aussi nommées longueurs libres ou de fabrication.
- Les longueurs dans l'état de référence (l_j^0) qui sont celles des composants assemblés dans la configuration de référence du système G^0 . Les composants subissent alors uniquement les efforts internes de l'autocontrainte T^I .
- Les longueurs dans l'état chargé (l_j) où les composants subissent les effets de l'autocontrainte et du chargement extérieur. Les nœuds se trouvent dans une nouvelle position d'équilibre. Les longueurs dans les trois cas mentionnés, ainsi que les

variations de longueur entre les états libre, de référence et chargé, sont schématisées sur la Fig. 1.11.

Etat libre

Longueur libre ou de fabrication

Etat de référence

Longueur après assemblage sans chargement extérieur

Etat chargé

Longueur sous l'action d'un chargement extérieur

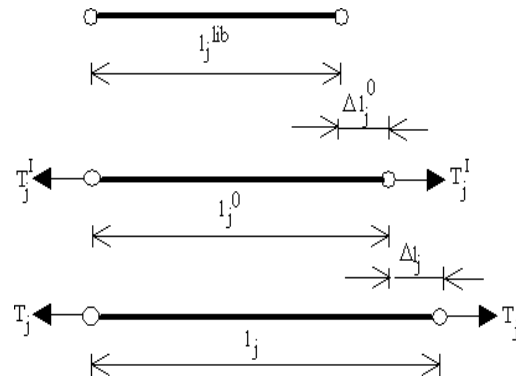


Fig. 1.11 Longueurs des Composants et variations des longueurs selon l'état considéré [QUI00]

La variation de longueur Δl_j^0 est la variation de longueur entre l'état libre et l'état de référence, la variation de longueur Δl_j est la variation de longueur entre l'état de référence et l'état chargé. La relation entre les longueurs libres l_j^{lib} et de référence des composants d'un système, soumis à l'effort de l'autocontrainte T_j^I , peut être établie par :

$$l_j^{lib} = \frac{E_j A_j}{T_j^I + E_j A_j} l_j^0 \quad (1.3)$$

Les efforts dans chaque élément j sont notés T_j . L'ensemble de ces valeurs constitue un vecteur des efforts à b termes, $\{T\}$. Les déplacements nodaux peuvent également être mis sous forme vectorielle, $\{d\}$ à N composantes. De la même façon, le vecteur des actions extérieures $\{f\}$ se présente comme un vecteur à N termes.

$$\{T\} = \{T_1 \dots T_j \dots T_b\}^t \quad (1.4)$$

$$\{d\} = \{\dots d_{ix}, d_{iy}, d_{iz}, \dots\}^t \quad (1.5)$$

$$\{f\} = \{\dots f_{ix}, f_{iy}, f_{iz}, \dots\}^t \quad (1.6)$$

A partir de ces notations, il est possible de définir une autre quantité caractérisant l'état de sollicitation pour chaque élément, c'est le **coefficient de densité de force** q_j .

$$q_j = \frac{T_j}{l_j^0} \quad (1.7)$$

Les b coefficients de densité de force q_j sont regroupés dans le vecteur $\{q\}$ tel que :

$$\{q\} = \{q_1 \dots q_j \dots q_b\}^t \quad (1.8)$$

L'avantage de ces coefficients de densités de forces, est qu'ils vont permettre de simplifier l'écriture de l'équilibre statique des nœuds. En effet, les équations d'équilibre du système se formulent pour chaque nœud libre du système, suivant l'Eq.1.9 :

$$\vec{f}_i + \sum_{j \ni i} \vec{T}_j = 0 \quad (1.9)$$

où

\vec{T}_j : sont les actions exercées par chaque élément j connecté au nœud i ,

\vec{f}_i : L'action extérieure appliquée au nœud i .

En définissant pour chaque élément les coordonnées des nœuds suivant la Fig.1.12 (coordonnées globales) et en prenant comme convention de signe que la traction est positive, il est alors possible d'écrire les équations d'équilibre projetées sur les trois directions de l'espace (Eq. 1.10).

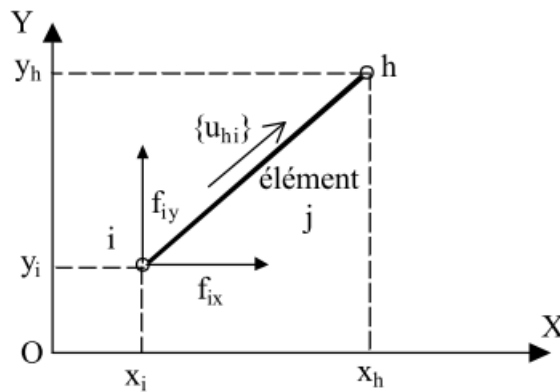


Fig.1.12 Définition du nœud libre i connecté au nœud h par l'élément j , $\{u_{hi}\}$ est le vecteur directeur unitaire de l'élément. (Projection suivant la direction Z)

$$\begin{cases} \sum_{j \ni i} \frac{(X_h - X_i)}{l_j^0} T_j + f_{ix} = 0 \\ \sum_{j \ni i} \frac{(Y_h - Y_i)}{l_j^0} T_j + f_{iy} = 0 \\ \sum_{j \ni i} \frac{(Z_h - Z_i)}{l_j^0} T_j + f_{iz} = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

sollicitation interne qui est indépendant de tout chargement extérieur ». Rechercher cet état d'autocontrainte consiste donc à trouver un vecteur $\{q^0\}$ non nul tel que :

$$[A]\{q^0\} = 0 \quad (1.14)$$

Néanmoins, cette équation présente deux inconnues qui sont l'état d'autocontrainte ($\{q^0\}$) et la géométrie du système (contenue dans $[A]$). Il est alors plus judicieux de réécrire les équations de manière à avoir un système de la forme de l'Eq. 1.15.

$$[D^0]\{x\} = 0 \quad (1.15)$$

$[D^0]$ est la matrice de connexion des coefficients d'autocontrainte résultant du produit entre la matrice de connectivité $[C]$ et la matrice diagonale des coefficients d'autocontrainte $[Q^0]$ ([VAS97] pp 131-138),

$\{x\}$ est formé des composantes donnant la position des nœuds du système.

Bien sûr, la résolution de ce système linéaire n'est possible qu'après la définition complète de $[D^0]$. Cela suppose que la structure relationnelle du système $[C]$ et l'état d'autocontrainte $[Q^0]$ sont connus. Cette nécessité de choisir, a priori, un état d'autocontrainte du système est un problème car elle n'aboutit pas forcément sur des solutions acceptables. En effet, rien n'assure le concepteur de la non-dégénérescence de la solution: solution réduite à un point par exemple. Il faut alors poser des conditions sur le rang de la matrice $[D^0]$ pour obtenir un système réticulé spatial. Il est possible de faire plusieurs essais, voire de proposer une résolution itérative (d'où le nom de la méthode), mais cela reste quelque peu aléatoire. Si le concepteur désire gérer au mieux la géométrie de la structure, la méthode analytique est la plus appropriée.

B. Méthode Analytique

Cette méthode est basée sur l'équation d'équilibre issue de la définition des coefficients de densités de forces (Eq.1.12). Comme nous l'avons vu, la recherche des états d'autocontrainte suppose que pour un chargement $\{f\}$ nul, il existe au moins un vecteur d'autocontrainte $\{q^0\}$ non nul. Ce qui revient à dire que le noyau de la matrice $[A]$ est non nul (Eq. 1.14). L'idée de la méthode est justement d'écrire analytiquement cette condition sur la matrice $[A]$ et de résoudre le problème de manière symbolique.

Cela permet d'obtenir les relations sur les composantes autorisant l'introduction d'un état d'autocontrainte dans le système.

Il faut noter que pour un vecteur $\{q^0\}$ donné, il peut exister plusieurs géométries autocontraintes. Comme, pour une géométrie donnée, il peut exister plusieurs états d'autocontrainte. Aussi, une fois cette géométrie autocontrainte définie, il faut passer à une autre étape de la conception qui est la recherche de tous les états d'autocontrainte s et de tous les mécanismes m de la structure. Cette recherche est essentielle pour pouvoir vérifier la stabilité de la structure.

1.5.1.2 Recensement des États d'Autocontrainte et des Mécanismes

La recherche de forme permet de définir une géométrie pour laquelle le concepteur est sûr de trouver un état d'autocontrainte. Mais il est important de vérifier a posteriori quels sont tous les états d'autocontrainte et les mécanismes présents dans le système. D'ailleurs, comme nous le verrons par la suite, lorsque nous concevrons des systèmes par assemblage de modules élémentaires autocontraints bien connus, il ne sera pas nécessaire de procéder à une recherche de forme: nous recenserons directement les états d'autocontrainte et les mécanismes du système. Ce recensement se fait là encore à partir de la matrice d'équilibre $[A]$. Comme nous l'avons vu, les états d'autocontrainte sont des vecteurs $\{q^0\}$ non nuls satisfaisant l'Eq. 1.14, c'est à dire appartenant au noyau de $[A]$. Le nombre d'états d'autocontrainte s d'un système est alors défini comme étant la dimension du noyau de $[A]$. Il correspond au nombre de vecteurs d'autocontrainte linéairement indépendants admissibles par le système. Si le concepteur parvient à déterminer une base du noyau de la matrice $[A]$, il aura donc à sa disposition s vecteurs indépendants permettant de générer l'ensemble des états d'autocontrainte admissibles par la structure. De la même façon, le nombre de mécanismes m d'un système est défini par la dimension du noyau de la transposée de $[A]$. Pour comprendre d'où provient ce résultat, il faut construire la matrice qui traduit la compatibilité entre les déplacements des nœuds et les déformations dans les éléments. Pour cela, nous définissons des coefficients de variation de longueur e_j :

$$e_j = \Delta l_j l_j^0 \quad (1.16)$$

Où

Δl_j est la variation de longueur de l'élément j par rapport à l'état de référence.

Si nous posons (x_i, y_i, z_i) et (x_h, y_h, z_h) les positions de référence des nœuds i et h , extrémités de l'élément j et (d_{ix}, d_{iy}, d_{iz}) et (d_{hx}, d_{hy}, d_{hz}) les composantes du déplacement des nœuds au cours d'un déplacement quelconque, nous pouvons, en faisant l'hypothèse de petits déplacements, écrire un développement à l'ordre un de l'Eq. 1.16 ([VAS97], pp 12 & 13) :

$$e_j \approx (x_i - x_h)(d_{ix} - d_{hx}) + (y_i - y_h)(d_{iy} - d_{hy}) + (z_i - z_h)(d_{iz} - d_{hz}) \quad (1.17)$$

Cette relation écrite pour tous les éléments, permet de constituer un système de la forme :

$$[A]^T \{d\} \approx \{e\} \quad (1.18)$$

où $\{d\}$ est le vecteur des composantes des déplacements des nœuds depuis l'état de référence et $\{e\}$ le vecteur à b composantes des coefficients de variation de longueur des éléments.

$$\{e\} = \{e_1 \dots e_j \dots e_b\}^t \quad (1.19)$$

Comme dans le cas de la recherche des états d'autocontrainte, la détermination des mécanismes (déplacements nodaux $\{d\}$ non nuls tels que les déformations dans les éléments soient nulles au moins au premier ordre) revient exactement à chercher le noyau de $[A]^T$. Dans la suite, les mécanismes seront notés sous la forme d'un vecteur $\{\delta\}$ à N composantes correspondant aux déplacements nodaux libres. La question qui se pose alors, est de savoir si l'état d'autocontrainte du système permet de stabiliser ces mécanismes.

Un exemple simple concernant l'obtention des bases des états d'autocontrainte et des mécanismes est détaillé en Annexe A.1

1.5.1.3. Le Test de Stabilité

Dans un premier temps, rappelons que la position d'équilibre d'un système est dite stable s'il revient à cette position d'équilibre quelle que soit la perturbation qui lui est imposée au voisinage de cette position. Pour vérifier que tous les mécanismes du système sont stabilisés par un état d'autocontrainte, VASSART [VAS 97] propose plusieurs solutions suivant l'ordre des mécanismes.

Pour les mécanismes d'ordre 1 et dans l'hypothèse où le système est conservatif, il est possible de poser une condition de positivité sur l'énergie de déformation engendrée par un mécanisme $\{\delta\}$ par la condition suivante :

$$\forall \{\delta\} \in \text{Ker}[A]^T, \{\delta\} \neq \{0\} : W = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [\Delta A_\delta] \{q^0\} > 0 \quad (1.20)$$

Où

$[\Delta A_\delta]$ est la matrice des déplacements relatifs dus au mécanisme δ ,

$\{q^0\}$ est le vecteur d'autocontrainte dont on veut vérifier l'action stabilisante vis à vis des mécanismes.

Cette inéquation peut d'ailleurs s'écrire sous une forme quadratique à partir de la définition de la matrice de connexion globale des coefficients d'autocontrainte $[D^0]$ [VAS97],.

$$W = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [D^0] \{\delta\} \quad (1.21)$$

Avec

$$D^0(q^0) = \begin{cases} D_{ix,hx}^0 = -q_j^0 & \text{avec } i \neq h \text{ et } [i, h] = j \\ D_{ix,ix}^0 = \sum q_j^0 & j \text{ élément relié au nœud } i \\ D_{ix,hy}^0 = 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

Le système est stabilisable s'il existe $\{q^0\}$ différent de zéro tel que W est définie positive.

Ce calcul, qui est valable dans le cas de mécanismes d'ordre un, a également été développé pour les ordres supérieurs.

1.5.2. Conception de Systèmes de Tenségrité Complexes

Pour réaliser des systèmes de tenségrité multi module (complexes), il est nécessaire d'adapter les processus de conception d'un mono module connus jusqu'alors pour tenir compte des spécificités de ces systèmes.

Les systèmes de tenségrité sont autocontraints et ne doivent leur rigidité qu'à cet état d'autocontrainte. Il faudra donc dans un premier temps étudier la façon dont va pouvoir être répartie l'autocontrainte dans la structure. Il est certes possible d'envisager une recherche de forme sur une structure à grand nombre de modules, mais compte tenu des difficultés posées par l'une ou l'autre des méthodes exposées précédemment cela devient difficile dans le cas de structures complexes. En pratique,

la recherche de forme sert surtout à la création de modules simples, à géométrie présentant des régularités susceptibles de permettre une prolifération uni, bi ou tri directionnelle [QUI00].

Les modules de tenségrité les plus simples sont ceux désignés sous le nom de «série prismatique». Ils sont formés de deux nappes de câbles formant des polygones réguliers comme l'exemple du simplex, le quadruplex, etc... (Fig.1.13).



Fig. 1.13 Cellules de Tenségrité; a : Simplex à 3 barres et 9 câbles, b : Quadruplex à 4 barres et 12 câbles. [QUI00],

A partir de ces modules de base, Il est possible de créer des assemblages, soit par simple juxtaposition, nœud à nœud, soit en scindant certains éléments et en créant de nouveaux nœuds. Nous allons voir maintenant quelques exemples d'assemblages dans le cas des systèmes précédemment décrits (simplex et quadruplex), ou nous présenterons d'après [VAS97], l'évolution du nombre de mécanismes m et de l'autocontrainte s en fonction du nombre de modules assemblés.

Assemblages de simplex semblables						
structure	Nbre d'éléments	Nbre de barres	Nbre de câbles	Nbre de nœuds	s	M
	12	3	9	6	1	1
	22	6	16	9	2	1
	32	9	23	12	3	1
	42	12	30	15	4	1
	52	15	37	18	5	1
	60	18	42	19	10	1


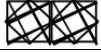



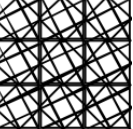
Assemblages de demi-cuboctaèdres (quadruplex):						
structure	Nbre d'éléments	Nbre de barres	Nbre de câbles	Nbre de nœuds	s	M
	16	4	12	8	1	3
	31	8	23	13	2	4
	46	12	34	18	4	6
	60	16	44	21	4	1
	89	24	65	29	9	1
	132	36	96	40	19	1

Tableau.1.1 Évolution du nombre d'états d'autocontrainte et de mécanismes suivant le nombre de modules assemblés[VAS97].

Dans chacun de ces tableaux, il faut noter une nette augmentation du nombre d'états d'autocontrainte de chacune des structures par rapport au nombre de modules assemblés. S'il est normal que les modules assemblés gardent leur autocontrainte propre, il est intéressant de noter que l'assemblage crée de nouveaux états d'autocontrainte.

sur la Fig.1.14, des exemples d'assemblage linéaires donnant naissance à des mâts, des poutres et des tours de tenségrité, sont présentés.

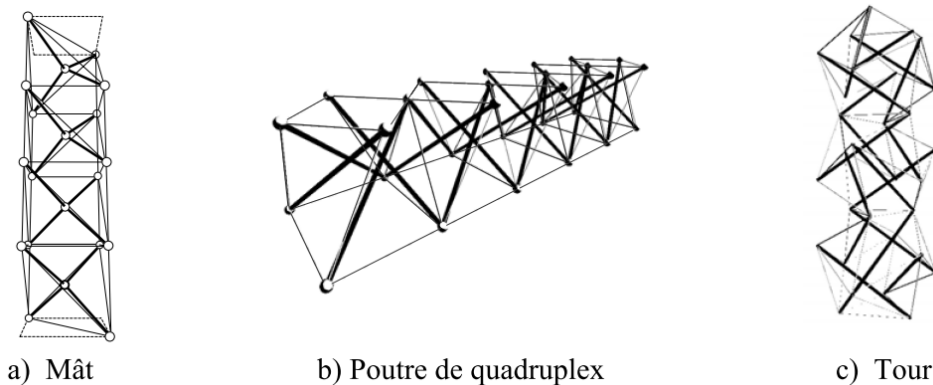


Fig.1.14 Exemples de Génération de Systèmes de Tenségrité Linéaires([VAS97],

1.6. Domaines d'Applications du Concept de Tenségrité

A l'heure actuelle, la tenségrité est plus que jamais présente dans le domaine scientifique. Que ce soit dans le domaine du génie civil, la technologie robotique, la conquête spatiale ou dans la biologie moléculaire, le principe de tenségrité fait partie des axes les plus innovants de la recherche. Nous présentons dans les paragraphes suivants quelques cas d'application de la tenségrité.

1.6.1. Architecture – Bâtiment ou Travaux Publics

C'est dans ce domaine que l'on trouve la plus abondante source de publication scientifique. L'intérêt en termes d'esthétique architectural et de déployabilité motive de nombreuses équipes de recherche. La recherche de forme, l'analyse du comportement mécanique et l'étude de la pliabilité sont des thèmes de recherche menés de manière à mettre en évidence l'efficacité de la tenségrité. Dans la pratique, le principe de tenségrité est initialement connu par les œuvres sculpturales de Snelson, mais des ouvrages d'art sont aussi réalisés. En 2003, à l'occasion de la foire de Rostok (Allemagne) une tour de tenségrité a été conçue par Gerkan, Marg and Partners en partenariat avec Schlaich, Bergemann and Partners (Fig.1.15) [SCH04]. Sur la Fig.1.16 est présenté the 'Kurilpa bridge' initialement connue sous le nom de 'Tank Street Bridge', ouvert le 4 octobre 2009 à Queensland en Australie. Cet ouvrage a été désigné en 2011 the world transport building dans le world architectural festival.

(a)



(b)



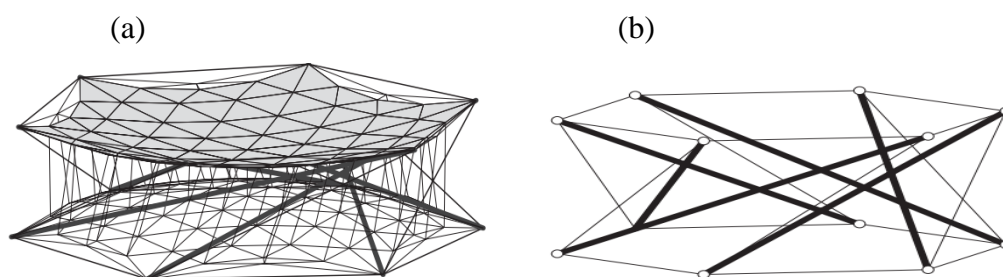
Fig.1.15 a. The Rostock Tower vue globale ; b. Vue de l'intérieur[SCH04]



Fig 1.16 Kurilpa Bridge à Brisbane en Australie

1.6.2 La Conquête spatiale

Parmi les travaux récents, deux des plus connus sont effectués par Knight B. [KNI00] et Tibert G. [TIB02], [TIB03]. Leurs travaux consistent à la mise en œuvre d'antennes-réfecteurs déployables pour des applications spatiales. La Fig.1.17 expose le processus de déploiement d'un modèle physique étudié par Tibert. Cette structure est composée d'un grand nombre d'éléments tendus, à savoir les filets de câbles et les ressorts à tension constante, et de seulement six éléments de compression. La nouveauté principale que présente le concept ci-dessous par rapport aux concepts précédents est la structure d'anneau déployable. Cette structure a été inspiré par les idées nouvelles de l'utilisation de tenségrité pour les antennes spatiales déployables, [KNI00].



*Fig. 1.17 Concept de Tenségrité utilisé pour de Petits Satellites-Réfecteurs:
(a) Structure Complete, (b) Structure d'Anneau de Tenségrité.*

1.6.3. Biologie – Biomécanique

C'est D. Ingber, spécialiste en biologie cellulaire, qui est l'initiateur d'une approche structurelle par les modèles de tenségrité [ING98]. D'après Ingber, le modèle de

tenségrité pourrait fournir des mécanismes complémentaires de base de la locomotion cellulaire ainsi que du couplage des signaux mécaniques et chimique à l'intérieur de la cellule. (Ingbert 1998) a montré que le principe d'auto-équilibre tension/compression (principe de tenségrité) gouverne l'existence de tous les corps vivants et à toute échelle. Dans les Fig.1.18 et Fig.1.19 sont montrées les principales caractéristiques qui peuvent être explicitées par analogie avec le modèle de tenségrité.

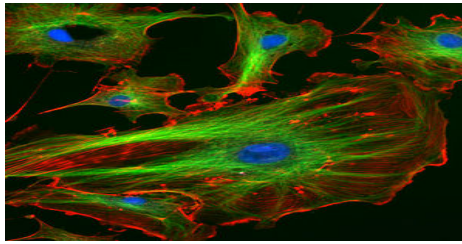


Fig. 1.18 *Éléments du cytosquelette d'une cellule eucaryote. Bleu : noyau. Vert : microtubules. Rouge : microfilaments (actine) [ING98]*

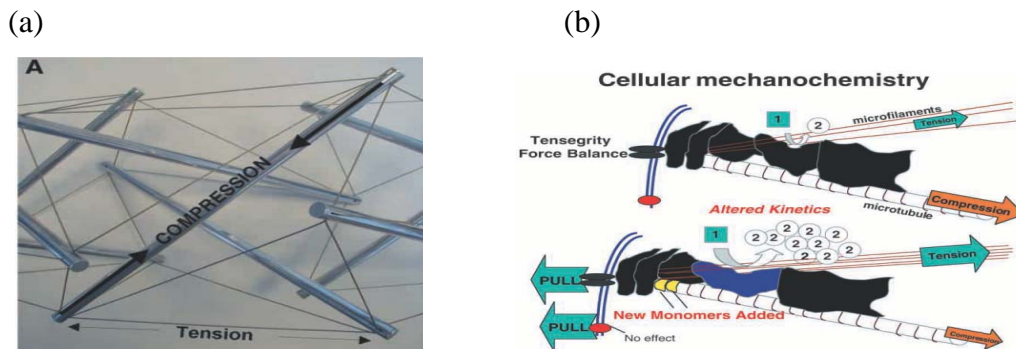


Fig. 1.19 *Cellule modélisée par un système de tenségrité en analogie avec le comportement mécanique d'un module de tenségrité (a) [ING98]*

Le tableau ci-dessous donne les principales caractéristiques mécaniques qui peuvent être explicitées par analogie avec le modèle de tenségrité suite aux nombreuses observations faites par plusieurs auteurs à l'échelle supramoléculaire du cytosquelette [SIM92], [ING98], [WEN97].

Cytosquelette	Structure de Tensegrité
- Microtubules et filaments intermédiaires - Réseaux de filaments d'actines	- Éléments quasi rigides (barres) - Éléments élastiques (câbles)
-Tension engendrée par les filaments d'actine	- Autocontrainte de référence
- Les microtubules associés aux filaments intermédiaires travaillent en compression - Les microfilaments travaillent en traction	- Les barres travaillent en compression - les câbles travaillent en traction
- Connexion avec la matrice extracellulaire aux points focaux d'adhérence membranaire	- nœuds d'extrémités des éléments de la structure
- Équilibre entre les tensions internes engendrées par les microfilaments et les forces résistantes de la matrice extracellulaire	- conditions d'attachement de la structure sur un support rigide

Tableau.1.2. Analogie entre le cytosquelette et le module de tensegrité [WEN97]

1.6.4. Technologie Robotique

Inspirés par les systèmes de tensegrité, C. Paul et al. [PAU05], [PAU06] ont exploré un nouveau model de conception de la locomotion robotique.

Le but de leur travail est d'étudier la possibilité de locomotion de robots à base de tensegrité, et d'évaluer la capacité de tolérance aux pannes de locomotion. Les résultats montrent que les robots de tensegrité peuvent fournir une plate-forme appropriée pour la locomotion, et montrent un degré considérable de tolérance aux pannes. La Fig.1.20 expose le déplacement horizontal simulé d'un module de tensegrité à 3 barres. Ce déplacement est généré par des modifications successives de longueur des câbles.

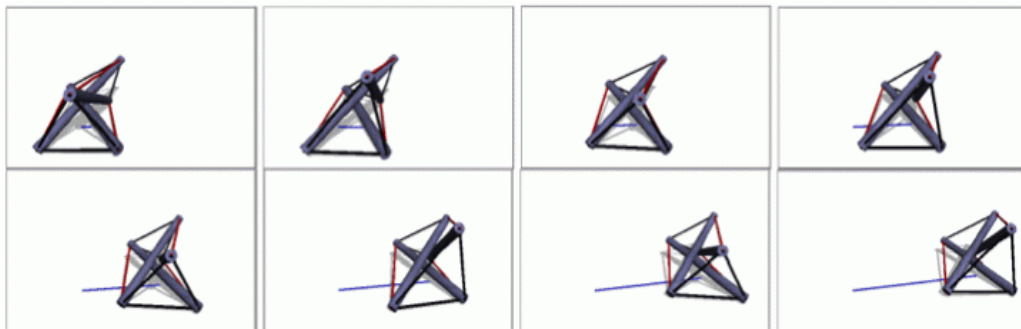


Fig.1.20. Mouvement horizontal d'un module simplex[PAU05]

Pour conclure, le concept de tenségrité, que l'on peut considérer très en vogue aujourd'hui, attire des chercheurs de tous domaines de compétence. A toute échelle micro ou macroscopique, c'est l'auto-équilibre de la tension continue avec la compression discontinue qui est fondamentale. Cela signifie que notre recherche, qui se concentre actuellement sur le génie civil, peut, dans l'avenir, être applicable et pertinente pour d'autres domaines.

1.7. Conclusion

Après un bref exposé sur les structures construites sur la base du concept de tenségrité, la majeure partie de ce chapitre a été consacrée à présenter les méthodes de recherche de forme permettant de trouver des géométries autocontraintes et de recenser le nombre d'états d'autocontrainte et de mécanismes qui leur sont attachés.

A partir de ces résultats il est possible, suivant l'ordre des mécanismes, de développer un calcul assurant la stabilité du système. Néanmoins, pour des applications pratiques, il convient de procéder à une qualification plus complète des états d'autocontrainte, c'est à dire une validation vis à vis du comportement unilatéral des câbles en d'autres terme la recherche d'états d'autocontrainte conformes.

À la fin de ce chapitre il s'agira d'un défilement d'une variété d'applications du concept de tenségrité dans divers domaines scientifiques ; du bâtiment, jusqu'à la technologie robotique, passant par la biologie cellulaire et la conquête spatiale afin de montrer combien la mise en application réelle de ce concept aboutit sur des aspects architecturaux fascinants.

Chapitre 2

Anneaux De Tenségrité

2.1. Introduction

2.2. Présentation des Anneaux de Tenségrité

2.3. Construction d'Anneaux de Tenségrité

2.4. Variétés Géométriques

2.4.1 Exemple de Détermination de la Géométrie d'un Anneau

2.5. Conception des Nœuds

2.6. Assemblages linéiques d'anneaux de tenségrité

2.7. État d'Autocontrainte de l'Anneau de Tenségrité

2.8. Conclusion

2.1 Introduction

Si le chapitre précédent a été consacré aux principes de conception de modules de tensegrité classiques (le simplex, le quadruplex, l'octaèdre expansé) et qui ont fait l'objet de plusieurs thèmes de recherche ; le chapitre actuel sera consacré à la dernière génération des systèmes de tensegrité ; je nome les anneaux de tensegrité. On se concentrera sur; leur origine, le processus de reconstitution des différentes configurations adoptées, la conception du dispositif d'assemblage (le nœud), ainsi que quelques exemple de génération linéaires de structures à base d'anneaux à différentes configurations (anneau à base carrée, pentagonale ou hexagonal).

Finalement et comme le comportement des systèmes étudiés dépend de l'état d'autocontrainte qui est introduit lors du montage, l'étude portera, sur les états d'autocontrainte de l'anneau de tensegrité. L'analyse est faite sur la base de la matrice d'équilibre pour trouver des vecteurs d'autocontrainte compatibles avec le comportement unilatéral des câbles et par la suite, les combiner pour définir un état initial optimal dans la structure comme indiqué dans le chapitre.1.

2.2 Présentation des Anneaux de Tensegrité

En cherchant à savoir sur l'origine de ce module de tensegrité (anneau de tensegrité), on est tombé sur une très large bibliothèque de systèmes de tensegrité [PUG76]. Dans son ouvrage, et d'une manière élaborée (Pugh, 1976) a présenté une riche variété de ces structures tout en discutant leurs conceptions, partant des configurations les plus simples aux plus complexes.

La configuration la plus proche de l'origine du concept de l'anneau de tensegrité, paraît être le « diamond pattern » à n couches et m barres. Les câbles dans ces configurations sont arrangés en losanges avec des barres définissant leurs plus longues diagonales. Différentes géométries du « diamond pattern » sont résumées dans le tableau 2.1.



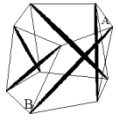

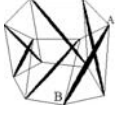
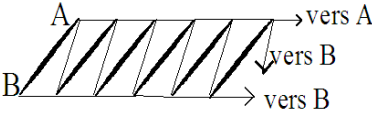

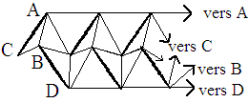

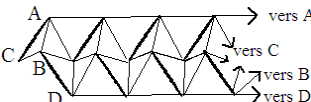
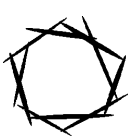
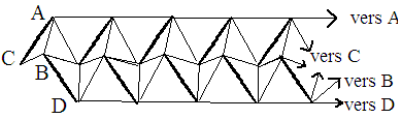
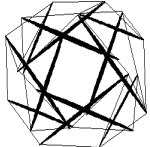
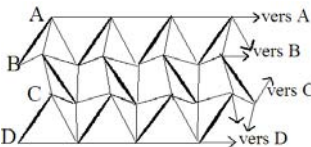
Vue en perspective du modèle		Trois câbles sont déconnectés et le module est déployé	Commentaires
Module (mono couche)			Système à 4 (barres)
			Système à 5 (barres)
			Système à 6 (barres)
Module (bicouche)			Système à 6 barres
			Système à 8 barres
			Systèmes à 10 barres
Module (trois couche)			Système à 12 barres
la structure à trois et quatre couches avec plus de six barres par niveau sont possibles à construire mais elles seraient moins stable et moins rigide			Configurations plus larges

Tableau.2.1. Différentes Géométries du « Diamond Pattern » [PUG76]

Bien que le « Diamond Pattern » présente des configurations très esthétiques et transparentes, l'absence de contact entre les barres engendre une souplesse importante due à la présence de nombreux mécanismes infinitésimaux. Pour remédier

à cela, le rapprochement des 2 nœuds opposés (Fig 2.1) rend plus compacte la structure et superpose certains câbles (diminution du nombre de câbles). Ainsi, le modèle devient plus petit mais plus rigide.

