

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie Civil et Hydraulique  
Ref : .....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: .....

Mémoire présenté en vue de l'obtention  
du titre de

**MAGISTER**

**En Hydraulique**

Option : Hydraulique urbaine et Ouvrages

**MODÉLISATION ET SIMULATION NUMÉRIQUE DES  
ÉCOULEMENTS TRANSITOIRES EN CHARGE PAR LA  
MÉTHODE DES VOLUMES FINIS**

Présenté par :

**AMARA Lyes**

*Ingénieur d'Etat en Hydraulique  
de l'Université de Bejaia*

Soutenu publiquement le 19 / 06 / 2013

**Devant le jury composé de :**

Président :	OUAMANE Ahmed	Professeur	Université de Biskra
Rapporteur :	ACHOUR Bachir	Professeur	Université de Biskra
Examineur :	DEBABECHE Mahmoud	Professeur	Université de Biskra
Examineur :	BOUZIANE M <sup>ed</sup> Toufik	M.C.A	Université de Biskra
Invité :	BERREKSI Ali	M.C.B	Université de Bejaia

# Remerciements

*Arrivé au terme de ce travail, manuscrit enfin clôt, au-delà de la période de son élaboration, il est l'aboutissement d'un cheminement débuté il y a fort longtemps, et si j'en tire aujourd'hui seul les honneurs, le mérite en revient en réalité à beaucoup d'autres. En préambule, je tenais donc à adresser mes remerciements sincères en ces lignes, à tous ceux, qui de prêt ou de loin, y ont contribué.*

*Au début, il est de clairvoyance et avant tous de remercier Dieu. C'est en réalité par Sa miséricorde que j'ai pu parvenir au bout de mes espérances tant sur le plan académique que personnel en me donnant puissance, confiance et courage.*

*Sans conteste, c'est avec leur amour, appui, leur encouragement et soutien incessant que je me retrouve là. En conséquence, et en deuxième lieu, je remercie ma très chère Mère et mon très cher Père pour leur soutien, de m'avoir épaulé et prêté conseils durant toute ma vie. Je ne saurai évidemment les remercier autant, mais ces quelques mots sauront trouver échos dans leur cœur.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à Mr. ACHOUR Bachir, Professeur et directeur du laboratoire de recherche LARHYSS, qui a aiguillé le présent travail, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux, la confiance qu'il m'a témoignée, pour sons aide morale et documentaire, sans oublier son accompagnement au cours de mon séjour d'étude à Biskra. Je dirai simplement que je suis très honoré d'être dirigé par lui. Que ses compétences et connaissances dans la direction de ce travail trouvent ici l'assurance de ma reconnaissance la plus sincère.*

*Je remercie le Mr. OUAMANE Ahmed pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury du présent travail.*

*Mes plus sincères remerciements vont de même à Mr. DEBABECHE Mahmoud et Mr BOUZIANE M<sup>ed</sup> Toufik pour avoir accepté la lourde tâche d'examiner le travail et d'apporter leur appoint qui ne saura qu'être bénéfique à mon égard.*

*Je tiens également à présenter toute ma gratitude et ma reconnaissance très particulière à Mr. BERREKSI Ali, sans doute celui qui m'a de loin marqué durant toute ma formation universitaire. Hormis son savoir pointu et son érudit dans un domaine aussi vaste que celui de l'hydraulique numérique qui a généreusement partagé avec moi, il a su implanté en moi un esprit d'autonomie, découverte de confiance en soi, de rigueur scientifique, ingrédients essentiels pour y aller de l'avant, et aussi sur le plan personnel, que j'ai tant apprécié, en partageant avec moi beaucoup de choses, et en me faisant apprendre même avec un silence. Je n'oublierai jamais son aide précieuse, surtout documentaire, gracieusement mise en ma disposition et même ramenée de l'étranger (Malaisie et France). Que ces simples lignes, qui mettront à mal sa modestie, puissent refléter mon profond respect à son égard.*

*Je ne saurai oublier ici de remercier chaleureusement Mr. AMIRECHE Mohamed de m'avoir suivi et accompagné depuis mes premiers pas de formation d'hydraulicien, en me faisant part de son savoir avec générosité, cœur et amitié, hormis ses orientations et conseils qui m'ont été fort utile, sans omettre les moyens et documentations qu'a mis en ma disposition. Je suis heureux d'être un de ses élèves préférés.*

*Je saisi cette occasion pour remercier ici l'ensemble des enseignants du département d'Hydraulique de l'Université de Bejaia qui ont assuré ma formation de base, pour l'appui et l'aide qui m'ont apporté tout le long de mon cursus ainsi que leur esprit d'amitié, spécialement Messieurs A. CHENAFI, M. BELHOCINE, A. HAMMOUCHE, S. HAMCHAOUI, A. BEDJOU, A. BRAKENI et particulièrement A. BENZERRA surtout pour la documentation ramenée de l'INSA de Lyon.*

*Il m'est aussi nécessaire et de devoir ici d'exprimer mes chaleureux remerciements pour mes enseignants de la P.G. à l'Université de Biskra spécialement Mr. A. BENKHALED, Mme. S. ACHOUR, Mr. A. OUAMANE et M<sup>elle</sup> S. GUERGAZI pour leur soutien et leurs encouragements et la sympathie qu'ils m'ont témoigné. Aussi je n'oublie pas l'ensemble du personnel du département de Génie civil et Hydraulique de l'Université de Biskra, à leur tête Mr. T. BOUZIANE.*

*Je tiens également à exprimer mes remerciements à mes amis pour leur soutien, aide, encouragements et leur appui, je suis très fier d'eux tous notamment Loucif BENAHMED, Mokrane AMIROUCHE, Samy TOUAZI, Hamza KHLIFA et tous les autres chacun son nom et dont la liste ne sera jamais exhaustive.*

*Il est évident de ne jamais oublier ici mon très cher ami et frère Soufiane TEBACHE, celui avec qui j'ai partagé de très bons moments, et avec qui j'ai appris beaucoup de choses. Je ne réussirai pas de le remercier autant pour son aide, surtout la masse d'articles scientifiques transmise de l'Ecole Polytechnique de Montréal, mais que ces modestes mots réussissent à lui témoigner de mon amitié et mon respect et ma profonde reconnaissance envers lui.*

*Mes remerciements distingués vont également à ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail, tous les gens qui m'ont facilité l'accès à une rare et précieuse documentation (Livres et articles...etc.). J'en citerai parmi d'autres le personnel de la bibliothèque de l'Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, spécialement Ammi SALAH, ceux de la bibliothèque de l'Université de Bejaia, de l'USTHB sans oublier Mr. Christophe RAVANEL du CCU d'Alger de ses efforts fournis pour m'assurer une précieuse documentation de France.*

*Je pense que beaucoup d'autres personnes doivent être citées ici, mais je suis persuadé que ceux-ci m'excuseront de ne pas pouvoir le faire sinon des tomes ne réussiraient pas à enfermer l'encre noire dépensé en signe de reconnaissance, cependant ils parviendront à comprendre que ma reconnaissance envers eux dépasse largement l'aptitude de quelques mots bien manipulés et tissés à miroiter ce que mon cœur leur doit.*

*Un chaleureux merci à tous !*

# TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

---

## PARTIE PREMIÈRE

### Revue de la Littérature

---

#### Chapitre I : Généralités et état de l'art

I.1. Introduction .....	6
I.2. Catégorie d'écoulements .....	6
I.2.1. Ecoulement permanent et non permanent .....	6
I.2.2. Régime transitoire .....	7
I.2.3. Ecoulement uniforme et non uniforme .....	7
I.2.4. Régime oscillatoire établi ou périodique.....	7
I.3. Notions sur les ondes élastiques .....	7
I.3.1. Mécanisme de propagation .....	7
I.3.2. Réflexion des ondes planes .....	8
I.4. Phénomène du coup de bélier .....	9
I.4.1. Définition .....	9
I.4.2. Causes fréquentes du coup de bélier .....	9
I.4.3. Risques et dommages conséquents aux coups de bélier .....	10
I.5. Synthèse bibliographique et état de l'art .....	11
I.5.1. Méthode des caractéristiques (MOC) .....	15
I.5.2. Méthode des plans d'ondes .....	17
I.5.3. Méthode des différences finies .....	17
I.5.4. Méthode des éléments finis .....	18
I.5.5. Méthode des volumes finis .....	19
I.6. Conclusion .....	20

#### Chapitre II : Modélisation mathématique

II.1. Introduction .....	21
II.2. Considérations préliminaires .....	21
II.3. Equations différentielles de base .....	22
II.3.1. Equation dynamique .....	22
II.3.2. Equation de continuité .....	26
II.4. Discussion des équations de base .....	31
II.5. Intégration du système différentiel .....	33
II.5.1. Solution générale .....	33
II.5.2. Interprétation physique des équations d' <i>Allievi</i> .....	34

II.6. Forme adimensionnelle des équations de base .....	35
II.7. Célérité des ondes .....	38
II.8. Conclusion .....	40

### **Chapitre III : Modèles numériques aux différences finies**

III.1. Introduction .....	41
III.2. Méthodes d'analyse .....	41
III.3. Méthode des caractéristiques .....	42
III.3.1. Formulation mathématique du modèle aux caractéristiques .....	43
III.3.2. Interprétation physique de la méthode des caractéristiques .....	45
III.3.3. Solution numérique du système différentiel .....	47
III.3.4. Conditions aux limites .....	52
III.4. Méthode des différences finies .....	54
III.4.1. Approximation en différences finies .....	54
III.4.2. Schémas explicites et implicites .....	56
III.4.3. Schéma de <i>MacCormack</i> .....	57
III.4.3.1. Formulation générale .....	57
III.4.3.2. Application du schéma de <i>MacCormack</i> au modèle mathématique ...	59
III.4.3.3. Conditions aux limites .....	61
III.4.3.4. Stabilité du schéma .....	63
III.5. Equations caractéristiques d'organes hydrauliques .....	64
III.5.1. Réservoir à charge constante .....	64
III.5.2. Appareil imposant une fonction connue du débit .....	64
III.5.3. Vanne à l'extrémité d'une conduite .....	65
III.5.4. Pompe centrifuge .....	65
III.5.5. Bout mort .....	65
III.5.6. Organes capacitifs .....	65
III.6. Conclusion .....	66

### **Chapitre IV : Méthode des Volumes Finis**

IV.1. Introduction .....	67
IV.2. Facultés et puissance de l'approche aux volumes finis .....	68
IV.2.1. Limites de l'approche aux différences finies et apparition de discontinuités .....	68
IV.2.2. Formulation intégrale et propriétés des solutions faibles .....	70
IV.2.3. Avantages de l'approche aux volumes finis .....	71
IV.3. Formulation générale pour les lois de conservation .....	73
IV.4. Critères de stabilité et convergence .....	76
IV.5. Méthode à double pas de <i>Richtmyer Lax-Wendroff</i> .....	78
IV.6. Schémas décentrés à capture d'informations .....	80
IV.7. Méthode de <i>Godunov</i> .....	83
IV.7.1. Problème de <i>Riemann</i> .....	84
IV.7.2. Invariants de <i>Riemann</i> et solution analytique .....	85
IV.7.3. Solveur de <i>Riemann</i> approché <i>HLL</i> .....	90
IV.8. Traitement des conditions aux limites .....	92
IV.9. Incorporation du terme source .....	93
IV.10. Conclusion .....	94

## PARTIE DEUXIÈME

## Modélisation et Simulation Numérique

## Chapitre V : Discrétisation par Volumes Finis

V.1. Introduction .....	97
V.2. Analyse de stabilité harmonique des équations du mouvement .....	98
V.3. Discrétisation du modèle mathématique par volumes finis .....	101
V.3.1. Application du schéma de <i>Richtmyer Lax-Wendroff</i> .....	101
V.3.2. Application de la méthode de <i>Godunov</i> .....	103
V.3.2.1. Résolution exacte du problème de <i>Riemann</i> .....	104
V.3.2.2. Solveur <i>HLL</i> pour le problème de <i>Riemann</i> .....	108
V.3.3. Calcul des flux intercellulaires .....	109
V.4. Conditions aux limites .....	111
V.4.1. Cas d'un bassin à charge constante .....	113
V.4.2. Cas d'un obturateur .....	114
V.4.2.1. Variation de la section de passage en fonction du temps .....	115
V.4.2.2. Variation du débit en fonction du temps .....	116
V.4.3. Cas d'un ballon anti-bélier (réservoir d'air) .....	117
V.4.4. Cas d'une cheminée d'équilibre .....	120
V.5. Intégration du terme source .....	122
V.6. Conclusion .....	123

## Chapitre VI : Applications et expérimentations numériques

VI.1. Introduction .....	124
VI.2. Application I : Manœuvres d'obturateur sur les conduites forcées .....	125
VI.2.1. Test I : Fermeture instantanée de l'obturateur .....	126
VI.2.2. Test II : Fermeture lente de l'obturateur .....	136
VI.2.3. Conclusions des deux tests .....	143
VI.3. Application II : Conduite élévatoire protégée par ballon anti-bélier .....	144
VI.3.1. Description de l'installation étudiée .....	144
VI.3.2. Test I : Réponse transitoire sans étranglement à la base du ballon .....	146
VI.3.3. Test II : Réponse transitoire avec étranglement à la base du ballon .....	151
VI.3.4. Conclusions des deux tests .....	156
VI.4. Application III : Problème de cheminée d'équilibre sur aménagements hydro-électriques .....	159
VI.4.1. Description de l'aménagement étudié .....	160
VI.4.2. Test I : Réponse transitoire du système en absence de pertes de charge .....	162
VI.4.2. Test II : Réponse transitoire du système tenant compte des pertes de charge .....	169

VI.4.3. Etude de l'influence des dimensions de la cheminée d'équilibre .....	176
VI.4.4. Synthèse de l'application .....	180
VI.5. Conclusion .....	181
<b>Conclusion générale et perspectives .....</b>	<b>182</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>186</b>
<b>Appendices</b>	

## NOTATIONS

---

- $a$  : Célérité des ondes, vitesse d'un signal d'information
- $A$  : Section horizontale du plan d'eau, matrice *jacobienne*
- $a_1, a_2$  : Paramètres liés au tracé d'une pompe centrifuge
- $B$  : Impédance de la conduite
- $C_i$  : Cellule liée au point de discrétisation "i"
- $C^-$  : Caractéristique négative
- $C^+$  : Caractéristique positive
- $C_d$  : Coefficient de débit
- $C_M$  : Constante le long de la caractéristique négative
- $C_P$  : Constante le long de la caractéristique positive
- $C_r$  : Nombre de *Courant*
- $d_C$  : Diamètre de la cheminée d'équilibre
- $D$  : Diamètre de la conduite
- $d_p$  : Diamètre de la conduite forcée (puits blindé)
- $d_T$  : Diamètre de la galerie d'amenée (tunnel)
- $e$  : Epaisseur de la conduite
- $E$  : Module de *Young*
- $F_{i\pm 1/2}$  : Flux aux interfaces gauche et droit de la cellule
- $F_*$  : Flux de la zone intermédiaire de problème de *Riemann*
- $F_R$  : Flux droit du problème de *Riemann*
- $F_L$  : Flux gauche du problème de *Riemann*
- $f$  : Fonction scalaire ou vectorielle quelconque
- $F_f$  : Forces de frottement
- $F_{ext}$  : Forces extérieures
- $F$  : Vecteur flux
- $g$  : Accélération de la pesanteur
- $G$  : Vecteur source
- $H_0$  : Charge initiale en régime permanent
- $H$  : Charge piézométrique
- $H_R$  : Charge piézométrique de la surface libre d'un bassin
- $H_g$  : Hauteur géométrique de refoulement
- $H_{bar}$  : Pression barométrique
- $I^\pm$  : Intégrale du terme de frottement le long d'un bief
- $i$  : Indice de maillage suivant  $x$
- $j$  : Perte de charge unitaire, indice du maillage dans le temps  $t$
- $J$  : Perte de charge totale le long d'un filet liquide
- $J_s$  : Perte de charge singulière
- $J_{Se}$  : Perte de charge singulière à l'entrée du ballon anti-bélier
- $J_{Ss}$  : Perte de charge singulière à la sortie du ballon anti-bélier



- $J_P$  : Perte de charge totale dans la conduite forcée (puits blindé)
- $J_T$  : Perte de charge totale dans la galerie d'amenée (tunnel)
- $K$  : Vecteur propre
- $K_e$  : Module de compressibilité de l'eau
- $L$  : Longueur de la conduite
- $L_P$  : Longueur de la conduite forcée (puits blindé)
- $L_T$  : Longueur de la galerie d'amenée (tunnel)
- $L_{\Delta t}$  : Opérateur dans la méthode de *Godunov*
- $m$  : Masse du liquide, nombre d'ondes, ordre d'une équation différentielle
- $N$  : Discrétisation spatiale de la conduite
- $n$  : Vecteur normal, indice de discrétisation temporelle
- $P$  : Pression
- $Q$  : Débit volumique
- $Q_e$  : Débit entrant
- $Q_s$  : Débit sortant
- $R$  : Résistance de la conduite
- $S_C$  : Section de la cheminée d'équilibre
- $S$  : Section de la conduite
- $S_b$  : Section horizontale du ballon anti-bélier
- $t$  : Temps
- $t_S$  : Temps de simulation
- $T$  : Matrice de passage en calcul des flux
- $T$  : Période propre
- $T_F$  : Temps de fermeture de la vanne
- $U$  : Vecteur des variables d'état
- $u$  : Vitesse locale longitudinale, variable quelconque
- $u_k$  : Constante
- $U_k$  : Solution élémentaire exprimée en série de *Fourier*
- $U_*$  : Variable d'état de la zone intermédiaire de problème de *Riemann*
- $U_R$  : Variable d'état droit du problème de *Riemann*
- $U_L$  : Variable d'état gauche du problème de *Riemann*
- $V_t$  : Vitesse dans la tubulure de branchement
- $V$  : Vitesse moyenne d'écoulement
- $V_0$  : Vitesse moyenne d'écoulement en régime permanent
- $W_{i\pm 1/2}$  : Saut ou amplitude d'une onde d'information
- $w$  : Fonction de pondération
- $W$  : Invariant de *Riemann*
- $x$  : coordonnée spatiale
- $Y$  : Matrice de passage en calcul des flux
- $z$  : Cote géométrique (niveau géodésique)
- $Z_{\max}$  : Niveau maximum dans la cheminée d'équilibre
- $Z_{\min}$  : Niveau minimum dans la cheminée d'équilibre
- $\alpha_{1,2,3}$  : Paramètres liés aux schémas aux différences finies
- $\beta$  : Exposant propre à la vanne

- $\gamma$  : Exposant polytropique
- $\delta x$  : Élément infinitésimal de longueur
- $\varepsilon_1$  : Déformation élastique longitudinale
- $\varepsilon_2$  : Déformation élastique radiale
- $\zeta$  : Coefficient de perte de charge singulière
- $\theta$  : Angle d'inclinaison de la conduite avec l'horizontale
- $\lambda$  : Coefficient de frottement
- $A$  : Nombre de *Mach*, matrice diagonale formée par des valeurs propres
- $\rho$  : Masse volumique du liquide (constante dans le temps)
- $\rho^t$  : Masse volumique (variable ou quasi-stationnaire)
- $\sigma_k$  : Constante utilisée en série de *Fourier* complexe
- $\sigma_1$  : Contrainte normale longitudinale
- $\sigma_2$  : Contrainte normale radiale
- $\tau_w$  : Contrainte tangentielle
- $\tau_v$  : Taux d'ouverture de la vanne
- $\nu$  : Coefficient de proportionnalité de *Poisson*
- $\Phi$  : Relation fonctionnelle
- $\psi$  : Rapport adimensionnel, fonction quelconque du débit
- $\omega_k$  : Constante utilisée en série de *Fourier* complexe
- $\omega$  : Fréquence angulaire
- $\omega_f$  : Fréquence d'excitation
- $\omega'$  : Fréquence des harmoniques
- $\Omega$  : Relation fonctionnelle
- $\Phi$  : Fonction numérique de flux
- $\bar{\rho}$  : Paramètre d'*Allievi*
- $\varpi$  : Poids spécifique du liquide
- $\tilde{\lambda}$  : Valeur propre, multiplicateur de *Lagrange*
- $V$  : Volume d'air
  
- $\bar{v}$  : Rapport adimensionnel de la vitesse à celle de référence
- $\bar{h}$  : Rapport adimensionnel de la charge à celle de référence
- $\bar{x}$  : Rapport adimensionnel de l'abscisse à la longueur de référence
- $\bar{t}$  : Rapport adimensionnel du temps à celui de référence
- $\bar{\zeta}$  : Rapport adimensionnel de la perte de charge à la charge de référence
- $I$  : Rapport adimensionnel de la dénivelée de la conduite à la charge de référence
  
- $\Delta H$  : Variation de la charge
- $\Delta P$  : Variation de la pression
- $\Delta t$  : Pas de discrétisation temporelle
- $\Delta x$  : Pas de discrétisation spatiale
- "~" : Notation relative à l'étape de prédiction
- "^" : Notation relative à l'étape de correction

# LISTE DES FIGURES

<b>Figure (I.1) :</b> Réflexion des ondes .....	8
<b>Figure (I.2) :</b> Vue d'une conduite forcée éclatée de la centrale électrique d'Oigawa, du Japon .....	10
<b>Figure (I.3) :</b> Vue d'une conduite aplatie due à un vacuum de la centrale électrique d'Oigawa .....	11
<b>Figure (II.1) :</b> Forces exercées sur un volume de contrôle liquide .....	23
<b>Figure (II.2) :</b> Bilan des masses à travers un volume de contrôle .....	26
<b>Figure (II.3) :</b> Etat de contrainte dans une portion élémentaire de la conduite .....	28
<b>Figure (II.4) :</b> Forces exercées sur une conduite en équilibre statique .....	29
<b>Figure (II.5) :</b> Signification physique de l'onde de pression $F$ .....	34
<b>Figure (II.6) :</b> Concept de superposition des ondes $F$ et $f$ .....	35
<b>Figure (III.1) :</b> Lignes caractéristiques dans le plan $x, t$ .....	45
<b>Figure (III.2) :</b> (a) Schéma d'une conduite forcée, (b) Diagramme $x, t$ .....	46
<b>Figure (III.3) :</b> Domaine d'influence des conditions initiales d'un système excité en A et B .....	47
<b>Figure (III.4) :</b> Intégration numérique des équations sur le plan $x, t$ .....	48
<b>Figure (III.5) :</b> Réseau des caractéristiques pour le calcul du régime transitoire .....	51
<b>Figure (III.6) :</b> Interpolation des variables $H$ et $Q$ aux pieds des caractéristiques .....	52
<b>Figure (III.7) :</b> Droites caractéristiques aux limites du domaine .....	53
<b>Figure (III.8) :</b> Maillage du domaine de calcul et notations .....	55
<b>Figure (III.9) :</b> Molécules de calcul d'un schéma aux différences finies .....	57
<b>Figure (III.10) :</b> Frontières du domaine et points fictifs de calcul .....	61
<b>Figure (IV.1) :</b> Apparition d'une solution discontinue dans le cas d'une fonction de flux convexe .....	69
<b>Figure (IV.2) :</b> Discrétisation en volumes finis et transfert de flux dans le plan $x, t$ .....	73
<b>Figure (IV.3) :</b> Illustration du sens physique de la règle de stabilité de Courant .....	77
<b>Figure (IV.4) :</b> Approximation du flux par la méthode de <i>Richtmyer</i> .....	79
<b>Figure (IV.6) :</b> Approche décentrée pour le problème d'advection linéaire .....	80
<b>Figure (IV.7) :</b> Interprétation du schéma décentré au sens de propagation d'ondes .....	82
<b>Figure (IV.8) :</b> Représentation du problème de <i>Riemann</i> .....	85
<b>Figure (IV.9) :</b> Caractéristiques au travers d'ondes simple dans l'espace des phases .....	88
<b>Figure (IV.10) :</b> Structure de la solution du problème de <i>Riemann</i> pour un système hyperbolique d'équations de conservation .....	89
<b>Figure (IV.11) :</b> Principe du solveur HLL. Solution analytique et solution approchée .....	91
<b>Figure (IV.12) :</b> Cellules frontières et restitution des flux perdus .....	92
<b>Figure (V.1) :</b> Discrétisation en volumes finis d'une conduite .....	102
<b>Figure (V.2) :</b> Discrétisation en volumes finis type <i>Godunov</i> de premier ordre .....	104
<b>Figure (V.3) :</b> Solution du problème de <i>Riemann</i> dans le plan physique et en espace des phases .....	106
<b>Figure (V.4) :</b> Invariants de <i>Riemann</i> dans l'espace des phases .....	107
<b>Figure (V.5) :</b> Invariants de <i>Riemann</i> généralisés dans l'espace des phases .....	108
<b>Figure (V.6) :</b> Maillage excentré du domaine de calcul et cellules virtuelles .....	111
<b>Figure (V.7) :</b> Traitement numérique des cellules frontières en maillage excentré .....	112
<b>Figure (V.8) :</b> Condition d'écoulement au réservoir (bassin) .....	113
<b>Figure (V.9) :</b> Condition d'écoulement à la vanne .....	114
<b>Figure (V.10) :</b> Loi de manœuvre de la vanne en fonction du temps .....	116
<b>Figure (V.11) :</b> Schématisation et notation de la condition pour un ballon d'air .....	117
<b>Figure (V.12) :</b> Illustration de la variation des variables d'état en fonction du temps .....	119

<b>Figure (V.13) :</b> Paramètres de calcul d'une cheminée sur le tracé d'une conduite .....	121
<b>Figure (V.14) :</b> Principe de calcul de la variation du volume de la cheminée .....	122
<b>Figure (VI.1) :</b> Schéma de l'installation étudiée .....	125
<b>Figure (VI.2) :</b> Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture brusque, sans pertes de charge) .....	127
<b>Figure (VI.3) :</b> Vue axonométrique de la variation de la charge en fonction de l'espace-temps (Fermeture brusque - sans pertes de charge) .....	129
<b>Figure (VI.4) :</b> Vue axonométrique de la variation des débits en fonction de l'espace-temps (Fermeture brusque - sans pertes de charge) .....	130
<b>Figure (VI.5) :</b> Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture brusque, avec pertes de charge) .....	131
<b>Figure (VI.6) :</b> Avancée du front d'onde en fonction du temps (méthode des volumes finis) .....	132
<b>Figure (VI.7) :</b> Avancée du front d'onde et dispersion numérique (schéma de MacCormack) .....	135
<b>Figure (VI.8) :</b> Vue axonométrique de la variation de la charge en fonction de l'espace-temps (Fermeture brusque - avec pertes de charge) .....	135
<b>Figure (VI.9) :</b> Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture lente, sans pertes de charge) .....	137
<b>Figure (VI.10) :</b> Vue axonométrique de la variation de la charge en fonction de l'espace-temps (Fermeture lente - sans pertes de charge) .....	139
<b>Figure (VI.11) :</b> Vue axonométrique de la variation des débits en fonction de l'espace-temps (Fermeture lente - sans pertes de charge) .....	139
<b>Figure (VI.12) :</b> Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture lente, avec pertes de charge) .....	140
<b>Figure (VI.13) :</b> Vue axonométrique de la variation de la charge en fonction de l'espace-temps (Fermeture lente - avec pertes de charge) .....	142
<b>Figure (VI.14) :</b> Schéma simplifié de l'installation de refoulement .....	145
<b>Figure (VI.15) :</b> Variation temporelle de la pression au droit du ballon (sans étranglement) .....	147
<b>Figure (VI.16) :</b> Variation du volume d'air du ballon en fonction du temps (sans étranglement) .....	148
<b>Figure (VI.17) :</b> Fluctuation du débit arrivant dans le réservoir de refoulement (sans étranglement) .....	149
<b>Figure (VI.18) :</b> Vue axonométrique de la variation de la pression dans le plan spatio-temporel (sans étranglement) .....	151
<b>Figure (VI.19) :</b> Variation temporelle de la pression au droit du ballon (avec étranglement) .....	152
<b>Figure (VI.20) :</b> Variation du volume d'air du ballon en fonction du temps (avec étranglement) .....	154
<b>Figure (VI.21) :</b> Fluctuation du débit arrivant dans le réservoir de refoulement (avec étranglement) .....	154
<b>Figure (VI.22) :</b> Vue axonométrique de la variation de la pression dans le plan spatio-temporel (avec étranglement) .....	156
<b>Figure (VI.23) :</b> Courbes comparatives de la pression au pied du ballon issue des deux tests .....	157
<b>Figure (VI.24) :</b> Enveloppes des pressions avec un ballon anti-bélier muni d'un étranglement symétrique .....	157
<b>Figure (VI.25) :</b> Courbes comparatives de l'évolution des volumes d'air issue des deux tests .....	158
<b>Figure (VI.26) :</b> Courbes comparatives de l'évolution du niveau d'eau dans le ballon pour les deux tests .....	158
<b>Figure (VI.27) :</b> Schéma descriptif de l'aménagement hydro-électrique simulé .....	161
<b>Figure (VI.28) :</b> Variation du niveau d'eau dans la cheminée d'équilibre (sans pertes de charge) .....	163
<b>Figure (VI.29) :</b> Variation du débit entrant et sortant de la cheminée d'équilibre (sans pertes de charge) .....	164
<b>Figure (VI.30) :</b> Variation temporelle de la charge au bas de la conduite forcée (sans pertes de charge) .....	165
<b>Figure (VI.31) :</b> Battement du débit de la cheminée et de la conduite forcée (sans pertes de charge) .....	166
<b>Figure (VI.32) :</b> Variation temporelle de la charge dans la galerie d'amenée (sans pertes de charge) .....	167

<b>Figure (VI.33) :</b> Variation du niveau d'eau dans la cheminée d'équilibre (avec pertes de charge) .....	170
<b>Figure (VI.34) :</b> Variation du débit entrant et sortant de la cheminée d'équilibre (avec pertes de charge) .....	171
<b>Figure (VI.35) :</b> Variation temporelle de la charge au bas de la conduite forcée (avec pertes de charge) .....	172
<b>Figure (VI.36) :</b> Fluctuation du débit de la cheminée et de la conduite forcée (avec pertes de charge) .....	173
<b>Figure (VI.37) :</b> Variation temporelle de la charge dans la galerie d'amenée (avec pertes de charge) .....	174
<b>Figure (VI.38) :</b> Influence du diamètre de la cheminée sur l'amplitude du niveau haut .....	177
<b>Figure (VI.39) :</b> Influence du diamètre de la cheminée sur l'amplitude du niveau bas .....	177
<b>Figure (VI.40) :</b> Influence du diamètre de la cheminée sur la charge maximale dans la conduite forcée .....	178
<b>Figure (VI.41) :</b> Influence du diamètre de la cheminée sur les mouvements de plan d'eau dans la cheminée .....	179

## **LISTE DES TABLEAUX**

---

<b>Tableau (III.1) :</b> Typologie des schémas numériques .....	56
<b>Tableau (IV.1) :</b> Principe et particularités des principales méthodes de discrétisation numérique .....	72
<b>Tableau (VI.1) :</b> Données relatives au cas d'étude .....	126
<b>Tableau (VI.2) :</b> Résultats de simulation du Test 1 (sans pertes de charge) .....	128
<b>Tableau (VI.3) :</b> Résultats de simulation du Test 1 (avec pertes de charge) .....	133
<b>Tableau (VI.4) :</b> Résultats de simulation du Test 2 (sans pertes de charge) .....	138
<b>Tableau (VI.5) :</b> Résultats de simulation du Test 2 (avec pertes de charge) .....	141
<b>Tableau (VI.6) :</b> Données de l'installation de pompage .....	145
<b>Tableau (VI.7) :</b> Comparaison des mesures expérimentales et solution numérique (sans étranglement) .....	150
<b>Tableau (VI.8) :</b> Comparaison des mesures expérimentales et solution numérique (avec étranglement) .....	155
<b>Tableau (VI.9) :</b> Données hydrauliques de l'installation hydro-électrique .....	161
<b>Tableau (VI.10) :</b> Comparatif de la solution numérique et méthodes de calcul usuelles (sans PDC) .....	168
<b>Tableau (VI.11) :</b> Comparatif de la solution numériques et méthodes de calcul usuelles (avec PDC) .....	175

# Introduction générale.

L'étude des écoulements non permanents en charge revêt depuis long temps une importance capitale dans le domaine de l'hydraulique, aussi bien pour les scientifiques que pour les Ingénieurs, mais cependant forment une extrême complexité, lorsque nous l'envisageons dans toute son intégralité.

En effet, il est bien connu que dans une conduite transitant un fluide sous pression, si l'on modifie localement les conditions d'écoulement, comme par exemple une mise en route ou arrêt d'une pompe, manœuvre d'une vanne... etc., on introduit dans le fluide une discontinuité portant sur les paramètres de cet écoulement eux-mêmes, à savoir la pression et le débit, qui sont les variables d'état de ce système, ou sur leur dérivées. En raison de l'élasticité du milieu (fluide et conduite), cette discontinuité ou perturbation, dont l'amplitude peut être importante, se propage de part et d'autre de ce point sous forme d'ondes, affectant ainsi rapidement une zone étendue de l'écoulement considéré. Un nouveau régime d'écoulement prend alors naissance et subsiste à celui régnant au temps antérieur.

Il est de coutume chez les Ingénieurs de regrouper sous le vocable de *coup de bélier* l'ensemble de ces phénomènes transitoires, lequel désigne ainsi une variation brutale du régime d'écoulement. En pratique, l'apparition de ces phénomènes peut avoir des conséquences fâcheuses et engendrer de sérieux dommages matériels tels que la rupture de canalisations, désordres dans les installations de pompage ou de turbinage, et parfois même des pertes de vie humaine. Il est donc capital de prévoir et d'étudier ces phénomènes transitoires avec finesse dans l'objectif de réduire leurs effets néfastes par l'utilisation de dispositifs spéciaux et le dimensionnement correct des différents composants des installations hydrauliques.

Comme pour tout problème de la mécanique des fluides, et de physique en général, ce problème obéit à des concepts mécanistes et est décrit en conséquence par un modèle mathématique bien défini. Ce dernier étant obtenu par l'application des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans le milieu fluide étudié. L'application de ces

principes permet alors de formuler les équations du mouvement régissant l'écoulement étudié qui sont dans ce cas un système d'équations aux dérivées partielles.

A l'instar d'un grand nombre de problèmes de la physique mathématique, qui sont régis par des équations aux dérivées partielles, le système, dit parfois de *Saint-Venant*, décrivant les écoulements transitoires en charge est de type hyperbolique non linéaire. L'examen de ce type de système représente actuellement un des plus importants champs d'investigation des équations aux dérivées partielles, tant sur le plan physique que mathématique en raison de la manifestation des ondes de choc et l'apparition de discontinuités dans la solution.

Toutefois, et jusqu'à ce jour, encore nombre de questions mathématiques concernant ces équations restent sans réponse. Lorsque l'écoulement est monophasique, un des problèmes qui résiste encore et toujours d'assaut aux mathématiciens est l'existence de solutions classiques générales à ces équations. Face à cette impasse, où une solution analytique exacte est tout simplement inenvisageable et presque impensable, il ne reste alors que le recours à l'utilisation des méthodes numériques. Ces dernières sont à vocation de calcul scientifique.

L'une des techniques de calcul numérique les plus utilisée et répandue actuellement dans le domaine de la mécanique des fluides et l'hydraulique est bien **la méthode des volumes finis**. Après avoir marquée un succès notables dans la résolution des problèmes elliptiques et parabolique, la discrétisation par *volumes finis* a réussi à séduire depuis quelques années dans la simulation des problèmes hyperboliques et phénomènes associés aux propagations d'ondes, tel que la dynamique des gaz, les écoulements à surface libre, et très récemment les écoulements transitoires en charge. A l'inverse des autres méthodes de discrétisation utilisées dans le passé, la méthode des volumes finis jouie de certaines facultés déterminantes, comme la capture parfaite des chocs et la conservativité. Ces deux particularités découlent de la formulation intégrale utilisée dans la méthode des volumes finis qui reste valide même lorsque des discontinuités apparaissent dans la solution et où les autres techniques aux différences finies tombent à défaut.

C'est dans ce contexte que nous entreprîmes le présent travail en se proposant comme objectif de résoudre par voie numérique les équations différentielles du mouvement transitoires en charge, en d'autre terme, la modélisation et simulation numérique de ce type d'écoulement complexe moyennant *la méthode des volumes finis*. En outre, nous tenterons de mettre en exergue les performances des techniques de discrétisation par études comparatives avec d'autres modèles numériques aux différences finies, intensivement utilisés à ce jour dans la pratique du calcul des régimes non permanents et d'en dégager les conclusions.



Pour y parvenir à cette fin, le travail effectué ici s'articulera sur deux grandes parties distinctes et complémentaires, à savoir :

- **Partie première** : *Revue de la littérature*

Cette partie du travail consiste en la présentation de la synthèse bibliographique effectuée à ce sujet, en conséquence, quatre chapitres composent ce volet :

Le premier chapitre aura pour objectif de présenter les généralités et état de l'art actuel sur la modélisation numérique des régimes transitoires dans les conduites sous pression. Il abordera des notions sur le mécanisme de propagation d'ondes, expliciter le phénomène du coup de bélier avec les causes qui lui donne naissance et les conséquences qu'il engendre dans les installations hydrauliques.

Le chapitre deuxième quant à lui sera consacré à la modélisation mathématique des écoulements instationnaires en charge. En premier lieu, il sera procédé à la dérivation des équations différentielles de base dites de *Saint-Venant* en définissant les hypothèses fondamentales. Une discussion et la simplification du système d'équations ainsi trouvé, forme adimensionnelle et formules des célérités des ondes sont données en fin.

Ceci étant, dans le chapitre suivant nous aborderons les modèles numériques aux différences finies, très répandus aujourd'hui dans le calcul des régimes non permanents. Nous y présenterons la méthode des caractéristiques (MOC), formulation discrétisation et incorporation des conditions aux limites. En second lieu, on se focalisera sur le schéma aux différences finies de *MacCormack*, de type prédicteur-correcteur très réputé en écoulement à surface libre.

Dans le chapitre quatrième, cœur de la première partie du travail, on abordera la méthode des volumes finis appliquée pour les lois hyperboliques de conservation. Sont présenté alors dans ce chapitre, le schéma de *Richtmyer Lax-Wendroff* et la méthode de *Godunov* ainsi que la solution exacte et approchée au problème de *Riemann* aux interfaces intercellulaires. On terminera par les méthodes d'incorporation des conditions aux limites et le traitement du terme source.

- **Partie deuxième** : *Modélisation et simulation numérique*

Dans cette partie prenante, qui constitue le noyau de notre travail, nous nous penchons sur la mise en application de la méthode des volumes finis au sujet étudié. Elle est formée par deux chapitres.

Le premier portera sur la discrétisation des équations différentielles du mouvement par la méthode aux volumes finis. Nous détaillerons l'implémentation du schéma à double pas de *Richtmyer Lax-Wendroff* pour le calcul des flux numériques aux interfaces des cellules puis la

méthode de *Godunov*. On y trouvera le détail de la solution exacte au problème de *Riemann* ainsi que l'application du solveur approché de type *HLL*. Par la suite, un exposé de la méthode d'incorporation des conditions aux limites par le concept de *maillage excentré*, introduite par nous dans le présent travail sera donné. La technique proposée est élucidée aux cas d'appareils hydrauliques fréquemment rencontrés en pratique. Le chapitre se termine par le traitement du terme source par la méthode à pas fractionné de *Runge-Kutta*.

Nous consacrerons le sixième et dernier chapitre du travail à la phase d'applications et d'expérimentations numériques. Ce chapitre important se concentrera sur l'application de la méthode aux volumes finis à des cas pratiques choisis à cet effet. Premièrement une validation du modèle numérique sera faite sur un banc d'essai formé par un cas simple de conduite gravitaire (modèle à blanc) pour apprécier les résultats avec ceux du modèle analytique d'*Allievi* et avec ceux fournis par la méthode des caractéristiques et le schéma de *MacCormack*. Ce test rentre dans l'optique d'une étude comparative des différents schémas numériques et leurs performances pour le cas de fermeture brusque et lente avec omission et prise en compte des pertes de charge. Dans un second temps, nous enchaînerons par l'analyse des écoulements instationnaires en charge dans le cas réel d'une installation de pompage protégée par un ballon anti-bélier et ceci par la méthode aux volumes finis de *Godunov*. Dans ce cas, une confrontation avec les mesures expérimentales permettra d'apprécier les résultats obtenus. L'application couvre deux tests portant sur l'analyse de la réponse dynamique du système dans le cas d'un ballon à passage libre sans étranglement à sa base et le cas où le dispositif est muni d'un organe déprimogène. On entamera par la suite l'analyse du problème des régimes transitoires dans le cas d'un aménagement hydroélectrique muni d'une chambre d'équilibre. La simulation portera sur le cas d'un rejet instantané de la charge sur les turbine avec et sans prise en compte des pertes de charge dans le système. Les deux analyses visent à mettre en exergue le comportement de la cheminée d'équilibre et effet absorbant sur les ondes élastiques émises par la conduite forcée et leur pénétration dans la galerie en charge. En parallèle, nous tacherons à montrer les limites d'application des méthodes de calcul algébriques usuellement appliquées dans ces cas de figure et celle de l'hypothèse admise dans la séparation présomptueuse du phénomène d'oscillation en masse et coup d'ondes.

Ces applications ne manqueront pas entre autres de dégager les remarques pratiques intéressant les Ingénieurs praticiens de lever le voile sur certains phénomènes associés aux régimes transitoires. Le travail se terminera en fin par une conclusion générale et perspectives envisageables dans la ligne de portée du sujet étudié dans le présent mémoire.

## PARTIE PREMIÈRE

---

# *Revue de la littérature*

*« L'histoire du développement de la physique nous montre qu'une théorie serait bien présomptueuse en se flattant d'être définitive ; nous ne voyons guère les théories s'élever que pour crouler. Mais, en s'écroulant, une théorie qui a été construite avec le désir sincère de parvenir au vrai ne disparaît jamais complètement ; parmi ses débris se trouvent toujours des matériaux propres à entrer dans la composition de quelques autres systèmes plus parfaits et plus durables. . . »*

*Pierre Duhem (chimiste et physicien)*

*"On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison."*

Henri Poincaré

# 1. Généralités et état de l'art

## I.1. Introduction

Dans le présent chapitre, des rappels théoriques succincts sur les régimes d'écoulements et phénomènes liés aux régimes transitoires et propagation d'ondes élastiques dans les installations en charge seront donnés en un premier temps. Il sera ensuite enchaîné par une présentation de l'état de l'art, où nous présenterons un aperçu bibliographique des principaux résultats de recherche théoriques et numériques dans le domaine du calcul des écoulements instationnaires en charge.

## I.2. Catégories d'écoulements

Nous donnons à présent la définition de certains types d'écoulements en charge fréquemment abordés dans la littérature spécialisée dont nous ferons usage dans notre travail (*Chaudhry, 1979*).

### I.2.1. Ecoulement permanent et non permanent

Si les conditions d'écoulement, telle que la pression, la vitesse ou le débit en un point donné de la conduite restent invariables dans le temps, alors l'écoulement est dit permanent.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.1})$$

Si par contre ces conditions changent en fonction du temps, le régime d'écoulement subsistant dans le système est dit non permanent ou instationnaire. Ainsi, l'écoulement sera fonction de quatre variables indépendantes, à savoir ( $x, y$  et  $z$ ) du point examiné et le temps ( $t$ ).

$$\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0, \quad \frac{\partial H}{\partial t} \neq 0 \quad (\text{I.2})$$

En réalité, un écoulement turbulent est toujours non permanent suite aux variations enregistrées dans la vitesse du fluide en un point donné. Cependant, en considérant la valeur moyenne de cette dernière sur une courte période, le régime sera considéré comme permanent si cette valeur moyenne est constante dans le temps.

### I.2.2. Régime transitoire

On appelle régime transitoire, un état d'écoulement qui se manifeste entre deux régimes stationnaires, autrement dit c'est un écoulement varié, où les variables d'état ( $H, V$ ) changent. Il peut se produire soit dans un canal à ciel ouvert, soit dans une conduite à écoulement en charge par accroissement ou décroissement du débit. Les exemples qu'on peut citer dans le cas d'écoulements transitoires d'une conduite en charge sont :

- écoulements dus à des machines hydrauliques à charge variable (pulsatoire);
- phénomène du coup de bélier.

### I.2.3. Ecoulement uniforme et non uniforme

Si la vitesse du fluide est constante le long de la coordonnée privilégiée ( $x$ ) de l'écoulement à différents instants, on dira que cet écoulement est uniforme.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.3})$$

Contrairement au cas précédent, lorsque la vitesse d'écoulement varie d'une section à l'autre, l'écoulement est dit non uniforme.

$$\frac{\partial V}{\partial x} \neq 0 \quad (\text{I.4})$$

### I.2.4. Régime oscillatoire établi ou périodique

Si les conditions d'écoulement sont variables en fonction du temps et si elles se répètent à des intervalles de temps fixes, le régime est dit oscillatoire établi ou bien périodique. Le temps d'apparition de deux états identiques du régime est appelé période  $T$ , et la fréquence angulaire (rad/s), couramment notée  $\omega$ , est liée à cette période  $T$  par :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{I.5})$$

L'exemple typique de la manifestation de ce type de régime est celui de l'ouverture et fermeture périodique à une fréquence  $\omega_f$  à l'aval d'une conduite en charge.

## I.3. Notions sur les ondes élastiques

### I.3.1. Mécanisme de propagation

Si dans un milieu continu, au repos, on provoque le déplacement rapide d'un élément, on constate que les éléments voisins se déplacent et agissent à leurs tours sur les particules en contact ; ainsi, le déplacement se propage, de proche en proche, avec une vitesse finie dans tout le milieu. Si l'ébranlement est de faible amplitude, la vitesse de propagation est appelée célérité et on la désigne habituellement par «  $a$  ».

Dans un liquide, cette propagation s'effectue dans une direction confondue avec celle de l'ébranlement. Elle s'accompagne, à cette même célérité, d'une variation de pression, de débit ou bien de la vitesse (Frelin, 2002).

### I.3.2. Réflexion des ondes planes

L'expérience montre qu'un ébranlement se propageant par ondes planes dans un milieu fluide, comme par exemple celui contenu dans une conduite, s'arrête lorsqu'il arrive à l'une de ses extrémités. Il est alors réfléchi et remplacé par un ébranlement se propageant en sens inverse avec des caractéristiques différentes suivant la nature de la partie rencontrée. Cette extrémité peut être :

- fermée par une paroi immobile comme, par exemple, une vanne fermée ;
- ouverte comme le raccordement avec un réservoir ;
- un compromis entre les deux ; diaphragme, vanne semi-ouverte, ... etc.

Le premier de ces ébranlements est appelé "ébranlement incident" et le second "ébranlement réfléchi". Ainsi, l'ébranlement incident n'a plus de signification physique lorsque l'onde dépasse l'extrémité en question, c'est l'inverse pour l'écoulement réfléchi (Figure (I.1)).

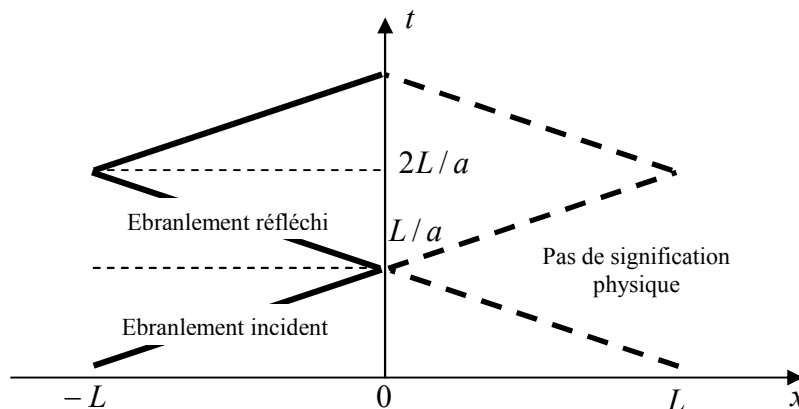


Figure (I.1) : Réflexion des ondes

#### Remarque :

Les ondes planes se propagent sans modification dans un milieu isotrope, mais sont susceptibles de réflexion et de réfraction quand elles rencontrent une surface séparant deux milieux différents, à savoir :

- lors de la réflexion d'une onde plane sur une paroi rigide (extrémité fermée) et immobile, il y a changement de signe pour les vitesses et pas de changement de signe pour les variations de pression, ainsi une onde de compression se réfléchit en une onde de compression ;

- lors de la réflexion d'une onde plane sur une extrémité ouverte (surface libre d'un liquide par exemple), il y a changement de signe pour les variations de pression et pas pour les vitesses, ainsi une onde de compression donne naissance à une onde de dépression.

## **I.4. Phénomène du coup de bélier**

### **I.4.1. Définition**

Les changements du régime d'écoulement d'un fluide contenu à l'intérieur d'une conduite entraînent souvent de brusques variations de pression. Ces écarts seront d'autant plus importants que la modification du débit a été brutale.

D'une manière générale, le coup de bélier exprime toute variation de pression dans une conduite en charge, consécutive à une manœuvre quelconque de l'obturateur aval. Le coup de bélier est un phénomène non stationnaire de propagation d'ondes de pression à très hautes vitesses. Autrement dit, c'est l'arrêt brutal de la circulation de l'eau lorsqu'un organe provoque une prompt modification du débit. Par conséquent, les forces dynamiques qui en résultent peuvent engendrer des ruptures de canalisations, dégâts matériels et quelques fois des pertes de vies humaines, d'où la nécessité de renforcement des ouvrages concernés, en particulier les conduites appelées alors conduites forcées (*Boillat et De Souza, 2004*).

### **I.4.2. Causes fréquentes du coup de bélier**

En ingénierie d'hydraulique, les causes fréquentes occasionnant des coups de bélier sont (*Wylie et Streeter, 1978; Meunier, 1980; Tullis, 1989*) :

- l'ouverture ou la fermeture des vannes dans les conduites gravitaires en charge ;
- la mise en marche ou l'arrêt des pompes sur des conduites de refoulement ;
- vidange ou remplissage inadéquat de la conduite en charge ;
- implosion des poches d'air suite à une cavitation ;
- modification de la vitesse angulaire d'une pompe ;
- coupure électrique inopinée dans une station de pompage qui est la cause la plus fréquente du coup de bélier en hydraulique urbaine ;
- la mise en marche ou la modification de l'opération d'une turbine ;
- variation d'un plan d'eau relié à un réseau en charge ;
- vibration des accessoires de contrôle comme les vannes.

Cette liste est loin d'être exhaustive, et beaucoup d'autres situations complexes engendrent ce phénomène.

### I.4.3. Risques et dommages conséquents aux coups de bélier

Potentiellement, le coup de bélier peut poser de graves conséquences pour les installations hydrauliques. Les risques et avaries causés par ce régime transitoire sont de plusieurs ordres, nous citons (Meunier, 1980 ; Thorley, 2004):

#### a) *Surpressions excessives :*

Conduit à des déformations permanentes ou la rupture des conduites ainsi que ses organes hydrauliques de contrôle, déboîtement de joints, fuites massives et désordres d'infrastructures. Ceci peut arriver si la pression totale, c'est-à-dire la pression en régime permanent majorée de la valeur de surpression due au coup de bélier dépasse la pression maximale admissible des canalisations.

A titre illustratif, les photos ci-après (Figure (I.2)) représentent une rupture d'une conduite forcée.



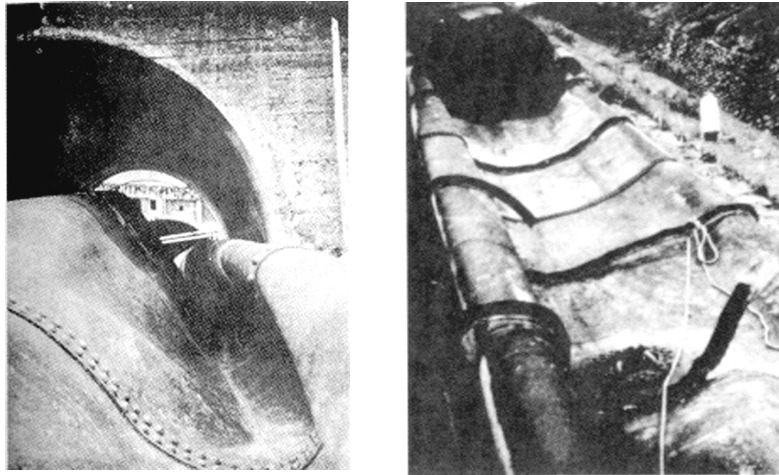
*Figure (I.2) : Vue d'une conduite forcée éclatée de la centrale électrique d'Oigawa, du Japon (d'après Chaudhry, 1979)*

#### b) *Très basse pression :*

Peut causer l'aplatissement des conduites et aspiration des joints, et contamination du fluide si en un point de la conduite la pression atteint le vide barométrique (-10 m.c.e), alors une cavitation (libération de gaz dissous + vapeur d'eau) se produirait, ce qui donne lieu à une séparation de la veine liquide. En ayant un profil en long tourmenté, lors de la phase de surpression, la poche de vapeur se résorbe engendrant une pression atteignant jusqu'à quatre fois la pression de service (Morel, 1994). Donc, c'est un risque à éviter à tout prix.

Les photos ci-dessous (Figure (I.3)) illustrent le risque inhérent à ce cas dangereux.





**Figure (I.3) :** *Vue d'une conduite aplatie due à un vacuum de la centrale électrique d'Oigawa, du Japon (d'après Chaudhry, 1979)*

**c) Inversion de l'écoulement :**

L'inversion du sens d'écoulement conduit à un fonctionnement en dévirage de la pompe, si cette dernière est démunie de clapet de retenue (comme c'est le cas de certaines grandes stations de pompage), causant ainsi des dégâts au groupe motopompe. Notons aussi que cette situation de fonctionnement entraînerait la vidange des réservoirs de stockage et d'accumulation.

**d) Mouvements et vibration des conduites :**

A pour conséquence la surcharge et sollicitation dynamique des supports d'ancrage et butées conduisant par conséquent à la rupture de ces derniers et de la conduite elle-même. Ce phénomène se manifeste généralement quand la conduite entre en état de résonance.

## **I.5. Synthèse bibliographique et état de l'art**

Nous allons à présent illustrer, en passant en revue, l'essentiel de l'état de connaissances sur les régimes transitoires en charge ainsi que les méthodes de calcul numériques développées en vue de la résolution des équations différentielles de base régissant le phénomène. Ayant à l'esprit que le problème des écoulements non permanents reçoit de larges applications dans différents domaines, tels que la biologie, stations hydroélectriques, thermiques et nucléaires, système d'injection de carburant et autres problèmes invoquant la transmission de substance ou de fluides divers, nous nous attacherons ici aux problèmes d'hydrodynamique en charge.

Selon *Ghidaoui et al.* (2005), le problème des écoulements transitoires en charge, connu chez les praticiens sous le vocable de « coup de bélier », a été étudié pour la première fois par *Menabrea* (1885). Les chercheurs qui ont en succédé comme *Weston* (1885), *Carpenter* (1893) et *Frizell* (1898), ont essayé de développer une expression reliant le changement de pression dû au changement de vitesse dans une conduite. *Frizell* (1898) a en fait réussi dans ses efforts. Cependant, des travaux semblables par ses contemporains *Joukowsky* et *Allievi* (1902) ont pu attirer la plus grande attentions. *Joukowsky* a élaboré la formule bien connue dans les écoulements instationnaires, appelée souvent « équation fondamentale du coup de bélier ». Cette formule s'écrit :

$$\Delta P = \pm \rho \cdot a \cdot \Delta V \quad \text{ou} \quad \Delta H = \pm \frac{a}{g} \Delta V \quad (\text{I.6})$$

Où  $a$  désigne la vitesse de l'onde acoustique,  $P = \rho g(H - z)$  est la pression,  $z$  étant la cote géométrique de l'axe de la conduite par rapport à un plan de référence,  $\rho$  la masse volumique du fluide.  $V = \frac{1}{S} \int_S u \cdot dS$ , représente la vitesse moyenne à travers la section transversale  $S$  de la conduite, avec  $u$  la vitesse locale longitudinale, et enfin  $g$  l'accélération de la pesanteur. Le signe positif dans l'équation (I.6) s'applique lorsque l'onde de surpression prend naissance, et le signe opposé quand l'onde de dépression lui succède.

*Allievi* (1913) est le premier à pouvoir interpréter avec une rigueur mathématique le phénomène physique du coup de bélier et en donner la théorie générale. Il démontre ainsi la légitimité de négliger les termes convectifs dans l'équation dynamique du mouvement, et a introduit deux importants paramètres adimensionnels caractérisant la conduite et la manœuvre de la vanne ainsi que des abaques pour le calcul des suppressions suites à des fermetures linéaires d'un obturateur.

Ultérieurement, des extensions et raffinement des équations de base des écoulements transitoires par différents chercheurs ont vu jour, à l'image de *Jaeger* (1933 et 1977), *Parmakian* (1955) et *Wylie et Streeter* (1967). Les efforts combinés de ses chercheurs ont eu comme résultats l'aboutissement aux équations de continuité et de mouvement pour les écoulements en charge instationnaires unidimensionnels (1D) suivantes :

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{I.7})$$

- Equation dynamique :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{4}{\rho D} \tau_w = 0 \quad (I.8)$$

Dans lesquelles  $\tau_w$  est la contrainte tangentielle au voisinage de la paroi de la conduite de diamètre  $D$ .

Le système d'équations (I.7) et (I.8) constitue les équations fondamentales des problèmes d'écoulement non permanent 1D sous pression et représente le modèle mathématique de propagation d'ondes élastiques dans les systèmes de conduites en charge. Dans ces équations, les termes convectifs  $V(\partial H / \partial x)$  et  $V(\partial V / \partial x)$  ont été négligés en raison de leur très faible contribution dans le modèle mathématique complet (*Young Il Kim, 2008*). Les recherches de *Mitre et Rouleau* en 1985 (*Ghidaoui et al. 2005*) sur le coup de bélier en régime laminaire ainsi que ceux de *Vardy et Hwang* (1991) pour le cas du régime turbulent affirment la validité de l'approche unidimensionnelle dans le cas des conduites.

Dans un cas complexe où l'écoulement dans la conduite devient mixte (liquide-gaz ou passage sous pression-surface libre), un autre modèle mathématique plus général déduit des lois classiques de la mécanique des fluides prend part pour décrire le comportement physique du phénomène dans l'enceinte de la conduite. Ce modèle, appelé « équations de base unifiées » et sous certaines hypothèses simplificatrices, s'écrit (*De Almeida et Koelle, 1992*) :

- Equation de continuité :

$$\frac{g\rho}{a^2} \left[ \frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\rho'}{\rho} V \sin \theta \right] + \rho' \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (I.9)$$

- Equation dynamique :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\rho}{\rho'} \frac{\partial H}{\partial x} + gj = 0 \quad (I.10)$$

Où :

$\rho$  : masse volumique du fluide (constante dans l'espace et le temps) ;

$\rho'$  : masse volumique (variable ou quasi-stationnaire) ;

$\theta$  : angle formé par la conduite et l'horizontale ;

$j$  : perte de charge totale par unité de longueur de la conduite.

Ces équations s'appliquent donc pour les fluides compressibles et quasi-incompressibles tel que l'eau. Dans ce cas, en considérant  $\rho \cong \rho'$  et en négligeant les termes

convectifs dans ce modèle ainsi que l'inclinaison de l'axe de la conduite, on retrouvera les équations classiques (I.7) et (I.8).

Notons que le passage "écoulement en charge-à surface libre" reste dans le domaine de la recherche à cause de son comportement hybride, puisque son mouvement est gouverné principalement par la gravité dans sa portion à surface libre et par la pression dans sa portion en charge. Les deux modèles diffèrent essentiellement dans la forme du gradient de pression et dans l'ordre de grandeur de la célérité de l'onde de pression du modèle. Pour surmonter cette difficulté, plusieurs techniques et modèles performants ont été mis sur pied, à l'image des travaux de *Léon* (2007), *Bouso* (2010) et *Kerger et al.* (2010).

Quant à la célérité de l'onde élastique du coup de bélier, elle est donnée par (*Meunier, 1980 ; De Almeida et Koelle, 1992*) :

$$\frac{1}{a^2} = \frac{d\rho}{dP} + \frac{\rho}{S} \frac{dS}{dP} \quad (\text{I.11})$$

Le premier terme du second membre de l'équation (I.11) représente l'effet de la compressibilité du fluide sur la célérité et le second terme traduit l'effet de l'élasticité de la conduite sur cette célérité, qui selon *Korteweg* en 1878, est lié au matériau de la conduite ainsi qu'à sa géométrie. Ainsi, en appliquant les lois de la mécanique des milieux continus au fluide et à la conduite et en négligeant la contrainte longitudinale et l'effet d'inertie radiale de l'enveloppe, *Korteweg* (1878) obtient la formule suivante (*Dinh Tam, 2009*) :

$$a = \sqrt{\frac{K_e / \rho}{1 + \left(\frac{K_e D}{E \cdot e}\right)}} \quad (\text{I.12})$$

Dans laquelle  $K_e$  représente la compressibilité de l'eau,  $E$  le module de *Young* et  $e$  l'épaisseur de la conduite.

Pour la calcul de la perte de charge  $j$  au cours du régime transitoire, plusieurs modèles ont été proposés pour l'évaluation de la contrainte tangentielle  $\tau_w$ , sachant que cette résistance à l'écoulement est essentielle pour garantir une simulation correcte sur de longues périodes. Dans le modèle dit « quasi-stationnaire », on accepte l'hypothèse que l'expression reliant  $\tau_w$  à la vitesse moyenne sur la section de la conduite en régime permanent demeure valide en régime instationnaire (*De Almeida et Koelle, 1992*). Ce modèle englobe les formules de type *Darcy-Weisbach* ou *Hazen-Williams*. Cependant, des désaccords entre les résultats numériques et expérimentaux sont enregistrés en adoptant ce modèle de calcul. Pour pallier à ces anomalies, selon *Ghidaoui et al.* 2005, plusieurs modèles empiriques correctifs du

précédent modèle ont été introduits, parmi lesquels nous citons celui de *Brunone et al.* (1991), *Vardy et Brown* (1995) et *Axworthy et al.* (2000). L'autre classe de modèles se base quant à elle sur la solution analytique des équations de *Navier-Stokes* pour la détermination de  $\tau_w$  en régime non permanent, à l'image de l'approche de *Zielke* (1966) pour le régime laminaire, étendue ultérieurement par *Vardy et Brown* (1996) pour le régime turbulent.

Les équations aux dérivées partielles (I.7) et (I.8) régissant le phénomène de propagation d'ondes du coup de bélier dans une conduite en charge sont de type hyperbolique. Sous cette forme, aucune solution analytique ne se présente pour résoudre les problèmes réels, exception faite de certains cas simples (généralement hypothétiques) sans terme dissipatif et des conditions aux limites simplifiées, lesquels n'intéressent pas les applications d'ingénierie. Cependant, et pour contourner cette difficulté, plusieurs méthodes numériques ont été appliquées avec succès pour approcher la solution désirée.

Distinction est faite dans la littérature entre plusieurs modèles, parmi lesquels certaines méthodes n'ont pas réussie à séduire, telles que la méthode spectrale et la méthode d'intégration aux frontières (*boundary-integral method*), bien adaptées à d'autres types de problèmes, néanmoins les méthodes les plus répandues et explorées dans les problèmes de propagation d'ondes sont (*Ghidaoui et al.* 2005 ; *Yong Il Kim*, 2008):

- la méthode des caractéristiques (MOC);
- la méthode des différences finies (MDF);
- la méthode des éléments finis (MEF);
- la méthode aux volumes finis (MVF).

### **I.5.1. Méthode des caractéristiques (MOC)**

Après la remarquable méthode graphique développée par *Louis Bergeron* publiée dans son célèbre ouvrage en 1949, la méthode des caractéristiques (MOC), une méthode numérique de principe similaire, a vu le jour dès les années 1960 suite à l'essor des moyens de calcul informatique. Un développement significatif en matière de résolution des équations hyperboliques a été introduit par *Lister* en 1960, qui a étudié la méthode des caractéristiques à grille fixe. Il démontra alors la facilité de cette approche pour le calcul du débit et de la pression dans l'espace à un temps constant (*Dinh Tam*, 2009). Depuis, la méthode des caractéristiques a reçu une intense application dans le calcul des régimes transitoires en charge. En adoptant la méthode à grille fixe, un pas de temps ( $\Delta t$ ) commun est utilisé pour le calcul des variables dépendantes sur l'ensemble des conduites du réseau. Dans cette situation, la méthode est considérée comme très performante et précise. Cependant, ces conduites

pouvant avoir des longueurs et des célérités d'ondes différentes rendant ainsi difficile voir impossible la satisfaction de la condition de *Courant* ( $a\Delta t / \Delta x \leq 1$ ) si un incrément de temps identique est adopté pour les conduites. Ce problème de discrétisation peut alors être surmonté par des techniques d'interpolation (Fox, 1977 et Ouragh, 1994), d'ajustement artificiel de la célérité d'onde (Wylie et Streeter, 1978) ou leur combinaison.

Diverses techniques d'interpolation ont été présentées pour traiter ce problème de discrétisation. Selon Ghidaoui et al. (2005), Lister (1960) utilisa une interpolation spatiale linéaire pour approximer les variables ( $H, Q$ ) au pied de chaque ligne caractéristique. Trikha (1975) a suggéré l'utilisation de pas de temps différents pour chacune des conduites afin d'améliorer les délais de calcul en adoptant des incréments plus conséquents, et ainsi éviter les erreurs d'interpolations. Toutefois, l'approche de Trikha (1975) requiert une interpolation aux frontières du domaine de calcul, laquelle peut être source d'imprécisions dans certains cas. Wiggert et Sundquist (1977) proposèrent un schéma unique qui combine deux types d'interpolation spatiale. L'inconvénient est que ce schéma génère des points de calcul supplémentaires induisant alors des temps de calcul et espaces mémoire importants. Ultérieurement, Goldberg et Wylie (1983) développèrent une technique d'interpolation à temps rétrograde (*reach-back time-line interpolation*) utilisant la solution calculée aux pas antérieurs. Ils trouvèrent que cette méthode est plus précise et manifeste moins d'amortissement que l'interpolation spatiale pour une même discrétisation. Lai (1988) combine plusieurs méthodes d'interpolation en un seul schéma général appelé « schéma multi-modes ». Ce dernier schéma offre une flexibilité de choix quant à la technique d'interpolation performante à chaque problème particulier. Sibetheros et al. (1991) montrent que l'interpolation par spline cubique est la plus appropriée quand il s'agit d'une installation hydraulique simple, sans pertes de charge et sujette aussi d'une perturbation simple du régime. Ils comparèrent leur méthode avec le schéma polynomiale de *Hermit* développé en 1977 par Holly et Preissmann. Les résultats montrèrent que l'interpolation spline aboutit à une même précision, cependant meilleur en général que l'interpolation linéaire. Mais cette technique aussi se heurte à des difficultés aux limites du domaine. Karney et Ghidaoui (1997) mettent au point des techniques efficaces d'interpolation dites hybrides qui permettent des temps d'exécution réduits et une utilisation de l'espace mémoire plus optimisé.