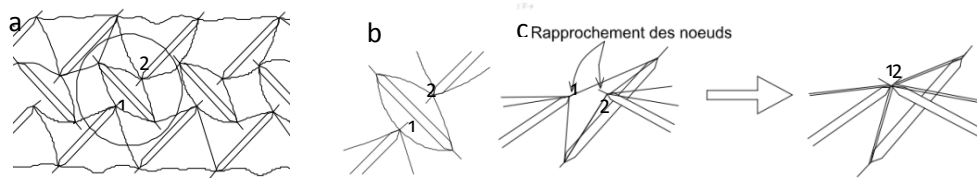


Fig 2.1 a: losange de câbles encerclé, b: zoom sur le losange échantillon, c: nœud vu en perspective avant et après rapprochement des barres [PUG76]

Ce rapprochement crée au sein des systèmes un ou plusieurs circuits fermés de barres. Cela justifie l'appellation proposée par l'auteur (Pugh, 1976) : « Circuit Pattern» (Maquettes à Circuits de barres). Il devrait être signalé que ces nouvelles configurations ne sont pas de réelles structures de tensegrité puisque le concept de discontinuité des barres a été enfreint. Cependant, on peut considérer les circuits de barres qui s'entrecroisent sans se toucher, comme unités comprimées à la place des barres individuelles. Lorsque les extrémités des barres du système à trois couches avec 12 barres (Tableau.2.1) sont connectées, quatre triangles de barres sont formés et le Cuboctaèdre de la Fig. 2.2 en découle.

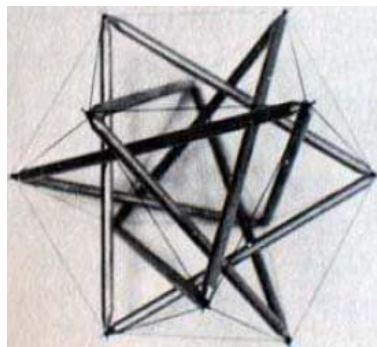


Fig.2.2. Cuboctaèdre à 4 circuits triangulaires de barres[PUG76]

Sur le même principe et utilisant plusieurs autre « Diamond pattern » (Tableau 2.1), des figures similaires au Cuboctaèdre peuvent être produites (Fig. 2.3). Il s'agit de systèmes structuraux dont les circuits de barres sont répartis sur un prisme droit. Le premier est composé d'un seul circuit de 15 barres tandis que le deuxième comprend 5 circuits de 4 barres (5 carrés).

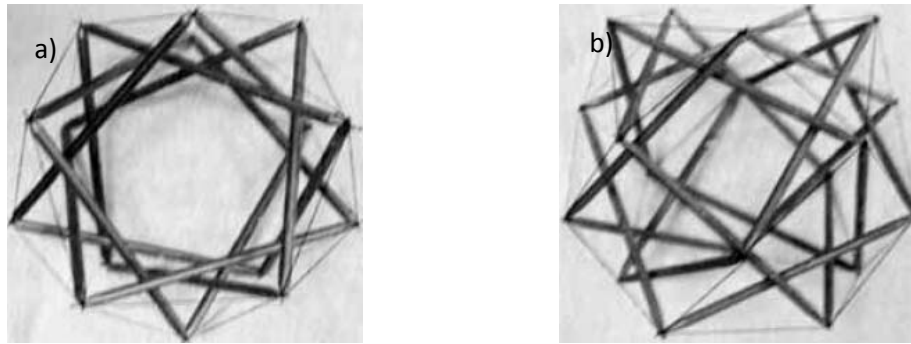


Fig.2.3. Modèles à circuits de barres, a: un circuit de 15 barres, b: 5 circuits de 4 barres[PUG76]

2.3. Construction d'Anneaux de Tensegrité

La description des étapes de conception des différentes configurations d'anneaux de tensegrité (Fig.2.4) sera présentée avec détails dans ce qui suit.

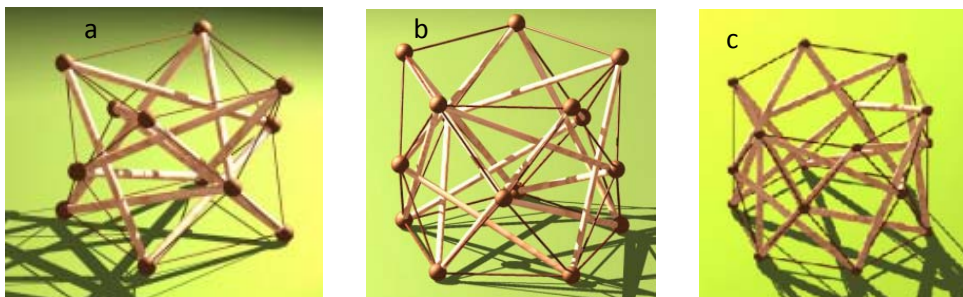


Fig.2.4 a: Anneau à base Carrée, b: Anneau à base Pentagonale, c: Anneau à base hexagonale

La géométrie de base des anneaux de tensegrité est celle d'un prisme droit dont le polygone générateur est soit carrée, pentagonal ou hexagonal (Tableau.2.2). Sur chaque facette du prisme, une barre appelée barre latérale est mise en place selon la diagonale du rectangle (Tableau.2.2). Les nœuds intermédiaires se trouvent sur le plan horizontal qui passe à mi-hauteur du prisme. Ils sont positionnés selon la règle suivante : sur la section droite à mi-hauteur du prisme, depuis un sommet du polygone, on trace une droite perpendiculaire au côté opposé. Le nœud intermédiaire est porté par cette droite et en dehors du prisme (Tableau.2.2).

Type	Barres latérales sur les facettes	Circuits fermés de barres	Constitution d'une facette	Tous les éléments câbles et barres
Anneau à base carrée				
Anneau à base pentagonale				
Anneau à base hexagonale				
Câbles de base câbles coplanaires câbles non-coplanaires				

Tableau.2.2. Géométrie de différents anneaux de tensegrité

A partir du nouveau nœud intermédiaire défini on ajoute un couple de barres nommées barres intermédiaires dont l'une est reliée à un point de la nappe supérieure et l'autre à un point de la nappe inférieure comme le montre les Figures données dans le Tableau 2.2. Les autres couples de barres sont mis en place successivement selon le même principe. Enfin des câbles sont positionnés sur les deux polygones de base du prisme (câbles de nappes) et à chaque nœud intermédiaire 4 câbles (câbles intermédiaires) sont liés aux nœuds des nappes. Dans Le Tableau.2.2 on indique les éléments constructifs d'une facette de chaque configuration d'anneau. On distingue 2 groupes de câbles intermédiaires: les câbles coplanaires (en violet) qui sont coplanaires avec une barre transversale et ceux qui ne le sont pas câbles non-coplanaires (en bleu ciel). Cette nomenclature est indispensable pour l'analyse du comportement mécanique de ces systèmes car au cours du chargement, l'évolution de l'effort dans ces deux éléments s'avère différente. Une particularité de l'anneau à bases pentagonale réside dans le fait qu'il est possible de parcourir le circuit de barres en partant d'un nœud quelconque, en passant successivement sur chacune des barres

une seule fois, et de revenir au point de départ. Donc l'anneau pentagonal est constitué par un seul circuit de 15 barres, celui à base hexagonale compte 2 circuit de 9 barres chacun, alors que l'anneau à base carrée présente 4 circuit de 3 barres par circuit. Ces structure innovantes sont dotées d'un espace intérieur libre (Fig. 2.5) d'où le nom d'anneau de tensegrité [MOT09] que nous utiliserons dans la suite du document.

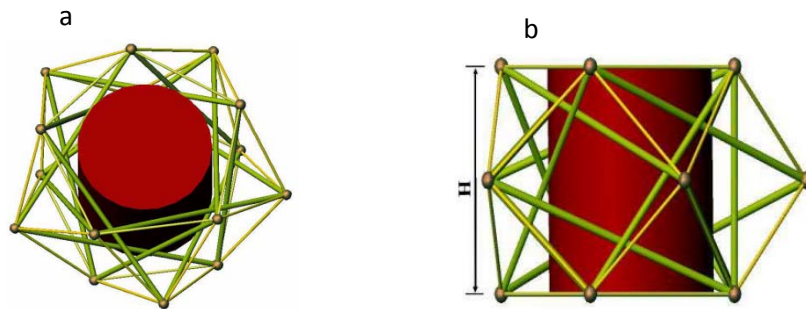


Fig. 2.5 Espace Interne libéré par un Anneau à base Pentagonale,
a: vue en perspective, b: vue de coté[MOT09]

Théoriquement, cette conception peut se généraliser à partir d'une base prismatique pour un anneau de tensegrité à n côtés, où $n > 3$ est le nombre de côtés du prisme de base. Néanmoins, dans la pratique, le principe n'est valable et pertinent que dans certaines limites. En effet, à partir de $n = 7$, la densité des éléments est considérable et donc la structure devient moins intéressante sur un plan esthétique et économique. Pour $n = 4, 5$ ou 6 , le nombre des éléments s'avère raisonnable.

2.4 Variétés Géométriques

Les paramètres gouvernant la géométrie d'un anneau sont le rayon R_1 du cercle circonscrit aux bases du prisme, la hauteur H (Fig 2.5.b) et le rayon R_2 du cercle circonscrit au polygone intermédiaire (Fig. 2.6). Les deux paramètres dépendants à optimiser peuvent être les rayons de l'espace interne r et externe maximal (R_1 ou R_2).

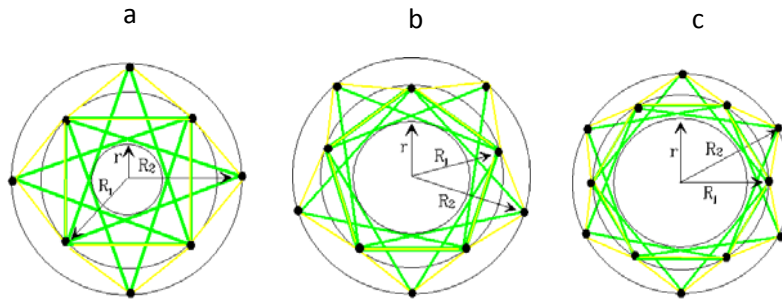


Fig.2.6 *Vue de dessous des trois modèles d'Anneaux avec $R_1 \neq R_2$, a: Anneau à base Carrée, b: Anneau à base Pentagonale, c: Anneau à base Hexagonale*

Certes, avec ces trois paramètres, il est possible de générer un nombre infini de modèles mais étant donné que les structures du génie civil sont souvent bâties sur des éléments réguliers, nous ne considérerons que les cas les plus avantageux. Nous nous imposerons donc une homogénéité géométrique des éléments pour simplifier la reconstitution d'un module. Tout en gardant une unicité de longueur de barres, les modules de la Fig.2.7 pour les quels $R_1 = R_2 = R$ et présentant un optimum en matière de l'utilisation possible de l'espace intérieur de l'anneau (r_{\max}) nous semblent les plus efficaces.

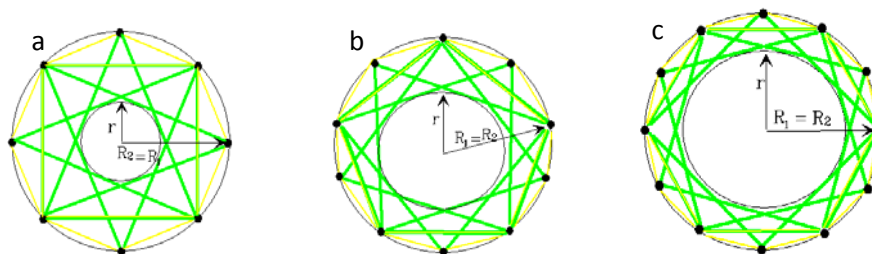


Fig. 2.7 *Configurations optimum d'Anneau ($R_1 = R_2$) a: Anneau à base Carrée, b: Anneau à base Pentagonale, c: Anneau à base Hexagonale*

2.4.1 Exemple de Détermination de la Géométrie d'un Anneau

On présentera dans ce qui suit la méthode utiliser pour déterminer les proportions existants entre les différents paramètres caractérisant un anneau (la hauteur du module, sont rayon, les longueurs de ces barres et ses câbles). Pour l'anneau de tensegrité à base hexagonale. Concernant les anneaux à base carrée et pentagonale le calcul de ces proportions et présenté dans l'annexe B.

Soit R_1 le rayon du cercle inscrit dans l'hexagone de nappe et R_2 celui de l'hexagone intermédiaire à mi-hauteur. Vue la symétrie circulaire du module, nous n'étudions qu'un côté sur 6 (Fig.2.8).

Nœuds	X	Y	Z
1	0	R_1	0
2	$R_1 \cos(\pi/6)$	$R_1 \sin(\pi/6)$	0
3	0	R_1	H
4	$R_1 \cos(\pi/6)$	$R_1 \sin(\pi/6)$	H
5	$R_2 \cos(2\pi/6)$	$R_2 \sin(2\pi/6)$	$H/2$
6	$-R_2$	0	$H/2$

Tableau.2.3 Coordonnées des points considérés sur le module:

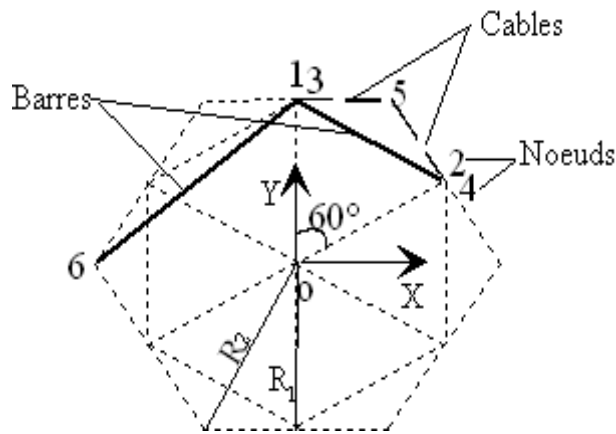


Fig.2.8 Extrait d'un côté de l'anneau de tensegrité à base hexagonale. Vue de dessus

La longueur B_1 de la barre latérale 1-4 est:

$$B_1^2 = (X_1 - X_4)^2 + (Y_1 - Y_4)^2 + (Z_1 - Z_4)^2 \quad (2.1)$$

$$B_1^2 = 2R_1^2 \left(1 - \sin(\pi/6)\right) + H^2 \quad (2.2)$$

De la même façon, la longueur de la barre intermédiaire 1 - 6 qui est de valeur B_2 , est décrite par la relation :

$$B_2^2 = (X_1 - X_6)^2 + (Y_1 - Y_6)^2 + (Z_1 - Z_6)^2 \quad (2.3)$$

$$B_2^2 = R_1^2 + R_2^2 + \frac{H^2}{4} \quad (2.4)$$

La longueur C_1 du câble de nappe 1 – 2 est définie par :

$$C_1^2 = 2R_1^2 \left(1 - \sin(\pi/6)\right) \quad (2.5)$$

Et la longueur C_2 du câble coplanaire 1 – 5 est :

$$C_2^2 = (X_1 - X_5)^2 + (Y_1 - Y_5)^2 + (Z_1 - Z_5)^2 \quad (2.6)$$

$$C_2^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\sin(2\pi/6) + \frac{H^2}{4} \quad (2.7)$$

L'unicité de la longueur des barres impose que $B_1 = B_2 = B$ ce qui donne :

$$R_1^2 \left(1 - 2\sin(\pi/6)\right) - R_2^2 + \frac{3}{4}H^2 = 0 \quad (2.8)$$

Si les polygones (hexagone) de base et à mi-hauteur sont égaux ceci revient à écrire

$$R_1 = R_2 = R$$

On a :

$$2R^2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}H^2 \quad (2.9)$$

d'où
$$H = 2R \sqrt{\frac{2\sin(\pi/6)}{3}} \quad (2.10)$$

$$H = 1,154R; C_1 = R; C_2 = 0,77R; B = 1,52R. \text{ HEXAGONE}$$

Dans le tableau 2.4 sont donnés les rapports de dimensions des éléments constitutifs pour les trois configurations d'anneaux étudiés dans ce travail en fonction de leurs rayons. Rappelons que les configurations retenues présentent une unicité des longueurs de barres; et donc $R_1=R_2$ (Fig 2.7).

Anneau	H	C ₁	C ₂	B
A base Hexagonale	1,154R	R	0,77R	1,52R
A base pentagonale	1,284R	1,176R	0,891R	1,741R
A base carrée	1,37R	1,41R	1,027R	1,96R

R: rayon du cercle circonscrit par le polygone; H: hauteur de l'anneau, C₁: longueurs des câbles de nappe; C₂: longueurs des câbles de facette; B: longueur des barres

Tableau 2.4 rapports dimensionnels sur les trois modèles d'anneaux proposés

2.5 Conception des Nœuds

En tenant compte du comportement mécanique souhaité du système, les nœuds sont esquissés selon le modèle suivant Fig. 2.9:

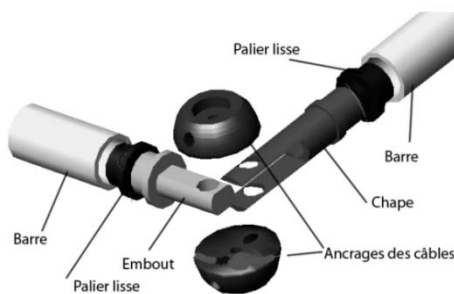


Fig. 2.9 Nœud Esquissé[NGU09]

Les pièces utilisées sont décrites dans le catalogue de la société allemande CarlStahl et IGUS. La description détaillée du nœud [NGU09] est donnée ci-dessous en s'inspirant de la Fig. 2.10:

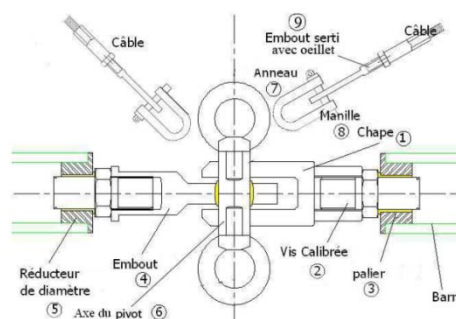
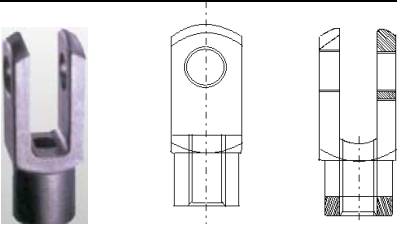
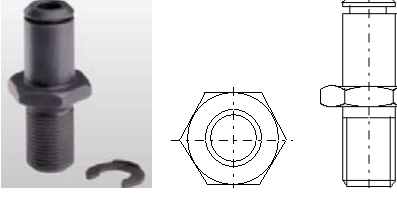
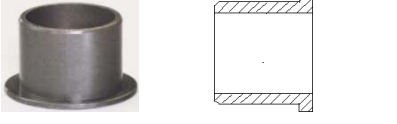
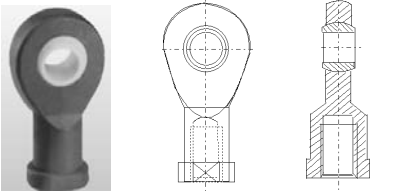
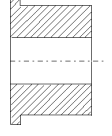
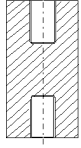


Fig. 2.10 Nœud modélisé en détail[NGU09]

Les extrémités d'une barre sont composées d'une chape ① pour un côté et d'un embout à rotule ④ pour l'autre, elles sont également dotées de réducteurs de diamètres ⑤. Un dispositif de forme cylindrique ③ constitue l'axe de rotation des barres entre elles. Les vis calibrées ② et les paliers lisses ③ permettent aux barres de pivoter selon leur axe. Les câbles sont dotés de deux œillets sur filetages intérieurs sertis aux deux extrémités ⑥. Les filetages servent à régler la longueur des câbles avec une capacité de réglage: +24/-34 mm. Ils permettent éventuellement la mise en tension du système. Les dispositifs d'accrochage des câbles sont des manilles ⑦ liées aux anneaux ⑧. Ces anneaux sont vissés, quant à eux, sur l'axe du pivot. Sur le tableau 2.5 sont présentés les détails des pièces utilisées pour la composition du nœud.

Pièces utilisées dans le nœud	Désignation
	1) Chape
	2) Vis calibrée
	3) Palier lisse
	4) Embout à rotule
	5) Réducteur de diamètre
	6) Axe du pivot

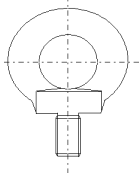
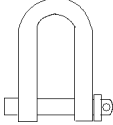
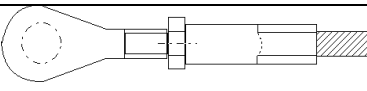
	7) Anneau mâle
	8) Manille droite
	9) Œillet sur filetages intérieurs sertis aux deux extrémités

Tableau.2.5. Détails des Pièces utilisées pour la Composition d'un Nœud. [NGU09]

Les différents dispositifs utilisés nous amènent à recalculer la longueur des éléments. Les schémas qui suivent nous détaillent ces longueurs. La longueur des barres (Fig. 2.11) est l'addition de celle de la barre proprement dite et celle des dispositifs de connexion (Fig 2.12). Il est possible de l'augmenter grâce aux vis calibrées.

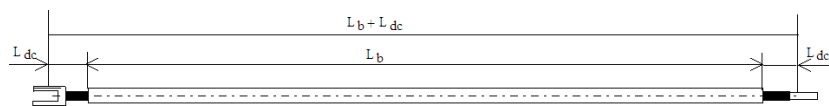


Fig. 2.11 Longueur de la Barre avec Dispositif de Connexion[NGU09]

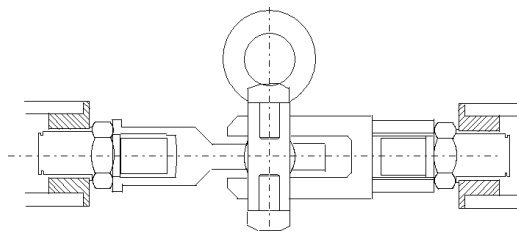


Fig. 2.12 Dispositif de Connexion des Barres[NGU09]

Vu la taille des liaisons, les extrémités des câbles sont décentrées du centre théorique du nœud. Suivant la position de la manille, la longueur des câbles peut varier. La longueur des câbles (Fig. 2.15) est déterminée en prenant en compte les différentes positions possibles des manilles sur les anneaux. Cela nous amène à retrancher entre d_1 et d_2 pour chaque extrémité des câbles par rapport à la longueur recalculée entre centres d'anneaux. La valeur maximale correspond au cas où le plan de l'anneau est

perpendiculaire au câble et la valeur minimale correspond au cas où le plan de l'anneau comprend le câble. Ce phénomène est expliqué par les Fig. 2.14 et Fig. 2.15.

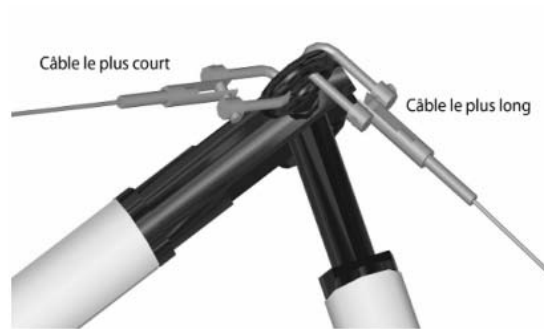


Fig. 2.13. Dispositif de Connexion des Câbles (vue perspective) [NGU09]

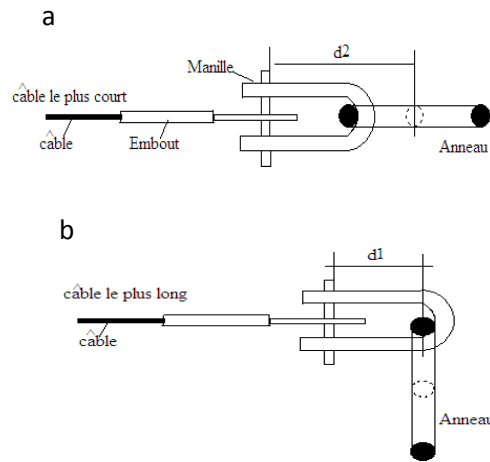


Fig. 2.14 Positions minimisant (a) et maximisant (b) la Longueur des Câbles

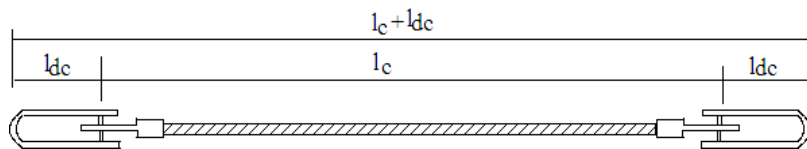
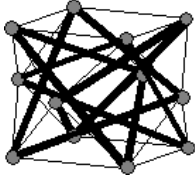
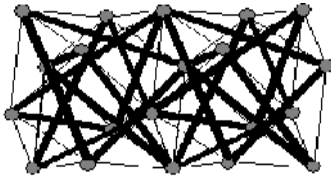

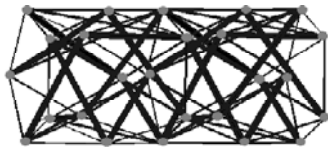


Fig. 2.15 Longueur des Câbles avec Dispositif de Connexion [NGU09]

2.6 Assemblages linéiques d'anneaux de tensegrité

Nous avons réalisé des simulations pour des assemblages d'anneau qui sont identiques aux anneaux précédemment exposés (Fig.2.4). L'assemblage se fait par simple juxtaposition de nœuds (tableau 2.6). Certains câbles se superposent alors, ce que nous prenons en compte en les remplaçant par un seul élément d'aire de section droite double. L'état d'autocontrainte choisi pour les simulations est un état d'autocontrainte qui sollicite à un même niveau tous les modules appelé état d'autocontrainte uniforme [QUI00], puisque chaque module a un état d'autocontrainte propre. Si chacun des modules est autocontraint à un même niveau, il ne peut y avoir un même niveau de tension dans les câbles: ceux qui sont communs à deux modules subissent l'influence de deux états d'autocontrainte et leur tension est doublée. Par contre, compte tenu du doublement des aires des sections droites, les contraintes, elles, sont identiques à celles des autres éléments.

Type de structure	Mono Module	Assemblage de deux anneaux
Anneau de tensegrité A base carrée		
Anneau de tensegrité A base pentagonale		

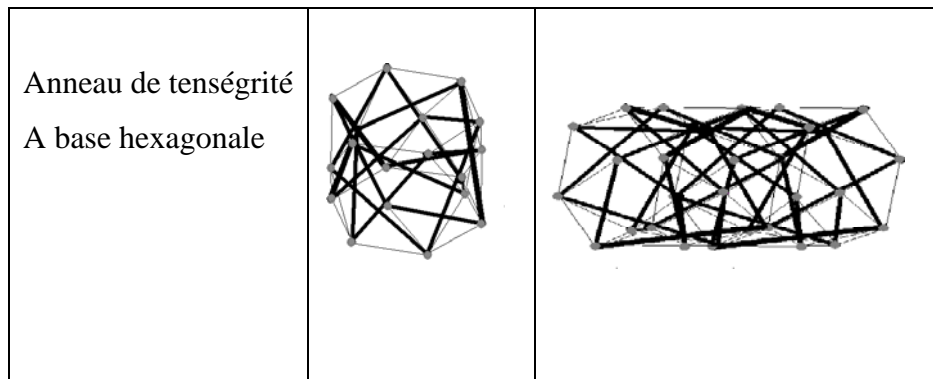


Tableau.2.6.assemblage linéique par juxtaposition des facettes d'anneaux de tensegrité

2.7. États d'Autocontrainte De l'Anneau de Tensegrité

Pour pouvoir déterminer le nombre de mécanismes et d'états d'autocontrainte dans les différentes configurations d'anneaux de tensegrité étudiés ; on procède selon la méthode des densités de forces exposée dans le Chap.1. Pour cela, on définit sa géométrie et la structure relationnelle entre les différents éléments constitutifs (câbles et barres) de chaque système étudié (anneau à base carrée, pentagonale et hexagonale).

Dans ce qui suit, on présentera l'exemple de détermination de l'état d'autocontrainte pour l'anneau de tensegrité à base hexagonale. Les bases d'état d'autocontraintes retenues pour l'Anneau à Base pentagonale et carrée sont exposées en annexe C.2 et C.3 respectivement.

2.7.1 Coordonnées des nœuds de l'anneau à base hexagonale

L'anneau à base hexagonale est composé 18 nœuds et 54 éléments (18 barres et 36 câbles). Les 18 nœuds sont répartis sur 3 couches dont la hauteur est définie suivant l'axe OZ. Les coordonnées complètes (X, Y et Z dans un système orthonormé) de ces 18 nœuds sont détaillées dans le Tableau 2.1.

Nœuds	X	Y	Z	Nœuds	X	Y	Z
1	-50,00	0,00	0,00	10	43,30	-25,00	40,00
2	-25,00	43,30	0,00	11	0,00	-50,00	40,00
3	25,00	43,30	0,00	12	-43,30	-25,00	40,00
4	50,00	0,00	0,00	13	-50,00	0,00	80,00

5	25,00	-43,30	0,00	14	-25,00	43,30	80,00
6	-25,00	-43,30	0,00	15	25,00	43,30	80,00
7	-43,30	25,00	40,00	16	50,00	0,00	80,00
8	0,00	50,00	40,00	17	25,00	-43,30	80,00
9	43,30	25,00	40,00	18	-25,00	-43,30	80,00

Tableau. 2.7. Coordonnées des nœuds (cm) Anneau à base hexagonale

2.7.2 Structure relationnelle

Sur le tableau.2.2, est présentée, la connectivité des éléments d'un module à base hexagonale.

Barres			Câbles					
N°	Nœuds1	Nœuds2	N°	Nœuds1	Nœuds2	N°	Nœuds1	Nœuds2
1	1	8	1	1	2	19	14	8
2	16	8	2	2	3	20	15	8
3	2	9	3	3	4	21	3	9
4	17	9	4	4	5	22	4	9
5	3	10	5	5	6	23	15	9
6	18	10	6	1	6	24	16	9
7	4	11	7	13	14	25	4	10
8	13	11	8	14	15	26	5	10
9	5	12	9	15	16	27	16	10
10	14	12	10	16	17	28	17	10
11	6	7	11	17	18	29	5	11
12	15	7	12	18	13	30	6	11
13	1	18	13	1	7	31	17	11

14	2	13	14	2	7	32	18	11
15	3	14	15	13	7	33	6	12
16	4	15	16	14	7	34	1	12
17	5	16	17	2	8	35	18	12
18	6	17	18	3	8	36	13	12

Tableau 2.8. Structure Relationnelle de l'Anneau à Base Hexagonale

2.7.3 Résultats

La matrice d'équilibre $[A]$ dans l'équation $[A]\{q\} = \{0\}$ permet de calculer le nombre de mécanismes et d'états d'autocontrainte. Le calcul effectué sans aucun blocage du module donne 6 états d'autocontrainte et 1 mécanisme. Ce mécanismes étant liés à l'absence de conditions aux limites (déplacement de corps rigide), nous en déduisons qu'il n'y a pas de mécanismes finis ou infinitésimaux dans le système une fois que seront bloqués 6 nœuds de la base suivant Z.

Nous pouvons vérifier la validité de la formule proposée par Calladine [CAL78] :

$$s - m = b - 3n + k \quad (2.48)$$

avec le nombre d'états d'autocontrainte $s = 6$, le nombre d'éléments $b = 54$ (18barres + 36câbles), le nombre de nœuds $n = 18$. Nous trouvons 6 mécanismes quand la structure est privée des conditions aux limites c'est-à-dire $k = 0$ et 0 mécanisme quand $k = 6$. La détermination numérique du noyau de la matrice $[A]$ nous donne 6 états d'autocontrainte c'est-à-dire 6 vecteurs colonne linéairement indépendants formant la matrice $[S]$ (les b lignes correspondant aux éléments et les s colonnes correspondant aux états d'autocontrainte). Ce résultat est purement mathématique et pas toujours exploitable du point de vue mécanique. En effet, il existe des états d'autocontrainte qui mettent en compression les câbles et ne peuvent être utilisés pour la mise en tension du système. Dans le sous-espace vectoriel défini par la

matrice $[S]$, il faut chercher les états compatibles avec le comportement unilatéral des câbles. Le seul état d'autocontrainte compatible obtenu est une combinaison linéaire des 6 états calculés. Pour trouver cette combinaison linéaire, une méthode peut consister à fixer 6 conditions linéairement indépendantes qui vont imposer une seule solution. C'est ce qui est appelée méthode conditionnelle [QUI00]. Dans notre cas, comme il y a 12 barres intermédiaires, il est possible de fixer ces 6 conditions sur 6 d'entre elles. Cela permet de déterminer la combinaison donnant le vecteur d'autocontrainte complet. On constate que ce vecteur est bien compatible. Il est présenté dans le tableau suivant.

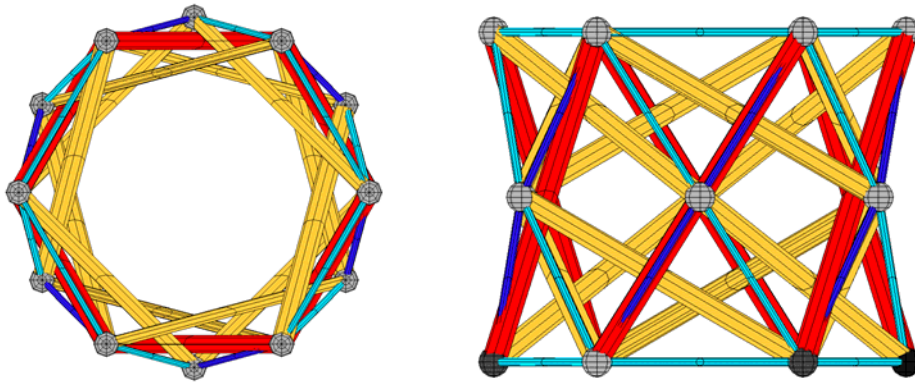


Fig.2.16. État d'Autocontrainte Conforme de l'anneau à base hexagonale

Câbles						Barres											
N°	q _i	N°	q _i	N°	q _i	N°	q _i	N°	q _i	N°	q _i	N°	q _i	N°	q _i	N°	q _i
1	1,00	7	1,00	13	3,23	1	-1,62	7	-1,62	13	-1,93	19	-5,53	25	-1,93	31	-5,53
2	1,00	8	1,00	14	3,23	2	-1,62	8	-1,62	14	-5,53	20	-1,93	26	-5,53	32	-1,93
3	1,00	9	1,00	15	3,23	3	-1,62	9	-1,62	15	-5,53	21	-1,93	27	-5,53	33	-1,93
4	1,00	10	1,00	16	3,23	4	-1,62	10	-1,62	16	-1,93	22	-5,53	28	-1,93	34	-5,53
5	1,00	11	1,00	17	3,23	5	-1,62	11	-1,62	17	-1,93	23	-5,53	29	-1,93	35	-5,53
6	1,00	12	1,00	18	3,23	6	-1,62	12	-1,62	18	-5,53	24	-1,93	30	-5,53	36	-1,93

Tableau2.9. État d'Autocontrainte Conforme de l'Anneau de Tensegrité à Base Hexagonale

Un exemple simple de recensement des vecteurs d'autocontrainte conforme par *la méthode conditionnelle*, reposant sur la définition de conditions affectées à certains des éléments de la structure est exposé en Annexe C.1. Cet exemple traite un problème à deux états d'autocontrainte et neuf éléments

2.8. Conclusion

On a voulu ce deuxième chapitre comme continuité logique au premier. Donc, On y a essayé de donner un aperçu sur l'origine de la configuration de l'Anneau de tensegrité représentant la dernière génération des systèmes de tensegrité.

Nous avons détaillé les étapes de conception d'un anneau à base carrée, pentagonale et hexagonale qui sont intéressants pour leur grande rigidité [PUG76] (comparés aux cellules de tensegrité sans connections entre les barres), pour leur transparences et leurs simplicité géométrique relative.

En tenant compte du comportement mécanique souhaité du système étudié, les nœuds ont été conçus pour s'approcher d'une rotule parfaite. Il a été précisé que le dispositif de connexion joue rôle important, dans la fixation de la longueur des éléments (barre et câble)

Chapitre 3

Analyse Du Comportement Mécanique

3.1. Introduction

3.2. Bases de la théorie non linéaires

3.2.1. Non linéarité géométrique

3.2.2. Non linéarité matérielle

3.2.3. Non linéarité combinée

3.3. Application de la Formulation Non linéaire aux Structures de Tenségrité

3.3.1. Discrétisation, et Formulation Matricielle

3.3.2. Méthode d'Analyse Non-Linéaire

3.3.3. Les Équations Élément Finis

3.3.3.1. Méthode de Résolution

3.4. Problème Lié au Comportement Unilatéral Des Câbles

3.5. Méthode De Contrôle des Câbles Relâchés

3.6. Conclusion

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons un modèle de calcul visant la caractérisation du comportement mécanique non linéaire géométrique et matériel de la structure à anneaux de tenségrité précédemment décrite (Chap.2). Ce but ne peut être atteint qu'après avoir effectué un certain nombre de développement théorique sur les bases de la théorie non linéaire de la mécanique des solides (non linéarité matérielle, géométrique et combinée).

Ceci fait, on procède à un exposé de la procédure de calcul des anneaux de tenségrité basée sur l'utilisation de la **Formulation Lagrangienne Actualisée (FLA)** en non-linéarités géométriques et matérielles, adoptée. Nous utilisons l'écriture incrémentale de la formulation variationnelle proposée par Bathe [BAT80] pour mettre en place les différents opérateurs nécessaires à la résolution numérique du problème non linéaire associé à cette formulation variationnelle. Il s'agit de l'expression de la matrice de rigidité tangente et du vecteur des efforts internes et, ceci dans le cas d'un élément linéique (barre ou câble).

Le problème de relâchement des câbles qui est un paramètre essentiel de cette étude sera illustré dans la dernière partie de ce chapitre.

3.2. Bases de la Théorie Non Linéaires

Le comportement des structures à pour longtemps été considéré comme linéaire et pour de bonnes raisons ; Les matériaux et les structures sont couramment utilisés dans le domaine linéaire élastique avec petites déformations du moment qu'une légère non-linéarité n'invalide pas un design sur la base d'un comportement linéaire ajouté au faite qu'une analyse non linéaire est plus difficile à comprendre et plus coûteuse.

Mais de nos jours la maîtrise des éléments finis et la disponibilité de puissant outils de calcul ont fait de l'analyse non-linéaire (nécessaire vue les exigences de conception strictes) une possibilité pratique. La plupart des programmes d'analyse permettent à l'utilisateur de choisir parmi différents algorithmes de résolution suivant le type de non-linéarité traité.

Un problème est non linéaire si la matrice de rigidité ou le vecteur chargement dépendent des déplacements. La non linéarité dans les structures peut être classée comme non linéarité matérielle (associée aux changements dans les propriétés du matériau comme dans la plasticité) ou comme géométrique (associée au changement de la configuration, comme est le cas les éléments élancés en compression)

3.2.1 Non Linéarité Géométrique :

Elle considère le calcul dans un état déformé de la matrice de rigidité incrémentale comprenant un terme supplémentaire qui est, la matrice géométrique ; celle-ci provient de la prise en compte dans le tenseur des déformations des termes quadratiques, dus, en particulier aux composantes transversales à l'élément du champ des déplacements ; la réponse non linéaire de la structure est obtenue pas à pas par augmentation progressive de la sollicitation c.-à-d. méthode incrémentale.

L'incréméntation ramène le problème non linéaire à une séquence de problèmes linéaires. Dans la mécanique des milieux continus, et en cas de grands déplacements, on utilise la formulation Lagrangienne pour décrire le mouvement du corps considéré se déplaçant dans l'espace, à partir d'une certaine référence connue.

3.2.1.1. Principe des Déplacements Virtuels et Équilibre du Corps

Le principe des déplacements virtuels est une notion bien connue de la mécanique. Il consiste à exprimer l'égalité entre le travail des forces extérieures et celui des forces intérieures. Il est appliqué de manière incrémentale pour établir l'équilibre entre deux configurations successives. À l'instant 't' le principe des travaux virtuels pour un corps s'écrit [BAT80],[FRE78];

$$\int_{t_v} {}^t \tau_{ij} \delta_t \varepsilon_{ij} d^t V = {}^t (W_{ext}) \quad (3.1)$$

${}^t V$: Volume défini sur Γ à la date 't'

${}^t \tau_{ij}$: Tenseur des contraintes de Cauchy définies sur Γ à la date 't'

$\delta_t \varepsilon_{ij}$: Variation du tenseur de déformation à la date 't'

${}^t(W_{ext})$: Travail total des forces extérieures par rapport à la configuration Γ à la date 't'

Si on note ; tP_i : Forces de pression à la date 't' ; ${}^t f_i$: Forces de masse à la date 't' ;
 ${}^t\rho$: Masse volumique du corps à la date 't' ; tS : Surface latérale du corps à la date 't' , le travail des forces extérieures s'écrira alors :

$${}^t(W_{ext}) = \int_{t_v} {}^t\rho {}^t f_i \delta_t U_i d^tV + \int_{t_S} {}^tP_i \delta_t U_i d^tS \quad (3.2)$$

Dans une analyse linéaire, on considère les déplacements infiniment petits de manière à confondre l'état initial avec celui actuel. Dans le cas de grands déplacements l'utilisation de ce principe n'est plus possible car le volume à la date 't' est inconnu. La solution pour résoudre ce problème non linéaire consiste à exprimer le principe des déplacements virtuels de manière incrémentale par rapport à une configuration connue. Ainsi, on transforme le problème non linéaire en une séquence de problèmes non linéaires.

L'expression incrémentale du principe des déplacements virtuels peut être obtenue par l'une des méthodes suivantes :

- Première méthode : Par soustraction du P.D.V. écrit sur des configurations voisines $\bar{\Gamma}$ et Γ Fig.3.1 le résultat ainsi obtenu est ensuite linéarisé.
- Deuxième méthode : Par différenciation de l'expression du principe des déplacements virtuels à la date $(t + \Delta t)$

Le principe des travaux virtuels est exprimé dans les différentes formulations sous citées.

- La formulation lagrangienne totale (F.L.T): la configuration de référence est celle initiale Γ° non déformée Fig.3.1 ;

- La formulation lagrangienne actualisée (F.L.A): la configuration de référence est dans ce cas la configuration courante Γ déformée Fig.3.1;

- La formulation lagrangienne actualisée approchée (F.L.A.A): elle est proche de la F.L.A et considère comme référence une configuration $\bar{\Gamma}$ très proche de Γ Fig.3.1

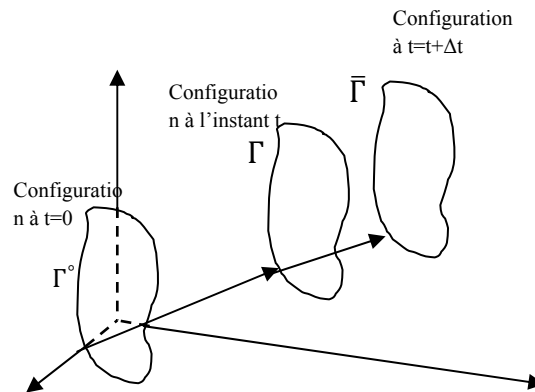


Fig.3.1 description de l'évolution de la configuration à différents moments

Ces trois formulations mènent aux mêmes résultats avec toute fois une préférence vers la deuxième (qui sera employée dans ce travail).

3.2.1.2. Principe des Déplacements Virtuels (F.L.A)

Il est obtenu en soustrayant membre à membre les principes des déplacements virtuels, écrits pour les deux configurations très voisines Γ et $\bar{\Gamma}$ en prenant Γ comme référence.

Nous utiliserons dans ce cas la deuxième méthode qui fournit directement l'expression incrémentale du principe des déplacements virtuels à discrétiser [BAT80].

À l'instant $(t + \Delta t)$, l'expression du P.D.V. écrit par rapport à la configuration de référence Γ est ;

$$\int_{t_V}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta_t^{t+\Delta t} \bar{e}_{ij} d^t V = {}^{t+\Delta t} W_{ext} \quad (3.3)$$

Où \bar{e}_{ij} : accroissement de déformation entre t et $t + \Delta t$, il s'écrit aussi,

$$\bar{e}_{ij} = {}_t \varepsilon_{ij} + {}_t \varepsilon_{ij}^* \quad (3.4)$$

$${}^t \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t U_{i,j} + {}^t U_{j,i}) \text{ est la partie linéaire} \quad (3.5)$$

$${}^t \varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} ({}^t U_{k,i} + {}^t U_{k,j}) \text{ est la partie non linéaire}$$

Si on considère les grandeurs exprimées à la date $t + \Delta t$ comme :

$$\begin{cases} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} = {}^t T_{ij} + {}^t \sigma_{ij} & {}^t \sigma_{ij} = {}^t T_{ij} \\ {}^{t+\Delta t} e_{ij} = {}^t e_{ij} \end{cases} \quad (3.6)$$

Ainsi que la loi de comportement (eq .3.7) et (eq .3.4)

$${}^t T_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.7)$$

L'éq.3.3 devient, en négligeant le produit de deux accroissements afin de linéariser l'expression précédente, on obtient :

$$\int_{tV} ({}^t T_{ij} \delta_t \varepsilon_{ij}^* + C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta_t \varepsilon_{ij}) d^t V = {}^{t+\Delta t} (W_{ext}) - \int_{tV} {}^t T_{ij} \delta_t \varepsilon_{ij} d^t V \quad (3.8)$$

$$\underbrace{\int_{tV} {}^t T_{ij} \delta_t \varepsilon_{ij}^* d^t V}_B + \underbrace{\int_{tV} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \delta_t \varepsilon_{ij} d^t V}_A = {}^{t+\Delta t} (W_{ext}) - \underbrace{\int_{tV} {}^t T_{ij} \delta_t \varepsilon_{ij} d^t V}_D$$

3.2.1.3. Discrétisation par Éléments Finis du Principe Incrémental des Déplacements Virtuels

Pour définir les différents termes représentant la rigidité de la structure, toutes les expressions incrémentales de l'équilibre seront écrites sous une forme discrète.

- Matrice de rigidité tangente en F.L.A

La forme incrémentale de l'équilibre [BAT80], [FRE78] est donnée par Eq.3.8, cette expression sera décomposée en plusieurs parties (A, B, C, D) qui seront écrite sous formes discrétisées. Pour cela nous devons tout d'abord exprimer l'accroissement du tenseur de déformation en fonction de valeurs nodales du champ de déplacement est tel que :

$$\delta_t \varepsilon_{ij} = {}^t B_{ij\alpha} \delta_t d_\alpha \quad (3.9)$$

- Matrice de rigidité des petits déplacements

$$A = \int_{tV} {}^t C_{ijkl} \delta_t \varepsilon_{kl} \delta_t \varepsilon_{ij} d^tV$$

$$A = \int_{tV} {}^t C_{ijkl} {}^t B_{kl\alpha} {}^t B_{ij\beta} {}^t d_\alpha \delta_t d_\beta d^tV \quad (3.10)$$

$$A = {}^t K_{\alpha\beta} {}^t d_\alpha \delta_t d_\beta$$

Avec
$${}^t K_{\alpha\beta} = \int_{tV} {}^t C_{ijkl} {}^t B_{kl\alpha} {}^t B_{ij\beta} d^tV \quad (3.11)$$

${}^t K_{\alpha\beta}$: représente la matrice de rigidité des petits déplacements définie à la date 't' par rapport à la configuration actuelle.

- Matrice de rigidité des contraintes initiales

$$B = \int_{tV} {}^t T_{ij} \delta_t \varepsilon_{ij}^* d^tV$$

$$B = {}^t K_{\alpha\beta}^\sigma {}^t d_\alpha \delta_t d_\beta \quad (3.12)$$

Avec
$${}^t K_{\alpha\beta}^\sigma = \int_{tV} {}^t T_{ij} ({}^t B_{ij\alpha}^* {}^t B_{ij\beta}^*) d^tV$$

${}^t K_{\alpha\beta}^\sigma$: représente la matrice des contraintes initiales définies à la date 't' par rapport à la configuration actuelle.

- Actions extérieures, On écrit :

$$C = {}^\tau P_\beta \delta_t d_\beta \quad (3.13)$$

${}^\tau P_\beta$: représente les sollicitations extérieures indépendantes des déplacements.

- Actions internes

$$D = \int_{tV} {}^\tau T_{ij} \delta_t \varepsilon_{ij} d^tV \quad (3.14)$$

Finalement l'expression de l'équilibre s'écrit ;

$${}^t K_{\alpha\beta}^T {}^t d_\beta = {}^\tau P_\alpha - {}^t F_\alpha \quad (3.15)$$

Où
$${}^t K_{\alpha\beta}^T = {}^t K_{\alpha\beta} + {}^t K_{\alpha\beta}^\sigma$$

${}^tK_{\alpha\beta}^T$: est la matrice de rigidité tangente définie à la date 't' par rapport à la configuration actuelle à la date 't'.

- Forces résiduelles de déséquilibre en F.L.A

L'expression des forces résiduelles s'exprime sur la configuration actuelle telle que :

$${}^tR_{\beta} = {}^tP_{\beta} - \int_{tV} {}^tT_{ij} {}^tB_{ij\beta} d^tV \quad (3.16)$$

Avec :

$${}^tQ_{\beta} = \int_{tV} {}^tT_{ij} {}^tB_{ij\beta} d^tV \quad (3.17)$$

${}^tQ_{\beta}$:sont les forces internes définies à la date 't' par rapport à la configuration actuelle.

3.2.2. Non Linéarité Matérielle (Plasticité)

Les algorithmes de résolution se rapprochent beaucoup entre la non-linéarité géométrique et matérielle, sauf que pour cette dernière ; le problème de simulation essentiel est que les équations d'équilibre doivent être écrites utilisant les propriétés du matériau (les déformations) qui ne sont pas connues à l'avance.

Dans le présent travail on considère que le matériau est initialement isotrope, que le temps n'intervient pas, donc il n'y a pas d'effet de fluage, on néglige en outre les effets thermiques (comportement isotherme), les effets dynamiques comme on n'envisage pas les grandes déformations (comportement hypoélastique).

Plusieurs techniques sont proposées pour résoudre les problèmes élasto-plastiques, entre autres la méthode du module tangent qui est en fait la méthode incrémentale avec matrice tangente. La théorie incrémentale de la plasticité (flow, incremental theory) considère que les accroissements des déformations plastiques dépendent des déformations plastiques antérieures et sont proportionnels au déviateur des contraintes. Cette théorie, permet d'envisager aussi bien le matériau écrouissable, que le cas limite du matériau non écrouissable (élastique-parfaitement plastique), ainsi

que l'effet BAUSCHINGER. Les déformations plastiques sont mémorisées par intégration des déformations selon l'histoire de la mise en charge.

3.2.2.1. Hypothèse de la Théorie Incrémentale de Plasticité :

- les déformations sont décomposées additivement en une partie élastique et l'autre plastique [BAT96], [COO89] , la partie élastique est liée aux contraintes par la loi de Hooke (Eq.3.16)

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad \text{Avec} \quad d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^e \quad (3.18)$$

- Existence d'une zone où un accroissement des contraintes de plasticité $d\sigma_{ij}$ ne produit qu'un accroissement élastique des déformations $d\varepsilon_{ij}^e$ ($d\varepsilon_{ij}^p = 0$). La frontière de cette zone est la surface de plasticité, ou d'écoulement initial (initial yield surface). Elle est représentée par l'Eq.3.17

$$F_o(\sigma_{ij}) = 0 \quad (3.19)$$

Lorsque l'écrouissage se produit, cette surface change à fur et à mesure que les déformations plastiques progressent. Ces surfaces de plasticité successives définissent la fonction de charge (loading function) qui dépend de l'état de contrainte atteint, de l'histoire des déformations plastiques et de l'écrouissage. Donc F existe et est telle que si:

$F < 0$: état élastique ; ($d\sigma_{ij}$ provoque uniquement des déformations élastiques $d\varepsilon_{ij}^e$)

$F = 0$: état plastique; ($d\sigma_{ij}$ peut provoquer des déformations plastiques $d\varepsilon_{ij}^p$)

$F > 0$: état inadmissible (sans significations).

La valeur spéciale $F = 0$ constitue la condition de plasticité à partir de laquelle et pour un accroissement de sollicitation ; trois cas sont définis eu regard à dF (variation de la fonction de charge) ;

- $dF < 0 \Rightarrow F + dF < 0$ l'état atteint est élastique cas sont $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ on est en présence d'un état de déchargement (unloading)
- $dF = 0$ mais $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ ce processus est appelé chargement neutre
- $dF = 0$, $d\varepsilon_{ij}^p \neq 0$ ce processus qui fait passer d'un état plastique à un autre s'appelle chargement (loading).

3.2.2.2. Critère de Plasticité :

On appelle critère de plasticité (yield criterion) une loi qui définit explicitement la forme de la surface de plasticité. Le critère qui représente le mieux le comportement réel des métaux est le critère de Von Mises [BAT96], [FRE79], [COO89] dont la condition d'écoulement initiale prend la forme :

$$F_0 = \sqrt{3\sigma_{ij} \frac{\sigma_{ij}}{2}} - \bar{\sigma}_y = \sigma_c - \bar{\sigma}_y = 0 \tag{3.20}$$

$\bar{\sigma}_y$ est la limite élastique initiale en traction pure ; σ_{ij} est le déviateur des contraintes et σ_c représente la contrainte de comparaison (equivalent or effective stress)

3.2.2.3. Loi d'Écrouissage :

L'écrouissage (hardening rule) est une loi qui décrit explicitement la forme de la fonction de charge et définit l'évolution des surfaces de plasticité successives. La détermination expérimentale de la fonction de charge est indépendante de la sollicitation. La fonction de charge prend la forme suivante :

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = \sigma_c(\sigma_{ij}) - \bar{\sigma}(\varepsilon_{ij}^p) = 0 \tag{3.21}$$

$\bar{\sigma}$ est la limite élastique courante en traction ; σ_c est la contrainte de comparaison.

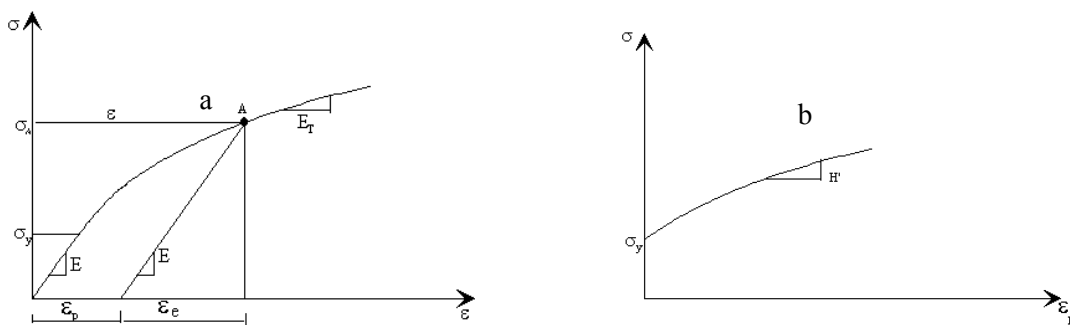


Fig.3.2. a : Relations contraintes déformations en tension uni axiale. *E=module élastique, E_T=module tangent. b :* courbe déduite de a après élimination des déformations élastiques

On peut donc déterminer cette fonction à partir d'un essai de traction simple. La Fig.3.2 montre la limite d'élasticité à $\sigma = \bar{\sigma}_y$ et $\sigma = \sigma_A$, la déformation est $\varepsilon = \varepsilon_p + \varepsilon_e$ où uniquement la déformation élastique est restaurée en cas de déchargement. En conséquence de l'apparition de la déformation plastique ε_p le matériau a écroui (loi d'écrouissage) tel que après rechargement $\bar{\sigma}$ doit dépasser σ_A pour une nouvelle réapparition de déformations plastiques.

De la Fig.3.2. on peut déduire les équations (3.22) :

$$d\sigma = E_T d\varepsilon \qquad d\sigma = H' d\varepsilon_p \qquad d\varepsilon_p = d\varepsilon - \frac{d\sigma}{E} \qquad (3.22)$$

En substituant les deux premières équations dans la troisième on aboutit à l'écriture H' pente de la courbe (contrainte-déformations plastiques) :

$$H' = \frac{EE_T}{E - E_T} \qquad (3.23)$$

3.2.2.4. Bilan de la Théorie Incrémentale de Plasticité

Pour résumer et clarifier cette théorie, on constate que sa construction exige trois facteurs fondamentaux :

- a- une loi d'écoulement, ou critère de plasticité initial, définissant l'état de contrainte à partir duquel l'écoulement plastique peut se produire ;
- b- une loi d'écoulement plastique reliant les incréments de déformations plastiques aux contraintes et incréments de contraintes ;
- c- une loi d'écrouissage, décrivant l'évolution de la surface de plasticité au cours de l'écoulement plastique.

3.2.3. Non Linéarités Combinées

Un comportement non-linéaire peut être dû à une non-linéarité du matériau, non-linéarités des membres constitutifs du système (non-linéarités du système géométriques causées par les excentricités, le manque initial de rectitude, de flambage

et ainsi de suite). Les non-linéarités géométriques incluraient les effets dus aux grands déplacements de la structure.

C'est Fellippa (1966), qui le premier a traité avec une certaine généralité le cas de la non linéarité simultanément géométrique et matérielle, en état plan de contrainte.

Pour une représentation plus réaliste de la réponse de la structure les non-linéarités matérielle et géométrique doivent être considérés à la fois. Comme pour les travaux de Hill et al (1989) qui a développé un modèle élément finis basé sur la formulation lagrangienne actualisée. Leur modèle a tracé la réponse inélastique de la structure dans l'intervalle postcritique. Blandford and Wang (1993) ont utilisé les travaux de Hill pour analyser la ruine progressive d'une tour en acier sujette à une variété de chargements. Ramesh and Krishnamoorthy (1994) ont également utilisé le modèle de Hill et al dans leur analyse inélastique post flambage d'une structure à treillis mais ont utilisé la méthode de relaxation dynamique pour performer leur calcul itératif. Et jusqu'à la date actuelle la recherche dans ce domaine ne cesse de progresser puisque le besoin de structures travaillant dans des conditions de grandes températures et grandes pressions, des structures de plus en plus élancées et d'une appréciable légèreté (offrant une grande résistance aux séismes) devient de plus en plus croissant.

3.3. Application de la Formulation Non Linéaire aux Structures de Tenségrité

Pour des structures dont la déformabilité n'est pas très importante car les petites perturbations conduisent à une quasi-linéarité géométrique l'hypothèse de linéarité est souvent acceptée en raison de la complexité du calcul. Or, pour les systèmes de tenségrité et avec la présence de multiples mécanismes infinitésimaux, cette hypothèse n'est pas valide.

Le phénomène a été étudié par Kebiche K. [KEB99] et Benkahla N. [BEN00]. De plus l'état d'autocontrainte joue un rôle fondamental sur la rigidité mécanique d'une telle structure. Dans ce qui suit, le calcul se fait dans un cadre géométrique non-linéaire en considérant un comportement des matériaux élastique-parfaitement plastique pour des barres et élastique-élasto plastique pour les câbles.

3.3.1. Discrétisation, et Formulation Matricielle

Dans le cas des systèmes réticulés, et pour des actions extérieures appliquées aux nœuds du système, l'hypothèse de coïncidence des fibres moyennes permet d'affirmer que les éléments ne sont soumis qu'à des actions de traction ou de compression. L'équation de base qui, en statique, traduit l'équilibre d'un problème similaire s'écrit alors comme:

$$[K]\{d\} = \{f\} \quad (3.24)$$

où $[K]$ est la matrice de rigidité globale de la structure, $\{d\}$ le vecteur des déplacements nodaux et $\{f\}$ le vecteur des actions extérieures appliquées aux nœuds. La matrice de rigidité $[K]$ est le résultat de l'assemblage dans un repère global, de matrices de rigidité élémentaires correspondant à chaque élément du système. Ces matrices sont définies dans un repère local lié à l'élément et dépendent du modèle de comportement choisi.

Nous allons dans un premier temps définir le modèle de calcul construit et utilisé pour l'analyse, puis nous indiquerons comment traiter le phénomène de relâchement de câbles.

Le modèle choisi pour simuler le comportement est celui d'un élément linéique (Fig 3.3) : les systèmes de tenségrité étant réticulés, les actions sont supposées appliquées uniquement au niveau des nœuds et les éléments ne sont sollicités qu'en traction ou compression.

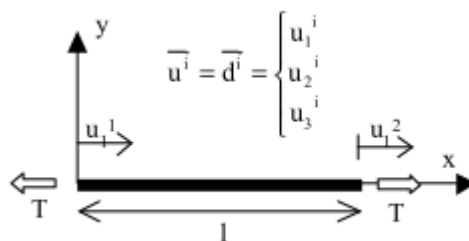


Fig.3.3 Un élément de forme linéique simple.

Modélisation De l'Elément Barre:

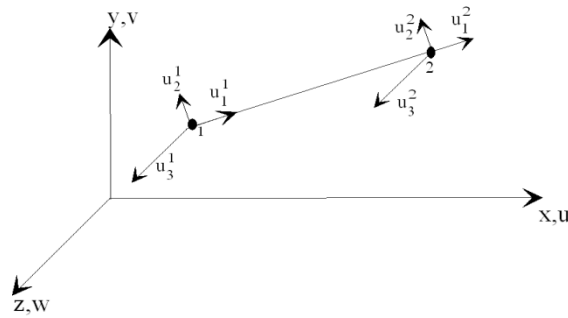


Fig. 3.4 composantes des déplacements dans le repère local de la barre spatiale

L'élément type barre spatiale, obéissant aux relations contraintes déformation [BAT96], [BAT80] a été adopté (Eq.3.25):

$$\begin{cases} \sigma = E_T \varepsilon \text{ pour } \sigma < \sigma_Y \\ \sigma = \sigma_Y \text{ pour } \sigma \geq \sigma_Y \end{cases} \quad (3.25)$$

Où σ est la contrainte axiale d'ingénieur, σ_Y est la contrainte limitant le comportement élastique du matériau, E_T est le module de rigidité élastique du matériau 'module de Young', ε est la déformation axiale d'ingénieur. Les éléments en compression 'barres' sont supposés avoir un comportement élastique-parfaitement plastique.

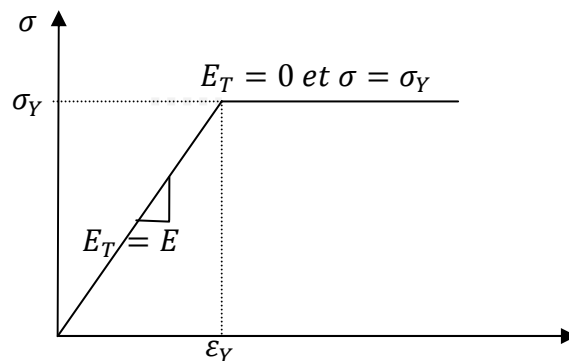


Fig 3.5 courbe de comportement élastique parfaitement plastique de la barre

Modélisation De l'Elément Câble :

En termes d'élément finis l'élément câble a les mêmes caractéristiques que la barre [BAT80], [BAT96] avec la seule différence qu'il ne présente aucune rigidité en compression. Le câble est un élément structural capable de transmettre uniquement des contraintes de traction suivant la direction normale à la section transversale [BAT80], [BAT96]. Il révèle un comportement élasto-plastique gouverné par la théorie classique incrémentale de plasticité. Les déformations plastiques sont calculées considérant les propriétés qui caractérisent le comportement du matériau tels; la contrainte limite d'élasticité σ_Y , le critère de plastification, la loi d'écoulement plastique et d'écrouissage [BAT96] et [COO89]. Ces propriétés sont définies d'après la courbe de comportement (contrainte-déformation) découlant de l'essai de traction effectué sur le câble (Fig 3.6) [ABE08], [BEN00].