Afshar et Rohani (2008) ont proposé de leur côté une méthode des caractéristiques implicite. Dans cette approche, les équations de base de l'élément conduite et des différents appareils sont alors organisées dans un système matriciel ayant pour inconnus les variables  $H$

et  $Q$  au pas de temps considéré. Les auteurs mettent ainsi en relief dans leur travail la supériorité de la méthode face aux limitations de la méthode des caractéristiques classique.

### **I.5.2. Méthode des plans d'ondes**

A coté des schémas numériques basés sur la méthode des caractéristiques, d'autres schémas et méthodes numériques ont pris part dans l'analyse des écoulements transitoires. La méthode dite des « plans d'ondes », développée sur un concept analogue à celle des caractéristiques, repose sur l'approximation de la perturbation par une série d'ondes constantes (Wood, 2005 ; Ramalingam et al., 2009). Cette approximation est donc de premier ordre dans l'espace et dans le temps, d'où la nécessité d'une fine discrétisation pour une bonne précision dans la solution du problème. La méthode souffre aussi d'une rigueur dans l'incorporation du terme de frottement et la description physique des phénomènes instationnaires liés à la contrainte tangentielle aux parois (Young Il Kim, 2008).

### **I.5.3. Méthode des différences finies**

Il est possible, au lieu d'utiliser la méthode des caractéristiques, de faire usage de l'approximation par différences finies pour résoudre les équations aux dérivées partielles du mouvement transitoire sous leur forme conservative ou non conservative. Un bon nombre de schémas aux différences finies implicites et explicites ont été mis au point à cet effet.

Dans la famille des schémas implicites, les variables dépendantes inconnues  $H$  et  $Q$  en un point donné de l'espace à un temps déterminé sont exprimées en terme des valeurs inconnues au même pas de temps aux nœuds adjacents. Les équations algébriques résultant sont résolues simultanément pour le système complet à chaque incrément de temps. Dès le début des années 1970 plusieurs travaux ont été effectués dans ce contexte, à l'image de Wylie et Streeter (Ghidaoui et al. 2005) qui présentèrent une méthode implicite aux différences finies centrées afin de permettre l'usage d'incrément de temps plus grand que les schémas explicites. D'après Young Il Kim (2008), un nombre d'autres travaux ont vu jour, parmi lesquels nous trouvons ceux de Bribisca (1981), Han (1983), Anderson (1991), Verwey et Yu (1993), Salgado et al. (1994) et Schohl (2003). Cependant, l'application des schémas implicites augmente le temps de calcul et le stockage mémoire à cause du calcul matriciel nécessaire et la non linéarité des équations algébriques résultants. Outre ces difficultés, sur le plan mathématique, les schémas implicites ne sont pas appropriés aux problèmes de propagation d'ondes dans la mesure où ceux-ci distordent le chemin de propagation emprunté

par l'information et dégrade de ce fait la représentativité du modèle mathématique de base (Ghidaoui et al. 2005).

Dans la catégorie des schémas explicites, les dérivées partielles sont remplacées par une approximation aux différences finies tel que les inconnues en un point de la grille de calcul à un temps  $t$  sont exprimées en fonction des variables connues au temps antérieur. Le travail le plus remarquable dans ce sujet revient à Chaudhry et Hussaini (1985) qui ont appliqué les schémas de MacCormack, Lambda et Gabutti pour le problème du coup de bélier pour le cas sans pertes de charge. Ces trois méthodes sont des schémas aux différences finies explicites d'une précision de deuxième ordre (en espace et en temps) qui ont reçu aussi des applications dans les problèmes d'écoulement à surface libre (Fennema et Chaudhry, 1986). Les auteurs ont fait usage de deux techniques pour le traitement des conditions aux limites, l'une par l'ajout de nœuds fictifs aux frontières et l'autre en exploitant les lignes caractéristiques, qui est la plus facile à implémenter. Il a été ainsi démontré que ces trois schémas donnaient une meilleure solution que la méthode des caractéristiques de premier ordre pour un nombre de Courant  $C_r < 1$ , cependant des oscillations numériques dans le profil de l'onde ont été observées. Ainsi, le Schéma de MacCormack a été utilisé avec succès par Kessal (1987) dans la simulation du problème d'écoulement homogène transitoire avec cavitation. Ultérieurement Chaudhry et al. (1990) appliquèrent le schéma de MacCormack et de Gabutti pour la simulation des écoulements non permanents diphasiques liquide-gaz avec un faible nombre de Mach. Les résultats obtenus par les auteurs montrent que le schéma de MacCormack aboutit à de meilleurs résultats pour l'analyse des écoulements transitoires en charge.

#### 1.5.4. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a reçue une large application dans les problèmes de la mécanique des solides et des fluides (Zienkiewicz et Taylor, 2000) ; mais son succès dans le calcul des écoulements transitoires est très restreint. Habituellement, dans ce type de problèmes, des techniques hybrides mettant en œuvre des éléments finis dans le domaine spatiale et les différences finies dans le domaine temporelle sont appliquées (Young Il Kim, 2008). L'avantage principal de la méthode des éléments finis est son habilité à traiter les géométries complexes du domaine de calcul. A l'opposé, le temps et le volume des calculs restent les inconvénients majeurs de la méthode. Szymkiewicz (1995) propose une version modifiée de la méthode des éléments finis appliquées aux équations de transport et des écoulements non permanents. L'approche repose sur une modification de la méthode standard



d'intégration dans la méthode de *Galerkin*. Son application à la résolution des équations de *Saint-Venant* en écoulement à surface libre, a révélée les mêmes résultats que le schéma de *Preissmann* avec cependant quelques avantages. Ultérieurement, *Szymkiewicz* et *Mitosek* (2005) ont appliqué la même approche pour la résolution des problèmes d'écoulements transitoires en charge. La formulation numérique aboutit à un schéma aux différences finies implicite à six points avec deux paramètres de pondération. La méthode ainsi proposée a montré de meilleurs résultats comparativement à la version standard de la méthode aux éléments finis et aux différences finies. *Sattar et al.* (2009) ont introduit une nouvelle méthode « *Ondelette-Galerkin* » pour la résolution des équations hyperboliques du coup de bélier, avec linéarisation du terme de frottement, moyennant l'utilisation de deux types d'ondelettes (Haar et Daubechies) comme base du schéma de *Galerkin*. Les auteurs mettent en relief la supériorité de la méthode vis-à-vis de la méthode des caractéristiques mais soulignent en parallèle la difficulté d'implémentation de la méthode dans la mesure où l'on se heurte au problème de décomposition du signal en ondelettes, ce qui laisse la méthode loin d'être pratique.

#### **I.5.5. Méthode des volumes finis**

Récemment, et depuis quelques années, la méthode des volumes finis (VF) a attiré les chercheurs de part sa robustesse et sa facilité d'application. Ainsi, après avoir fait ses preuves dans la résolution des équations hyperboliques, spécialement la dynamique des gaz (*LeVeque, 2002*), la méthode a trouvé application dans les problèmes d'écoulement à surface libre (*Toro et Garcia-Navarro, 2007*) et celui du coup de bélier. D'après *Ghidaoui et al.* (2005), les schémas de type volumes finis ont été appliqués pour la première fois par *Guinot* (2000). Ce dernier a développé une solution de type *Riemann* pour la simulation du coup de bélier, et utilisa cette solution pour développer un schéma de *Godunov* de premier ordre. Ce schéma ainsi obtenu est très semblable à celui de la méthode des caractéristiques. Ultérieurement *Zhao et Ghidaoui* (2004) formulent et appliquent des schémas aux volumes finis de type *Godunov* de premier et deuxième ordre pour la résolution de l'équation dynamique de et celle de continuité gouvernant le problème du coup de bélier. Ils montrent alors l'influence négligeable des termes convectifs et aussi la supériorité de ces solveurs comparés à la classique méthode des caractéristiques en terme de précision et qualité de la solution. Ces résultats ont été confirmés par la suite par le travail de *Sabbagh-Yazdi et al.* (2007). A ce temps, les schémas et solveurs numériques découlant de la méthode aux volumes finis sont en plein essor et ne cessent de progresser par les avantages qu'ils offrent. Nous citons, en guise

d'exemple, les travaux de *Léon et al.* (2009) dans l'application des schémas de *Godunov* au problème d'écoulement instationnaire mixte à surface libre-en charge, qui a introduit de nouveaux concepts pour la prédiction des flux numériques aux interfaces pour une meilleure capture d'information ainsi que l'amélioration du traitement des conditions aux limites.

## **I.6. Conclusion**

Dans ce chapitre et dans un premier abord, certaines notions et définitions générales dont l'usage se fera dans la suite du travail, relevant des écoulements ainsi que la propagation des ondes planes dans les conduites forcées, ont été présentées. Un accent particulier a été mis sur la présentation du phénomène du coup de bélier, définition, causes et conséquences et ceci dans le but de mettre en relief l'importance pratique et la nécessité d'une prédiction et calcul numérique correct du phénomène.

Nous avons ensuite passé en revue l'essentiel de l'état de l'art concernant la modélisation et résolution numérique des équations de base régissant le phénomène de propagation des ondes élastiques en écoulement en charge. Ces équations étant insolubles analytiquement, les travaux effectués portant sur les méthodes numériques de calcul développées à cette fin ont été présentés, où l'accent a été mis sur les schémas numériques qui ont reçu de larges échos, à savoir, la théorie des caractéristiques, les différences finies et les volumes finis. La synthèse bibliographique ainsi effectuée a montré la popularité de la méthode des caractéristiques vis-à-vis des autres méthodes. Cependant, les contraintes relatives à l'aspect numérique, que l'on rencontre dans le cas des réseaux de conduites, font de la méthode, sous sa forme classique, une cible de détronement par d'autres schémas numériques de précision plus affirmée.

A cet égard, la méthode des volumes finis se révèle prometteuse pour ce type de problèmes, sachant que cette dernière a fait ses preuves dans nombre d'autres problèmes relatifs aux écoulements à surface libre, caractérisés par les discontinuités, ce qui forme un test rigide à toute méthode concourant à la résolution numérique des équations hyperboliques. Nous pouvons alors constater à ce sujet, le nombre réduit de travaux portant sur l'application de la méthode des volumes finis au calcul pratique des écoulements transitoires en charge, et les travaux d'études comparatives de ses performances.

*“ ..Les équations aux dérivées partielles sont la base de tous les théorèmes physiques. Dans la théorie des ondes dans les gaz, liquides et solides, dans l'étude de l'élasticité, dans les systèmes optiques, partout les équations aux dérivées partielles formulent les lois fondamentales de la nature qui peuvent être vérifiées par l'expérience. ”*

**Bernhard Riemann**

## 2.

# Modélisation mathématique

### II.1. Introduction

Après avoir présenté quelques aspects théoriques relatifs aux régimes transitoires en charge et exposé l'état de l'art sur le sujet, nous aborderons à présent la modélisation mathématique du phénomène. L'application simultanée des principes de conservation de masse et de quantité de mouvement permettra de formuler le système d'équations différentielles du modèle élastique qui gouverne les problèmes de propagation d'ondes du coup de bélier. Une discussion du système d'équations et sa solution générale sous la forme conservative seront données.

### II.2. Considérations préliminaires

Les équations du mouvement que nous dériverons dans le présent chapitre sont issues du modèle dit « élastique ». Ce modèle correspond aux conditions physiques du régime transitoire dans lesquelles on considère les effets de déformation de la conduite et la compressibilité du fluide. Ce dernier est supposé se contracter et se dilater suivant les conditions isothermiques et caractérisé par son module de compressibilité, condition pouvant être considérée comme valide pour les liquides.

Dans l'analyse des écoulements non permanents, l'équation dynamique et de continuité doivent être satisfaites dans le calcul de la pression (ou charge) et de la vitesse (ou débit) comme fonction de la position et du temps, à savoir  $H(x,t)$  et  $V(x,t)$ , suivant la description dite *Eulerienne*. Si des gaz sont impliqués dans l'analyse d'écoulements brusquement variés, l'équation de l'énergie doit être considérée dans ce cas dans la mesure où un transfert thermique apparaît, et la variable température sera alors une nouvelle inconnue (*Wylie et Streeter, 1978*).

Le développement des équations fondamentales invoqué ici repose sur les hypothèses suivantes (De Almeida et Koelle, 1992) :

1. la conduite est considérée uniforme et l'écoulement est unidimensionnel ; la vitesse et la pression suivent une distribution uniforme à travers la section transversale de la conduite ;
2. la déformation de la conduite est linéairement proportionnelle à la contrainte (loi d'élasticité de *Hooke*) et l'effet de compressibilité du liquide est caractérisé par son module de compressibilité et la linéarité de comportement. Aucune interaction fluide-structure n'est prise en compte ;
3. le fluide est homogène et monophasique, donc aucune cavitation ou vaporisation du fluide n'apparaît durant le régime transitoire. Les équations ne seront valides pour un écoulement biphasique ou rupture de veine liquide ;
4. les formules des pertes de charge par frottement en régime stationnaire sont valides en régime transitoire (hypothèse de quasi-stationnarité) ;
5. aucun apport ou distribution latéral de débit n'est observé.

## II.3. Equations différentielles de base

### II.3.1. Equation dynamique

Nous allons établir à présent l'équation du mouvement pour le volume de contrôle représenté sur la figure (II.1) à un instant donné  $t$ , où la conduite subit une déformation due aux forces dynamiques du régime transitoire. Les forces extérieures s'exerçant sur la tranche liquide projetées sur l'axe  $x$  de la conduite se composent de :

- la force de pression normale sur la face amont :  $PS$  ;
- la force de pression normale à la face aval de la tranche :  $-\left(PS + \frac{\partial(PS)}{\partial x} \delta x\right)$  ;
- la composante du poids propre due au champ de gravité :  $-\rho g.S.\delta x \cdot \sin \theta$  ;
- la composante de pression sur l'enveloppe :  $\left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \frac{\partial S}{\partial x} \delta x$  ;
- la force de frottement du liquide avec la paroi :  $\tau_w.\pi.D.\delta x$ .

Ainsi, l'équilibre dynamique des forces extérieures de surface et de volume s'écrira :

$$\sum F_x = PS - \left(PS + \frac{\partial(PS)}{\partial x} \delta x\right) + \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \frac{\partial S}{\partial x} \delta x - \tau_w.\pi.D.\delta x - \rho g S \delta x \sin \theta \quad (\text{II.1})$$

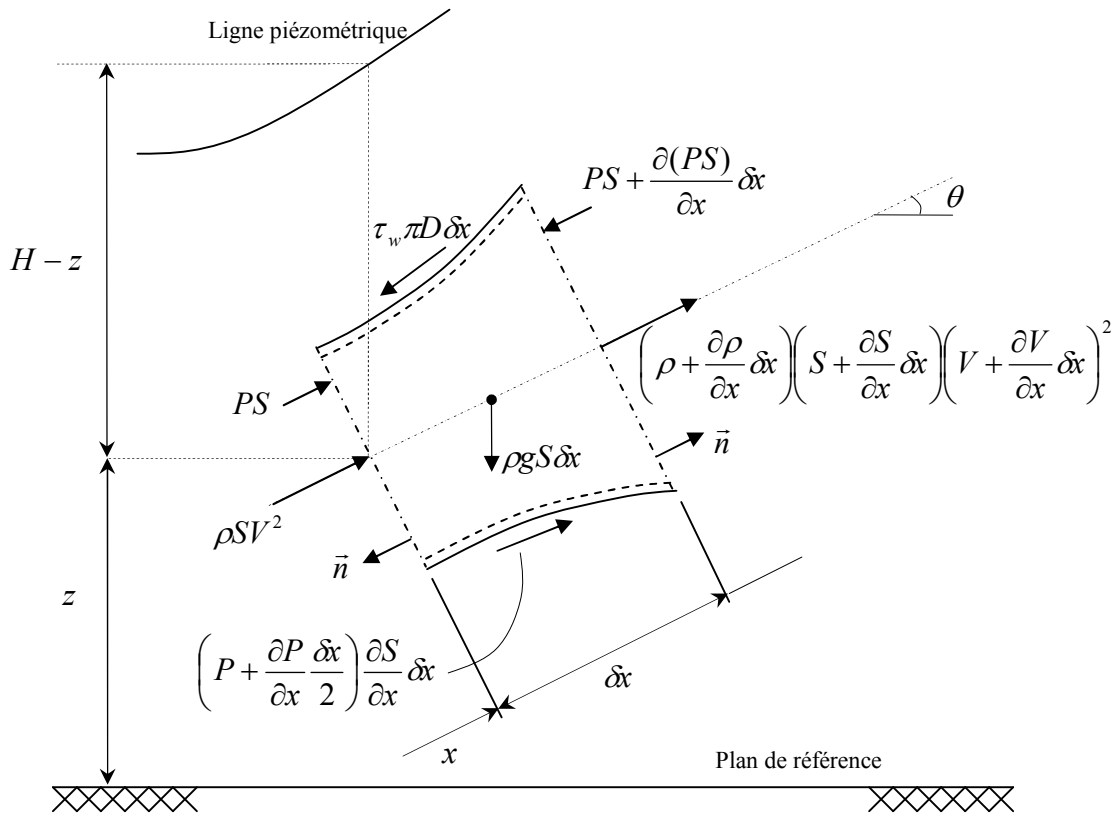


Figure (II.1) : Forces exercées sur un volume de contrôle liquide

En omettant les termes de second ordre dans l'expression (II.1) et en simplifiant, on obtient :

$$\sum F_{ext} = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} S + \rho g S \sin \theta\right) \delta x - \tau_w \cdot \pi \cdot D \delta x \tag{II.2}$$

Nous savons que le principe fondamental de la dynamique, qui indique que le changement temporel de l'impulsion est égal à la somme des forces extérieures exercées sur le volume de contrôle ( $\mathcal{G}$ ) liquide de longueur  $\delta x$ , s'écrit (Comolet, 1990) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt} (m\vec{V}) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}} \rho \cdot \vec{V} \cdot d\mathcal{G} \tag{II.3}$$

Le premier membre de l'équation (II.3) étant connu, il reste à développer le second membre qui représente la dérivée temporelle de la quantité de mouvement sous sa forme intégrale. Pour ce faire, on se servira du théorème de transport de Reynolds. Ce théorème fondamental en mécanique s'écrit pour une fonction scalaire ou vectorielle  $f$  quelconque de la manière suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}} f \cdot d\mathcal{G} = \int_{\mathcal{G}} \frac{\partial f}{\partial t} d\mathcal{G} + \int_S fu \cdot ndS \quad (\text{II.4})$$

Il traduit que la variation temporelle d'une quantité  $f$  définie sur un volume de contrôle  $\mathcal{G}$  se compose de la somme de la variation de  $f$  au cours du temps au sein du volume (variation locale) ainsi que le flux de  $f$  à travers la surface  $S$  enveloppant le volume de contrôle matériel, avec  $n$  la normale unitaire à la surface  $S$ .

Si l'on applique le présent théorème à la fonction vectorielle représentant la quantité de mouvement locale  $f = \rho\vec{V}$ , on aura :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}} \rho\vec{V} d\mathcal{G} = \int_{\mathcal{G}} \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} d\mathcal{G} + \int_S \rho\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (\text{II.5})$$

Développons à présent les termes de flux et de variation locale dans l'équation (II.5).

Le flux de la quantité de mouvement à travers la surface délimitant le volume de contrôle s'obtient par :

$$\int_S \rho\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = -\rho SV^2 + \left( P + \frac{\partial P}{\partial x} \delta x \right) \left( S + \frac{\partial S}{\partial x} \delta x \right) \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} \delta x \right)^2 \quad (\text{II.6})$$

Après développement et élimination des termes d'ordre supérieur, l'équation (II.6) devient :

$$\int_S \rho\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \left( 2\rho SV \frac{\partial V}{\partial x} + \rho V^2 \frac{\partial S}{\partial x} + SV^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \delta x \quad (\text{II.7})$$

Quant à la variation locale de la quantité de mouvement à l'intérieur du volume de contrôle, elle s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{G}} (\rho\vec{V}) d\mathcal{G} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho VS \delta x) = \left( SV \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho S \frac{\partial V}{\partial t} + \rho V \frac{\partial S}{\partial t} \right) \delta x \quad (\text{II.8})$$

Sachant par ailleurs que  $\frac{\partial}{\partial t}(\delta x) = 0$  en raison de l'invariance de la longueur de l'élément fluide dans le temps.

Après regroupement et réarrangement des termes des équations (II.7) et (II.8) dans (II.5), on obtient après division par  $\rho S \delta x$  :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{G}} \rho\vec{V} d\mathcal{G} = V \left[ \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\rho} V \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \left( \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{S} V \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial V}{\partial t} + 2V \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{II.9})$$

En exprimant la dérivée matérielle (ou de *Lagrange*) d'une grandeur quelconque  $f(x,t)$  en fonction de ses dérivées partielles (*Piskounov, 1980*), comme suit :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + V \frac{\partial f}{\partial x} \quad (\text{II.10})$$

On retrouve alors l'équation (II.9) sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \int_g \rho \vec{V} d\vartheta = V \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} \right] + \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \quad (\text{II.11})$$

On verra par la suite que pour satisfaire à la condition de continuité, l'expression entre crochets dans l'équation (II.11) est nulle.

En portant le résultat de l'équation (II.2), en prenant le soin de le diviser par  $\rho S \delta x$ , et celui de l'équation (II.11) dans (II.3), on trouve :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{\tau_w \pi D}{\rho \cdot S} + \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.12})$$

Déterminons l'expression de " $\tau_w \cdot \pi \cdot D$ " en adoptant l'hypothèse précédemment admise stipulant que la contrainte de cisaillement  $\tau_w$  est identique à celle en régime permanent.

On sait par ailleurs que la force de frottement  $F_f$  se calcule par la formule suivante :

$$F_f = \tau_w \pi \cdot D \cdot L = \Delta P \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \quad (\text{II.13})$$

D'où l'on déduit facilement que:

$$\pi \cdot \tau_w \cdot D = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \rho g \frac{\lambda}{D} \frac{V^2}{2g} = j \rho g \cdot S \quad (\text{II.14})$$

Avec :  $j = \frac{\lambda}{D} \frac{V^2}{2g}$  qui représente le gradient hydraulique.

Portons l'expression de ' $\tau_w \cdot \pi \cdot D$ ' dans l'équation (II.12), on aura :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g(\sin \theta + j) + \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.15})$$

Sachant que :  $P = \rho g(H - z)$  et  $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin \theta$

On obtient en définitif la forme suivante pour l'équation (II.15) :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + gj = 0 \quad (\text{II.16})$$

L'expression (II.16) est la première équation du régime varié en charge. Elle se met également sous la forme :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda V |V|}{2D} = 0 \quad (\text{II.17})$$

### II.3.2. Equation de continuité

L'équation de conservation de la masse appliquée au volume de contrôle exprime que la différence des masses entrant et sortant de ce volume est égale à la masse conservée à l'intérieur. Le changement total de la masse du système est donc nul (Carlier, 1980).

La figure (II.2) illustre un volume élémentaire  $\mathcal{V}$  de longueur  $\delta x$  à un instant  $t$ . La section de la conduite  $S$  ainsi que la masse volumique du fluide  $\rho$  sont fonction de la pression  $P(x,t)$ .

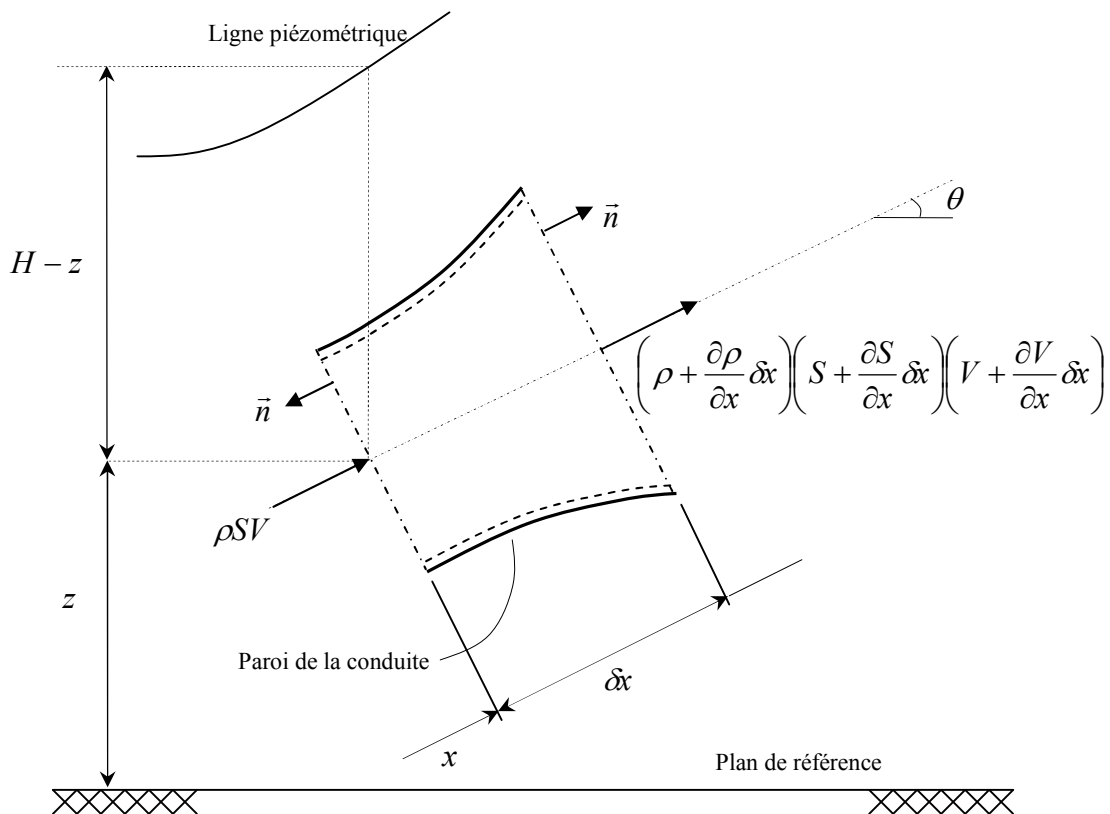


Figure (II.2) : Bilan des masses à travers un volume de contrôle

Suivant la figure (II.2), la masse fluide entrant à travers la section amont par unité de temps est :

$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_e = \rho S V \tag{II.18}$$

En admettant l'hypothèse de continuité des fonctions  $\rho(x,t)$ ,  $S(x,t)$  et  $V(x,t)$ , la masse par unité de temps sortant de la face aval du volume de contrôle sera , en appliquant aux fonctions précédentes un développement en série de *Taylor* tronqué au premier ordre :



$$\left. \frac{dm}{dt} \right|_s = \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \right) \left( S + \frac{\partial S}{\partial x} \delta x \right) \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} \delta x \right) \quad (\text{II.19})$$

De ce fait, le changement temporel de la masse emmagasinée à l'intérieur de ce volume s'exprimera par :

$$\left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x \right) \left( S + \frac{\partial S}{\partial x} \delta x \right) \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} \delta x \right) - \rho S V = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho S \delta x) \quad (\text{II.20})$$

Ayant fait quelques transformations algébriques et sans oublier d'omettre les termes de second ordre contenant  $(\delta x)^2$ , on aboutit, après avoir simplifié par  $\rho S \delta x$ , à :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{V}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{V}{S} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{1}{\delta x} \frac{\partial(\delta x)}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.21})$$

En écrivant les dérivées partielles dans l'équation (II.21) en fonction des dérivées totales (ou de *Lagrange*), et tenant aussi en considération l'invariance de la longueur de l'élément de volume ( $\partial(\delta x)/\partial t = 0$ ), le résultat sera :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.22})$$

C'est le résultat préalablement utilisé dans l'équation (II.11), qui traduit ainsi le principe de conservation de la masse.

On sait par ailleurs que, par analogie à l'élasticité des solides, la variation de pression  $dP$  (variation de la contrainte) entraîne une diminution de volume  $d\mathcal{G}$  (déformation) de la masse de l'eau, telle que (*Lencastre, 1963; Carlier, 1980*) :

$$dP = K_e \frac{d\mathcal{G}}{\mathcal{G}} \quad (\text{II.23})$$

Ou autrement écrit :

$$\frac{dP}{K_e} = \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{II.24})$$

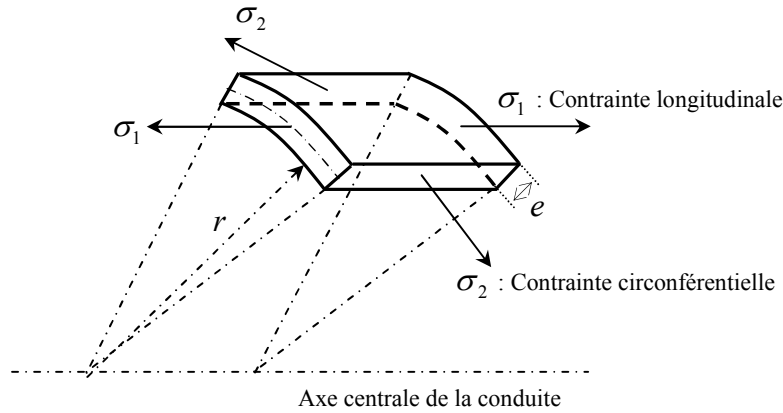
En réécrit l'équation (II.22) par conséquent comme suit :

$$\frac{1}{K_e} \frac{dP}{dt} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.25})$$

Ainsi, la présente équation est valide pour une conduite de forme quelconque et pour n'importe quel fluide homogène, liquide ou gaz (*De Almeida et Koelle, 1992*).

Le terme  $dS/S$  caractérise la déformation élastique de l'enceinte (conduite) due à la pression interne. Sa valeur dépend des caractéristiques géométriques et

structurales. Pour déterminer ce rapport, nous ferons appel aux lois de comportement mécanique des tubes sous pression.



**Figure (II.3) :** Etat de contrainte dans une portion élémentaire de la conduite

Désignons par  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les contraintes longitudinales et radiales,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  les déformations correspondantes (Figure (II.3)). La loi de *Hooke* permet en effet d'écrire (*Ouragh, 1994*) :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1) \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

Où :

- E : module d'élasticité longitudinale du matériau (module d'*Young*).
- $\nu$  : Coefficient de proportionnalité sans dimension, dit coefficient de *Poisson*.

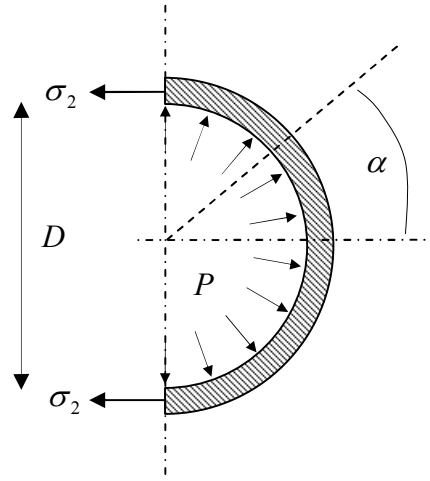
Si l'on considère une section transversale d'une conduite de longueur  $L$  et d'une épaisseur  $e$  soumise à une pression interne  $P$  (Figure (II.4)), la mise en équilibre statique de la moitié du tube sous pression permet d'écrire :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P \cos \alpha \cdot d\Sigma - 2\sigma_2 L \cdot e = 0 \quad (\text{II.27})$$

Avec  $d\Sigma = L \cdot r \cdot d\alpha$ , surface infinitésimale interne. On aura donc :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} PL \cdot r \cos \alpha \cdot d\alpha = 2\sigma_2 L \cdot e \quad (\text{II.28})$$

Une fois l'équation (II.28) intégrée, on obtient :



**Figure (II.4) :** Forces exercées sur une conduite en équilibre statique

$$\sigma_2 = \frac{P.D}{2.e} \quad (\text{II.29})$$

De manière générale on peut écrire pour la contrainte longitudinale :  $\sigma_1 = \kappa.\sigma_2$ , avec  $\kappa$  coefficient d'ancrage. Dans un but de simplification, l'hypothèse selon laquelle la conduite comporte des joints de dilatation sans friction est admise sur toute la longueur, donc  $\sigma_1 = 0$ , ainsi la formule (II.29) est admise (Chaudhry, 1979; Boillat et De Souza, 2004).

Ceci dit, la variation de pression  $dP$  entraîne alors une variation  $d\sigma$  de contrainte sans déphasage dans le temps, c'est dire que la paroi de la conduite est dépourvue d'inertie pour cause de la minceur de l'enveloppe. On a alors :

$$d\sigma = \frac{D}{2.e} dP \quad (\text{II.30})$$

Cette augmentation de contrainte  $d\sigma$  (effort) entraîne un accroissement du diamètre  $dD$  (déformation), elle est donnée par la loi de l'élasticité :

$$d\sigma = E \frac{dD}{D} \quad (\text{II.31})$$

Des relations (II.30) et (II.31), on déduit :

$$\frac{dD}{D} = \frac{d\sigma}{E} = \frac{D.dP}{2.E.e} \quad (\text{II.32})$$

L'accroissement de diamètre  $dD$  entraîne un accroissement de la section  $dS$  tel que :

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{dD}{D} \quad (\text{II.33})$$

$$dS = 2.S.\frac{dD}{D} = \frac{S.D}{E.e}.dP \quad (\text{II.34})$$

Désignons par  $\psi$  le rapport adimensionnel suivant :

$$\psi = \frac{E}{S} \frac{dS}{dP} \quad (\text{II.35})$$

Ou encore :

$$\psi = \frac{E}{S} \frac{(dS/dt)}{(dP/dt)} \quad (\text{II.36})$$

Il en découle alors que l'expression (II.25) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{dP}{dt} \left( \frac{1}{K_e} + \frac{\psi}{E} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.37})$$

Posons le paramètre :

$$a^2 = \frac{1}{\rho \left( \frac{1}{K_e} + \frac{\psi}{E} \right)} \quad (\text{II.38})$$

On vérifie facilement que  $a$  a les dimensions d'une vitesse. Nous montrerons plus loin que  $a$  représente la vitesse de propagation des ondes de vitesse et de pression à l'intérieur d'un liquide limité par la conduite.

L'introduction de ce paramètre dans l'équation (II.37) donne :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} + a^2 \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.39})$$

Ainsi, l'équation de continuité (II.39) représente la relation entre variation totale de la pression et le gradient spatial de la vitesse. Cette dépendance entre ces deux variables implique la célérité des ondes  $a$ , laquelle est conjointement fonction de la conduite et du fluide (caractéristiques de la conduite et compressibilité du liquide).

Dans les régimes transitoires (avec faible variation de  $\rho$ ), l'expression de la charge totale  $H = z + P/\rho g$  demeure vigoureuse avec  $\rho' = \rho = \text{constante}$ . Dans un tel cas, on écrit :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{\rho g} \frac{dP}{dt} + \frac{dz}{dt} \quad (\text{II.40})$$

Ou bien encore :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} = g \left( \frac{dH}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) \quad (\text{II.41})$$

La conduite étant fixe et ancrée ( $\partial z/\partial t = 0$ ), la différentielle totale dans ce cas sera :

$$\frac{dz}{dt} = V \frac{\partial z}{\partial x} = V \sin \theta \quad (\text{II.42})$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} = g \left( \frac{dH}{dt} - V \sin \theta \right) \quad (\text{II.43})$$

En faisant usage de la dérivée matérielle de la charge ( $dH/dt$ ) dans l'équation (II.43), on écrira en final (II.39) sous la forme :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} - V \sin \theta + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.44})$$

L'équation (II.44) représente alors l'équation de continuité gouvernant les régimes transitoires en charge, laquelle couplée avec l'équation dynamique (II.16) précédemment établie, permet d'obtenir la solution des variables d'état de l'écoulement.

## II.4. Discussion des équations de base

Reprenons le système d'équations (dit parfois de *Saint-Venant*) des écoulements instationnaires en charge :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} - V \sin \theta + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 & (\text{II.45}) \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda V |V|}{2D} = 0 & (\text{II.46}) \end{cases}$$

L'équation de continuité (II.45) et celle de la dynamique (II.46) régissant la propagation des ondes élastiques dans les conduites en charge, constituent donc un système d'équations différentielles de premier ordre. Dans ce système, les variables indépendantes sont la coordonnée longitudinale  $x$  et le temps  $t$ , et les variables dépendantes sont la charge  $H$  et la vitesse d'écoulement  $V$ . Les autres variables, comme la célérité de l'onde  $a$ , et le diamètre  $D$ , ne changent pas dans le temps mais peuvent évidemment varier selon  $x$ . Le coefficient de frottement  $\lambda$  varie avec le nombre de *Reynolds*. Cependant,  $\lambda$  est considéré constant parce que les effets d'une telle variation sont négligeables en régime transitoire (*Chaudhry, 1979*).

Dans la pratique des calculs du coup de bélier, le terme d'accélération convective  $V(\partial V / \partial x)$  peut être négligé devant l'accélération pure  $(\partial V / \partial t)$ , ainsi que  $V(\partial H / \partial x)$  comparé à  $(\partial H / \partial t)$  (*Chaudhry, 1979; Boillat et De Souza, 2004*). En considérant aussi la conduite horizontale ou faiblement inclinée (cas pratiques), le système différentiel simplifié s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 & \text{(II.47)} \\ \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda V |V|}{2D} = 0 & \text{(II.48)} \end{cases}$$

En écoulement stationnaire ( $\partial/\partial t = 0$ ), l'équation (II.47) indique que  $(\partial V/\partial x) = 0$ , ce qui correspond à un débit constant dans la conduite. L'équation (II.48) se simplifie en  $(\partial H/\partial x) = -j$  et impose que la pente de la ligne de charge soit égale à la pente de frottement. Dans cette équation (II.48), le modèle de *Darcy-Weisbach* a été utilisé pour le calcul de la perte de charge. Si par contre un autre modèle, empirique par exemple, a été employé, le terme de frottement dans (II.48) redeviendrait  $\lambda V |V|^m / D^b$  où  $m$  et  $b$  sont des coefficients empiriques dépendant de la formule ayant été utilisée.

Le système d'équations différentielles formulé ne fait intervenir qu'une combinaison linéaire des dérivées premières des variables d'état  $H(x,t)$  et  $V(x,t)$ , mais ce système se constitue aussi de termes non linéaires, comme celui de frottement. Le système d'équations est dit alors « quasi-linéaire ». En réécrivant ces équations sous forme matricielle, on aura :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix} = -[B(H,V)] \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix} - [G(H,V)] \quad \text{(II.49)}$$

Dans lesquelles :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2}{g} \\ g & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(II.50)}$$

Et

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\lambda V |V|}{2D} \end{bmatrix} \quad \text{(II.51)}$$

Les valeurs propres  $\hat{\lambda}$  de la matrice  $B$  permettent de déterminer le type d'équations aux dérivées partielles du système (II.47) et (II.48). L'équation caractéristique associée à la matrice  $B$  est (*Demidovitch et Maron, 1973*) :

$$\hat{\lambda}^2 - a^2 = 0 \quad \text{(II.52)}$$

D'où :

$$\hat{\lambda} = \pm a \quad \text{(II.53)}$$

Sachant que  $a$  est réel, les deux racines de l'équation, en l'occurrence les valeurs propres de la matrice  $B$ , sont alors réelles et distincts, de ce fait le système (II.47) et (II.48) forme des équations aux dérivées partielles de type « hyperbolique » (Rao, 2002).

## II.5. Intégration du système différentiel

Il est bien connu que les équations complètes du régime transitoire sont insolubles analytiquement, et pour pouvoir intégrer ces équations différentielles, on doit passer par une cascade de simplifications.

Après avoir négligé les termes convectifs, le système d'équations est rendu sous une forme conservative en omettant le terme dissipatif correspondant aux pertes de charge. On parvient alors au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.54)} \\ \text{(II.55)} \end{array}$$

Dérivons à présent le système précédent successivement par rapport à  $x$  et à  $t$ . On obtient ainsi, après quelques manipulations algébriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.56)} \\ \text{(II.57)} \end{array}$$

On obtient donc les équations (II.56) et (II.57), dans lesquelles  $H$  et  $V$  sont liées aux variables  $x$  et  $t$  par une même équation différentielle qui est l'équation classique des « cordes vibrantes », bien connue aussi sous le nom de l'équation de *d'Alembert*, dont la solution générale de ce type d'équation a été donnée par ce dernier.

### II.5.1. Solution générale

La solution générale de ces équations différentielles s'obtient après un changement de variables (Appendice (I)) et s'écrit (Godounov, 1973 ; Tyn et Debnath, 2007):

$$H(x, t) = H_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad \text{(II.58)}$$

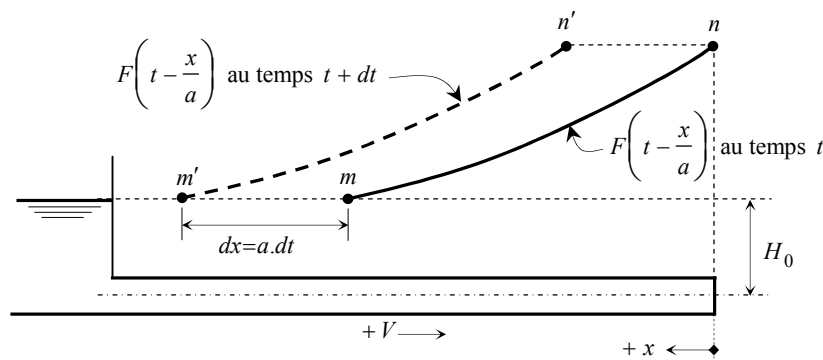
$$V(x, t) = V_0 - \frac{g}{a} \left[ F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \quad \text{(II.59)}$$

Où  $H_0$  et  $V_0$  représentent respectivement la pression et la vitesse d'écoulement avant la rupture du régime permanent, c'est-à-dire à  $t = 0$  au point considéré de la conduite.

Les équations (II.58) et (II.59) sont celles trouvées par *Lorenzo Allievi* (1925), où les fonctions arbitraires  $F$  et  $f$  peuvent être absolument quelconques et leur détermination dépend des conditions aux limites. Et pour un intérêt pratique, les  $x$  sont comptés positivement à partir de l'aval de la conduite où se crée la perturbation.

### II.5.2. Interprétation physique des équations d'ALLIEVI

L'examen de l'équation (II.58) montre que la fonction  $F(t-x/a)$  possède la dimension d'une hauteur de pression. Pour un instant donné  $t$ ,  $F(t-x/a)$  est fonction uniquement de l'abscisse  $x$ , et peut être représentée par conséquent par une certaine courbe quelconque  $mn$  (Figure (II.5)).



**Figure (II.5) :** Signification physique de l'onde de pression  $F$  (Parmakian, 1963)

Après un certain temps  $t + dt$ , l'argument de la fonction  $F$  devient  $t + dt - \frac{x + dx}{a}$ .

Cependant, l'amplitude de  $F$  reste inchangée si pour un passage de  $t$  à  $t + dt$  l'abscisse  $x$  marque un accroissement d'une quantité  $dx$  égale à  $a \cdot dt$ , dans lequel  $x = at + Cte$ . Ceci signifie que la courbe  $mn$  construite au temps  $t$  peut être reprise à l'instant  $t + dt$ , c'est-à-dire que la courbe  $mn$  subit une translation dans l'espace dans le sens positif de  $x$  par une distance  $dx = a \cdot dt$  pour se trouver à  $x + dx$ , on aura alors la courbe  $m'n'$  (Figure (II.5)). La fonction  $F(t-x/a)$  représente donc une onde de pression se déplaçant en sens inverse de l'écoulement avec une célérité  $a$ . Une explication physique similaire s'applique aussi pour la fonction  $f(t+x/a)$  en imposant  $x = -a \cdot t + Cte$ . Elle représente ainsi une onde de pression se déplaçant dans le sens de l'écoulement avec une célérité  $-a$  (Parmakian, 1963).



Les équations (II.58) et (II.59) traduisent ainsi qu'en régime varié dans des conduites :

- la surpression  $(H - H_0)$  en un lieu et un temps quelconque le long d'une conduite est égale à la somme des deux ondes de pression  $F$  et  $f$  qui se croisent à ce temps et en ce lieu en se déplaçant à la célérité  $+a$  et  $-a$  par rapport au fluide (Figure (II.6));

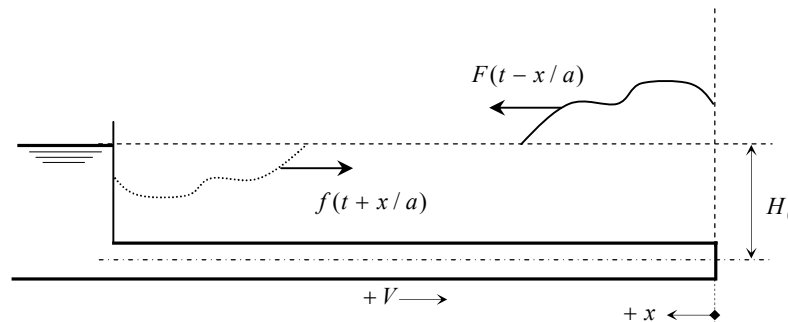


Figure (II.6) : Concept de superposition des ondes  $F$  et  $f$

- l'accroissement des vitesses  $(V - V_0)$  au même lieu et au même temps est  $(\frac{g}{a})$  fois la différence des deux mêmes ondes de pression.

Remarquons au passage que pour un autre observateur imaginaire, stationnaire en un point  $x_a$ , il constatera que les deux fonctions  $F[t - (x/a)]$  et  $f[t + (x/a)]$  changent continuellement, et au lieu d'avoir seulement que deux variables  $H$  et  $V$ , il en aura deux en plus qui sont les fonctions  $F$  et  $f$ , ce qui complique mathématiquement le phénomène. Par contre si un observateur mobile se déplace avec les ondes  $F$  et  $f$ , il verra que ces fonctions restent constantes et gardent leur valeurs initiales au moment de l'apparition de la perturbation, et permet alors d'éliminer les variations des grandeurs  $F$  et  $f$ . Ainsi, la notion d'observateur mobile rend énormément service dans l'analyse du coup de bélier et constituera la base philosophique de la méthode révolutionnaire de *Louis Bergeron* (1949).

## II.6. Forme adimensionnelle des équations de base

Afin de mettre le système d'équations différentielles de base sous forme adimensionnelle, il est en premier lieu nécessaire de choisir les grandeurs de références pour les variables impliquées dans les équations.

Notons par le symbole (o) les grandeurs de références choisies comme, par exemple, celles correspondant au régime initial (ou final) du régime d'écoulement. De ce fait,  $L_0$ , longueur de la conduite, peut être choisie comme longueur de référence,  $V_0$  pour la vitesse et

$H_0$  pour la charge. Comme temps de référence, nous pouvons utiliser le rapport  $L_0/a$ , où  $a$  est la célérité des ondes, dès lors, les variations de la charge et de la vitesse apparaissent à des intervalles de temps dans l'ordre de  $L_0/a$ . Le choix du rapport  $L_0/V_0$  comme référence de temps est inadéquat lorsque les effets élastiques sont pris en considération, l'unité des temps  $L_0/V_0$  est considérablement grande comparée à  $L_0/a$  (puisque  $V_0 \ll a$ ), le régime transitoire sera pratiquement éteint pour un rapport de  $L_0/V_0$  (De Almeida et Koelle, 1992).

En représentant par des lettres minuscules accompagnées d'une barre les grandeurs adimensionnelles mesurées par rapport à celles de références, on aura :

$$\bar{v} = \frac{V}{V_0} ; \quad \bar{h} = \frac{H}{H_0} ; \quad \bar{x} = \frac{x}{L_0} ; \quad \bar{t} = \frac{t}{(L_0/a)} \quad (\text{II.60})$$

Subséquentement, les dérivées partielles dans les équations (II.45) et (II.46) s'écrivent :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial(\bar{h}.H_0)}{\partial(\bar{x}.L_0)} = \frac{H_0}{L_0} \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \quad (\text{II.61})$$

De façon similaire :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_0}{L_0} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \quad (\text{II.62})$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{aH_0}{L_0} \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} \quad (\text{II.63})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{aV_0}{L_0} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} \quad (\text{II.64})$$

Remplaçant ces expressions dans les équations (II.45) et (II.46), ces dernières deviendront alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{aH_0}{L_0} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{V_0 H_0}{L_0} \bar{v} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - V_0 \sin \theta \cdot \bar{v} + \frac{a^2}{g} \frac{V_0}{L_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.65})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{aV_0}{L_0} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{V_0^2}{L_0} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{gH_0}{L_0} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} + \frac{\lambda}{2D} V_0^2 \cdot \bar{v} |\bar{v}| = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.66})$$

Posons :

$$\bar{\rho} = \frac{aV_0}{gH_0} \quad (\text{Paramètre d'Allievi}) \quad (\text{II.67})$$

$$\Lambda = \frac{V_0}{a} \quad (\text{Nombre de Mach}) \quad (\text{II.68})$$

$$\mathfrak{S} = \frac{J}{H_0} = \frac{\lambda \frac{L_0 V_0^2}{D 2g}}{H_0} \quad (\text{II.69})$$

$$\text{I} = \frac{L_0 \sin \theta}{H_0} \quad (\text{II.70})$$

Les équations (II.65) et (II.66) se réécrivent alors comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \Lambda \bar{v} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} - \Lambda \text{I} \cdot \bar{v} + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.71})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{\rho} \Lambda \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} + \mathfrak{S} \cdot \bar{v} |\bar{v}| = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.72})$$

Comme nous l'avons souligné précédemment, l'ordre de grandeur de la vitesse d'écoulement  $V_0$  étant très faible devant la célérité  $a$ , le nombre de *Mach* approchera par conséquent la valeur nulle  $\Lambda \approx 0$  (écoulement subsonique). Aussi, on peut constater que le produit  $\Lambda \text{I}$  approche en grandeur l'ordre de la valeur  $\Lambda$ . Les équations (II.71) et (II.72) se résumeront à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.73})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} + \mathfrak{S} \cdot \bar{v} |\bar{v}| = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.74})$$

Dans ces équations, nous avons négligé les termes convectifs, comme cela a été admis auparavant (§.II.4), ainsi que l'inclinaison de la conduite par rapport à l'horizontale. Ces simplifications sont compatibles avec l'hypothèse que l'énergie cinétique du fluide ( $V^2/2g$ ) est négligeable comparée à l'énergie de pression.

On montre alors par les expressions (II.73) et (II.74) que, pour les phénomènes transitoires, les paramètres caractéristiques adimensionnels  $\bar{\rho}$  et  $\mathfrak{S}$  traduisent la similitude entre deux régimes instationnaires. Il résulte alors que deux régimes transitoires sont dit semblables si les paramètres adimensionnels  $\bar{\rho}$  et  $\mathfrak{S}$  sont identiques dans les deux situations. Cette condition nous fournit donc un critère pour l'extrapolation des résultats issus des modèles mathématiques et physiques et permet la détermination des rapports de similitude entre le modèle et le prototype.

Il est à noter aussi que pour satisfaire la similitude entre deux régimes transitoires, il faut que les conditions aux limites, c'est-à-dire les conditions de manœuvre et de modification du régime, soient également identiques. Pour chaque type d'élément frontière (réservoir,

pompe, cheminée d'équilibre...etc.), il faut écrire les équations spécifiques à ces éléments, en forme adimensionnelle, qui permettent ainsi de retrouver les valeurs adimensionnelles ( $\pi_1, \pi_2 \dots$ ) qui caractérisent le système de frontière.

Les deux variables d'état du phénomène transitoire dans un système hydraulique sera alors fonction de différents paramètres adimensionnels liés par des relations fonctionnelles  $\phi_1$  et  $\phi_2$  comme suit (De Almeida et Koelle, 1992) :

$$\bar{h} = \phi_1(\bar{\rho}, \bar{\nu}, \bar{t}, \pi_1, \pi_2, \dots) \quad (\text{II.75})$$

$$\bar{v} = \phi_2(\bar{\rho}, \bar{\nu}, \bar{t}, \pi_1, \pi_2, \dots) \quad (\text{II.76})$$

## II.7. Célérité des ondes

Nous avons présenté dans ce qui a précédé (§.II.3.2) l'expression de la célérité des ondes dans une conduite sous pression, siège d'une perturbation du régime, comme suit :

$$a = \sqrt{\frac{K_e}{\rho \left( 1 + \frac{K_e}{E} \psi \right)}} \quad (\text{II.77})$$

Il résulte alors que cette célérité dépend parallèlement des caractéristiques du fluide ( $K_e, \rho$ ) et des propriétés élastiques de la conduite ( $E$ ) sans oublier les conditions de contraintes externes ( $\psi$ ). Ces propriétés élastiques englobent les dimensions de la conduite ( $D$ ), épaisseur de l'enveloppe ( $e$ ) ainsi que le matériau de la canalisation. Les conditions externes traduisent le type de support et les degrés de liberté du mouvement de la conduite dans le sens longitudinal. Le module de compressibilité du fluide  $K_e$  quant à lui dépend conjointement de la température, la pression et la quantité de gaz non dissous (Chaudhry, 1979).

Le facteur adimensionnel  $\psi$  s'exprime par :

$$\psi = \frac{E}{S} \frac{dS}{dP} \approx \frac{E}{S} \frac{\Delta S}{\Delta P} \quad (\text{II.78})$$

La détermination de ce facteur ( $\psi$ ) doit être établit pour chaque type de conduite et de fixation externe, qui définissent par conséquent le mode de déformation de la conduite. Nous donnons à présent quelques valeurs de  $\psi$  pour les conditions répandues dans la pratique :

1. **Conduite rigide** : Dans ce cas  $\Delta S = 0$ , on aura alors :

$$\psi = 0 \quad (\text{II.79})$$

La célérité prend alors sa valeur maximale qui est de 1430 m/s.

2. **Conduite élastique à paroi mince** : on dit que la conduite est à paroi mince lorsque  $D/e > 40$ . On distingue alors trois cas (*Chaudhry, 1979*) :

a) Ancrée à ces deux extrémités :

$$\psi = \frac{D}{e}(1-\nu^2) \quad (\text{II.80})$$

Où  $\nu$  représente le coefficient de *Poisson*.

b) Ancrée à l'extrémité amont sans joints d'expansion :

$$\psi = \frac{D}{e}\left(1-\frac{\nu}{2}\right) \quad (\text{II.81})$$

c) Avec joints d'expansion :

$$\psi = \frac{D}{e} \quad (\text{II.82})$$

3. **Conduite élastique à paroi épaisse** : ce sont des conduites dites spéciales et, comme le précédent type, trois cas se présentent (*Wylie et Streeter, 1978*) :

a) Ancrage appliqué aux deux extrémités de la conduite :

$$\psi = 2(1+\nu) + \frac{D}{e\left(1+\frac{e}{D}\right)}(1-\nu^2) \quad (\text{II.83})$$

b) Ancrage appliqué à l'extrémité amont seulement :

$$\psi = 2(1+\nu) + \frac{D}{e\left(1+\frac{e}{D}\right)}\left(1-\frac{\nu}{2}\right) \quad (\text{II.84})$$

c) Avec joints d'expansion sur toute la longueur de la conduite :

$$\psi = 2(1+\nu) + \frac{D}{e\left(1+\frac{e}{D}\right)} \quad (\text{II.85})$$

D'autres types de conduites et de formules existent, que nous ne citerons pas ici, tel que les conduites composites (galerie en rocher revêtue, en béton armé,...etc.). Selon *Meunier* (1980), les écarts observés des célérités par rapport au cas classique d'une conduite mince sans influence de contrainte longitudinale sont négligeables, dans la mesure où cette influence d'allongement ne conduit à des augmentations importantes. Il en résulte alors, selon le même auteur, qu'on peut n'utiliser que les formules simplifiées de célérité calculée pour les conduites minces sans effet de contrainte longitudinale. La prise en compte théorique de ces facteurs complémentaires (allongement, épaisseur et nature composite du matériau) ne

conduit pas à des écarts suffisamment importants pour qu'on les retienne, en absence d'expérimentation.

Pour les conduites industrielles et l'hypothèse d'un fluide monophasique, on propose alors une formule générale de calcul de la célérité des ondes dans les conduites en charge.

Étant donné que :

$$a = \sqrt{\frac{K_e}{\rho \left(1 + \frac{K_e}{E} \psi\right)}} \quad (\text{II.86})$$

Pour l'eau, on a :  $K_e = 2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$  et  $\rho = 10^3 \text{ Kg/m}^3$ .

Il s'ensuit immédiatement que :

$$a = \frac{1430}{\sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10^9 D}{E e}}} \quad (\text{II.87})$$

Qu'on trouve aussi souvent sous la forme suivante :

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48.3 + k \frac{D}{e}}} \quad (\text{II.88})$$

Avec  $k = 0,5$  pour l'acier et le fer, 1 pour la fonte grise et 0,59 pour la fonte ductile, 5 pour le béton, 4 pour l'amiante-ciment, 33 pour le PVC, 83 pour le polyéthylène HD et 500 pour le polyéthylène BD (*Meunier, 1980*)

## II.8. Conclusion

Nous avons, au cours du présent chapitre, formulé les équations différentielles de base gouvernant les régimes d'écoulement non permanent en charge. Il en a résulté alors de l'application du principe de continuité et de quantité de mouvement un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, qui n'est autre que celui décrivant la propagation des ondes planes dans les corps élastiques. La dérivation de ces équations s'est appuyée sur certaines hypothèses simplificatrices généralement acceptables en pratique. D'autres phénomènes dynamiques peuvent prendre part dans l'analyse de ce type d'écoulement, comme l'interaction fluide-structure et autres, mais ceci sort du cadre de notre étude.

Les équations différentielles auxquelles nous avons aboutis n'ont malheureusement pas de solution analytique connue, sauf cas hypothétiques simples, et cela paralyse souvent l'Ingénieur. Cette impasse se trouve alors écartée en se jetant avec succès aux méthodes de calcul numériques dédiées à ces problèmes, ce qui fera l'objet des chapitres qui en suivront.

" ... le progrès de la physique dépendra en grande partie du progrès des mathématiques non linéaires, des méthodes pour résoudre des équations différentielles non linéaires... et donc nous pouvons apprendre en comparant différents problèmes non linéaires.."

Werner Heisenberg

## 3.

# Modèles numériques aux différences finies

### III.1. Introduction

Il a été mis en évidence dans ce qui a précédé que le système d'équations aux dérivées partielles régissant la propagation des ondes élastiques dans un écoulement en charge est de type hyperbolique quasi-linéaire, par conséquent une solution analytique sous forme close n'est malheureusement pas disponible pour résoudre des problèmes pratiques. Cependant, moyennant des techniques de discrétisation numériques de ces équations différentielles, on pourra aboutir à des solutions approchées satisfaisantes en passant du domaine continu au domaine discontinu où les équations différentielles se trouvent converties en équations algébriques plus simples à résoudre.

On abordera dans ce qui suit les deux méthodes les plus populaires en mécanique des fluides depuis des décennies, en l'occurrence la méthode des caractéristiques et celle des différences finies. Nous allons exposer la modélisation numérique des équations de base via ces deux techniques sans oublier de présenter la technique d'implémentation des conditions aux limites spécifiques aux problèmes complexes du coup de bélier.

### III.2. Méthodes d'analyse

L'analyse d'un écoulement en régime non permanent dans un système hydraulique en charge peut être menée principalement suivant deux voies (*De Almeida et Koelle, 1992*) :

- a) **Domaine d'analyse temporel** : par intégration numérique directe des équations de base et ceci par biais de schémas numériques qui fournissent la solution discrète des variables d'état  $H$  et  $V$  dans divers points d'espace  $x$  et le temps  $t$ . L'analyse des régimes d'oscillation établis (périodiques) peut également être traitée dans ce domaine en imposant dans la simulation un état de fluctuation harmonique.

b) **Domaine d'analyse fréquentiel** : moyennant certaines opérations de transformations et linéarisation des équations de base et des conditions aux limites, une réponse fréquentielle du système est obtenue en imposant une fonction de forçage périodique par l'analyse de *Fourier* et le principe de superposition. Par une transformation inverse, on peut ainsi convertir les résultats dans le domaine temporel. Nous citons parmi autres, la méthode des impédances (*Wylie et Streeter, 1978*) et la méthode des matrices de transfert (*Chaudhry, 1979*).

Dans la pratique de calcul et simulation des coups de bélier, la première technique d'analyse reste la plus utilisée et préférée car aucune simplification ou linéarisation n'est introduite, à côté de sa facilité et sa puissance de modélisation des conditions aux limites (pompes, vannes,...etc) et des manœuvres pratiquées. Quant à la seconde technique, elle reste néanmoins un outil puissant pour l'analyse de certains cas comme l'auto-excitation et la résonance (*Fox, 1977*), les fréquences propres des réseaux et récemment pour la détection des fuites dans les conduites (*Sattar et Chaudhry, 2008*). Cependant, les développements mathématiques complexes pour sa mise en œuvre et la linéarisation des équations restent les principaux désavantages de cette technique.

Dans notre travail, nous ferons usage de la première technique, à savoir, l'analyse dans le domaine temporel. Pour ce faire, trois principales méthodes numériques se présentent :

- Méthode des caractéristiques ;
- Méthodes des différences finies (schéma explicite ou implicite) ;
- Méthode aux volumes finis.

Nous exposerons à présent la modélisation numérique des écoulements transitoires en charge via les deux premières méthodes, pour la troisième, le chapitre suivant lui sera dédié.

### **III.3. Méthode des caractéristiques**

Depuis sa mise en œuvre dans les années 1960, la méthode des caractéristiques a fait preuve de sa puissance et sa supériorité comparée à d'autres méthodes, ce qui lui a permis d'être la méthode la plus populaire et universelle dans le calcul des coups de bélier.

L'origine de la méthode remonte à *Monge* en 1789 qui développa une procédure graphique pour l'intégration des équations aux dérivées partielles. Il appelle cette procédure la méthode des caractéristiques (*Chaudhry, 2008*). Cette méthode a été par la suite utilisée par *Massau* (1899), reprise ultérieurement par *Craya* (1946) pour l'étude des écoulements variés à surface libre et propagation des crues. Dans les problèmes de coup de bélier, le mérite



revient conjointement à *Schneider* et à *Bergeron* (1949), mais c'est ce dernier qui a su en donner des applications graphiques concrètes en hydraulique et aux autres branches de la mécanique et de l'électricité, et depuis, son nom reste attaché à la méthode graphique des caractéristiques.

### III.3.1. Formulation mathématique du modèle aux caractéristiques

La méthode des caractéristiques consiste à transformer un système d'équations aux dérivées partielles en un autre système d'équations aux dérivées ordinaires. Ainsi, l'équation de continuité et l'équation dynamique formant un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, est converti en quatre équations aux dérivées totales. Ces dernières équations peuvent être alors résolues numériquement par un schéma aux différences finies. La solution du problème est obtenue à l'aide de l'outil informatique.

Reprenons les équations différentielles gouvernant les régimes transitoires en charge, obtenues précédemment (équations (II.47) et (II.48)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 = \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \cdot j = 0 \\ L_2 = \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(III.1)} \\ \text{(III.2)} \end{array}$$

Pour que ce système d'équations définisse de manière unique la solution, il faut et il suffit que les deux équations  $L_1$  et  $L_2$  soient linéairement indépendantes, donc la combinaison linéaire de ces équations doit être nulle. On écrit alors (*Wylie et Streeter, 1978*) :

$$L_1 + \lambda \cdot L_2 = 0 \quad \text{(III.3)}$$

Avec  $\lambda$ , un multiplicateur inconnu (dit de *Lagrange*) qui permettra de déterminer les deux racines réelles correspondant aux pentes des droites caractéristiques du système différentiel.

D'où :

$$\left( \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \cdot j \right) + \lambda \left( \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{(III.4)}$$

Ce qui implique :

$$\lambda \left( \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{g}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \left( \frac{\lambda \cdot a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) + g \cdot j = 0 \quad \text{(III.5)}$$

Pour convertir les dérivées partielles en dérivées ordinaires, on associera à l'équation (III.5) les dérivées matérielles des variables  $H(x,t)$  et  $V(x,t)$ , qui ne sont pas indépendantes, de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{(III.6)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{(III.7)}$$

Ce système définit également la solution de manière unique, donc ces équations sont aussi linéairement dépendantes:

$$\lambda \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + g \cdot j = 0 \quad \text{(III.8)}$$

Soit :

$$\lambda \left( \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) + g \cdot j = 0 \quad \text{(III.9)}$$

En examinant les termes des équations (III.5) et (III.9), on peut noter que :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{\lambda} = \frac{\lambda \cdot a^2}{g} \quad \text{(III.10)}$$

La solution de l'équation (III.10) donne deux racines réelles distinctes, soit :

$$\lambda = \pm \frac{g}{a} \quad \text{(III.11)}$$

En substituant la valeur de  $\lambda$  dans l'équation (III.10), la manière particulière dont  $x$  et  $t$  sont liés est :

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad \text{(III.12)}$$

Ceci montre le changement de position de l'onde liée au changement du temps par la vitesse de propagation des ondes "  $a$  ".

La substitution des valeurs de  $\lambda$  dans l'équation (III.8) conduit à deux paires d'équations, lesquelles sont regroupées et notées, équations  $C^+$  et  $C^-$  :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + g \cdot j = 0 \\ \frac{dx}{dt} = +a \end{array} \right\} C^+ \quad \text{(III.13)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = +a \end{array} \right\} C^+ \quad \text{(III.14)}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + g \cdot j = 0 \\ \frac{dx}{dt} = -a \end{array} \right\} C^- \quad \text{(III.15)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -a \end{array} \right\} C^- \quad \text{(III.16)}$$

Ainsi, les deux valeurs réelles de  $\tilde{\lambda}$  ont permis de transformer les équations aux dérivées partielles de départ à ce système d'équations aux dérivées ordinaires où la variable indépendante est seul le temps  $t$ .

Les deux premières équations (III.13) et (III.15) du système sont dites "équations de compatibilités". Alors que les deux autres, c'est-à-dire celles donnant  $dx/dt$  sont appelées "équations des caractéristiques". Cependant, il est à noter que les équations (III.13) et (III.15) de compatibilité ne sont valides que le long des lignes caractéristiques  $dx/dt = \pm a$  du système, alors que le système d'équations (III.1) et (III.2) est valable dans tout le plan  $x, t$  (Boillat et De Souza, 2004).

La solution du système d'équations sera représentée donc, dans le domaine formé par les variables indépendantes, qui est le plan  $x, t$ . Et puisque la célérité des ondes  $a$  est généralement constante, les équations caractéristiques (III.14) et (III.16) représentent ainsi deux droites de pentes  $\pm dx/dt$  (Figure (III.1)).

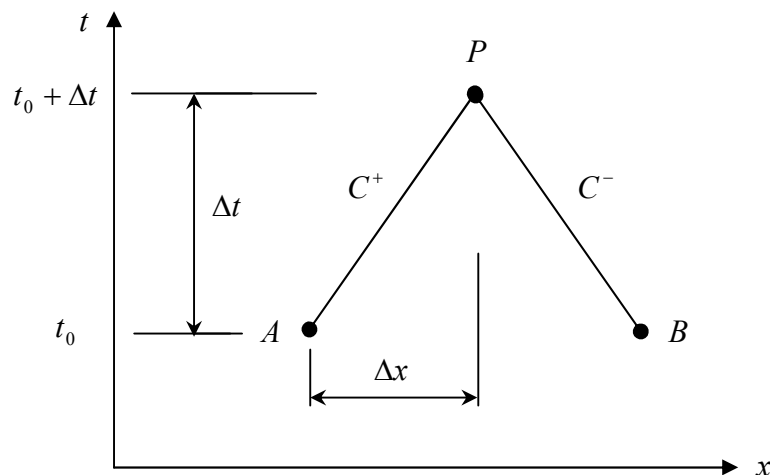


Figure (III.1) : Lignes caractéristiques dans le plan  $x, t$  (Chaudhry, 1979)

Avant d'aborder la solution numérique des équations différentielles obtenues, il est nécessaire de donner le concept physique que traduit cette méthode.

### III.3.2. Interprétation physique de la méthode des caractéristiques

Mathématiquement, les lignes caractéristiques partagent le plan  $x, t$  en deux régions sur lequel les solutions sont recherchées. Mais du point de vue physique, les droites caractéristiques correspondent aux tracés le long desquels les perturbations se propagent (Abbott, 1966). Par exemple, une perturbation créée au point  $A$  (Figure (III.1)) au temps  $t_0$  atteindrait le point  $P$  après un temps  $\Delta t = \Delta x / a$ .

Prenons l'exemple d'une conduite forcée reliée à un réservoir à l'amont et à un obturateur à l'aval (Figure (III.2.a)).

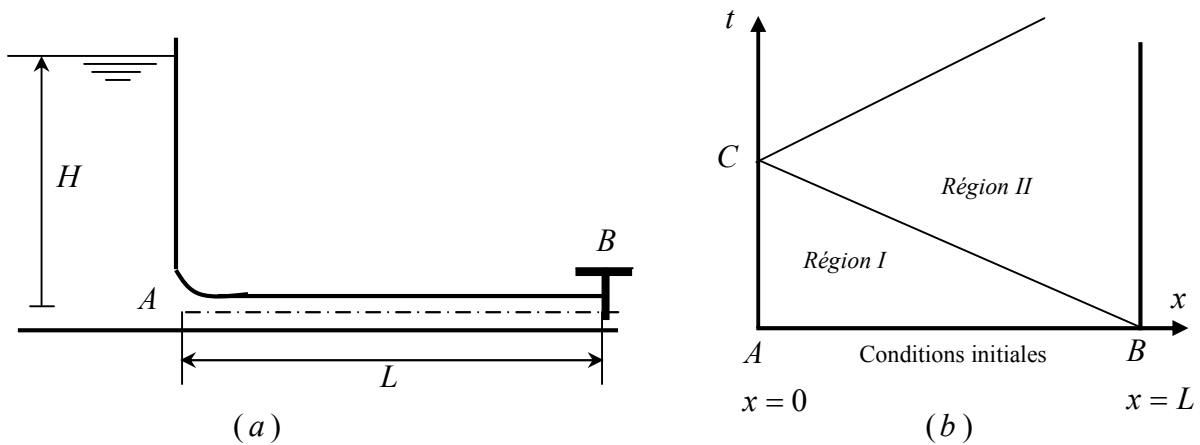
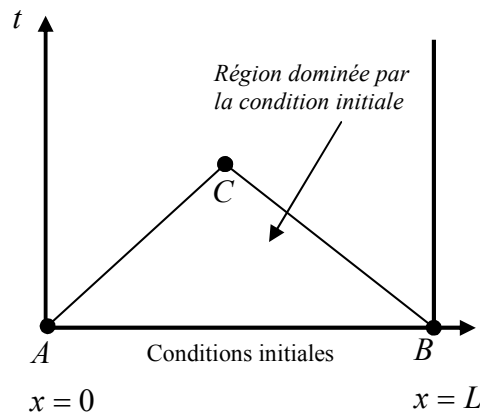


Figure (III.2) : (a) Schéma d'une conduite forcée, (b) Diagramme  $x, t$

Les équations (III.13) et (III.15) doivent être résolues le long des droites caractéristiques en tenant compte des conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = L$ . Dans le cas considéré, la charge amont est constante, donc  $H(0, t) = H$ . L'obturateur a un débit imposé à l'aval en fonction du temps, d'où  $q(L, t) = Q(t)$ . En admettant un débit constant avant la fermeture brusque, la condition initiale s'exprime par  $q(x, t < 0) = Q_0$ . Cette manœuvre réduit le débit à l'endroit  $x = L$  instantanément à  $q(L, t \geq 0) = 0$ , associé à un coup de bélier dans la conduite forcée. Par conséquent, une onde de pression se propage à l'amont le long de la caractéristique  $BC$  du diagramme  $x, t$  (Figure (III.2.b)). Il semble évident que la région "I" de cette figure ne dépend que des conditions initiales vu que la condition limite amont n'a pas changé. Dans la région "II" par contre, l'écoulement dépend de la condition limite imposée à l'aval (Boillat et De Souza, 2004). Si maintenant une excitation est imposée simultanément aux points  $A$  et  $B$ , le domaine influencé par la condition initiale sera confiné au triangle  $ACB$  (Figure (III.3)).

La ligne caractéristique  $AC$  sépare les régions influencées par la condition limite amont et celle initiale ; alors que la ligne caractéristique  $BC$  sépare les régions influencées par la condition limite aval et la condition initiale. En conséquence, les droites caractéristiques dans le plan  $x, t$  représentent les chemins parcourus par les perturbations imposées dans divers endroits du système considéré (Chaudhry, 1979).



**Figure (III.3) :** Domaine d'influence des conditions initiales d'un système excité en A et B

Ainsi, la transformation faite sur les équations aux dérivées partielles de départ n'a suggéré aucune approximation mathématique. De ce fait, chaque solution du système caractéristique sera la solution du système d'équations original. Pour pouvoir résoudre le système d'équations (III.13) à (III.16), on passera par l'intégration numérique.

### III.3.3. Solution numérique du système différentiel

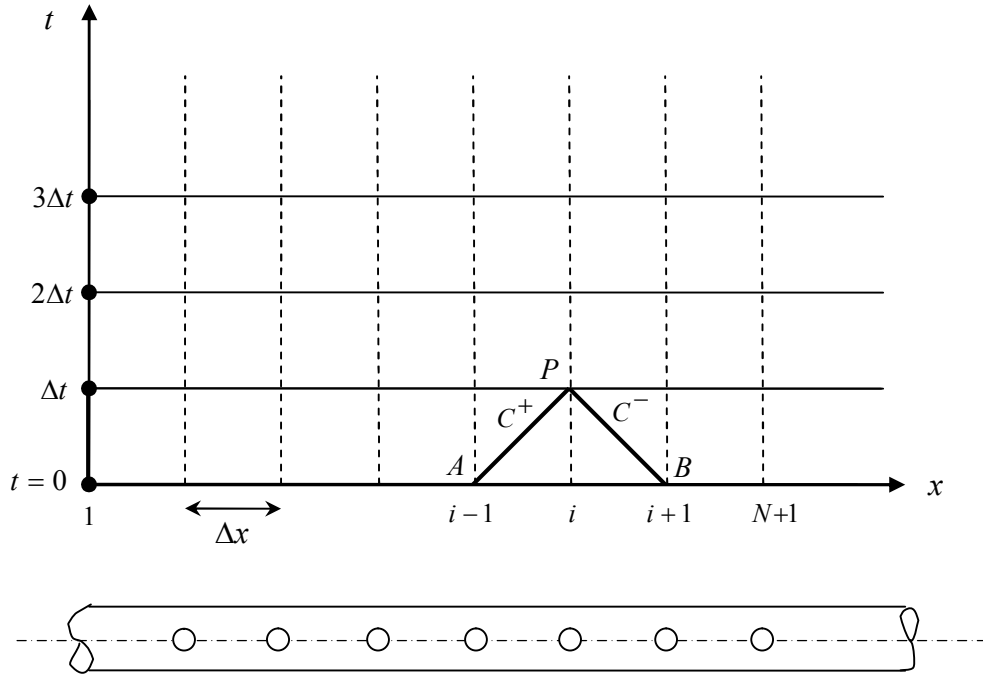
Pour résoudre numériquement les équations obtenues précédemment, plusieurs schémas aux différences finies ont été proposés. Selon *Chaudhry* (1979), *Wylie* et *Streeter* utilisent un schéma de premier ordre, *Evangelisti* suggère la technique prédicteur-correcteur et *Lister* emploie conjointement un schéma de premier et second ordre. Étant donné le pas temps de calcul généralement réduit dans les cas pratiques de calcul des régimes transitoires, *Chaudhry* (1979) préconise l'usage d'un schéma de premier ordre lequel est suffisamment précis ; par conséquent, c'est ce type de schéma que nous adopterons dans notre travail.

Discretisons à présent la conduite en un certain nombre  $N$  de tronçons (biefs) égaux (Figure (III.4)). Les points de calcul engendrés par cette discrétisation sont supposés suffisamment proches pour pouvoir écrire la différence finie suivante :

$$df(x,t) = f_{(i+1)} - f_{(i)} \quad (\text{III.17})$$

Avec  $f(x,t)$  une fonction telle que la charge  $H$  ou le débit  $Q$  aux points de discrétisation. Le pas de temps de calcul est déterminé par l'équation caractéristique,  $\Delta t = \Delta x / a$ , ce qui satisfait l'équation (III.14) de pente positive caractérisée par la droite  $AP$  (Figure (III.4)). Si les variables dépendantes  $H$  et  $Q$  sont connues au point  $A$ , alors l'équation (III.13), laquelle est valide le long de la caractéristique  $C^+$ , peut alors être intégrée entre les limites  $A$  et  $P$  et écrite de ce fait en terme des variables d'inconnues  $H$  et  $Q$  au point  $P$ .

D'autre part, l'équation de compatibilité (III.15) peut être intégrée aussi le long de la droite  $BP$ , sur laquelle elle est valide. Avec une condition initiale au point  $B$  connue, cela conduit à la seconde équation nécessaire à la détermination des variables inconnues  $H$  et  $Q$  au point  $P$  (Figure (III.4)).



**Figure (III.4) :** Intégration numérique des équations sur le plan  $x,t$  (Wylie et Streeter, 1978)

En multipliant l'équation (III.13) et (III.14) par  $a.dt/g = dx/g$ , et en introduisant la section de la conduite pour écrire l'équation en fonction du débit au lieu de la vitesse, ces dernières peuvent s'écrire alors :

$$dH + \frac{a}{g.S} dQ + j.dx = 0 \quad (\text{III.18})$$

$$-dH + \frac{a}{g.S} dQ + j.dx = 0 \quad (\text{III.19})$$

On peut donc intégrer les équations (III.18) et (III.19) le long des caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$  entre l'instant  $t_0 = 0$ , où les variables  $H$  et  $Q$  sont connues le long de la conduite (régime permanent), et l'instant  $t_0 + \Delta t$  :

$$\int_{H_A}^{H_P} dH + \frac{a}{g.S} \int_{Q_A}^{Q_P} dQ + I^+ = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$-\int_{H_B}^{H_P} dH + \frac{a}{g \cdot S} \int_{Q_B}^{Q_P} dQ + I^- = 0 \quad (\text{III.21})$$

Le terme  $I^\pm$  représente l'intégrale du terme de frottement le long du bief de la conduite. Il s'écrit :

$$I^\pm = \int_{A,B}^x \frac{\lambda Q |Q|}{2 g D S^2} dx \quad (\text{III.22})$$

La variation du débit  $Q$  en fonction de  $x$  sous la dernière intégrale étant inconnue, différentes techniques peuvent être choisies pour l'évaluation numérique de l'intégrale de  $I^+$  et  $I^-$ . Trois simples approches pour les problèmes pratiques se présentent qui, selon *De Almeida et Koelle* (1992), s'écrivent comme suit :

- Schéma de premier ordre :

$$I^+ = R \cdot Q_A |Q_A| \quad (\text{III.23})$$

$$I^- = R \cdot Q_B |Q_B| \quad (\text{III.24})$$

- Schéma de deuxième ordre :

$$I^+ = \frac{R}{2} \cdot [Q_A |Q_A| + Q_P |Q_P|] \quad (\text{III.25})$$

$$I^- = \frac{R}{2} \cdot [Q_B |Q_B| + Q_P |Q_P|] \quad (\text{III.26})$$

- Schéma mixte :

$$I^+ = R \cdot Q_P |Q_A| \quad (\text{III.27})$$

$$I^- = R \cdot Q_P |Q_B| \quad (\text{III.28})$$

Ce dernier schéma est considéré meilleur selon *De Almeida et Koelle* (1992).

Le long de chaque droite caractéristique  $C^+$  et  $C^-$  le paramètre  $R$ , traduisant l'effet de résistance à l'écoulement, s'exprime :

$$R = \frac{\lambda}{2g D S^2} \Delta x \quad (\text{III.29})$$

Selon *Wylie et Streeter* (1978), le schéma de premier ordre est considéré satisfaisant pour la plupart des cas pratiques (excepté le cas où la dissipation par frottement est prépondérante). Ceci suppose donc que le débit  $Q$  est constant pendant le laps de temps  $\Delta t$  et est égal à celui au pied de la ligne caractéristique, c'est-à-dire  $Q_{A,B}$ . En adoptant ce schéma de premier ordre, on écrira les équations de compatibilité sous la forme discrétisée le long de  $C^+$  et  $C^-$  comme suit :

$$H_P - H_A + \frac{a}{gS}(Q_P - Q_A) + \frac{\lambda \Delta x}{2g \cdot D \cdot S^2} Q_A |Q_A| = 0 \quad (\text{III.30})$$

$$H_P - H_B - \frac{a}{gS}(Q_P - Q_B) - \frac{\lambda \Delta x}{2g \cdot D \cdot S^2} Q_B |Q_B| = 0 \quad (\text{III.31})$$

Ces deux équations de compatibilité sont les relations algébriques de base décrivant la propagation des ondes de pression et de débit dans une conduite en charge. En écrivant la solution pour  $H_P$ , ces dernières équations s'écrivent alors :

$$C^+ : H_P = H_A - B(Q_P - Q_A) - R \cdot Q_A |Q_A| \quad (\text{III.32})$$

$$C^- : H_P = H_B + B(Q_P - Q_B) + R \cdot Q_B |Q_B| \quad (\text{III.33})$$

Où le paramètre  $B = a/gS$ , dit l'impédance de la conduite, exprime en fait le coefficient angulaire de la droite des lieux de l'observateur de *Bergeron* dans le diagramme  $(H, Q)$  sur lequel la solution graphique est menée (*Escande, 1971*).

Les équations (III.32) et (III.33) sont aussi valides pour le régime stationnaire étant donné que ce dernier représente un cas particulier des régimes transitoires. Pour le régime permanent,  $Q_A = Q_B = Q_P$  et  $R \cdot Q_A |Q_A|$  étant la perte de charge le long du tronçon  $\Delta x$  de la conduite.

La résolution numérique du régime transitoire commence alors à partir des conditions initiales, ressortant d'un calcul en régime permanent. A ce temps zéro,  $H$  et  $Q$  sont connues à chaque section de calcul le long de la conduite. Ainsi, le calcul du régime transitoire consiste à trouver  $H$  et  $Q$  à chaque point de la grille au temps  $t = \Delta t$  (Figure (III.4)), ensuite le procédé est répété à chaque incrément de temps,  $t = 2\Delta t \dots$ etc. jusqu'à l'achèvement du temps de simulation. En tout point intérieur de la grille, section " $i$ ", les deux équations de compatibilité sont résolues simultanément afin de déterminer les inconnues  $H_P$  et  $Q_P$  (*Wylie et Streeter, 1978*).

Pour la commodité des calculs et de la programmation, les équations (III.32) et (III.33) peuvent s'écrire sous la forme simple suivante :

$$C^+ : H_{Pi} = C_P - B \cdot Q_{Pi} \quad (\text{III.34})$$

$$C^- : H_{Pi} = C_M + B \cdot Q_{Pi} \quad (\text{III.35})$$

Où  $C_P$  et  $C_M$  sont des constantes connues à chaque pas de temps, ayant pour valeur :

$$C_P = H_{i-1} + B \cdot Q_{i-1} - R \cdot Q_{i-1} |Q_{i-1}| \quad (\text{III.36})$$

$$C_M = H_{i+1} - B \cdot Q_{i+1} + R \cdot Q_{i+1} |Q_{i+1}| \quad (\text{III.37})$$



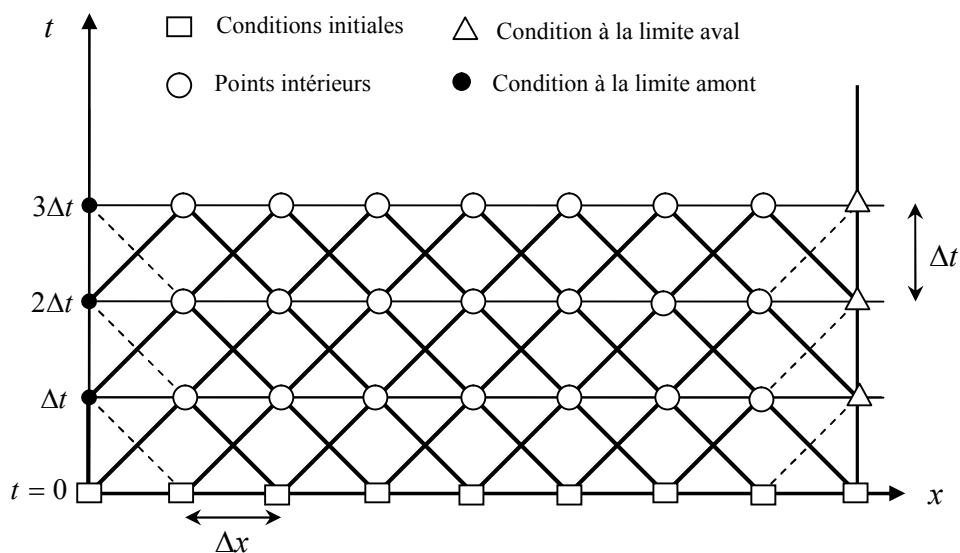
En éliminant  $Q_{Pi}$  entre les équations (III.34) et (III.35), on aura :

$$H_{Pi} = \frac{(C_P + C_M)}{2} \quad (\text{III.38})$$

Connaissant la valeur de  $H_{Pi}$ , le débit  $Q_{Pi}$  peut être trouvé à partir de l'une des équations (III.34) ou (III.35), et qui aura pour valeur :

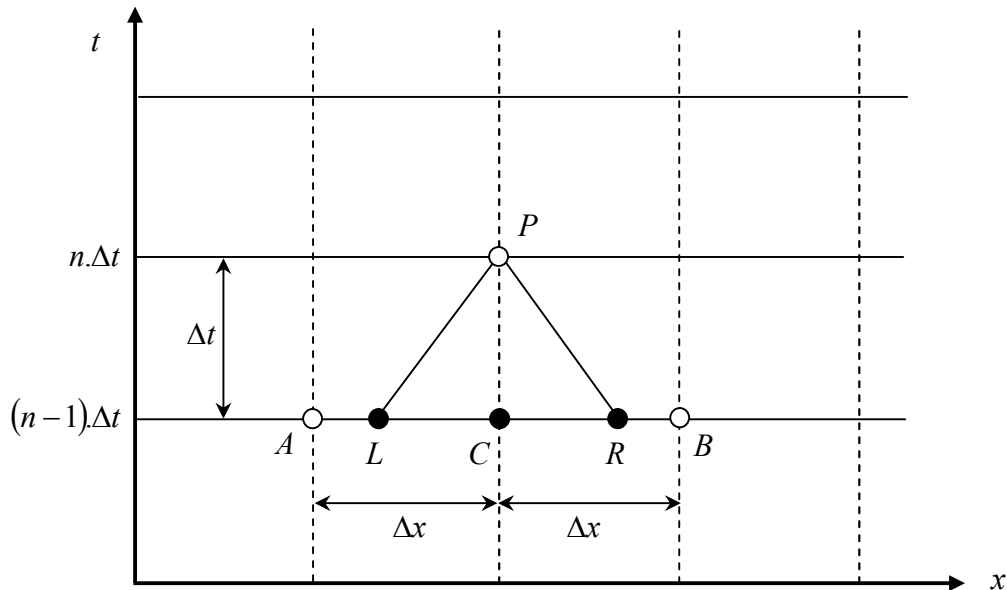
$$Q_{Pi} = \frac{(C_P - H_{Pi})}{B} \quad (\text{III.39})$$

Partant de ces deux équations, on pourra donc calculer les variables  $H$  et  $Q$  en régime transitoire aux points intérieurs du réseau des caractéristiques à chaque pas de temps connaissant ces mêmes variables au pas de temps antérieur. Ainsi, chaque étage de temps transmet l'information à l'étage immédiatement supérieur suivant les droites caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$ , où leurs intersections définissent la solution au point considéré (Figure (III.5)).



**Figure (III.5) :** Réseau des caractéristiques pour le calcul du régime transitoire (Chaudhry, 1979)

Cette technique de calcul est dite à grille fixe et directe. En ayant  $\Delta x = a \cdot dt$  (nombre de Courant  $C_r = 1$ ), les lignes caractéristiques s'intersectent en chaque point de calcul "i", le calcul est alors facile. Si par contre  $\Delta x > a \cdot dt$  ( $C_r < 1$ ), les lignes  $C^+$  et  $C^-$  issues du point de calcul  $P$  (où les variables sont recherchées) ne recouperont pas les points  $A$  et  $B$  au temps  $t - \Delta t$  où la solution est connue (Figure (III.6)). Dans ce cas une interpolation s'impose pour déterminer les variables d'état de l'écoulement aux points  $L$  et  $R$ , connaissant ceux en  $A$  et  $B$  (Larock et al. 2000). Pour ce faire, plusieurs techniques d'interpolation se présentent (polynomiale, spline...etc.), mais la plus pratiquée étant l'interpolation linéaire.



**Figure (III.6) :** Interpolation des variables  $H$  et  $Q$  aux pieds des caractéristiques (Larock et al., 2000)

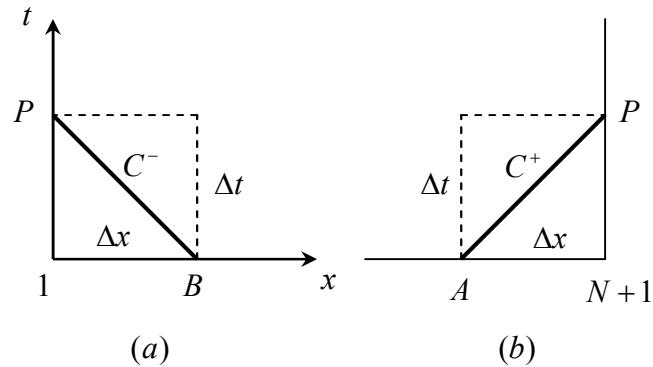
Quoique cette méthode de calcul, dite à pas de temps spécifié, est fortement adoptée dans certains cas, tels que les réseaux complexes de conduites (pour surmonter les difficultés de recoupement des caractéristiques dans les divers points du réseau) et aussi le cas des conduites à déformations élevées (très distensibles) (Meunier, 1980), toutefois ce procédé de calcul conduit à l'apparition d'un amortissement et diffusion numérique dans la simulation, conduisant à une déformation de la forme réelle de l'onde et par conséquent réduit notablement la représentativité des résultats. Cet amortissement ou diffusion se fait de plus en plus ressentir lorsque  $\Delta x$  choisi se trouve très grand comparé à la distance  $a \cdot dt$  parcourue réellement par l'onde (De Almeida et Koelle, 1992). On s'aperçoit facilement que pour pallier à l'apparition de ces effets numériques parasites, il faut satisfaire fermement la condition  $C_r = 1$ , c'est-à-dire  $\Delta x = a \cdot dt$ .

A coté de ces techniques de calcul, on trouve dans la littérature, notamment (Wylie et Streeter, 1978, De Almeida et Koelle, 1992), d'autres types de grilles de calcul. On citera non exhaustivement la technique *Shamida*, laquelle génère un réseau de caractéristiques secondaires pour augmenter la précision de calcul en créant des interceptions aux temps  $t + \Delta t/2$  et abscisses  $t + \Delta x/2$ .

### III.3.4. Conditions aux limites

L'examen de la figure (III.5) montre qu'aux extrémités de la conduite unique, seule une des deux équations de compatibilité est valide. Pour l'extrémité amont, seule l'équation

(III.37) est valide le long de  $C^-$ , de même pour la limite aval, l'équation (III.36) est la seule disponible le long de  $C^+$  (Figure (III.7)). Ces deux équations transmettent l'information du régime aux organes d'extrémités.



**Figure (III.7) :** Droites caractéristiques aux limites du domaine (Wylie et Streeter, 1978)

Pour obtenir la solution à l'extrémité de la conduite, une équation complémentaire à cet endroit est nécessaire pour déterminer le régime au temps  $t + \Delta t$ , transmettant ainsi l'information du régime imposé vers la conduite. Cette équation auxiliaire propre à l'appareil hydraulique présent au nœud considéré, est associée à l'équation de compatibilité pour trouver les variables  $H_p$  et  $Q_p$ . Parmi ces appareils, citons :

- réservoir à charge constante ;
- vanne de régulation ;
- turbomachine ;
- réservoir d'air ;
- cheminée d'équilibre.

Du point de vue mathématique, ces appareils hydrauliques présents à l'extrémité d'une conduite sont de deux types (Bergeron, 1949): appareils imposant une fonction explicite entre  $H$  et  $Q$  de type  $H = \psi(Q)$ , comme par exemple les vannes et les réservoirs ; et les appareils imposant une relation différentielle liant  $H$  et  $Q$  au temps  $t$ , exemple des cheminées d'équilibre et des réservoirs d'air. Chaque condition à la limite formée par l'un de ces organes est résolue indépendamment de l'autre limite, et aussi indépendamment des points intérieurs de calcul. En fin du chapitre, un exposé succinct sera donné sur les équations imposées par divers appareils hydrauliques fréquemment rencontrés en pratique.

Nous nous pencherons à présent sur une autre méthode de calcul numérique, très populaire en mécanique des fluides, c'est la méthode des différences finies.

### III.4. Méthode des différences finies

La méthode consiste à remplacer les opérateurs différentiels par des opérateurs de différences basés sur des intervalles de temps et d'espace finis  $\Delta t$  et  $\Delta x$ , puis à résoudre les équations algébriques obtenues en tenant compte des conditions initiales et aux limites. Ainsi, le domaine de variation continu du problème se trouve transformé en un ensemble finis de points (nœuds) où la solution sera recherchée. Ce domaine discret est alors délimité par des frontières formant par conséquent un réseau de points de calcul, appelé aussi grille de calcul.

#### III.4.1. Approximation en différences finies

Si une fonction quelconque  $f(x)$  est continue et dérivable, alors l'idée de base est d'appliquer à cette fonction un développement en série de *Taylor* comme suit (*Hoffmann et Chiang, 2000*) :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots + \frac{(\Delta x)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + O(\Delta x)^n \quad (\text{III.40})$$

Dans lequel  $O(\Delta x)^n$  représente le reste ou l'erreur de troncature d'ordre  $n$ .

Les problèmes des écoulements instationnaires étant gouvernés par des équations aux dérivées partielles, on peut appliquer aisément ce développement pour une fonction à deux variables ou plus. Ayant  $f(x, t)$  comme fonction de l'espace et du temps, on procédera à la discrétisation du plan  $x, t$  en un réseau (maillage) orthogonale, formant ainsi une grille de nœuds de calcul (Figure (III.8)). Pour l'approximation des dérivées spatiales premières, et en négligeant l'erreur de troncature, le développement de *Taylor* permet de formuler les possibilités suivantes :

- Schéma décentré amont (précis au premier ordre) :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^j - f_i^j}{\Delta x} \quad (\text{III.41})$$

- Schéma décentré aval (précis au premier ordre) :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i^j - f_{i-1}^j}{\Delta x} \quad (\text{III.42})$$

- Schéma centré (précis au deuxième ordre) :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^j - f_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (\text{III.43})$$

Où,  $f_i^j$  représente la valeur de la fonction aux points  $x_i, t_i$ .

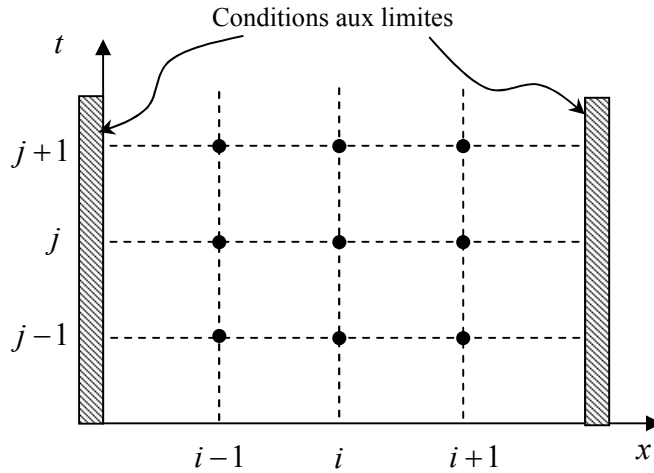


Figure (III.8) : Maillage du domaine de calcul et notations

Pour les dérivées spatiales secondes de la fonction  $f(x,t)$ , elles s'obtiennent de façon similaire. On écrit alors :

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1}^j - 2f_i^j + f_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.44})$$

En ce qui est de la dérivée première par rapport au temps, on adopte en général un schéma décentré en avant, et un schéma centré quant à la dérivée seconde :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{j+1} - f_i^j}{\Delta t} \quad (\text{III.45})$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right|_i = \frac{f_i^{j+1} - 2f_i^j + f_i^{j-1}}{(\Delta t)^2} \quad (\text{III.46})$$

On peut synthétiser les schémas d'approximation en différences finies sous la forme condensée suivante, donnée par Kovacs en 1988 (Abdallah, 2005) :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = & \alpha_3 \frac{\alpha_1 [f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1}] + (1 - \alpha_1) [f_i^{j+1} - f_{i-1}^{j+1}]}{\Delta x} \\ & + (1 - \alpha_3) \frac{\alpha_2 [f_{i+1}^j - f_i^j] + (1 - \alpha_2) [f_i^j - f_{i-1}^j]}{\Delta x} \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Le tableau (III.1) donne les différents types de schémas en fonction des paramètres introduits dans l'équation (III.47). On peut alors constater qu'en fonction de l'approximation des variables dans le temps, deux types de schémas émergent : explicites et implicites.

Tableau (III.1) : Typologie des schémas numériques

Pondération		Schéma
$\alpha_3 = 0$ $\alpha_3 = 0,5$ $\alpha_3 = 1$		Explicite
		Implicite centré dans le temps
		Totalement implicite
$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 1$	Progressif
$\alpha_1 = 0,5$	$\alpha_2 = 0,5$	Centré
$\alpha_1 = 0$	$\alpha_2 = 0$	Régressif
$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 0$	Mixte décentré

### III.4.2. Schémas explicites et implicites

Suivant la façon de discrétisation de l'équation aux dérivées partielles, deux cas se distinguent pour la méthode des différences finies (Hoffmann et Chiang, 2000) :

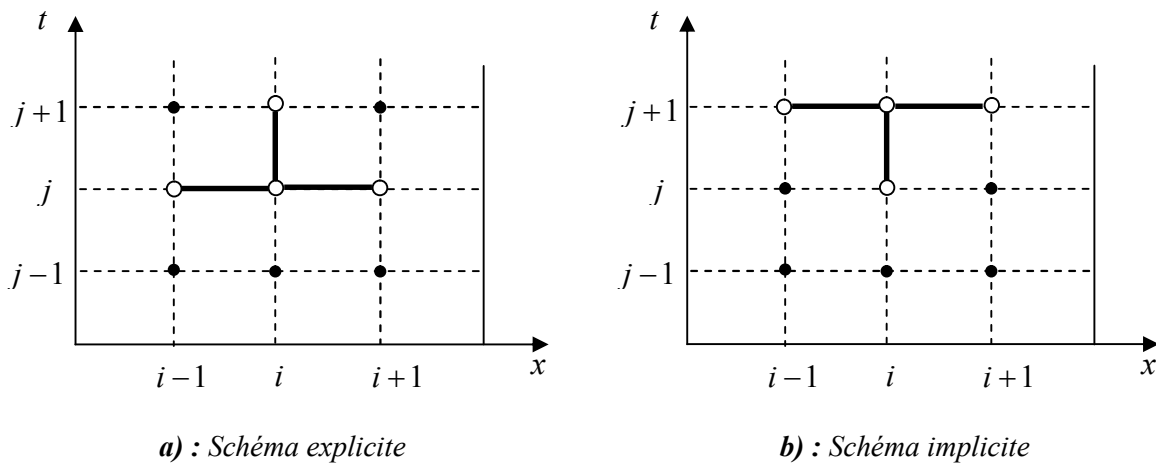
#### a) Schéma explicite

Si les dérivées spatiales dans l'équation sont exprimées en terme des variables au temps  $j$  connu, le schéma est dit alors explicite. C'est-à-dire, les caractéristiques de l'écoulement à un temps donné sont exprimées en fonction des caractéristiques de celui-ci supposées connues à l'instant précédent, de ce fait, ce qui se passe au temps  $t + \Delta t$  ne dépend que du passé au temps  $t$  (Figure (III.9.a)). Ce schéma possède un avantage de simplicité de calcul, mais pose des problèmes de stabilité numérique et exigent une condition de stabilité, c'est la règle CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). Nous citons entre autres schémas, celui de Lax (appelé schéma diffusif de Lax), le schéma de MacCormack (1971) et celui de Gabutti (Chaudhry, 2008), lesquels ont reçu des applications aussi bien en écoulements à surface libre qu'en charge.

#### b) Schéma implicite

A l'opposé, si les caractéristiques de l'écoulement à un temps donné  $t + \Delta t$  sont approchées en fonction de la solution précédente trouvée au temps  $t$ , et des valeurs recherchées au temps même du calcul  $t + \Delta t$ , la liaison est implicite, et le schéma est dit par conséquent implicite (Figure (III.9.b)). Ceci impose la résolution simultanée des équations algébriques obtenues à chaque pas de temps. Le schéma en question possède l'avantage d'être inconditionnellement stable et offre une flexibilité dans le

choix du temps de calcul, mais pour des systèmes ayant des conditions aux limites complexes, cette méthode devient vite compliquée en plus du volume de calcul induit. Parmi ces schémas, nous citons celui de *Preissmann* (*Cunge, 1988*), le schéma de *Beam et Warming* (*Fennema et Chaudhry, 1989*) et le schéma de *Vasiliev* (*Chaudhry, 2008*). L'ensemble de ces schémas a reçu de larges applications dans le domaine des écoulements à surface libre.



**Figure (III.9) :** Molécules de calcul d'un schéma aux différences finies

Ceci dit, nous excluons l'usage de schémas implicites pour les raisons notés antérieurement (§.1.5.2) et nous ferons par contre usage dans notre travail d'un schéma explicite pour les avantages offerts, et ceci pour sa comparaison avec la méthode des volumes finis. Le schéma explicite le plus adapté aux problèmes de propagations d'ondes est en l'occurrence celui de *MacCormack*.

### III.4.3. Schéma de MacCormack

Le schéma de *MacCormack*, très populaire en dynamique des fluides, est un schéma explicite de type prédicteur-correcteur, il est par conséquent d'une précision de second ordre dans l'espace et dans le temps. Sa particularité réside en sa capacité à capturer les chocs, qui se manifestent dans les équations de type hyperboliques, sans pour autant procéder à leur isolation (*Chaudhry, 2008*). Il a été appliqué initialement dans les écoulements à surface libre par *Fennema et Chaudhry* (1986) pour les problèmes unidimensionnels, puis appliqué aux écoulements bidimensionnels par *Bhallamudi et Chaudhry* (1992) et *Berreksi et al.* (2008).

#### III.4.3.1. Formulation générale

L'idée maîtresse de ce schéma consiste à discrétiser les équations de base en deux séquences, la première est l'étape de prédiction de la solution, et l'autre étant la correction de

cette solution. Les variables d'état inconnues de l'écoulement sont alors déterminées explicitement au temps  $t + \Delta t$  connaissant celles au temps précédent  $t$ . Pour un écoulement unidimensionnel, deux alternatives se présentent pour ce schéma. La première consiste à utiliser un schéma décentré aval (dérivée arrière) pour approximer la dérivée spatiale dans l'étape de prédiction et un schéma décentré amont (dérivée avancée) pour l'étape de correction ; ainsi, les variables calculées à l'étape de prédiction sont utilisées dans l'étape de correction. Dans la seconde alternative quant à elle, on fait usage d'un schéma décentré amont pour l'approximation des dérivées spatiales en étape de prédiction et un schéma décentré aval pour l'étape de correction (Chaudhry, 2008). Une procédure générale recommandée par MacCormack suggère l'alternance de la direction de différentiation d'un pas de temps à un autre, c'est-à-dire utiliser la première alternative pendant un pas de temps et la seconde alternative durant l'autre incrément de temps. De récentes investigations montrent que de bons résultats sont obtenus si la direction de différentiation dans l'étape de prédiction est la même que celle de la direction de propagation du front d'onde (Chaudhry, 2008).

Nous illustrons à présent la première alternative de l'approximation en différences finies par le schéma de MacCormack. Considérons un système d'équations aux dérivées partielles condensé sous la forme conservative suivante :

$$U_t + F_x + G = 0 \quad (\text{III.48})$$

- **Etape de prédiction**

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\tilde{U}_i - U_i^j}{\Delta t} \quad (\text{III.49})$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{F_{i+1}^j - F_i^j}{\Delta x} \quad (\text{III.50})$$

Où  $\tilde{U}_i$  représente la variable calculée en étape de prédiction. Substituons cette approximation dans l'équation (III.48) et réarrangeons les termes, on obtient :

$$\tilde{U}_i = U_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^j - F_i^j) - G_i^j \Delta t \quad (\text{III.51})$$

Les variables recherchées étant calculées en étape de prédiction, et ceci pour tous les points du domaine de calcul, on procède alors à leur correction tout en faisant usage de ces variables prédites pour le calcul de  $\tilde{F}$  et  $\tilde{G}$ .

- **Etape de correction**

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\hat{U}_i - U_i^j}{\Delta t} \quad (\text{III.52})$$



$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\tilde{F}_i - \tilde{F}_{i-1}}{\Delta x} \quad (\text{III.53})$$

Avec  $\hat{U}_i$  la variable déterminée en phase de correction. Un traitement similaire de substitution et de réarrangement aboutit à :

$$\hat{U}_i = U_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{F}_i - \tilde{F}_{i-1}) - \tilde{G}_i \Delta t \quad (\text{III.54})$$

Ceci fait, la valeur de la variable recherchée au temps  $t + \Delta t$  est alors donnée par :

$$U_i^{j+1} = \frac{1}{2} (\tilde{U}_i + \hat{U}_i) \quad (\text{III.55})$$

### III.4.3.2. Application du schéma de MacCormack au modèle mathématique

Rappelons tout d'abord le système d'équations différentielles gouvernant la propagation d'ondes élastiques dans une conduite en charge.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + gS \frac{\partial H}{\partial x} + RQ|Q| = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.56})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + gS \frac{\partial H}{\partial x} + RQ|Q| = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.57})$$

Dans ce système, on a écrit les équations (III.56) et (III.57) en fonction du débit pour la commodité des calculs en introduisant la section de la conduite  $S$ . Ces équations remaniées peuvent alors s'écrire sous la forme conservative suivante :

$$U_t + F_x + G = 0 \quad (\text{III.58})$$

Dans laquelle :

$$U = \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{gS} Q \\ gSH \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ RQ|Q| \end{bmatrix} \quad (\text{III.59})$$

Où le vecteur  $G$  représente le terme source, et la résistance de la conduite  $R = \frac{\lambda}{2DS}$ .

Considérons tout d'abord une conduite de longueur  $L$  qui est discrétisée en  $N$  tronçons égaux et dont la longueur est  $\Delta x$ . Si le premier nœud (limite amont) est noté par 1, alors le dernier nœud de calcul (limite aval) portera l'indice  $N + 1$ . Les valeurs des variables d'état  $H$  et  $Q$  sont considérées connues au temps  $t$  (indice  $j$ ), soit à partir des conditions initiales du problème ou d'un temps antérieur  $t - \Delta t$ , nous avons alors à déterminer les valeurs de ces variables au temps suivant  $t + \Delta t$  (indice  $j + 1$ ).

Appliquons à présent le schéma de *MacCormack* aux équations du mouvement transitoire, et ceci en utilisant la première alternative (*Chaudhry et Hussaini, 1985*).

- **Etape de prédiction**

$$\frac{\tilde{H}_i - H_i^j}{\Delta t} + \frac{a^2}{gS} \left( \frac{Q_{i+1}^j - Q_i^j}{\Delta x} \right) = 0 \quad (\text{III.60})$$

$$\frac{\tilde{Q}_i - Q_i^j}{\Delta t} + gS \left( \frac{H_{i+1}^j - H_i^j}{\Delta x} \right) + R Q_i^j |Q_i^j| = 0 \quad (\text{III.61})$$

On tire alors les variables suivantes :

$$\tilde{H}_i = H_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (Q_{i+1}^j - Q_i^j) \quad (\text{III.62})$$

$$\tilde{Q}_i = Q_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (H_{i+1}^j - H_i^j) - R Q_i^j |Q_i^j| \cdot \Delta t \quad (\text{III.63})$$

Avec  $1 \leq i \leq N$

- **Etape de correction**

$$\frac{\hat{H}_i - H_i^j}{\Delta t} + \frac{a^2}{gS} \left( \frac{\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{i-1}}{\Delta x} \right) = 0 \quad (\text{III.64})$$

$$\frac{\hat{Q}_i - Q_i^j}{\Delta t} + gS \left( \frac{\tilde{H}_i - \tilde{H}_{i-1}}{\Delta x} \right) + R \tilde{Q}_i |\tilde{Q}_i| = 0 \quad (\text{III.65})$$

Les variables recherchées s'écriront alors comme suit :

$$\hat{H}_i = H_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{i-1}) \quad (\text{III.66})$$

$$\hat{Q}_i = Q_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (\tilde{H}_i - \tilde{H}_{i-1}) - R \tilde{Q}_i |\tilde{Q}_i| \cdot \Delta t \quad (\text{III.67})$$

Tel que  $2 \leq i \leq N+1$

En conséquence, au temps  $t + \Delta t$ , les variables d'état prendront la valeur définitive suivante :

$$H_i^{j+1} = \frac{1}{2} (\tilde{H}_i + \hat{H}_i) \quad (\text{III.68})$$

$$Q_i^{j+1} = \frac{1}{2} (\tilde{Q}_i + \hat{Q}_i) \quad (\text{III.69})$$

Ou encore, sous la forme :

$$H_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left\{ H_i^j + \tilde{H}_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (\tilde{Q}_i - \tilde{Q}_{i-1}) \right\} \quad (\text{III.70})$$

$$Q_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left\{ Q_i^j + \tilde{Q}_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS(\tilde{H}_i - \tilde{H}_{i-1}) - R\tilde{Q}_i |\tilde{Q}_i| \cdot \Delta t \right\} \quad (\text{III.71})$$

Si l'on désire utiliser la deuxième alternative, alors la formulation algébrique de la solution numérique sera (Chaudhry et Hussaini, 1985) :

- **Etape de prédiction**

$$\tilde{H}_i = H_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (Q_i^j - Q_{i-1}^j) \quad (\text{III.72})$$

$$\tilde{Q}_i = Q_i^j - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS(H_i^j - H_{i-1}^j) - RQ_i^j |Q_i^j| \cdot \Delta t \quad (\text{III.73})$$

Avec  $2 \leq i \leq N+1$

- **Etape de correction**

$$H_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left\{ H_i^j + \tilde{H}_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (\tilde{Q}_{i+1} - \tilde{Q}_i) \right\} \quad (\text{III.74})$$

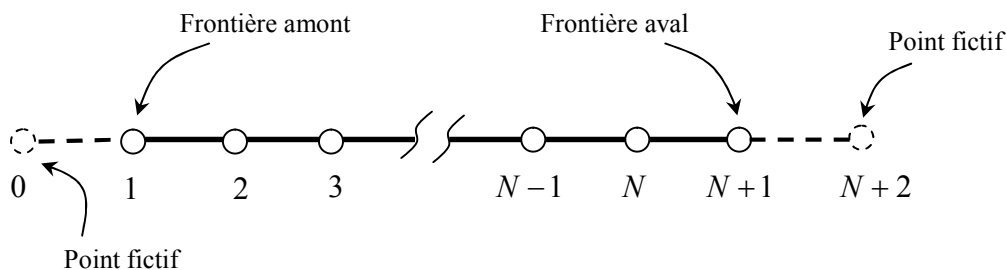
$$Q_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left\{ Q_i^j + \tilde{Q}_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS(\tilde{H}_{i+1} - \tilde{H}_i) - R\tilde{Q}_i |\tilde{Q}_i| \cdot \Delta t \right\} \quad (\text{III.75})$$

Où  $1 \leq i \leq N$

Ce calcul étant opéré sur les points intérieurs du domaine de calcul du régime transitoire, il est alors nécessaire de compléter la solution aux frontières de ce dernier par les conditions aux limites.

### III.4.3.3. Conditions aux limites

On peut facilement se rendre compte que la procédure de calcul de la solution numérique par le schéma de *MacCormack* ne peut être exécutée aux limites du domaine de calcul du fait de l'absence d'un nœud de part et d'autre de la grille de calcul (Figure (III.10)).



**Figure (III.10) :** Frontières du domaine et points fictifs de calcul

En effet, en utilisant la première alternative du schéma de *MacCormack*, on ne peut pas écrire la différence finie progressive à la limite aval ( $i = N + 1$ ) dans l'étape de prédiction, et de manière similaire, l'usage de la différence finie régressive durant l'étape de correction se trouve inopérable à la limite amont ( $i = 1$ ). Pour l'implémentation des conditions aux limites face à cette difficulté, *Chaudhry et Hussaini* (1985) présentent deux techniques à cet effet. La première est l'utilisation de la méthode d'extrapolation des flux au-delà des frontières du domaine, et la seconde repose sur l'application de la théorie des caractéristiques.

- **Méthode d'extrapolation des flux**

Pour illustrer cette technique d'extrapolation des flux, considérons l'équation scalaire suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (\text{III.76})$$

En supposant des points de calcul fictifs de part et d'autre du domaine, c'est-à-dire  $i = 0$  à l'amont et  $i = N + 2$  à l'aval de ce dernier (Figure (III.10)), le flux  $f$  en ces nœuds fictifs peut être extrapolé par l'utilisation de ces équations :

$$f_{N+2}^j = 2f_{N+1}^j - f_N^j \quad (\text{III.77})$$

$$f_0^j = 2f_1^j - f_2^j \quad (\text{III.78})$$

Par le biais de cette technique, on peut alors utiliser la différence progressive durant la phase de prédiction et la différence régressive pendant l'étape de correction pendant le calcul.

- **Méthode de la théorie des caractéristiques**

Dans cette technique, on se sert de la théorie des caractéristiques pour l'écriture et l'implémentation des conditions aux limites. Comme cela a été évoqué précédemment (§.III.3.4), les équations de compatibilité des droites caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$  aux extrémités du domaine seront couplées avec les équations spécifiques aux organes hydrauliques (vanne, réservoir, cheminée d'équilibre...etc.) présents en cet endroit et dont la résolution simultanée conduit à la solution recherchée. Le présent procédé est en effet préférable à la méthode d'extrapolation des flux et a été utilisé par plusieurs auteurs (*Fennema et Chaudhry, 1986 ; Garcia-Navarro et Saviron, 1992 ; Chaudhry et al., 1997 ; Abdallah, 2005*) dans la simulation des écoulements à surface libre du fait de sa robustesse et sa facilité de programmation sans oublier son sens physique de trajectoire de propagation d'ondes. Dans notre travail, nous appliquerons par conséquent cette technique pour le calcul des variables de l'écoulement aux limites du domaine de calcul.

Toutefois, il est à noter l'ordre de précision de la simulation des points intérieurs exécutée par le schéma de *MacCormack* (deuxième ordre) qui est dans ce cas différent de celui des points frontières (précis au premier ordre) calculés par la méthode des caractéristiques (*Chaudhry, 2008*). Selon *Chaudhry et Hussaini (1985)*, *MacCormack (1971)* a montré de manière heuristique que si l'ordre de précision du calcul des points frontières est inférieur à celui des points intérieurs, alors la précision totale des résultats de la simulation n'est en conséquence pas altérée.

#### III.4.3.4. Stabilité du schéma

A l'opposé des schémas aux différences finies implicites qui ne requièrent une condition de stabilité, les schémas explicites quant à eux réclament la satisfaction de la condition de stabilité dite "*Courant-Friedrichs-Lewy*" (CFL). Ainsi, la stabilité du schéma de *MacCormack* se traduit par le nombre de *Courant*  $C_r$ , dont l'expression rigoureuse est :

$$C_r = \frac{\max(a \pm |V|)}{\Delta x / \Delta t} \quad (\text{III.79})$$

Comme la célérité des ondes élastiques  $a$  est très grande comparée à la vitesse d'écoulement dans la conduite, c'est-à-dire le nombre de *Mach*  $\Lambda \ll 1$  (*De Almeida et Koelle, 1992*), et garde sa valeur constante durant l'apparition du régime transitoire, alors l'équation (III.79) devient :

$$C_r = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (\text{III.80})$$

L'analyse de stabilité suivant *Von Neumann*, reposant sur le développement en série de *Fourier* de la solution en différences finies (*Hoffmann et Chiang, 2000*), fait ressortir que pour le schéma de *MacCormack* le nombre de *Courant* ne doit excéder l'unité ( $C_r \leq 1$ ) pour assurer sa stabilité, c'est-à-dire le pas de temps choisi doit être tel que (*Chaudhry et Hussaini, 1985 ; Fennema et Chaudhry, 1986*) :

$$\Delta t = \frac{C_r \cdot \Delta x}{a} \quad (\text{III.81})$$

Selon *Hoffmann et Chiang (2000)*, pour pallier aux problèmes de diffusion et de dispersion numériques inhérents aux problèmes hyperboliques, il faut procéder, suivant le problème posé, à une expérimentation numérique quant au choix du nombre de *Courant*  $C_r$ , adéquat. D'après les travaux de *Chaudhry et Hussaini (1985)*, de bons résultats numériques ont été obtenus pour  $C_r = 1$  où l'avancée du front d'onde a été fidèlement reproduite.

En faisant le choix de  $C_r = 1$ , l'équation (III.80) deviendrait :

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{a} \quad (\text{III.82})$$

Contrairement aux problèmes d'écoulements à surface libre en régime non permanent de nature non linéaire où le pas de temps de calcul doit être ajusté à chaque incrément de temps (par suite de la variation de la célérité de l'onde  $c$  en fonction du tirant d'eau  $h$ ), le pas de temps restera dans le problème d'écoulement en charge fixe. Ceci se traduit du point de vue mathématique par la linéarité des droites caractéristiques  $dx/dt = \pm a$ .

### III.5. Equations caractéristiques d'organes hydrauliques

Comme ceci a été souligné précédemment, pour compléter la solution numérique aux points frontières du domaine (extrémités de la conduite), il faut procéder à la résolution simultanée des équations de compatibilité sur les droites  $C^+$  et  $C^-$  (si l'on utilise la théorie des caractéristiques) avec les équations spécifiques aux organes hydrauliques installés en ces nœuds de calcul. Il en résulte alors la nécessité d'exposer succinctement ici les équations caractéristiques propres à chaque appareil hydraulique fréquemment rencontré ou répandu dans la pratique (*Wylie et Streeter, 1978 ; Chaudhry, 1979*)

#### III.5.1. Réservoir à charge constante

Dans le cas d'un réservoir de grande dimension (section infinie), la charge hydraulique en ce point est considérée constante pendant le régime transitoire. Alors, la condition imposée par ce réservoir est :

$$H_{P_1} = H_R \quad (\text{III.83})$$

Où,  $H_R$  est la cote de la surface libre de l'eau par rapport au plan de référence.

Si par contre, la charge du réservoir décrit un comportement temporel connu, comme un mouvement sinusoïdal, alors la condition exigée au nœud considéré deviendrait :

$$H_{P_1} = H_R + \Delta H \sin(\omega t) \quad (\text{III.84})$$

Dans laquelle  $\omega$  est la fréquence angulaire d'excitation et  $\Delta H$  l'amplitude de l'onde se superposant à la charge initiale du réservoir.

#### III.5.2. Appareil imposant une fonction connue du débit

Ça sera l'exemple d'une pompe à piston dont le débit déplacé décrit une fonction explicite connue dans le temps (impulsion de débit). Nous prendrons l'exemple de la fonction suivante :

$$Q_{P_1} = Q_R + \Delta Q |\sin(\omega t)| \quad (\text{III.85})$$

### III.5.3. Vanne à l'extrémité d'une conduite

Si le plan de référence est pris à l'orifice de la vanne, l'application du théorème de *Bernoulli* le long d'un filet liquide de la surface libre du réservoir jusqu'à cet orifice permet d'écrire :

$$Q = (C_d \cdot S) \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad (\text{III.86})$$

Avec,  $Q$  débit traversant la vanne,  $C_d$  le coefficient de débit pour la section d'ouverture  $S$  et  $H$  étant la charge motrice disponible pour l'écoulement du débit  $Q$ . Ainsi, connaissant la loi de variation du débit en fonction du temps imposée à la vanne, le calcul du régime transitoire se mènera alors sans difficulté.

### III.5.4. Pompe centrifuge

La condition hydraulique imposée par cette turbomachine étant la courbe caractéristique  $H(Q)$  à vitesse constante, cette relation est du type :

$$H_p = B + a_1 \cdot Q_p + a_2 \cdot Q_p^2 \quad (\text{III.87})$$

Sachant que  $B$  est le point de barbotage de la pompe,  $a_1$  et  $a_2$  sont des coefficients dépendant du tracé de cette pompe (*Stepanoff, 1961 ; Stroskolański, 1977*). En résolvant simultanément l'équation polynomiale (III.87) et l'équation de compatibilité, il est alors possible de déterminer les variables  $H_p$  et  $Q_p$  en ce lieu.

### III.5.5. Bout mort

Si l'extrémité d'une conduite est fermée, par une plaque pleine par exemple, ceci constitue donc un bout mort de la canalisation. Intuitivement, la condition imposée en ce lieu étant un débit nul :

$$Q_{P_{NS}} = 0 \quad (\text{III.88})$$

A partir de l'équation (III.34), on obtient facilement  $H_{P_{NS}}$ .

### III.5.6. Organes capacitifs

Ce type d'appareil forme une capacité avec une section finie, subissant des variations de niveau d'eau en fonction des débits entrant et sortant de cet organe en régime transitoire. L'exemple de cette famille d'appareil étant les cheminées d'équilibre. La condition imposée alors par cet organe est l'équation différentielle du stockage de l'eau :

$$(Q_e - Q_s) dt = A \cdot dh \quad (\text{III.89})$$

$Q_e$  et  $Q_s$  sont respectivement les débits entrant et sortant de l'organe,  $A$  la section horizontale occupée par l'eau et  $dh$  variation infinitésimale du niveau d'eau subie en un

temps  $dt$ . Cette relation différentielle est résolue simultanément avec l'équation de compatibilité par approximations successives.

**Remarque :**

Nous allons voir les détails d'implémentation de certains de ces organes en tant que modèles de conditions aux limites ainsi que les hypothèses admises pour y parvenir dans le second volet de notre travail dédié à l'application de la méthode des volumes finis. La technique de traitement de ces équations sera différente comparée avec les présents modèles numériques aux différences finies exposés ici, mais les équations caractéristiques des appareils demeureront les mêmes.

### **III.6. Conclusion**

Ayant formulé les équations différentielles de base gouvernant les écoulements instationnaires en charge dans le chapitre précédent, il a été de nécessité d'exposer les méthodes classiques de résolution numérique de ces équations.

Ces méthodes, en l'occurrence des modèles numériques aux différences finies, ont servies pour plusieurs décennies pour la simulation et l'analyse des régimes transitoires en charge et forment, selon *Ghidaoui et al.* (2005), la quasi-totalité des moteurs de calcul des programmes commerciaux présents actuellement (HAMMER, HYTRAN, IMPULSE, WANDA...etc.).

En premier lieu, une attention particulière a été accordée à l'exposé de la méthode des caractéristiques (MOC). Ceci est dû à la simple raison de la popularité de la méthode et sa puissance de résolution des équations hyperboliques, sans oublier sa facilité de programmation et sa robustesse. Demeurant très utilisée à nos jours, plusieurs améliorations ont été apportées au schéma de calcul de base à grille régulière, que nous n'avons exposé. Mais l'inconvénient principal reste les problèmes de choix de discrétisation pour les systèmes complexes et les problèmes d'interpolations surgissant par conséquent.

La difficulté a été partiellement surmontée par l'application des schémas de calcul aux différences finies. Parmi les innombrables travaux sur ce sujet, nous avons présenté le travail de *Chaudhry et Hussaini* (1985) qui initia l'application du schéma explicite de *MacCormack* de type prédicteur-correcteur connu par sa capacité de capture des chocs apparaissant dans ce type de problème. D'autres schémas ont cependant reçu application par ces auteurs tels que le schéma de *Lambda* et le schéma de *Gabutti*. Nous avons terminé le présent chapitre par une brève description des modèles mathématiques des appareils hydrauliques en vu de leurs implémentation dans les conditions aux limites.



" Le premier processus... dans l'étude efficace des sciences doit être la simplification et la réduction des résultats des investigations précédentes à une forme dans ce que l'esprit peut la saisir..."

James Clerk Maxwell

## 4. Méthode des volumes finis

### IV.1. Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que face à l'insolubilité analytique des équations hyperboliques de lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement gouvernant la propagation des ondes dans les conduites en charge pour les cas réels, parfois très complexes, on est alors amené à ne pas résoudre directement les équations différentielles de base qui décrivent le phénomène physique mais à résoudre des versions approchées qui s'en rapprochent autant que possible. Les équations approchées que l'on résout s'obtiennent à partir des équations originales par le biais de la discrétisation, moyennant laquelle il est espéré de se rapprocher de la solution analytique exacte (souvent inexistante). Dans les méthodes dites aux différences finies, examinées précédemment, cette opération de discrétisation est appliquée de façon identique à l'espace et au temps, cependant d'autres approches existent.

Récemment, la discrétisation par la méthode des volumes finis a reçu un fort succès en mécanique des fluides en raison de ses innombrables avantages, notamment dans les problèmes liés aux lois de conservation hyperboliques et propagation des ondes en hydraulique à surface libre et en charge où, comme le sait-on, des problèmes d'apparition de discontinuités et formation de chocs, inhérent à ce type d'équations, sont fort et bien probables, ce qui pose des problèmes aux autres méthodes.

Le présent chapitre s'axera sur l'application de la méthode aux volumes finis à la résolution numérique des équations de propagation des ondes. En premier lieu, on s'attachera à l'exposition de la discrétisation des lois de conservation hyperboliques de manière générale par cette méthode moyennant différents schémas, après quoi l'accent sera mis sur la mise en œuvre du schéma de *Richtmyer* et la méthode de *Godunov* aux problèmes des équations des ondes élastiques, siège d'une éventuelle discontinuité dans la solution.

## IV.2. Facultés et puissance de l'approche aux volumes finis

Appliquée initialement aux problèmes d'équations elliptiques (équilibre et distribution de potentiels) et paraboliques (diffusion et transfert de masse), où *Patankar* (1980) fut le pionnier, la méthode des volumes finis s'est rapidement répandue dans la résolution des problèmes hyperboliques de propagation d'ondes de choc en mécanique des fluides. Sa puissance est puisée de son caractère et approche physique dans la formulation et résolution des problèmes, ce qui lui confère une supériorité face aux limitations des autres méthodes. On s'efforcera tout d'abord ici à montrer la faillibilité dans le cas général des méthodes aux différences finies et aux caractéristiques face au problème de continuité de la solution, quasi-inévitable, et où le caractère conservatif du problème cesse d'être satisfait.

### IV.2.1. Limites de l'approche aux différences finies et apparition de discontinuités

Il est connu que les lois de la dynamique des fluides peuvent être exprimées du point de vue mathématique soit sous forme différentielle ou bien intégrale (dite aussi faible). Quand un schéma numérique est appliqué à la forme différentielle, le domaine de la solution est discrétisé en un ensemble de points ou nœuds de calcul. Telle est l'approche de la méthode des différences finies (*Hoffmann et Chiang, 2000*). Or nous savons que pour les équations aux dérivées partielles (EDP) hyperboliques, des conditions initiales continues peuvent bien conduire à des solutions discontinues. Pour montrer le mécanisme de leur apparition, considérons la loi de conservation donnée par la forme générale suivante, sans terme source :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.1})$$

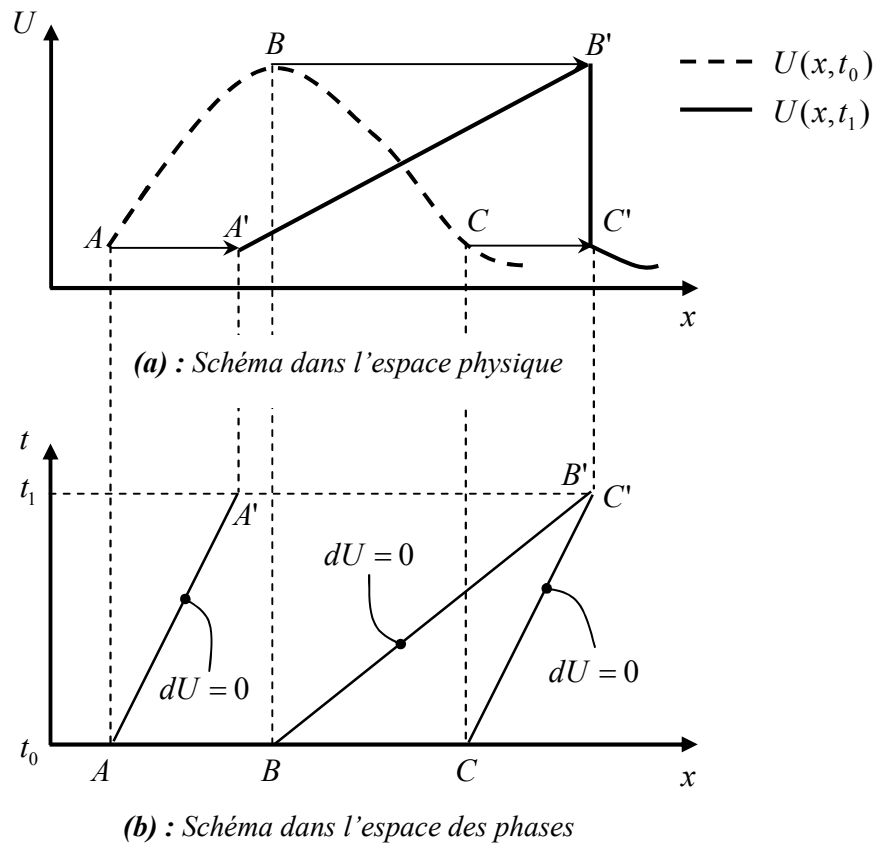
Où la fonction de flux  $F$  peut dépendre uniquement de  $x$ ,  $t$  et de la variable conservée  $U$ . L'équation (IV.1), qui est sous forme dite conservative, peut alors s'écrire sous la forme non conservative suivante (*Guinot, 2008*) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{\lambda} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.2})$$

Avec  $\tilde{\lambda} = dF / dU$ . Sous la forme caractéristique, l'équation (IV.2) se réécrit, comme a été vu au chapitre précédent, de la manière suivante :

$$U = Cte \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \tilde{\lambda} \quad (\text{IV.3})$$

La quantité  $U$ , dite invariant de *Riemann*, est donc constante le long de la caractéristique (trajectoire)  $dx/dt = \tilde{\lambda}$ . Lorsque la fonction de flux  $F$  n'est pas linéaire,  $\tilde{\lambda}$  n'est pas constante et dépend aussi de la valeur de  $U$ , invariante le long d'une caractéristique. Les lignes caractéristiques sont alors des droites dans l'espace des phases (Figure (IV.1)).



**Figure (IV.1) :** Apparition d'une solution discontinue dans le cas d'une fonction de flux convexe (Guinot, 2008)

Ayant un profil initial ( $ABC$ ) non monotone à la date  $t_0$ , lequel passe par un maximum en  $B$ , on constatera alors ce qui suit (Guinot, 2008) :

- a)** Si la fonction de flux est convexe, la caractéristique passant par  $B$  (l'information) se déplace plus vite que les caractéristiques issues de  $A$  et  $C$  car  $\lambda$  est une fonction croissante de  $U$ . Il existe ainsi un temps  $t_1$  où la caractéristique passant par  $B$  « rattrape » ou intercepte la caractéristique passant par  $C$ . A ce temps, les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  se sont déplacés en  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ .  $U$  étant invariable le long des caractéristiques, les valeurs de  $U$  à  $t = t_1$  en  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont respectivement égales aux valeurs initiales à  $t = t_0$  en  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Les points  $B'$  et  $C'$  étant confondus dans l'espace des phases, le profil de  $U$  est alors discontinu en ce point, puisque pour la même valeur de  $x$ , on trouve  $U_B = U_C$  (Figure (IV.1.b)).