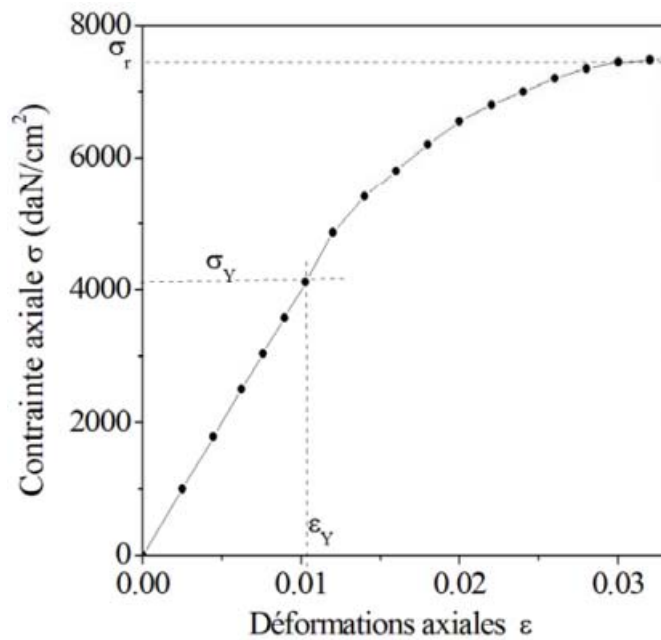


Fig 3.6 courbe expérimentale de comportement du câble en traction.

D'après Cook R.D [COO89], pour calculer les déformations plastiques, on procède comme suit:

- définir un critère de plastification ‘a yield function’ en fonction de la limite d’élasticité du matériau σ_Y
- définir une loi d’écoulement (Fig 3.7), qui relie l’incrément de déformation plastique à celui de la contrainte.
- Une règle d’écrouissage qui spécifie comment ‘the yield function’, est modifiée au cours du processus de plastification.

Quand à la première étape, on écrit l’Eq.3.26

$$\begin{cases} \sigma = E_T \varepsilon & \text{pour } \sigma < \sigma_Y \\ \sigma = f(\varepsilon) & \text{pour } \sigma \geq \sigma_Y \end{cases} \quad (3.26)$$

σ_Y est la contrainte limitant le comportement élastique du matériau.

$f(\varepsilon)$ représente la loi d’écoulement unidimensionnel, qui pour le câble est déterminée expérimentalement (Fig 3.6) [ABE08] et [BEN00]. La règle d’écrouissage sera définie plus loin au cours de l’exposé des différentes étapes d’analyse.

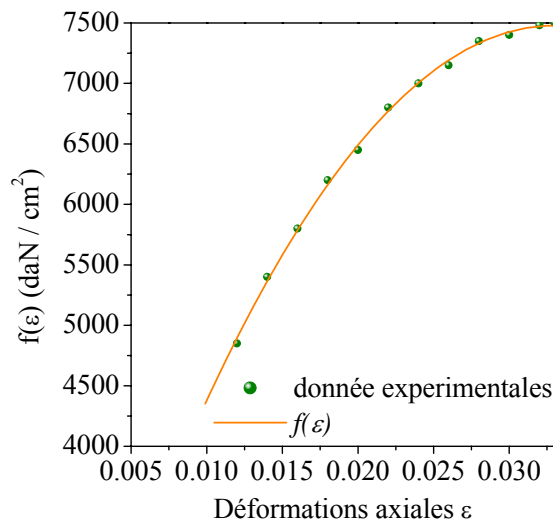


Fig 3.7 Loi d’écoulement $f(\varepsilon)$ de l’élément câble

Obtenue a partir de données expérimentales.

3.3.2. Méthode d'Analyse Non-Linéaire

La méthode de résolution non linéaire utilisée est la méthode itérative de Newton Raphson où la matrice de rigidité tangente est ré estimée à chaque itération et à chaque incrément de charge. Les étapes suivantes sont exécutées:

- a) Initialement on suppose que le module de rigidité est élastique (${}^m E_{Ti} = E$), on calcul la matrice de rigidité et l'incrément de déformation ${}^m \delta \varepsilon_{i-1} = \delta \varepsilon_{i-1}^e$ (incrément de déformation élastique); puis l'incrément de contrainte ${}^m \delta \sigma_i$ est calculée telle que :

$${}^m \delta \sigma_i = E {}^m \delta \varepsilon_{i-1} \quad (3.27)$$

- b) Le critère de plastification Y_f est défini d'après [COO89] tel que :

$$Y_f = \left| {}^m \sigma_{i-1} + {}^m \delta \sigma_i \right| - {}^m \sigma_{Yi} \quad (3.28)$$

Où ${}^m \sigma_{Yi}$ est la contrainte limite d'élasticité à l'itération (i).

- c) Par la suite Y_f est testé et le module de rigidité tangent est calculé en conséquence tel que :

Si $Y_f < 0$, l'hypothèse sur la nature de l'incrément de déformation est confirmée ${}^m \delta \varepsilon_{i-1} = \delta \varepsilon_{i-1}^e$ et la contrainte est calculée utilisant l'expression suivante

$${}^m \sigma_i = {}^m \sigma_{i-1} + {}^m \delta \sigma_i \quad (3.29)$$

Si $Y_f \geq 0$ donc $\left| {}^m \sigma_{i-1} \right|$ est comparée avec ${}^m \sigma_{Yi}$ pour voir si l'incrément de déformation sur cette étape est entièrement ou partiellement plastique. Alors ;

- Si $\left| {}^m \sigma_{i-1} \right| = {}^m \sigma_{Yi}$; l'incrément de déformation est totalement plastique $\Rightarrow {}^m \delta \varepsilon_{i-1} = {}^m \delta \varepsilon_{i-1}^p$ et dans ce cas, le module de rigidité tangent et l'incrément de contrainte sont calculés comme suit :

$$\begin{cases} {}^m E_{Ti} = b + a {}^m \varepsilon_{i-1} \\ {}^m \delta\sigma_i = {}^m E_{Ti} {}^m \delta\varepsilon_{i-1} \end{cases} \quad (3.30)$$

Où

$$a = -11732560 \text{ daN/cm}^2$$

$$b = 387040 \text{ daN/cm}^2$$

• Sinon ($|{}^m \sigma_{i-1}| \neq \sigma_{Yi}$), une partie de l'incrément de déformation est élastique et l'autre partie est plastique tel que ${}^m \delta\varepsilon_{i-1} = {}^m \delta\varepsilon_{i-1}^e + {}^m \delta\varepsilon_{i-1}^p$. Dans ce cas l'incrément ${}^m \delta\sigma_i$ est calculé utilisant équations données dans [COO89] :

$${}^m \delta\sigma_i = \text{ratio} {}^m \delta\varepsilon_{i-1} E + (1 - \text{ratio}) {}^m \delta\varepsilon_{i-1} {}^m E_{Ti} \quad (3.31)$$

Avec $\text{ratio} = \left(\sigma_{Yi} - |{}^m \sigma_{i-1}| \right) / |{}^m \delta\sigma_i|$

A chaque fois on actualise les valeurs des vecteurs suivants :

$$\begin{cases} {}^m \sigma_i = {}^m \sigma_{i-1} + {}^m \delta\sigma_i \\ {}^m \varepsilon_i = {}^m \varepsilon_{i-1} + {}^m \delta\varepsilon_i \end{cases} \quad (3.32)$$

d) Finalement, la règle d'écrouissage [COO89], qui décrit la variation du critère de plastification au cours de l'écoulement plastique, est appliqué tel que; si ${}^m \sigma_i > \sigma_{Yi}$ on adopte la valeur actualisée ${}^m \sigma_i$ comme nouvelle valeur de la contrainte limite d'élasticité.

$$\sigma_{Yi} = |{}^m \sigma_i| \quad (3.33)$$

Les indices m et i représentent respectivement l'incrément de charge et le numéro de l'itération.

3.3.3. Les Équations Éléments Finis

Pour un élément barre spatial, les équations incrémentales dans le repère de coordonnées local, s'expriment telle que : [BEN00], [LEU90], [BLA96]

$${}^m\{\bar{F}^e\} = \left({}^m[K] + {}^m[K_\sigma] + \frac{1}{2} {}^m[K_1] + \frac{1}{2} {}^m[K_2] + \frac{1}{3} {}^m[K_3] \right) {}^m\{d^e\} \quad (3.34)$$

La matrice de rigidité élémentaire tangente est basée sur les travaux de L.J. LEU et al [LEU90].

$${}^m[K] = \frac{{}^mE_T A}{{}^mI} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

${}^m[K]$: Matrice de rigidité élémentaire élastique,

$${}^m[K_\sigma] = \frac{{}^mf}{{}^mI} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

${}^m[K_\sigma]$: Matrice de rigidité élémentaire géométrique,

${}^m[K_1], {}^m[K_2], {}^m[K_3]$: matrices de rigidité du second ordre [BEN00],[LEU90],

[BLA96]

$${}^m[K_1] = \frac{{}^mE_r A}{mJ^2} \begin{bmatrix} \Delta u & \Delta v & \Delta w & -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Delta u & -\Delta v & -\Delta w & \Delta u & \Delta v & \Delta w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$${}^m[K_2] = \frac{{}^mE_r A}{mJ^2} \begin{bmatrix} 2\Delta u & 0 & 0 & -2\Delta u & 0 & 0 \\ \Delta v & \Delta u & 0 & -\Delta v & -\Delta u & 0 \\ \Delta w & 0 & \Delta u & -\Delta w & 0 & -\Delta u \\ -2\Delta u & 0 & 0 & 2\Delta u & 0 & 0 \\ -\Delta v & -\Delta u & 0 & \Delta v & \Delta u & 0 \\ -\Delta w & 0 & -\Delta u & \Delta w & 0 & \Delta u \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$${}^m[K_3] = \frac{{}^mE_r A}{2^m J^3} = \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Avec

$$I = \begin{bmatrix} 3\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta u\Delta v & 2\Delta u\Delta w \\ 2\Delta u\Delta v & \Delta u^2 + 3\Delta v^2 + \Delta w^2 & 2\Delta v\Delta w \\ 2\Delta u\Delta w & 2\Delta v\Delta w & \Delta u^2 + \Delta v^2 + 3\Delta w^2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Pour profiter des caractéristiques de symétrie de la matrice de rigidité, les matrices

${}^m[K_1]$ et ${}^m[K_2]$, présentant une structure non symétrique sont remplacés par la

matrice ${}^m[K_{12}]$ telle que ${}^m[K_{12}] = {}^m[K_1] + {}^m[K_2]$; [CHA89], [LEU90]

$${}^m[K_{12}] = \frac{{}^m E_T A}{m l^2} \begin{bmatrix} 3\Delta u & \Delta v & \Delta w & -3\Delta u & -\Delta v & -\Delta w \\ \Delta v & \Delta u & 0 & -\Delta v & -\Delta u & 0 \\ \Delta w & 0 & \Delta u & -\Delta w & 0 & -\Delta u \\ -3\Delta u & -\Delta v & -\Delta w & 3\Delta u & \Delta v & \Delta w \\ -\Delta v & -\Delta u & 0 & \Delta v & \Delta u & 0 \\ -\Delta w & 0 & -\Delta u & \Delta w & 0 & \Delta u \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

A : étant l'aire de la section transversale de l'élément considéré; f : la force interne axiale, l : longueur actuelle de l'élément, E_T est le module de rigidité tangente, $\Delta u = u_2 - u_1$, $\Delta v = v_2 - v_1$, $\Delta w = w_2 - w_1$ et $\{u_1, v_1, w_1\}^t$, $\{u_2, v_2, w_2\}^t$ représentent les déplacements nodaux des nœuds 1 et 2.

3.3.3.1. Méthode de Résolution :

La méthode de résolution utilisée dans ce qui suit, est incrémentale itérative, sur un incrément une correction de l'équilibre est introduite en utilisant un processus itératif. La méthode de Newton-Raphson qui utilise la matrice de rigidité tangente recalculée à chaque itération pour la correction de l'équilibre est utilisée. Cette méthode a une convergence très rapide avec des résultats sûrs, son inconvénient principal dans le temps de calcul de l'actualisation de la matrice de rigidité tangente à chaque itération.

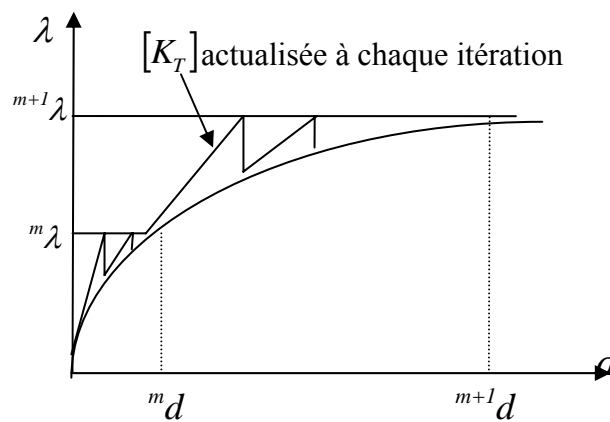


Fig. 3.8 Méthode de Newton-Raphson

Pour trouver la réponse complète d'une structure sollicitée, et décrire toute la courbe charge-déplacement, on a adopté **la technique de pilotage en longueur d'arc imposée**. Cette technique est une combinaison entre celle en charge imposée et en déplacements imposés, elle est considérée comme la plus efficace car permettant de contourner tous les points limites qu'ils soient en charge ou en déplacement, rencontrés sur le chemin d'équilibre. Elle consiste à définir une fonction liant par un paramètre imposé ($\overline{\Delta L}$) appelé 'longueur d'arc' Fig 3.9, l'incrément de charge et celui de déplacement. La version simplifiée de cette fonction donnée par Crisfield [CRI81] Fig 3.10 est ;

$$\psi(\{d\}, \lambda) = \langle \delta d \rangle \{ \delta d \} - \overline{\Delta L}^2 = 0 \quad (3.42)$$

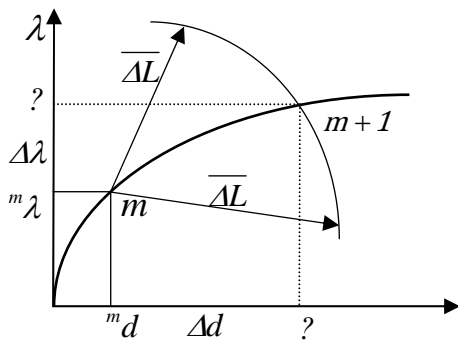


Fig 3.9. Technique de pilotage en longueur d'arc imposée

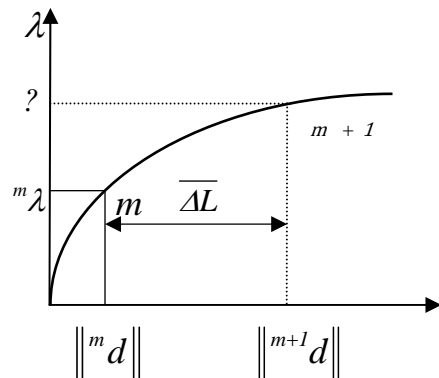


Fig 3.10. Technique de pilotage en longueur d'arc imposée de Crisfield

Cela revient à imposer la longueur d'arc $\overline{\Delta L}$ égale à la norme euclidienne de l'accroissement du vecteur déplacement $\{d\}$. Parmi les avantages qu'offre cette technique; l'incrément automatique du chargement en choisissant un nombre moyen possible d'itération I_d (variant entre 3 et 6), d'après Crisfield [CRI81] on peut calculer la longueur d'arc à l'incrément $(m + 1)$ suivant tel que

$$\overline{\Delta L}^{m+1} = \overline{\Delta L}^m \sqrt{\frac{I_d}{I_p}} \quad (I_p \text{ est le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'incrément}).$$

Une fois la longueur d'arc choisie, il s'agit par la suite de résoudre l'Eq.3.43 provenant de la loi incrémentale itérative et de la fonction complémentaire.

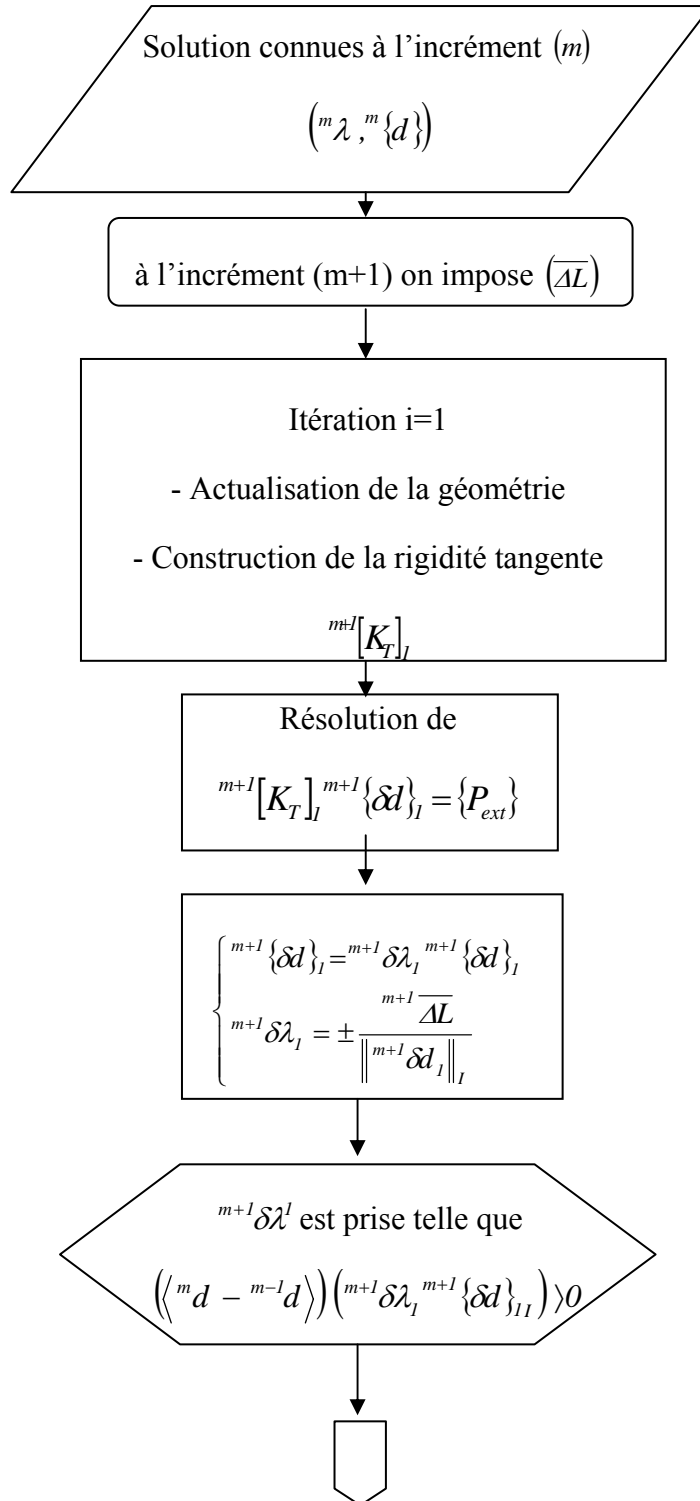
$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{m+1}[K_T]_i \ {}^{m+1}\{\delta d\}_{iII} = {}^{m+1}\{R\}_i \\ et \\ {}^{m+1}[K_T]_i \ {}^{m+1}\{\delta d\}_{iI} = \{P_{ext}\} \end{array} \right. \quad (3.43)$$

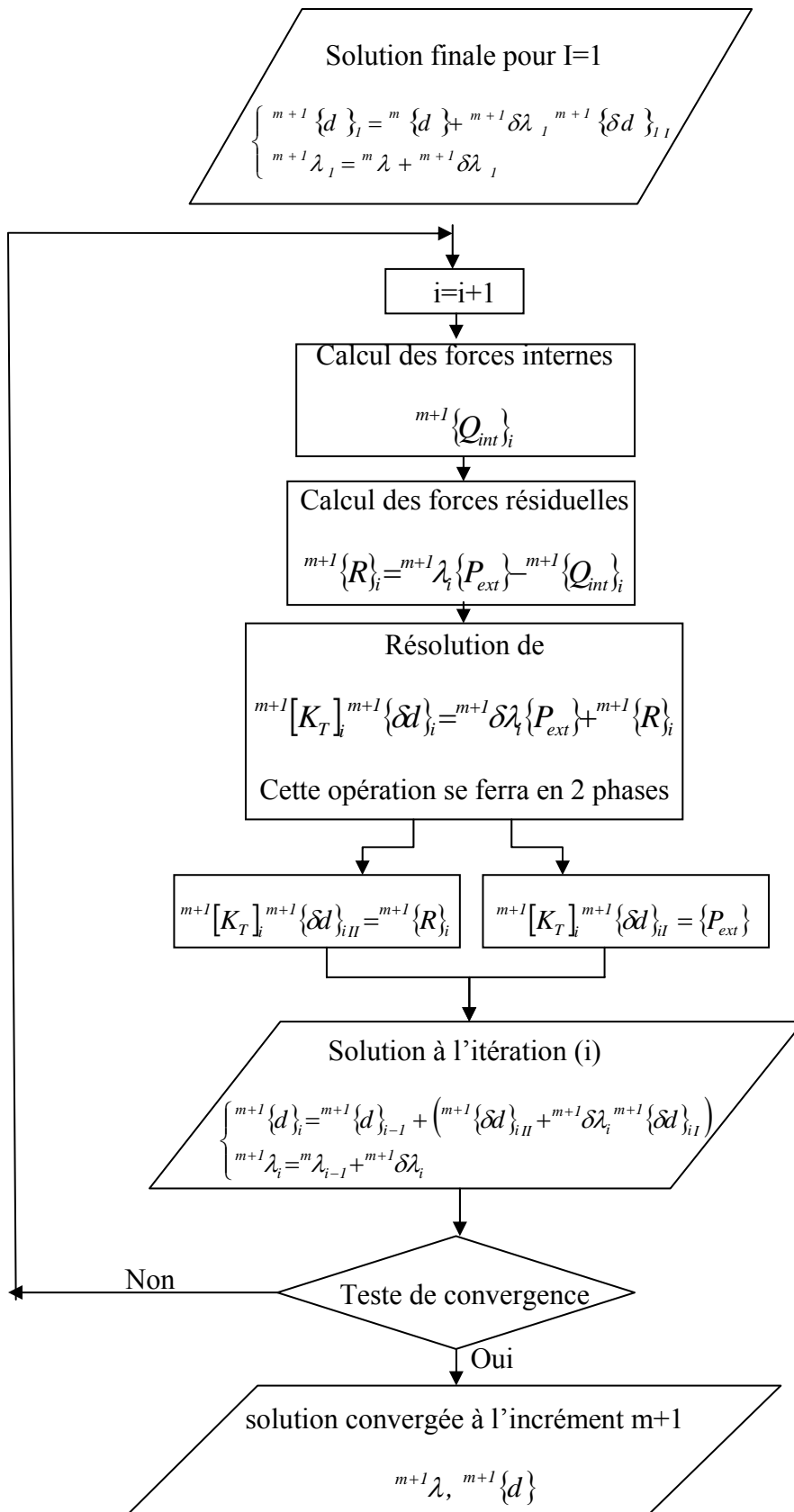
Il reste à choisir les deux racines de l'équation du second degré dont le facteur de charge est l'inconnu. Il faut alors prendre la racine qui a le sens de la charge. Enfin la solution à l'itération (i) d'un incrément à un autre s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{m+1}\{d\}_i = {}^{m+1}\{d\}_{i-1} + \left({}^{m+1}\{\delta d\}_{iII} + {}^{m+1}\delta\lambda_i \ {}^{m+1}\{\delta d\}_{iI} \right) \\ {}^{m+1}\delta\lambda_i = {}^m\lambda_{i-1} + {}^{m+1}\delta\lambda_i \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Si cette première solution est convergée, nous passons à l'incrément suivant soit en passant à une autre valeur de $\overline{\Delta L}$ soit en utilisant le processus automatique défini précédemment. Dans le cas contraire le processus itératif est continué jusqu'à satisfaction du critère de convergence. Ci-dessous est résumée la technique de pilotage en longueur d'arc imposée sous forme d'un organigramme détaillé.

Algorithme de résolution de Newton-Raphson en longueur d'arc imposée.





3.4. Problème Lié au Comportement Unilatéral Des Câbles

Pour illustrer le problème de relâchement des câbles l'exemple de la Fig.3.11 est présenté. La Fig.3.11.a, montre le schéma d'une structure à 5 éléments à rigidité bilatérale (barre), dont les nœuds 1, 2 et 3 sont alignés. La Fig.3.11.b. illustre la même configuration géométrique que précédemment mais les deux barres (4-6) et (5-6) ont été remplacées par des câbles (à rigidité nulle en compression).

Les deux géométries sont soumises à une force horizontale appliquée aux nœuds 6 comme montré sur la Fig.3.12. L'observation de la réponse des deux structures nous informe sur le problème que peut causer la rigidité unilatérale des éléments câbles. Les câbles soumis à la compression (câbles relâchés) (Fig 3.12.b) ne participent plus à la rigidité de la structure ce qui donne naissance à un mécanisme rigide (rotation orientée autour de l'axe 1-2-3), donc la structure est instable.

Avant chargement

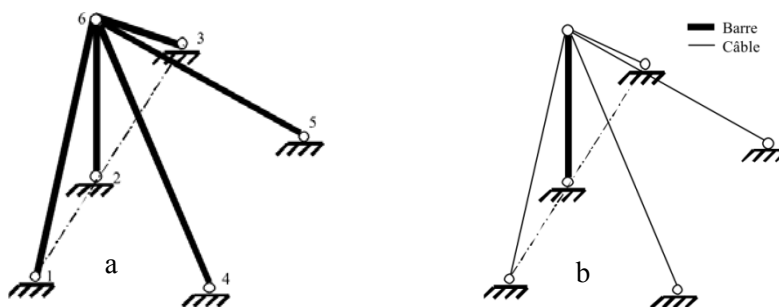


Fig. 3.11: a: Système à 5 barre, b: système à 3 barres et 2 câbles.

Dans les deux structures les nœuds 1,2 & 3 sont alignés[QUI00]

Après chargement

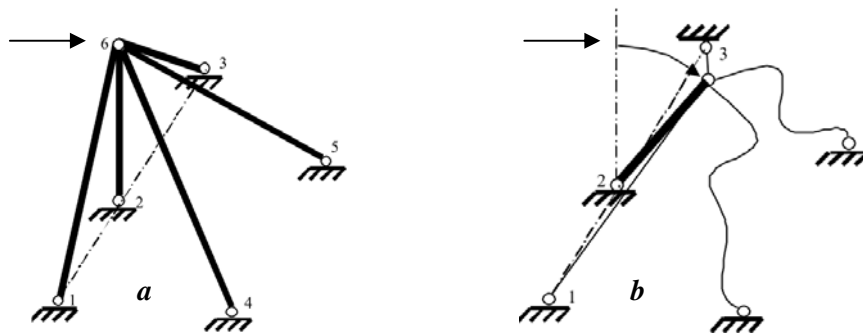


Fig 3.12 : le Système (a) présente des mécanismes finis (système stable)

le Système (b) présente un mécanisme infinitésimal (système instable)

3.5. Méthode De Contrôle des Câbles Relâchés

L'application de charges externes croissantes sur les structures de tensegrité, peut conduire au relâchement de certains câbles en raison de la perte de leurs tensions internes ([BEN00]; [QUI00]; [SAN05]).

Les tests sur ces structures ont montré que la redistribution des forces internes peut conduire au relâchement de câbles tendus ou l'étirement de câble détendus. Dans les structures de tensegrité, ce phénomène est inévitable, mais un minimum de câbles relâchés est souhaitable [BIN01].

Donc l'analyse non linéaire associée au relâchement des câbles nécessite la prise en compte d'un mécanisme de contrôle supplémentaire au niveau de l'algorithme de calcul pour simuler proprement la réponse de la structure de tensegrité.

Dans le modèle de calcul propose, le relâchement des câbles est identifié par le signe de l'élongation ${}^m\Delta_j^i$ de tout câble (j) à chaque itération, lorsque ${}^m\Delta_j^i$ est négative, ceci implique que le $j^{\text{ième}}$ câble est relâché et donc il est supprimée du système d'équilibre global (Eq.3.34) ([BEN00]; [MIT94]). Du point de vue formulation cette stratégie de contrôle est exprimée comme:

Si ${}^m\Delta_j^i = {}^mI_j^i - I_{j0}^i < 0$ implique que le câble est sous l'action d'une force de compression dont il est incapable de transmettre (élément a rigidité unilatérale). Donc les modifications introduites au niveau du système d'équations d'équilibre sont comme suit:

$${}^mQ_j = \frac{T_j + {}^mE_{T(i-1)} A^m \Delta_j^i}{L_0} = 0 \quad (3.45)$$

$$T_j = 0 \quad (3.46)$$

$${}^mE_{T(i-1)} = 0 \quad (3.47)$$

où ${}^m\Delta_j^i$ = l'allongement, ${}^mI_j^i$ and I_{j0}^i représentent respectivement la longueur actuelle et la longueur initiale du câble considéré, ${}^mQ^i$ = force interne dans le câble, T = la tension initiale dans le câble introduite au montage. Si pour un câble relâché le module de rigidité tangent est pris nul, donc il ne contribue plus à la construction de la matrice de rigidité globale de la structure, donc sa matrice de rigidité tangente élémentaire (${}^m[K_T]_i = 0$) ([BEN00]; [MIT94]).

Il doit être signalé que durant le processus itératif, la possibilité qu'un câble relâché puisse se retendre n'est pas à écarter. Pour cette raison l'élongation du câble relâché est testé dans l'itération suivante pour que le câble correspondant puissent être éventuellement reconsidéré dans le calcul de la matrice de rigidité globale et l'écriture des équations d'équilibre ([QUI00]; [SAN05]).

3.6. Conclusion

Après ce bref exposé sur la méthode de calcul utilisées, nous devons préciser que, L'avantage majeur de cette méthode est qu'elle permette de parcourir le chemin de comportements entier même en présence d'extrema (points limites), en charge ou en déplacement, jusqu'à la ruine de la structure.

Il a été considéré, comme indiqué précédemment, l'effet du relâchement, de la plastification des câbles et du niveau de l'autocontrainte, sur l'analyse non linéaire des anneaux de tenségrité.

Le modèle de calcul a été programmé sur la base du principe des éléments finis en langage '**Fortran**', dans un programme spécialement dédié à l'étude des systèmes de tenségrité couplant entre la formulation de l'élément câble et l'élément barre.

Devant la spécificité des systèmes de tenségrité, tant par la nécessité d'effectuer une recherche de forme, que par la présence d'états d'autocontrainte ou de mécanismes, il s'est avéré nécessaire d'utiliser le logiciel '**Tensegrité2000**' intégrant les avancées théoriques sur la recherche des états d'autocontrainte conformes. Les logiciels de dessin '**Designer**' et '**Autocade 2010**' ont été utilisés pour réaliser les dessins des configurations des structures calculées.