- b) Si la fonction de flux est concave, la caractéristique passant par  $B$  se déplacerait plus lentement que celle passant par  $A$ . Un raisonnement similaire au précédent montre que la discontinuité apparaîtrait en  $A' = B'$ .

Ainsi, les équations de base établies au chapitre II et la formulation aux caractéristiques au chapitre III, ont été démontrées sous l'hypothèse que les dérivées partielles des variables par rapport à l'espace et au temps étaient définies en tout point. Or, au niveau d'une discontinuité les dérivées spatiales et temporelles ne sont pas définies. Il en découle que les relations caractéristiques et différentielles ne peuvent être appliquées telles quelles aux points où le profil devient discontinu. Lorsque l'hypothèse de continuité de la solution est violée, on est contraint d'appliquer d'autres approches qui sont les relations de saut, appelées aussi relations de *Rankine-Hugoniot*, ou bien de revenir à la formulation intégrale des équations de base, dite aussi formulation faible.

#### IV.2.2. Formulation intégrale et propriétés des solutions faibles

A l'opposé de l'approche aux différences finies, si la forme intégrale est utilisée dans la formulation du problème, alors le domaine est discrétisé en volumes ou cellules. Subséquemment, les lois de conservation sous forme intégrale ou faible sont alors appliquées à ces volumes élémentaires (*Hoffmann et Chiang, 2000*). Reprenons l'équation (IV.1) avec cette fois la prise en compte du terme source :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} - G = 0 \quad (IV.4)$$

La forme faible de l'équation (IV.4) sur un domaine  $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$  s'obtient en pondérant la dernière équation par une fonction  $w(x, t)$  arbitraire de l'espace et du temps et en intégrant l'équation obtenue sur le domaine d'espace et du temps :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} - G \right) w(x, t) dx dt = 0 \quad (IV.5)$$

Ainsi, l'équation (IV.5) est la solution faible de l'équation aux dérivées partielles (IV.4). Une forme faible particulière est celle où  $w(x, t)$  est constante. Alors l'équation (IV.5) devient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} - G \right) dx dt = 0 \quad (IV.6)$$

En intégrant  $\frac{\partial U}{\partial t}$  par rapport à  $t$  et  $\frac{\partial F}{\partial x}$  par rapport à  $x$ , il vient :

$$\int_{x_1}^{x_2} U(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} U(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} F(x_2, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} F(x_1, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} G(x, t) dx dt \quad (\text{IV.7})$$

On constate alors que l'équation (VI.7) n'est autre que celle du bilan d'évolution et de conservation de la quantité  $U$  effectué sur un volume de contrôle  $[x_0, x_0 + \Delta x] \times [t_0, t_0 + \Delta t]$  si l'on pose  $x_1 = x_0$ ,  $x_2 = x_1 + \Delta x$ ,  $t_1 = t_0$  et  $t_2 = t_1 + \Delta t$ . En faisant tendre les incréments  $\Delta x$  et  $\Delta t$  vers zéro dans l'équation du bilan (IV.7) pour faire apparaître les dérivées partielles et après quelques manipulations (Appendice (II)), on retrouvera bien l'équation (IV.4).

Quoiqu'en apparence les formulations différentielle (IV.4) et intégrale (IV.7) découlent l'une de l'autre, mais celles-ci ne sont guère équivalentes (Guinot, 2008). En effet, elles se distinguent par les points importants suivants :

1. En faisant tendre la taille du volume de contrôle vers zéro et en faisant intervenir les dérivées partielles  $\partial U / \partial t$  et  $\partial F / \partial x$ , on suppose implicitement que la solution  $U$  (donc  $F$  également) est continue et dérivable par rapport à l'espace et au temps. La forme (IV.4) n'admet donc pas de solution discontinue telle que les ondes de choc ou les ondes mixtes.
2. En revanche, l'équation (IV.7) ne fait pas appel à l'hypothèse de continuité des fonctions  $U$  et  $F$ . Les intégrales dans l'équation (IV.7) peuvent être évaluées même si  $U$  et  $F$  présentent des discontinuités dans l'espace et dans le temps.

Par conséquent, une solution « forte » de l'équation (IV.4), c'est-à-dire une solution satisfaisant la dite équation en tout point  $(x, t)$ , est un cas particulier de la solution faible, mais l'inverse n'est pas vrai. Les formulations forte et faible sont équivalentes tant que la solution  $U$  reste continue par rapport à  $x$  et à  $t$ . Si celle-ci présente des discontinuités, les deux formulations cessent d'être équivalentes.

Ces remarques ont une grande importance dans la résolution des équations en présence de discontinuités tel que le cas des régimes transitoires en charge ou à surface libre. Ainsi, le concept de la méthode des volumes finis repose sur le principe physique d'établissement de bilan des flux au sein d'un volume de contrôle où les lois de conservation sous forme intégrale (faible) sont écrites, gardant le caractère conservatif du problème. C'est l'idée de base qui a permis alors de développer plusieurs schémas numériques vu ses avantages.

### IV.2.3. Avantages de l'approche aux volumes finis

Avant de passer aux détails de la modélisation numérique par schémas aux volumes finis des équations hyperboliques, il nous paraît nécessaire de souligner les lignes de

démarcation entre la méthode des différences finies, des éléments finis et celle des volumes finis, pour mettre ainsi l'accent sur les avantages qu'offre cette dernière dans le domaine de la mécanique des fluides numérique. Les traits caractéristiques de chaque méthode sont alors donnés dans le tableau (IV.1) ci-dessous.

**Tableau (IV.1) : Principe et particularités des principales méthodes de discrétisation numérique**

<b>Méthode de discrétisation</b>	<b>Principe de l'approche</b>	<b>Particularités</b>
<i>Différences finies</i>	Approximation des dérivées intervenant dans les équations à l'aide de développement en série de Taylor	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Mise en œuvre simple pour une géométrie simple ;</li> <li>- Difficulté de traitement des géométries complexes ;</li> <li>- Pas toujours conservative.</li> </ul>
<i>Eléments finis</i>	Détermination d'un champ local à attribuer à chaque sous domaine (élément) pour que le champ global obtenu par juxtaposition de ces champs locaux soit proche de la solution du problème.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Approche très mathématique ;</li> <li>- S'adapte à des géométries quelconques ;</li> <li>- Difficultés pour résoudre les termes non linéaires ;</li> <li>- Très utilisée dans la mécanique des solides.</li> </ul>
<i>Volumes finis</i>	Bilan local des flux dans un petit volume de contrôle, et approximation des flux sur chaque face des cellules.	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Approche très physique ;</li> <li>- S'adapte à une géométrie quelconque ;</li> <li>- Plusieurs schémas pour la résolution des termes non linéaires hyperboliques.</li> <li>- Conservative (par sa formulation) ;</li> <li>- La base de la plupart des codes généralistes en mécanique des fluides.</li> </ul>

A coté des difficultés de géométrie du domaine de calcul dont souffre la méthode des différences finies, où la technique de transformation de coordonnées du domaine physique au domaine numérique s'impose dans ce cas (*Bhalla et Chaudhry, 1992 ; Hoffmann et Chiang, 2000 ; Berreksi, 2012*), le problème réside en ce que l'information qu'elle prend en compte n'est que les valeurs prises par la variables  $U$  en différents points discrets de l'espace, c'est-à-dire que l'information entre ces points est perdue. La méthode aux volumes finis remédie alors à cela en considérant toute l'information, mais sous forme moyennée, contenue entre deux points, comme nous le détaillerons dans ce qui suit.

### IV.3. Formulation générale pour les lois de conservation

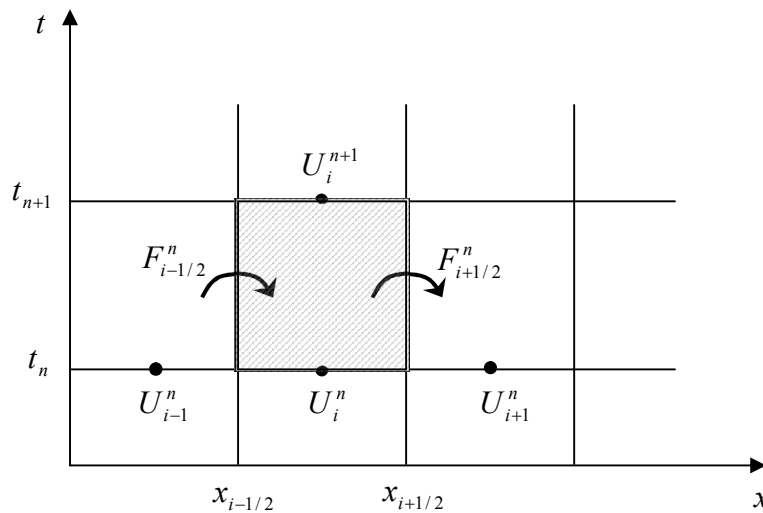
En une dimension d'espace, la méthode des volumes finis est basée sur la subdivision du domaine spatiale en un ensemble d'intervalles ou volumes finis, appelés aussi cellules de calcul. Après écriture des équations sous forme intégrale sur chaque cellule, une discrétisation des flux entrant et sortant de celle-ci permet de déterminer l'évolution du système en fonction du temps (*LeVeque, 2002*).

Considérons la loi de conservation hyperbolique suivante, qui est celle de l'advection :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.8})$$

Cette équation est alors soumise à des conditions initiales et/ou aux frontières. Pour trouver sa forme conservative, intégrons cette équation sur un volume de contrôle formé dans ce cas par un segment centré autour de  $x_i = i\Delta x$ , où  $\Delta x$  est la taille de la cellule de la grille de calcul. Les bornes de ce segment sont  $x_{i-1/2}$  et  $x_{i+1/2}$ , dans lequel l'indice "1/2" indique que ces points sont à l'interface avec les cellules voisines centrées en  $x_{i-1}$  et  $x_{i+1}$  (Figure (IV.2)). Dénotons la "i" ème cellule de la grille par :

$$C_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \quad (\text{IV.9})$$



**Figure (IV.2) :** Discrétisation en volumes finis et transfert de flux dans le plan  $x, t$

Plutôt que de considérer comme auparavant (chapitre III) la valeur prise par la variable  $u$  en  $x = x_i$ , on introduit alors la valeur moyennée de  $u$  sur le segment  $C_i$  :

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t_n) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} u(x, t_n) dx \quad (\text{IV.10})$$

Si la fonction  $u(x,t)$  est régulière, l'intégrale (IV.10) est conforme avec la valeur que prendrait  $u$  au milieu de l'intervalle avec une précision de l'ordre de  $(\Delta x)^2$ . En travaillant avec cette approche de moyenne sur une cellule, il est alors facile d'utiliser les propriétés de la loi de conservation dans la dérivation des schémas numériques (LeVeque, 2002). En particulier, nous pouvons garantir que le modèle numérique est conservatif dans la mesure où celui-ci imite la solution exacte, et ceci est extrêmement important dans le calcul des ondes de choc. Ceci revient au fait que  $\sum_{i=1}^N U_i^n \Delta x$  approche l'intégrale de  $u$  sur l'ensemble de l'intervalle  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , et si nous utilisons une méthode sous forme conservative (comme décrit précédemment), cette somme discrète va changer uniquement en raison des flux entrant et sortant aux interfaces. La quantité totale dans le domaine de calcul restera préservée.

Intégrons l'équation (IV.8) sur un volume de contrôle  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$ . Comme la grille est fixe (bornes indépendantes du temps), l'application des règles de différentiation par rapport à la variable d'espace  $x$  donne (Damman, 1996) :

$$\int_{C_i} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \int_{C_i} u dx \quad (\text{IV.11})$$

Egalement :

$$\int_{C_i} \frac{\partial f(u)}{\partial x} dx = [f(u)]_{x_{i+1/2}}^{x_{i-1/2}} \quad (\text{IV.12})$$

L'intégrale de l'équation (IV.8) sur  $C_i$  sera alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{C_i} u(x,t) dx = f[u(x_{i-1/2}, t)] - f[u(x_{i+1/2}, t)] \quad (\text{IV.13})$$

On peut ainsi utiliser cette expression pour développer un algorithme d'intégration temporelle explicite. Ayant  $U_i^n$  comme moyenne de la variable  $u$  sur la cellule au temps  $t_n$ , on peut calculer la variable  $U_i^{n+1}$ , moyenne de la variable sur la même cellule, au temps  $t_{n+1}$ . L'intégration par rapport au temps de l'équation (IV.13) entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$  donne :

$$\int_{C_i} u(x, t_{n+1}) dx - \int_{C_i} u(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[u(x_{i-1/2}, t)] dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[u(x_{i+1/2}, t)] dt \quad (\text{IV.14})$$

Après division par  $\Delta x$  et réarrangement, on obtient :

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} u(x, t_{n+1}) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} u(x, t_n) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[u(x_{i+1/2}, t)] dt + \frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[u(x_{i-1/2}, t)] dt \quad (\text{IV.15})$$



L'équation (IV.15) donne l'expression exacte de la manière dont la variable  $U_i^n$ , de l'équation (IV.10), évolue dans le temps. Cependant, la difficulté réside généralement dans l'évaluation du second membre de l'équation (IV.15) dans la mesure où l'intégration exacte des flux dans le temps n'est pas possible à cause de la variation de  $u(x,t)$  le long de chaque facette de la cellule  $C_i$  (LeVeque, 2002). Toutefois ceci suggère l'utilisation de méthodes d'intégration numériques.

En introduisant le concept de flux moyen au cours du temps, aux interfaces de la cellule, on écrira alors :

$$F_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[u(x_{i\pm 1/2}, t)] dt \quad (\text{IV.16})$$

On peut par conséquent récrire l'équation (IV.15), en faisant usage des variables moyennées, sous la forme discrète suivante (LeVeque, 2002) :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) \quad (\text{IV.17})$$

Le calcul de la valeur moyenne de  $U$  à la cellule " $i$ " au temps  $t + \Delta t$  demande donc l'estimation des flux à l'interface de la cellule. Pour les problèmes hyperboliques sur lesquels nous nous intéressons, l'information se propage à vitesse finie, il est par conséquent raisonnable en premier lieu d'admettre qu'on puisse obtenir le flux  $F_{i-1/2}^n$  à l'interface " $i-1/2$ " en s'appuyant seulement sur les valeurs moyennes de  $U$  aux cellules voisines de l'interface au temps  $t$ , à savoir les variables  $U_{i-1}^n$  et  $U_i^n$ . On peut traduire ceci par :

$$F_{i-1/2}^n = \Phi(U_{i-1}^n - U_i^n) \quad (\text{IV.18})$$

Où  $\Phi$  représente la fonction numérique de flux. L'équation (IV.17) devient alors :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\Phi(U_i^n - U_{i+1}^n) - \Phi(U_{i-1}^n - U_i^n)] \quad (\text{IV.19})$$

Ainsi, tout l'effort de la méthode consiste à trouver une approximation des flux  $F_{i-1/2}^n$  et  $F_{i+1/2}^n$ , c'est-à-dire comment formuler la fonction numérique de flux  $\Phi$  (LeVeque, 2002). En général, toute formulation explicite de ce type, son domaine de dépendance exige un schéma à trois points (domaine de dépendance), c'est-à-dire que la valeur de  $U_i^{n+1}$  sera dépendante des trois valeurs  $U_{i-1}^n$ ,  $U_i^n$  et  $U_{i+1}^n$  connues au temps antérieur  $t$ .

Notons en marge que la formulation discrète (IV.19) garde tout le caractère conservatif de la formulation intégrale (IV.15) où la simple sommation  $U_i^{n+1} \Delta x$  dans l'équation (IV.17) sur tout le domaine reproduira les propriétés de la solution exacte, comme suit :

$$\Delta x \sum_{i=1}^J U_i^{n+1} = \Delta x \sum_{i=1}^J U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{J+1/2}^n - F_{1/2}^n) \quad (\text{IV.20})$$

Remarquons alors que sur l'ensemble du domaine, nous retrouvons le critère de conservation exacte, excepté les interfaces extrêmes de ce domaine qui dépendent des conditions aux limites.

#### IV.4. Critères de stabilité et convergence

De ce qui a précédé, nous savons que la formulation aux volumes finis conduit à un choix d'une fonction numérique de flux pour le calcul du régime transitoire. Or dans la littérature (*Toro et Garcia-Navarro, 2007*), on retrouve plusieurs schémas numériques aux volumes finis résultant du choix de la fonction  $\Phi$ . Ainsi, plusieurs considérations concourent quant au choix de la fonction numérique adéquate au problème posé. Le critère principal requis se trouve alors celui de la convergence du schéma adopté, ce qui signifie que la solution numérique doit converger vers la solution exacte de l'équation différentielle lorsque l'on raffine la discrétisation (la taille des cellules  $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ ). Pour ce faire, deux conditions en général (théorème dit de *Lax*) sont exigées (*LeVeque, 2002 ; Guinot, 2008*) :

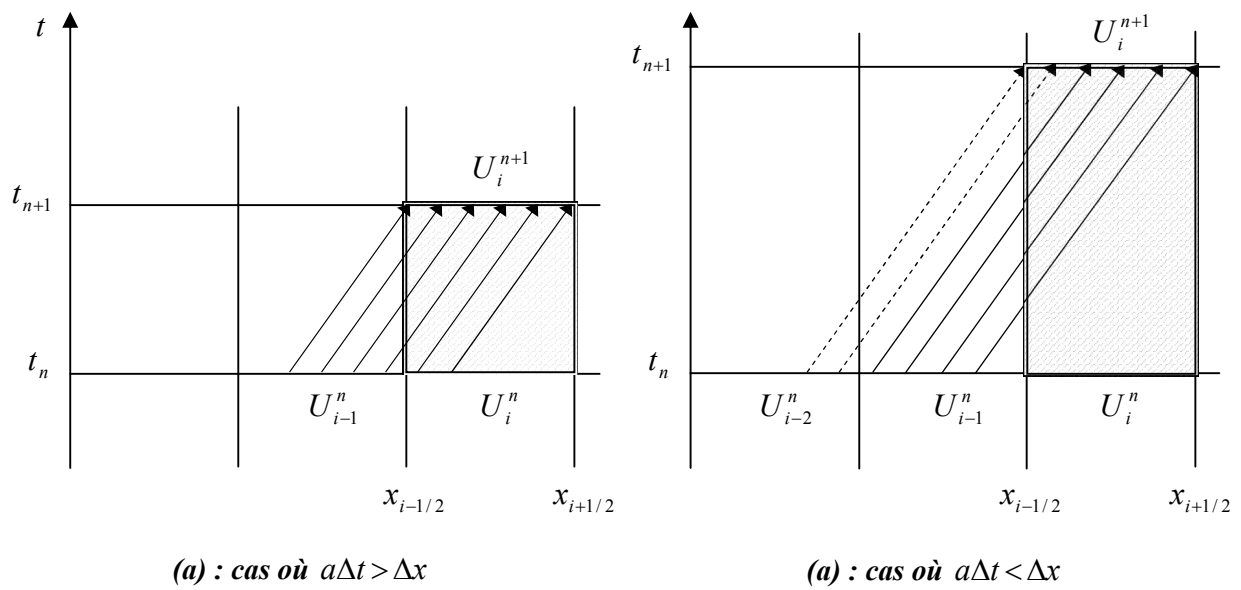
- **La méthode doit être consistante** : dans le sens où le schéma numérique approche l'intégrale (IV.16) lorsque le pas d'espace et de temps tendent vers zéro ;
- **La méthode remplit la condition de stabilité** : ceci se traduit par le fait qu'une erreur introduite au début du calcul se trouve amortie et ne s'amplifie pas dans le temps, le schéma numérique est ainsi peu sensible à l'accumulation d'erreurs de troncature et d'arrondis.

Pour les équations hyperboliques et dont la méthode de calcul est explicite, il faut remplir la condition de stabilité de *Courant*, dite règle CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*). De manière simple, cette règle stipule que la méthode de calcul utilisée doit pouvoir propager l'onde d'information (signal) de façon correcte du point de vue physique, c'est-à-dire avec la célérité réelle donnée par les valeurs propres de la matrice jacobienne  $\partial F(U)/U$ . Pour illustrer ceci, prenons l'exemple de l'équation d'advection (IV.8) avec  $f(u) = au$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.21})$$

Tel que  $a > 0$ .

On sait que la solution exacte du problème consiste en la simple translation de la quantité  $u$  avec une vitesse finie  $a$  sur une distance de  $a \Delta t$  (Hoffmann et Chiang, 2000 ; Szymkiewicz, 2010). Les caractéristiques dans le plan  $(x, t)$  sont donc des droites d'équation  $x = x_0 + at$ . Sur la figure (IV.3) est illustré le cas d'une cellule centrée en  $x_i$  et où  $a \Delta t < \Delta x$ . On constate alors que l'information se propage moins vite que le signal réel, par conséquent, la distance parcourue est inférieure à la taille d'une cellule  $C_i$ . Dans ce cas, le flux reçu au temps  $t + \Delta t$  provient seulement de la cellule juste à l'amont, donné par la valeur moyennée  $U_{i-1}^n$ .



(a) : cas où  $a\Delta t > \Delta x$

(a) : cas où  $a\Delta t < \Delta x$

**Figure (IV.3) :** Illustration du sens physique de la règle de stabilité de Courant

Si maintenant nous choisissons un pas de temps tel que  $a \Delta t > \Delta x$ , alors le flux réel en  $x_{i-1/2}$  (interface amont de la cellule  $C_i$ ) dépendra de la valeur de  $U_{i-2}^n$ , cellule encore plus à l'amont. Ceci dit, le calcul de la valeur moyenne suivant l'intégrale (IV.10) n'est plus correct et subséquemment l'approximation (IV.19) n'est plus valide. Dans le dit cas, on enregistrera une instabilité dans le calcul numérique de la solution et une divergence par rapport à la solution analytique. Ainsi, au sens mathématique la condition de Courant (règle CFL) s'énonce comme suit : Une méthode numérique peut être convergente seulement si son domaine numérique de dépendance contient le domaine réel de dépendance de l'équation aux dérivées partielles. Pour les méthodes aux différences finies explicites, on définit la condition de Courant  $C_r$  comme suit :

$$C_r = \left| \frac{a \Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1 \quad (\text{IV.22})$$

En ce qui est de la méthode aux volumes finis, en s'appuyant sur l'illustration de la figure (IV.3), le nombre de *Courant* reflète la fraction de la cellule émettant l'information à la cellule voisine pendant un pas de temps. Pour les systèmes hyperboliques, il existe un ensemble de  $m$  ondes de célérité  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(m)}$  (qui sont les valeurs propres de la matrice *jacobienne* du flux, comme nous le verrons par la suite) tel que le domaine de dépendance d'un point  $(x, t)$  est donné par (LeVeque, 2002) :

$$D(x, t) = \{x - \lambda^{(p)}t : p = 1, 2, \dots, m\} \quad (\text{IV.23})$$

Dans ce cas le nombre de *Courant* sera défini par :

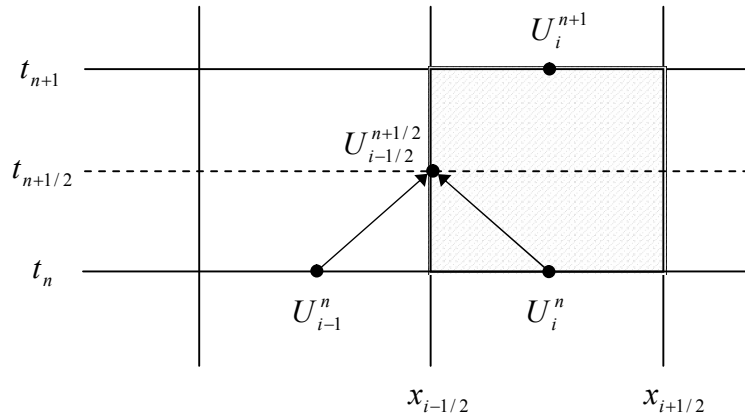
$$C_r = \frac{\Delta t}{\Delta x} \max_p |\lambda^{(p)}| \quad (\text{IV.24})$$

Comme pour les schémas aux différences finies explicites, ce nombre doit remplir la condition donnée par l'équation (IV.22) avec  $C_r \leq 1$ , et ceci pour un schéma au volumes finis à trois points ( $U_{i-1}^n, U_i^n$  et  $U_{i+1}^n$ ). Faisons la remarque très importante que cette règle est une condition nécessaire seulement pour la stabilité (donc de convergence) et n'est pas toujours suffisante pour garantir la stabilité requise (LeVeque, 2002). Celle-ci étant aussi tributaire de la méthode numérique d'approximation de la fonction de flux, c'est ce que nous allons détailler ci-après.

#### IV.5. Méthode à double pas de Richtmyer Lax-Wendroff

Pour l'écriture d'un schéma numérique de la fonction de flux  $\Phi$ , plusieurs formulations se présentent dans la littérature spécialisée. Suivant le type de problème régi par le système hyperbolique de lois de conservation et sa nature mathématique (linéaire ou non linéaire), différents auteurs, LeVeque (2002) notamment, proposent diverses méthodes pour définir une fonction numérique  $\Phi$  appropriée. Parmi celles-ci, se présente la méthode de *Richtmyer Lax-Wendroff*. A la dissemblance d'autres méthodes telle que celle de *Lax-Friedrichs* dont la précision est seulement au premier ordre, le schéma de *Richtmyer* est précis à l'ordre deux et forme une bonne approximation de l'intégrale (IV.16).

Le principe consiste à écrire une approximation du vecteur variable  $U$  à l'interface de la cellule  $C_i$  au temps  $t_{n+1/2} = t_n + 1/2(\Delta t)$ , et évaluer par la suite le flux sur l'interface  $x \pm 1/2$ , comme le montre la figure (IV.4).



**Figure (IV.4) :** Approximation du flux par la méthode de Richtmyer

Le flux  $F_{i-1/2}^n$  à l'interface gauche de la cellule par exemple (Figure (IV.4)) s'écrit alors par la méthode de Richtmyer :

$$F_{i-1/2}^n = \Phi(U_{i-1}^n, U_i^n) = f(U_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad (\text{IV.25})$$

Pour obtenir l'expression de  $U_{i-1/2}^{n+1/2}$ , nous appliquerons la méthode de Lax-Friedrichs aux interfaces de la cellule en remplaçant les incréments d'espace  $\Delta x$  et du temps  $\Delta t$  par  $\frac{1}{2}\Delta x$  et  $\frac{1}{2}\Delta t$  respectivement (LeVeque, 2002). La formulation de Richtmyer s'exprime alors pour l'interface gauche par :

$$U_{i-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(U_{i-1}^n + U_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(U_i^n) - f(U_{i-1}^n)] \quad (\text{IV.26})$$

Pour l'interface de droite, on aura :

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(U_i^n + U_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(U_{i+1}^n) - f(U_i^n)] \quad (\text{IV.27})$$

Pour les systèmes linéaires de lois hyperboliques, la méthode de Richtmyer se réduit à la méthode standard de Lax-Wendroff.

Une fois la variable  $U$  est connue aux interfaces des cellules au temps  $t_{n+1/2}$ , la valeur inconnue moyennée  $U_i^{n+1}$  au temps  $t_{n+1}$  par l'approche aux volumes finis sera calculée sans terme source comme suit :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(U_{i+1/2}^{n+1/2}) - f(U_{i-1/2}^{n+1/2})] \quad (\text{IV.28})$$

Ainsi, ce procédé de calcul sera appliqué aux cellules intérieures du domaine.

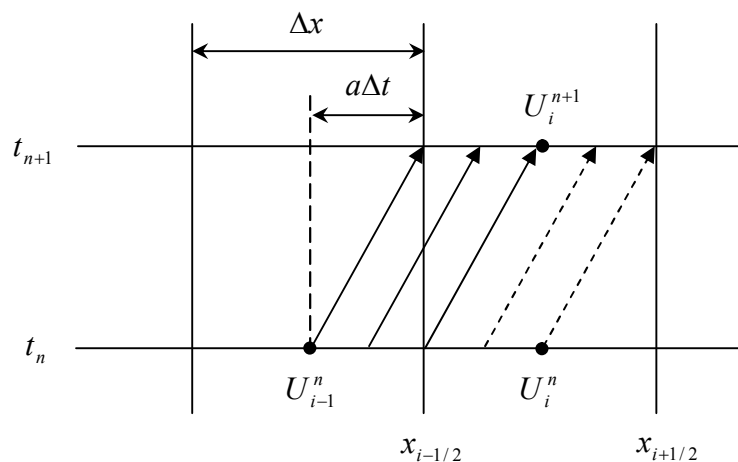
## IV.6. Schémas décentrés à capture d'informations

Nous savons que pour les problèmes hyperboliques l'information portant sur un changement d'état (signal) se propage en onde le long des lignes caractéristiques. Par conséquent et pour un système hyperbolique de lois de conservation, nous aurons plusieurs ondes d'information se propageant à différentes célérités et dans des directions différentes suivant les cas examinés (*Guinot, 2008*). Il ressort alors, au lieu de faire usage de méthodes centrées autour du point de calcul des variables pour la formulation du flux numérique (comme la méthode précédemment vue), il serait plus commode et correcte d'utiliser la structure de la solution du problème, en fonction du sens de propagation des ondes, pour déterminer une fonction numérique du flux capable de capturer l'information (*LeVeque, 2002*). Cette approche a donné lieu aux méthodes dites « décentrées » (*Upwind methods*) dans lesquelles l'information portée par l'onde est obtenue suivant sa direction de propagation.

Considérons l'équation hyperbolique scalaire suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.39})$$

Il est connu que pour ce type d'équation il existe un seul sens de propagation suivant le signe de  $a$ . Considérons tout d'abord le cas où  $a > 0$ , et examinons une cellule centrée autour de  $x_i$  au temps  $t_n$  (Figure (IV.6))



**Figure (IV.6) :** Approche décentrée pour le problème d'advection linéaire

Au temps ultérieur  $t_{n+1}$ , l'information s'est propagée à la vitesse  $a$ . Une partie de la cellule a donc reçu de l'information de la cellule amont centrée en  $x_{i-1}$  (flèches en trait continu), tandis que l'autre partie n'a pas reçu de l'information et garde alors la même valeur

que précédemment au temps  $t_n$  (flèches en pointillées). Le flux qui passe à travers l'interface  $x_{i-1/2}$  est :

$$F_{i-1/2}^n = aU_{i-1}^n \quad (\text{IV.40})$$

Par définition,  $U_i^{n+1}$  est la valeur moyenne de  $u$  le long de la cellule  $C_i$  en  $x_i$  au temps  $t_{n+1}$ . Le long de cette cellule, une partie  $a\Delta t$  prend maintenant la valeur  $U_{i-1}^n$  tandis que l'autre partie de longueur  $\Delta x - a\Delta t$  garde la valeur qu'elle avait auparavant  $U_i^n$ , comme on le constate sur la figure (IV.6). On peut écrire par conséquent :

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} [a\Delta t U_{i-1}^n + (\Delta x - a\Delta t)U_i^n] \quad (\text{IV.41})$$

Soit encore :

$$U_i^{n+1} = \frac{a\Delta t}{\Delta x} U_{i-1}^n + \left(1 - \frac{a\Delta t}{\Delta x}\right) U_i^n \quad (\text{IV.42})$$

Ce qui peut également se mettre sous la forme :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i-1}^n - U_i^n) \quad (\text{IV.43})$$

On a alors le schéma « décentré amont » au premier ordre. Il est à noter que le présent développement n'est valide que pour une condition de *Courant* vérifiée, avec :

$$0 < \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (\text{IV.44})$$

L'autre approche du problème est de considérer l'aspect de propagation du choc ou de la discontinuité. On considère alors qu'à chaque pas de temps on résout un problème de *Riemann* caractérisé par un déplacement de l'onde d'amplitude (saut)  $W_{i-1/2} = U_i^n - U_{i-1}^n$  à travers la cellule  $C_i$  à la vitesse  $a$ . Après un pas de temps  $\Delta t$ , l'onde  $W_{i-1/2}$  se déplace d'une distance  $a\Delta t$  affectant ainsi une partie de la cellule par l'information du choc. Par un développement similaire au précédent, la moyenne  $U_i^{n+1}$  sera dans ce cas :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (-W_{i-1/2}) \quad (\text{IV.45})$$

Par ailleurs, si  $a < 0$ , le sens de propagation se voit inversé (de droite à gauche) et le flux serait :

$$F_{i-1/2}^n = aU_i^n \quad (\text{IV.46})$$

Le schéma est alors décentré en aval et l'équation (IV.43) deviendrait :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (U_{i+1}^n - U_i^n) \quad (\text{IV.47})$$

Ou bien encore :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (W_{i+1/2}) \quad (\text{IV.48})$$

Avec dans ce cas :  $W_{i+1} = U_{i+1}^n - U_i^n$ .

Par conséquent, du point de vue du calcul numérique, les deux possibilités peuvent être combinées en introduisant un flux de la forme (*LeVeque, 2002*):

$$F_{i-1/2}^n = a^- U_i^n + a^+ U_{i-1}^n \quad (\text{IV.49})$$

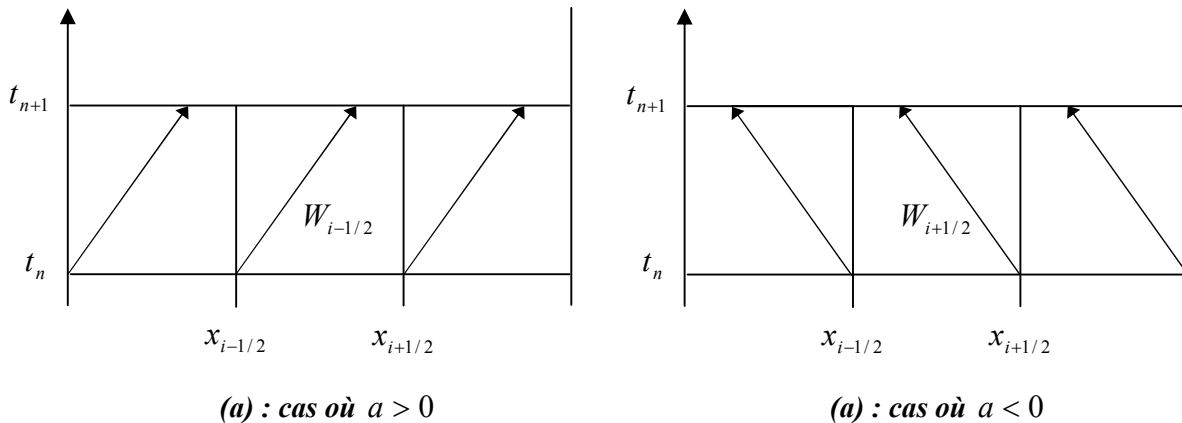
Où l'on a considéré que :

$$a^+ = \max(a, 0) \quad \text{et} \quad a^- = \min(a, 0) \quad (\text{IV.50})$$

Le modèle général de propagation d'ondes suivant le schéma décentré (*Upwind*) s'écrit en fonction des flux émanant de part et d'autre de l'interface considérée dans le calcul comme suit :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (a^+ W_{i-1/2} + a^- W_{i+1/2}) \quad (\text{IV.51})$$

L'interprétation physique au sens de propagation d'ondes du schéma décentré est alors illustrée sur la figure (IV.7).



**Figure (IV.7) :** Interprétation du schéma décentré au sens de propagation d'ondes

La présente approche que l'on peut qualifier à décomposition d'ondes, peut s'étendre à plusieurs types de problèmes hyperboliques. C'est le principe même de la méthode de *Godunov* que nous détaillerons à présent.



## IV.7. Méthode de Godunov

Dans la fin des années cinquante (1959), *Godunov* a proposé une approche originale pour la résolution des équations non linéaires d'*Euler* pour les problèmes de dynamique des gaz. Depuis ce jour, la méthode de *Godunov* a révolutionnée la mécanique des fluides numérique (CFD) en levant les difficultés des méthodes numériques classiques pour les systèmes hyperboliques en présence de discontinuités (chocs), tel que le schéma CIR (*Courant-Isaacson-Rees*), et ceci pour les fluides compressibles ou non (*Guinot, 2003*). Les schémas numériques de type *Godunov* consistent en la solution des lois de conservation hyperboliques sur un volume de contrôle tout en traitant les variables en état discontinu. Cette approche présente divers avantages, signalés déjà au début du chapitre, les profils continus et discontinus sont traités de la même manière (sans traitement spécial des chocs) par la technique *Upwind*, et aussi le respect du caractère conservatif de l'équation aux dérivées partielles en utilisant la formulation intégrale (*Toro et Garcia-Navarro, 2007*).

La philosophie générale des schémas basés sur la méthode de *Godunov* se résume essentiellement en trois grandes étapes. Cette démarche de résolution, appelé parfois algorithme REA (*Reconstruct-Evolve-Average*) s'articule sur les points qui en suivent (*LeVeque, 2002 ; Guinot, 2003*) :

1. Reconstruction d'une fonction polynomiale par morceau  $\tilde{u}^n(x, t_n)$  définie pour tout  $x$  à l'intérieur de la cellule, à partir de la variable moyennée  $U_i^n$ . Dans le cas simple, cette fonction sera constante par morceaux et prend la valeur moyenne  $U_i^n$  sur la cellule  $C_i$ , tel que :

$$\tilde{u}^n(x, t_n) = U_i^n \quad \forall x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \quad (\text{IV.52})$$

2. Propagation de l'information, en prenant comme conditions initiales les valeurs  $\tilde{u}^n(x, t_n)$  au temps  $t + \Delta t$ , et ceci en utilisant la solution exacte ou approchée de l'équation ou du système d'équations hyperboliques ;
3. Moyenner les valeurs obtenues de la fonction choisie de  $\tilde{u}^n(x, t_n)$  sur chaque cellule de calcul pour obtenir une nouvelle valeur  $U_i^n$  en faisant usage, rappelons le, de l'équation suivante :

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} \tilde{u}^n(x, t_{n+1}) dx \quad (\text{IV.53})$$

Ainsi, cette procédure de calcul est répétée à chaque incrément de temps.

A l'étape 1, une fonction  $\tilde{u}^n(x, t_n)$  est adoptée à partir de la valeur discrète moyennée  $U_i^n$  sur chaque cellule. Dans l'approche originale de *Godunov*, tel qu'il a présenté pour la première fois, la fonction est prise constante par morceaux et offre une précision de premier ordre. Un ordre élevé de précision est obtenu en choisissant des fonctions linéaires (schéma de *VanLeer*), paraboliques (schéma de *Colella et Woodward*) et autres approches (*Guinot, 2003*). Dans notre travail, nous ferons usage de schémas dont l'approche adopte une fonction constante par morceaux.

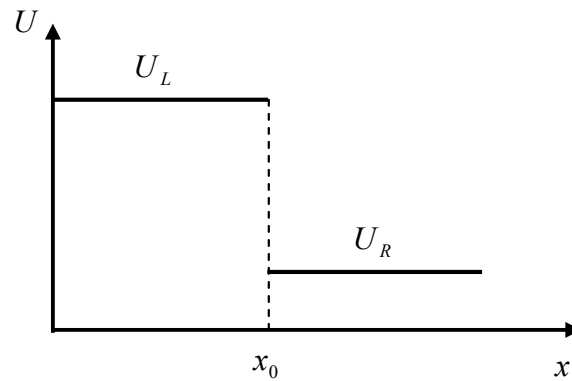
Cependant, pour pouvoir implémenter cet algorithme, nous devons tout d'abord parvenir à résoudre l'équation hyperbolique à l'étape 2. La propagation de l'onde d'information portant sur les variables d'état du problème, peut se faire en résolvant de manière exacte l'équation aux dérivées partielles de base. Etant donné que cette dernière est sujet de deux états constants séparés par une discontinuité à l'interface de la cellule, nous aurons donc à résoudre un problème à valeur initiale dit « problème de *Riemann* » suivant la théorie des invariants qui portent son nom. Nous présentons ci-après un survol de la théorie de *Riemann* nécessaire à la résolution de notre problème.

#### IV.7.1. Problème de Riemann

Le problème de *Riemann* est un outil essentiel dans nombreuses méthodes numérique de simulation des phénomènes de propagation d'ondes. Il se définit comme la combinaison d'une équation aux dérivées partielles (EDP) et d'une condition initiale constante par morceaux. L'équation se résout donc pour cette condition initiale. Le problème de *Riemann* est alors dit « problème à valeur initiale », c'est-à-dire un problème sans conditions aux limites. Il est supposé de ce fait implicitement que ce problème est posé sur un domaine infini (*Guinot, 2008*). Pour un système hyperbolique de lois de conservation, ce problème s'écrit comme suit :

$$U(x, t_0) = \left. \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \left. \begin{array}{ll} U_L & \text{Pour } x < x_0 \\ U_R & \text{Pour } x > x_0 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (\text{IV.54})$$

Où  $U_L$  et  $U_R$  sont deux constantes, appelées respectivement les états gauche et droite du problème de *Riemann*, et  $x_0$  est l'abscisse de la discontinuité initiale (Figure (IV.8)). Ainsi, au point  $x_0$  siège de la discontinuité, la fonction est théoriquement indéfinie.



**Figure (IV.8) :** Représentation du problème de Riemann (Guinot, 2008)

Il est à noter que l'équation aux dérivées partielles à résoudre ne comporte pas de terme source. Cette absence confère à la solution, suivant la théorie de *Riemann*, des propriétés intéressantes, exploitées par plusieurs méthodes numériques spécialement la méthode de *Godunov*. De ce fait, il est alors possible de déterminer une solution analytique du problème et ceci en faisant usage des invariants de *Riemann*.

#### IV.7.2. Invariants de Riemann et solution analytique

De même que pour les équations hyperboliques scalaires, on cherche pour le cas d'un système hyperbolique de lois de conservation, tel que le système gouvernant les écoulements non permanents en charge qu'on va étudier, à déterminer des trajectoires (lignes caractéristiques) le long desquelles certaines quantités, que l'on nomme « invariants de *Riemann* », sont constantes (*Toro, 2009*). La détermination de ces invariants se fait par le biais de la matrice *jacobienne*  $A$ .

Pour un système hyperbolique de lois de conservation, l'équation du système (IV.54), qui est sous forme conservative, s'écrit alors sous forme non conservative comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.55})$$

Où la matrice  $A$ , rappelons le, s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial U_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial U_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial U_m} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.56})$$

Le système étant hyperbolique, la matrice *jacobienne*  $A$  possède  $m$  valeurs propres distinctes, auxquelles sont associés  $m$  vecteurs propres. On note alors  $K^{(p)}$  le  $p$ ème vecteur

propre, c'est-à-dire associé à la  $p$ ème valeur propre  $\tilde{\lambda}^{(p)}$  de la matrice  $A$ . On peut alors former une matrice  $m \times m$  des vecteurs propres, notée  $K$ , en disposant  $K^{(1)}, K^{(2)}, \dots, K^{(m)}$  en ligne :

$$K = [K^{(1)}, K^{(2)}, \dots, K^{(m)}] \quad (\text{IV.57})$$

Ou encore :

$$K = \begin{bmatrix} K_1^{(1)} & \dots & K_1^{(m)} \\ \vdots & & \vdots \\ K_m^{(1)} & \dots & K_m^{(m)} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.58})$$

Où  $K_i^{(p)}$  désigne la  $i$ ème composante du  $p$ ème vecteur propre de  $A$ . La propriété importante de la matrice  $K$  est qu'elle permet de transformer la matrice *jacobienne*  $A$  en une matrice diagonale par les manipulations suivantes (Guinot, 2003) :

$$K^{-1}AK = \Lambda \quad (\text{IV.59})$$

Avec  $K^{-1}$  la matrice inverse de  $K$  et  $\Lambda$  la matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de  $A$  :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}^{(1)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \tilde{\lambda}^{(p)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \tilde{\lambda}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.60})$$

Pour faire apparaître les invariants de *Riemann* à partir de la forme non conservative (IV.55), on introduit la matrice  $\Lambda$  dans l'équation, et ceci en multipliant cette dernière par  $K^{-1}$  comme suit :

$$K^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} + K^{-1} A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.61})$$

Et comme le produit  $K^{-1}K$  n'est autre que la matrice identité, la formulation précédente se réécrit de la façon suivante :

$$K^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} + K^{-1} A K^{-1} K \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.62})$$

En substituant l'équation (IV.59) dans l'équation (IV.62), on obtient :

$$K^{-1} \frac{\partial U}{\partial t} + \Lambda K^{-1} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.63})$$

On définit alors le vecteur  $W$  tel que :

$$dW = K^{-1} dU \quad (\text{IV.64})$$

Alors l'équation (IV.63) devient :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (\text{IV.64})$$

Sous forme vectorielle, cette dernière équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_p \\ \vdots \\ W_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda^{(p)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda^{(m)} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_p \\ \vdots \\ W_m \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{IV.65})$$

Où  $W_p$  représente la  $p$  ème composante du vecteur  $W$ . Par conséquent, on peut écrire un système équivalent d'équations caractéristiques indépendantes :

$$\frac{\partial W_p}{\partial t} + \lambda^{(p)} \frac{\partial W_p}{\partial x} = 0 \quad \forall p = 1, 2, \dots, m \quad (\text{IV.66})$$

En introduisant la dérivée totale de  $W$ , on réduit le système (IV.66) à la formulation qui en suit (Guinot, 2003) :

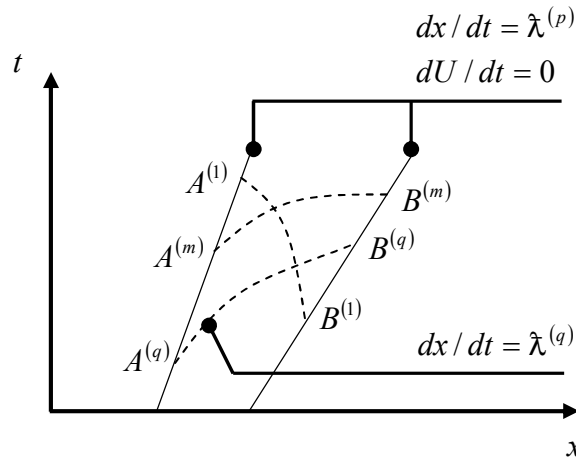
$$\frac{dW_p}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda^{(p)} \quad \forall p = 1, 2, \dots, m \quad (\text{IV.67})$$

Subséquentement, les  $m$  équations résultant de (IV.67) constituent la forme caractéristique du système (IV.55). Le terme source étant absent, l'équation (IV.67) devient :

$$W_p = Cte \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = \lambda^{(p)} \quad \forall p = 1, 2, \dots, m \quad (\text{IV.68})$$

La quantité  $W_p$  est appelée « invariant de Riemann » associé à la caractéristique de célérité  $\lambda^{(p)}$ . Il résulte alors que la connaissance de  $U$  en un point (les composantes scalaires  $U_p$ ) permet de déterminer les invariants de Riemann  $W_p$  ( $i = 1, \dots, m$ ) en intégrant l'équation (IV.64) et inversement. Par ailleurs, et selon Guinot (2003), il a été démontré par Jeffrey et Taniuti (1964) que pour certains systèmes hyperboliques, il n'est pas possible d'intégrer directement l'équation (IV.64), sauf cas simples. Dans cette situation, une autre approche est alors possible en écrivant une équation différentielle qui sera valide non pas le long des lignes caractéristiques mais au travers de celles-ci (Figure (IV.9)). Selon ces auteurs, on utilise alors les invariants de Riemann généralisés, qui s'écrivent dans ce cas (Guinot, 2008) comme suit :

$$\frac{dU_1}{K_1^{(p)}} = \frac{dU_2}{K_2^{(p)}} = \dots = \frac{dU_m}{K_m^{(p)}} \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} \neq \lambda^{(p)} \quad (\text{IV.69})$$

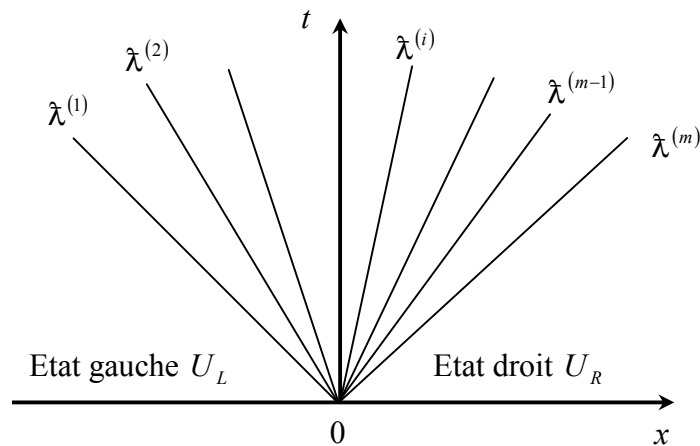


**Figure (IV.9) :** Caractéristiques au travers d'ondes simple dans l'espace des phases (Guinot, 2008)

Sur l'illustration de la figure (IV.9), le long des deux caractéristiques, désignées par  $A$  et  $B$  respectivement, la variable  $U$  est constante le long de chacune d'elle. Etant donné que l'on est dans le cas d'un système hyperbolique, toute célérité  $\tilde{\lambda}^{(q)}$ , tel que  $q \neq p$ , sont différentes de  $\tilde{\lambda}^{(p)}$ . Cela signifie que toutes les autres caractéristiques  $dx/dt = \tilde{\lambda}^{(q)}$  permettent de relier les caractéristiques  $A$  et  $B$ . Dans ce cas, il est démontré (Guinot, 2008) que le vecteur  $dU$  est colinéaire au vecteur propre  $K^{(p)}$ , d'où la justification de l'écriture (IV.69) donnant les invariants de Riemann généralisés.

Ceci dit, la solution analytique du problème de Riemann, avec laquelle on calcule les flux intercellulaires dans la méthode de Godunov, consiste à déterminer les variables d'état du vecteur  $U$  formé par les  $m$  ondes séparant  $m+1$  zones d'état constant après l'apparition de la discontinuité. Ces états constants sont alors les états gauche  $U_L$  et droit  $U_R$  du problème de Riemann ainsi que les zones intermédiaires  $U_*$  dont il faut chercher la solution en fonction de la structure physique du problème (Figure (IV.10)). La difficulté réside en ce que l'on ignore de manière générale, à priori, la nature des ondes présentes dans la solution (raréfaction, choc ou discontinuité de contact). Par conséquent, la résolution d'un problème de Riemann forme dans un cas général un procédé itératif consistant à faire l'hypothèse sur la nature des ondes présentes, et une fois la solution obtenue il importe de vérifier la validité des hypothèses préalablement faites. Pour déterminer la nature de ces ondes, Guinot (2003 et 2008) a donné une règle heuristique qui donne satisfaction dans nombreux cas, règle utilisée avec succès dans plusieurs travaux notamment ceux de Léon (2007).

Pour ce faire, il suffit de comparer les célérités de l'onde  $p$  des états gauche et droit, d'où trois situations se prononcent :



**Figure (IV.10) :** Structure de la solution du problème de Riemann pour un système hyperbolique d'équations de conservation (Toro, 2009)

- Si  $\tilde{\lambda}^{(p)}(U_L) < \tilde{\lambda}^{(p)}(U_R)$ , il arrive fréquemment que l'onde  $p$  soit une onde de raréfaction ou de détente ;
- Si  $\tilde{\lambda}^{(p)}(U_L) = \tilde{\lambda}^{(p)}(U_R)$ , il arrive alors fréquemment que l'onde  $p$  soit une discontinuité de contact ;
- Si  $\tilde{\lambda}^{(p)}(U_L) > \tilde{\lambda}^{(p)}(U_R)$ , il arrive dans la plupart des situations que l'onde  $p$  soit un choc.

Selon Guinot (2008), cette règle est vérifiée dans le cas scalaire, et s'applique également à un système hyperbolique de lois de conservation, dont celui gouvernant les problèmes d'écoulements non permanents en charge et à surface libre.

Le procédé général pour la résolution exacte d'un problème de *Riemann* se structure comme suit (Guinot, 2003) :

1. Supposer à priori la nature des ondes présentes dans la solution du problème de *Riemann* suivant la règle heuristique donnée ci haut ;
2. Déterminer le système d'équations à résoudre pour caractériser les états constants (invariants généralisés de *Riemann* et/ou relation de saut) au travers des ondes ;
3. Résolution du système d'équations suivant la nature du problème, linéaire ou non linéaire. Dans ce dernier cas, une technique itérative, telle que la méthode de *Newton-Raphson*, s'impose. Cette étape permet donc d'obtenir une première solution pour états intermédiaires ;

4. Vérifier la validité des hypothèses faites sur la structure des ondes dans la première étape. Dans le cas échéant, de nouvelles hypothèses sont alors admises et le processus est répété jusqu'à satisfaction de ces dernières.

Remarquons alors ici que pour résoudre un problème de *Riemann* de manière exacte, deux boucles itératives imbriquées sont induites. La première (boucle externe) se porte sur la révision des suppositions faites sur la nature des ondes présentes dans la solution. La seconde quant à elle (boucle interne) est consacrée à la résolution du système d'équations (pour les cas non linéaires). Cet algorithme est, du point de vue numérique, très exigeant et conduit à une lourde masse de calculs, sachant que ceci est exécuté à chaque interface de cellule. Par conséquent, il est souvent préférable de faire usage de solveurs approchés pour le problème de *Riemann*, plutôt que d'opter pour une solution exacte. Pour ce faire, deux approches existent (*Toro, 2009*) : la première est de trouver une approximation du flux numérique utilisé directement dans la méthode *Godunov*. La seconde consiste à rechercher une approximation d'état et d'évaluer en conséquence la fonction de flux pour cet état. C'est cette dernière approche que l'on présente ici via le solveur HLL.

#### IV.7.3. Solveur de Riemann approché HLL

Le solveur *HLL*, acronyme de *Harten, Lax* et *Van Leer* à qui l'on doit sa conception, est utilisé pour la résolution du problème de *Riemann* pour un système  $2 \times 2$  de lois de conservation hyperboliques (*Guinot, 2008*). L'idée de base est de supposer, pour la solution, une configuration consistant en une région intermédiaire d'état constant, séparé des états gauche et droit du problème de *Riemann* par deux discontinuités se propageant aux célérités  $\tilde{\lambda}^-$  et  $\tilde{\lambda}^+$  supposées connues (*Toro, 2009*). Le principe d'approximation du solveur *HLL* du problème de *Riemann* est donné sur la figure (IV.11).

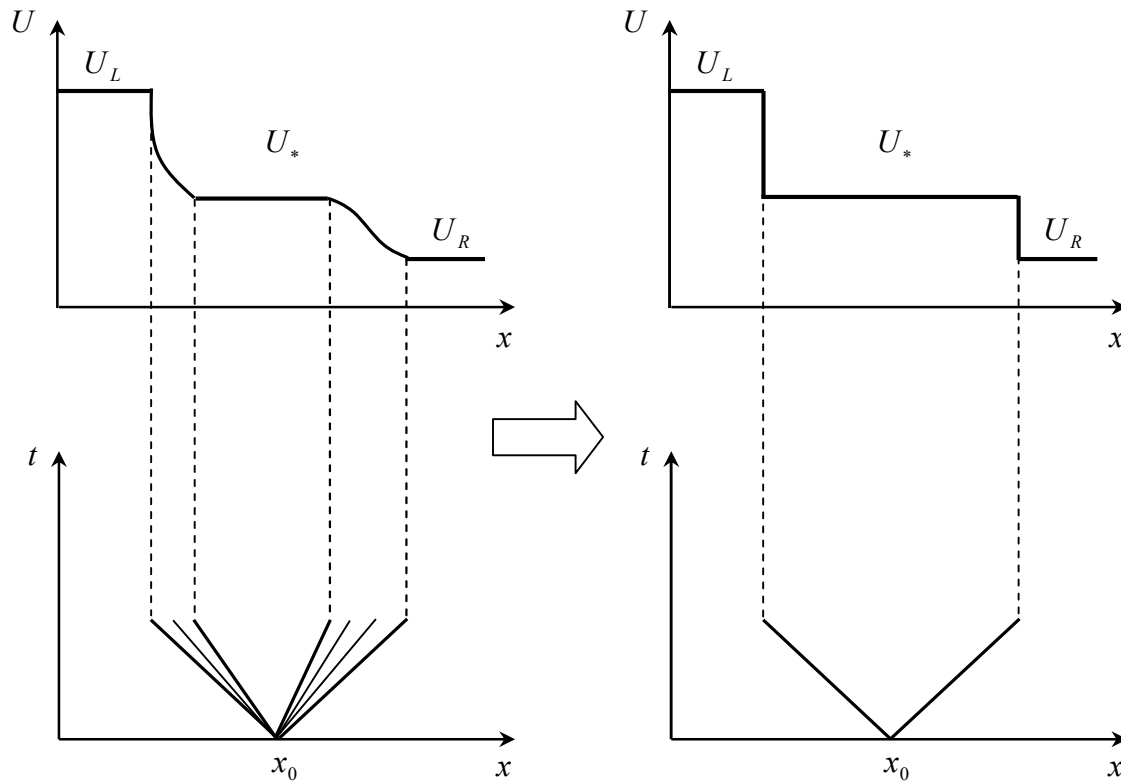
Ceci dit, on peut alors écrire les relations de saut de *Rankine-Hugoniot* de part et d'autre de ces discontinuités pour relier les valeurs de  $U_*$  et  $F_*$  dans la zone intermédiaire d'état constant aux états gauche et droit. Les relations de saut s'écrivent alors (*Guinot, 2003*) :

$$\left. \begin{aligned} F_L - F_* &= (U_L - U_*) \tilde{\lambda}^- \\ F_R - F_* &= (U_R - U_*) \tilde{\lambda}^+ \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.70})$$

Le système d'équations (IV.70) à deux inconnus admet alors une solution unique :

$$\left. \begin{aligned} U_* &= \frac{F_R - F_L + \tilde{\lambda}^- U_L - \tilde{\lambda}^+ U_R}{\tilde{\lambda}^- - \tilde{\lambda}^+} \\ F_* &= \frac{\tilde{\lambda}^- F_R - \tilde{\lambda}^+ F_L + (U_R - U_L) \tilde{\lambda}^+ \tilde{\lambda}^-}{\tilde{\lambda}^- - \tilde{\lambda}^+} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.71})$$





**Figure (IV.11) :** Principe du solveur HLL. Solution analytique (à gauche) et solution approchée (à droite) (Guinot, 2003)

Le problème restant est alors d'estimer les célérités  $\tilde{\lambda}^-$  et  $\tilde{\lambda}^+$ . Plusieurs options ont été proposées dans la littérature pour ceci ; cependant, *Guinot* (2003) conseille la formule proposée par *Davis* en 1988 :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\lambda}^- &= \min[\tilde{\lambda}^{(1)}(U_L), \tilde{\lambda}^{(1)}(U_R), 0] \\ \tilde{\lambda}^+ &= \max[\tilde{\lambda}^{(2)}(U_L), \tilde{\lambda}^{(2)}(U_R), 0] \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.72})$$

Où les célérités  $\tilde{\lambda}^-$  et  $\tilde{\lambda}^+$  sont classées par ordre croissant. Un cas particulier se présente lorsque l'écoulement est subsonique et la vitesse du fluide est négligeable comparativement aux célérités des ondes de pression. Dans ce cas, *Davis* (*Guinot, 2003*) propose l'estimation suivante :

$$\tilde{\lambda} = \max[|\tilde{\lambda}^{(1)}(U_L)|, |\tilde{\lambda}^{(1)}(U_R)|, |\tilde{\lambda}^{(2)}(U_L)|, |\tilde{\lambda}^{(2)}(U_R)|] \quad (\text{IV.73})$$

En remplaçant ce résultat dans le système (IV.71), on aboutit à la solution suivante :

$$\left. \begin{aligned} U_* &= \frac{U_L + U_R}{2} + \frac{F_L - F_R}{2\tilde{\lambda}} \\ F_* &= \frac{F_L + F_R}{2} + \tilde{\lambda} \frac{U_L - U_R}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.74})$$

La seconde formule du système (IV.73) donnant  $F_*$  est appelée souvent dans la littérature forme de flux de *Rusanov*. Selon *Guinot* (2003), cette formule a été utilisée avec succès pour nombre de problèmes, spécialement dans la simulation des écoulements multiphasiques.

#### IV.8. Traitement des conditions aux limites

Afin de résoudre de manière unique les équations aux dérivées partielles du mouvement transitoire, la prise en compte des conditions aux frontières (aux limites) revêt un aspect extrêmement important. Cette importance se trouve beaucoup plus accentuée dans le cas des équations hyperboliques dans la mesure où l'intrusion d'une erreur aux frontières se propage à travers le maillage et affecte ainsi la solution numérique générale du problème (*Berreksi, 2012*). Pour réaliser ceci, plusieurs auteurs ont proposé de différentes techniques pour l'implémentation des conditions aux limites aux cellules frontières du domaine de calcul pour la détermination des flux numériques couplés avec la condition mathématique de l'appareil hydraulique de l'installation. Ainsi, *Guinot* (1998) propose une technique s'appuyant sur un schéma PPM (*Piecewise Parabolic Method*), qui est une extension de la méthode de *Godunov* d'ordre supérieur. Le même auteur (*Guinot, 2003 et 2008*) présente une méthode de restitution du flux perdu aux frontières (Figure (IV.12)) en utilisant les invariants de *Riemann* et les invariants généralisés pour un schéma de *Godunov* de premier ordre. Cependant, *Léon* (2007) utilise des cellules virtuelles pour le traitement des conditions aux limites et ceci avec l'usage du schéma MUSCL-Hancock pour les cellules internes.

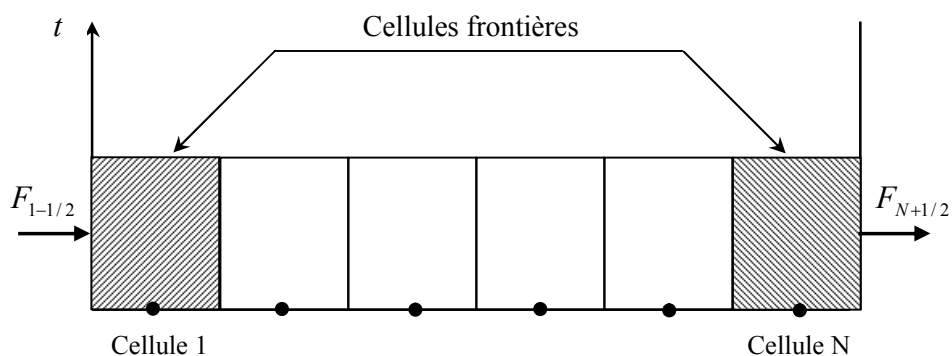


Figure (IV.12) : Cellules frontières et restitution des flux perdus

Il est alors indispensable, pour résoudre numériquement les équations du mouvement et déterminer l'état complet de l'écoulement en régime transitoire, de compléter la solution aux cellules frontières par l'équation caractéristique de l'organe hydraulique, imposant un

régime spécifique pour l'écoulement. Cette équation complémentaire de l'appareil peut s'écrire sous une forme générale comme une relation fonctionnelle de la manière suivante :

$$\Omega\left(\frac{dU}{dt}, U, t\right) = 0 \quad (\text{IV.75})$$

Avec  $\Omega$  relation fonctionnelle liant le vecteur  $U = [H, Q]^T$  au temps pour les organes imposant une relation différentielle, comme l'exemple des cheminées d'équilibre, ou bien liant les variables  $H$  et  $Q$  de manière explicite au temps, comme le cas des orifices telle qu'une vanne. Ainsi, chaque type de fonctionnelle  $\Omega$  exige une méthode numérique spécifique pour la résolution du problème, comme nous le verrons dans la seconde partie de notre travail dédiée à l'application des volumes finis pour le calcul des écoulements transitoires en charge.

#### IV.9. Incorporation du terme source

Jusqu'à maintenant nous avons élucidé la technique de résolution d'un système d'équations de conservation hyperbolique via la méthode des volumes finis, et ceci sans la prise en compte du terme source matérialisé par le vecteur  $G(U)$ , c'est-à-dire la partie homogène seulement de l'équation différentielle. Cependant, dans la simulation des écoulements transitoires en charge pour des applications pratiques, l'influence de la déperdition d'énergie due aux frottements visqueux et rugueux du fluide revêt une grande importance d'où la nécessité et l'attention particulière qu'il faut accorder à l'incorporation de ce terme dans le modèle mathématique de conservation.

Selon *Guinot* (2003), la stratégie d'incorporation du terme source consiste à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = G(U) \quad (\text{IV.76})$$

Pour ceci, la solution  $U_i^{n+1,x}$  obtenue suivant le schéma de *Richtmyer Lax-Wendroff* ou bien la méthode de *Godunov*, est prise comme solution de départ pour la résolution de l'équation (IV.76) et produire la solution finale  $U_i^{n+1}$ . Ainsi, l'équation différentielle (IV.76) est discrétisée comme suit :

$$U_i^{n+1} = U_i^{n+1,x} + G(U_i^{n+1,x} - U_i^{n+1})\Delta t \quad (\text{IV.77})$$

Cette stratégie explicite est connue sous le nom de méthode à pas fractionné (*fractional step* ou *time splitting* en anglais). La séquence de calcul suivant cette technique s'écrit en utilisant la notation par opérateurs de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} U_i^{n+1,x} &= L_{\Delta t} U_i^n \\ U_i^{n+1} &= G_{\Delta t} U_i^{n+1,x} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.78})$$

Où  $L_{\Delta t}$  est l'opérateur de la méthode de *Godunov*, appliqué durant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , pour transformer le vecteur variable  $U_i^n$  en  $U_i^{n+1,x}$  et  $G_{\Delta t}$  représente un opérateur pour le terme source lequel est appliqué à l'intervalle de temps  $\Delta t$  pour la transformation du vecteur  $U_i^{n+1,x}$ , précédemment obtenu, en vecteur de la solution finale  $U_i^{n+1}$ . La première équation du système (IV.78) est la version condensée de la formulation conservative (IV.17) et la seconde quant à elle est la forme condensée de l'équation (IV.77). On peut alors réécrire le système (IV.78) sous la forme :

$$U_i^{n+1} = L_{\Delta t} G_{\Delta t} U_i^n \quad (\text{IV.79})$$

Il est possible d'améliorer la précision de la méthode en adoptant une technique de résolution des équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur, consistant à fractionner le calcul sur un même pas de temps  $\Delta t$ , telle que la méthode de *Runge-Kutta*.