Chapitre 4

Validation du Modèle De Calcul et Applications Numériques

- 4.1. Introduction
- 4.2. Validation du Modèle de Calcul
- 4.3. Application du Modèle de Calcul
 - 4.3.1 Influence de la Rigidité Relative des Éléments
 - 4.3.2 Effet du Relâchement des Câbles
 - 4.3.3 Effet Couplé du Relâchement et de la Plastification des Câbles
- 4.4. Conclusion

4.1 Introduction

Dans le Chapitre précédent, un exposé détaillé du modèle de calcul proposé a été présenté. Ce modèle numérique nous permettra d'analyser le comportement non linéaire des systèmes de tensegrité à base d'anneaux. Les résultats émanant de son exploitation, tiendront compte de différents paramètres influant la rigidité de la structure.

Cette exploitation se fera au niveau de ce chapitre sous forme d'une variété d'applications tant sur des cellules isolées que sur un déploiement qu'en a voulu linéique, de plusieurs cellules d'anneaux de tensegrité à bases carré, pentagonale ou hexagonal. On essaiera par là de faire ressortir l'effet du niveau d'autocontrainte, de la rigidité relative des éléments constitutifs (barre/câble), mais surtout l'accent sera mis sur l'influence que peut avoir le relâchement de certains câbles et la plastification d'autres, sur le comportement non linéaire des structures sujettes à la présente étude.

Dans cette partie, les résultats sont souvent présentés sous la forme de l'évolution des déplacements de la section sollicitée en fonction des actions extérieurs. Le déplacement d'une section est défini par la moyenne des déplacements $\langle z \rangle$ des nœuds appartenant à cette section en fonction des actions extérieurs appliquées.

Avant de s'y mettre, et afin de conférer un maximum de fiabilité au modèle proposé, on a vue nécessaire d'aborder ce chapitre par une série de testes de validation par rapport à des data numériques et expérimentaux recueillis dans la littérature.

4.2 Validation du Modèle de Calcul

La fiabilité du modèle éléments finis actuelle a été vérifiée en comparaison avec les exemples suivants :

Le premier test concerne la validation de la technique en longueur d'arc imposée où notre modélisation fut appliquée à une géométrie à treillis bien connue 'the star dôme' [BLA96] et [HIL89]. La géométrie de la structure et le mode de chargement

sont représentés sur la Fig.4.1. Les résultats obtenus en ce qui concerne le déplacement vertical du nœud 1 en fonction du paramètre de chargement, λ , sont comparés à ceux de [BLA96] et [HIL89], comme indiqué dans la Fig. 4.1.a.

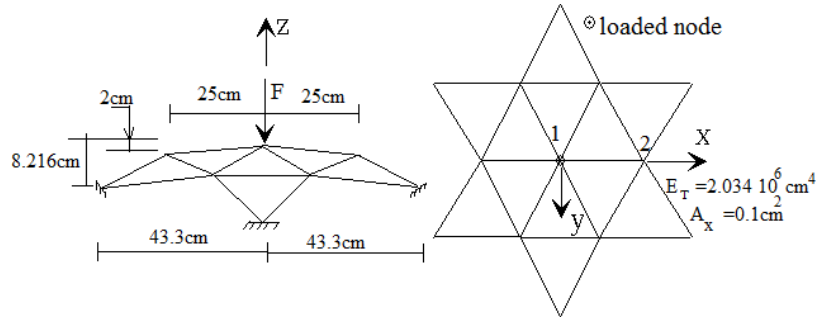


Fig. 4.1 Géométrie et chargement de la 'Star Dome Truss'

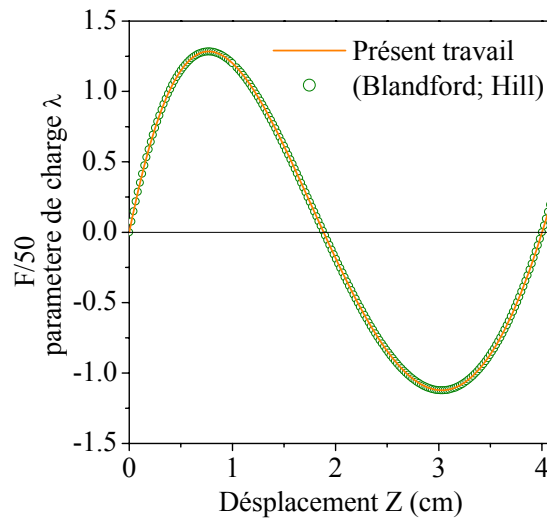


Fig 4.1.a Courbe Charge-Déplacement de la 'Star Dome Truss'

Le deuxième exemple est une comparaison entre les résultats obtenues à partir du modèle numérique établi et les data expérimentaux extraits d'un diagramme affichant la courbe expérimentale de comportement d'un câble soumis à un essai expérimental de traction simple [ABE08] et [BEN00]. Cette courbe de comportement a été prise comme source de la loi d'écoulement $f(\varepsilon)$ (Chap.3 section 3.3.1) adoptée pour la modélisation du comportement non linéaire du matériau constituant le câble.

Le test de traction sur le câble Fig.4.2 a permis de relever les caractéristiques suivantes; la déformation limite de plastification ‘yield strain’, $\epsilon_Y = 1.2\%$, la déformation de rupture ‘rupture strain’, $\epsilon_r = 3.3\%$, la contrainte limite de plastification initiale ‘initial yield strength’, $\sigma_Y = 4800 daN/cm^2$, la force de plastification initiale, $F_Y = 1344 daN$, la contrainte de rupture ‘rupture strength’, $\sigma_r = 7500 daN/cm^2$, la force de rupture, $F_r = 2100 daN$, ainsi que le module d’élasticité tangent, $E = 400000 daN/cm^2$, et la section transversale, $A_X = 0.28 cm^2$. Pour la simulation numérique et la comparaison, l’élément câble pris comme échantillon Fig.4.2 est subdivisé en 10 éléments égaux finies. Le nœud 1 est fixé le long des trois directions, alors que le onzième nœud libre est soumis à un effort de traction F dans la direction X comme montré sur la Fig.4.2. La charge est incrémentée et l’allongement enregistré jusqu’à atteindre la résistance à la rupture du câble ($F_r = 2100 daN$), le tracé des courbes de la Fig. 4.2.a, affiche un accord satisfaisant.

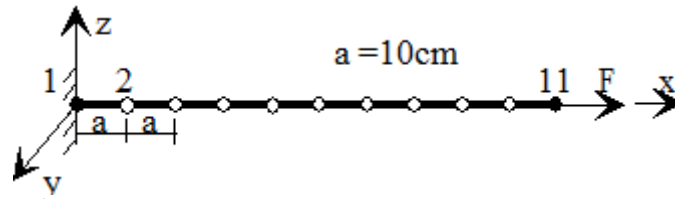


Fig. 4.2. Élément Câble en Traction

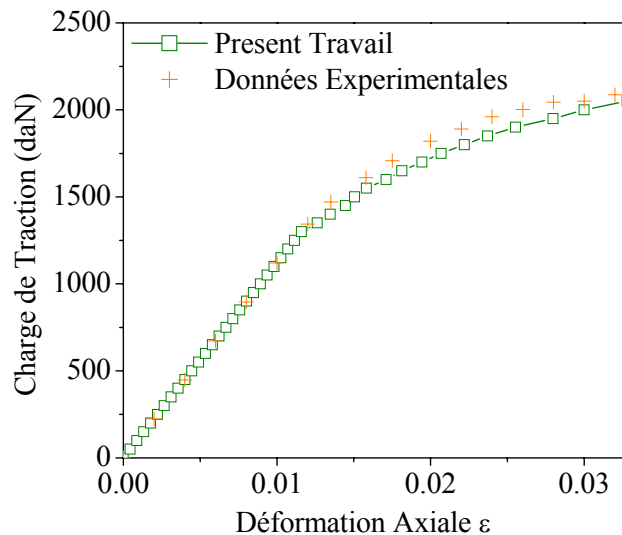


Fig. 4.2.a Essai de Traction sur un Élément Câble

Le troisième exemple est une comparaison des résultats obtenus avec ceux théoriques principalement donnés par [BEN00] concernant le déplacement du nœud 14 à mi-portée de la poutre de tensegrité à base de quadruplex (Fig 4.3). Les sections transversales et les modules tangents considérés respectivement pour les câbles et les barres sont: $3.25\text{cm}^2, 2000000\text{daN/cm}^2$ et $0.28\text{cm}^2, 400000\text{daN/cm}^2$. Le vecteur d'auto contrainte initiale est détaillé dans [BEN00]. Tous les nœuds supérieurs sont sujets à la même charge 'F' verticale, dirigée vers le bas. Les conditions aux limites appliquées à la structure sont comme suit ; dans l'extrémité gauche, le nœud 1 est totalement fixé, le nœud 2 est fixé dans les directions X et Z et le nœud 3 fixé uniquement suivant la direction X. Dans l'extrémité droite le nœud 26 est fixé dans la direction Z alors que le nœud 27 est fixé dans les directions X et Z. Les déplacements verticaux Z du nœud 14 en fonction de la charge croissante appliquée sont tracés sur le diagramme de la Fig.4.3.a. En effet, les résultats qui découlent de ce test de validation permettent les conclusions suivantes:

- Il ya effectivement des effets de déformations plastiques qui marquent la courbe de comportement (N.EP.A) Fig.4.3.a comparée avec le comportement non linéaire élastique non (NEA).
- Les résultats sont en parfait accord avec la solution analytique de Benkahla [BEN00].

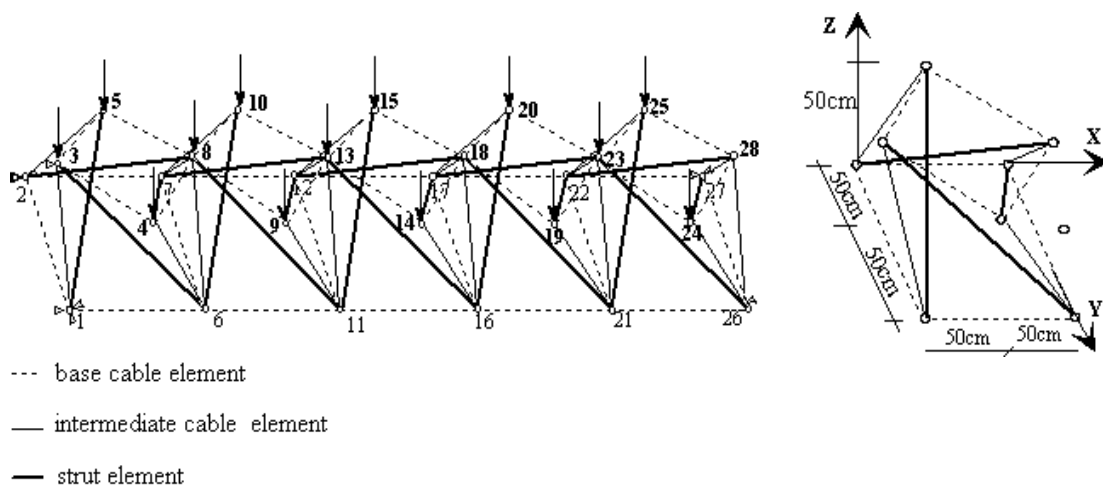


Fig. 4.3. Géométrie et Chargement d'une Poutre à Cinq Quadruplex

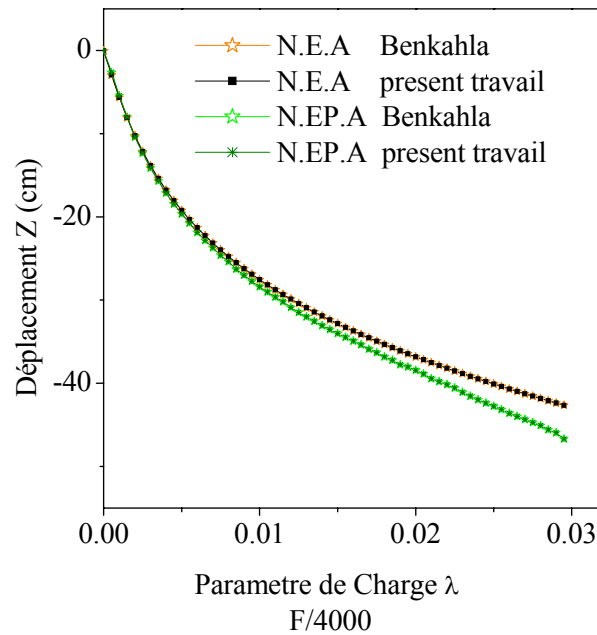


Fig. 4.3.a. Déplacements du Nœud 14 dans la Direction Z

Dans le souci de comparer les résultats numériques des structures de tensegrité avec des données expérimentales. Nos recherches bibliographiques ont abouti sur l'exemple expérimental présenté par [HAN88], cependant dans son papier, Ariel Hanaor (1988) n'a point donner de détails sur les caractéristiques géométriques ou mécanique du modèle testé.

Récemment, un groupe activant dans ce domaine à Montpellier nous a fourni une thèse intéressante [NGU09], où il est exposé un essai expérimental de compression effectué sur l'anneau de tensegrité à base pentagonale Fig.4.4. Selon les propos de l'auteur, au cours de l'expérience, la tension initiale appliquée et son homogénéité dans les câbles du même type (câbles de nappes; câbles coplanaires et non coplanaires) n'ont pu être identifiés. La charge appliquée a été limitée à un faible niveau pour éviter d'endommager le modèle expérimental. Après l'enregistrement et le traçage de la moyenne des déplacements verticaux $\langle z \rangle$ des 5 nœuds supérieurs par rapport aux charges totales 5F (Fig.4.4.a) ; une perte progressive et importante de la rigidité pendant le chargement est notée. Cela a été justifié (Nguyen, 2009) par un relâchement prématuré et non contrôlé des câbles non coplanaires. Pour les raisons

citées ci-dessus, l'auteur a rejeté ce test expérimental. Nous souhaitons résoudre ces détails dans l'avenir et utiliser ce test expérimental comme exemple de comparaison.

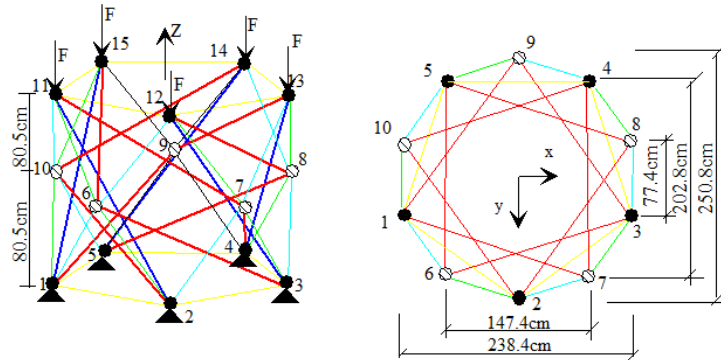


Fig.4.4. Anneau de Tenségrité à Base Pentagonale 'Géométrie et Chargement'

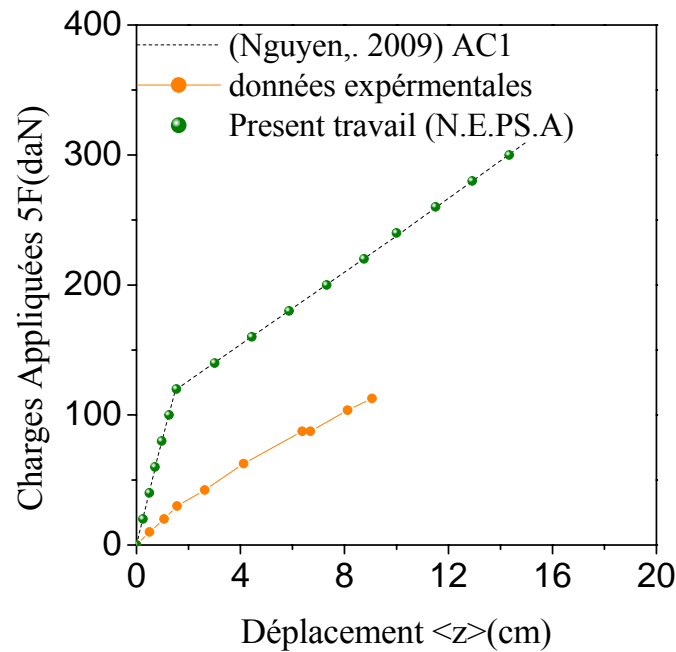


Fig.4.4.a. Valeurs Expérimentales et Numériques des Déplacements <z> de l'Anneau de Tenségrité à Base Pentagonale en Compression

4.3. Application du Modèle de Calcul

Dans La présente partie on travaillera sur trois points bien définis et qui seront traité dans l'ordre suivant

- Étude de l'influence de la **rigidité relative** des éléments câble et barre
- L'effet du **relâchement des câbles** sur le comportement non linéaire des structures à anneau de tenségrité,
- Le couplage entre l'effet du **relâchement et plastification** des câbles sur l'amplification de la réponse non linéaire de ces structures.
- Les étapes 2 et 3, seront effectuées à différents **niveaux d'autocontrainte**

Le premier point est essentiel puisque il nous permettra de faire le choix du rapport de rigidité (barre/câble) adéquat pour réaliser la suite du plan de travail. Les deux points suivant se présenteront essentiellement sous forme d'une étude comparative entre quatre types d'analyses non linéaires: une **Analyse Non-linéaire Elastique (A.N.E)** correspondant à une analyse non-linéarité géométrique avec un comportement élastique du matériau, une **Analyse Non-linéaire Elastique Post-Slackening (A.N.E.PS)** avec prise en compte de la stratégie de câbles relâchés (slackened cables) présentée dans le paragraphe.3.5 (chap.3). Une **Analyse Non-linéaire Elasto-Plastique (A.N.EP)** correspondant à une analyse en non-linéarité géométrique considérant l'effet éventuel de l'évolution dans le domaine élasto-plastique des éléments câbles et enfin une **Analyse Non-linéaire Elasto-Plastique Post-Slackening (A.N.EP.PS)** combinant les non-linéarités géométriques et matérielles avec l'inclusion de l'effet de relâchement de câbles. Il est à noter que les charges appliquées au cours de l'analyse ne dépasseront pas la limite de rupture des câbles.

Pour les différentes configurations d'anneaux de tenségrité, qui seront utilisées dans cette section, les valeurs des vecteurs base d'autocontrainte, des coordonnées des nœuds et les structures relationnelles sont donnés dans le chap. 3 (pour l'anneau à base hexagonale) et dans l'annexe C (pour l'anneau à base carrée et pentagonale). La convention de signe pour les valeurs de l'autocontrainte initiale considérée (Tableau.4.(1-2)) est telle que, on adopte des valeurs négatives pour les câbles «éléments tendus » et positives pour les barres « éléments comprimés ».

N° de l'Élément	Type de l'Élément	S1	S2	S3	S4
1- 16	Câbles Non-coplanaire	-104.2	-312.5	-416.73	-520.9
	Câbles Coplanaire	-252.0	-755.9	-1007.9	-1259.9
17-24	Câbles de base	-100.	-300.	-400.	-500.
25-28	Barres Latérales	280.	840.	1120.	1400.
29-36	Barres Intermédiaires	1158.3	3475.	4633.4	5791.7

Tableau.4.1 Autocontrainte Si (daN) Utilisées pour l'Anneau à Base Carrée

N° de l'élément	Type de l'élément	S5	S6	S7
1-12	Câbles de base	-121.49	-161.99	-202.49
13-36	câbles Non-coplanaire	-137.9	-183.89	-229.87
	câbles coplanaires	- 395.19	-526.93	-658.66
37-48	Barres Intermédiaires	121.86	162.478	203.09
49-54	Barres Latérales	457.07	609.43	761.78

Tableau.4.2. Autocontrainte Initiale Si (daN) Utilisées pour l'Anneau à Base Hexagonale

4.3.1 Influence de la Rigidité Relative des Éléments (Barre /Câbles)

Comme le but essentielle de cette étude est de faire ressortir l'effet que provoquerait le comportement non linéaire partiel des câbles par plastification ou/et par relâchement sur le comportement non linéaire global de toute la structure; on devrait éliminer tout effet provenant du flambement des barres (élément travaillant en compression dans les structures de tenségrité). Ceci est possible par un bon choix des rigidités des éléments constitutifs (barres et câbles).

Pour évaluer l'influence du rapport de rigidité entre les différents éléments, sur la réponse des anneaux de tenségrité, nous avons étudié la réponse d'un anneau de tenségrité à base pentagonale sollicité en compression (Fig.4.5). Les nœuds 1 et 3 sont bloqués dans la direction Z, les nœuds 4 et 5 suivant les directions Y et Z et finalement

le nœud 2 est bloqué suivant X et Z . On a fait varier le rapport de rigidité $E_b A_b / E_c A_c$ dans le même état d'autocontrainte (donné sur le Tableau 4.3) et les mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques données dans le Tableau.4.4.

Le rapport de rigidité a été modifié en jouant sur la section du câble A_c comme montré sur le Tableau 4.5

Câbles de nappes	Câbles coplanaires	Câbles non coplanaires	Barres intermédiaires	Barres latérales
-128	-378	-141	135	436

Tableau 4.3 Valeurs de l'Autocontrainte Utilisée (daN)

Type de l'élément	Barres	Câbles
Section $A(\text{cm}^2)$	3.25	Paramètre variable
Module d'élasticité tangent $E_T (\text{daN}/\text{cm}^2)$	$E_b=2000000.$	$E_c=400000.$
Contrainte limite d'élasticité $\sigma_y (\text{daN}/\text{cm}^2)$	2350.	4800.
Contrainte limite de rupture $\sigma_r (\text{daN}/\text{cm}^2)$	3600.	7500.
Contrainte critique de flambement (daN/cm^2)	1116.9	-

Tableau 4.4. Caractéristiques Géométriques et Mécaniques des Éléments Câbles et Barres

$A_c(\text{cm}^2)$	0.28	0.625	0.955	1.25	1.625
$rap = E_b A_b / E_c A_c$	58	26	17	13	10

Tableau 4.5 Valeurs du Rapport de Rigidité en Fonction de A_c

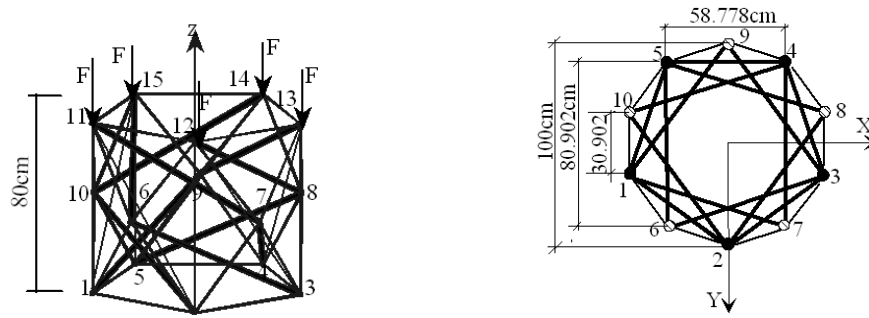


Fig.4.5. Géométrie et Chargement de l'Anneau de Tenségrité à Base Pentagonale

Pour les différentes valeurs du rapport de rigidité (**rap**), les déplacements moyens $\langle z \rangle$ en fonction du chargement sont tracés sur la Fig. 4.5.a. L'augmentation de ce rapport (diminution de la section des câbles) entraîne une diminution sensible de la rigidité de la structure. Mais ce n'est pas le seul résultat à retenir de cette étude ;

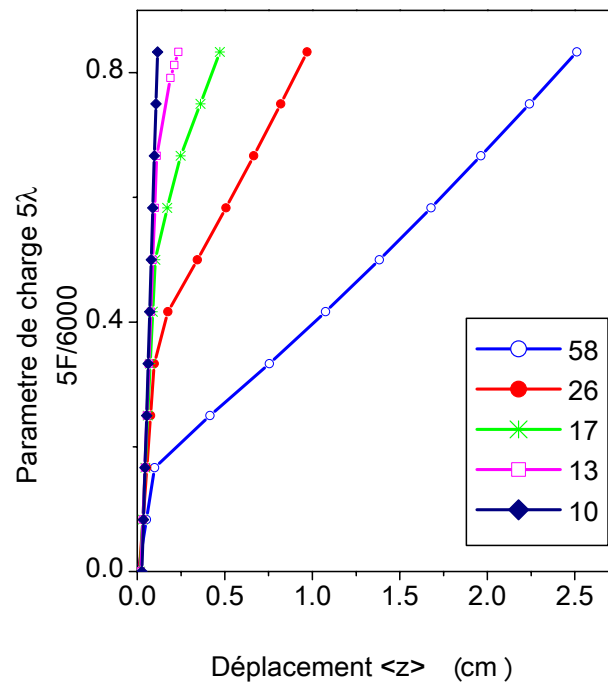


Fig.4.5.a. Courbes de Comportement en fonction de Différents Rapports de Rigidité

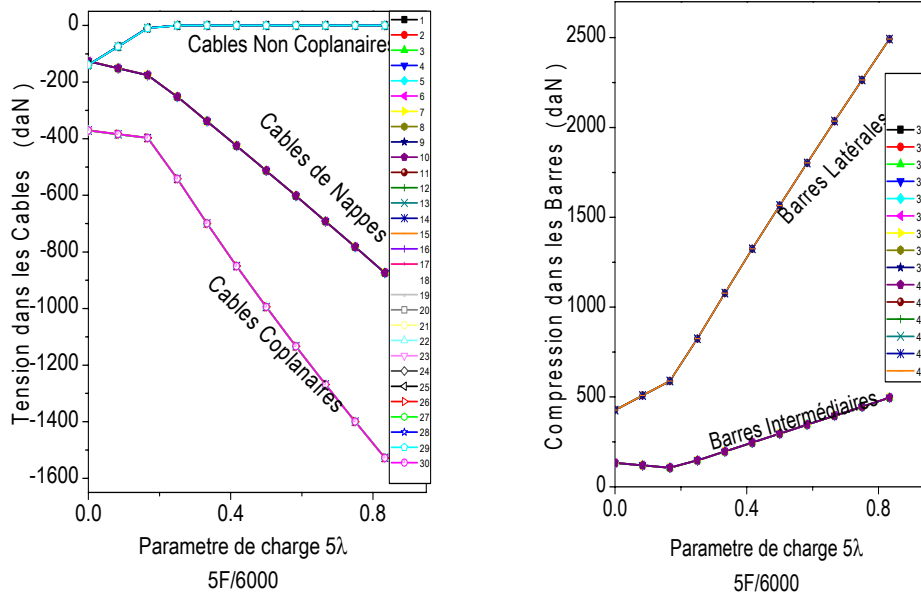


Fig.4.5.b Évolution des Efforts Internes dans les éléments pour rap=58

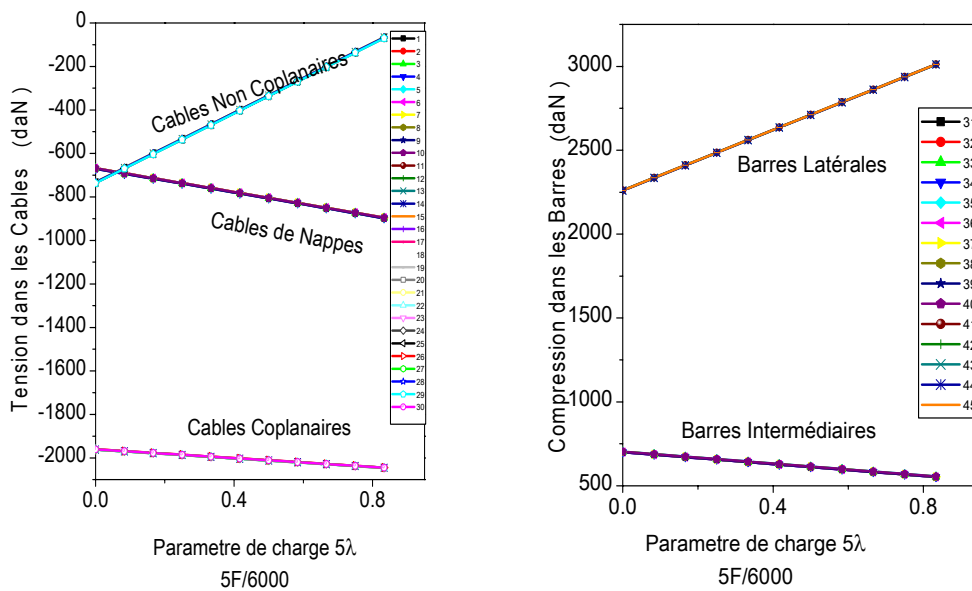


Fig.4.5.c Évolution des Efforts Internes dans les Éléments pour rap=10

Ce qui est encore plus important à souligner, c'est le type de ruine obtenu eu regard au rapport de rigidité considéré. En effet, lorsque la rigidité des câbles est faible par rapport à celle des barres, ce sont eux qui atteignent la limite de sollicitation (relâchement, plastification, rupture), les premiers. Dans le cas du rapport de rigidité, **rap=58** (Fig.4.5.b), la limite de plastification ($F_y=1344\text{daN}$) des câbles coplanaires est atteinte pour un paramètre de charge $5\lambda=0,711$, correspondant à une charge de compression $5F=4280\text{daN}$. Les câbles non coplanaires, subissent le phénomène de relâchement à un niveau de paramètre de charge $5\lambda=0,17$ donc $5F=1023\text{daN}$ en terme de charges de compression, par contre les barres, et jusqu'à une charge de 5000daN ($5\lambda=0,833$) sont loin de la limite critique de flambement qui est de l'ordre de 3629daN .

Aussi pour un rapport de rigidité, **rap=10** (Fig.4.5.c), nous avons pu constater que c'était toujours, les câbles qui avaient atteint leur limite de rupture $F_r=2100\text{daN}$ pour un paramètre de charge $5\lambda=0,833$ (5000daN), alors que les barres nécessitent un chargement encore plus fort pour atteindre leur limite de ruine par flambement.

Nous pouvons exploiter ce résultat dans ce qui va suivre pour focaliser l'effet qu'auront les instabilités locales du câble (plastification et relâchement) sur le comportement d'une structure de tenségrité à base d'anneaux. Cela se fera par le choix d'un rapport de rigidité qui éliminera la probabilité de ruine des barres par flambement.

4.3.2 Effet du Relâchement des Câbles

Dans cette phase de l'analyse du comportement non linéaire des structures à anneaux de tenségrité, on négligera le comportement plastique des composants tendus pour bien mettre en évidence l'effet de la relaxation des câbles (câbles en compression) sur la réponse des structures étudiées. En effet on essaiera de faire une étude comparative entre le comportement en analyse (*N.E.A*) et (*N.E.P.S.A*).

Le résultat obtenue dans la section 4.3.1 qui stipule que: « lorsque la rigidité des câbles est faible par rapport à celle des barres, donc le rapport $\left(\frac{E_b A_b}{E_c A_c}\right)$ est grand, ce sont les câbles qui atteignent leur limite de sollicitation les premiers » nous guide vers le choix d'un rapport égale à 58 pour une section de câble $A_c = 0.28\text{cm}^2$.

cette valeur sera utilisée ainsi que les caractéristiques géométriques et mécaniques données sur le Tableau 4.4 dans toutes les applications qui vont suivre.

4.3.2.1 Application sur des Mono Module

Anneau à Base Carrée en Compression.

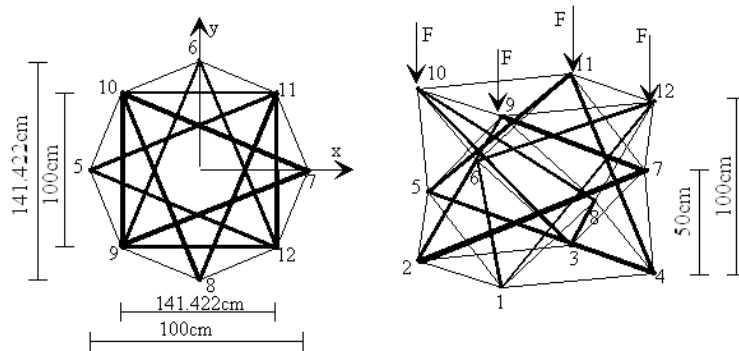


Fig.4.6. Anneau de Tenségrité à Base Carrée en Compression

Les nœuds 1, 2, 3 et 4 (Fig.4.6) sont bloqués suivant les directions X , Y et Z . Un effort F de compression est appliqué aux nœuds 9, 10, 11 et 12.