## IV.10. Conclusion

Nous nous sommes attaché dans ce chapitre, qui constitue le cœur de la revue de littérature dans notre travail, à l'exposé aussi profond et succinct que possible de la méthode des volumes finis, qui a jusqu'à maintenant révolutionné le domaine de la mécanique des fluides numérique. Appliquée avec succès dans nombres de problèmes hyperboliques tel que la dynamique des gaz (gouvernée par les équations d'*Euler*), cette méthode s'est également trouvée chemin d'application pour la résolution des problèmes d'écoulement peu profond à surface libre et ondes de rupture de barrages (*Savic et Holly, 1992 ; Sanders, 2001 ; Wang et al., 2011 ; Van Emelen et al. 2012*) et autres travaux similaires. Nous avons présenté ici son application aux problèmes des ondes, traités jusqu'à maintenant par les modèles numériques aux différences finies, exposés dans le précédent chapitre.

Le premier volet du chapitre a concerné la discrétisation des équations de base par volumes finies. Après avoir mis en relief la puissance de la formulation faible et son caractère conservatif comparé aux méthodes des différences finies (notamment le problème de discontinuité), une formulation générale pour les lois de conservation a été donnée. Dans les démonstrations, un accent particulier a été mis sur le sens physique de la modélisation des flux et les conditions de convergence. De cela, l'appareillage mathématique ne saura être

qu'un outil pour mener à bien les différents développements, d'où l'élégance de la méthode des volumes finis et son attractivité.

Nous avons enchaîné, pour le calcul numérique des flux aux interfaces des cellules, avec la présentation de deux méthodes différentes, à savoir celle de *Richtmyer Lax-Wendroff* et la méthode de *Godunov* en sa version originale. Dans cette dernière méthode, une résolution du problème de *Riemann* est exigée à chaque pas de temps et à chaque interface. Dans notre exposé, nous nous sommes focalisés sur la description de la solution exacte au problème de *Riemann*, laquelle est bien adaptée aux systèmes hyperboliques linéaires, aussi le détail du solveur approché *HLL* a été donné à cet effet. Ce dernier, comme nous l'avons souligné, est très pratique lorsque l'on est en face d'un problème non linéaire. Mais nous tenons ici à souligner l'existence d'autres solveurs approchés, qui ont connus succès tel que le solveur *HLLC* et celui de *Roe* (*Guinot, 2008 ; Toro, 2009*), très adaptés pour les systèmes de  $3 \times 3$  lois de conservations hyperboliques. Il est évident que d'autres schémas découlant de la méthode de *Godunov* d'ordre supérieur ont reçu applications (*VanLeer, MUSCL* et autres) dans ce type de propagation d'ondes, mais ceci sort du cadre de notre travail où un schéma de premier ordre a été choisi.

Pour le traitement des conditions aux limites, où un maillage régulier a été exposé, nous avons présenté le concept général de calcul des variables aux cellules frontières du domaine, et ceci sans pour autant expliciter le détail d'incorporation des équations caractéristiques des appareils hydrauliques suivant le dit maillage, étant donné que dans notre travail un nouveau concept de maillage et de traitement des conditions aux limites, plus maniable à notre avis, a été introduit. La technique ainsi introduite sera bien élucidée dans la seconde partie du travail, laquelle repose sur l'excentricité du maillage pour la discrétisation spatiale et la théorie des invariants de *Riemann* quant à l'implémentation des conditions aux limites.

La fin du chapitre quant à lui, a concerné l'incorporation du terme source dans la résolution générale du problème hyperbolique suivant la technique du pas fractionné. Celle-ci stipule un traitement séparé du modèle mathématique de propagation pure et celui de l'incorporation de la dissipation mécanique, en faisant l'usage de l'intégration temporelle par les méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées ordinaires.

Ceci fait, reste alors à appliquer la théorie décrite ici aux équations de propagation des ondes élastiques dans un écoulement en charge et tester les facultés de la méthode des volumes finis dans des cas pratiques d'occurrence des régimes transitoires dans les installations industrielles, ce qui fera l'objet de la seconde partie, noyau de notre travail.

## PARTIE DEUXIÈME

---

# *Modélisation et simulation numérique*

*« C'est le signe d'un esprit instruit d'être satisfait avec  
le degré de précision que la nature du sujet admet et  
de ne pas chercher la précision où seulement  
une approximation est possible ».*  
*Aristote (384 BC - 322 BC)*

" ... Puisqu'une solution générale doit être jugée impossible par biais de l'analyse, nous devons être contents avec la connaissance de quelques cas spéciaux, puisque le développement de divers cas semble être le seul moyen de nous amener enfin à une connaissance plus parfaite..."

Leonhard Euler

## 5. Discrétisation numérique par volumes finis

### V.1. Introduction

Dans la première partie de notre travail, nous avons passé en revue l'essentiel du fondement théorique, issu de travaux antérieurs, portant sur la modélisation mathématique et numérique des régimes non permanents dans les conduites en charge. Un accent particulier a été mis à cet effet à l'exposé aussi bref et détaillé des concepts de la méthode des volumes finis, sur laquelle le travail s'est porté. La seconde partie scindée en deux chapitres, ici abordée, concernera notre travail de modélisation et simulation numérique des phénomènes transitoires en charge suivant l'approximation par volumes finis.

Le présent chapitre aura comme objectif de mettre en œuvre la discrétisation numérique des équations du mouvement instationnaires par les schémas aux volumes finis précédemment énumérés, à savoir le schéma de *Richtmyer L-W* et la méthode de *Godunov*. Dans un premier temps, nous allons procéder à l'analyse de stabilité harmonique des équations différentielles de base pour identifier le comportement de la solution suivant la méthode de *Von Neumann*, appelée parfois analyse de *Fourier*. Dans un temps second, nous éluciderons les détails de la discrétisation numérique par schémas aux volumes finis et les hypothèses admises à cet effet. Nous terminerons enfin par la présentation de la technique d'implémentation des conditions aux limites suivant l'approche que nous proposons, introduite dans ce travail, et ceci en tachant d'explicitier au mieux le traitement numérique des équations des divers organes hydrauliques présents dans le domaine de calcul.

## V.2. Analyse de stabilité harmonique des équations du mouvement

La stabilité est une propriété de la solution, analytique ou numérique, d'une équation différentielle. Cette solution sur un domaine de l'espace et du temps est jugée stable si elle est bornée sur cet espace, c'est-à-dire que les valeurs prises par la solution sont comprises entre deux bornes inférieure et supérieure finies. La méthode la plus simple pour effectuer une étude de stabilité est la méthode d'analyse harmonique de *Von Neumann*, laquelle s'applique aussi bien pour les solutions analytiques que numériques pour les équations différentielles linéaires à coefficients constants (*Guinot, 2008*).

On peut ainsi exprimer une équation aux dérivées partielles sous la forme :

$$\sum_{p=0}^m a_p \frac{\partial^p U}{\partial t^p} + b_p \frac{\partial^p U}{\partial x^p} = 0 \quad (\text{V.1})$$

Où  $m$  représente l'ordre de l'équation et  $a_p$  et  $b_p$  sont des coefficients constants. Le principe de l'analyse harmonique consiste à rechercher des solutions de l'équation (V.1) sous la forme de solutions élémentaires  $U_k(x, t)$  écrite en série de *Fourier* complexe, comme suit :

$$U(x, t) = \sum_k U_k(x, t) = \sum_k u_k \exp(\omega_k t + \sigma_k x) \quad (\text{V.2})$$

Avec  $u_k$  une constante,  $\omega_k$  et  $\sigma_k$  sont des coefficients s'exprimant sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k &= j\sigma_{k,i} \\ \omega_k &= \omega_{k,r} + j\omega_{k,i} \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.3})$$

Ayant  $j = \sqrt{-1}$  comme nombre imaginaire, et  $\omega_{k,r}$ ,  $\sigma_{k,i}$  et  $\omega_{k,i}$  sont des nombres réels. Tenant compte de (V.3), le développement de l'écriture (V.2) suivant la règle d'*Euler* donne :

$$U(x, t) = [\cos(\sigma_{k,i}x) + j \sin(\sigma_{k,i}x)] \times [\cos(\omega_{k,i}t) + j \sin(\omega_{k,i}t)] \exp(\omega_{k,r}t) \quad (\text{V.4})$$

Cette écriture met en évidence la partie de la solution dépendant de  $x$ , donc une fonction périodique (sinusoïdale), et la partie de la solution qui en dépend de  $t$  dont l'amplitude est variable de façon exponentielle. Par conséquent, le signe de  $\omega_{k,r}$  permet de caractériser le comportement de la solution (stabilité). Pour une valeur négative de  $\omega_{k,r}$ , la solution est stable car l'exponentielle décroît avec le temps, à l'opposé d'une valeur positive de  $\omega_{k,r}$  où l'amplitude croît dans le temps et la solution n'est pas bornée ; elle sera alors instable (*Guinot, 2008*). En substituant l'équation (V.2) dans (V.1) et en intervertissant les sommations en raison du caractère linéaire de la dérivation, on aura :



$$\sum_k \left( \sum_{p=0}^m a_p \frac{\partial^p U_k}{\partial t^p} + b_p \frac{\partial^p U_k}{\partial x^p} = 0 \right) \quad (\text{V.5})$$

Etant donné que les fonctions exponentielles forment une base de fonctions orthogonales, l'équation (V.5) sera équivalente à la forme suivante :

$$\sum_{p=0}^m a_p \frac{\partial^p U_k}{\partial t^p} + b_p \frac{\partial^p U_k}{\partial x^p} = 0 \quad \forall k \quad (\text{V.6})$$

Autrement dit, l'équation (V.1) s'applique individuellement à chacune des composantes  $U_k$ . La solution  $U$  sera donc stable si et seulement si chacune de ses composantes est stable. Ce concept d'analyse s'étend également à des systèmes d'équations différentielles où la solution scalaire  $U$  devient une solution vecteur.

Effectuons à présent une analyse de stabilité sur les solutions analytiques des équations du mouvement transitoire en charge. En considérant le terme source nul, le système s'écrit alors sous forme non conservative comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (\text{V.7})$$

Avec :

$$U = \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix} ; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2}{gS} \\ gS & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.8})$$

La solution  $U(x,t)$  est alors cherchée sous la forme de composantes élémentaires de la forme :

$$U_k(x,t) = u_k \exp(\omega_k t + \sigma_k x) \quad (\text{V.9})$$

Par conséquent, on aura dans ce cas :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_k}{\partial t} &= \omega_k U_k \\ \frac{\partial U_k}{\partial x} &= j \sigma_{k,i} U_k \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.10})$$

On aboutira alors, en vertu de l'équation (V.7), à l'écriture suivante :

$$\omega_k \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a^2 / gS \\ gS & 0 \end{bmatrix} \sigma_k \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{V.11})$$

Soit encore :

$$\begin{bmatrix} \omega_k & \sigma_k a^2 / gS \\ \sigma_k gS & \omega_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{V.12})$$

Pour une solution non triviale du système, il faut et il suffit de satisfaire la condition suivante :

$$\det \begin{bmatrix} \omega_k & \sigma_k a^2 / gS \\ \sigma_k gS & \omega_k \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{V.13})$$

Ce qui donne :

$$\omega_k = \pm a \sigma_k \quad (\text{V.14})$$

Ainsi, la solution  $U_k$  est formée de la somme de deux fonctions exponentielles comme suit :

$$U_k(x, t) = u_k^{(1)} \exp[(x + at)j\sigma_{k,i}] + u_k^{(2)} \exp[(x - at)j\sigma_{k,i}] \quad (\text{V.15})$$

Où  $u_k^{(1)}$  et  $u_k^{(2)}$  sont deux vecteurs constants. Comme l'on a souligné précédemment, pour que la solution soit stable, il faut que chacune des fonctions exponentielles soit stable. Ceci se vérifie si la partie réelle de  $\omega_k$  est nulle ou négative (*Guinot, 2008*).

On peut noter les remarques ci-dessous concernant le comportement de la solution analytique résultant de l'analyse de *Von Neumann* :

1. la solution est formée de deux signaux constants pour des observateurs se déplaçant respectivement à une vitesse de  $-a$  et  $+a$  par rapport au fluide. C'est la base de la méthode graphique de *Bergeron* ;
2. la partie réelle des deux exponentielles est nulle, étant donné que  $a = \pm x/t$ . La solution est donc stable et l'amplitude des deux signaux est invariante dans le temps. Par conséquent, il n'y a ni amortissement ni amplification de la solution ;
3. la célérité de chacun des signaux est indépendante de leur longueur d'onde ; de ce fait, le signal ne subira aucune dispersion et les profils de charge et de débit ne se déforment pas dans le temps.

Les conclusions ci-dessus découlant de l'analyse harmonique des équations du mouvement sont essentielles dans le présent travail. En effet, si aucune diffusion (amortissement) ou dispersion n'apparaît dans la solution analytique, toute manifestation ultérieure de ces phénomènes dans les applications proviendrait du schéma numérique appliqué pour le calcul, conséquence soit inhérente au schéma soit résultant d'un choix des paramètres de ce calcul (nombre de *Courant* par exemple). Rappelons que cette analyse a été faite sans terme source, et l'incorporation de ce terme dans la solution numérique induirait évidemment un comportement différent de la solution ici prédite.

### V.3. Discrétisation du modèle mathématique par volumes finis

Après avoir mis en exergue le comportement de la solution des équations du mouvement transitoire en charge, nous nous pencherons dans ce qui suit sur l'application du concept de la méthode des volumes finis à la discrétisation numérique de ces équations. Les schémas sur lesquels nous focaliserons notre travail sont en l'occurrence, le schéma à double pas de *Richtmyer Lax-Wendroff* et le schéma original de *Godunov*, avec prévision des flux par la solution exacte et approché du problème de *Riemann* aux interfaces des cellules.

#### V.3.1. Application du schéma de Richtmyer Lax-Wendroff

Nous appliquerons à présent la méthode des volumes finis avec le schéma de *Richtmyer Lax-Wendroff* au système hyperbolique d'équations de conservation qui régit les écoulements instationnaires en charge. Reprenons alors l'écriture de ce système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + gS \frac{\partial H}{\partial x} + RQ|Q| = 0 \end{array} \right. \quad (\text{V.16})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial t} + gS \frac{\partial H}{\partial x} + RQ|Q| = 0 \end{array} \right. \quad (\text{V.17})$$

Sous forme divergente, le précédent système se ramène alors à la forme condensée suivante (§.III.4.3.2) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + G = 0 \quad (\text{V.18})$$

Avec :

$$U = \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{gS} Q \\ gSH \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ RQ|Q| \end{bmatrix} \quad (\text{V.19})$$

Dans l'application du modèle numérique aux équations du mouvement, nous faisons abstraction en premier lieu du terme source. Le traitement de ce terme fait l'objet de techniques spéciales, comme nous le verrons par la suite. Par conséquent, le vecteur  $G$  sera nul dans ce cas.

Faisons la remarque ici que ce schéma à double pas de *Richtmyer*, étant précis à l'ordre deux, n'introduit pas de diffusion numérique, ce qui est inhérent aux schémas de premier ordre comme celui de *Lax-Friedrichs*, mais cependant et pour les systèmes non linéaires, il génère des oscillations numériques au voisinage des discontinuités ce qui nécessite en général l'introduction de techniques particulières telle que la viscosité artificielle, proposée pour la première fois par *Von Neumann* et *Richtmyer* en 1950 (*LeVeque, 2002*).

Considérons alors une conduite de longueur  $L$  sur laquelle une discrétisation en volumes finis est appliquée. On aura alors  $N$  cellules centrées en  $x_i$  et dont chaque face, de gauche et de droite, se situe respectivement en  $x_{i-1/2}$  et  $x_{i+1/2}$  (Figure (V.1)).

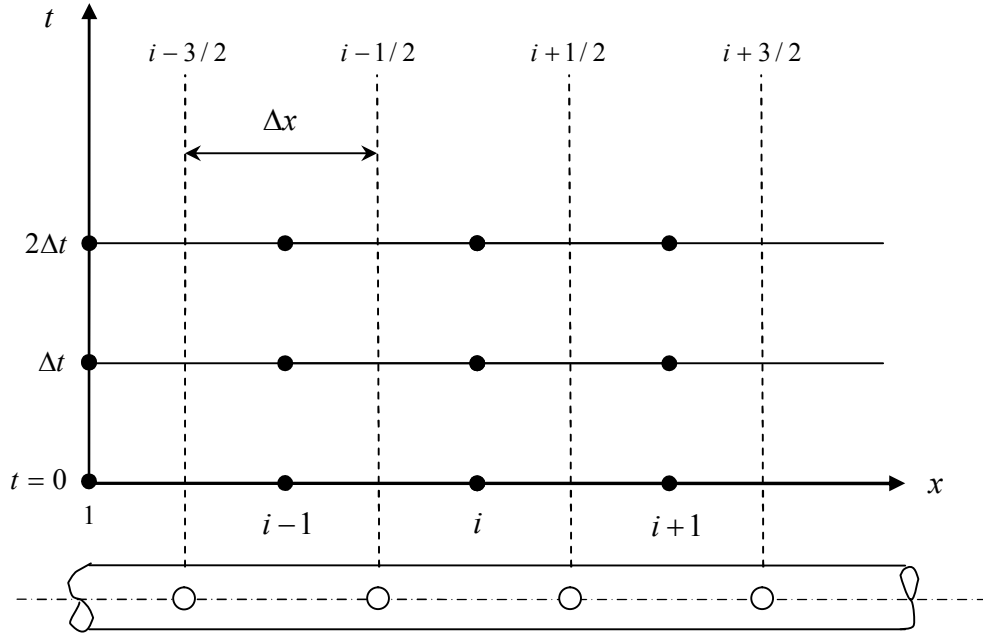


Figure (V.1) : Discrétisation en volumes finis d'une conduite

Il importe alors de calculer les flux numériques arrivant le long des interfaces au cours de chaque pas de temps. L'étape de prédiction des flux suivant la méthode de *Richtmyer Lax-Wendroff* s'effectuera sur les deux interfaces de chaque cellule comme suit :

- **A l'interface gauche de la cellule "i" :**

$$H_{i-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(H_{i-1}^n + H_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (Q_i^n - Q_{i-1}^n) \quad (\text{V.20})$$

$$Q_{i-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(Q_{i-1}^n + Q_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (H_i^n - H_{i-1}^n) \quad (\text{V.21})$$

- **A l'interface droite de la cellule "i" :**

$$H_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(H_i^n + H_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (Q_{i+1}^n - Q_i^n) \quad (\text{V.22})$$

$$Q_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(Q_i^n + Q_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (H_{i+1}^n - H_i^n) \quad (\text{V.23})$$

Ayant calculé le vecteur des variables d'état au temps intermédiaire  $U_{i\pm 1/2}^{n+1/2}$  aux interfaces de la cellule  $C_i$ , la détermination de  $U_i^{n+1}$  (valeur moyennée sur chaque cellule) par la méthode des volumes finis se fera alors par application de l'équation (IV.28) :

$$H_i^{n+1} = H_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (Q_{i+1/2}^{n+1/2} - Q_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad (\text{V.24})$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (H_{i+1/2}^{n+1/2} - H_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad (\text{V.25})$$

On applique ainsi ce calcul pour les cellules situées à l'intérieur du domaine discrétisé en  $N$  cellules. Aux limites du dit domaine, l'incorporation des conditions aux limites suivant ce sens fait l'objet de plusieurs techniques selon les auteurs (*Torro et Garcia-Navarro, 2007 ; Guinot, 2008 et Léon et al., 2009*). Le traitement numérique de ces conditions aux frontières fera l'objet d'un volet dans ce chapitre par la suite, où une nouvelle technique est introduite dans notre travail.

### V.3.2. Application de la méthode de Godunov

Nous nous penchons ici sur la formulation numérique du schéma aux volumes finis à capture de choc pour la simulation du problème du coup de bélier. Le dit problème étant gouverné par la forme conservative du système d'équations hyperboliques de conservation, donné sous la forme vectorielle (V.18).

Rappelons encore que les composantes du vecteur variable  $U$ , du flux  $F$  et du terme source  $G$  sont :

$$U = \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{gS} Q \\ gSH \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ RQ|Q| \end{bmatrix} \quad (\text{V.26})$$

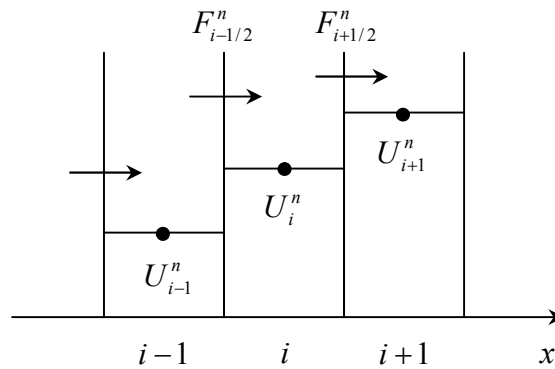
Comme nous l'avons souligné précédemment, nous omettons le vecteur source dans le modèle mathématique général pour la formulation exacte de la méthode de *Godunov*. Ainsi, le présent système se réduira à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \frac{a^2}{gS} Q \\ gSH \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.27})$$

De manière identique au développement fait au début du chapitre précédent (§.IV.2.2) pour aboutir à l'écriture faible du modèle (V.18), les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont intégrées sur un volume de contrôle " $i$ " et dont la forme discrète de calcul du vecteur variable  $U$  est donnée par :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) \quad (\text{V.28})$$

Pour l'implémentation de la méthode de *Godunov*, le domaine de calcul est discrétisé en cellules de longueur  $\Delta x$  et sur un pas de temps  $\Delta t$ . La cellule " $i$ " est alors centrée en  $x_i$  au nœud " $i$ " et ayant comme interfaces les limites aux points  $x_{i+1/2}$  et  $x_{i-1/2}$ . La fonction polynomiale  $\tilde{u}^n(x, t_n)$  donnant la variation de  $U$  sur chaque cellule est prise constante par morceaux (Figure (V.2)), c'est-à-dire un schéma de *Godunov* de premier ordre, lequel assure la monotonie de la solution numérique (*Léon, 2007 ; Torro et Garcia-Navarro, 2007*).



**Figure (V.2) :** Discrétisation en volumes finis type *Godunov* de premier ordre

Pour ainsi calculer la solution  $U_i^{n+1}$  au temps  $t + \Delta t$ , c'est-à-dire propager l'information au temps ultérieur, il faudra calculer le flux numérique aux interfaces des cellules.

### V.3.2.1. Résolution exacte du problème de Riemann

Le calcul des flux aux interfaces intercellulaires  $F_{i\pm 1/2}^n$  est exécuté en résolvant le problème de *Riemann*. La solution exacte du problème, telle qu'a été exposée précédemment est préférable aux solveurs de *Riemann* approchés tel que le solveur *HLL* (*Harten-Lax-VanLeer*), *HLLC* et le solveur de *Roe* (*Guinot, 2008*) lorsque le problème est linéaire.

En écrivant le modèle (V.18) sous la forme non conservative (IV.55), la matrice jacobienne  $A$  du vecteur flux  $F$  sera :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial H} \left( \frac{a^2}{gS} Q \right) & \frac{\partial}{\partial Q} \left( \frac{a^2}{gS} Q \right) \\ \frac{\partial}{\partial H} (gSH) & \frac{\partial}{\partial Q} (gSH) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2}{gS} \\ gS & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V.29})$$

Les valeurs propres  $\tilde{\lambda}^{(m)}$  associées à la matrice  $A$  s'obtiennent en annulant le déterminant de la matrice suivante (Fanchi, 2006) :

$$\det \begin{bmatrix} (0 - \tilde{\lambda}) & \frac{a^2}{gS} \\ gS & (0 - \tilde{\lambda}) \end{bmatrix} = (-\tilde{\lambda})(-\tilde{\lambda}) - a^2 = 0 \quad (\text{V.30})$$

Donc :

$$\tilde{\lambda}^2 - a^2 = 0 \quad (\text{V.31})$$

La matrice *jacobienne*  $A$  étant constante, le système d'équations hyperboliques de conservation est par conséquent linéaire et a pour valeurs propres :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\lambda}^{(1)} = +a \\ \tilde{\lambda}^{(2)} = -a \end{array} \right\} \quad (\text{V.32})$$

Ce résultat montre que la conduite en charge est le siège d'une propagation d'ondes élastiques dans deux directions et dont les célérités sont respectivement  $+a$  et  $-a$ .

Pour calculer le flux aux interfaces des cellules, on considère alors un problème de *Riemann* se manifestant à l'interface  $x_{i+1/2}$  de la cellule  $C_i$  (Figure (V.3)), où une discontinuité apparaît à cet endroit donnant naissance à une propagation d'ondes de part et d'autres de l'interface. La célérité de ces deux ondes étant constante, c'est-à-dire  $\tilde{\lambda}^{(1)} = \tilde{\lambda}^{(2)}$  indépendante de la valeur de  $U$ , la solution au problème de *Riemann* consiste alors en deux discontinuités de contact isolant une zone centrale  $U_*$  d'état constant des états gauche et droit du problème de *Riemann* (Figure (V.3)).

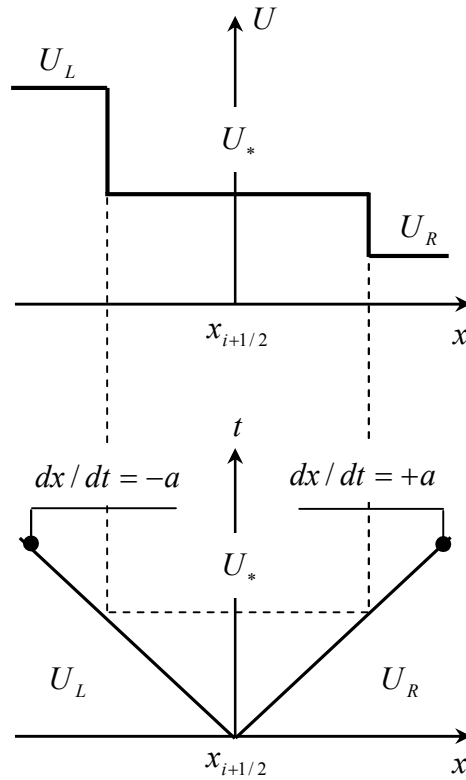
En utilisant le caractère d'autosimilarité du problème de *Riemann* (Toro, 2009), c'est-à-dire que la solution ne dépend que du rapport  $(x - x_0)/t$ , cette solution pour notre application s'écrit pour les  $m + 1$  états constants, comme suit (Guinot, 2003) :

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L & \text{pour } x < x_{i+1/2} - at \\ U_* & \text{pour } x_{i+1/2} - at < x < x_{i+1/2} + at \\ U_R & \text{pour } x > x_{i+1/2} + at \end{cases} \quad (\text{V.33})$$

L'inconnu  $U_*$  est déterminé de deux manières, soit par les invariants de *Riemann* ou par les invariants généralisés. Nous développerons ci-après les deux approches.

Les vecteurs propres associés au système hyperbolique se retrouvent aisément et sont :

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} +a/gS & 1 \end{bmatrix}^T ; \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} -a/gS & 1 \end{bmatrix}^T \quad (\text{V.34})$$



**Figure (V.3) :** Solution du problème de Riemann dans le plan physique (haut) et en espace des phases (bas) (Guinot, 2003)

D'où :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} +a & -a \\ \frac{gS}{1} & \frac{gS}{1} \end{bmatrix} \quad (\text{V.35})$$

L'inverse de la matrice  $\mathbf{K}$  s'obtient ainsi sans difficulté en employant le théorème de *Hamilton-Cayley* (Fanchi, 2006) :

$$\mathbf{K}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} +\frac{gS}{a} & 1 \\ -\frac{gS}{a} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.36})$$

De là, les invariants de Riemann  $W_p$  s'obtiennent en intégrant l'équation (IV.64), où :

$$dW = \begin{bmatrix} dW_1 \\ dW_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} +\frac{gS}{a} & 1 \\ -\frac{gS}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dU_1 \\ dU_2 \end{bmatrix} \quad (\text{V.37})$$

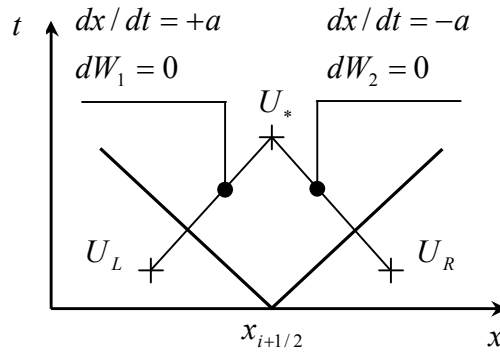
Par conséquent :



$$dW_1 = \frac{1}{2} \frac{gS}{a} dH + \frac{1}{2} dQ \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = +a \quad (\text{V.38})$$

$$dW_2 = \frac{1}{2} \frac{gS}{a} dH - \frac{1}{2} dQ \quad \text{pour} \quad \frac{dx}{dt} = -a \quad (\text{V.39})$$

Pour intégrer ce couple d'équations, on connecte la zone intermédiaire aux états gauche et droit du problème de *Riemann* par des caractéristiques et on utilise les invariants le long de chacune d'elles (Figure (V.4)).



**Figure (V.4) :** Invariants de Riemann dans l'espace des phases (Guinot, 2008)

En reliant la caractéristique de célérité  $+a$  pour relier l'état gauche à l'état constant intermédiaire et la caractéristique de célérité  $-a$  pour l'état droit, ceci mènera au système d'équations suivant :

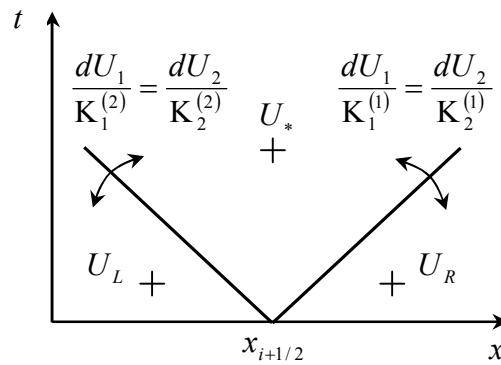
$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(H_* - H_L) + \frac{1}{2} \frac{a}{gS} (Q_* - Q_L) &= 0 \\ \frac{1}{2}(H_* - H_R) - \frac{1}{2} \frac{a}{gS} (Q_* - Q_R) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.40})$$

La solution pour les inconnues d'état intermédiaire constant s'obtient sans difficulté, et est donnée par :

$$H_* = \frac{H_L + H_R}{2} + \frac{a}{gS} \left( \frac{Q_L - Q_R}{2} \right) \quad (\text{V.41})$$

$$Q_* = \frac{Q_L + Q_R}{2} + \frac{gS}{a} \left( \frac{H_L - H_R}{2} \right) \quad (\text{V.42})$$

La seconde approche consiste à utiliser les invariants de *Riemann* généralisés entre les états gauche et droit et la zone intermédiaire (Figure (V.5)). Cette technique, plus attractive et simple, suppose alors implicitement la continuité des variables d'état du problème au travers des ondes de discontinuité (Léon, 2007).



**Figure (V.5) :** Invariants de Riemann généralisés dans l'espace des phases (Guinot, 2008)

Rappelons que les variables du système et ses vecteurs propres sont :

$$U = \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix} ; \quad K^{(1)} = \begin{bmatrix} +a \\ gS \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad K^{(2)} = \begin{bmatrix} -a \\ gS \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.43})$$

L'application des invariants de Riemann généralisés permet d'écrire que :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH}{(+a/gS)} = \frac{dQ}{1} & \quad \text{au travers de} \quad \frac{dx}{dt} = +a \\ \frac{dH}{(-a/gS)} = \frac{dQ}{1} & \quad \text{au travers de} \quad \frac{dx}{dt} = -a \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.44})$$

La première relation du système (V.44) est valide au travers de l'onde  $dx/dt = +a$ , elle peut être utilisée pour connecter l'état droit du problème de Riemann à la zone intermédiaire d'état constant. De manière similaire, la deuxième relation peut servir à relier l'état gauche du problème à la zone intermédiaire (Guinot, 2008). En intégrant les relations (V.44), on aboutit à :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(H_* - H_L) + \frac{1}{2} \frac{a}{gS} (Q_* - Q_L) &= 0 \\ \frac{1}{2}(H_* - H_R) - \frac{1}{2} \frac{a}{gS} (Q_* - Q_R) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V.45})$$

Ce système est équivalent à celui (V.40) et a donc pour solution (V.41) et (V.42). Cette solution servira alors pour calculer les flux aux interfaces intercellulaires.

### V.3.2.2. Solveur HLL pour le problème de Riemann

Au lieu de résoudre un problème de Riemann exact aux interfaces des cellules, il pourrait être judicieux dans certains cas, suivant la nature du problème, d'appliquer un solveur approché pour trouver les variables d'état et de flux du système hyperbolique. Nous nous

proposons d'appliquer le solveur *HLL*, exposé dans le précédent chapitre, pour le problème d'écoulements non permanents en charge.

Rappelons que la solution du problème de *Riemann* approchée suivant le solveur *HLL* s'écrit :

$$U_* = \frac{U_L + U_R}{2} + \frac{F_L - F_R}{2\lambda} \quad (\text{V.46})$$

L'application de l'équation (V.46) au modèle mathématique du mouvement transitoire devient :

$$H_* = \frac{H_L + H_R}{2} + \frac{a^2}{gS} \left( \frac{Q_L - Q_R}{2\lambda} \right) \quad (\text{V.47})$$

$$Q_* = \frac{Q_L + Q_R}{2} + gS \left( \frac{H_L - H_R}{2\lambda} \right) \quad (\text{V.48})$$

Par ailleurs, dans notre problème, les célérités des ondes, données par la matrice *jacobienne* du flux, sont constantes, et par conséquent, la formule de *Davis* (*Guinot, 2003*) donnera pour résultat :

$$\lambda = \max \left[ \left| \lambda^{(1)}(U_L) \right|, \left| \lambda^{(1)}(U_R) \right|, \left| \lambda^{(2)}(U_L) \right|, \left| \lambda^{(2)}(U_R) \right| \right] = a \quad (\text{IV.49})$$

Remarquons alors, par voie de conséquence de ce résultat, que le solveur approché *HLL* recoupe la solution exacte du problème de *Riemann* pour notre cas, donnée précédemment. Ceci revient au fait que la structure de la solution est préalablement connue, consistant en deux ondes de discontinuité de contact de célérité constante. Ceci étant dit, c'est la solution exacte du problème de *Riemann* qui sera appliquée dans la suite de l'étude.

### V.3.3. Calcul des flux intercellulaires

Sachant que l'interface  $x_{i+1/2}$  de la cellule interne  $C_i$  est localisée dans la zone intermédiaire du problème de *Riemann*, on aura :  $H_{i+1/2}^{n+1/2} = H_*$  et  $Q_{i+1/2}^{n+1/2} = Q_*$ . Il en résulte alors que  $U_{i+1/2}^{n+1/2} = U_*$ . D'où, la fonction de flux  $\Phi(U_i^n, U_{i+1}^n) = f(U_{i+1/2}^{n+1/2})$  au temps médiateur  $t_{n+1/2} \in [t_n, t_{n+1}]$  à l'interface  $x_{i+1/2}$  se condense sous la forme suivante :

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} H_{i+1/2}^{n+1/2} \\ Q_{i+1/2}^{n+1/2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (H_i + H_{i+1}) + B(Q_i - Q_{i+1}) \\ (Q_i + Q_{i+1}) + \frac{1}{B}(H_i - H_{i+1}) \end{bmatrix} \quad (\text{V.50})$$

Dans laquelle  $B = \frac{a}{gS}$  est l'impédance de la conduite.

Ou encore, moyennant la forme matricielle qui suit :

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = TU_i^n + YU_{i+1}^n \quad (\text{V.51})$$

Avec T et Y matrices de passage s'exprimant par :

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & B \\ B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad Y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -B \\ -B^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.52})$$

Par un raisonnement similaire, pour l'interface gauche  $x_{i-1/2}$  de la cellule interne  $C_i$ , laquelle aussi est localisée dans la zone intermédiaire du problème de *Riemann* à cette interface, le flux  $F_{i-1/2}^n$  au temps intercalaire  $t_{n+1/2} \in [t_n, t_{n+1}]$  se calcul comme une fonction  $\Phi(U_{i-1}^n, U_i^n) = f(U_{i-1/2}^{n+1/2})$  de la manière suivante :

$$U_{i-1/2}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} H_{i-1/2}^{n+1/2} \\ Q_{i-1/2}^{n+1/2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (H_{i-1} + H_i) + B(Q_{i-1} - Q_i) \\ (Q_{i-1} + Q_i) + \frac{1}{B}(H_{i-1} - H_i) \end{bmatrix} \quad (\text{V.53})$$

Sous forme matricielle, cette dernière écriture se réduit à :

$$U_{i-1/2}^{n+1/2} = TU_{i-1}^n + YU_i^n \quad (\text{V.54})$$

Où les matrices de passage T et Y s'expriment de manière identique à (V.52).

Les flux numériques au temps intercalaire  $t_{n+1/2}$  étant calculés par la théorie de *Riemann*, on substitue alors le vecteur d'état de l'écoulement  $U_{i\pm 1/2}^{n+1/2}$  dans l'équation du bilan (V.28) aux volumes finis. Pour les deux variables d'état moyennées sur la cellule  $C_i$  du système hyperbolique, en l'occurrence  $H_i$  et  $Q_i$ , ceux-ci seront donc calculées au temps  $t + \Delta t$  comme suit :

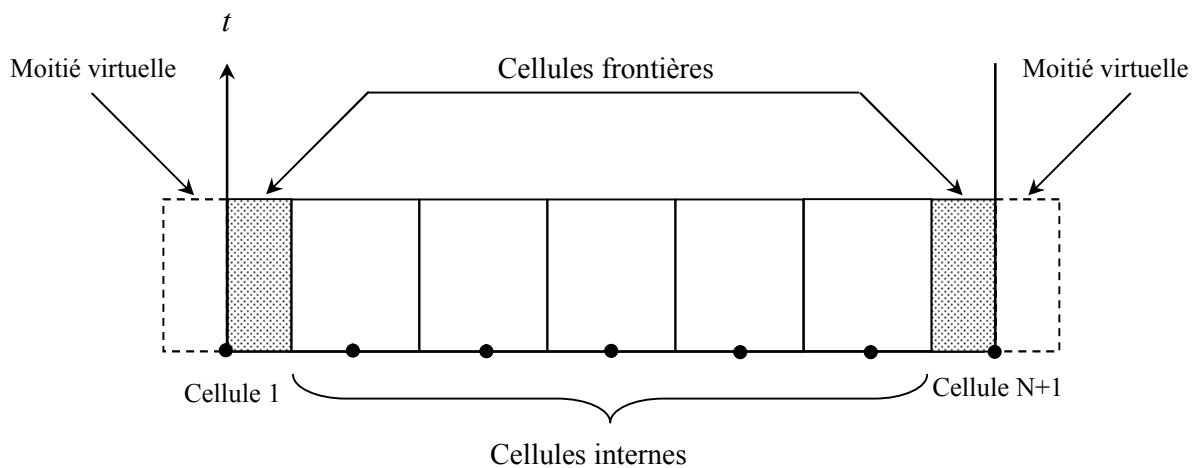
$$H_i^{n+1} = H_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{a^2}{gS} (Q_{i+1/2}^{n+1/2} - Q_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad (\text{V.55})$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} gS (H_{i+1/2}^{n+1/2} - H_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad (\text{V.56})$$

Comme pour le cas du schéma de *Richtmyer Lax-Wendroff*, le présent procédé est appliqué pour les cellules internes des volumes de calcul. Pour compléter la solution numérique aux frontières du domaine, nous devons appliquer un traitement spécial, et ceci suivant l'approche dans laquelle les cellules de calcul sont disposées dans le domaine physique du problème. Nous détaillerons ci-après la technique d'incorporation et le traitement des conditions aux limites, introduite dans le présent travail, pour le schéma aux volumes finis de *Richtmyer Lax-Wendroff* et la méthode de *Godunov* indifféremment, et ceci en ayant le soin d'explicitier son application aux équations d'état des appareils hydrauliques rencontrés dans les applications qui suivront.

#### V.4. Conditions aux limites

L'ensemble des travaux qui ont été consulté, tels que ceux de *Zhao et Ghidaoui (2004)* et *Sabbagh-Yazdi et al. (2007)*, s'appuient sur un maillage centré dans le domaine de calcul, faisant que les cellules formant la discrétisation se trouvent toutes encadrées par les frontières du domaine, comme il a été montré dans le chapitre précédent (Figure (IV.15)). Cependant, dans notre travail, nous introduisons le concept de maillage "excentré". Cette approche consiste en une discrétisation du domaine en cellules dont l'excentricité est de  $\Delta x/2$  par rapport au maillage classique. Par cette technique de maillage, nous pouvons nous apercevoir qu'on aura  $N + 1$  cellules et dont la moitié des cellules frontières seront virtuelles (Figure (V.6)). L'utilisation de cette approche dans ce travail jouie de plusieurs avantages. En effet, nous aurons ainsi les variables d'état du système, à savoir  $H(x,t)$  et  $Q(x,t)$  formant le vecteur d'écoulement  $U_i$ , qui seront connues et calculées exactement aux frontières du domaine avec précision, ce qui permet de recouper et de vérifier les résultats avec ceux que l'on obtient par les modèles aux différences finies.

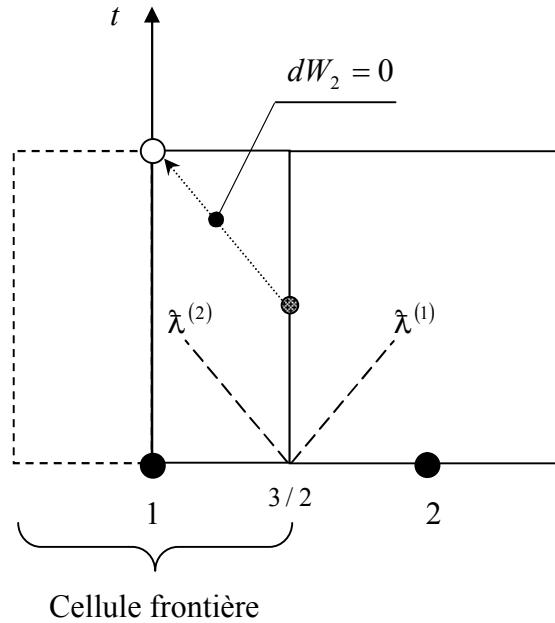


**Figure (V.6) :** Maillage excentré du domaine de calcul et cellules virtuelles

Donc, au lieu d'avoir des cellules encadrées par le domaine, on aura la connaissance des variables  $U_i$ , centrées en chaque cellule  $C_i$ , qui recouperont le dit domaine de calcul. Une telle technique permettra alors une meilleure résolution mathématique des systèmes d'équations imposés par les différents organes hydrauliques.

Ceci dit, nous devons à présent introduire une autre technique de calcul des variables  $U_i$  en ces cellules d'extrémités dans la mesure où l'on ne peut exprimer les flux au travers des moitiés virtuelles de ces cellules, étant donné que ceci ne repose pas sur une base physique.

La technique que nous proposons ici se scinde en deux parties. En premier lieu, un calcul du flux est réalisé aux interfaces internes (moitié réelle de la cellule d'extrémité) et ceci en résolvant un problème de *Riemann* en ce lieu (Figure (V.7)).



**Figure (V.7) :** Traitement numérique des cellules frontières en maillage excentré

Il résulte alors pour l'interface  $3/2$ , qui représente la face interne de la cellule amont du domaine, que le flux  $F_{3/2}^{n+1/2}$  au temps intermédiaire  $t + \Delta t/2$  se détermine comme une solution exacte au problème de *Riemann* matérialisé par les discontinuités de contact de célérités  $\tilde{\lambda}^{(1)}$  et  $\tilde{\lambda}^{(2)}$ . On écrit par conséquent :

$$U_{3/2}^{n+1/2} = TU_1^n + YU_2^n \quad (\text{V.57})$$

Où  $T$  et  $Y$  sont les matrices de passage définies précédemment.

Une fois le vecteur d'écoulement  $U_{i+1/2}^{n+1/2}$  connu, on se servira de l'invariant de *Riemann*  $W_2$ , valide le long de la droite  $dx/dt = -a$ , pour relier l'état intermédiaire du problème de *Riemann* et le centre de la cellule frontière au temps  $t + \Delta t$  où l'on recherche la solution. Le long de cette droite  $dW_2 = 0$ , les variables d'écoulement  $H(x,t)$  et  $Q(x,t)$  sont reliés de la manière suivante :

$$H_1^{n+1} - BQ_1^{n+1} = H_{3/2}^{n+1/2} - BQ_{3/2}^{n+1/2} \quad (\text{V.58})$$

Nous ferons donc usage de cette équation avec l'équation caractéristique propre à chaque appareil hydraulique pour trouver les inconnues recherchées à la frontière.

#### V.4.1. Cas d'un bassin à charge constante

Dans ce cas, la condition imposée à l'extrémité amont ou aval de la conduite forcée porte sur le niveau d'eau dans le réservoir. Il est alors admis que le plan d'eau en ce lieu reste constant pendant l'écoulement non stationnaire (Chaudhry, 1968 ; 1970). En toute rigueur, la charge  $H$  au nœud de calcul à l'issue de ce bassin, se déduit en appliquant le bilan énergétique prenant en compte l'énergie cinétique et la perte de charge singulière suivant le sens de l'écoulement (Figure (V.8)) ; dans ce cas on écrira (Streeter, 1962 ; Chaudhry, 1979):

$$H_1 = H_R - (1 + \zeta) \cdot \frac{(Q_1^{n+1})^2}{2g \cdot S^2} \quad (\text{V.59})$$

$\zeta$  Étant le coefficient de perte de charge dû à la singularité.

Mais dans la pratique, la perte de charge due à la singularité peut être négligée en supposant qu'en ce lieu les bords de l'orifice sont convenablement arrondis telle qu'aucune contraction de la veine liquide ne se manifestera (Lindell et al., 1996). Par ailleurs, il est aussi admis que l'énergie cinétique développée par la mise en vitesse de l'eau dans la conduite soit négligée (de l'ordre du décimètre), ceci est légitime au retour de l'eau où cette énergie se trouve perdue en tourbillons dans le réservoir (Bergeron, 1949). De ce fait, les termes dissipatif et cinétique dans l'équation (V.59) seront supposés nuls.

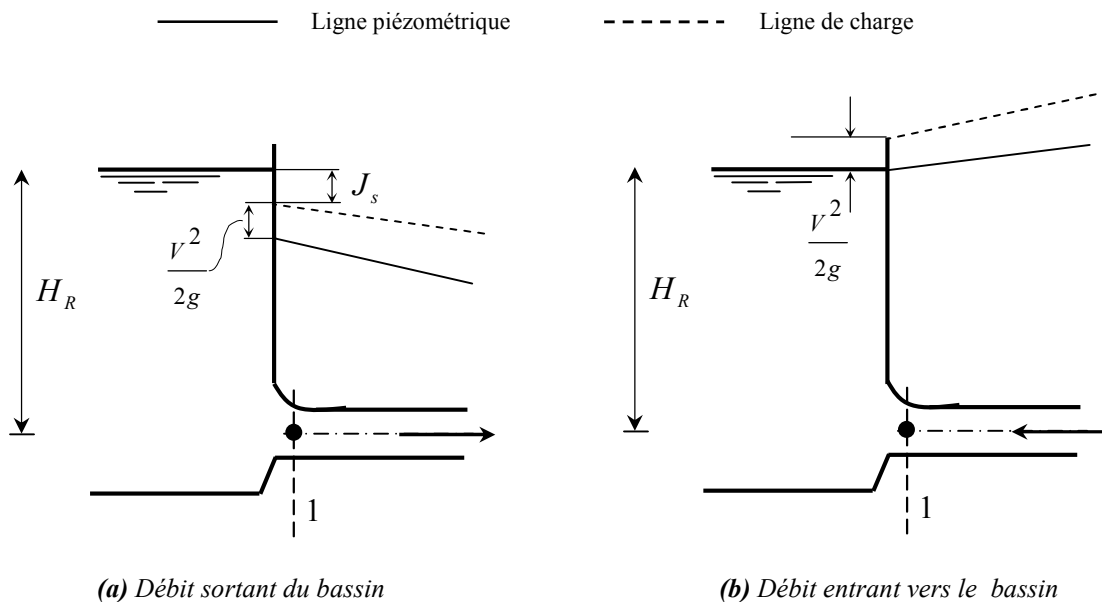


Figure (V.8) : Condition d'écoulement au réservoir (bassin)

Les simplifications ainsi admises conduisent à écrire la condition imposée à l'extrémité amont, par exemple, de la conduite (section "1") :

$$H_1^{n+1} = H_R \quad (\text{V.60})$$

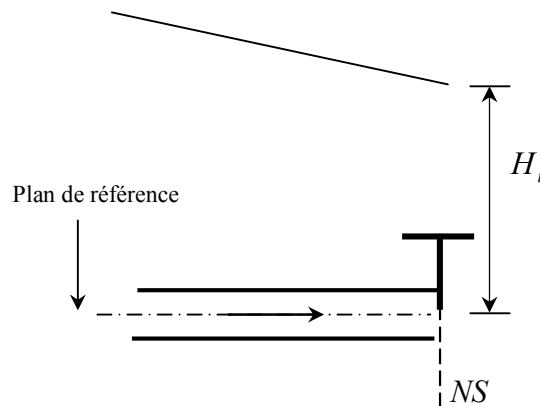
Ayant connaissance du vecteur flux  $U_{3/2}^{n+1/2}$  à l'interface gauche de la cellule frontière, l'application de l'équation (V.58) de l'invariant de *Riemann*, permet sans peine de trouver le débit entrant ou sortant du bassin :

$$Q_1^{n+1} = -\frac{1}{B} \frac{H_{3/2}^{n+1/2} - BQ_{3/2}^{n+1/2}}{H_R} \quad (\text{V.61})$$

Les équations (V.60) et (V.61) permettront ainsi de calculer les variables  $H_1^{n+1}$  et  $Q_1^{n+1}$  en régime non permanent au nœud de calcul "1" du système considéré à n'importe quel pas de temps et ceci après avoir calculé le flux numérique aux interfaces.

#### V.4.2. Cas d'un obturateur

La solution de l'état de l'écoulement en régime transitoire à l'extrémité formée par un obturateur sis en ce lieu, constituant le générateur des ondes émises de ce point, se détermine de la sorte. La figure (V.9) représente le schéma de cet organe obturateur, qui peut être bien évidemment une vanne à opercule, à boisseau, vanne papillon, pointeau ou autres (*Wylie et Streeter, 1978*).



**Figure (V.9) :** Condition d'écoulement à la vanne

Il est facile de constater que pour une fermeture instantanée, qui est un cas hypothétique, la condition à imposer en ce lieu est analogue à celle d'un bout mort :  $Q_{NS} = 0$ . Par contre pour les manœuvres lentes (c'est le cas fréquent), il est nécessaire de connaître la loi décrivant la manœuvre en fonction du temps, qui d'après ce nous avons vu, est de type explicite. Dans la pratique, cette loi peut être représentée de deux manières (*Bergeron, 1949*):



- variation de la section de passage du fluide en fonction du temps ;
- variation du débit en fonction du temps.

#### V.4.2.1. Variation de la section de passage en fonction du temps

En régime permanent, nous savons que le débit à travers l'orifice de la vanne quand les filets liquides deviennent parallèles, est donné par :

$$Q_0 = (C_d \cdot S)_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0} \quad (\text{V.62})$$

Par analogie pour l'écoulement non stationnaire (Wylie et Streeter, 1978) :

$$Q_{NS}^{n+1} = (C_d \cdot S) \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_{NS}^{n+1}} \quad (\text{V.63})$$

Pour une ouverture donnée, on peut écrire le rapport suivant :

$$\frac{Q_{NS}^{n+1}}{Q_0} = \frac{(C_d \cdot S)}{(C_d \cdot S)_0} \frac{\sqrt{H_{NS}^{n+1}}}{\sqrt{H_0}} \quad (\text{V.64})$$

On définit le taux d'ouverture de la vanne  $\tau_v$  comme étant :

$$\tau_v = \frac{(C_d \cdot S)}{(C_d \cdot S)_0} \quad (\text{V.65})$$

Nous écrivons alors :

$$Q_{NS}^{n+1} = \tau_v \frac{Q_0}{\sqrt{H_0}} \sqrt{H_{NS}^{n+1}} \quad (\text{V.66})$$

L'analyse de l'expression (V.66) montre que pour  $\tau_v = 1$  on retrouve le régime permanent avec une ouverture complète, et pour  $\tau_v = 0$  on se retrouve dans le cas d'une vanne complètement fermée. La section de passage  $S$  du fluide (et par conséquent  $C_d$ ) étant fonction du temps, on pourra exprimer alors  $\tau_v$  comme fonction unique du temps ; en pratique, la loi couramment utilisée est de type (Chaudhry, 1968 ; Ouragh, 1994):

$$\tau_v = \left(1 - \frac{t}{T_F}\right)^\beta \quad (\text{V.67})$$

Avec  $T_F$  temps de fermeture de la vanne,  $\beta$  exposant propre à la vanne considérée, de valeurs usuelles variant de 1,4 à 1,6. Ainsi, la course de l'obturateur en fonction du temps peut être représentée par une courbe  $\tau_v(t)$  (Figure (V.10)).

De façon similaire au précédent cas, le long de l'invariant de Riemann  $dW_1 = 0$  à gauche de la cellule frontière droite du domaine de calcul, on écrit :

$$H_{NS}^{n+1} + BQ_{NS}^{n+1} = H_{NS-1/2}^{n+1/2} + BQ_{NS-1/2}^{n+1/2} \quad (\text{V.68})$$

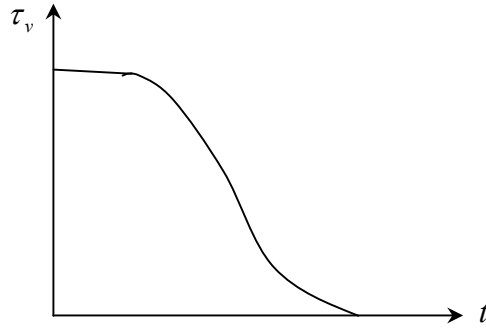


Figure (V.10) : Loi de manœuvre de la vanne en fonction du temps

En éliminant  $H_{NS}^{n+1}$  entre les équations (V.66) et (V.68), on obtient l'équation du second ordre suivante :

$$(Q_{NS}^{n+1})^2 + ZBQ_{NS}^{n+1} - Z[H_{NS-1/2}^{n+1/2} + BQ_{NS-1/2}^{n+1/2}] = 0 \quad (V.69)$$

Tel que :

$$Z = \left( Q_0 \frac{\tau_v}{\sqrt{H_0}} \right)^2 \quad (V.70)$$

La connaissance du débit  $Q_{NS}^{n+1}$  à partir de l'équation (V.69), permettra de déduire  $H_{NS}^{n+1}$  de l'équation (V.68).

#### V.4.2.2. Variation du débit en fonction du temps

Le plus souvent dans ce cas, on considère que la manœuvre de la vanne s'opère de manière à ce que l'annulation du débit suit une loi linéaire en fonction du temps, soit :

$$Q_{NS}^{n+1} = Q_0 \left( 1 - \frac{t}{T_F} \right) \quad (V.71)$$

En effet, c'est à partir de cette hypothèse que la solution analytique des fermetures lentes (Appendice (IV)) a été déduite (formule de *Michaud*). Bien évidemment, cette loi de manœuvre correspond à des conditions très particulières de manœuvres où l'on est conduit à réduire la section utile rapidement pendant le premier tiers de la fermeture, puis très lentement au cours du second, et de nouveau très rapidement dans le dernier tiers, on constate alors qu'il est très difficile de réaliser mécaniquement cette manœuvre (*Bergeron, 1949 ; Carlier, 1980*).

En admettant cette hypothèse de manœuvre, l'on n'aura qu'à déduire la charge dynamique transitoire  $H_{NS}^{n+1}$  de manière explicite de l'équation (V.68), étant donné que la valeur de  $Q_{NS}^{n+1}$  est connue à chaque incrément de temps.

### V.4.3. Cas d'un ballon anti-bélier (réservoir d'air)

Comme l'on a souligné dans les précédents chapitres, les dispositifs de protection anti-bélier de type capacitif que forment les cheminées d'équilibre et les réservoirs d'air sont, du point de vue mathématique, des organes imposant une relation différentielle entre la charge  $H$  et le débit  $Q$  au temps  $t$ , qu'il convient de résoudre à chaque pas de temps.

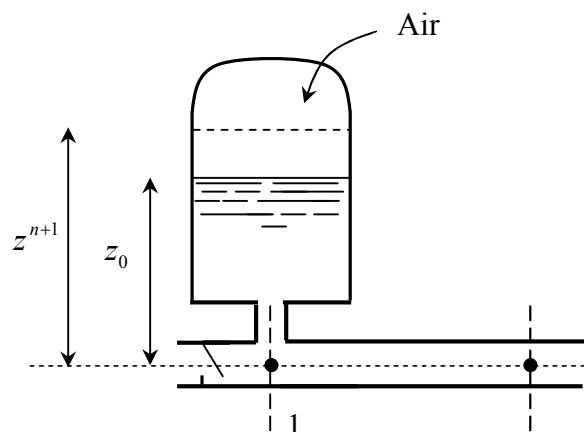
Or dans le cas des réservoirs d'air, ce problème se trouve accentué comparé au cas des cheminées d'équilibre prismatiques, puisqu'en plus des variations du niveau d'eau dans l'organe, le plan libre de cette eau se trouve en contact avec un coussin d'air comprimé dont sa loi de détente est aussi une fonction de  $H$  et  $Q$ . On voit facilement qu'on est en face d'un problème complexe composé de deux conditions imbriquées que l'on doit satisfaire.

Étant donné que la pression due au niveau de l'eau dans la cloche d'air sur l'axe de la conduite est négligeable vis-à-vis de la pression résultant de la compression de l'air emprisonné dans le ballon, plusieurs auteurs tels que *Bergeron* (1949) et *Dupont* (1979) admettent qu'il est alors légitime d'omettre la condition de fluctuation du niveau d'eau dans ce dernier ainsi que la charge qui en résulterait. Cependant, dans notre travail, cette simplification sera écartée et le modèle numérique ainsi bâti tiendra rigoureusement en considération l'influence du marnage dans le ballon sur la pression à l'axe de la conduite.

En admettant que l'air emprisonné dans la cloche (Figure (V.11)), à l'interface avec l'eau, subit une détente suivant la loi des gaz parfaits (dite parfois loi de *Laplace*) suivante :

$$H_0^{n+1} (V^{n+1})^\gamma = Cte \quad (V.72)$$

Dans cette équation,  $H_0^{n+1}$  et  $V^{n+1}$  sont respectivement la charge absolue et le volume d'air dans la cloche à l'état final de chaque pas de temps. La constante se détermine sans difficulté à partir des conditions initiales.



**Figure (V.11) :** Schématisation et notation de la condition pour un ballon d'air

L'exposant  $\gamma$ , qui est le rapport des chaleurs spécifiques (capacité calorifique) à pression et à volume constant, dépend du processus d'évolution thermodynamique du gaz dans la cloche. Si ce dernier subit des détente et des compressions relativement lentes dans le temps, ce qui favorise le transfert thermique entre le gaz et la masse d'eau,  $\gamma$  prend la valeur de 1. Si au contraire le changement d'état se produit très rapidement, le processus est alors adiabatique (sans échange thermique), l'exposant  $\gamma$  est ainsi pris égal à 1,4. Dans la pratique c'est la valeur intermédiaire qui est admise, c'est-à-dire  $\gamma = 1,2$ , pour la raison que le régime transitoire est rapide durant les premiers instants et relativement lent en fin de temps (*Chaudhry, 1979*).

A la sortie ou à l'entrée du réservoir d'air, la présence d'un étranglement induirait une contraction de la veine liquide dont il y a lieu de prendre en considération. Ainsi, la perte de charge occasionnée par l'étranglement s'écrit comme suit :

$$J_s = \zeta \cdot Q_1^{n+1} |Q_1^{n+1}| \quad (\text{V.73})$$

Où  $\zeta$  représente le coefficient de dissipation d'énergie dans l'étranglement.

Pour la formulation mathématique du problème, nous devons écrire tout d'abord l'équation de continuité à la jonction du ballon avec la conduite, qui lie le volume d'air au débit de la conduite. Étant donné que la cloche est branchée habituellement à l'extrémité amont de la conduite, la conservation de la masse s'écrit :

$$\Delta V = \int_{t_1}^{t_2} Q \cdot dt \quad (\text{V.74})$$

Dans cette équation, il est supposé implicitement que lorsque le courant électrique est brusquement coupé sur le moteur qui attaque la pompe, le groupe ayant normalement très peu d'inertie s'arrête très rapidement, le clapet retombe ainsi à peu près instantanément sur son siège et le réservoir d'air commence aussitôt à fournir le débit demandé par la conduite.

Naturellement un calcul numérique, comme une construction graphique d'ailleurs, ne pourra procéder que par différences finies, ce qui permet d'évaluer le terme sous l'intégral par simple quadrature, en moyennant dans le temps le débit  $Q_i^n$  sortant au temps  $t$  et celui subsistant  $Q_i^{n+1}$  au temps  $t + \Delta t$ , comme suit :

$$\Delta V = \left[ \frac{Q_1^n + Q_1^{n+1}}{2} \right] \Delta t \quad (\text{V.75})$$

Dans cette approximation, on admet que la variation du débit est linéaire dans le temps, ce qui est satisfait si l'incrément de temps reste assez petit.

Par suite, la pression absolue de l'air à l'intérieur du ballon se détermine par :

$$H_0^{n+1} = H_1^{n+1} + H_{bar} - z^{n+1} + J_S \quad (V.76)$$

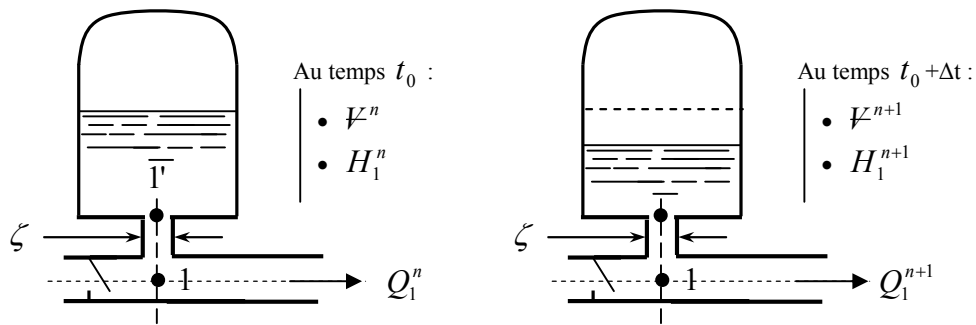
Avec  $H_{bar}$  pression barométrique et  $H_1^{n+1}$  pression relative au point de raccordement du ballon avec la conduite. Le niveau du plan d'eau dans la cloche se calcul à chaque incrément de temps comme suit :

$$z^{n+1} = z^n - \frac{\Delta\mathcal{V}}{S_b} \quad (V.77)$$

Où  $S_b$  est la section horizontale du ballon anti-bélier. D'un autre coté, le volume d'air contenu dans le ballon s'écrit quant à lui :

$$\mathcal{V}^{n+1} = \mathcal{V}^n - S_b(z^{n+1} - z^n) \quad (V.78)$$

L'illustration de la variation d'état du système en fonction du temps est alors donnée sur la figure (V.12).



**Figure (V.12) :** Illustration de la variation des variables d'état en fonction du temps

Pour résoudre par conséquent le problème, on doit compléter la solution et fermer le système d'équations par l'adjonction de l'équation de l'invariant de *Riemann*  $dW_2 = 0$  à la cellule gauche du domaine de calcul. Rappelons que le long de cet invariant, l'écriture suivante est valide :

$$H_1^{n+1} - BQ_1^{n+1} = H_{3/2}^{n+1/2} - BQ_{3/2}^{n+1/2} \quad (V.79)$$

Tenant compte des équations (V.75), (V.77) et (V.78) et en vertu de l'équation (V.76), on peut expliciter l'écriture de  $H_1^{n+1}$  comme suit :

$$H_1^{n+1} = \frac{H_0(\mathcal{V}_0)^\gamma}{\left[ \mathcal{V}^n + \left( \frac{Q_1^n + Q_1^{n+1}}{2} \right) \Delta t \right]^\gamma} - H_{bar} + \left[ z^n - \left( \frac{Q_1^n + Q_1^{n+1}}{2} \right) \frac{\Delta t}{S_b} \right] - \zeta Q_1^{n+1} |Q_1^{n+1}| \quad (V.80)$$

Pour compléter alors la solution à l'extrémité amont du domaine de calcul, il est nécessaire de satisfaire simultanément les équations (V.79) et (V.80) à chaque pas de temps. Comme le constate-t-on, la formulation mathématique imposée par le ballon anti-bélier est fortement non linéaire ; par conséquent, une résolution numérique du précédent système d'équations sera nécessaire. A cet effet, une panoplie d'algorithmes numériques est disponible, toutefois la méthode d'approximations successives parait la plus adéquate pour ce genre de problème.