L'effet du relâchement des câbles à différents niveaux d'autocontrainte (Tableau.4.1) sur le déplacement moyen $\langle z \rangle$ des nœuds chargés est présenté sur la Fig.4.6.a. L'inspection des courbes tracées, révèle que l'analyse non linéaire est nécessaire pour prévoir la géométrie précontrainte initiale (à $F = 0$) et éviter ainsi des erreurs considérables [ABE08]. L'analyse non-linéaire élastique (N.E.A) est fiable jusqu'au moment où le relâchement affecte quelques câbles, en effet les déplacements ne sont plus correctement estimés. Par ailleurs, on peut noter sur la Fig.4.6.a, que l'analyse (N.E.PS.A) montre un rapport direct entre le niveau de l'autocontrainte utilisé, et le nombre de câbles détendus, qui influe directement la souplesse de la structure [BIN01]. Donc, on peut conclure que plus l'autocontrainte introduite est élevée moins l'est le nombre de câbles qui se relâchent aussi bien que la flexibilité de la structure.

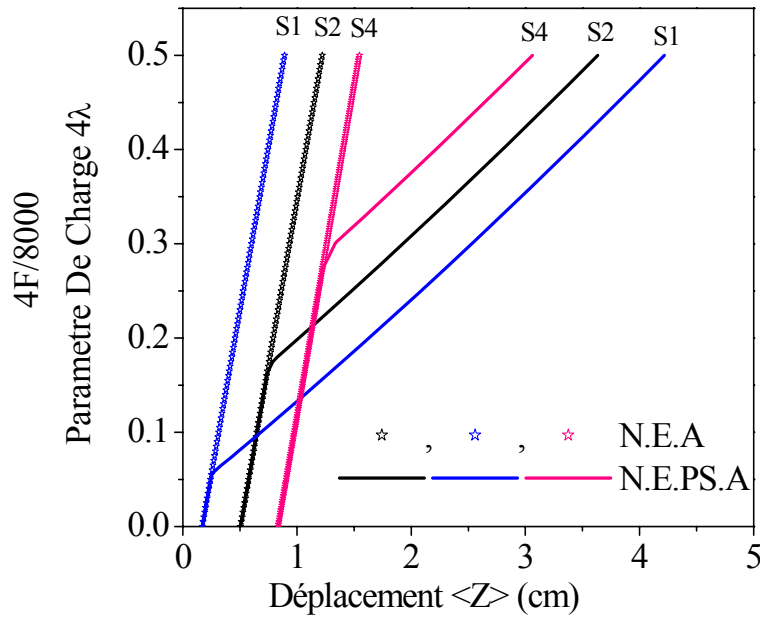


Fig. 4.6.a Effet du Relâchement des Câbles à Différents Niveaux d'Autocontrainte

4.3.2.2 Application sur des Multi Module

Comme indiqué dans le chap. 2, les cellules à anneaux de tenségrité présentent des sections transversales facilitant la génération linéaires de structures de tenségrité (poutres, colonnes) en joignant sommets et arrêtes plusieurs cellules. Les câbles communs à deux modules consécutifs sont influencés par deux états d'autocontrainte donc pour en tenir compte leurs sections seront doublés par rapport aux autres câbles. Dans toute structure étudiée ultérieurement les cellules seront numérotées de $C1$ à Cn (n étant le nombre de cellules dans la structure).

Colonne à base d'Anneaux Carrée en Compression

Il s'agit d'un assemblage de six anneaux à base carrée, constituant une poutre de tenségrité de 600 cm de portée (Fig.4.7.). Cette structure est constituée de 12 nœuds et 196 éléments (72 barres et 124 câbles). Elle est soumise à une charge nodale de compression appliquée aux nœuds 49, 50, 51 et 52, et aux conditions aux limites suivantes: les nœuds 1, 2, 3 et 4 sont fixés dans les directions X , Y et Z (Fig.4.7.).

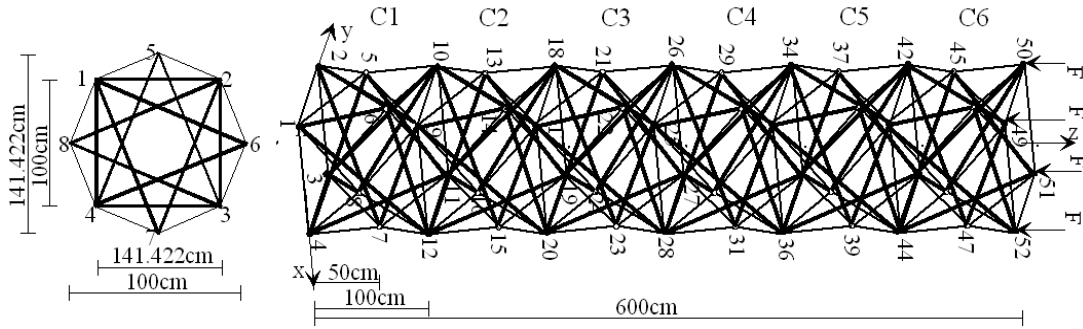


Fig.4.7. Colonne ‘ à Anneaux de Tenségrité à Base Carrée’ en Compression

Le vecteur d’autocontrainte S4 (Tableau 4.1) assurant la stabilité de la structure est utilisé dans la présente application. Les déplacements $\langle Z \rangle$ des nœuds 49, 50, 51 et 52 fonction de la charge sont calculés une fois sans prendre en considération ni le phénomène de relâchement des câbles ni leur comportement inélastique (N.E.A) puis une autre fois en introduisant uniquement la stratégie d’élimination des éléments relâchés (câbles) (Fig.4.7.a).

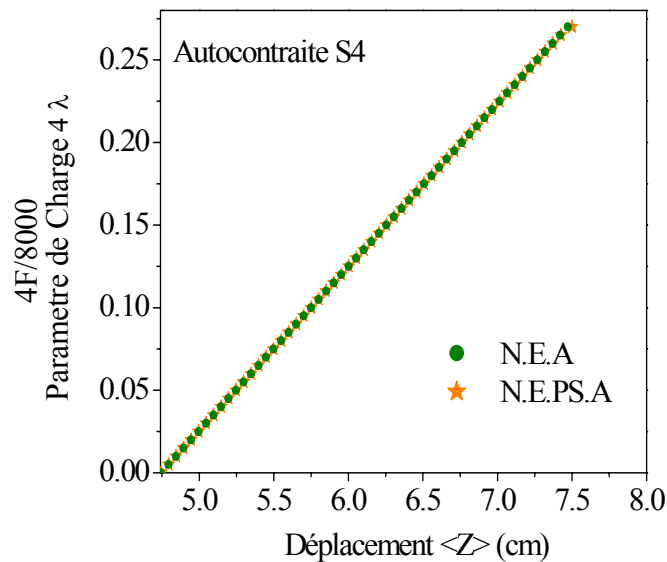


Fig.4.7.a. Effet du Relâchement des Câbles sur le Comportement de la Structure

Il est à noter que les courbes de la Fig. 4.7.a résultant de l'analyse non linéaire avec et sans relâchement sont identiques. Pour des niveaux de charges inférieures à $4\lambda=0.275$ ($2200daN$) le relâchement ne se produit pas (tous les câbles sont tendus). Il a été vérifié que pour des charges plus élevées, le comportement de la structure est instable et ne peut être prédit. En outre, il a été constaté qu'à partir du seuil de chargement suscité ($2200daN$), tous les câbles non coplanaires dans les six modules de la structure ont tendance à se relâcher, voir Figs.4.7.(b-d) pour les modules *C1*, *C2* et *C3*. Les courbes tracées pour *C2* et *C3* sont valides pour les modules *C4*, *C5* and *C6*. Il est intéressant de constater à partir des Figs.4.7.(b-d) que, non seulement le nombre de câbles non coplanaires relâchés est élevé, mais tous ont aussi tendance à se relaxer à la même charge estimée à environ $2200daN$. En conséquence, la rigidité diminue instantanément et la redistribution des efforts internes est empêchée et la structure perd sa stabilité par relâchement des câbles.

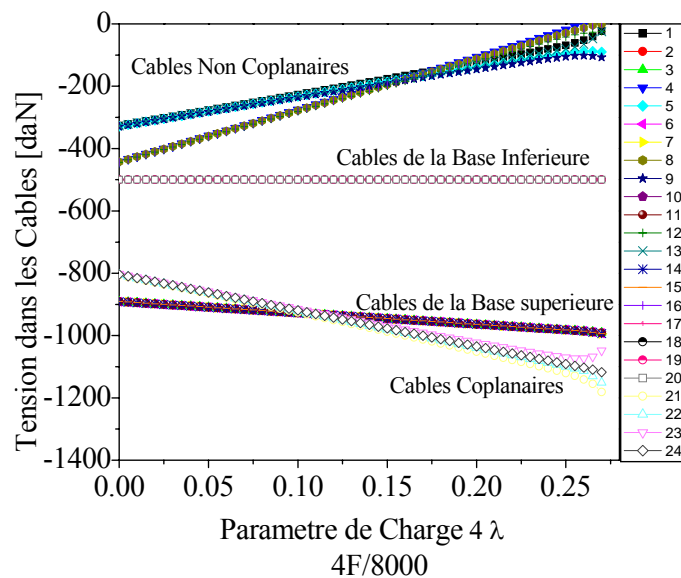


Fig.4.7.b Tensions dans les Câbles du module C1

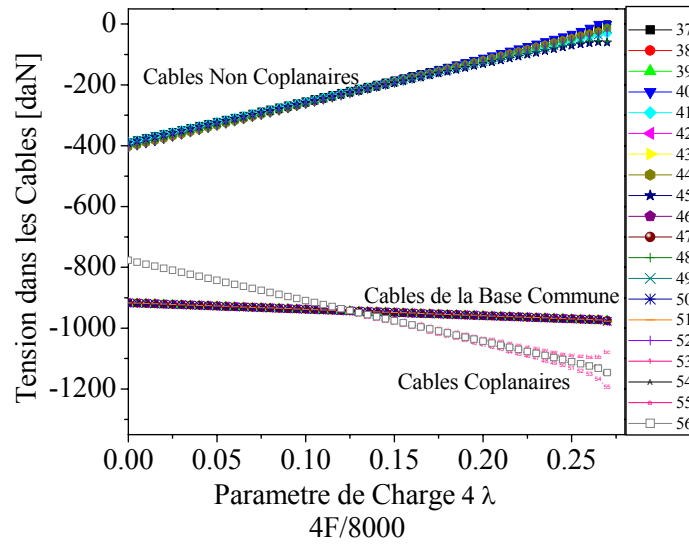


Fig.4.7.c Tensions dans les Câbles du module C2

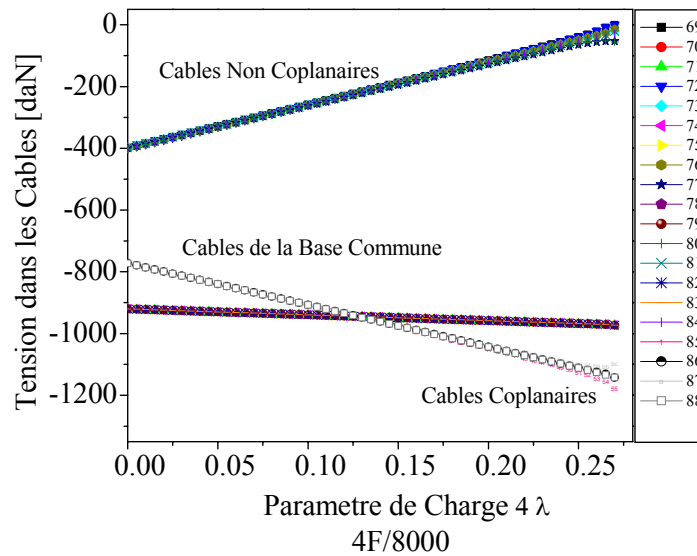


Fig.4.7.d Tensions dans les Câbles du module C3

Poutre à Anneaux à Base Hexagonale en Flexion

Une poutre de 320 cm fixée à sa base, libre en son sommet est conçue pour tester l'assemblage de 4 anneaux à base hexagonale en compression Fig.4.8. Cette structure est constituée de 54 nœuds et 198 éléments (126 câbles et 72 barres). Les coordonnées des nœuds sont générées en utilisant le Tableau3.1 du Chap.3. Les charges de flexion

sont appliquées selon la direction X sur le bord libre de la poutre représenté par les nœuds 49, 50, 51, 52, 53 et 54 (Fig.4.8). Les conditions aux limites sont appliquées telles que les nœuds 1, 2, 3, 4, 5 et 6 sont tous bloqués suivant X, Y et Z. Les valeurs de l'autocontrainte utilisées sont indiquées dans le Tableau4.2.

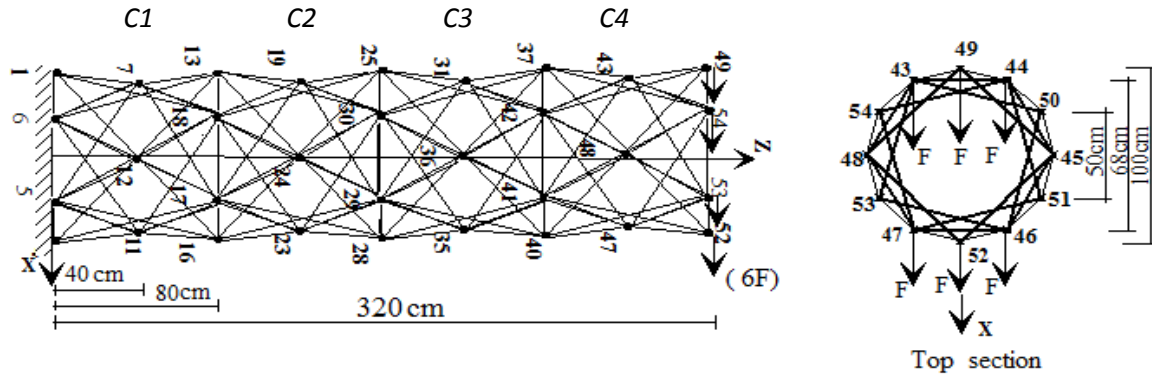


Fig.4.8. Mode de Chargement en Flexion de la Poutre d'Anneaux à Base Hexagonal

Les déplacements $\langle x \rangle$ du bord libre fonction de la charge croissante et pour différents niveaux d'autocontrainte sont présentés sur la Fig.4.8.a. il est à relever qu'après une analyse élastique non linéaire (N.E.A), le niveau d'autocontrainte n'a aucun d'effet sur le comportement de la structure; tandis que pour une analyse non linéaire élastique après relâchement des câbles (N.E.P.S.A), le déplacement du bord libre de la structure augmente avec la diminution du niveau de l'autocontrainte appliquée. Il peut donc être conclu que la structure devient plus rigide à fur et mesure que le niveau d'autocontrainte introduit est plus élevé.

Pour plus de détails sur l'effet du relâchement des câbles 'the post slackening effect' ; le nombre de câbles relâchés au cours du chargement pour différents niveaux d'autocontrainte, est présenté sur la Fig.4.8.b. Le nombre de câbles relâchés augmente lorsque l'autocontrainte diminue. Cette évolution peut également être décrite par une fonction polynomiale du second ordre en fonction du chargement Fig.4.8.c ; Pour des charges croissantes de plus en plus élevées, l'effet de plastification des câbles devient important et leur tension tend vers la limite de rupture F_r ; à ces niveaux de charges, le nombre de câbles détendus est presque constant. L'effet du relâchement effet est plus marquant pour les faibles vecteurs d'autocontraintes, comme pour le cas de S5 et S6 dans la Fig.4.8.b. et Fig.4.8.c.

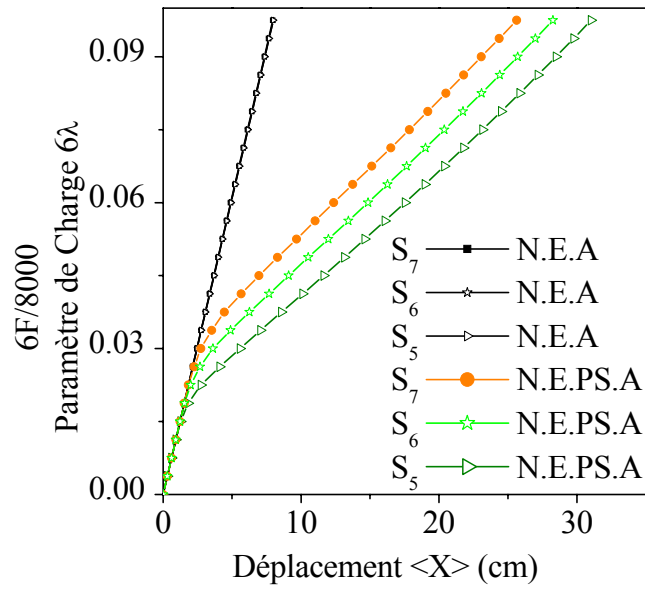


Fig.4.8.a. Déplacements X de l'extrémité libre à Différents Niveaux d'Autocontrainte

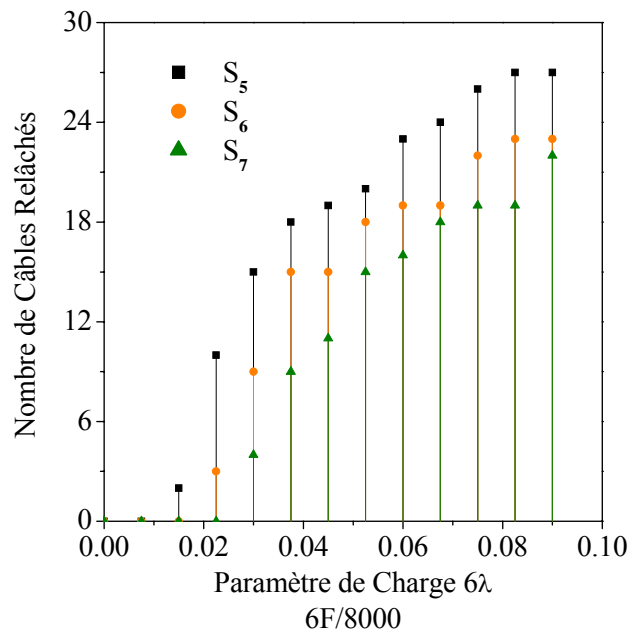


Fig.4.8.b. Effet du Niveau de l'Autocontrainte sur le Nombre de Câbles relâchés en Cours de Chargement

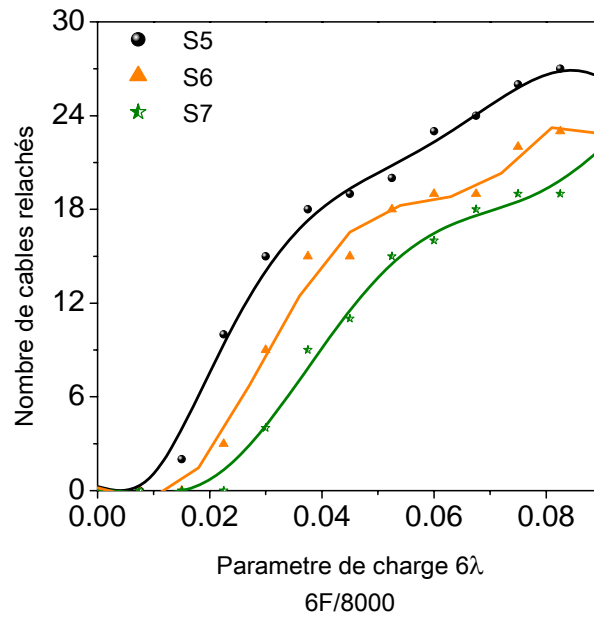


Fig.4.8.c. Évolution du Nombre de Câbles Relâchés

En fonction du Niveau de l'Autocontrainte en Cours de Chargement

4.3.3 Effet Couplé du Relâchement et de la Plastification des Câbles

4.3.3.1 Application sur des Mono Module

Mono Anneau à Base Hexagonale en Traction-Compression

Dans cette section, les résultats sont obtenus à partir de l'application de charges en traction-compression sur un anneau à base hexagonale comme représenté sur la Fig.4.9. Les six nœuds de la base (1, 2, 3, 4, 5 et 6) sont bloqués dans les directions X, Y et Z. Les charges de compression ou de traction concentrées sur les nœuds 13, 14, 15, 16, 17 et 18 dans la direction Z sont affichées sur la Fig.4.9.a. en fonction des valeurs de déplacements moyennes $\langle z \rangle$ leur correspondant.

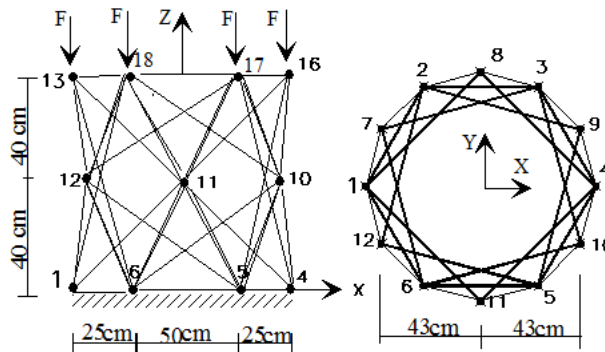


Fig.4.9. Mode de Chargement du Mono-module 'Anneau à Base Hexagonale'

L'anneau à base hexagonale ne présente aucune évolution dans le domaine des déformations plastique que ce soit pour la compression ou la traction. Cette constatation est relevée d'après l'observation de La Fig.4.9.a qui montre un comportement identique de la structure pour le cas de l'analyse *N.E.A* comme pour l'analyse *N.E.P.A*. Ceci peut être expliqué par l'examen de l'évolution des forces internes dans les éléments (barres et câbles) au cours du calcul. En effet, durant le chemin de chargement, les efforts dans les barres évoluent vers la traction que les câbles ont tendance à être relâché.

D'après la Fig 4.9.a, il serait important de relever que compte tenu des différents niveaux d'autocontraintes S5, S6 et S7. Il a été observé que ce paramètre (niveau d'autocontrainte) a un effet négligeable sur le comportement de la structure en tension, tandis qu'en compression la diminution du niveau d'autocontrainte rend la structure plus flexible.

En effet, lorsque le niveau de l'autocontrainte diminue, le nombre de câbles relâchés augmente. Pour des valeurs croissantes de la charge, la structure présente de faibles déplacements et un comportement linéaire pour les différents niveaux d'autocontrainte appliqués (Fig.4.9.a). La rigidité de la structure se justifie par le nombre important de barres utilisé dans ces structures en anneau par rapport à d'autres structures de tensegrité (quadruplex, simplex, et octaèdre) et leur disposition (les barres) en circuit fermé.

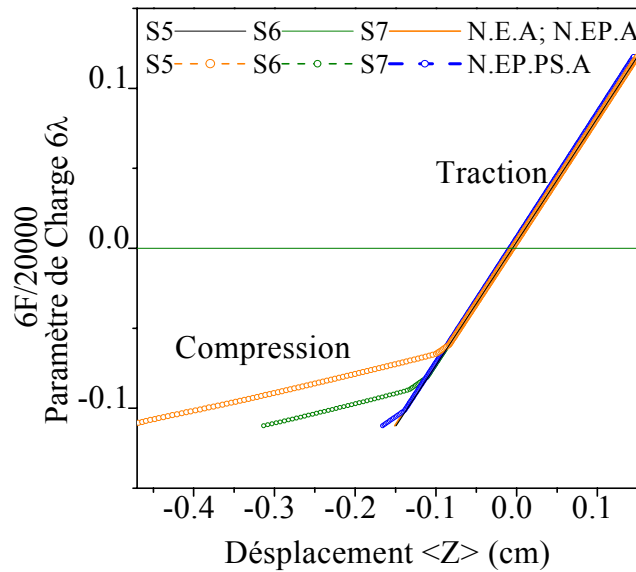


Fig 4.9.a. Déplacements des Nœuds de la base supérieure dans la Direction Z
 4.3.3.2 Application sur des Multi Module

Poutre (Anneau à Base Hexagonale) en Flexion

Dans cette section, on reprendra le cas de la Fig.4.8 (poutre en flexion) mais cette fois en considérant l'effet global et simultanée du relâchement et de plastification des câbles sur le comportement de la structure en flexion. Un seul niveau d'autocontrainte S7 (Tableau4.2) est utilisé dans cette application.

Il est bien évident sur la Fig.4.10.a que l'effet plastique prend effet à $6\lambda = 0,071$, qui correspond à une charge totale de flexion appliquée sur les six nœuds d'extrémité égal à $568daN$. L'ajout de l'effet de plastification de certains câbles et de la relaxation d'autres au niveau de l'analyse (N.EP.PS.A) a eu pour effet d'amplifier les valeurs des déplacements $\langle x \rangle$ en comparaison avec le cas où seul l'effet du relâchement des câbles est considéré (N.E.PS.A) (Fig. 4.10.a).

Sur la Fig.4.10.b, sont montrés (lors de l'application de l'analyse (N.EP.PS.A)), les câbles relâchés (en bleu) qui sont tous supposés être des câbles non coplanaires. Elle (Fig.4.10.b) montre également, les câbles ayant développé des déformations plastiques (en rouge). Il a été constaté que les câbles plastifiés peuvent être observés parmi les câbles coplanaires ou non coplanaires et semblent être concentrés dans les cellules C1 et C2.

Les câbles coplanaires et non coplanaires représentent les 2/3 du nombre total de câbles dans le module donc leur analyse servirait certainement pour une meilleure compréhension de la réponse de la structure étudiée. Pour ce faire, une analyse détaillée des forces internes de tension dans les câbles latérales (coplanaires et non coplanaires) du module *C1* (représentant la zone de tensions élevées) est effectués. Les Figs.4.10(c-e) montrent les variations des tensions internes en fonction du chargement lorsque l'*N.E.A*, *N.E.P.S.A* et *N.EP.P.S.A* sont appliquées. La Fig.4.10.c présente deux fuseaux de courbes bien distincts, représentant la tension dans les câbles coplanaires et non coplanaires. D'après ces tracés (Fig.4.10.c) il est notable que la variation de la tension interne est importante dans les câbles non coplanaires.

En fait, tant que l'effet de relâchement n'est pas pris en compte dans l'*N.E.A*, les câbles entrant en compression, affichent des tensions internes positives, comme indiqué dans la Fig.4.10.c, et ne sont pas exclus du processus de calcul. L'introduction de la technique de contrôle du relâchement illustrée dans la section 3.6 du Chap.3, se manifeste par la mise en évidence de nombreux câbles détendus (tension =0) comme le montre la Fig. 4.10.d. Il est notable sur cette même figure que l'assouplissement de certains câbles entraîne une augmentation significative de la tension dans d'autres câbles, ce qui traduit le principe de la redistribution des forces internes.

Si *N.EP.P.S.A* est considérée, comme montré sur la Fig.4.10.e, l'effet simultané de relâchement et de plastification des éléments câble produit une chute dans les valeurs des tensions internes par rapport aux valeurs indiquées sur la Fig.4.10.d. Ceci peut être justifié par le fait que les câbles qui se plastifient perdent en résistance et leur rigidité devient moindre, Par conséquent, seuls les câbles avec des tensions internes dépassant la limite de plastification F_y sont concernés. Ces câbles peuvent être facilement identifiés sur la Fig.4.10.e en référence à la Fig.4.10.d.

En résumé, les câbles relâchés et plastifiés montrés sur la Fig.4.10.b sont reproduits dans le Tableau4.6 avec leurs charges correspondantes relativement à leur emplacement dans la structure (N° du module).

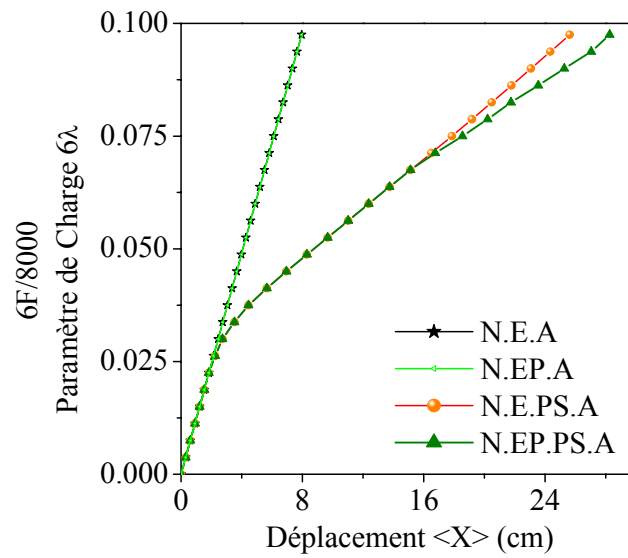


Fig. 4.10.a. Effets Individuel et Couplé du Relâchement et de la Plastification des Câbles sur le Comportement de la Structure

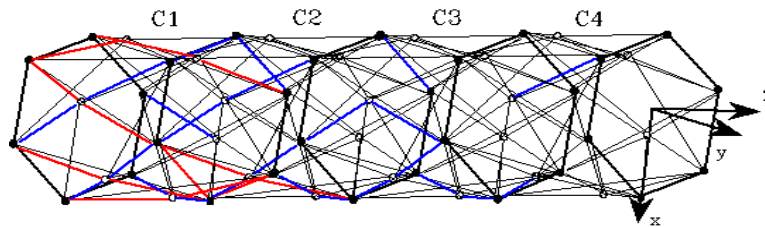


Fig. 4.10.b Position des Câbles Relâchés (en bleu) et Plastifiés (en rouge) si l'analyse N.E.P.S.A est considérée

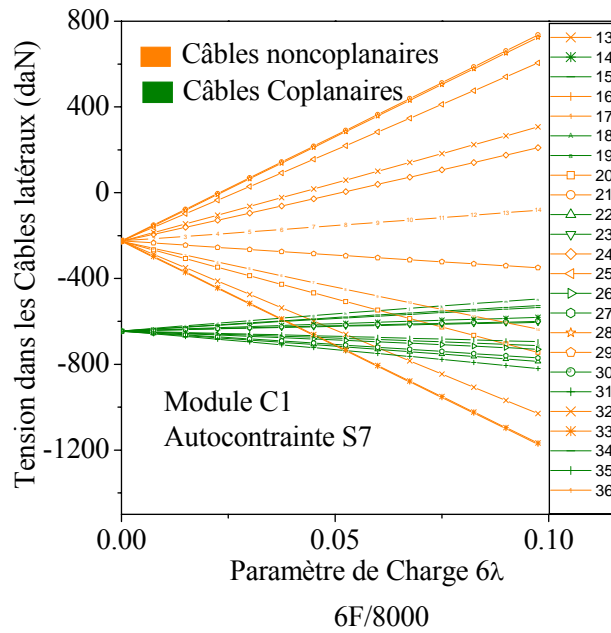


Fig. 4.10.c Variation de la Force de Tension dans les Câbles latéraux du Module C1 quand l'analyse 'N.E.A' est considérée

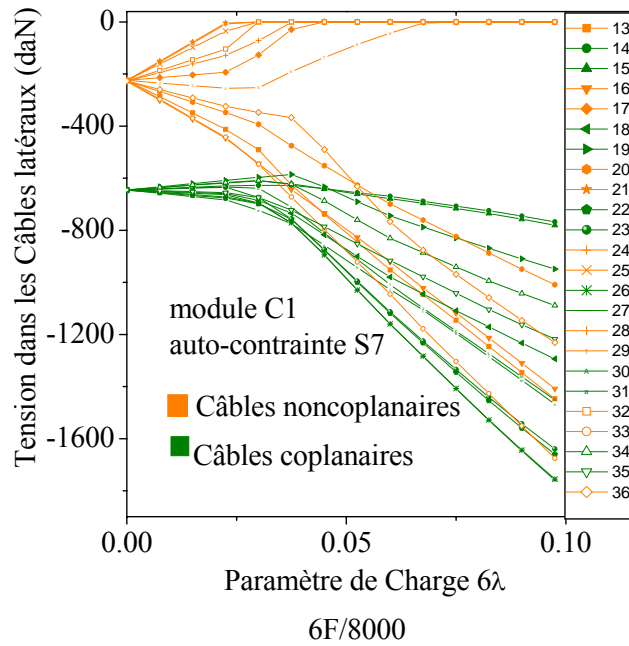


Fig. 4.10.d Variation de la Force de Tension dans les Câbles latéraux Du module C1 lorsque la N.E.P.S.A est considérée

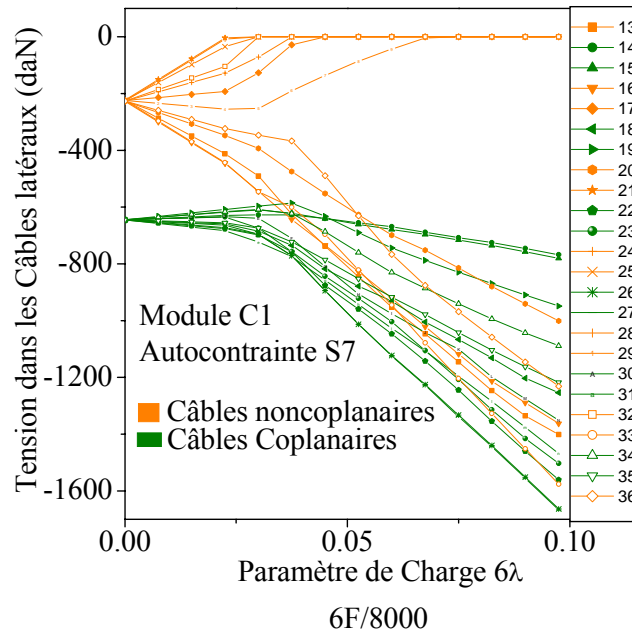


Fig. 4.10.e Variation de la Force de Tension dans les Câbles latéraux
Du Module C1 lorsque la N.EP.PS.A est considérée

charge [daN]	Localisation des câbles reaches				Localisation des câbles plastifiés			
	C1	C2	C3	C4	C1	C2	C3	C4
240	21,25,28,32	–	–	–	–	–	–	–
300	7,12	69,73,76	–	–	–	–	–	–
360	24	80	–	–	–	–	–	–
420	17	72	117,121,124	–	–	–	–	–
480	–	–	127	–	–	–	–	–
540	–	55	–	176	9	–	–	–
600	29	–	–	–	26,27	–	–	–
660	–	–	–	–	22,23,33	–	–	–
720	–	–	125	169	–	74,75	–	–
780	–	–	120	–	10,13,16,30,31	–	–	–

Tableau 4.6 Niveau de Chargement Causant le Relâchement et la Plastification de Câbles

Console (Anneau à Base Hexagonale) en Torsion

Dans cette section, la torsion du multi-module à anneau à base hexagonale est testée. Les six premiers nœuds sont bloqués suivant les axes ; X , Y et Z . Les charges appliquées sont concentrées aux nœuds 50, 51 et 53, 54 comme indiqué sur la Fig.4.11. Le niveau d'autocontrainte initiale S7 est pris en compte dans ce calcul.

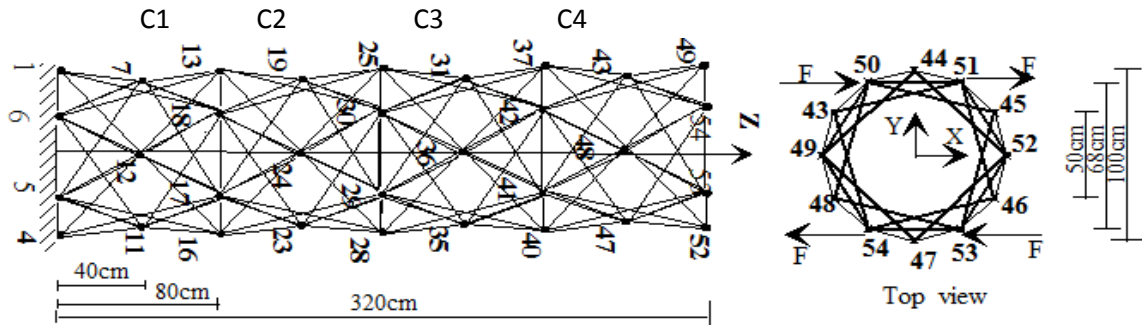


Fig. 4.11. Géométrie et Chargement du multi-module 'Anneau à Base Hexagonale'

La Fig.4.11.a. affiche l'angle de torsion (θ) en fonction du moment de torsion (M_t), à travers l'application de différents types d'analyses. Il est bien visible (Fig.4.11.a) que l'effet de relaxation est le premier à apparaître après relâchement des premiers câbles (103 et 106) appartenant au module $C3$ sous l'effet de $M_t = 3.87kN$. Au-delà de ce niveau de chargement, les câbles 152, 155, 158 et 170 du module $C4$ (Fig.4.11(c-d)) sont également détendus.

Concernant l'effet de plastification, la Fig.4.11.e montre que dans les cellules 1, 2 et 3, tous les câbles affichent un comportement élastique au moment où les câbles 162 et 164 du module $C4$ sont les premiers à introduire le seuil plastique pour une valeur de moment $M_t = 9.46kN.m$. La Fig.4.11.d révèle que 8 câbles ont subi des déformations plastiques: câbles 153, 156, 162, 163, 164, 174, 175 et 176.

Comme le montre la Fig.4.11.e, la réponse de la structure à la charge de torsion est la plus importante dans le module $C4$ où y sont concentrés presque tous les câbles relâchés (en bleu) et plastifiés (en rouge). En comparant les Fig.4.11.d et 4.11.c, après avoir introduit l'effet de plastification des câbles, on peut constater qu'il y a une faible variation des efforts internes. Cette variation se révèle être assez importante lorsque l'effet relâchement est pris en compte dans la Fig.11.c par rapport à la Fig.11.b.

L'observation des échantillons de valeurs θ et des tensions internes dans certains câbles pour les valeurs des moments de torsion $M_t = 14.62kN.m$ et $M_t = 15.48kN.m$, résumées dans le Tableau.4.7; révèle qu'une analyse non linéaire élastique de systèmes de tenségrité doit être écartée. Une telle méthode ne permet pas de prédire correctement ni les valeurs des angles de torsion ni les tensions internes. Une analyse non linéaire élastique après relâchement (*N.E.P.S.A*) est fiable jusqu'à ce que certains câbles plastifient, à ce moment, les déplacements et les tensions internes ne sont plus correctement estimés. Il est également intéressant d'observer d'après le Tableau.4.7 qu'avec une *N.E.P.S.A* Analysis, l'angle en torsion (θ) est le plus élevé, tandis que la tension interne est la plus faible. Il est compréhensible que cette diminution concerne la tension des câbles avec des tensions internes supérieures à la limite de plastification.

		Tension dans les câbles (daN)			
$M_t(kN.m)$	Θ	câble 153	câble 156	câble 164	câble 176
14.62	5.97948	1437.6089	1437.6089	2003.6434	2003.6434
	6.79208	1387.5481	1387.5481	1992.2706	1992.2706
	7.1551	1287.5481	1370.933	1889.4082	1850.2706
15.48	6.3471	1519.24609	1519.24606	2117.05076	2117.0507
	7.18232	1453.0466	1453.046	2093.8527	2093.8527
	7.64675	1353.0466	1420.434	1971.0622	1950.2

Table.4.7. Angle de Torsion θ et Tensions Internes pour deux Valeurs ' M_t '

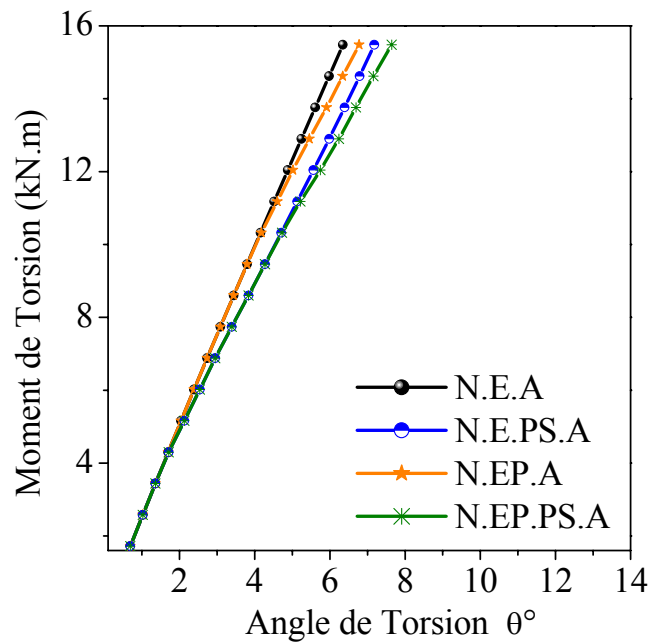


Fig.4.11.a. Évolution de l'Angle de Torsion à travers Différentes Analyses

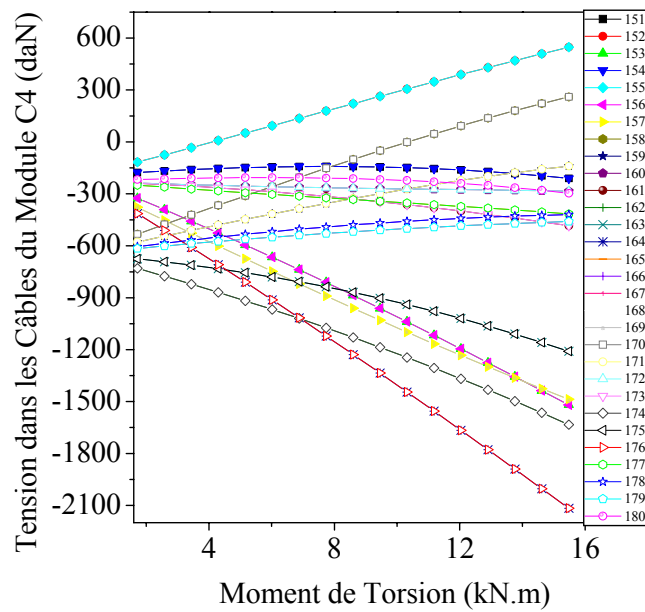
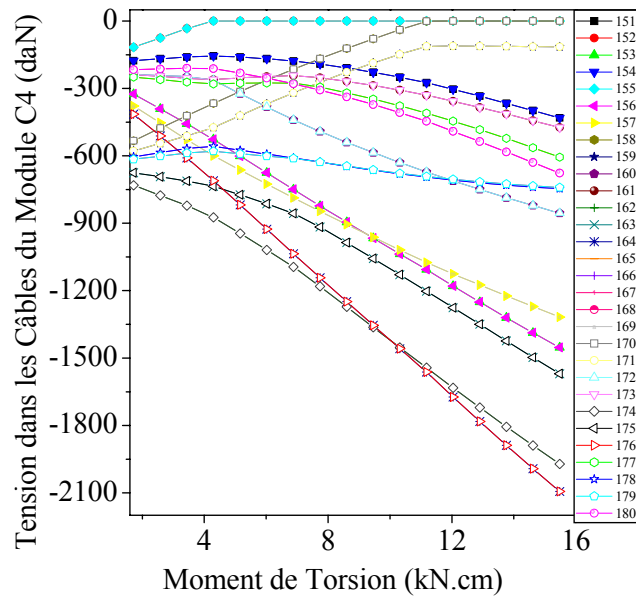
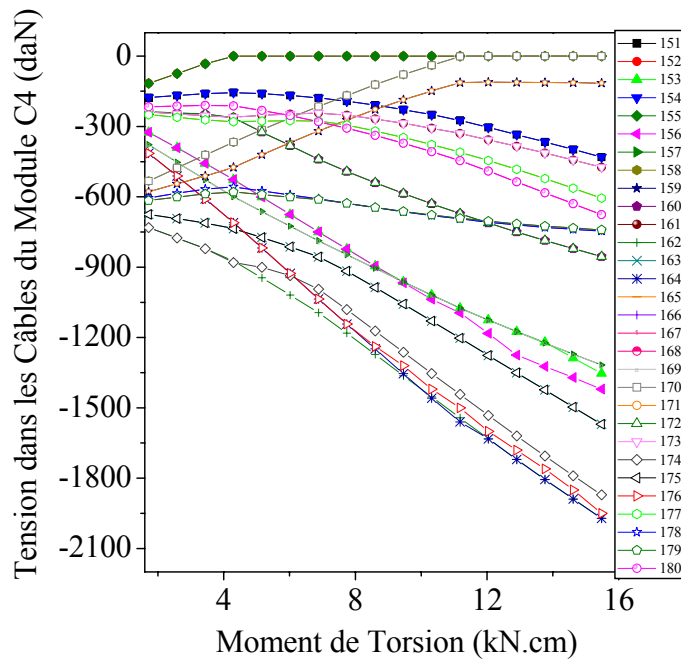


Fig.4.11.b. Forces de Tension dans les Câbles du Module C4 considérant N.E.A



**Fig.4.11.c. Forces de Tension dans les Câbles
du Module C4 considérant N.E.P.S.A**



**Fig.4.11.d. Forces de Tension dans les Câbles
du Module C4 considérant N.E.P.S.A**

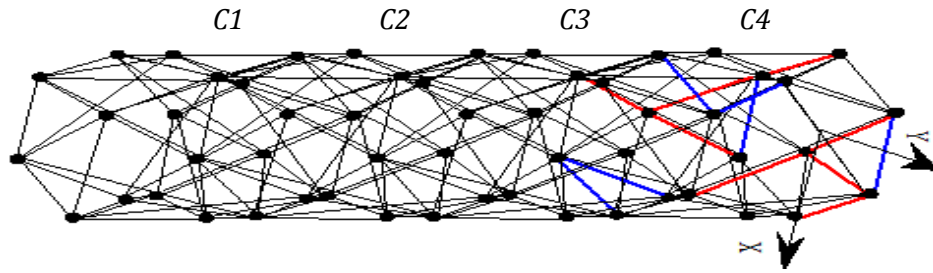


Fig.4.11.e. Positions des Câbles Relâchés (en bleu) et Plastifiés (en rouge)

Quand l'analyse N.EP.PS.A est considérée

4.4. Conclusion

L'efficacité du modèle de calcul proposé a été vérifiée avec succès en comparaison avec certaines applications numériques existantes. Tandis que la validation par rapport à des données expérimentales ne fut pas possible par manque de données (géométrique et mécanique) des structures expérimentées trouvées dans la littérature.

Comme applications numériques, le comportement de structures à base d'anneau de tensegrité (à bases hexagonal, pentagonal, carrée) au-delà de niveaux de chargement extérieurs provoquant le relâchement et la plastification de câbles a été analysé par l'étude d'exemples de structures à cellule unique ou multi cellule sous différentes sollicitations.

Les résultats ont été présentés sous forme d'une comparaison entre quatre types d'analyses non-linéaires, à savoir l'analyse non linéaire élastique (N.E.A), l'analyse non linéaire élastique après relâchement (N.E.PS.A), l'analyse non linéaire élasto-plastique (N.EP.A) et finalement l'analyse non linéaire élasto-plastique après relâchement (N.EP.PS.A). L'objectif principal de cette comparaison est bien entendu

de pouvoir justifier et mesurer l'apport de chaque hypothèse introduite dans le modèle proposé.

L'interprétation et l'analyse de l'ensemble des résultats, nous a permis de tirer les conclusions suivantes:

- L'effet de relâchement des câbles est inévitable même à de faibles niveaux de chargement. Donc il doit forcément être considéré dans l'analyse de toute structure comptant des câbles.
- L'effet du relâchement sur les déplacements nodaux est prédominant comparé à celui de la plastification des câbles. Dans la plus part des cas étudiés, la réponse de la structure est affectée par l'effet de relâchement avant celui de la plastification.
- Le comportement élasto-plastique des structures, sujet de la présente étude, a été confirmée dans (*N.E.P.A*) par comparaison avec le comportement élastique (*N.E.A*), sauf dans le cas d'une compression où la force de tension dans les câbles reste inférieur a la limite de plastification et le reste sous chargement croissant jusqu'à l'effondrement de la structure par relâchement d'un grand nombre de câbles.
- L'inclusion de l'analyse non linéaire matérielle a généré une diminution au niveau des tensions internes (câbles). Ceci suggère une optimisation dans le dimensionnement des éléments de structure.

Comme synthèse générale, on peut affirmer que la modélisation des anneaux de tenségrité en utilisant une analyse non linéaire incluant le relâchement et la plastification des câbles *N.E.P.S.A* est une bonne approximation pour reproduire la réponse la plus proche du comportement réel de la structure analysée.

Conclusion Générale

- **Conclusion Générale**

Les anneaux de tensegrité sont des inventions architecturales très réussies qui peuvent être classés 'non-contiguous strut systems'.

Dans les anneaux de tensegrité, les barres non seulement entre en contact mais de plus formes des circuits fermés permettant de réaliser des configurations de tensegrité d'une rigidité considérable, comparés aux configurations de tensegrité classiques (le simplexe, le quadruplex, l'octaèdre expansé..) caractérisés par une grande souplesse.

Pour avoir une meilleure connaissance des propriétés mécaniques de ces structures innovantes (Anneau de Tensegrité), un modèle numérique a été proposé. Il associe les non-linéarités matériel et géométrique adoptant une Formulation Lagrangienne Actualisée (F.L.A) des équations non-linéaires d'équilibre nécessaire pour régir le comportement des anneaux de tensegrité, témoignant une importante flexibilité. Ces équations ont été utilisées avec une technique incrémentale itérative (la technique de pilotage en longueur d'arc imposée), qui permet de reproduire toute la courbe de comportement (charge-déplacement) passant les points limites qu'ils soient de charge ou de déplacement.

L'effet du relâchement, de la plastification des câbles et du niveau de l'autocontrainte sur le comportement non linéaire des anneaux de tensegrité a été considéré. Le modèle de calcul a été programmé sur la base du principe des éléments finis, dans un programme spécialement dédié à l'étude des systèmes de tensegrité couplant entre la formulation de l'élément câble et l'élément barre.

La fiabilité du modèle de calcul proposée a été validé avec succès en comparaison avec certaines applications numériques existant dans la littérature. Cependant la comparaison avec des data expérimentales recueillis à partir de tests effectués sur des structures de tensegrité, n'était pas possible, vu le manque de données géométriques et mécaniques nécessaires pour simuler ces tests numériquement.

Dans les applications numériques, le comportement des différents anneaux de tenségrité (introduits par cette thèse), au-delà de certaines limites de charges extérieures provoquant le relâchement et la plastification de câbles a été analysé soit en considérant le comportement du mono-module ou de structures constituées par l'assemblage de plusieurs modules (anneaux) sous différentes sollicitations.

Les résultats ont été présentés sous forme d'une comparaison entre quatre types d'analyses non-linéaires, à savoir ; l'analyse élastique non linéaire (N.E.A), l'analyse élastique non-linéaire post-slackening (relâchement), 'N.E.PS.A', l'analyse élasto-plastique non linéaire (N.EP.A) et finalement l'analyse non-linéaire élasto-plastique post-slackening (relâchement), 'N.EP.PS.A'.

Sur la lumière des résultats et discussions étalés ci-dessus, les conclusions suivantes ont été synthétisées:

1. La variation du rapport de rigidité entre les éléments barres et câbles

$\left(E_b A_b / E_c A_c \right)$ a révélé une influence certaine sur le comportement de ces

structures telle que ;

- L'augmentation de ce rapport (par diminution de la section des câbles) entraîne une diminution sensible de la rigidité de la structure,
 - Les câbles atteignent leurs limites de sollicitation les premiers (relâchement, plastification, rupture) lorsqu'on leur affecte une rigidité faible par rapport à celle des barres.
2. Le phénomène de relâchement des câbles est inévitable.
 - Il se manifeste à des niveaux de chargement faible,
 - Il a un effet certain sur la flexibilité de structures à câbles et peut même causer leur ruine si le nombre de câbles détendus est important.

Donc la prise en compte d'une stratégie de contrôle de ce phénomène dans tout code de calcul est impérative.

3. L'effet du relâchement des câbles sur les déplacements nodaux est dominant par rapport à l'effet de leur plastification. Dans certains cas, la réponse de la

structure est affectée par l'effet de relâchement bien avant la manifestation d'éléments subissant des déformations dans le domaine plastique.

4. Le comportement élasto-plastique des structures, sujets de l'étude, a été confirmé dans (N.EP.A) par comparaison avec le comportement élastique (N.E.A), sauf dans le cas de la sollicitation en compression où la force de tension interne dans les câbles est restée inférieure à la force élastique limite jusqu'à l'effondrement de la structure provoquée par le grand nombre de câbles relâchés.
5. L'inclusion de l'analyse non-linéaire matérielle a généré une diminution des tensions internes. Ceci suggère une optimisation dans le dimensionnement des éléments de la structure (Optimisation du poids)

comme conclusion finale, on peut affirmer que l'étude des anneaux de tensegrité en utilisant une analyse non linéaire combinée (Géométrique et Matérielle), sans omettre le phénomène de relâchement des câbles donc utilisant N.EP.PS.A, est une bonne approximation pour reproduire la réponse qui nous rapproche le mieux du comportement réel de ces structures.

Perspectives

Les résultats obtenus dans cette thèse ouvrent plusieurs voies en perspectives ;

- Il serait intéressant d'appliquer l'outil d'étude de comportement développé, dans le domaine de la biomécanique (étude de la mécanique du cytosquelette),
- Considérer en plus du relâchement des câbles, l'effet de leur rupture (en poussant le chargement au-delà de leur limite de rupture) ainsi que le flambement des barres en compression, afin d'étudier la ruine progressive des structures de tensegrité.
- L'étude de l'homogénéisation des structures de tensegrité en Analyse non-linéaire.
- Développer le présent modèle de calcul en considérant l'influence du temps sur la chute de l'autocontrainte à travers divers phénomènes tels la variation de température, le fluage et la fatigue (notamment sous charges cyclique)

ANNEXES

A. Autocontrainte

A.1 Obtention des Bases des États d'Autocontrainte et des Mécanismes

Pour déterminer la base des s états d'autocontrainte $[T]$ et des m mécanismes $[M]$ pour un système réticulé à composants de rigidité bilatérale, nous pouvons utiliser la formulation de l'équilibre avec un chargement extérieur nul (Eq.A.1) et appliquer la méthode proposée par S. Pellegrino [PEL86]:

$$[A]\{T\} = \{0\} \quad (\text{A.1})$$

Cette méthode transforme la matrice d'équilibre $[A]$ (à N lignes et b colonnes) en une forme échelonnée, ayant ses termes nuls sur la partie inférieure, au moyen d'une élimination de Gauss et d'opérations élémentaires sur les lignes. Les opérations sont aussi effectuées sur les lignes d'une matrice identité $[I]$ adjointe (Fig. A.1).

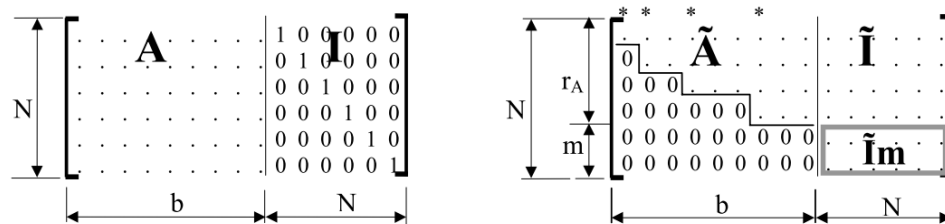


Fig. A.1 Matrice augmentée $[A | I]$ avant et après la transformation $[\tilde{A} | \tilde{I}]$

Les colonnes ayant un pivot non nul (repérées par un astérisque * sur la Fig. A.1) sont les r_A colonnes indépendantes de la matrice $[A]$. Le rang r_A de cette matrice correspond au nombre de pivots non nuls trouvés lors de la transformation. Les m vecteurs lignes de la matrice $[\tilde{I}m]$ définissent tous les mécanismes linéairement indépendants du système ($[M] = [\tilde{I}m] T$).

Pour déterminer une base des états d'autocontrainte $[T]$, on procède de manière similaire sur la matrice d'équilibre transposée et augmentée $[A^T | J]$ (Fig. A.2).

Les transformations suivantes seront appliquées aux deux matrices d'équilibre $[A]$ et identité $[I]$ simultanément ;

- 1) Permuter les lignes 1 et 2,
- 2) Remplacer la ligne 4 par la ligne (2+4)
- 3) Permuter enfin les lignes 3 et 5

Le résultat obtenu est le suivant :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 * & * & * & & \\
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{ccccc}
 -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \\
 r_A
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] \\
 m
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$r_A=3$ (rang de la matrice A)

$m=3$ (nombre de mécanismes δ) tels que ;

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Détermination des 's' bases d'autocontrainte

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 \left[\begin{array}{cccccc}
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -a & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right] \\
 A^T
 \end{array}
 &
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 \left[\begin{array}{cccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right] \\
 J
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

On procédant par des transformations de permutation et d'élimination entre les lignes de la matrice d'équilibre transposée $[A]^T$ et la matrice identité $[J]$, le résultat obtenu est sous la forme

$$\left[\begin{array}{cccccc} -a & 1 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \Bigg] s$$

$s=2$, donc la matrice des vecteurs d'autocontrainte T est écrite comme :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donc l'Eq 1.2 (chap.1) donnant la relation entre les quatre termes (s,b,m,N) est vérifiée telle que $s - b = m - N = -3$

B. Détermination de la Géométrie de l'Anneau de Tenségrité

B.1 Géométrie d'un Anneau à Base Carrée

Pour un module quelconque construit selon la méthode décrite dans le chapitre 2, soit R_1 le rayon du cercle inscrit dans le pentagone de nappe et R_2 celui du pentagone intermédiaire à mi-hauteur. Vue la symétrie circulaire du module, nous n'étudions qu'un côté sur 4. Les coordonnées des points concernés sont les suivantes :

Nœuds	X	Y	Z
1	0	R_1	0
2	R_1	0	0
3	0	R_1	H
4	R_1	0	H
5	$R_2 \cos(\pi/4)$	$R_2 \sin(\pi/4)$	$H/2$
6	$-R_2 \cos(\pi/4)$	$-R_2 \sin(\pi/4)$	$H/2$

Tableau.B.1.1.Coordonnées des points géométriques

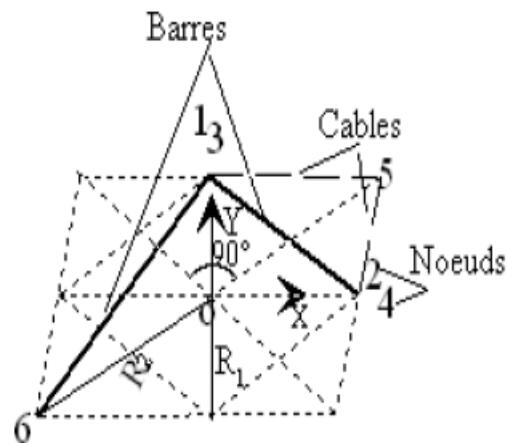


Figure B.1.1.Extrait d'un côté de l'anneau de tenségrité à base Carrée. Vue de dessus

La longueur B_1 de la barre latérale 1 – 4 est :

$$B_1^2 = (X_1 - X_4)^2 + (Y_1 - Y_4)^2 + (Z_1 - Z_4)^2$$

$$B_1^2 = 2R_1^2 + H^2$$

De la même façon, la longueur de la barre intermédiaire 1 – 6 qui est de valeur B_2 , est décrite par la relation :

$$B_2^2 = (X_1 - X_6)^2 + (Y_1 - Y_6)^2 + (Z_1 - Z_6)^2$$

$$B_2^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{H^2}{4}$$

La longueur C_1 du câble de nappe 1 – 2 est définie par :

$$C_1 = \sqrt{2}R_1$$

Et la longueur C_2 du câble coplanaire 1 – 5 est :

$$C_2^2 = (X_1 - X_5)^2 + (Y_1 - Y_5)^2 + (Z_1 - Z_5)^2$$

$$C_2^2 = R_2^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \left(R_1 - R_2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 + \frac{H^2}{4}$$

$$C_2^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{H^2}{4}$$

L'unicité de la longueur des barres impose que $B_1 = B_2 = B$ ce qui donne :

$$-2R_1R_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{4}H^2 = 0$$

Si les polygones de base (carrés) sont égaux ceci revient à écrire $R_1 = R_2 = R$

On a :

$$-2R^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}H^2$$

d'où

$$H = 2R \sqrt{\frac{2 \sin(\pi/4)}{3}}$$

$H = 1,37R$; $C_1 = 1,41R$; $C_2 = 1,027R$; $B = 1,96R$.

B.2 Géométrie d'un Anneau à Base Pentagonale

Pour un module quelconque construit selon la méthode décrite dans le chapitre 2, soit R_1 le rayon du cercle inscrit dans le pentagone de nappe et R_2 celui du pentagone intermédiaire à mi-hauteur. Vu la symétrie circulaire du module, nous n'étudions qu'un côté sur 5. Les coordonnées des points concernés sont les suivantes :

Nœuds	X	Y	Z
1	0	R_1	0
2	$R_1 \sin(2\pi/5)$	$R_1 \cos(2\pi/5)$	0
3	$R_1 \sin(\alpha)$	R_1	H
4	$R_1 \sin(2\pi/5)$	$R_1 \cos(2\pi/5)$	H
5	$R_2 \sin(\pi/5)$	$R_2 \cos(\pi/5)$	$H/2$
6	$R_2 \sin(7\pi/5)$	$R_2 \cos(7\pi/5)$	$H/2$

Tableau.B.2.1.Coordonnées des points géométriques

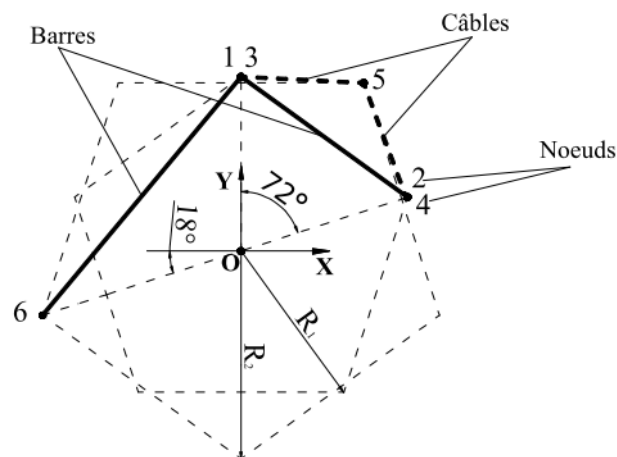


Figure B.2.1. Extrait d'un côté de l'anneau de tensegrité à base pentagonale.

Vue de dessus

La longueur B_1 de la barre latérale 1 – 4 est :

$$B_1^2 = (X_1 - X_4)^2 + (Y_1 - Y_4)^2 + (Z_1 - Z_4)^2$$

$$B_1^2 = 4R_1^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + H^2$$

De la même façon, la longueur de la barre intermédiaire 1 – 6 qui est de valeur B_2 , est décrite par la relation :

$$B_2^2 = (X_1 - X_6)^2 + (Y_1 - Y_6)^2 + (Z_1 - Z_6)^2$$

$$B_2^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) + \frac{H^2}{4}$$

La longueur C_1 du câble de nappe 1 – 2 est définie par :

$$C_1 = 2R_1 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Et la longueur C_2 du câble coplanaire 1 – 5 est :

$$C_2^2 = (X_1 - X_5)^2 + (Y_1 - Y_5)^2 + (Z_1 - Z_5)^2$$

$$C_2^2 = R_2^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \left(R_1 - R_2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 + \frac{H^2}{4}$$

$$C_2^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \frac{H^2}{4}$$

L'unicité de la longueur des barres impose que $B_1 = B_2 = B$ ce qui donne :

$$R_1^2 \left(1 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos\left(\frac{7\pi}{5}\right) - \frac{3}{4}H^2 = 0$$

On peut également calculer la distance entre l'axe central des prismes et une barre intermédiaire qui présente le rayon r de l'espace interne de l'anneau.

pentagones de base sont égaux $R_1 = R_2 = R$

On a :

$$R^2 \left(1 - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1 - \cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right) = \frac{3}{4}H^2$$

d'où
$$H = 4R \sqrt{\frac{\cos(2\pi/5)}{3}}$$

$$H = 1,284R ; C_1 = 1,176R ; C_2 = 0,891R ; B = 1,741R.$$

C. État d'autocontrainte conforme

C.1. La méthode conditionnelle

Cette méthode repose sur la définition de conditions qui sont affectées à certains des éléments de la structure.