#### V.4.4. Cas d'une cheminée d'équilibre

Des organes simples tels que les vannes, la connaissance du régime impose une fonction explicite reliant  $H$  à  $Q$  de type  $H = \psi(Q)$  connue à chaque instant, dénommée "courbe caractéristique" de l'appareil. Mais il existe dans la pratique une catégorie d'organes dans lesquels  $H$  dépend de la variation de  $Q$  par rapport au temps ou au contraire  $Q$  dépend de la variation de  $H$  par rapport au temps, ce sont en général les organes de type capacitif tel que la cheminée d'équilibre. Dans ce cas de figure, les variables  $H$  et  $Q$  du régime au temps  $t + \Delta t$ , au lieu d'être déterminées immédiatement par résolution de l'équation de l'invariant de *Riemann* et la loi de l'appareil de type  $H = \psi(Q)$ , ils devront satisfaire à la relation différentielle qui lie  $H$  ou  $Q$  à l'une de leur dérivée par rapport au temps, c'est-à-dire  $\Delta H$  à  $Q$  ou  $\Delta Q$  à  $H$  et à  $\Delta t$ . En hydraulique, pour pouvoir résoudre ce problème mathématique, on se servira de deux principes physiques, magistralement proposés par *Bergeron* (1949), à savoir :

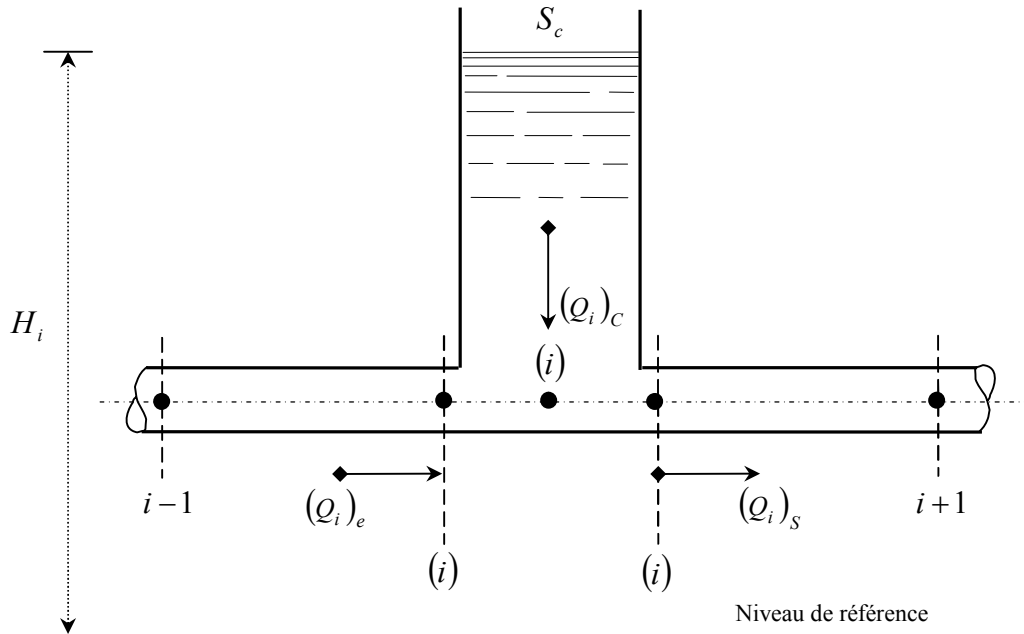
- a) ou bien pendant le temps  $\Delta t$ , le débit  $Q$  a rempli un volume  $\Delta V$  ce qui aura fait varier la pression  $H$ . C'est le cas des organes capacitifs à accumulation d'eau, comme une cheminée d'équilibre ;
- b) ou bien la force  $(\varpi.H)$  par unité de section aura fourni une impulsion  $(\varpi H)\Delta t$ , qui aura créé sur une masse matérielle, une quantité de mouvement dépendant du débit  $Q$ . C'est le cas des organes à inertie prépondérante tels que les accumulateurs poids.

Du fait que le contenu de la cheminée est à inertie faible, et le caractère accumulatif de l'organe, c'est le premier principe qui sera utilisé. D'après ce qui a été noté antérieurement (§.III.5.6), l'équation différentielle de stockage dans cet appareil s'écrit :

$$(Q_e - Q_s)dt = S_c dh \quad (\text{V.81})$$

Ceci étant, pour la fermeture mathématique du problème, il est nécessaire d'écrire des équations supplémentaires relatives à la dynamique du phénomène. Pour ce faire, la condition

(V.81), adjointe aux équations des invariants de *Riemann* associés aux cellules de calcul juxtaposés à cet organe, permettra de trouver l'état du régime en ce lieu en phase transitoire. Nous nous referons alors au schéma donné sur la figure (V.13) ci-dessous.



**Figure (V.13) :** Paramètres de calcul d'une cheminée sur le tracé d'une conduite

Il en découle que la solution du problème repose sur la connaissance des quatre (04) inconnues au temps  $t + \Delta t$  formant les variables d'état, à savoir : le débit entrant  $(Q_i)_e$  au nœud centré à la cellule  $C_i$ , celui sortant  $(Q_i)_s$  du même nœud, le débit fourni par la cheminée  $(Q_i)_c$  et enfin, le niveau du plan libre d'eau dans cette dernière qui représente la charge au nœud  $(i)$ . Ces mêmes variables étant bien entendu connues au temps  $t$  et serviront d'informations transmises aux points intérieurs du réseau de calcul suivant les lignes d'ondes.

Les quatre équations pouvant être formulées au nœud  $(i)$  pour parvenir à la solution, en omettant les forces d'inertie de la masse d'eau dans la cheminée, sont :

- Equation le long de l'invariant  $dW_1 = 0$  :

$$H_i^{n+1} + BQ_i^{n+1} = H_{i-1/2}^{n+1/2} + BQ_{i-1/2}^{n+1/2} \quad (\text{V.82})$$

- Equation le long de l'invariant  $dW_2 = 0$  :

$$H_i^{n+1} - BQ_i^{n+1} = H_{i+1/2}^{n+1/2} - BQ_{i+1/2}^{n+1/2} \quad (\text{V.83})$$

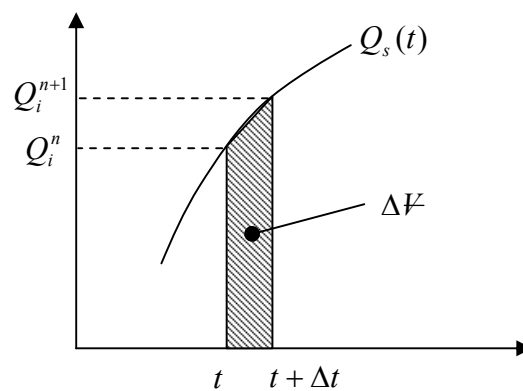
- Equation de continuité :

$$(Q_i^{n+1})_S = (Q_i^{n+1})_C + (Q_i^{n+1})_e \quad (\text{V.84})$$

- Equation de stockage :

$$\frac{(Q_i^n) + (Q_i^{n+1})_C}{2} = \frac{\Delta H}{\Delta t} S_C \quad (\text{V.85})$$

Dans cette dernière expression, il a été admis une approximation du premier ordre sur le volume d'eau en moyennant dans le temps les débits sortants (ou entrants) au temps  $t$  et celui du temps en cours  $t + \Delta t$ , ce qui revient à admettre une variation linéaire du débit pendant ce temps (Figure (V.14)), ce qui est légitime en phase de marche transitoire.



**Figure (V.14) :** Principe de calcul de la variation du volume de la cheminée

La solution numérique du régime transitoire en ce lieu du domaine exige la résolution simultanée de ces équations à chaque incrément de temps. De part le caractère implicite imposé par l'équation du stockage, une solution analytique directe de ces équations n'étant pas possible, on aura recours ainsi aux techniques de résolution par approximations successives. Nous pouvons dire que le problème posé ici pour le calcul du régime transitoire au nœud ( $i$ ) est analogue à celui que l'on connaît dans l'équilibrage des réseaux hydrauliques (Swamee et Sharma, 2008), il implique alors de satisfaire simultanément la double condition de continuité et d'énergie.

## V.5. Intégration du terme source

La méthode la plus répandue pour l'intégration numérique du terme source dans l'équation du mouvement est celle préconisée par LeVeque (2002), utilisée par Zhao et Guidaoui (2004) et reprise dans nombres de travaux à l'image de Léon (2007) et Sabbagh-Yazdi et al. (2007). Elle consiste en l'intégration par la technique de Runge-Kutta d'ordre 2.



Cette stratégie explicite dite à pas fractionné (*fractional step* ou *time splitting*), s'applique pour notre cas comme suit (Léon, 2007) :

- **Première étape** (propagation pure)

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) \quad (\text{V.86})$$

- **Seconde étape** (actualisation par le terme source pour un pas  $\Delta t/2$ )

$$\bar{U}_i^{n+1} = U_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} G(U_i^{n+1}) \quad (\text{V.87})$$

- **Dernière étape** (réactualisation par le terme source pour un pas  $\Delta t$ )

$$\bar{\bar{U}}_i^{n+1} = U_i^{n+1} + G(\bar{U}_i^{n+1}) \cdot \Delta t \quad (\text{V.88})$$

Ainsi, au temps  $t + \Delta t$  on retiendra la valeur calculée  $\bar{\bar{U}}_i^{n+1}$  comme valeur finale à l'incrément de temps considéré du vecteur  $U_i$ , pour sa propagation ultérieure dans le domaine de calcul au temps  $t + 2\Delta t$ .

## V.6. Conclusion

Ayant présenté, dans le chapitre qui a précédé, le fondement théorique de la méthode des volumes finis appliquée pour les problèmes hyperboliques ainsi que les schémas numériques de *Richtmyer L-W* et de *Godunov* pour le calcul des flux, le chapitre présent a porté l'application de ces concepts au problème de propagation des ondes dans les écoulements en charge. Dans un temps préliminaire, il a été démontré qu'en faisant usage de l'analyse harmonique de *Fourier*, la solution des équations du mouvement ne pourrait manifester une diffusion ou dispersion. Par conséquent, l'apparition de ces phénomènes serait due au schéma de calcul numérique adopté.

Dans un second temps, un développement détaillé de la discrétisation par la méthode des volumes finis des équations différentielles du mouvement a été donné. Dans ce volet, les schémas de *Richtmyer L-W* et de *Godunov* ont été appliqués. Pour la prédiction des flux dans ce dernier schéma, deux approches ont été présentées, à savoir, la résolution exacte du problème de *Riemann* aux interfaces des cellules ainsi que le solveur approché *HLL*. Il a été constaté que les deux approches menaient aux mêmes formulations finales. Par la suite, nous avons exposé notre technique, introduite ici, pour l'implémentation et le traitement des conditions aux limites. Enfin, et pour terminer, l'intégration du terme source via la technique à pas fractionné a été donnée. Reste donc à mettre en application et à expérimenter ces concepts pour les problèmes d'écoulements transitoires en charge.

*" ... Dans chaque recherche mathématique, la question se posera si nous pouvons appliquer nos résultats mathématiques au monde réel."*

V.I. Arnold

# 6. Applications et expérimentations numériques

## VI.1. Introduction

Dans ce qui a précédé, un exposé détaillé de la théorie de base des écoulements transitoires en charge a été présenté ainsi que les méthodes numériques permettant de résoudre les équations du mouvement gouvernant le phénomène. Dans le but de tester les performances de ces modèles numériques, le présent chapitre traitera alors la mise en application et l'expérimentation des schémas aux différences finies et aux volumes finis dans des cas d'occurrence des régimes non permanents d'écoulements et coups de bélier associés dans les installations hydrauliques. Les cas étudiés choisis découlent entre autres des problèmes réels rencontrés en pratique, ce qui confère ainsi au travail une double dimension, théorique et pratique.

Nous commencerons tout d'abord par l'expérimentation de ces schémas numériques sur un modèle à blanc. Ce modèle, essentiel dans toute étude de ce genre, jouera le rôle d'un banc d'essai numérique où les différentes méthodes de calcul numérique seront mises en épreuve à reproduire la réponse transitoire du système dans la mesure où une solution analytique du problème est disponible. Ce test permettra donc d'apprécier, en fonction des résultats obtenus, la performance de chaque modèle numérique élaboré.

Dans un second volet constituant le présent chapitre, nous enchaînerons par l'analyse des écoulements instationnaires en charge dans des cas réels tels que les installations de pompage et ses organes de protection anti-bélier et ceci par la méthode aux volumes finis. Nous nous focaliserons beaucoup plus dans l'interprétation des résultats sur l'aspect physique des problèmes traités, ce qui permet de lever le voile sur certains phénomènes et détails intéressants les Ingénieurs praticiens, où l'objectif dans l'étude des phénomènes instationnaires est d'améliorer le comportement dynamique du système hydraulique.

## VI.2. Application I : Manœuvres d'obturateur sur les conduites forcées

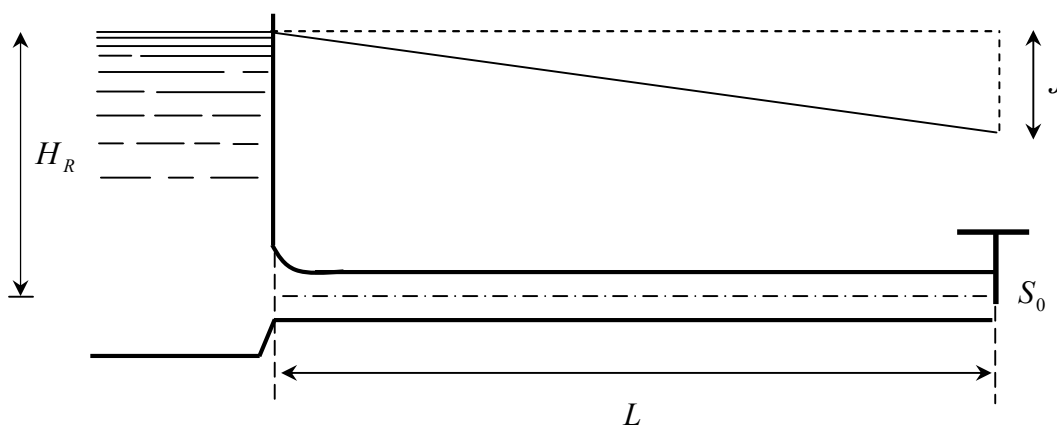
L'un des anciens problèmes posés par le coup de bélier dans les installations industrielles en hydraulique est bien celui de la manœuvre des obturateurs au bout des conduites forcées gravitaires. Ce type de problème a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs, donnant lieu à de nombreuses recherches théoriques et expérimentales visant à éviter des dommages dans les installations en charge, souvent conséquence des mauvaises manœuvres.

Nous présentons ici la simulation numérique de ce type classique de problème par les différentes méthodes de calcul numérique, à savoir, la méthode des caractéristiques (MOC), le schéma aux différences finies de *MacCormack* et la méthode des volumes finis (schéma de *Richtmyer Lax-Wendroff* et schéma de *Godunov*), et ceci dans le but d'expérimentation et de test de ces diverses méthodes. L'examen du régime transitoire dans ce cas d'étude se portera sur les suivants scénarios de manœuvre :

- Fermeture instantanée de la vanne d'obturation ;
- Fermeture linéaire du débit en un temps supérieur à  $2L/a$ .

Ces scénarios seront étudiés successivement avec et sans pertes de charge dans le but de comparer les résultats obtenus. La simulation du cas sans pertes de charge permet de valider les résultats avec les solutions analytiques disponibles dans ces conditions. Aussi, sur un autre plan, dans un tel cas, la dissipation physique étant absente, l'apparition de toute dissipation ou amplification sera due aux schémas numériques de calcul.

L'installation que l'on se propose d'étudier est schématisée sur la figure (VI.1).



**Figure (VI.1) :** Schéma de l'installation étudiée

Il s'agit d'une conduite unique (c'est-à-dire de section et d'épaisseur constantes) horizontale de longueur  $L$  et de diamètre  $D$  débouchant d'un réservoir (bassin) de section

infinie tel que le niveau d'eau reste constant en phase transitoire. Le niveau du plan libre assure une charge  $H_R$  au dessus de l'axe de la conduite, laquelle se termine par un obturateur (orifice) de section variable, qui peut être par exemple en pratique une vanne, une aiguille d'injecteur de turbine *Pelton* ou autres types d'obturateurs. Nous choisissons comme données de l'installation celles récapitulées dans le tableau (VI.1) suivant :

**Tableau (VI.1) : Données relatives au cas d'étude**

Charge statique du bassin ( $H_R$ )	400 m
Diamètre de la conduite	1.0 m
Longueur	10 000 m
Rugosité	1 mm
Célérité des ondes	1 000 m/s
Débit initial (régime établi)	2 m <sup>3</sup> /s

Ceci dit, nous entamons à présent l'étude numérique des scénarios définis précédemment par les différents schémas numériques choisis dans notre travail.

### VI.2.1. Test I : Fermeture instantanée de l'obturateur

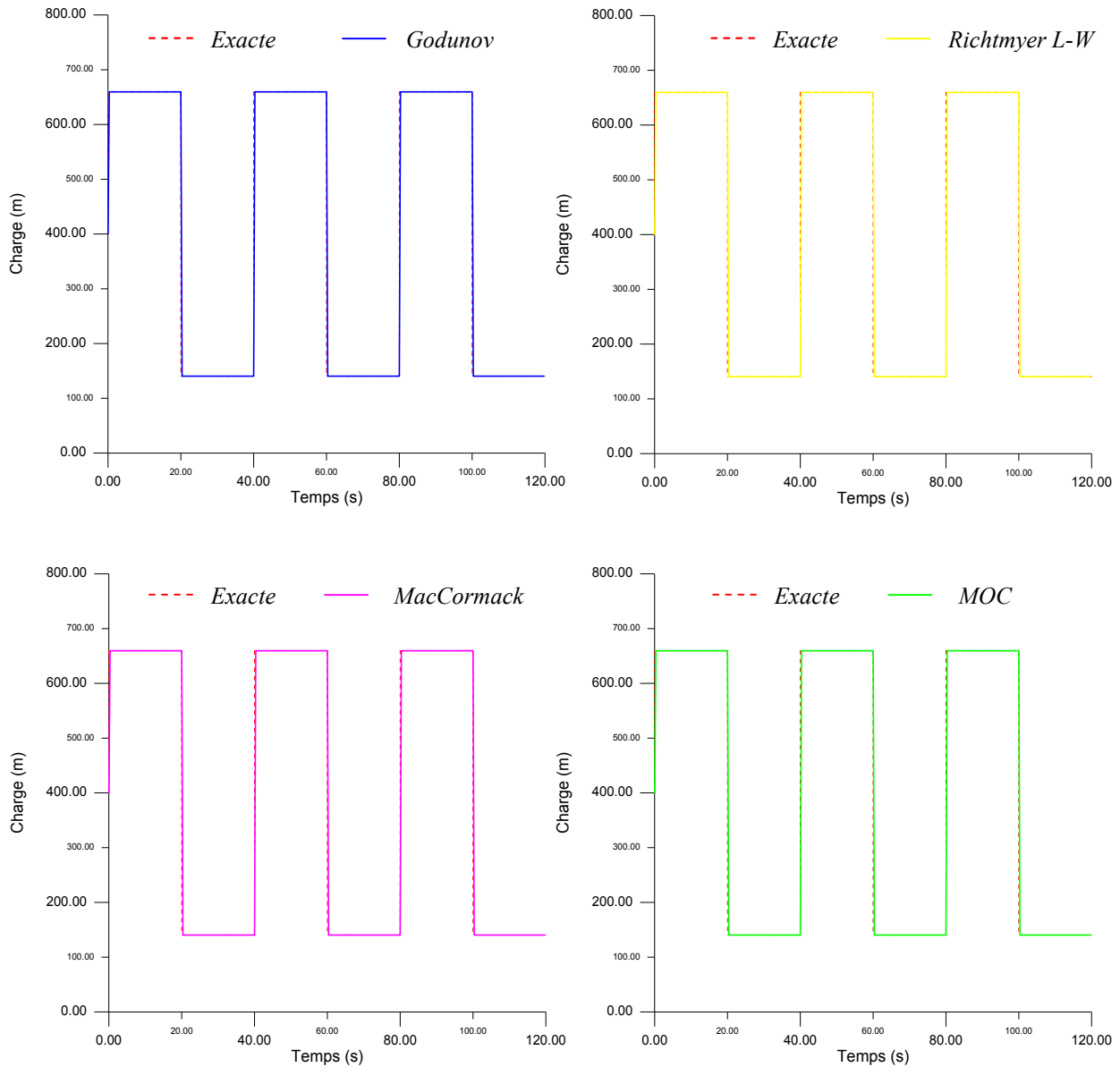
Ce cas apparaît lorsque le temps de fermeture de l'obturateur placé au bout de la conduite est inférieur à  $2L/a$ . En supposant que cette fermeture s'opère instantanément, qui est évidemment un cas hypothétique, la solution analytique donnant la surpression  $\xi$  et la période occasionnée à la vanne au point  $x = L$  se déduit à partir des équations enchaînées d'*Allievi* (Appendice (III)).

Les paramètres de simulation relatifs à ce cas de figure sont :

- Temps de fermeture de la vanne :  $T_F = 0$  s ;
- Durée de la simulation :  $t_s = 120$  s ;
- Discrétisation de la conduite :  $N = 30$  tronçons ;
- Pas de temps de calcul :  $\Delta t = 0,33\bar{3}$  s ;
- Nombre de *Courant* :  $C_r = 1$ .

#### ➤ Cas sans pertes de charge :

Les résultats de la simulation sont représentés dans la figure (VI.2), qui illustre la variation temporelle de la charge enregistrée en phase transitoire au point  $x = L$  (vanne).



**Figure (VI.2) :** Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture brusque, sans pertes de charge)

Comme nous pouvons le constater, à l'extrémité de la conduite où se crée la perturbation, la surpression s'établit brusquement au temps 0 suite à l'annulation instantanée du débit en régime permanent. Cette surpression reste constante jusqu'au temps  $20\text{ s}$ , qui est la durée d'aller et retour de l'onde ( $2L/a$ ) entre l'obturateur et le bassin de mise en charge. Immédiatement après ce temps, une dépression d'égale amplitude prend naissance et reste également constante durant  $20\text{ s}$ . Passé ce temps, le phénomène recommence indéfiniment et sans amortissement de l'amplitude étant donné qu'aucune dissipation de l'énergie mécanique du fluide n'intervient au cours du phénomène de propagation d'ondes. On voit ainsi le

caractère périodique du phénomène d'une durée de 40 s qui est rigoureusement la période théorique  $2\theta = 4L/a$  issue de la solution exacte du problème (Camichel et al., 1916).

Pour ce qui est de l'amplitude de l'onde, les charges maximales et minimales enregistrées sont de 659,71 m et 140,29 m respectivement. Ainsi, la surpression et dépression par rapport à la charge statique de 400 m (niveau du plan d'eau) sont :  $\xi_{Surp} = 259,71 m$  et  $\xi_{Depr} = -259,71 m$ , donc une amplitude de  $\pm 259,71 m$ . Cette valeur est exactement celle donnée par la formule bien connue d'Allievi ( $aV_0/g$ ). En outre, il est aussi à remarquer l'allure identique du diagramme de pression enregistré à la vanne et celui obtenu par l'application des équations enchaînées d'Allievi.

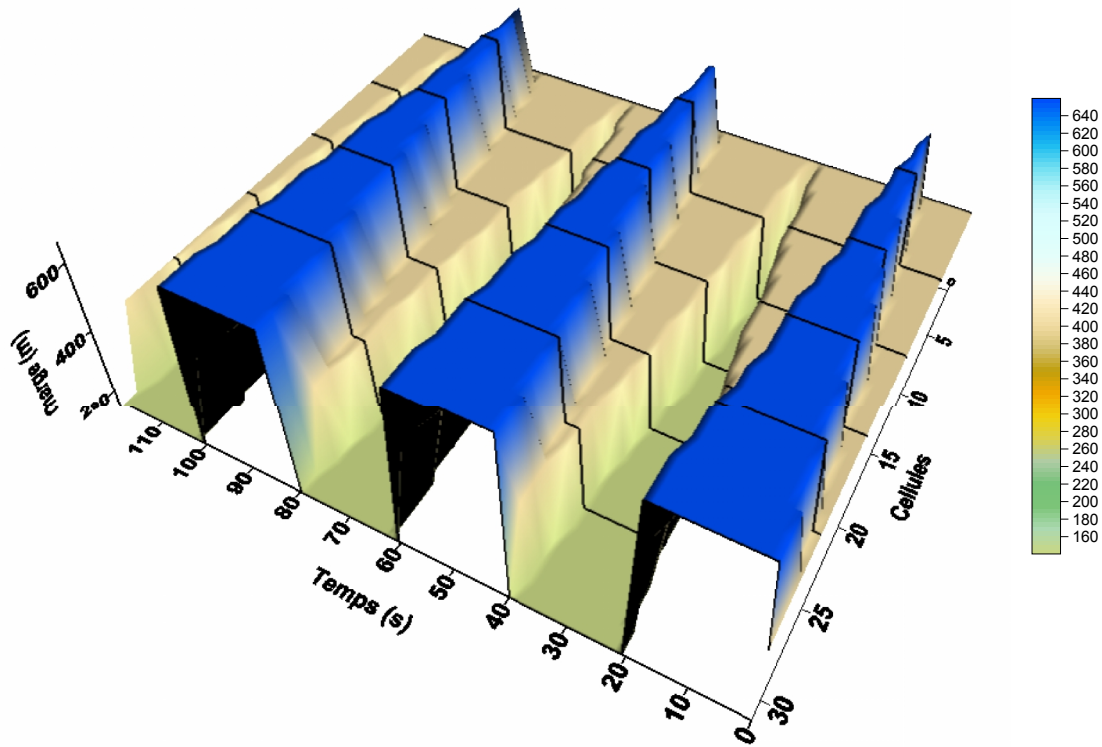
Il en découle alors que la simulation numérique de ce cas de figure par la méthode des volumes finis (Godunov et Richtmyer L-W) et le schéma de MacCormack ainsi que la méthode des caractéristiques, imitent la solution exacte du problème. La figure (VI.2) met en relief aussi la parfaite capture numérique du choc induit par l'apparition de la discontinuité d'état dans le système hydraulique. A l'inverse de ce que l'on peut préjuger, le schéma de MacCormack ne manifeste ici aucune dispersion numérique, inhérente à ce schéma, étant donné que la précision de ce dernier est de deuxième ordre en espace et en temps (Hoffmann et Chiang, 2000). De même, on constate que les schémas aux volumes finis de Godunov et de Richtmyer L-W, dont la précision générale est au premier ordre, reproduisent une solution régulière sans diffusion. Ces constats reviennent au fait que les équations du mouvement, traitées ici sans terme source, sont de type linéaire et aussi le choix du nombre de Courant unité force la solution numérique à recouper le résultat analytique et de ce fait, aucun déphasage dans la célérité réelle et numérique de l'onde n'est enregistré. C'est ce même principe qui est adopté par la méthode des caractéristiques d'où l'unicité des résultats obtenus comparée à cette méthode. Les résultats sont récapitulés dans le tableau (VI.2) ci-dessous.

**Tableau (VI.2) : Résultats de simulation du Test I (sans pertes de charge)**

Paramètres	Méthode de simulation numérique			
	Godunov	Richtmyer L-W	MacCormack	MOC
Charge maximale (m)	659,71	659,71	659,71	659,71
Charge minimale (m)	140,29	140,29	140,29	140,29
Période (s)	40	40	40	40

On remarque alors la parfaite concordance des résultats issus de la simulation numérique.

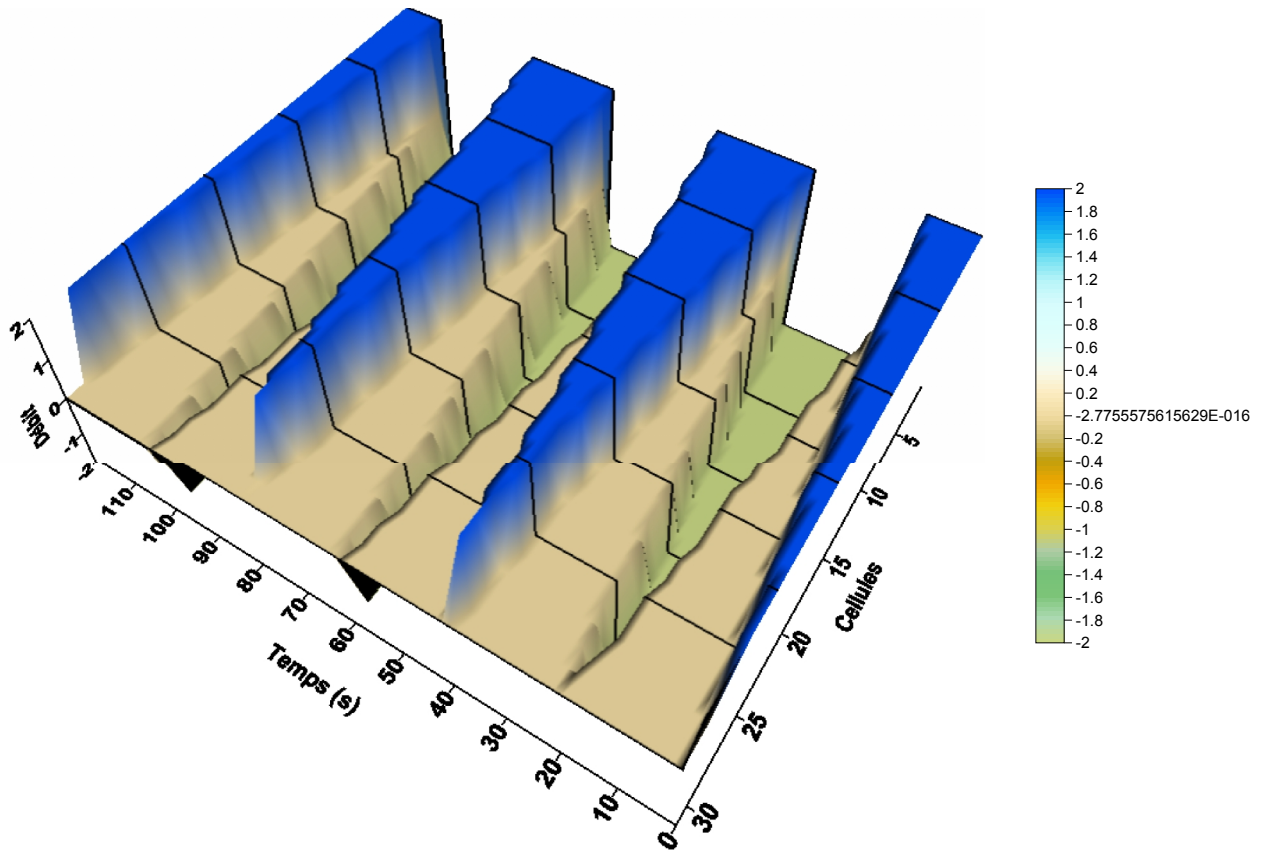
En portant les variations de la charge en fonction de l'espace et du temps sur une même figure ( $H, x, t$ ), on obtient une vue axonométrique (perspective Cavalière). Cette représentation en volume permet de saisir d'un coup d'œil toute la synthèse du phénomène (Figure (VI.3)). De même pour les débits, on obtient une vue similaire dans le repère tridimensionnel ( $Q, x, t$ ) (Figure (VI.4)).



**Figure (VI.3) :** Vue axonométrique de la variation de la charge en fonction de l'espace-temps (fermeture brusque - sans pertes de charge)

On peut voir sur ces figures qu'au moment où le front d'onde avance vers le réservoir à la célérité  $a$ , le débit s'annule derrière lui mais existe encore le long de la partie non atteinte par la perturbation. A son arrivée au réservoir, la surpression s'établit sur l'ensemble de la conduite et le débit est annulé sur toute la longueur. En second temps, le front d'onde rebrousse chemin et le débit s'inverse jusqu'à l'arrivée à la vanne où la surpression devient nulle et le débit inversé existe tout le long de la conduite. Immédiatement après, une onde de dépression (égale numériquement à l'onde précédente) prend naissance en annulant le débit sur son trajet jusqu'à son arrivée au réservoir, et la colonne liquide se trouve alors immobile. En dernière phase le débit se rétablit dans la conduite de proche en proche à la célérité des ondes en annulant la dépression, et à son arrivée à l'obturateur la conduite retrouve son état

primitif, mais comme le débit s'annule en ce lieu, le phénomène recommence. Par conséquent, plus nous nous éloignons de l'obturateur la durée de battement de la charge diminue et celle du débit augmente en même proportion à cause de l'effet d'interférences des ondes élastiques.



**Figure (VI.4) :** Vue axonométrique de la variation des débits en fonction de l'espace-temps (fermeture brusque - sans pertes de charge)

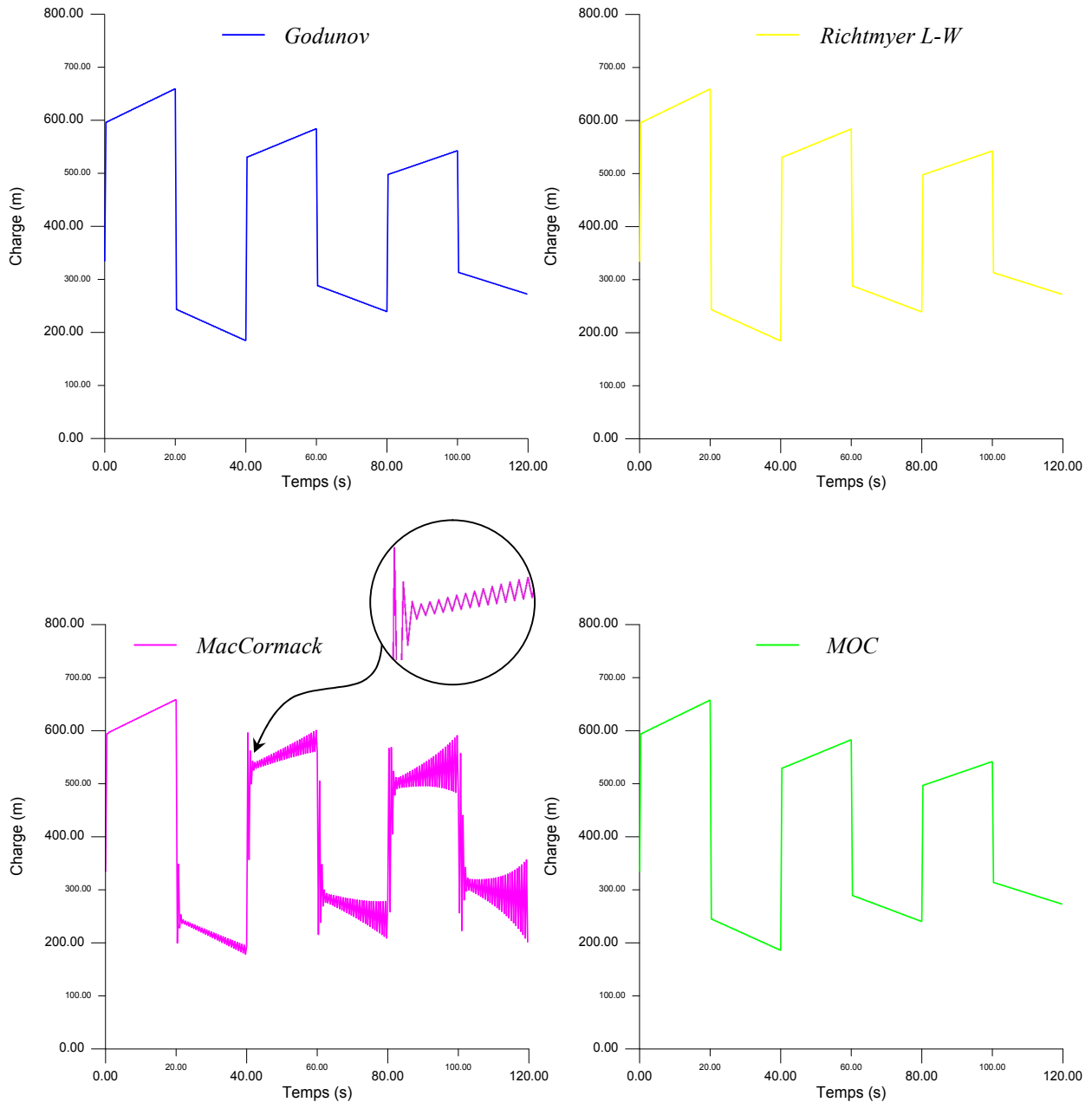
On peut aussi apercevoir clairement les itinéraires le long desquels les ondes se propagent dans l'espace-temps, ces trajets ne sont autres que les lignes de la théorie des caractéristiques. Ainsi, une variation d'état du régime provoquée à la vanne se propage telle qu'elle, sans affaiblissement jusqu'au réservoir ; c'est la définition même d'une onde plane.

Cette solution numérique, représentée en vue tridimensionnelle, concorde rigoureusement avec la solution analytique très fastidieuse, pour un cas similaire, donnée par *Sobey* (2004). Cependant signalons que le modèle analytique présenté de *Sobey* (2004), peine à décrire correctement le front d'onde à cause des oscillations (dispersions) au voisinage du fort gradient spatial, or la solution numérique obtenue ici capture rigoureusement le choc sans entache.



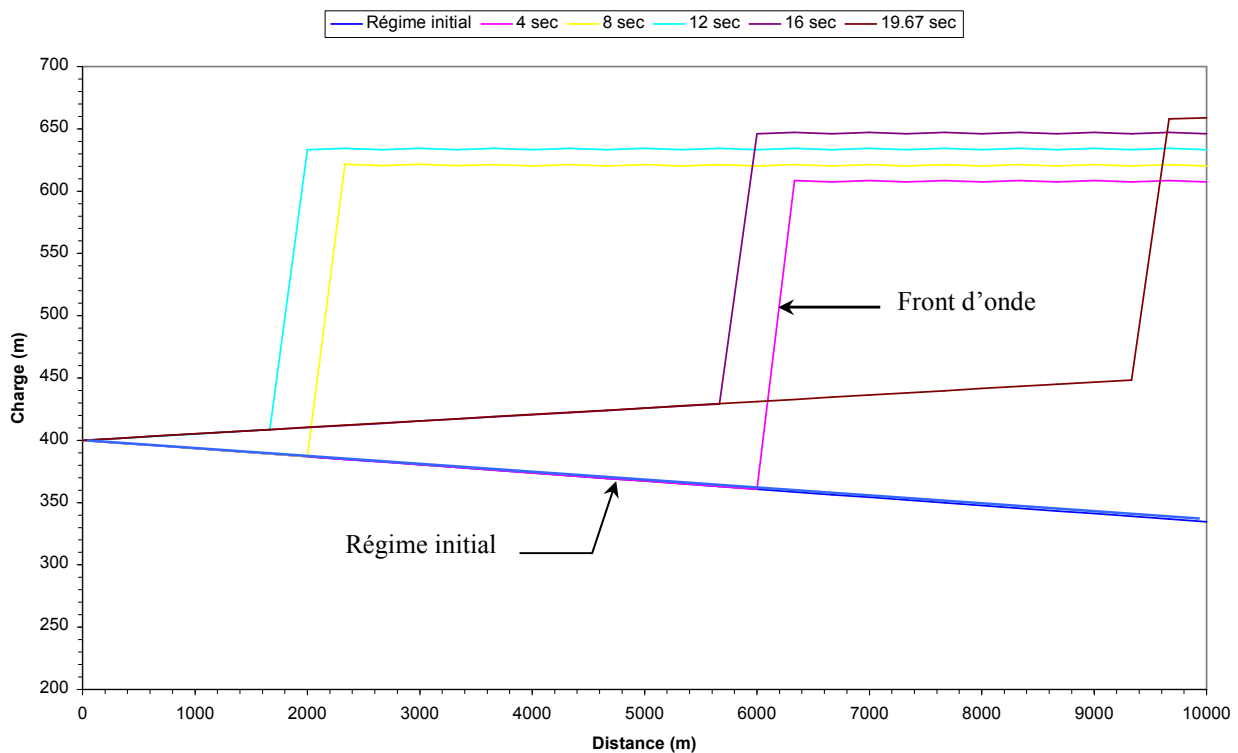
➤ **Cas avec pertes de charge :**

En introduisant dans le système hydraulique la dissipation mécanique de l'énergie, matérialisée par les pertes de charge, la simulation de l'écoulement non permanent dans ce cas de figure fait ressortir les résultats reportés sur la figure (VI.5). Le calcul de la perte de charge est accompli par l'emploi de la formule explicite du coefficient de frottement issue de la théorie de la *MMR* (Méthode du modèle rugueux) proposée par *Achour* (2007, 2012).



**Figure (VI.5) :** Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture brusque, avec pertes de charge)

Dans ce cas d'analyse, et sur le plan physique du phénomène, l'examen du diagramme des charges en fonction du temps enregistré à l'obturateur par les différents schémas numériques, montre qu'au temps 0 la surpression s'établit instantanément comme dans le cas précédent mais à partir de la charge 334,63 m, du fait des pertes de charge en régime initial. Cependant, au même temps que l'onde s'éloigne vers le réservoir, la charge augmente progressivement derrière l'opercule de l'obturateur pour atteindre son maximum au moment juste du retour de l'onde en ce point, donnant lieu à une surpression totale supérieure à  $aV_0/g$  que l'on avait auparavant. En reportant les valeurs moyennées sur chaque cellule de calcul le long de la conduite, on peut donc reproduire l'avancée du front d'onde en phase de surpression, ce qui permet d'explicitier ce constat (Figure (VI.6)).



**Figure (VI.6) :** Avancée du front d'onde en fonction du temps (méthode des volumes finis)

Ce phénomène d'augmentation de la surpression, qui est rapporté par plusieurs auteurs (Wylie et Streeter, 1978 ; Tullis, 1989 ; Larock et al., 2000) est dû à l'état de non équilibre régnant au sein de la conduite. Quoique la vitesse du fluide soit nulle, et par suite du gradient de charge initial, un petit débit descendant se développe pour éliminer ce gradient et introduit le système en équilibre dynamique. Ce processus d'ajustement continue jusqu'à ce qu'il soit interrompu par l'onde de dépression (au delà de la 20<sup>ème</sup> seconde). A l'obturateur, cet

ajustement cumulatif de charge avoisine numériquement la valeur de la perte de charge d'équilibre en régime initial dans la conduite. Le même phénomène se reproduit en phase de dépression où l'on observe une diminution progressive de la charge en chaque point après le passage du front d'onde.

Ayant atteint les maxima de surpression et dépression après la première période du phénomène (excepté le schéma de *MacCormack*), les valeurs enregistrées par les schémas numériques pour ce cas d'étude sont alors reportées sur la tableau (VI.3).

**Tableau (VI.3) : Résultats de simulation du Test I (avec pertes de charge)**

<i>Paramètres</i>	<i>Méthode de simulation numérique</i>			
	<i>Godunov</i>	<i>Richtmyer L-W</i>	<i>MacCormack</i>	<i>MOC</i>
<i>Charge maximale (m)</i>	658,975	658,975	658,338	657,209
<i>Charge minimale (m)</i>	184,939	184,939	178,46	186,364
<i>Période (s)</i>	40	40	40	40

Ces résultats mettent ainsi en relief des écarts relatifs dans les valeurs calculées par les différents schémas, aussi bien en surpression qu'en dépression. Nous constatons alors que les schémas aux volumes finis de *Godunov* et de *Richtmyer L-W* retracent les mêmes résultats et révèlent une charge maximale de 658,975 m et minimale de 184,939 m et ceci avec monotonie de la solution, c'est-à-dire sans diffusion ou dispersion numérique étant donné que le nombre de *Courant*  $C_r = 1$ . La méthode des caractéristiques (MOC) cependant, dévie de ces résultats de 0,27% et 0,77% en phase de surpression et de dépression respectivement. Comme les schémas aux volumes finis, la méthode des caractéristiques manifeste une solution régulière durant la durée de simulation.

Le schéma aux différences finies de *MacCormack* quant à lui approche la solution des volumes finis en première phase de surpression avec une erreur de 0,097%, mais en phase succédant, c'est-à-dire en dépression, il creuse l'écart avec ces résultats de plus de 3,5%. Il est alors facile de voir sur la figure (VI.5) que la raison est due à l'instabilité numérique qui se manifeste au-delà de la première demi période du phénomène transitoire. Cette forte oscillation numérique fait perdre au schéma la monotonie de la solution et s'accroît en fonction du temps jusqu'à divergence totale du schéma de *MacCormack*.

Par ailleurs, on constate que la période du phénomène transitoire calculée par l'ensemble de ces schémas reste inchangée et ceci à chaque cycle. Ceci revient à la constance

de la célérité de l'onde dans le temps, c'est-à-dire du point de vue mathématique, et à l'opposé des écoulements à surface libre, une linéarité de la fonction de flux.

Comme le constate-t-on, la différence relative des résultats obtenus, à l'opposé du cas étudié précédemment (sans perte de charge), revient principalement à la technique de traitement du terme source et à la précision du schéma numérique. Une comparaison rigoureuse à un résultat analytique exacte (comme au précédent cas) étant indisponible, dans la mesure où l'on se heurte à la non linéarité du terme source. Des modèles analytiques reposant sur l'hypothèse de linéarisation des pertes de charge sont cependant présentés par *Sobey* (2004) en terme de séries infinies, mais ceux-ci sont pratiquement inutilisables du fait de leur inextricable formulation mathématique et l'hypothèse de linéarité du terme de frottement laquelle induirait des erreurs conséquentes dans notre cas.

Dans la méthode des caractéristiques (MOC), les pertes de charge sont introduites directement dans les équations de compatibilité et seulement au premier ordre. D'après *Wylie et Streeter* (1978), cette méthode et pour des réseaux à forte prépondérance des pertes de charge risque d'aboutir à des résultats non fiables et un passage au deuxième ordre de précision est alors exigé. A l'opposé, le schéma de *MacCormack* traite les équations du mouvement sous sa forme complète avec le terme source. Subséquemment, et suite à la non linéarité de ces équations dans ce cas, un phénomène de dispersion numérique apparaît dans la solution. Ce phénomène est inhérent aux schémas dont la précision est de deuxième ordre, par conséquent des dérivées de troisième ordre prédominent l'erreur de troncature (*Fennema et Chaudhry, 1986*), on observe alors l'effet dispersif dans la solution et le front d'onde n'est plus correctement décrit (Figure (VI.7)) comme par la méthode des volumes finis.

Les résultats que l'on vient d'obtenir ici mettent en exergue la supériorité des schémas aux volumes finis comparés aux méthodes classiques aux différences finies et aux caractéristiques, quoique le schéma de *Godunov* et celui de *Richtmyer L-W* soient précis seulement au premier ordre. On attribuerait cette supériorité à la technique de résolution de base qui revient à résoudre de manière exacte l'équation du mouvement (sans terme source) par la prédiction adéquate des flux, puis à intégrer le terme source dans le temps par la technique du pas fractionné de *Runge-Kutta* à l'ordre 2. Ceci confère à la solution une meilleure précision, stabilité et convergence.

Le report de ces résultats sur le repère tridimensionnel  $(H, x, t)$ , permet de voir le phénomène de propagation d'onde accompagné de l'atténuation provoquée par les pertes de charge (Figure (VI.8)).

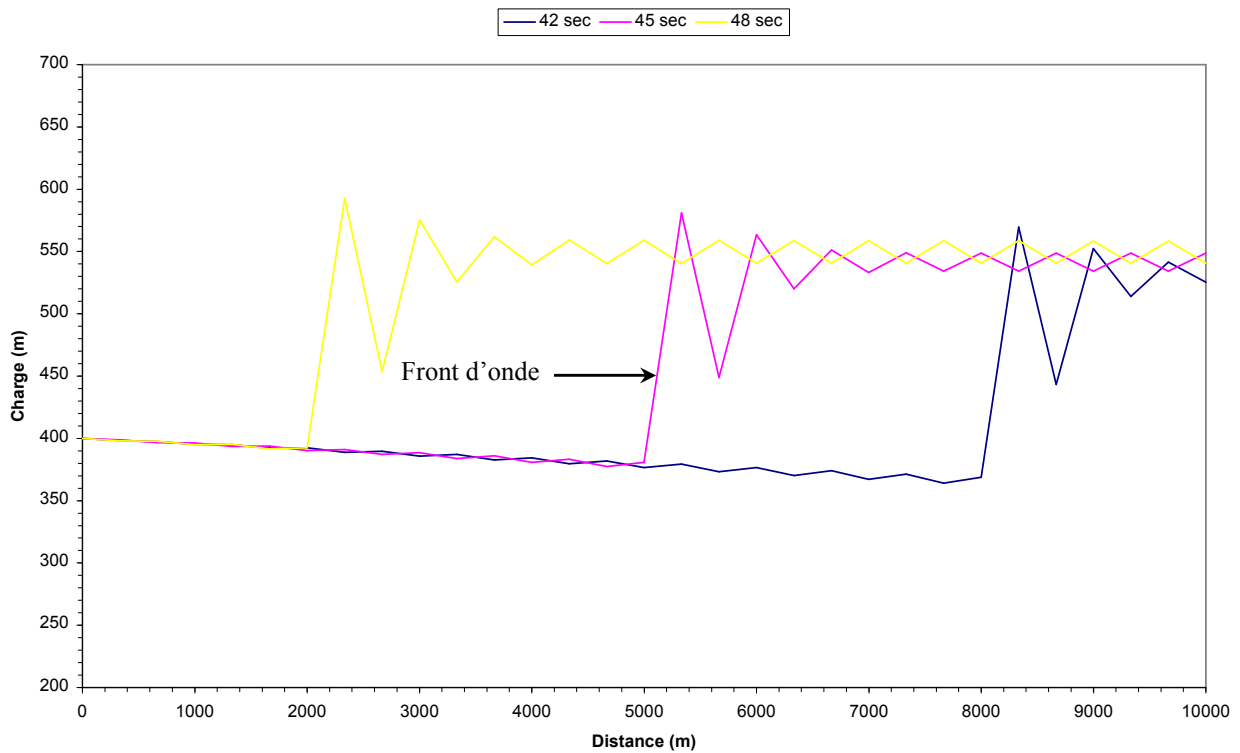


Figure (VI.7) : Avancée du front d'onde et dispersion numérique (schéma de MacCormack)

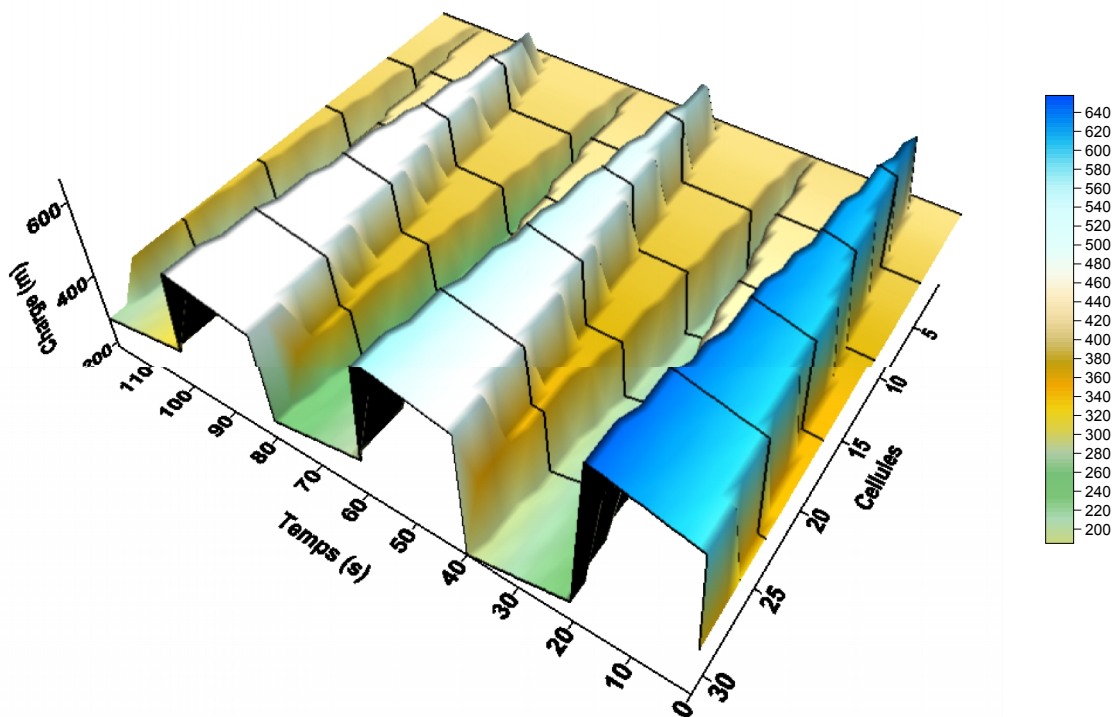


Figure (VI.8) : Vue axonométrique de la variation de la charge en fonction de l'espace-temps (fermeture brusque - avec pertes de charge)

### VI.2.2. Test II : Fermeture lente de l'obturateur

Nous simulerons à présent un autre type de fermeture pouvant se présenter comme source du régime transitoire, lequel est le plus courant en pratique, c'est la fermeture lente. Dans ce cas, l'orifice de l'obturateur, au lieu de se fermer instantanément au temps 0, il ne sera totalement fermé qu'au bout d'un temps supérieur à  $2L/a$ . La loi de fermeture sera telle que le débit décroisse linéairement en fonction du temps. Ce choix se justifie par le souci de valider les résultats numériques avec la solution analytique du problème (cas sans pertes de charge) donnée par les séries enchaînées d'*Allievi* (*Jaeger, 1933*).

La simulation est faite sur la base des paramètres suivants :

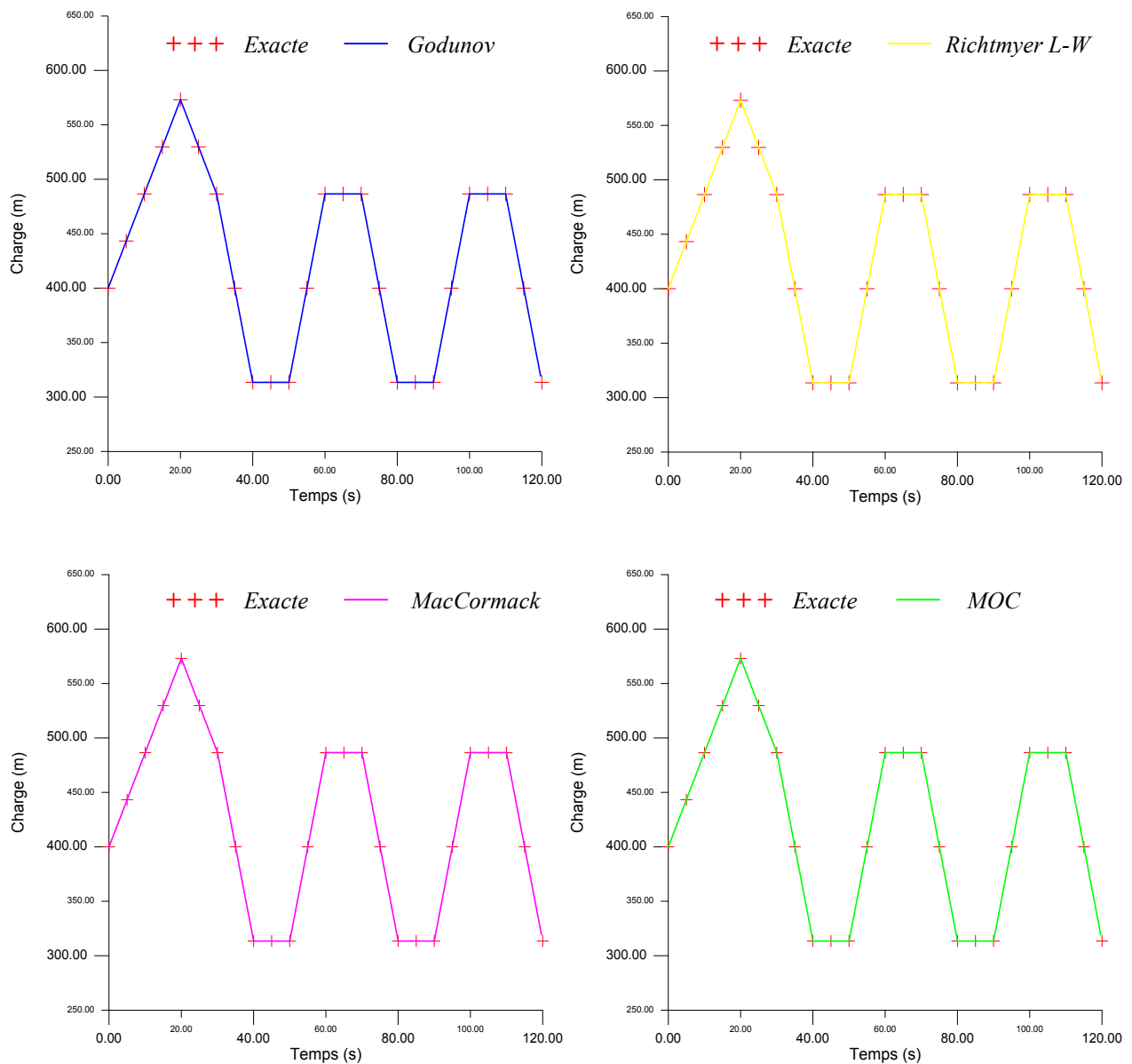
- Temps de fermeture de la vanne :  $T_F = 30$  s ;
- Durée de la simulation :  $t_s = 120$  s ;
- Discrétisation de la conduite :  $N = 30$  tronçons ;
- Pas de temps de calcul :  $\Delta t = 0,33\bar{3}$  s ;
- Nombre de *Courant* :  $C_r = 1$ .

➤ **Cas sans pertes de charge :**

La figure (VI.9) donne la variation de la charge en fonction du temps à l'opercule de l'obturateur, issue des résultats de la simulation par les différents schémas numériques.

Immédiatement à l'obturateur, l'augmentation de la charge s'amorce dès que la manœuvre de fermeture de la vanne a lieu au temps 0. A partir de ce moment, la surpression croît linéairement en fonction du temps tout à fait comme l'annulation du débit en ce lieu jusqu'à marquer la valeur maximale de la charge qui s'élève à  $573,14$  m au temps  $t = 20$  s. Ce temps qui est de  $2L/a$ , correspond en effet au temps pris par la première onde incidente de la fermeture partielle afin de parcourir la conduite jusqu'à son extrémité (réservoir) pour revenir ensuite sous forme d'onde réfléchie à la vanne. Cette première onde ainsi réfléchie vient se composer avec les ondes générées à présent à la vanne qui n'a pas encore achevé sa fermeture, pour empêcher la surpression en ce lieu d'atteindre sa valeur la plus grande qui est de  $aV_0/g$  comme le précédent cas.

A partir de ce temps, la charge diminue pour atteindre son minimum de  $313,43$  m au temps  $t = 40$  s. Ensuite la pression croît de nouveau avec la même allure pour retrouver la surpression initiale, mais au temps  $t = 60$  s cette dernière se trouve laminée par suite de l'interférence avec les ondes réfléchies du bassin. La périodicité du phénomène commence alors à partir de ce moment pour rester indéfiniment pour cause d'absence de frottement.



**Figure (VI.9) :** Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture lente, sans pertes de charge)

La surpression maximale au point  $x = L$  résultant de cette fermeture est alors  $\xi_{\max} = 173,14 m$ , résultat semblable fourni par la résolution analytique des séries enchaînées d'*Allievi* qui donne une valeur maximale de  $173,05 m$ , soit 0,05 % d'écart relatif. On peut alors constater à partir de ces résultats que l'amplitude des ondes de dépression et de surpression n'est la même qu'après la fermeture complète de la vanne.

Les résultats numériques que l'on vient d'obtenir manifestent une parfaite concordance avec la solution exacte du problème. Ceux-ci sont portés alors dans le tableau (VI.4) pour les différents schémas numériques concourant à la résolution du problème posé.

Tableau (VI.4) : Résultats de simulation du Test II (sans pertes de charge)

Paramètres	Méthode de simulation numérique			
	Godunov	Richtmyer L-W	MacCormack	MOC
Charge maximale (m)	573,141	573,141	573,141	573,141
Charge minimale (m)	313.429	313.428	313.429	313.429
Période (s)	40	40	40	40

Remarquons une fois de plus que pour la simulation sans pertes de charge dans le système hydraulique, les résultats des méthodes de calcul numérique employées ici se superposent et présentent une solution régulière monotone sur l'ensemble du temps de simulation. L'abstraction du terme source, non linéaire, dans les équations du mouvement procure à ces dernières la caractéristique de linéarité et fait que pour un nombre de *Courant* unité, aucune diffusion ou dispersion numérique n'entache la solution.

Pour les schémas aux volumes finis de *Godunov* et de *Richtmyer L-W*, les résultats mettent en relief une particularité très importante. Bien que le modèle mathématique de prédiction des flux intercellulaires soit différent pour les deux schémas, le premier reposant sur une solution exacte du problème de *Riemann* et le second sur une solution numérique à double pas, la congruence des résultats nous révèle que pour des équations linéaires les deux approches de prédiction des flux sont en fait indifférentes. Par conséquent, le seul critère de choix entre ces schémas reviendrait aux volumes des calculs et le temps d'exécution qu'induiraient ces derniers pour la résolution du problème. Dans le cas d'absence d'une solution exacte au problème de *Riemann*, le schéma de *Richtmyer L-W* offrirait alors une très bonne alternative.

Les résultats issus de la méthode des volumes finis sont donnés en représentation tridimensionnelle faite précédemment pour les charges et pour les débits (Figures (VI.10) et (VI.11)). Ceci retrace une image complète du phénomène résultant de cette manœuvre. A mesure que l'on s'éloigne de la vanne, la figure (VI.10) montre que la surpression maximale diminue linéairement en fonction de l'espace durant la première période du phénomène. Passé ce temps, cette répartition cesse d'y être du fait de l'interférence des ondes. Le débit quant à lui subit le même fait mais dans le sens inverse, il diminue linéairement en fonction du temps en chaque point de la conduite suivant que l'onde véhiculant l'information arrive en ce lieu, pour ainsi osciller avec une même amplitude une fois la vanne totalement fermée.



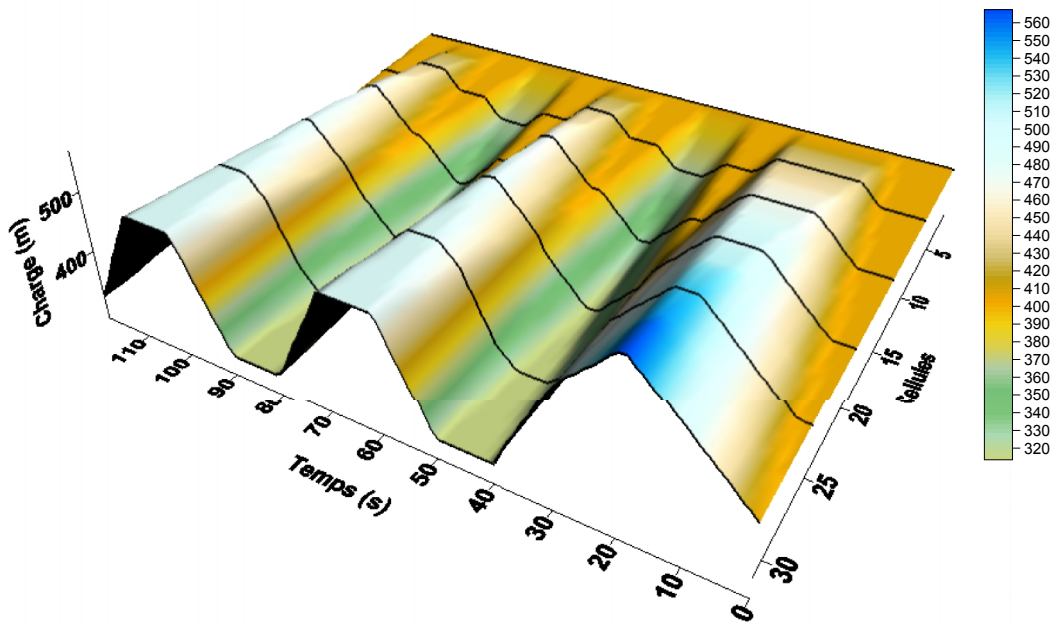


Figure (VI.10) : Vue axonométrique de la variation de la charge en fonction de l'espace-temps (fermeture lente - sans pertes de charge)

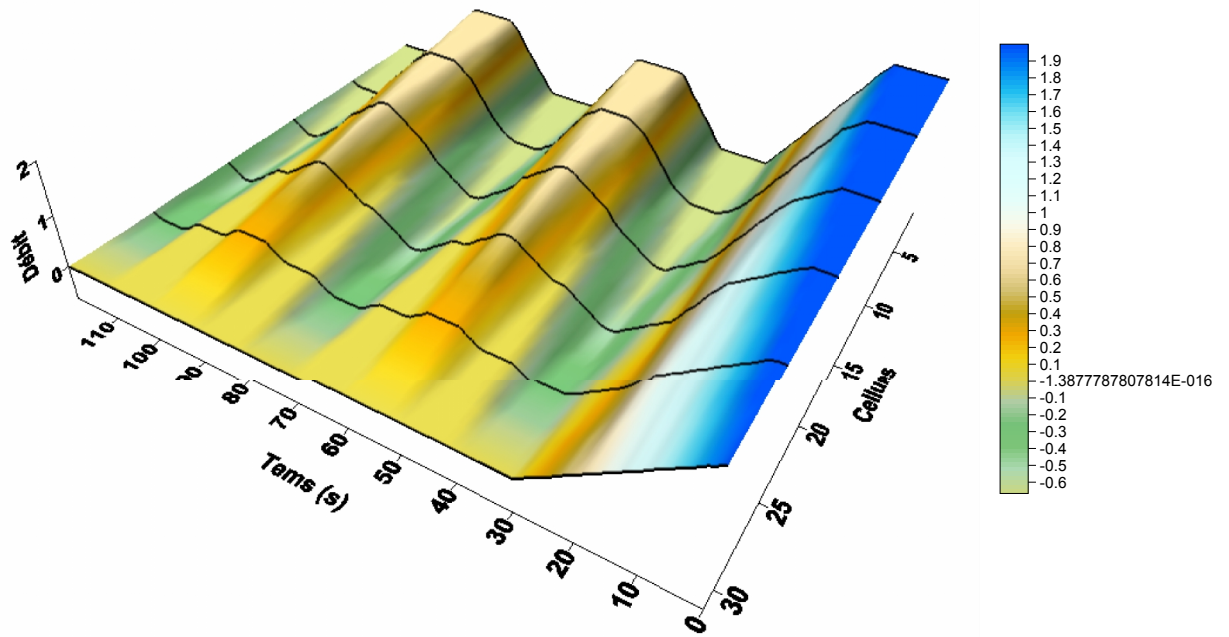
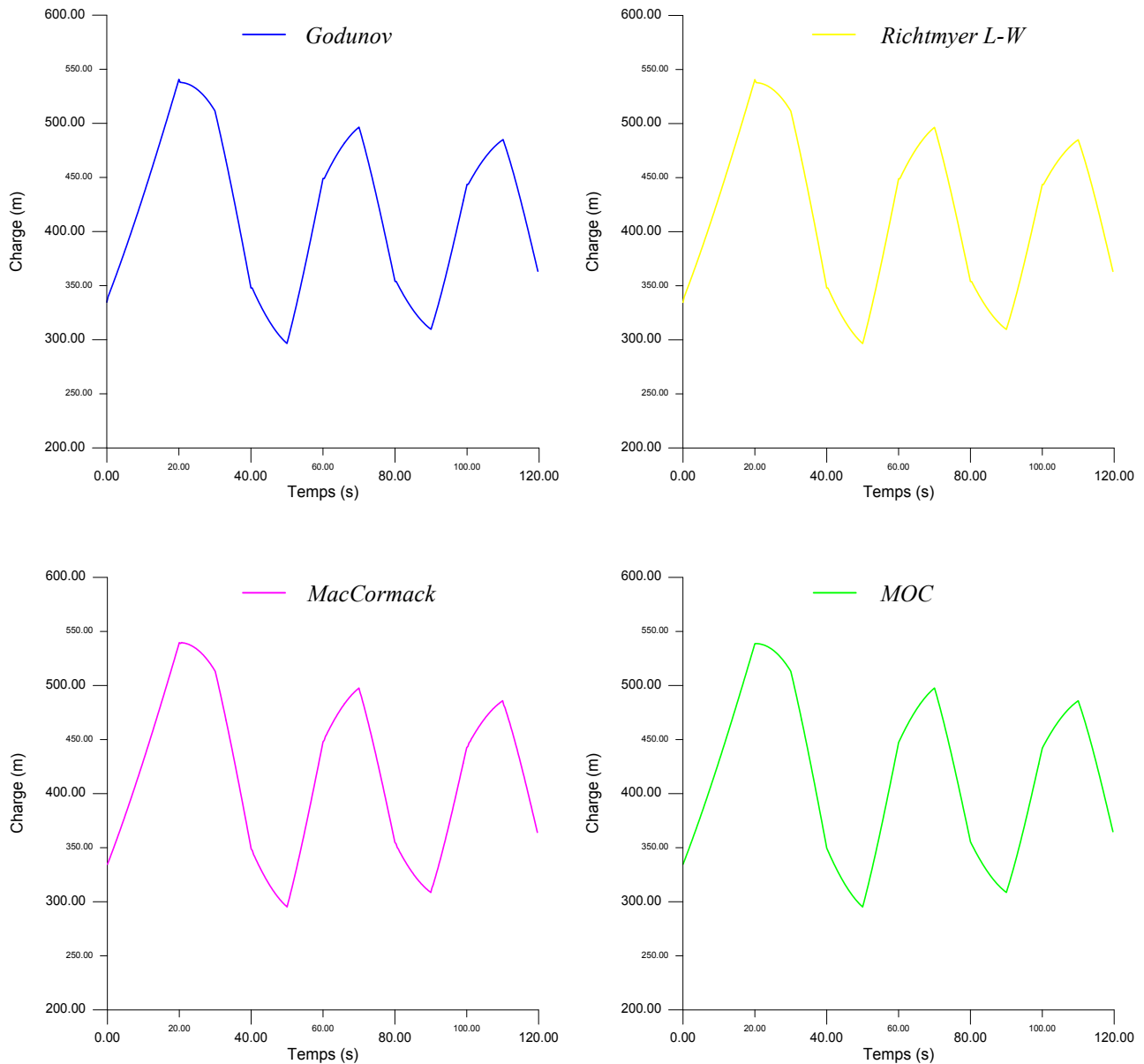


Figure (VI.11) : Vue axonométrique de la variation des débits en fonction de l'espace-temps (fermeture lente - sans pertes de charge)

➤ Cas avec pertes de charge :

Ayant incorporé les pertes de charge dans la simulation numérique, les résultats obtenus à l'issue de cette dernière sont mis en graphes (Figure (VI.12)) pour les schémas numériques mis en banc d'essai.



**Figure (VI.12) :** Variation temporelle de la charge à l'obturateur (fermeture lente, avec pertes de charge)

Comme il en est le cas pour la fermeture brusque, les pertes de charge font augmenter sensiblement la surpression totale sans pour autant dépasser la charge maximale en absence de pertes de charge. Par rapport au régime initial régnant à l'obturateur ( $x = L$ ), la surpression totale atteint  $206,11 \text{ m}$ , soit une augmentation de  $32,97 \text{ m}$  comparée au précédent cas.

Mais cette augmentation, due aux mêmes causes qu'on a vu (effet d'ajustement cumulatif), ne peut faire grimper la charge jusqu'à atteindre la valeur obtenue en cas sans friction, elle se limite ainsi à  $540,73 \text{ m}$ , soit  $32,41 \text{ m}$  de moins. Cependant, ce gain en phase de surpression n'est pas sans conséquence en phase lui succédant, c'est-à-dire en dépression. En effet, durant cette phase la charge minimale frôle la valeur de  $296,49 \text{ m}$ . N'étant que de  $313,429 \text{ m}$  en absence des pertes de charge, cette valeur se voit en baisse de près de  $16,94 \text{ m}$ . En pratique, ceci poserait des problèmes dans la mesure où l'enveloppe des dépressions se trouverait rabaissée davantage si l'on considère les pertes de charge dans le système, et suivant le profil marqué par la conduite, on risquerait de voir cette enveloppe écrêter certains points du profil.

L'analyse des diagrammes des charges en fonction du temps dans les deux cas de ce test font révéler que ces maxima et minima sont atteints durant les mêmes instants, avec toutefois un effet de chanfrein dû à la dissipation de l'énergie. Passé un certain temps, l'effet de perte d'énergie des ondes itinérants fait que les pics des pressions en fonction du temps soient laminés à chaque cycle du phénomène, ce qui permet alors au système hydraulique de reprendre un état d'équilibre après un certain temps. Nous synthétisons les résultats de la simulation numérique pour ce cas d'étude dans le tableau (VI.5) ci-dessous.

**Tableau (VI.5) : Résultats de simulation du Test II (avec pertes de charge)**

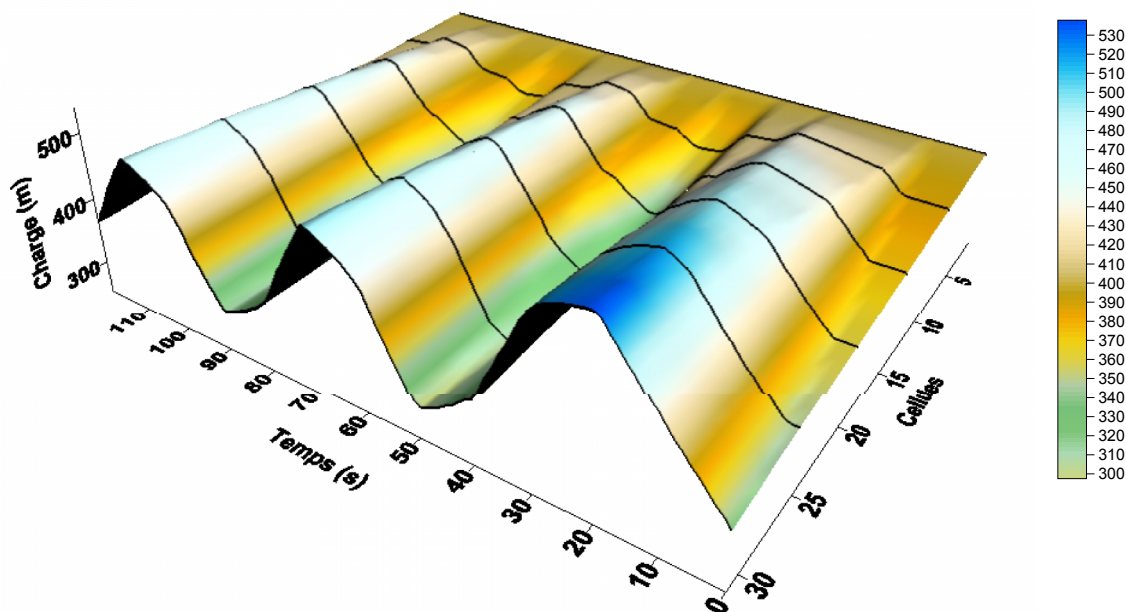
<i>Paramètres</i>	<i>Méthode de simulation numérique</i>			
	<i>Godunov</i>	<i>Richtmyer L-W</i>	<i>MacCormack</i>	<i>MOC</i>
<i>Charge maximale (m)</i>	540,733	540,733	539,828	538,774
<i>Charge minimale (m)</i>	296,493	296,493	295,134	295,159
<i>Période (s)</i>	40	40	40	40

L'examen de ces résultats montre alors l'effet de discrétisation spatiale et temporelle des équations du mouvement, dans ce cas non linéaires, sur la résolution numérique du problème. Nous constatons, similairement au précédent test, que les schémas aux volumes finis de *Godunov* et de *Richtmyer L-W* se superposent parfaitement et manifestent un même comportement numérique, en d'autre terme aucune diffusion numérique n'y surgit.

A l'opposé, le schéma aux différences finies de *MacCormack* montre une solution régulière monotone sur toute la durée de simulation, contrairement au précédent test où une forte oscillation numérique dans la solution a été enregistrée. Cela revient en fait à la nature physique du problème. Pour une fermeture lente de l'obturateur, la variation du régime

d'écoulement dans le temps est graduelle, par conséquent il ne se produit pas une onde à front raide où une discontinuité d'état pourrait se présenter. Il est connu des schémas numériques de deuxième ordre, à l'image de celui de *MacCormack*, qu'ils introduisent une dispersion numérique au voisinage d'un fort gradient spatial (*Fennema et Chaudhry, 1990 ; Rahman et Chaudhry, 1998*) tel le cas des ondes à front abruptes par suite d'une fermeture brusque d'une vanne par exemple. Dans ce test, bien que le terme de frottement provoque la non linéarité des équations, la nature des ondes ainsi créées à l'obturateur ne laisse manifester des oscillations numériques. Les résultats ainsi obtenus par ce schéma sont satisfaisants et ne s'écartent que de 0,17% en surpression et de 0,46% par rapports aux schémas des volumes finis en phase de dépression, avec évidemment une même période calculée du phénomène.

En dernier lieu, la méthode des caractéristiques (MOC) quant à elle, aboutit à des résultats analogues aux autres schémas mais toutefois avec un écart relatif de 0,36% et de 0,45% durant les deux phases respectivement par rapport aux volumes finis. Remarquons cependant qu'en phase de dépression, le schéma de *MacCormack* et la méthode des caractéristiques se recourent presque les résultats de simulation avec une différence de près de 0,008%. Ceci est en raison de l'effet de diminution des pertes de charge où celles-ci se font moins ressentir durant cette phase, et les deux méthodes réduisent alors leurs écarts.



**Figure (VI.13) :** Vue axonométrique de la variation de la charge en fonction de l'espace-temps (fermeture lente - avec pertes de charge)

La figure (VI.13) reconstitue donc l'évolution spatio-temporelle  $H(x,t)$  du phénomène en présence des pertes de charge. Il s'ensuit que la présence de l'incorporation de la dissipation d'énergie, comme pour le test 1, conduit à l'affaiblissement progressif des ondes donnant lieu à une usure du coup de bélier initial. La durée du régime transitoire est alors inversement proportionnelle aux pertes de charge du régime permanent.

### VI.2.3. Conclusions des deux tests

La confrontation des résultats simulés avec les différents schémas numériques sur les deux types de manœuvres des obturateurs, permet de faire les conclusions suivantes :

1. Pour des simulations sans pertes de charge, les schémas numériques aboutissent aux mêmes résultats en phase de surpression et celle de dépression. Dans ce cas, la solution numérique recoupe les résultats analytiques (solution exacte) du problème du fait du caractère linéaire des lois de conservations hyperboliques gouvernant l'écoulement. Pour un nombre de *Courant* unité, les schémas numériques aux volumes finis et aux différences finies réussissent à capturer le choc et manifestent une solution régulière monotone sans dissipation ou dispersion numérique ;
2. L'incorporation du terme source dans les équations du mouvement, c'est-à-dire la simulation avec pertes de charge dans le système, fait ressortir des écarts relatifs dans les solutions numériques. Abordant différemment la technique de résolution des lois de conservations et le traitement du terme source, la supériorité des résultats numériques revient aux schémas aux volumes finis (*Godunov* et *Richtmyer L-W*) comparés aux autres méthodes. Dans ce cas, le schéma de *MacCormack* échoue dans la capture du choc en raison de l'instabilité numérique (phénomène de dispersion) et un traitement particulier par viscosité artificielle est alors nécessaire pour lisser la solution (*Rahman* et *Chaudhry*, 1995) ;
3. Dans le cas de variation graduelle de l'écoulement, les différences relatives des schémas se voient réduites comparées aux cas de variation abrupte. En effet, les changements progressifs du mouvement n'induisent pas d'ondes à front raide et par conséquent aucun choc dans le système n'est introduit. Dans ce cas, la différence enregistrée entre les schémas numériques revient à la technique d'incorporation du terme source et où la méthode des volumes finis se distingue par sa précision. Toutefois, signalons que certaines manœuvres lentes mais non linéaires conduiraient à l'apparition de choc en fin de course, d'où une attention particulière doit lui être accordée. Il est alors conseillé d'opter pour les schémas aux volumes finis.

### VI.3. Application II : Conduite élévatoire protégée par ballon anti-bélier

Appelé parfois cloche ou réservoir d'air, ce dispositif anti-bélier a reçu un vaste champ d'application et un emploi intensif dans la protection des conduites d'élévation. Par suite des avantages innombrables qu'il présente et ses performances, le ballon anti-bélier est devenu d'une utilisation quasi systématique dans les stations de pompage.

La présente application se donne comme objectif d'étudier le phénomène du coup de bélier survenant sur une conduite élévatoire protégée par un réservoir d'air. Le modèle numérique basé sur la méthode des volumes finis (*Godunov*) ainsi élaboré, est testé dans une étude de cas réel appuyée par des mesures expérimentales données par *Purcell* (1997). Celles-ci étant effectuées sur une station de pompage en Irlande protégée par un ballon anti-bélier. Les résultats obtenus sont alors confrontés, analysés et comparés en parallèle avec la méthode des caractéristiques (MOC). La simulation numérique portera sur l'analyse du régime transitoire naissant par suite de la disjonction du groupe motopompe d'exhaure pour les deux cas suivants :

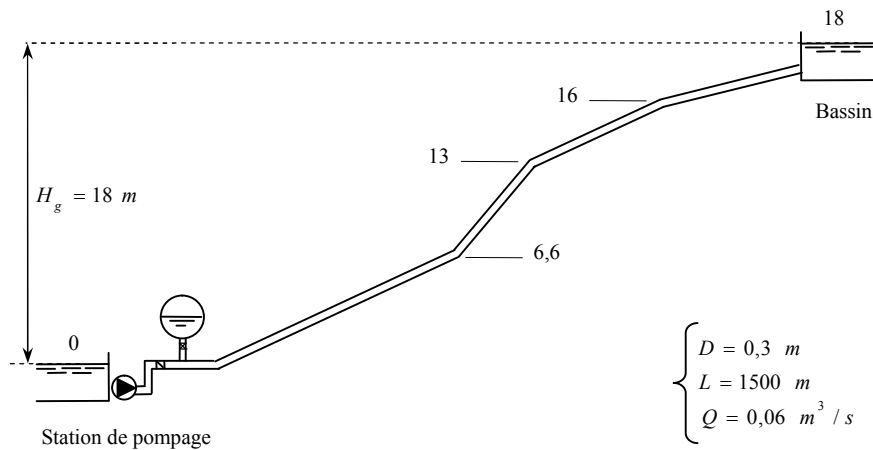
- Ballon anti-bélier sans étranglement à sa base ;
- Ballon étranglé en sa base à 80 % au moyen d'une vanne.

Ces analyses mettront en relief l'influence de l'étranglement mis en œuvre dans la pratique sur la dynamique transitoire du circuit, et les dimensions du dispositif anti-bélier et l'allure du front d'onde qui en résulterait.

#### VI.3.1. Description de l'installation étudiée

Le cas d'étude que nous avons choisi ici est une station de pompage classique munie pour sa protection anti-bélier, d'un réservoir à air comprimé. La station d'exhaure localisée à l'avenue Vernon à Dublin (Irlande) concourt à l'élévation des eaux sur un linéaire de 1,5 km vers un bassin d'accumulation à une dénivellation de 18 m, lesquelles seront conduites gravitairement vers une station de traitement. Un schéma simplifié de l'installation est alors donné sur la figure (VI.14).

Un calcul préliminaire a alors montré qu'en phase transitoire la pression pouvait atteindre la tension de vapeur et créer par conséquent une cavitation et rupture de la veine liquide sur un linéaire considérable de la conduite (*Purcell, 1997*). Il a été alors recommandé d'installer un ballon anti-bélier pour pallier à ce problème et protéger le système. Les mesures expérimentales de coup de bélier ont été effectuées sur l'installation grâce à un transducteur piezo-résistif relié à un appareillage d'enregistrement spécifique. Le point d'enregistrement des pressions a été entre le clapet anti-retour et le ballon anti-bélier.



**Figure (VI.14) :** Schéma simplifié de l'installation de refoulement (Purcell, 1997)

Les données techniques de l'installation de pompage sont résumées dans le tableau (VI.6) ci-dessous. Sur ce tableau, sont données les caractéristiques hydrauliques de la conduite de refoulement conjointement avec celles relatives au réservoir anti-bélier.

**Tableau (VI.6) :** Données de l'installation de pompage (Purcell, 1997)

<b>Conduite de refoulement</b>	
Hauteur géodésique de refoulement ( $H_g$ )	18 m
Débit refoulé	0,06 m <sup>3</sup> /s
Diamètre de la conduite	0,3 m
Epaisseur	8 mm
Longueur	1500 m
Coefficient de frottement ( $\lambda$ )	0,025
Célérité des ondes	1 000 m/s
Pression maximale admissible	67 m
<b>Ballon anti-bélier</b>	
Volume initial d'air (en régime permanent)	0,4 m <sup>3</sup>
Section transversale	0,63 m <sup>2</sup>
Niveau d'eau au dessus de l'axe de la pompe	3,5 m
Diamètre de la tubulure de raccordement	0,15 m

Il a été alors constaté qu'à la suite d'arrêt brusque des pompes, le phénomène de coup de clapet était d'une ampleur remarquable. Dans l'optique de remédier à ce problème, il a été

décidé d'équiper le ballon anti-bélier à sa base d'une vanne d'étranglement capable d'opérer sur le débit de sortie de ce dernier, responsable du plaquage violent du clapet sur son siège. Des essais ont été conduits quant au choix du degré d'étranglement de la vanne pour l'élimination de ce phénomène contraignant où un degré de 80 % paraissait être le meilleur.

### VI.3.2. Test I : Réponse transitoire sans étranglement à la base du ballon (passage libre)

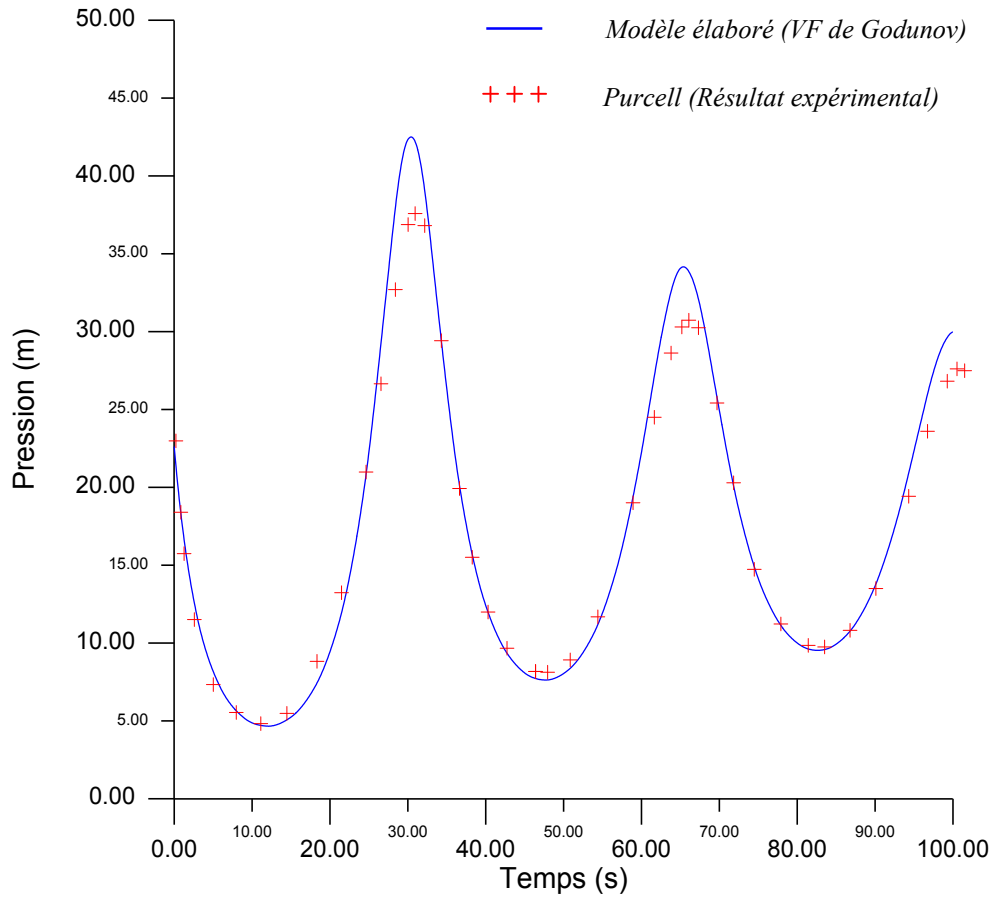
Cette analyse traite le scénario de déclenchement des pompes alimentant la conduite avec un ballon anti-bélier sans étranglement à sa base, c'est-à-dire l'entrée et sortie de l'eau dans ce dernier s'effectue sans pertes de charge. Le calcul ainsi effectué a pour base les paramètres suivants :

- Durée de simulation :  $t_s = 100 \text{ s}$  ;
- Discrétisation de la conduite :  $N = 20$  biefs ;
- Exposant polytropique :  $\gamma = 1,35$ .

Sur la figure (VI.15), sont portés les résultats du calcul numérique par le modèle numérique aux volumes finis de *Godunov* ainsi que les mesures expérimentales obtenues par *Purcell* (1997). Ceux-ci traduisent la variation de la pression au droit du réservoir anti-bélier en fonction du temps. Il peut être vu qu'aussitôt après le déclenchement des pompes au temps 0, la pression tombe en dessous de la hauteur d'élévation, ce qui crée une dépression de proche en proche dans la conduite vers le réservoir sous forme d'ondes. Au bout d'un temps de 12,08 s après l'apparition du régime transitoire, on enregistre la pression minimale qui est de 4,66 m. Cette valeur obtenue par le modèle numérique (schéma de *Godunov*) coïncide avec celle découlant des mesures expérimentales données par *Purcell* (1997), qui est de 4,82 m, soit une congruence d'environ 99,08 % dans le calcul de la dépression.

A partir de cet instant, l'écoulement s'inverse dans la conduite avec une vitesse qui se voit en augmentation. La fermeture du clapet anti-retour (empêchant le dévirage de la pompe) fait accroître la pression qui est reprise par la compression de l'air dans la cloche, jouant dans ce cas le rôle d'un matelas amortisseur. La pression maximale calculée est alors de 42,50 m et ceci au temps 30,4 s. On constate à l'opposé du cas de dépression, que cette valeur est plus importante que celle enregistrée expérimentalement. Les mesures de *Purcell* (1997) font alors révéler une pression maximale de 37,59 m. Par conséquent, une erreur de 13,06 % entache les résultats numériques dans ce cas. La période du régime transitoire est donc de 35,92 s, au-delà de laquelle les valeurs que l'on vient d'enregistrer ne seront plus revues pour cause de l'intervention de l'effet de frottement dans le système.





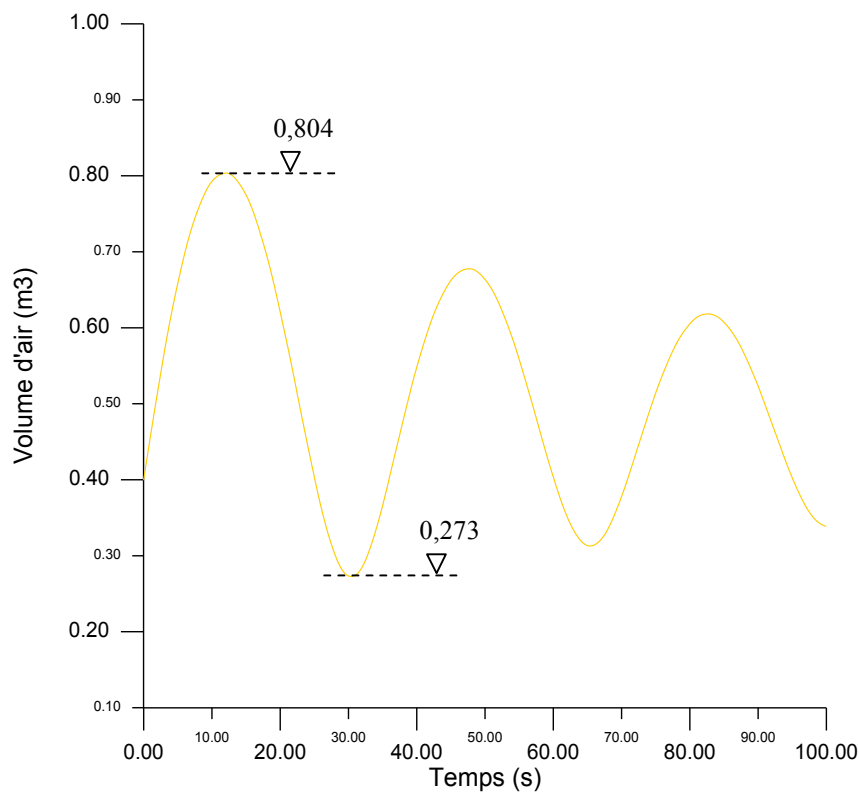
**Figure (VI.15) :** Variation temporelle de la pression au droit du ballon (sans étranglement)

Au vu des résultats reportés sur la figure (VI.15), on peut conclure que ceux obtenus par le modèle numérique aux volumes finis de *Godunov* sont concordants avec les mesures expérimentales données par *Purcell* (1997). Toutefois une légère différence est enregistrée entre les deux résultats au niveau des pics en phase de surpression où il apparaît clairement que le calcul numérique surestime les pressions obtenues réellement in-situ. Il est cependant à remarquer que cet écart noté se trouve réduit en fonction du temps. Excepté ces points singuliers, la solution numérique imite et reproduit fidèlement la réponse dynamique du système de pompage avec une superposition quasi parfaite des deux résultats.

On attribuerait cette différence des maxima des pressions aux conditions thermodynamiques régnant dans le processus d'échange thermique entre la phase liquide et gazeuse dans le ballon d'air. En effet, ceci a été rapporté par certains auteurs à l'image de *De Almeida* et *Koelle* (1992) qui ont affirmé par expérimentation que l'exposant polytropique  $\gamma$  varie sensiblement au cours du régime transitoire. Il a été ainsi vérifié par ces auteurs que pour  $\gamma > 1,2$ , le calcul numérique surestime les pressions comparativement à celles mesurées.

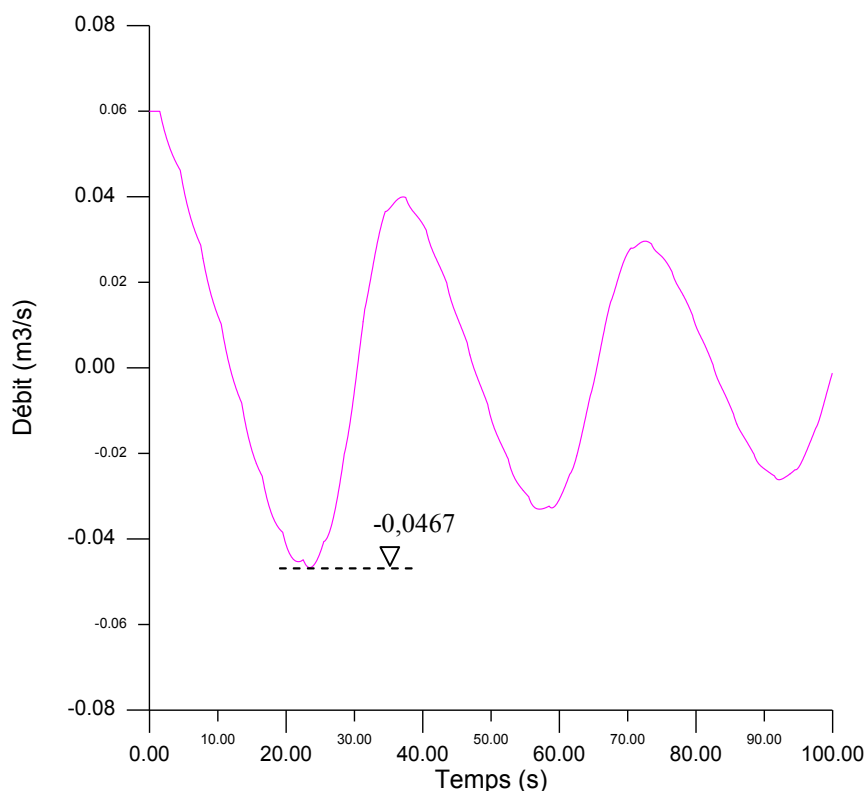
Cependant, pour des valeurs de  $\gamma$  proches de l'unité, ces derniers concluent que les pressions calculées se voyaient inférieures aux expérimentations durant toutes les phases du régime transitoire, avec un notable déphasage dans la période du phénomène. Ainsi, et dans ce genre d'étude, il est par conséquent difficile de prédire les conditions thermodynamiques (adiabatiques ou isothermiques) du processus. Un modèle mathématique plus complet sur le comportement thermodynamique a été proposé par *Graz* en 1972 (*De Almeida et Koelle, 1992*), mais ce modèle inclu des paramètres dont l'acquisition est très difficile. On peut conclure alors que la valeur  $\gamma = 1,35$  donnée par *Purcell* (1997) est très satisfaisante dans la mesure où une connaissance de la valeur réelle s'avère inaccessible.

Ceci dit, on reporte sur la figure (VI.16) ci-dessous les variations du volume d'air dans le ballon en fonction du temps. Sur cette figure, il apparaît que le volume d'air atteint un maximum de  $0,804 \text{ m}^3$  au même moment que la pression minimale a été enregistrée. Au moment de la surpression, le volume d'air se voit comprimé et touche à son minimum de  $0,273 \text{ m}^3$ , rigoureusement à l'instant où le maximum de la pression est atteint. Par conséquent, les deux mouvements sont en déphasage temporelle de  $\pi$ .



**Figure (VI.16) :** Variation du volume d'air du ballon en fonction du temps (sans étranglement)

Ainsi, ces oscillations effectuées par la colonne d'eau engendrent une fluctuation dans le débit arrivant au réservoir de refoulement, comme on le distingue sur la figure (VI.17) ci-dessous. Au lieu d'assister à des variations subites à front d'onde raide, le ballon anti-bélier a transformé le mouvement en une superposition de coups d'ondes et d'oscillations en masse avec un lissage franc des ondes à front raide.



**Figure (VI.17) :** Fluctuation du débit arrivant dans le réservoir de refoulement (sans étranglement)

Il est alors perceptible qu'au moment où l'air est au maximum de son volume, le débit arrivant au réservoir est rigoureusement nul, point d'équilibre dynamique du système. Ce débit s'inverse par la suite à la descente de l'eau pour prendre une valeur limite de  $0,0467 \text{ m}^3 / \text{s}$ , différente du débit maximum à plein régime, en raison de la dissipation mécanique de l'énergie.

Nous pouvons, à titre comparatif, résumer dans le tableau (VI.7) les résultats de simulation par le modèle élaboré aux volumes finis avec le schéma de *Godunov* avec ceux obtenus par la méthode des caractéristiques (MOC). Leur confrontation avec les résultats expérimentaux permettrait d'apprécier les différences intrinsèques de ces méthodes dans ce genre de problème.

**Tableau (VI.7) : Comparaison des mesures expérimentales et solution numérique (sans étranglement)**

<i>Méthode de calcul numérique</i>	<i>Pression maximale (m)</i>	<i>Pression minimale (m)</i>	<i>Volume d'air maximum (m<sup>3</sup>)</i>	<i>Volume d'air minimum (m<sup>3</sup>)</i>
Volumes finis ( <i>Godunov</i> )	42,505	4,658	0,804	0,273
Méthode des caractéristiques	42,451	4,672	0,803	0,273
<b>Mesures expérimentales</b>	37,591	4,823	-	-

Au vu de ces résultats, il apparaît clairement que les deux méthodes aboutissent pratiquement aux mêmes valeurs des pressions et volume d'air. Comme ceci a été remarqué dans l'application I, l'erreur relative maximale entre ces deux modèles numériques n'excède guère la barre de 0,3 %. Toutefois, en comparant les résultats issus du calcul numérique, on remarque que la méthode des caractéristiques (MOC) semble approcher mieux les résultats expérimentaux que ceux du schéma aux volumes finis de *Godunov*. Ceci, qui est à l'opposé de ce qui a découlé de la première application, crée une confusion et laisserait dire que la méthode des caractéristiques est plus précise.

Ce même constat a été mis en relief dans le remarquable travail de Doctorat de *Léon* (2007). Ce dernier a attribué en fait cette apparente supériorité au manque de rigueur dans l'estimation de la dissipation physique, qui dans ce cas est modélisée par l'approche classique du régime permanent, et souvent sous estimée. En effet, selon *Léon* (2007), il serait même fallacieux de comparer la précision des schémas numériques en se référant à l'expérimental, dans la mesure où une grande incertitude règne sur certains paramètres tels que les conditions thermodynamiques évoquées précédemment. A notre connaissance, et en plus des conclusions de *Léon* (2007), cette légère sous estimation des pressions dans la méthode des caractéristiques (par conséquent un rapprochement avec le résultat expérimental) est due au traitement numérique du terme source (terme dissipatif) dans la méthode. Ce dernier est au premier ordre seulement, alors qu'il est traité au second ordre (technique de *Runge Kutta*) dans le schéma aux volumes finis de *Godunov*. Cette sous-estimation a été clairement mise en exergue dans la première application.

La synthèse de l'évolution du phénomène dans le plan spatio-temporelle est alors donnée sur la figure (VI.18). Il est à constater que l'amplitude des ondes de surpression et de dépression diminue linéairement en avançant vers le bassin de refoulement à cause de l'interférence des ondes incidentes et réfléchies.

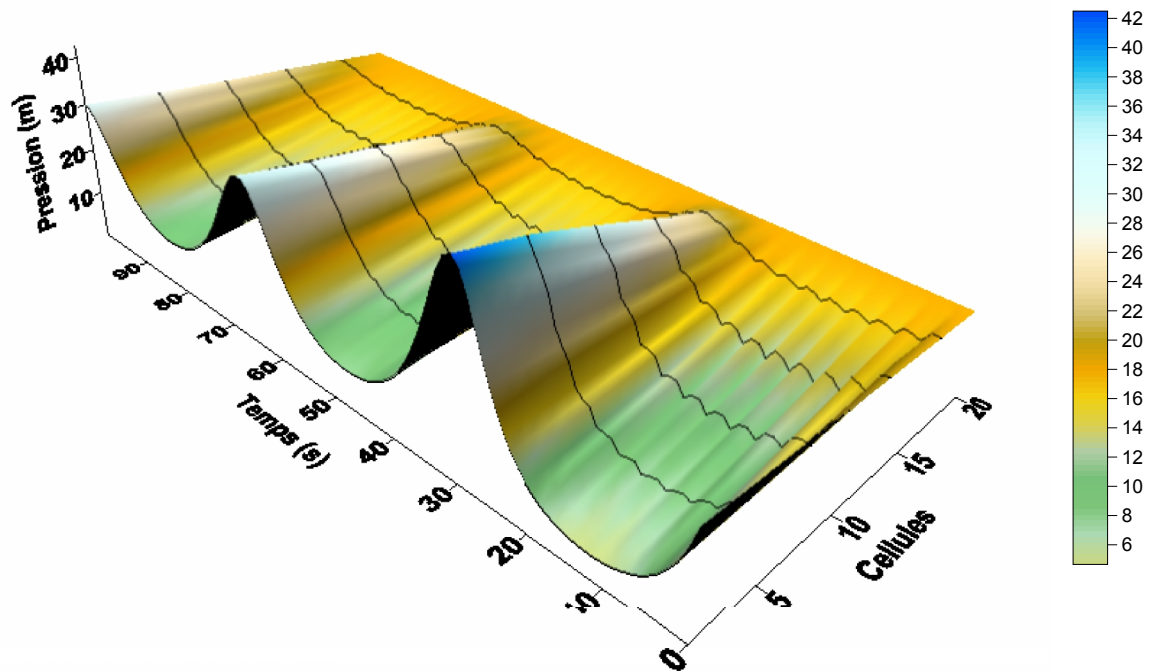


Figure (VI.18) : Vue axonométrique de la variation de la pression dans le plan spatio-temporel (sans étranglement)

### VI.3.3. Test II : Réponse transitoire avec étranglement à la base du ballon

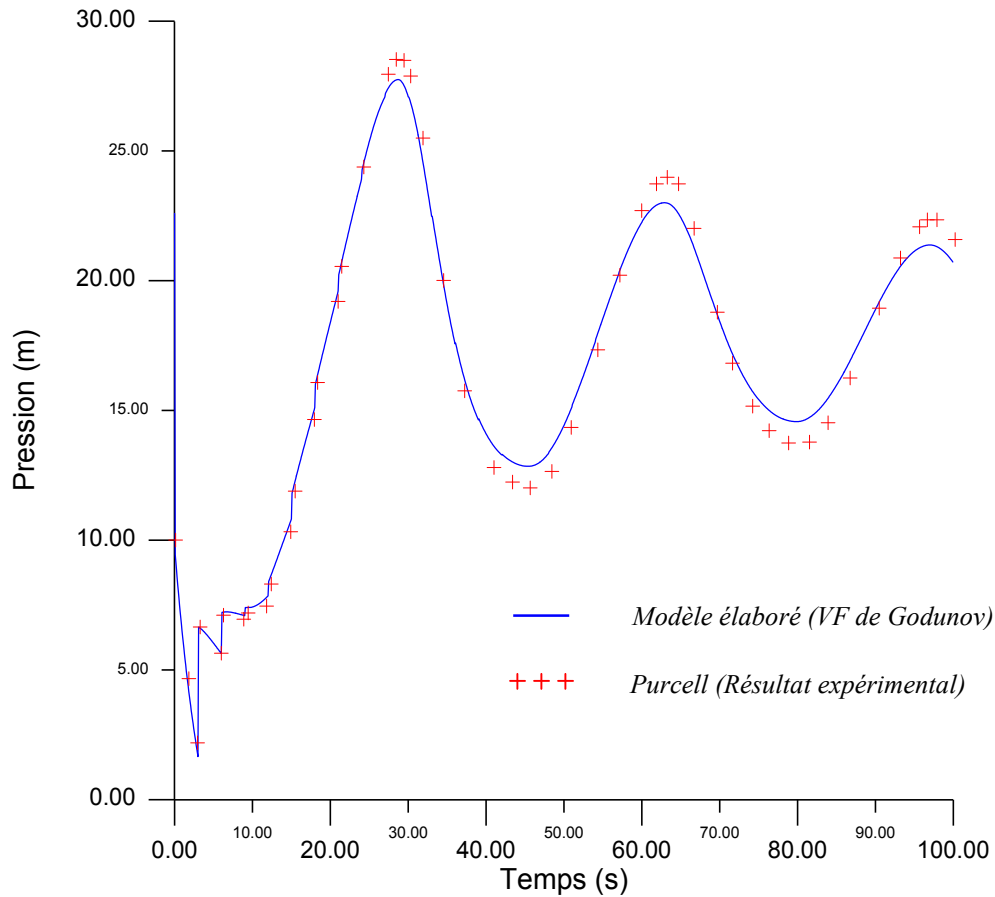
Dans ce test, il sera analysé le comportement de l'installation de pompage en régime transitoire avec l'interposition d'une perte de charge singulière, matérialisée par une vanne d'étranglement entre le ballon et la conduite de refoulement. Comme il a été souligné précédemment, pour éviter le phénomène de coup de clapet, il a été décidé d'opter pour une fermeture de la vanne à 80 % comme optimum, engendrant le minimum de surpression (Purcelle, 1997).

Les résultats de la simulation numérique effectuée ici sont alors comparés aux mesures expérimentales pour ce cas de figure. Les paramètres de calcul sont les suivants :

- Durée de simulation :  $t_s = 100 \text{ s}$  ;
- Discrétisation de la conduite :  $N = 20$  biefs ;
- Exposant polytropique :  $\gamma = 1,35$  .
- Perte de charge à l'entrée du ballon  $J_{se} = 30 V_t^2 / 2g$  ;
- Perte de charge à la sortie du ballon :  $J_{ss} = 30 V_t^2 / 2g$  .

Avec  $V_t$  : vitesse du fluide dans la tubulure de branchement.

Sur la figure (VI.19) sont alors portés les fluctuations de la pression en fonction du temps enregistrées expérimentalement (*Purcell, 1997*) et celles obtenues par le modèle numérique aux volumes finis élaboré, et ceci au droit du ballon d'air.



**Figure (VI.19) :** Variation temporelle de la pression au droit du ballon (avec étranglement)

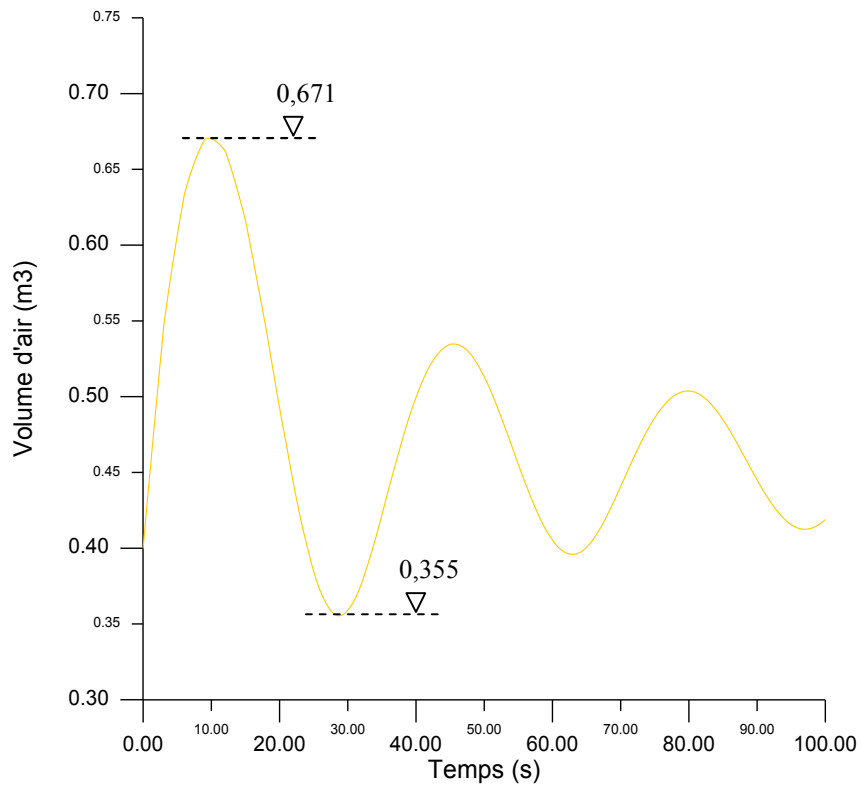
Il s'ensuit de l'analyse du diagramme de pression, qu'après le déclenchement des pompes, le ballon débite sur la conduite sous la pression du coussin d'air. Aussitôt après son passage, l'eau débitée qui traverse la vanne partiellement ouverte, subie une baisse de pression de 13,15 m. Cet état de chute de pression persiste jusqu'au temps  $t = 3 s$  où l'on assiste au minimum de la pression dans la conduite, qui est de 1,66 m. Cette valeur calculée est très proche de celle obtenue par mesure expérimentale, laquelle est de 2,19 m. Dans ce cas, la dépression obtenue par calcul numérique dévie de 2,6 % seulement de la dépression réelle. A ce moment précis, le front d'onde parti au temps 0 revient vers le ballon après avoir subit une réflexion sur le plan libre du bassin de refoulement, neutralisant ainsi la dépression et augmentant brusquement la pression percevable sur la figure (VI.19).

On peut constater alors sur le diagramme des passages de pressions en sursauts, ce qui est, comme précédemment, dû à l'arrivée du front d'onde créée par l'organe déprimogène (vanne d'étranglement) à ce lieu à des temps régulièrement espacés de  $2L/a$  donnant un aspect pulsatoire à ce diagramme. En phase de surpression, après le retour de la colonne d'eau vers le ballon, on enregistre le pic des pressions ayant pour valeur  $27,75 m$ . A cet instant, le résultat expérimental quant à lui montre une valeur de  $28,53 m$  (Purcell, 1997). Les deux résultats ne s'écartent alors que de  $2,7 \%$  environ, ce qui est très satisfaisant.

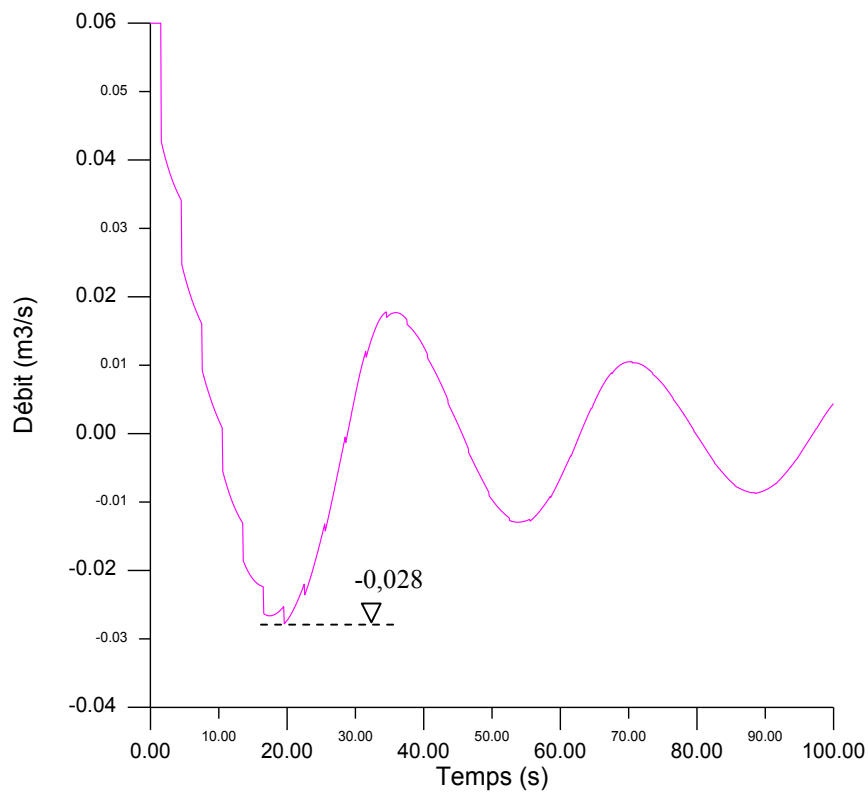
A l'issue de l'analyse des résultats des pressions découlant du calcul numérique par le schéma aux volumes finis de Godunov, on constate que la simulation reproduit presque fidèlement le comportement transitoire réel du système de pompage mesuré expérimentalement (Purcell, 1997). Durant les premiers instants d'occurrence du phénomène, la superposition des résultats numériques et expérimentaux est parfaite. Cependant, à partir du temps  $30 s$  où le premier pic est enregistré, un léger écart est alors percevable entre le modèle numérique et le résultat expérimental, et ceci à chaque demi période où un maximum et minimum des pressions sont atteints, sans que la période soit toutefois altérée. Ce constat confirme bien le jugement fait précédemment concernant les conditions thermodynamiques sous lesquelles le phénomène transitoire dans le ballon d'air évolue, dont la connaissance précise est loin de portée.

Sur la figure (VI.20) ci-après, retraçant l'évolution du volume d'air emprisonné dans le ballon dans le temps, le maximum du volume occupé par ce dernier est de  $0,671 m^3$ , mais cependant, pas au même moment où la pression a touché à son minimum. En phase de surpression, l'air n'occupe qu'un volume de  $0,355 m^3$  et ceci au temps  $28,66 s$ . On constate alors que l'étranglement a fortement diminué de l'amplitude de variation du volume d'air dans le ballon comparé au précédent test.

En examinant les fluctuations du débit (Figure (VI.21)) parvenant au bassin de refoulement, on remarque que les pulsations de pression relevées au droit du ballon se font nettement ressentir. On voit donc des battements de débit à des intervalles réguliers de  $2L/a$ . Mais ces dentelures dans l'allure de la courbe ne change en rien le comportement du débit où il se trouve en diminution jusqu'à son inversion au temps même de l'enregistrement du volume maximum d'air, pour ensuite augmenter en valeur absolue pour marquer un maximum de  $-0,028 m^3/s$ . Ces oscillations continuent ainsi mais s'amortissent très vite qu'auparavant à cause de la dissipation d'énergie accentuée par la présence de l'organe déprimogène.



**Figure (VI.20) :** Variation du volume d'air du ballon en fonction du temps (avec étranglement)



**Figure (VI.21) :** Fluctuation du débit arrivant dans le réservoir de refoulement (avec étranglement)



Les résultats numériques obtenus pour ce test ainsi que les mesures expérimentales sont regroupés dans le tableau (VI.8). Sur ce dernier figurent aussi les valeurs calculées par la méthode des caractéristiques à titre de comparaison avec le schéma de *Godunov*.

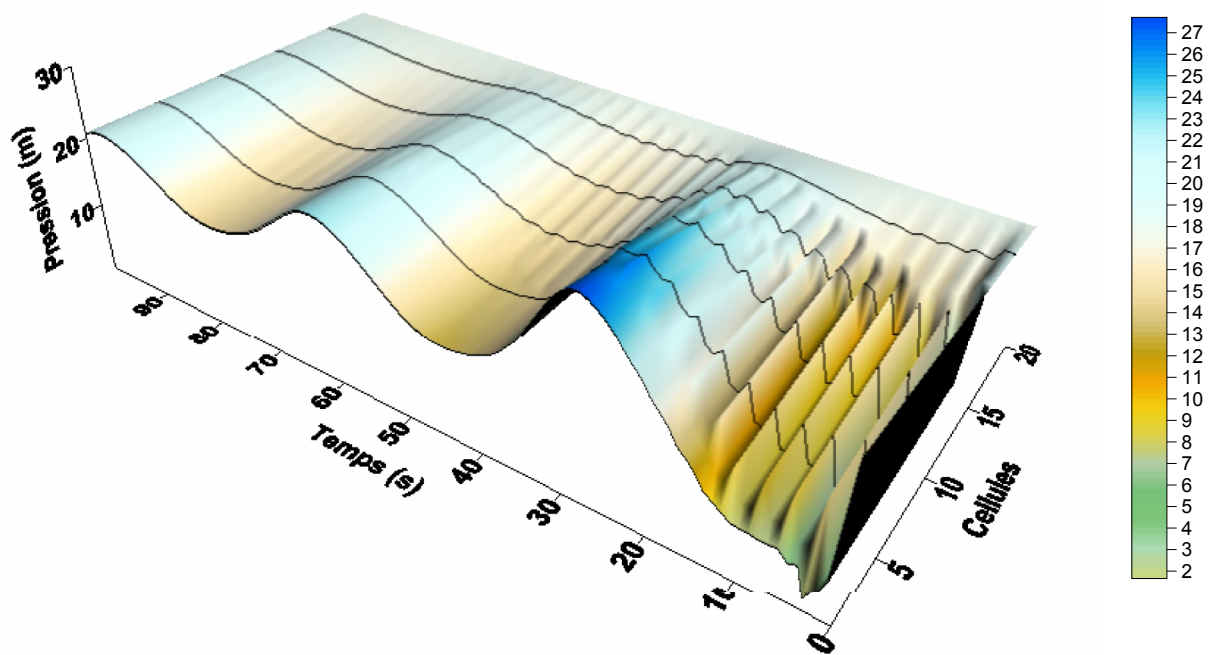
**Tableau (VI.8) : Comparaison des mesures expérimentales et solution numérique (avec étranglement)**

<b>Méthode de calcul numérique</b>	<i>Pression maximale (m)</i>	<i>Pression minimale (m)</i>	<i>Volume d'air maximum (m<sup>3</sup>)</i>	<i>Volume d'air minimum (m<sup>3</sup>)</i>
Volumes finis ( <i>Godunov</i> )	27,750	1,656	0,671	0,355
Méthode des caractéristiques	27,732	1,677	0,670	0,356
<b>Mesures expérimentales</b>	28,527	2,189	-	-

Il découle alors de ce tableau, qu'à l'instar du test examiné préalablement, que la méthode des caractéristiques retrace fidèlement les résultats issus du schéma aux volumes finis de *Godunov*. La différence relative notée entre les deux modèles numériques n'est que de 0,06 % en phase de surpression et 1,27 % en dépression. Les volumes en expansion et compression de l'air dans le ballon sont cependant identiques.

Ces résultats et remarques montrent bien que les erreurs, fortuites, entachant le calcul numérique des surpressions et dépressions par rapport aux mesures expérimentales (Figure (VI.19)), sont bien dues à la variation du comportement thermodynamique du gaz dans le ballon anti-bélier. L'exposant  $\gamma$ , figurant dans l'équation de transformation adiabatique des gaz parfait de *Laplace*, marque manifestement bien des variations dans le temps au cours du régime transitoire. Selon *Lee* (1998), pour des variations rapides du régime, la transformation tend à être adiabatique ( $\gamma = 1,4$ ) et plus le régime marque une lenteur, c'est plutôt une transformation isothermique qui prédomine ( $\gamma = 1$ ). Il est alors recommandé pour la plupart des cas d'opter pour une valeur intermédiaire. L'usage du modèle déterministe de *Graze* (*Chaudhry, 1979*), décrivant le comportement du gaz par une équation différentielle, serait l'élément tranchant dans cette situation, mais comme l'on a noté auparavant, la connaissance du taux de transfert de chaleur n'est pas bien connu et doit être en l'occurrence supposé.

Pour donner une image représentative du phénomène pour ce cas, un report des résultats numériques est alors effectué sur le plan espace-temps. Remarquons, à l'inverse du premier test, qu'en raison de l'étranglement effectué, une large perturbation est créée sur un linéaire considérable de la conduite durant les premiers instants du phénomène. Les ondes à front raide ainsi provoquées font que l'enveloppe des dépressions cesse d'être linéaire comme avant (Figure (VI.18)), ce qui peut être dangereux pour le système de pompage.



*Figure (VI.22) : Vue axonométrique de la variation de la pression dans le plan spatio-temporel (avec étranglement)*

#### VI.3.4. Conclusions des deux tests

Au terme des deux tests effectués dans cette seconde application, les remarques et constatations suivantes se font alors ressentir :

1. En faisant abstraction de toute perte de charge sur le ballon, on serait conduit à des valeurs conséquentes en surpression (Figure (VI.23)). En intercalant cependant un étranglement sur la tubulure de branchement du ballon, on réduirait significativement cette valeur de surpression de près de 35 % environ. Dans ces circonstances, on serait à l'origine de la manifestation d'un front d'onde raide naissant de la chute brusque de la pression à la sortie du ballon. En effet, cette déformation de l'onde élastique matérialisée par un front raide, se propage sans affaiblissement (ou peu affaiblie) jusqu'au bassin de refoulement, qui selon le profil de la conduite, soumettrait la conduite à des dépressions excessives et désastreuses (Figure (VI.24)). La valeur de la dépression se voit alors accentuée de près de 36 %. L'enveloppe des dépressions dans ce cas écrête la quasi-totalité du linéaire de la conduite de refoulement. A l'opposé, la durée du régime transitoire se trouve réduite par suite de la dissipation supplémentaire de l'énergie.

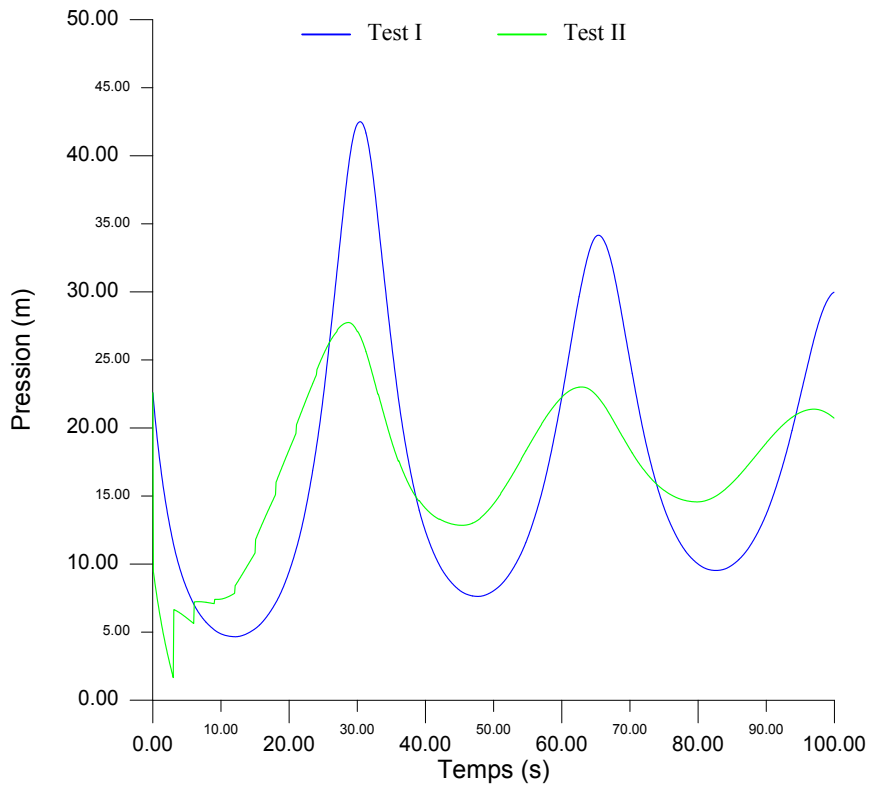


Figure (VI.23) : Courbes comparatives de la pression au pied du ballon issue des deux tests

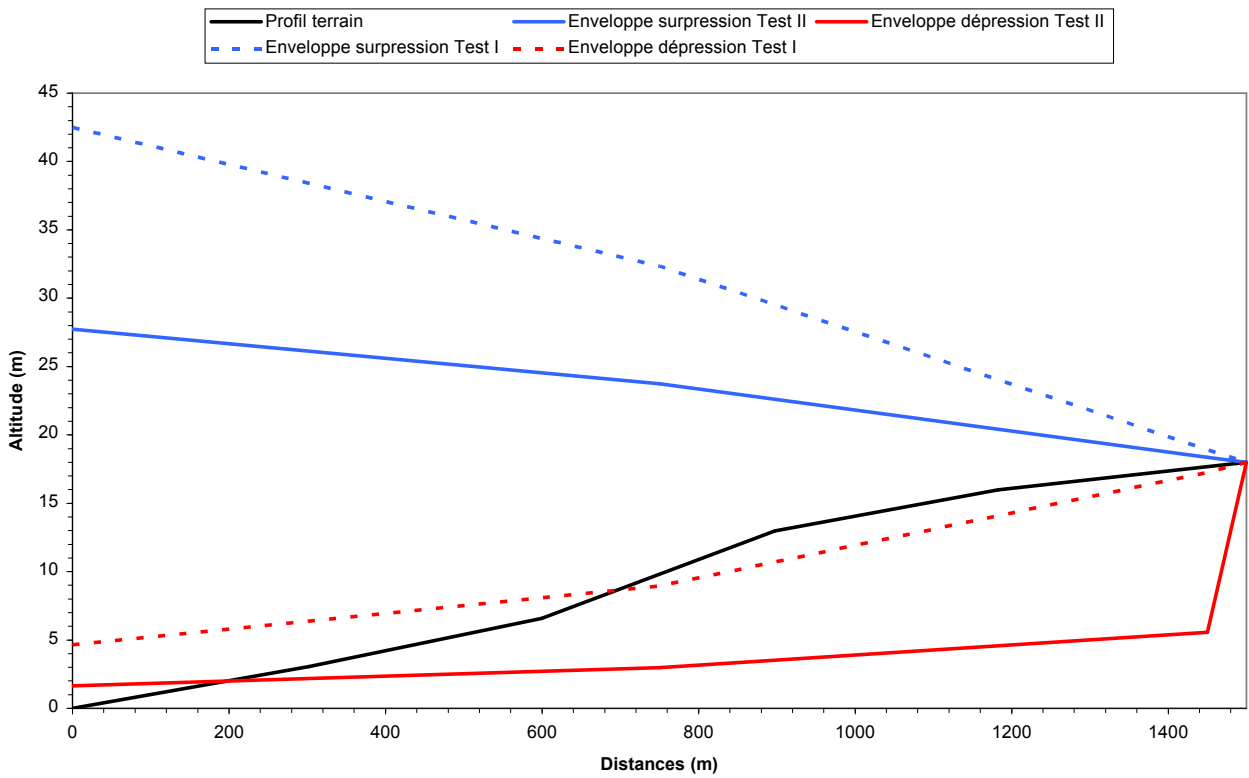


Figure (VI.24) : Enveloppes des pressions avec un ballon anti-bélier muni d'un étranglement symétrique

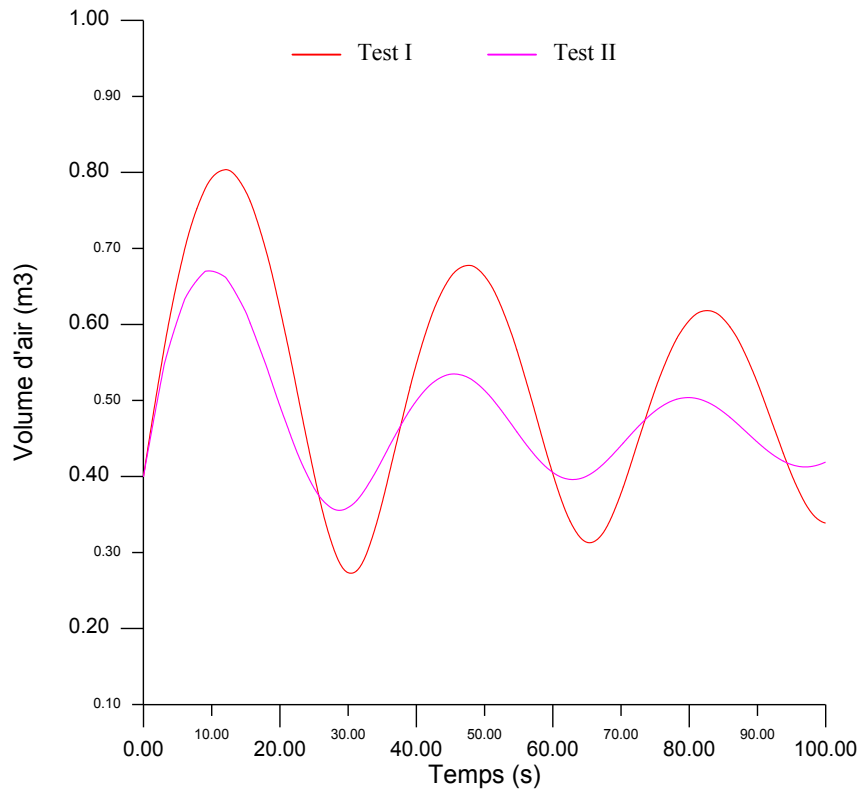


Figure (VI.25): Courbes comparatives de l'évolution des volumes d'air issue des deux tests

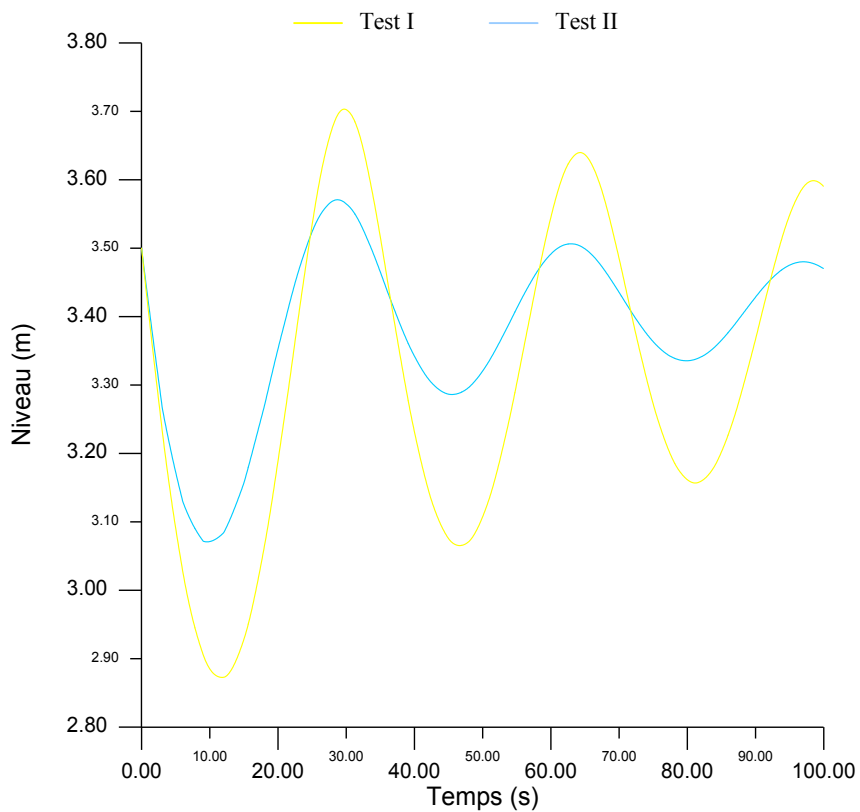


Figure (VI.26): Courbes comparatives de l'évolution du niveau d'eau dans le ballon pour les deux tests

2. Comme retombée directe de l'étranglement symétrique pratiqué à la sortie du ballon, la modification des variations du volume d'air enregistrées durant le régime transitoire. L'examen de la figure (VI.25) montre qu'en plein expansion (phase de dépression) l'air occupe 16,5 % de volume en moins en effectuant l'étranglement. Ceci peut jouer sur les dimensions du ballon et son économie en conséquence.
3. Les fluctuations du niveau d'eau dans le ballon (Figure (VI.26)) mettent en relief la répercussion de la perte de charge singulière ainsi créée à la base de l'anti-bélier. A passage libre, le niveau minimum atteint une valeur de 2,87 m alors que cette baisse se réduit à 3,07 m en passage étranglé, soit 20 cm de moins. En pratique, ce détail peut être crucial dans le risque de vidange de l'anti-bélier si une fuite accidentelle du gaz apparaît ou habituellement sa dissolution dans l'eau.
4. Dans les deux cas, avec et sans étranglement, le calcul numérique, affirmé par les mesures expérimentales, la pression maximale n'excède nullement la pression maximale de fonctionnement (PMF) de la conduite qui est de 67 m. Pour pallier cependant au risque de vaporisation du fluide et aplatissement de la conduite en phase de dépression, il serait judicieux en pratique d'installer un clapet à battant percé à la place d'une vanne d'étranglement. En effet, cet artifice permet de créer une perte de charge dissymétrique capable de déprimer la veine liquide en phase de retour d'eau dans le ballon pour réduire la surpression et céder libre passage à l'eau à la sortie du ballon durant la phase de dépression. Ceci permet alors d'éviter la déformation de l'onde élastique et la création d'un front d'onde raide, comme vu précédemment.