En effet, il est envisageable de poser n_c conditions indépendantes sur n_c lignes de la matrice $[M]$. Dans ce cas, une sous-matrice de $[M]$ de dimension $[n_c \times n_c]$ est obtenue et appelée $[Co]$ ou matrice condition. Le système s'écrit :

$$\{c\} = [Co]\{\alpha\} \quad (C.1.1)$$

où le vecteur $\{c\}$ est le vecteur des conditions et $\{\alpha\}$ le vecteur donnant la combinaison des états d'autocontrainte respectant ces conditions. Si les conditions sont linéairement indépendantes, alors $[Co]$ est inversible et le vecteur combinaison des colonnes de $[M]$ respectant les n_c conditions est déterminé.

C.1.1. Exemple de résolution :

Imaginons qu'une solution d'un problème (deux états d'autocontrainte et neuf éléments) soit de la forme de l'Eq.C.1.2. Cet exemple est directement inspiré de l'assemblage de deux demi-cuboctaèdres pour lesquels existent deux états d'autocontrainte, seuls quelques éléments ont été retirés pour diminuer la taille des vecteurs (trente et un termes sinon).

Le résultat en sortie d'algorithme de calcul est alors de la forme de Eq.C.1.2.

$$[M] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ Résultat numérique} \quad (C.1.2)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Résultat après traitement} \quad (\text{C.1.3})$$

La première colonne donnée par le calcul est conforme et elle nous permet de déduire la deuxième du fait de la symétrie de la structure. Par contre, comment combiner les deux vecteurs pour trouver le deuxième vecteur conforme de Eq.C.1.3?

Comme nous l'avons vu, il suffit de poser des conditions sur certains éléments. Par exemple, la symétrie de la structure nous permet d'affirmer qu'il est vraisemblable que pour le deuxième état d'autocontrainte, le premier élément ne sera pas autocontraint et le troisième, par contre, le sera. La construction du sous-système s'opère alors en conservant uniquement les lignes une et trois de la matrice [M] et en posant les conditions 0 sur le premier élément et -1 sur le troisième :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1.4})$$

En inversant la matrice [Co], le vecteur $\{\alpha\}$ est immédiatement déduit.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1.5})$$

Il suffit alors d'effectuer le produit $[M]\{\alpha\}$ pour trouver la deuxième colonne conforme recherchée.

C.2 État d'Autocontrainte Conforme Retenu pour l'Anneau à base Pentagonale

C.2.1 Coordonnées des Nœuds

L'anneau à base pentagonale présente 15 nœuds répartis sur 3 couches et dont les coordonnées complètes (X, Y et Z) dans un système orthonormé sont détaillées dans le Tableau C.2.1

Nœud	X	Y	Z
1	-47.553	15.451	0.0
2	0.000	50.000	0.0
3	47.553	15.451	0.0
4	29.389	-40.451	0.0
5	-29.389	-40.451	0.0
6	-29.389	40.451	40.0
7	29.389	40.451	40.0
8	47.553	-15.451	40.0
9	0.000	-50.000	40.0
10	-47.553	-15.451	40.0
11	-47.553	15.451	80.0
12	0.0	50.000	80.0
13	47.553	15.451	80.0
14	29.389	-40.451	80.0
15	-29.389	-40.451	80.0

Tableau C.2.1 Coordonnées des nœuds (cm)

Anneau à base pentagonale

C.2.2 Structure relationnelle

Le tableau suivant présente la connectivité des 15 barres et 30 câbles constituant l'anneau à base pentagonale.

Barres			Câbles					
N°	nœud	nœud	N°	nœud	nœud	N°	nœud	nœud
1	6	3	1	1	2	16	14	8
2	6	15	2	2	3	17	4	9
3	7	4	3	3	4	18	15	9
4	7	11	4	4	5	19	5	10
5	8	5	5	5	1	20	11	10
6	8	12	6	11	12	21	2	6
7	9	1	7	12	13	22	12	6
8	9	13	8	13	14	23	3	7
9	10	2	9	14	15	24	12	7
10	10	14	10	15	11	25	4	8
11	4	15	11	1	6	26	13	8
12	5	11	12	11	6	27	5	9
13	1	12	13	2	7	28	14	9
14	2	13	14	13	7	29	1	10
15	3	14	15	3	8	30	15	10

Tableau C.2.2 Structure relationnelle de l'anneau à base pentagonale

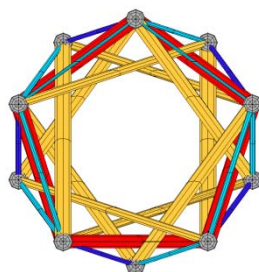
C.2.3 vecteur d'autocontrainte

Le calcul effectué sans aucun blocage de l'anneau pentagonal qui présente 45 éléments et 15 nœuds, donne 6 états d'autocontrainte et 1 mécanisme (déplacement de corps rigide). Ce mécanisme est éliminé, une fois que seront bloqués 6 degrés de liberté de la base.

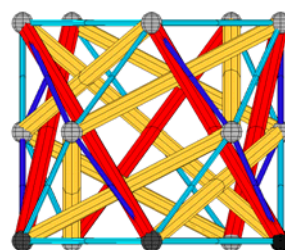
Le seul état d'autocontrainte compatible obtenu est une combinaison linéaire des 6 états calculés. Pour trouver cette combinaison linéaire, on applique la méthode conditionnelle [QUI00] qui consiste comme on l'a vu, chapIII à fixer 6 conditions linéairement indépendantes sur 6 des 10 barres intermédiaires. Cette démarche permet d'imposer une seule solution, ce qui permet de déterminer la combinaison donnant le vecteur d'autocontrainte complet et compatible. Il est présenté dans le tableau A.3 et la Fig.C.2.1 suivants.

Vecteurs d'autocontrainte					
Barres		Câbles			
N°	q_i	N°	q_i	N°	q_i
1	1.00	1	-1.46	16	-4.99
2	1.00	2	-1.46	17	-4.99
3	1.00	3	-1.46	18	-1.87
4	1.00	4	-1.46	19	-1.87
5	1.00	5	-1.46	20	-4.99
6	1.00	6	-1.46	21	-4.99
7	1.00	7	-1.46	22	-1.87
8	1.00	8	-1.46	23	-1.87
9	1.00	9	-1.46	24	-4.99
10	1.00	10	-1.46	25	-4.99
11	2,93	11	-1.87	26	-1.87
12	2,93	12	-4.99	27	-1.87
13	2,93	13	-4.99	28	-4.99
14	2,93	14	-1.87	29	-4.99
15	2,93	15	-1.87	30	-1.87

*Tableau C.2.3 État d'Autocontrainte Conforme
de l'anneau à base pentagonale*



Vue en plan



vue en profil

Fig. C.2.1 État d'Autocontrainte Conforme de l'anneau à base pentagonale

C. 3. État d'Autocontrainte Retenu pour l'Anneau à Base Carrée

C.3.1 Coordonnées des Nœuds

L'anneau à base Carrée présente 12 nœuds répartis sur 3 couches et dont les coordonnées complètes (X, Y et Z) dans un système orthonormé sont détaillées dans le Tableau C.3.1

Nœud	X	Y	Z
1	-50	-50	0
2	-50	50	0
3	50	50	0
4	50	-50	0
5	-70.711	0	50
6	0	70.711	50
7	70.711	0	50
8	0	-70.711	50
9	-50	-50	100
10	-50	50	100
11	50	50	100
12	50	-50	100

Tableau C.3.1 Coordonnées des nœuds (cm)

Anneau à base Carrée

C.3.2 Structure relationnelle

Le tableau.3.2 suivant présente la connectivité des 12 barres et 24 câbles constituant l'anneau à base carrée.

Barres			Câbles					
N°	Nœud	Nœud	N°	Nœud	Nœud	N°	Nœud	Nœud
1	1	10	1	5	1	13	8	4
2	2	11	2	5	2	14	8	1
3	3	12	3	5	9	15	8	12
4	4	9	4	5	10	16	8	9
5	1	7	5	6	2	17	1	2
6	10	7	6	6	3	18	2	3
7	2	8	7	6	10	19	3	4
8	11	8	8	6	11	20	4	1
9	3	5	9	7	3	21	9	10
10	12	5	10	7	4	22	10	11
11	4	6	11	7	11	23	11	12
12	9	6	12	7	12	24	12	9

Tableau C.3.2 Structure relationnelle de l'anneau à base carrée

C.3.3 vecteur d'autocontrainte

Le calcul effectué sans aucun blocage de l'anneau à base carrée qui présente 36 éléments et 12 nœuds, donne 6 états d'autocontrainte et 1 mécanisme (déplacement de corps rigide). On peut éliminer ce mécanisme en bloquant 6 degrés de liberté de la base. Après combinaison linéaire des 6 états d'autocontrainte calculés, le vecteur d'autocontrainte compatible (respectant le comportement unilatéral du câble) présenté sur le tableau.C.3.3 et la Fig.C.3.1 est trouvé.

Vecteurs d'autocontrainte					
Barres		Câbles			
N°	q _i	N°	q _i	N°	q _i
1	0,414	1	-0,5	13	-1,71
2	0,414	2	-0,5	14	-0,707
3	0,414	3	-0,5	15	-0,707
4	0,414	4	-0,5	16	-1,71
5	0,414	5	-0,5	17	-1,71
6	0,414	6	-0,5	18	-0,707
7	0,414	7	-0,5	19	-0,707
8	0,414	8	-0,5	20	-1,71
9	1,00	9	-1,71	21	-1,71
10	1,00	10	-0,707	22	-0,707
11	1,00	11	-0,707	23	-0,707
12	1,00	12	-1,71	24	-1,71

Tableau C.3.3 État d'Autocontrainte Conforme

de l'anneau à base carrée

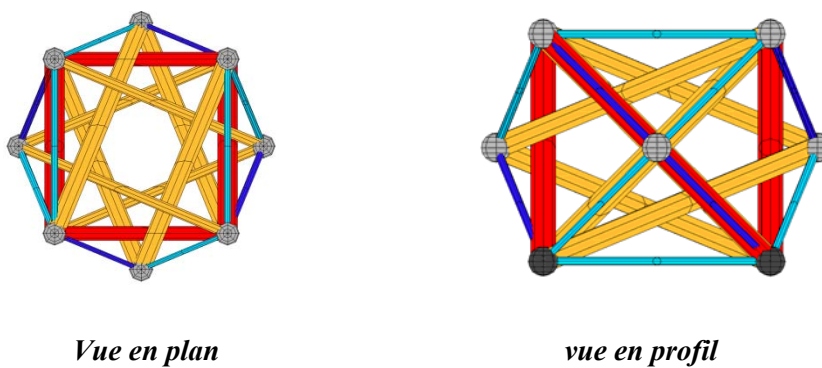


Fig.C.3.1 État d'Autocontrainte Conforme

de l'anneau à base carrée

Bibliography

BIBLIOGRAPHIE

- [ABE08] Abedi K., Shekastehband B, Static stability behavior of plane double-layer tensegrity structures, *Int. J. Space Struct*, 23. No. 2, pp. 89-102, 2008.
- [ATA98] Atai A.A., Mioduchowski A, Equilibrium analysis of elasto-plastic cable nets, *Comp. and Struct*, 66, pp. 163-171, 1998.
- [BAT80] Bathe K.J. and Cimento A.P. "Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations "Computer Methods in Applied Mechanics and Eng, 22, pp.59-85, 1980.
- [BAT96] Bathe K.J., *Finite Element Procedures*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [BEN00] Ben Kahla N., Kebiche K., Nonlinear elasto-plastic analysis of tensegrity systems, *Eng. Struct*, 23, pp. 1552-1566, 2000.
- [BIN01] Bin-Bing W., Yan-Yun L., From Tensegrity Grids to Cable-strut Grids. *Int. J. of Space Struct*, 16, N° 4, pp.279-314, 2001.
- [BLA93] Blandford G.E., Wang S.T. Response of space trusses during progressive failure, *Dynamic response and Progressive Failure of special struct.*, ASCE, R.B. Malla, Ed, PP 1-16, 1993.
- [BLA96] Blandford G.E., Large deformation analysis of inelastic space truss structures, *J.Struct. Engrg.*, ASCE. 122, No. 4, pp. 407-415, 1996.
- [BRU87] Bruce W., Forde, Siegfried R. and Stiemer F. "Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis, *Comp. and Struct*, 27, No.5, pp. 625-630, 1987.
- [CAL78] Calladine, C.R., Buckminster Fuller's "tensegrity" structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.14, No.2, p. 161-172, 1978.
- [CHA89] Chajes A, Churchill J.E, Nonlinear frame analysis by finite element method, *J.Struct. Engrg.*, ASCE., 113, No. 6, pp. 1221-1235, 1987.

- [COO89] Cook R.D, Malkus D.S and Plesha M.E, Concepts and applications of finite element analysis, third edition, Wiley, New York, 1989.
- [CRI81] Crisfield M.A, A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through'. *Comp. and Struct.*, 13, pp. 55-62, 1981.
- [EMM88] Emmerich D.G., Structures tendues et autotendantes, Ecole d'architecture de paris La Villette, 1988.
- [FEL] Felippa C.A., Refined Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear two dimensional structures, Repport N°SESM 66-22, Univ. California, Berkley, 1966.
- [FRE] Frey F., L'Analyse statique non linéaire des structures par la méthode des éléments finis et son application à la construction métallique. Thèse de doctorat., Université de Liège, 1978.
- [FUL62] Fuller R.B., Tensile integrity structure, US PATENT 3.063.572, 1962.
- [HIL89] Hill C.D., Blandford G.E. and Wang S.T., Post-buckling analysis of steel space trusses, *J. Struct. Eng.*, vol. 115, No. 4, pp. 900-919, 1989.
- [ING98] Ingber D., L'architecture de la vie, Pour La Science, n°245, mars 1998.
- [KEB98] Kebiche K., Etude en non-linéarités géométriques et homogénéisation des systèmes réticulés spatiaux autocontraints, thèse, Université Montpellier II, 1998.
- [KEB99] Kebiche K., Kazi-Aoual M.N., Motro R., Geometrical non-linear analysis of tensegrity systems, *Engineering Structures*, 21 pp 864-876, 1999.
- [KNI00] Knight B., Deployable antenna kinematics using tensegrity design, PhD. Thesis, University of Florida, Gainesville, Florida, USA, 2000.
- [LEU90] leu L.J., Yang, Y.B., Effects of rigid body and stretching on nonlinear analysis of trusses., *J. Struct. Engrg.*, ASCE., 116(10), pp.2582-97, 1990.
- [LIN71] Linkwitz K. and Schek H.J., Einige Bemerkungen von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen, *Ingenieur-Archiv* 40, Springer-Verlag, pp145-158, 1971.

- [MAU 98] MAURIN B., Morphogenèse des Membranes Textiles Architecturales, Thèse de Doctorat, Université Montpellier II (1998)
- [MOT97] Motro R., Systèmes de Tenségrité, Actes du séminaire du 4 décembre, Ecole d'Architecture du Languedoc Roussillon, Editions de l'Espérou, ISBN 2-912261-06-6, 1997.
- [MOT03] Motro R., Tensegrity, Structural systems for the future. Kogan Page Science, 2003.
- [MOT09] Motro R. Quirant J., Nguyen A. D., Maurin B., Foldable tensegrity rings: from conceptual design to physical and numerical models, ASPC Symposium, Japan, 2009.
- [NGU09] Nguyen A. D., Etude du comportement mécanique et du pliage d'un Anneau de tenségrité a base pentagonale, thèse, Université Montpellier II, 2009.
- [PAU05] Paul C., Lipson H., Valero Cuevas F. J., Gait Production in a Tensegrity Based Robot, Proceedings of 12th International Conference on Advanced Robotics, Seattle, Washington, USA, p. 216-222, 2005.
- [PAU06] Paul C., Valero Cuevas F. J. Lipson H., Design and Control of Tensegrity Robots, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 22 N°5, p. 944-957, 2006.
- [PUG76] Pugh A., An Introduction to tensegrity, University of California Press, 1976.
- [QUI00] Quirant J., Systemes de tenségrité et autocontrainte: qualification, sensibilité et incidence sur le comportement, thèse, Université Montpellier II, 2000.
- [RAM] Ramesh G., Krishnamoorthy C.S. Inelastic Post Buckling Analysis of truss structures by dynamic relaxation method. Int. J. for Numer. Methods in Ingrg. Vol 37, pp 3633- 3657, 1994.
- [SCH04] Schlaich M., The messeturm in Rostock - A tensegrity tower. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, 45(145):93-8, 2004.

- [SHE74] Sheck H.J., The force density method for form finding and computation of networks, *Computer Method in applied Mechanics and Engineering* 3, pp 115-134, 1974.
- [SIM92] Sims J., Karp S., Ingber D.E Alternating the cellular mechanical force balance results in integrated changes in cell, cytoskeletal and nuclear shape, *journal of cell science* 103, 1215-1222, 1992.
- [SAN05] Sandoval L. R. S., Contribution à l'étude du dimensionnement optimal des systèmes de tensegrité, thèse, Université Montpellier II, 2005.
- [TIB02] Tibert G., Deployable tensegrity Structure for Space Applications, Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2002.
- [TIB03] Tibert G., Pellegrino S., Deployable Tensegrity Masts, 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibit, Norfolk, Virginia, USA, 2003.
- [VAS97] Vassart N., Recherche de forme et stabilité des systèmes réticulés autocontraints: Application aux systèmes de tensegrité, Thèse de doctorat, Université Montpellier II, 1997.
- [VAS00] Vassart N., Laporte R., Motro R., Determination of mechanism's order for kinematically and statically indeterminate systems, *International Journal Solids and Structures* 37128, 2000.
- [WAN03] Wang B.B., Li Y.Y., Novel Cable-Strut Grids made of prisms: Basic Theory and Design, *Int. Journal Space Structures*, Vol.44, N°142, p.93-125, 2003.
- [WEN97] WENDLING S., Loi de comportement d'une structure de tensegrité élémentaire: application à la mécanique cellulaire, Doctorat de l'Université Paris XII-Val-De-Marne, 1997.

Liste Des Figures

Fig 1.1 Brooklyn bridge – New York 1883	5
Fig. 1.2 Tour Eiffel – Paris 1889.....	5
Fig. 1.3 complexe olympique de Munich, 1972.....	6
Fig.1.4 pont de Tancarville près de l'estuaire de la Seine.....	6
Fig. 1.5 Massif d’ancrage.....	6
Fig.1.6 Gleichgewichtskonstruktion 1920.....	7
Fig.1.7 Emmerich structure.....	7
Fig.1.8 Modèle de structure de tensegrité ‘octaèdre expansé’	8
Fig. 1.9 Mise en autocontrainte d'un système de tensegrité.....	9
Fig. 1.10 a : Mécanisme finis, b : mécanisme infinitésimal.....	10
Fig. 1.11 Longueurs des composants et variations des longueurs selon l'état considéré	12
Fig. 1.12 Définition du nœud libre i connecté au nœud h par l'élément j , $\{u_{hi}\}$ est le vecteur directeur unitaire de l'élément. (Projection suivant la direction Z).	13
Fig. 1.13 Cellules de tensegrité ; a : simplex à 3 barres et 9 câbles, b : quadruplex à 4 barres et 12 câbles.	19
Fig. 1.14 Exemples de Génération de Systèmes de Tensegrité Linéaires.....	20
Fig. 1.15 a. The Rostock Tower vue globale ; b. Vue de l'intérieur.....	21
Fig. 1.16 Kurilpa Bridge à Brisbane en Australie.....	22
Fig. 1.17 Concept de tensegrité utilisé pour de petits satellites-réfléchisseurs (a) structure complète, (b) structure d'anneau de tensegrité	22
Fig. 1.18 Éléments du cytosquelette d'une cellule eucaryote Bleu : noyau. Vert : microtubules. Rouge : microfilaments (actine)	23
Fig. 1.19 Cellule modélisée par un système de tensegrité en analogie avec le comportement mécanique d'un module de tensegrité (A).....	23
Fig. 1.20 Mouvement horizontal d'un module simplex.....	24

Fig. 2.1 a: losange de câbles encerclé, b: zoom sur le losange échantillon, c: nœud vu en perspective avant et après rapprochement des barres	28
Fig. 2.2 Cuboctaèdre à 4 circuits triangulaire de barres	28
Fig. 2.3 Modèles à circuits de barres, a: un circuit de 15 barres, b: 5 circuits de 4 barres	29
Fig. 2.4 a: Anneau à base Carrée, b: Anneau à base Pentagonale, c: Anneau à base hexagonale	29
Fig. 2.5 Espace Interne libéré par un Anneau à base Pentagonale, a: vue en perspective, b: vue de coté.....	31
Fig. 2.6 Vue de dessous des trois modèles d'Anneaux avec $R_1 \neq R_2$, a: Anneau à base carrée, b: Anneau à base Pentagonale, c: Anneau à base Hexagonale	32
Fig. 2.7 Configurations optimum d'Anneau ($R_1 = R_2$) a: Anneau à base Carrée, b: Anneau à base Pentagonale, c: Anneau à base Hexagonale.....	32
Fig.2.8 Extrait d'un côté de l'anneau de tensegrité à base hexagonale Vue de dessus	33
Fig. 2.9 Nœud esquissé.....	35
Fig. 2.10 Nœud modélisé en détail.....	35
Fig. 2.11 Longueur de la Barre avec Dispositif de Connexion.....	37
Fig. 2.12 Dispositif de Connexion des Barres.....	37
Fig. 2.13 Dispositif de Connexion des Câbles (vue perspective).....	38
Fig. 2.14 Positions minimisant (a) et maximisant (b) la Longueur des Câbles.....	38
Fig. 2.15 Longueur des Câbles avec Dispositif de Connexion.....	38

Fig.2.16. État d'Autocontrainte Conforme de l'anneau à base hexagonale.....	43
Fig.3.1 description de l'évolution de la configuration à différents moments.....	49
Fig.3.2. a: Relations contraintes déformations en tension uni axiale. E=module élastique, E_T =module tangent. b: courbe déduite de a après élimination des déformations élastiques	54
Fig. 3.3 Un élément de forme linéique simple.....	57
Fig.3.4 composantes des déplacements dans le repère local de la barre spatiale.....	58
Fig. 3.5 courbe de comportement élastique parfaitement plastique de la barre.....	58
Fig. 3.6 courbe expérimentale de comportement du câble en traction.....	59
Fig. 3.7 Loi d'écoulement $f(\epsilon)$ de l'élément câble Obtenue a partir de données expérimentales.....	60
Fig. 3.8 Méthode de Newton-Raphson.....	65
Fig. 3.9 Technique de pilotage en longueur d'arc imposée.....	66
Fig. 3.10 Technique de Pilotage en Longueur d'Arc Imposée de Crisfield.....	66
Fig. 3.11: a: Système à 5 barre, b: système à 3 barres et 2 câbles. Dans les deux structures les nœuds 1,2 & 3 sont alignés.....	70
Fig. 3.12 : le Système (a) présente des mécanismes finis (système stable) le Système (b) présente un mécanisme infinitésimal (système instable).....	70
Fig. 4.1. Géométrie et chargement de la 'Star Dome Truss'	74
Fig. 4.1.a Courbe Charge-Déplacement de la 'Star Dome Truss'	74
Fig. 4.2. Élément Câble en Traction.....	75
Fig. 4.2.a. Essai de Traction sur un Élément Câble.....	75
Fig. 4.3. Géométrie et Chargement d'une Poutre à Cinq Quadruplex.....	76
Fig. 4.3.a. Déplacements du Nœud 14 dans la Direction Z.....	77
Fig.4.4. Anneau de Tenségrité à Base Pentagonale 'Géométrie et chargement'.....	78

Fig.4.4.a. Valeurs Expérimentales et Numériques des Déplacements $\langle z \rangle$ de l'Anneau de Tenségrité à Base Pentagonale en Compression.....	78
Fig.4.5. Géométrie et Chargement de l'Anneau de Tenségrité à Base Pentagonale.....	82
Fig.4.5.a. Courbes de Comportement en fonction de Différents Rapports de Rigidité.....	82
Fig.4.5.b. Évolution des Efforts Internes dans les éléments pour rap=58.....	83
Fig.4.5.c. Évolution des Efforts Internes dans les éléments pour rap=10.....	83
Fig.4.6. Anneau de Tenségrité à Base Carrée en Compression.....	85
Fig.4.6.a Effet du Relâchement des Câbles à différents niveaux d'Autocontrainte...	86
Fig.4.7. Colonne ' à Anneaux de tenségrité à Base Carrée' en Compression.....	87
Fig.4.7.a. Effet du Relâchement des Câbles sur le Comportement de la Structure...	87
Fig.4.7.b Tensions dans les Câbles du module C1.....	88
Fig.4.7.c Tensions dans les Câbles du module C2.....	89
Fig.4.7.d Tensions dans les Câbles du module C3.....	89
Fig.4.8. Mode de Chargement en Flexion de la Poutre d'Anneaux à base Hexagonal.....	90
Fig.4.8.a. Déplacements X de l'extrémité libre à Différents Niveaux d'Autocontrainte.....	91
Fig.4.8.b. Effet du Niveau de l'Autocontrainte sur le Nombre de Câbles Relâchés en Cours de Chargement.....	91
Fig.4.8.c. Évolution du Nombre de Câbles Relâchés En fonction du Niveau de l'Autocontrainte en Cours de Chargement.....	92
Fig.4.9. Mode de Chargement du Mono-module 'Anneau à Base Hexagonale'.....	92
Fig.4.9.a. Déplacements des Nœuds de la base supérieure dans la Direction Z	93

Fig. 4.10.a. Effets Individuel et Couplé du Relâchement et de la Plastification des Câbles sur le Comportement de la Structure.....	95
Fig. 4.10.b Position des Câbles Relâchés (en bleu) et Plastifiés (en rouge) si l'analyse N.EP.PS.A est considérée.....	96
Fig. 4.10.c Variation de la Force de Tension dans les Câbles latéraux du Module C1 quand l'analyse 'N.E.A' est considérée	96
Fig. 4.10.d Variation de la Force de Tension dans les Câbles latéraux Du module C1 lorsque la N.E.PS.A est considérée.....	97
Fig. 4.10.e Variation de la Force de Tension dans les Câbles latéraux Du Module C1 lorsque la N.EP.PS.A est considérée.....	97
Fig.4.11. Géométrie et Chargement du multi-module 'Anneau à base Hexagonale'.....	98
Fig.4.11.a. Évolution de l'Angle de Torsion à travers Différentes Analyses.....	100
Fig.4.11.b. Forces de Tension dans les Câbles du Module C4 considérant N.E.A.....	101
Fig.4.11.c. Forces de Tension dans les Câbles du Module C4 considérant N.E.PS.A.....	101
Fig.4.11.d. Forces de Tension dans les Câbles du Module C4 considérant N.EP.PS.A.....	102
Fig.4.11.e. Positions des Câbles Relâchés (en bleu) et Plastifiés (en rouge) Quand L'analyse N.EP.PS.A est considérée	102

Liste Des Tableaux

Tableau. 1.1. Évolution du nombre d'états d'autocontrainte et de mécanismes Suivant le nombre de modules assemblés	20
Tableau.1.2. Analogie entre le cytosquelette et le module de tenségrité.....	24
Tableau.2.1. Différentes Géométries du « Diamond Pattern ».....	27
Tableau.2.2. Géométrie de différents anneaux de tenségrité.....	30
Tableau.2.3. Coordonnées des points considérés sur le module.....	33
Tableau.2.4. rapports dimensionnels sur les trois modèles d'anneaux proposés.....	35
Tableau.2.5. Détails des Pièces utilisées pour la Composition d'un Nœud.....	37
Tableau.2.6. Assemblage Linéique par juxtaposition des facettes d'Anneaux de Tenségrité.....	40
Tableau.2.7. Coordonnées des Nœuds (cm) Anneau à base hexagonale.....	41
Tableau.2.8. Structure Relationnelle de l'Anneau à Base Hexagonale.....	42
Tableau.2.9. État d'Autocontrainte Conforme de l'Anneau de Tenségrité à Base Hexagonale.....	44
Tableau.4.1. Autocontrainte S_i (daN) Utilisées pour l'Anneau à Base Carrée.....	80
Tableau.4.2. Autocontrainte Initiale S_i (daN) Utilisées pour l'Anneau à base Hexagonal.....	80
Tableau.4.3. Valeurs de l'Autocontrainte Utilisée (daN).....	81
Tableau.4.4. Caractéristiques Géométriques et Mécaniques des Éléments Câbles et Barres.....	81
Tableau.4.5. Valeurs du Rapport de Rigidité en Fonction de A_c	81
Tableau.4.6. Niveau de Chargement Causant le Relâchement et la Plastification de Câbles.....	98
Tableau.4.7. Angle de Torsion θ et Tensions Internes pour deux Valeurs ' M_t '.....	100

Résumé : Le travail présenté dans cette thèse a pour objectif de proposer un modèle d'analyse non linéaire géométrique et matériel et de l'appliquer sur des structures constituées d'anneaux de tensegrité obéissant au principe de la tension intégrale et représentant la dernière génération de type de configuration architectural. L'algorithme de calcul proposé est nouveau et prend en considération ; le relâchement et la plastification des câbles. La méthode de résolution itérative de Newton Raphson en formulation Lagrangienne actualisée a été adoptée. Cette étude montre que les anneaux de tensegrité sont moins flexibles que les structures de tensegrité classique. Il a été démontré que le couplage entre les effets du relâchement et la plastification des câbles dans un modèle de calcul non linéaire est indispensable pour se rapprocher le mieux de la réponse réelle des structures à base de tensegrité.

ملخص: في هذه الأطروحة يتم وصف و تطبيق محاكاة النموذج اللاخطي المركب (الهندسي و المادي) علي هياكل مكونة من حلقات التونسيغريتي و هي حلقات خاضعة لمبدأ الشد و التكامل و تمثل آخر جيل لهذه الأنساق الهندسية. النموذج الخوارزمي المحصل عليه في هذه الدراسة، يعتبر حديثا و يأخذ بعين الإعتبار ارتخاء و تصفح الكابلات. تم استعمال طريقة نيوتن رافسن التكرارية في صياغة لاغرانج المحدثة. تظهر هذه الدراسة أن حلقات نظام التونسيغريتي أقل مرونة إذا قورنت بأنظمة التونسيغريتي الكلاسيكية. بالتركيز على تأثيري التراخي و التصفح في الكابلات على السلوك الكلي اللاخطي للأنظمة المدروسة، تبين أن الجمع بين هذين التأثيرين في نموذج التحليل اللاخطي مهم لفهم أفضل لردة فعل الهياكل المكونة من حلقات التونسيغريتي.

Abstract: Modeling with a combined geometric and material nonlinear analysis is described in this manuscript and applied to tensegrity rings representing the last generation of the tensegrity systems. The resulting algorithm model is new; it takes into account slackening and yielding of cables. The usual Newton-Raphson iterative method is used but in an updated Lagrangian formulation. It is shown that the tensegrity rings are less flexible compared to the classical tensegrity systems. Special attention is paid to the influence of the slackening and yielding of cables on the total nonlinear behavior. It has been found that their combination in a nonlinear analysis model is important for a better understanding of the response of tensegrity rings.