#### **VI.4. Application III : Problème de cheminée d'équilibre sur aménagements hydro-électriques**

L'un des dispositifs classiques et anciens de protection contre le coup de bélier est bien celui de la cheminée d'équilibre. Cet organe de protection a connu de larges applications et développements dans les installations hydro-électriques. Appelé parfois chambre d'équilibre, il sert à protéger la galerie d'amenée des surpressions (surcharges dynamiques) dues aux variations de régime de marche des turbines à travers les puits blindés (conduites forcées). L'importance de ces ouvrages de formes diverses a conduit à une multitude de recherches théoriques, à l'image de celles de *Eydoux* (1917), *Calame*, *Gaden* et *Gardel*

(Jaeger, 1977) et Escande (1950 et 1971) ; mais la plupart de ces études reposent sur l'approche de l'oscillation en masse (théorie de la colonne rigide) qui ne donne qu'une image simplifiée, et souvent erronée, du phénomène. Il a fallu alors l'apparition de la méthode graphique de Bergeron (1949), et par la suite l'avènement du calcul numérique, pour en donner un essor considérable à l'étude souvent complexe de ces ouvrages, en attaquant le problème par son mode de propagation des ondes élastiques, qui est l'image précise du phénomène transitoire.

Dans la présente application, dernière dans notre travail, nous nous proposons d'appliquer la méthode des volumes finis (schéma de Godunov) à l'étude du régime transitoire dans une installation hydro-électrique pourvue d'une chambre d'équilibre. L'objectif est alors d'étudier la réponse du système par son mode propre d'ondes élastiques et l'appréhension de l'interaction dynamique du couple "Galerie-conduite forcée" et de la superposition des deux visages du phénomène transitoire, l'oscillation en masse et le coup d'onde.

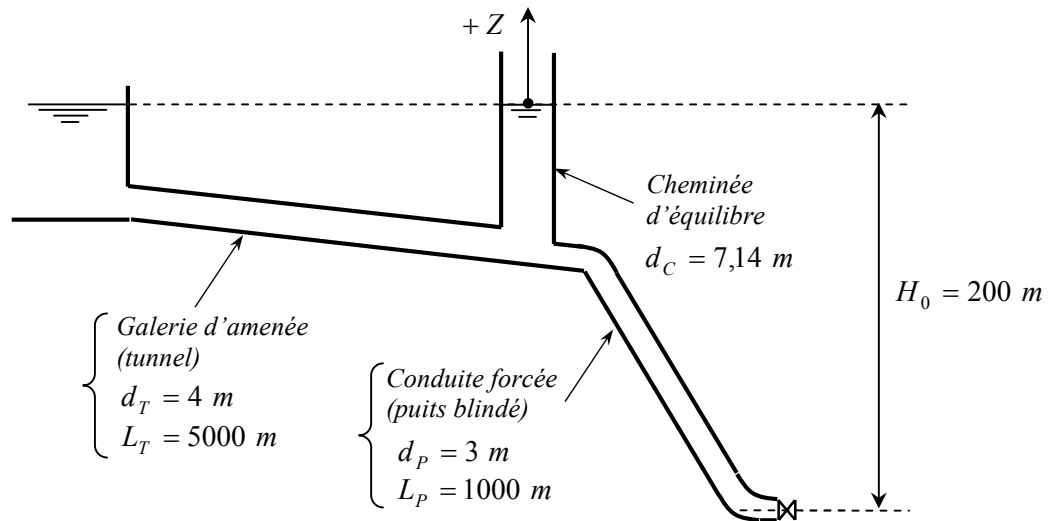
La simulation numérique de tous les scénarios pouvant se présenter et l'optimisation des dimensions n'étant pas dans le cercle des objectifs de notre étude, nous nous limiterons ici à la mise en relief du comportement transitoire de l'installation dans les conditions suivantes :

- Analyse sans prise en compte des pertes de charge (cas hypothétique);
- Analyse avec prise en compte des pertes de charge dans la conduite ;
- Analyse de l'influence des dimensions de la cheminée.

La première analyse a pour objectif de toucher l'aspect théorique de la propagation des ondes et du phénomène d'oscillation en masse. Tandis que la seconde et la dernière analyse révéleront les répercussions de la dégradation d'énergie sur les oscillations du plan d'eau à la cheminée et sur la réponse dynamique de l'installation en général, et ceci à divers diamètres de la cheminée.

#### **VI.4.1. Description de l'aménagement étudié**

L'aménagement hydro-électrique étudié ici est tiré du travail de Doctorat de Hussain Khan (1966). Il se compose d'une galerie d'amenée d'eau d'un linéaire de 5 km et d'un diamètre de 4 m, se terminant immédiatement à l'aval par une cheminée d'équilibre prismatique formant 40 m<sup>2</sup> de section transversale. Cette chambre d'équilibre absorbe les pressions dynamiques transmises par la conduite forcée dont le diamètre est de 3 m avec une longueur atteignant 1000 m (Figure (VI.27)).



**Figure (VI.27):** Schéma descriptif de l'aménagement hydro-électrique simulé

Les données hydrauliques complètes relatives à l'installation sont regroupées dans le tableau (VI.9) ci-dessous.

**Tableau (VI.9) :** Données hydrauliques de l'installation hydro-électrique

<b>Galerie d'amenée</b>	
Longueur	5 000 m
Débit véhiculé	20 m <sup>3</sup> /s
Diamètre	4.0 m
Section transversale	12.5 m <sup>2</sup>
Coefficient de frottement ( $\lambda$ )	0,0168
Célérité des ondes	1 000 m/s
<b>Conduite forcée</b>	
Longueur	1 000 m
Diamètre	3.0 m
Section transversale	7.08 m <sup>2</sup>
Coefficient de frottement ( $\lambda$ )	0,0154
Célérité des ondes	1 000 m/s
<b>Cheminée d'équilibre</b>	
Type	Circulaire
Diamètre	7,14 m
Section transversale	40 m <sup>2</sup>

Sur le plan théorique du calcul du régime transitoire, ces cas dits complexes, ont posés d'énormes problèmes dans le passé, spécialement dans les installations hydro-électriques. Cette complexité dans l'approche théorique revient au fait qu'on n'avait pas réussi, en recherchant les équations de passage, à unir mathématiquement les deux phénomènes ; oscillation en masse et coup d'onde, qu'on croyait jusqu'à là de nature différente. En effet, une manœuvre quelconque des organes de fermetures provoque dans le système deux phénomènes distincts, à savoir le coup d'onde d'une part dans la conduite forcée, et l'oscillation générale des masses d'eau dans l'autre partie du système, d'autre part. Cependant, des artifices de passage purement mathématiques entre ces deux phénomènes ont été appliqués dans ce genre de situation, à l'image de *O. Schnyder (Jaeger, 1933)* qui prenait dans de tels cas les résultats issus du calcul de l'oscillation en masse comme conditions initiales pour le calcul du coup d'onde. La première théorie générale revient à *Jaeger (1933)*, qui a présenté dans sa thèse de Doctorat une méthode de calcul basée sur extension et généralisation de la théorie d'*Allievi*.

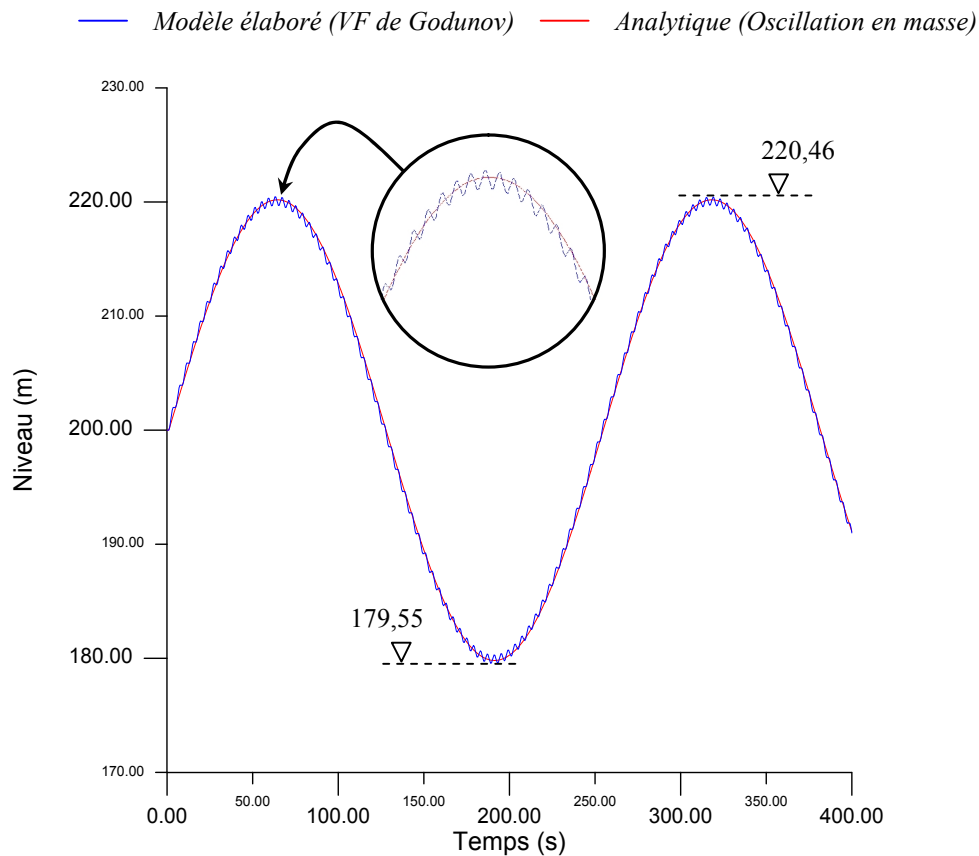
#### VI.4.2. Test I : Réponse transitoire du système en absence de pertes de charge

Ce premier test, qui est un cas hypothétique, vise à comparer les résultats issus du calcul numérique de la propagation des ondes élastiques par le schéma au volumes finis de *Godunov* et ceux que l'on obtient par l'approche simplifiée de l'oscillation en masse en considérant un mouvement d'ensemble de la colonne d'eau entre la cheminée et le bassin d'accumulation (Appendice (IV)). Les paramètres de calcul dans ce cas sont :

- Durée de la simulation du phénomène:  $t_s = 400 \text{ s}$  ;
- Cas de charge : arrêt des turbines (fermeture brusque de l'obturateur) ;
- Discrétisation :
  - Galerie d'amenée  $N_1 = 10$  biefs ;
  - Conduite forcée  $N_2 = 2$  biefs ;
- Pas de temps de calcul :  $\Delta t = L_T / a / N_1 = L_P / a / N_2 = 0,5 \text{ s}$  .

Les résultats de simulation numérique et calculs analytiques sont reportés sur la figure (VI.28), traduisant la variation du plan libre d'eau dans la cheminée en fonction du temps. L'examen de cette figure montre qu'au bout de  $1 \text{ s}$  après le rejet de la charge (fermeture brusque de l'organe régulateur), c'est-à-dire le temps pris par l'onde pour arriver à la cheminée, le plan d'eau dans cette chambre d'équilibre amorce alors sa hausse. Il atteint son plus haut niveau qui est de  $220,46 \text{ m}$  au temps  $63 \text{ s}$  .





**Figure (VI.28) :** Variation du niveau d'eau dans la cheminée d'équilibre (sans pertes de charge)

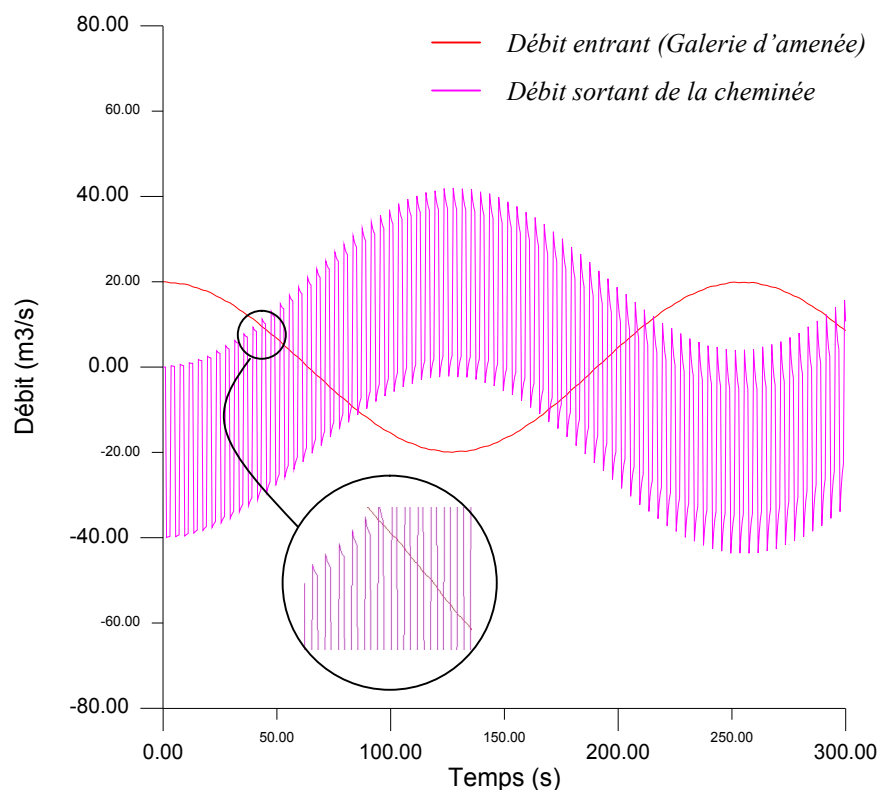
Durant la seconde phase, le plan d'eau subit une baisse par suite de l'inversion de l'écoulement dans la galerie d'amenée. Au temps 189 s, le niveau bas atteint la cote 179,55 m. Passé ce temps, on assiste à une inversion des faits, induisant par conséquent les mêmes maxima du niveau d'eau dans la cheminée. Remarquons alors que le mouvement est de type pendulaire, autrement dit, suivant un certain mouvement sinusoïdal, avec une période  $T = 253,16$  s. Il en découle ainsi que pendant la marche en régime transitoire, le plan d'eau dans la cheminée d'équilibre oscille autour de la position d'équilibre stable 200 m avec une amplitude constante  $Z_{\max} = 20,46$  m et  $Z_{\min} = 20,45$  m.

Si l'on compare maintenant la solution numérique reposant sur le modèle des ondes élastiques, et la solution analytique résultant de la théorie de la colonne rigide, des remarques distinctives se font alors ressentir. En effet, alors que la solution analytique décrit une allure parfaitement sinusoïdale, c'est-à-dire, un seul mode d'oscillation, la solution numérique manifeste une allure tourmentée (Figure (VI.28)). Il apparaît par conséquent, qu'en plus de l'oscillation fondamentale de fréquence angulaire  $\omega = 0,025$  rad/s, il se superpose sur cette

dernière des harmoniques de période beaucoup plus courte de  $T = 4 \text{ s}$ . Ces harmoniques, de haute fréquence angulaire  $\omega' = 1,57 \text{ rad/s}$ , correspondent en fait aux pulsations des ondes du coup de bélier lancées à l'obturateur et réfléchies sur le plan libre de la cheminée. Donc, on peut dire ici qu'il s'agit bien de la superposition des deux phénomènes, jadis prétendus différents, oscillation en masse et coup d'onde, qu'on retrouve conjointement dans ce cas de figure, traité par un modèle unique des ondes élastiques.

Sur le plan physique, si l'on observe le plan d'eau dans la cheminée d'équilibre, on remarquerait que ce dernier avance (en montée ou en descente) par "soubresauts". Le plan d'eau manifeste des mouvements brusques et saccadés qui se font ressentir à chaque coup d'onde venant de l'aval. Etant directement liée à la section de la cheminée, l'amplitude de ces mouvements se verra alors amplifiée à mesure que la section de cette dernière se trouve réduite, en raison de la diminution du facteur de réflexion des ondes sur la surface libre de la cheminée.

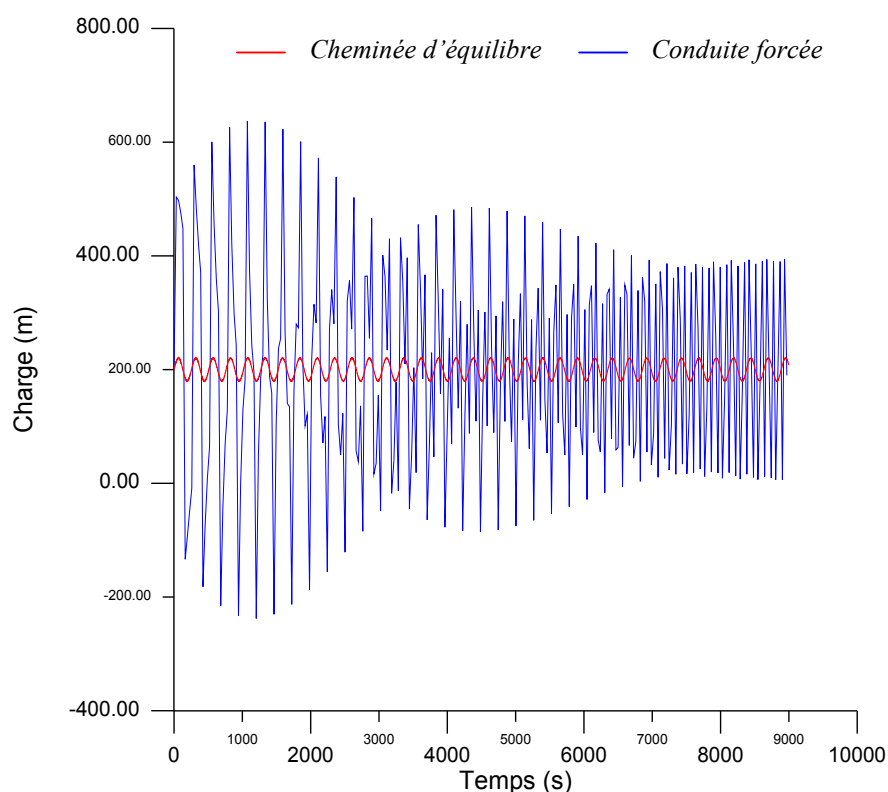
On peut alors discerner ces constatations de mouvement pendulaire harmonique sur la figure (VI.29) qui illustre les fluctuations de débit entrant vers la cheminée (à partir de la galerie d'amenée) et sortant de celle-ci en fonction du temps.



**Figure (VI.29) :** Variation du débit entrant et sortant de la cheminée d'équilibre (sans pertes de charge)

Au vu de la figure (VI.29), il apparaît que le flux débité ou absorbé par la cheminée décrit une variation suivant un mode fondamental de période  $T$  égale à celle du mouvement d'oscillation en masse ; mais cependant, subissant des variations pulsatoires suivant les fréquences de pulsation du coup de bélier émanant de la conduite forcée. Ainsi, il est à remarquer qu'à chaque instant la cheminée débite ou absorbe un flux massique correspondant à la différence ou la somme des débits venant de la galerie en charge et de la conduite forcée. Suivant le cas, on constate que le débit de la cheminée atteint, durant les premiers instants du phénomène, le double du celui en régime établi. Ce débit se voit alors en hausse durant la suite du phénomène, comme il sera mis en évidence par la suite. Quant au débit dans la galerie, celui-ci oscille bien entre les valeurs limites de  $\pm 20,05 \text{ m}^3 / \text{s}$ .

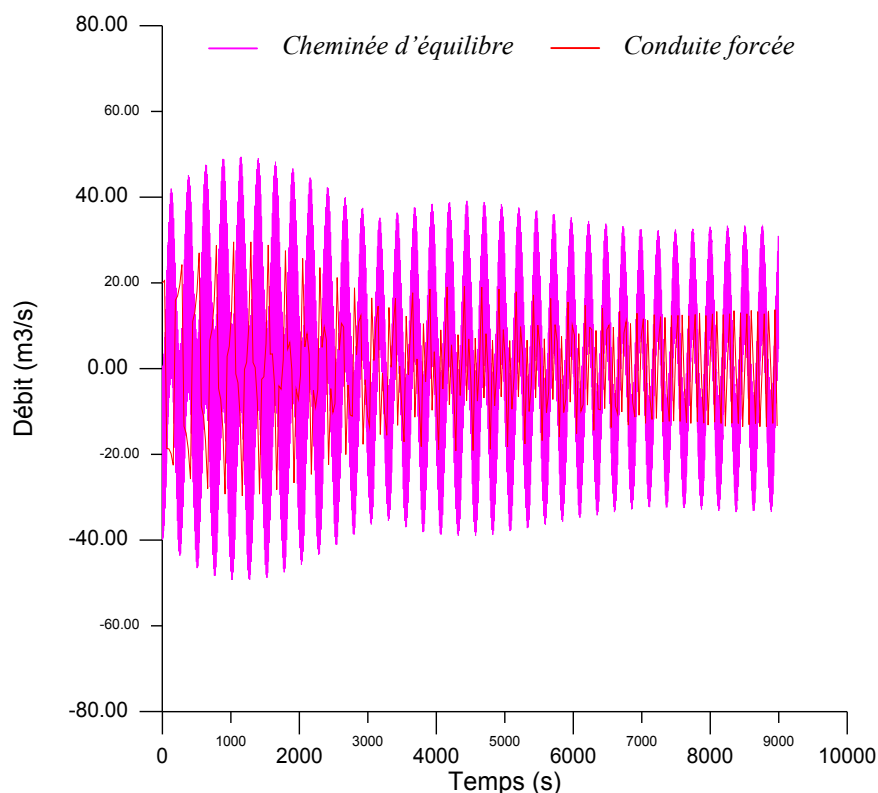
En ce qui est de la variation temporelle de la charge dans la conduite forcée, résultant de l'annulation brusque du débit de turbinage, il a été alors constaté que cette dernière suit une augmentation, donc une amplification dans le temps. En allongeant le temps de simulation à 9000 s (150 min), les résultats sont alors portés sur la figure (VI.30). Pour la clarté de cette dernière, la masse des valeurs calculées a été réduite volontairement et pour ainsi juste illustrer les enveloppes des charges enregistrées au pied de la conduite forcée.



**Figure (VI.30) :** Variation temporelle de la charge au bas de la conduite forcée (sans pertes de charge)

Il découle alors de ces résultats, et à l'opposé de ce que l'on peut prédire, la charge maximale au droit de l'obturateur de la conduite forcée n'est atteinte qu'après plusieurs oscillations du plan d'eau dans la cheminée d'équilibre. Les enveloppes symétriques ainsi formées, décrivent une amplification et amortissement dans le temps avec un maximum de  $637,55 \text{ m}$  et  $-237,97 \text{ m}$  pour minimum, soit une amplitude d'environ  $437,55 \text{ m}$ . Ce phénomène que l'on qualifie de "battement" (*beat phenomenon*) en analogie à ce lui qu'on connaît en mécanique, illustre parfaitement la différence des fréquences angulaires des deux phénomènes en interaction, à savoir, oscillation en masse et coup d'onde. Il est à remarquer également que par suite de la différence des amplitudes de ces derniers, les enveloppes du battement ne forment aucun nœud.

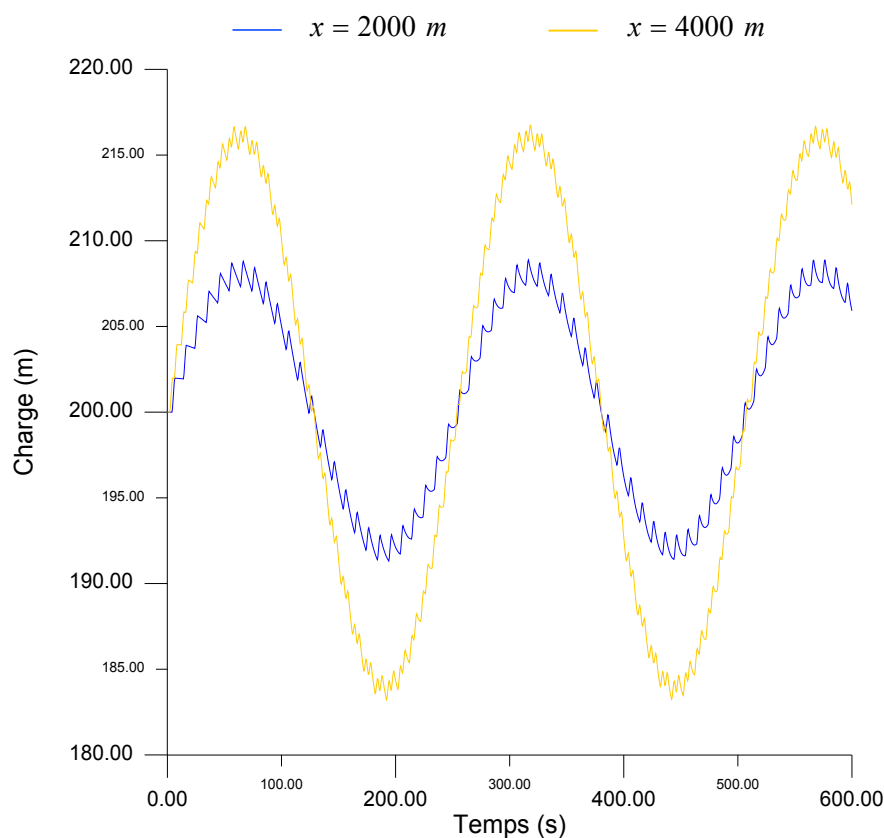
Un constat analogue est observé sur les fluctuations du débit fourni par la cheminée d'équilibre ainsi que celui dans la conduite forcée (Figure (VI.31)). On peut percevoir alors qu'en raison du battement observé sur la charge (Figure (VI.30)), le débit est influencé de la sorte et manifeste des enveloppes de même allure. Au cours du premier ventre du phénomène, les valeurs maximales des débits sont alors atteintes. Alors qu'un doublement du régime permanent s'est manifesté durant les premiers instants, le débit de la cheminée se voit en hausse pour toucher un extremum de près de  $\pm 50 \text{ m}^3 / \text{s}$ , soit 25 % d'amplification.



**Figure (VI.31) :** Battement du débit de la cheminée et de la conduite forcée (sans pertes de charge)

On s'aperçoit que le débit de la cheminée est largement influencé par celui de la conduite forcée, responsable du phénomène de battement. Le débit de cette dernière quant à lui, plafonne à une valeur avoisinant les  $\pm 30 \text{ m}^3 / \text{s}$ .

En ce qui est de la variation temporelle de la charge dans la galerie d'amenée, les résultats sont mis en graphe sur la figure (VI.32). A partir de cette dernière, il apparaît clairement l'influence du coup d'onde venant de la conduite forcée sur l'état dynamique dans la galerie d'amenée. Il est à remarquer qu'en se rapprochant vers le bassin et en s'éloignant de la cheminée, l'amplitude des harmoniques se voit augmentée.



**Figure (VI.32) :** Variation temporelle de la charge dans la galerie d'amenée (sans pertes de charge)

En raison de la présence de la cheminée d'équilibre, la charge maximale dans la galerie étant celle dictée par le niveau maximum atteint durant le régime transitoire. De ce fait, la répartition des maxima des charges le long de la galerie est bien linéaire en raison de la variation très lente du mouvement d'ensemble de la colonne liquide. Nous avons donc là, à l'opposé de ce qui est répandu et admis en pratique, la coexistence simultanée du coup de bélier par ondes et de l'oscillation en masse dans la galerie d'amenée. La cheminée d'équilibre apparaît alors comme un organe hydraulique jouant le rôle d'absorbant élastique.

Ceci dit, on pourra alors récapituler dans le tableau (VI.10) les résultats de la solution numérique suivant le schéma aux volumes finis de *Godunov* et la solution analytique reposant sur les méthodes usuelles, autrement dit, la séparation mathématique des deux problèmes, oscillation en masse et coup de bélier. Par conséquent, les valeurs de références sont celles découlant de la solution numérique.

**Tableau (VI.10) :** Comparatif de la solution numérique et méthodes de calcul usuelles (sans PDC)

<b>Méthode de calcul numérique</b>	Volumes finis ( <i>Godunov</i> )	Méthodes usuelles	Erreur relative (%)
Niveau haut dans la cheminée (m)	220,46	220,19	0,122
Niveau bas dans la cheminée (m)	179,55	179,81	0,145
Période d'oscillation (s)	253,16	253,75	0,23
Débit max de la cheminée ( $m^3/s$ )	49,64	20,0	59,71
Charge max dans la conduite forcée (m)	637,55	508,15	20,29
Débit max de la conduite forcée ( $m^3/s$ )	29,65	20,0	32,55

On voit d'après le tableau (VI.10) ci-dessus, qu'en ce qui concerne les fluctuations du niveau du plan libre dans la cheminée d'équilibre et la période d'oscillation, le calcul usuel suivant la théorie de l'oscillation en masse conduit pratiquement aux mêmes résultats obtenus par calcul numérique suivant la méthode des volumes finis. Les différences légères sont dues aux harmoniques (provoquées par les pulsations des coups d'ondes) surmontant l'oscillation fondamentale, lesquelles marquent une influence notable à mesure que la section de la cheminée se voit réduite.

Cependant, on remarque que le débit maximum de la cheminée prédit par les deux modèles de calcul diffère notablement. En négligeant l'influence du tronçon aval (conduite forcée), le calcul par le modèle de la colonne rigide conduit à un maximum de  $20 m^3/s$ , correspondant à celui du régime permanent. A l'opposée, la prise en considération complète du phénomène, mettant en interaction le système galerie-cheminée-conduite forcée, fait révéler une augmentation de 25 % du précédent résultat. L'erreur commise alors par le calcul usuel est d'environ 60 %.

Si l'on compare d'autre part, les pressions maximales calculées au pied de la conduite forcé, c'est-à-dire, à l'obturateur, on constate alors que les écarts sont fort bien prononcés. Le calcul usuel a été fait par les séries enchaînées d'*Allievi* en admettant entre autre le niveau haut de la cheminée comme plan de réflexion des ondes incidentes de l'obturateur. Ceci

suppose implicitement l'isolation de la conduite forcée et de la galerie d'amenée dans le mécanisme de propagation et réfraction des ondes élastiques, hypothèse longuement admise et pratiquée jadis, du fait de la présence de la cheminée comme élément absorbant. Or, le calcul numérique met en exergue, que dans ce cas, on commettrait une erreur de 20,29 % dans l'estimation de la pression maximale, et cela dans le sens opposé de la sécurité. De même, pour le débit maximum, une augmentation de plus de 48 % comparativement à celui résultant du calcul classique (par les équations d'*Allievi*) est observé, et ceci en raison de l'amplification due au phénomène de battement.

On voit à partir des résultats qui ont précédés, que les méthodes de calcul se fondant sur le modèle mathématique d'oscillation en masse et celui reposant sur le modèle complet des ondes élastiques aboutissent aux mêmes résultats, en absence des pertes de charge, en ce qui concerne juste la montée et la baisse maximale du plan d'eau dans la cheminée. Toutefois, on commettrait des erreurs fortement notables dans l'estimation des pressions et des débits dans la conduite forcée et les débits même de la cheminée, ce qui est très important.

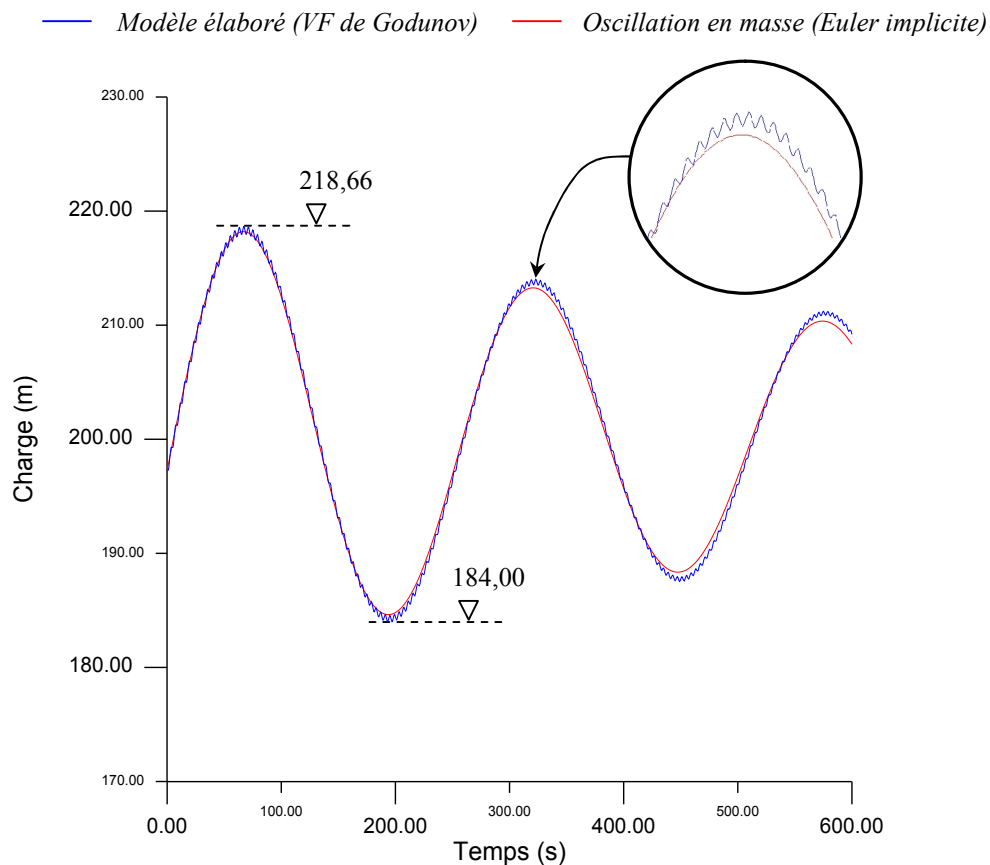
#### VI.4.2. Test II : Réponse transitoire du système tenant compte des pertes de charge

Nous allons voir à présent l'influence de la perte de charge dans la galerie d'amenée ainsi que dans la conduite forcée sur la réponse dynamique du système en présence de la cheminée d'équilibre. Ceci vise à déterminer l'ordre de grandeur de la variation du plan d'eau dans cette dernière ainsi que l'amortissement et l'atténuation de l'amplitude des ondes. Les paramètres de calcul considérés dans ce cas sont alors :

- Durée de la simulation du phénomène:  $t_s = 600 \text{ s}$  ;
- Cas de charge : arrêt des turbines (fermeture brusque de l'obturateur) ;
- Discrétisation :
  - Galerie d'amenée  $N_1 = 10$  biefs ;
  - Conduite forcée  $N_2 = 2$  biefs ;
- Pas de temps de calcul :  $0,5 \text{ s}$  ;
- Pertes de charge :
  - Galerie d'amenée  $J_T = 2,71 \text{ m}$  ;
  - Conduite forcée  $J_p = 2,09 \text{ m}$  ;

Pour pouvoir comparer les résultats découlant du modèle numérique aux volumes finis ainsi que ceux de la théorie de la colonne rigide, on a procédé à la résolution de l'équation différentielle du mouvement oscillatoire. A cet effet, et en absence d'une solution analytique

de l'équation en raison de la non linéarité du terme de frottement, une résolution numérique de cette dernière s'impose. Ayant une panoplie de méthodes dédiées à ce problème (Escande, 1950 ; Parmley, 1958 ; Jaeger, 1977), nous avons fait usage de la méthode d'Euler implicite (Griffiths et Higham, 2010) en raison des facultés inhérentes à ce type de schéma. Sur la figure (VI.33) sont alors reportés les résultats du calcul numérique issus des deux modèles.



**Figure (VI.33) :** Variation du niveau d'eau dans la cheminée d'équilibre (avec pertes de charge)

Nous pouvons voir sur la figure (VI.33) illustrant l'évolution du niveau d'eau dans la cheminée en fonction du temps, qu'à partir de la charge dynamique initiale de 197,29 m, ce dernier subit une hausse qui persiste au bout de 67 s pour atteindre sa valeur maximale de 218,66 m. Une différence de 1,8 m est donc notée comparativement au précédent test. Au cours de sa descente, le plan libre d'eau touche à sa valeur minimale à la cote 184,00 m, et ceci au temps 193 s. On constate alors que ce niveau marque une hausse de 4,45 m si l'on fait référence au cas d'analyse précédemment fait.

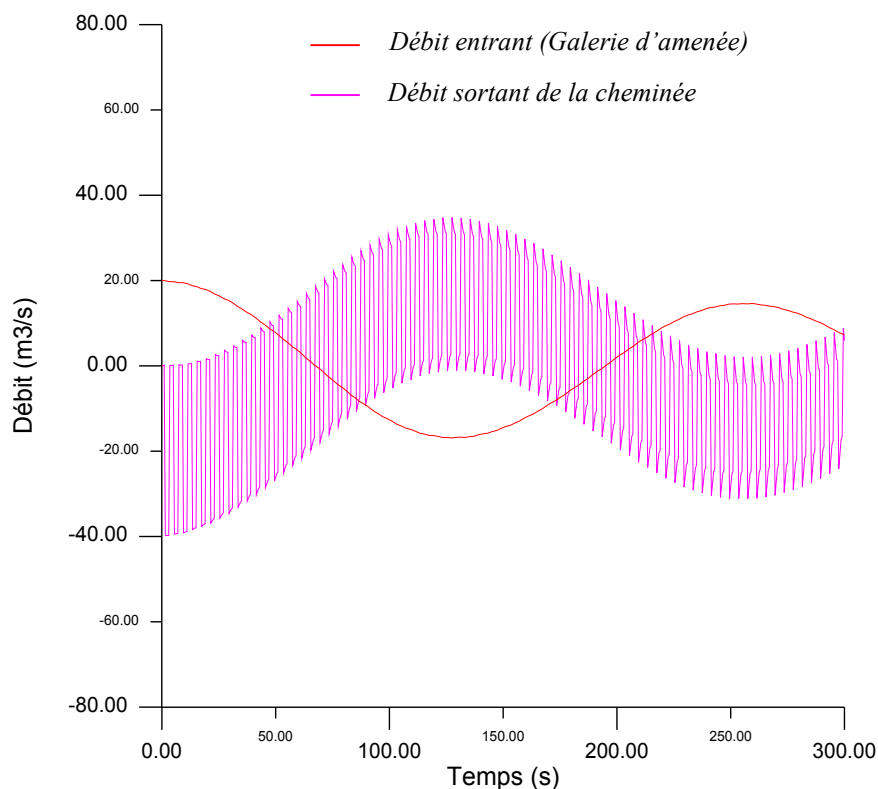
Il apparaît clairement que l'incorporation des pertes de charge induit un amortissement dans l'amplitude de variation du niveau d'eau dans la cheminée en fonction du temps. La



dissipation de l'énergie mécanique à chaque cycle met alors terme au régime de marche transitoire du système. Cependant, notons que la période propre des oscillations reste inchangée, soit  $T = 253,16 \text{ s}$ , résultat bien connu en mécanique générale, avec un décalage temporelle de  $6 \text{ s}$ , temps mis par le plan d'eau dans la chambre pour atteindre le niveau statique.

Une comparaison avec le calcul usuel de l'oscillation en masse fait révéler des remarques analogues au précédent test. Pendant la première demi-période, la figure (VI.33) montre une concordance des résultats issus des deux modèles de calcul, avec toutefois la superposition au mode fondamental des oscillations harmoniques (d'ordre très élevé) pour le modèle complet des ondes élastiques. Passé ce temps, on voit que le calcul usuel sous estime les maxima et minima des fluctuations dans la cheminée d'équilibre. Ceci met en relief les pulsations du coup de bélier venant de la conduite forcée sur le mouvement d'ensemble de la colonne d'eau dans la cheminée.

Sur l'autre plan, l'effet des pertes de charge se manifeste similairement sur les fluctuations des débits au point de jonction de la cheminée d'équilibre (Figure (VI.34)). Les mêmes constatations physiques du problème sont retrouvées, toutefois avec amortissement.

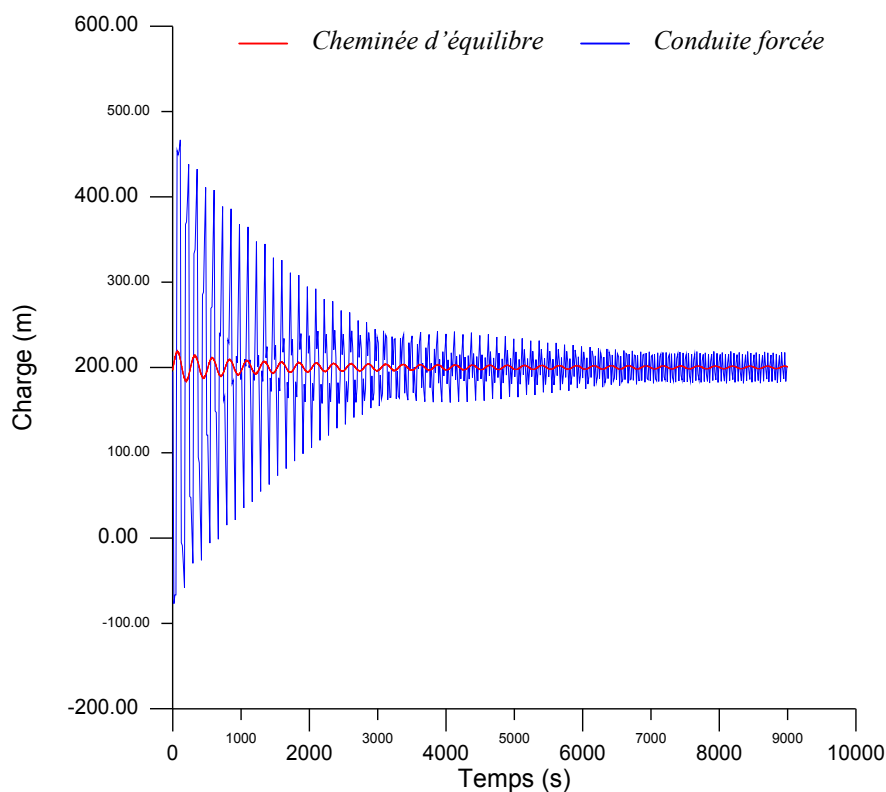


**Figure (VI.34) :** Variation du débit entrant et sortant de la cheminée d'équilibre (avec pertes de charge)

Au cours des premiers instants du phénomène, la cheminée absorbe un débit maximum de  $39,79 \text{ m}^3 / \text{s}$ . Celui-ci se voit en baisse à chaque instant durant la phase de montée. Pendant la seconde phase, au moment de l'inversion du débit dans la galerie, la cheminée refoule alors un flux dont le maximum atteint  $34,83 \text{ m}^3 / \text{s}$ . Au delà de ce temps, ces valeurs diminuent à chaque cycle d'oscillation en raison des frottement intervenant dans le mouvement, faisant ainsi perdre la symétrie temporelle au phénomène.

Notons au passage qu'à l'opposé du cas analysé précédemment, les variables d'état, charge et débit en présence des pertes de charge, ne sont pas rigoureusement en déphasage de  $\pi/2$ . Ce constat trouve justification sur le plan physique du phénomène où dans ce cas le système n'est pas conservatif, c'est-à-dire que les forces en jeu ne dérivent pas d'un potentiel. Ici, cet état de non conservation est dû à l'action des forces de frottement visqueuses, d'où une solution qui n'est pas une pure sinusoïde.

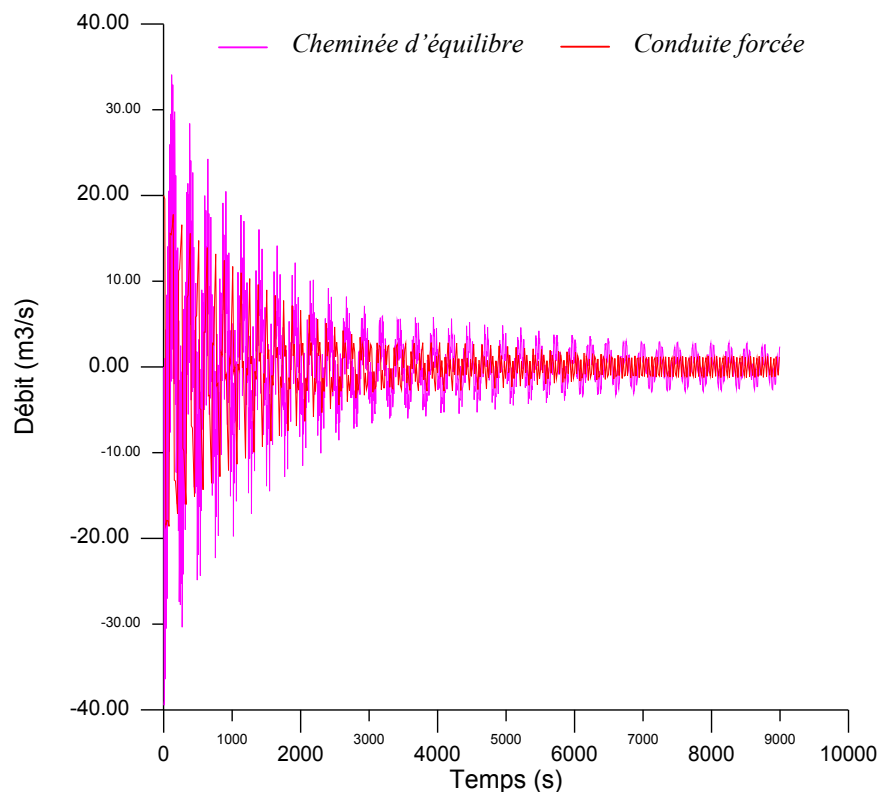
Pour apprécier l'influence de la dissipation énergétique sur les pressions dans la conduite forcée, un allongement du temps de simulation a été fait. La figure (VI.35) retrace alors la variation de la charge enregistrée au bas de la conduite (à l'obturateur) en fonction du temps, et ceci avec réduction volontaire des points par souci de clarté.



**Figure (VI.35) :** Variation temporelle de la charge au bas de la conduite forcée (avec pertes de charge)

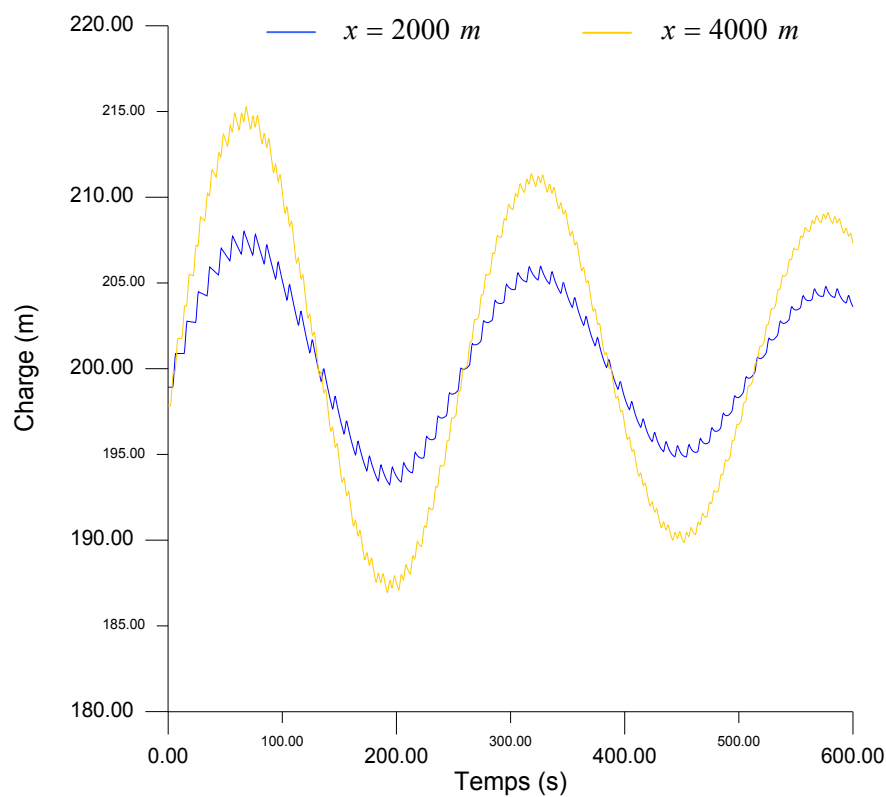
Nous pouvons discerner sur le diagramme que pour ce cas d'analyse, les valeurs extrêmes des charges sont atteintes durant les premiers instants d'apparition du régime transitoire. Par voie de conséquence, le phénomène d'amplification par battement, précédemment vu, a été éliminé par les pertes de charge, excepté néanmoins une légère amplification sans conséquence entre 300 s et 600 s. Sur ce, la charge maximale prend la valeur de 489,6 m, soit plus de 23 % de diminution comparativement au cas sans pertes de charge. On constate aussi sur la figure (VI.35) que l'amortissement des fluctuations dans la cheminée et la conduite forcée est faible, ce qui allonge la persistance du régime instationnaire dans le système. En pratique, et pour pallier à ce problème, on intercale un étranglement par divers procédés à la base de la cheminée d'équilibre.

De la sorte, la figure (VI.36) ci-dessous met au clair l'influence de l'effet de la dégradation de l'énergie mécanique du fluide sur les débits estimés dans la conduite forcée ainsi qu'au bas de la cheminée. Sur cette figure, on remarque que les enveloppes des débits prennent, comme pour les charges, une forme exponentielle tendant vers le point d'équilibre statique. Le débit dans la conduite forcée marque son maximum à  $20,17 \text{ m}^3 / \text{s}$ , alors qu'il était de  $29,65 \text{ m}^3 / \text{s}$  en absence de pertes de charge, soit environ 32 % en moins.



**Figure (VI.36) :** Fluctuation du débit de la cheminée et de la conduite forcée (avec pertes de charge)

L'analyse de la variation des charges le long de la galerie d'amenée (Figure (VI.37)) montre un comportement dynamique similaire à celui où l'on fait abstraction des pertes de charge. Au point  $x = 4000 \text{ m}$ , les charges minimale et maximale ont pour valeur de  $186,94 \text{ m}$  et  $215,27 \text{ m}$  respectivement. Quant au point  $x = 2000 \text{ m}$ , ces valeurs sont en ordre respectif  $193,23 \text{ m}$  et  $208,01 \text{ m}$ . On constate alors que la prise en compte des pertes de charge force seulement l'amortissement temporel des variables d'état mais cependant ne change en rien la répartition des charges dynamiques le long de l'axe de la galerie, qui est dans ce cas linéaire, hormis les fluctuations harmoniques de pulsation qui peuvent compromettre cette linéarité si celles-ci sont d'amplitude importante.



**Figure (VI.37) :** Variation temporelle de la charge dans la galerie d'amenée (avec pertes de charge)

En pratique, ces résultats visent à vérifier les conditions d'écoulement pouvant se manifester au cours du régime transitoire. La galerie n'étant pas conçue pour supporter des pressions élevées, il y a lieu de vérifier alors la compatibilité des valeurs calculées avec celles admises. Sur un autre plan, l'occurrence d'une charge très basse dans la galerie peut conduire à un passage en écoulement à surface libre, phénomène induit aussi par un éventuel dénoyage de la cheminée d'équilibre si les dimensions de cette dernière se trouvent inadéquates.

On reporte dans le tableau (VI.11) les résultats obtenus par la résolution numérique du modèle des ondes élastiques suivant le schéma de *Godunov* ainsi que ceux découlant des méthodes de calcul usuelles pour ce cas de figure.

**Tableau (VI.11) :** Comparatif de la solution numériques et méthodes de calcul usuelles (avec PDC)

<i>Méthode de calcul numérique</i>	Volumes finis ( <i>Godunov</i> )	Méthodes usuelles	Erreur relative (%)
Niveau haut dans la cheminée (m)	218,66	218,20	0,21
Niveau bas dans la cheminée (m)	184,00	184,62	0,34
Période d'oscillation (s)	253,16	253,75	0,23
Débit max directe de la cheminée (m <sup>3</sup> /s)	39,79	20	49,74
Débit max retour de la cheminée (m <sup>3</sup> /s)	34,83	16,63	52,25
Charge max dans la conduite forcée (m)	489,60	506,16	3,38
Débit max de la conduite forcée (m <sup>3</sup> /s)	20,17	20	0,84

Il résulte de l'analyse du tableau (VI.11) que, concernant la prédiction du marnage extrême de la cheminée d'équilibre, l'influence de la prise en compte des pertes de charge sur les résultats numériques des deux méthodes de calcul est pratiquement insignifiante. En effet, seulement 0,34 % d'écart relatif maximum est noté suivant que le calcul s'exécute par le modèle de l'oscillation en masse ou par simulation complète du système par les équations des ondes élastiques. Comme ceci a été noté précédemment, cette différence se trouve justifiée par les pulsations harmoniques dues aux coups de bélier de la conduite forcée s'empilant sur l'oscillation fondamentale, et aussi dans ce cas, l'amortissement supplémentaire induit par la prise en compte des charges dans la conduite forcée.

A l'opposé, les deux méthodes ne révèlent guère les mêmes débits maximum, entrant et sortant de la cheminée, où l'on peut constater une erreur relative de 52,25 % commise en admettant l'isolement du système galerie-cheminée dans le calcul usuel suivant la théorie de la colonne rigide. Il est donc clair que l'adoption de cette hypothèse simplificatrice conduit à une fausse analyse dynamique du système dans la mesure où ces débits permettent la conception des organes d'étranglement pratiqués à la base de la cheminée.

Pour la conduite forcée, l'application de la théorie classique d'*Allievi* pour le calcul des pressions maximales au bas de celle-ci, montre dans ce cas un certain rapprochement dans les résultats avec le calcul numérique. En admettant, pareillement au précédent test, le niveau maximum dans la cheminée comme cote de réflexion des ondes, on montre alors que l'on

commettrait 3,38 % comme erreur dans le sens de la sécurité. Comparativement au cas faisant abstraction des pertes de charge, il apparaît que cette erreur est relativement acceptable. On constate aussi qu'il en est de même pour les débits dans la conduite forcée où l'erreur que l'on ferait en isolant seule cette dernière dans les calculs, n'excède 0,84 %.

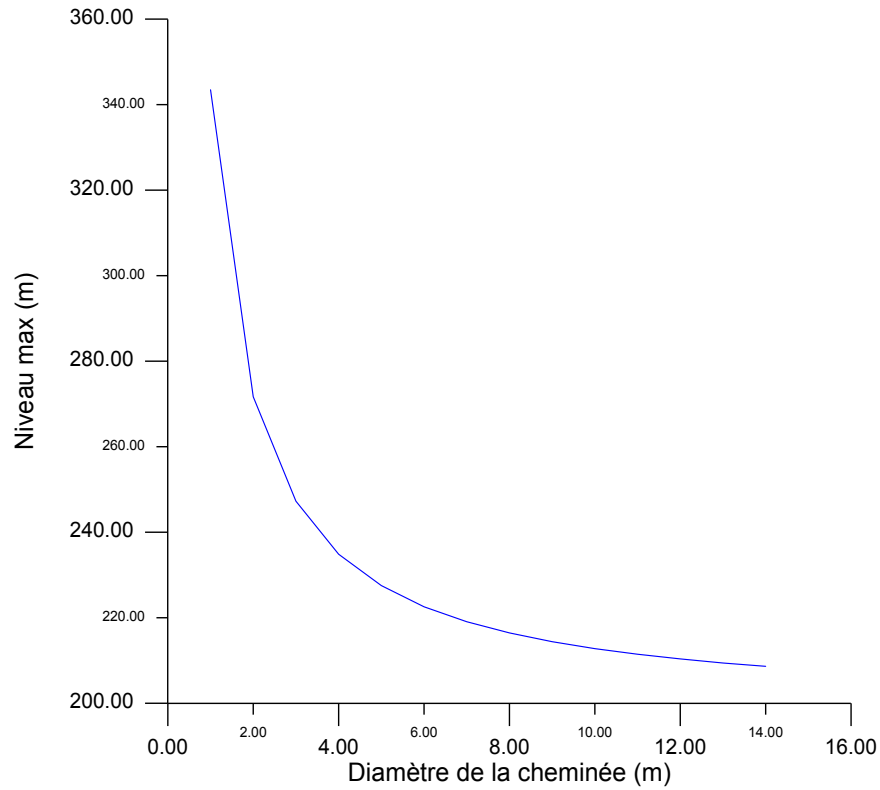
Il découle en conséquence de ce test que la prise en compte des pertes de charge dans la simulation numérique joue un rôle déterminant dans la mise en relief de l'ordre de grandeur des erreurs résultant des calculs opérés suivant les méthodes usuelles, c'est-à-dire en étudiant séparément le couple galerie-cheminée par la théorie de l'oscillation en masse et la conduite forcée moyennant la théorie d'*Allievi*. On remarque alors que dans ce cas la prise en compte du frottement laisse acceptable l'application de cet artifice de calcul séparé, mais seulement pour l'évaluation des pressions maximales dans la conduite forcée et le marnage de la cheminée d'équilibre, induit cependant de fortes erreurs quant à la prédiction des débits maximum de cette dernière.

#### **VI.4.3. Etude de l'influence des dimensions de la cheminée d'équilibre**

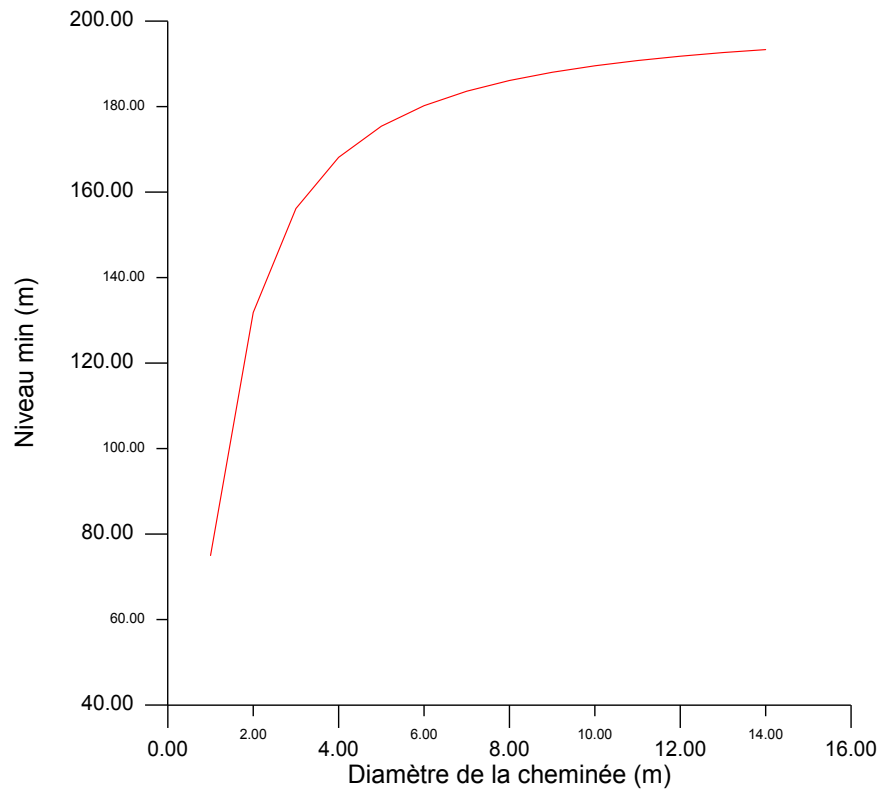
Les deux tests précédemment faits et l'examen de la répercussion des deux approches de calcul de ce type d'aménagement, soulignent l'influence de la cheminée d'équilibre sur la réponse du système en régime transitoire. Ceci est en effet intimement lié aux dimensions de la cheminée d'équilibre, étant donné qu'elles conditionnent le taux de réflexion et de réfractions des ondes émises à partir de la conduite forcée et de ce fait les maxima des pressions et débits enregistrés dans le système.

Nous allons donc tenter ici, à l'issue des deux tests réalisés, de faire une étude paramétrique en vue de mettre en relief l'influence du diamètre de la cheminée d'équilibre prismatique sur les variations maximales du niveau d'eau dans cette cheminée ainsi que la pression maximale au pied de la conduite forcée. Ceci vise à donner entre autre l'ordre d'impact de la dimension transversale de la chambre sur la réponse dynamique du système envisagé, avec prise en compte des pertes de charge dans le système. Pour ce faire, plusieurs simulations ont été exécutées et sur des temps prolongés à 150 min en vue de déceler d'éventuelles résonances ou amplifications. Les diamètres testés prennent alors des valeurs variant de 1 m jusqu'à 14 m.

Sur les figures (VI.38) et (VI.39) sont reportées les variations du niveau haut et bas maximum atteint durant le régime transitoire en fonction du diamètre assigné à la cheminée. On remarque alors que le marnage dans l'ouvrage est inversement proportionnel aux dimensions de celui-ci.



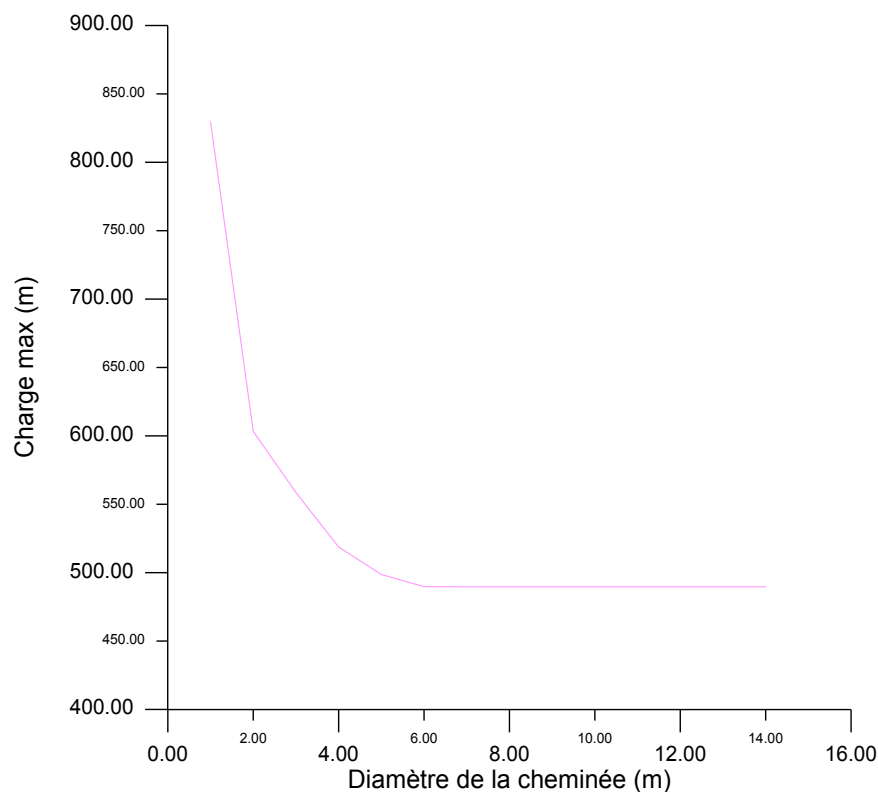
**Figure (VI.38) :** Influence du diamètre de la cheminée sur l'amplitude du niveau haut



**Figure (VI.39) :** Influence du diamètre de la cheminée sur l'amplitude du niveau bas

Par voie de conséquence, plus la section de la cheminée se voit en hausse, l'amplitude des fluctuations du plan libre d'eau se voit réduite. Ceci est dû à l'effet capacitif de la chambre où, en vertu du principe de continuité, l'emmagasinement des flux est à cet effet plus important. Il est à noter l'allure prise par les courbes qui sont de forme exponentielle admettant le niveau initial dans la cheminée comme asymptote. On voit alors ici, vérité physique et sens mathématique s'aligner pour traduire l'annulation de l'amplitude lorsque la section de la cheminée (le volume stocké en l'occurrence) tend vers l'infini.

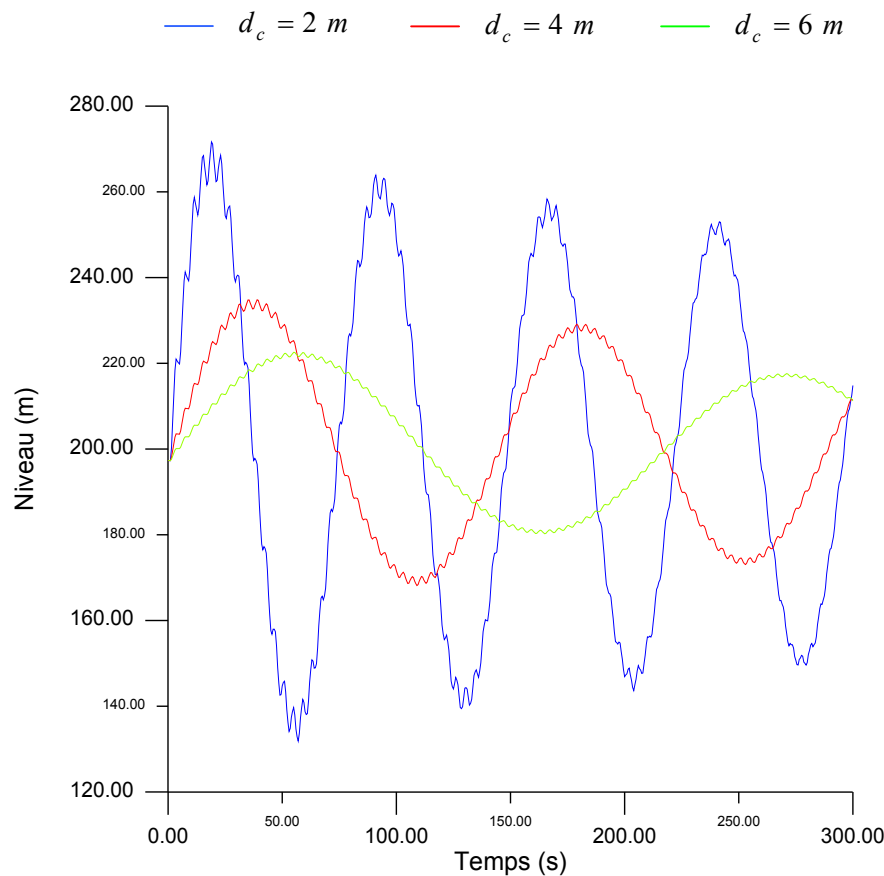
Si l'on revient à l'examen des pressions maximales au bas de la conduite forcée en fonction de la capacité de la cheminée (Figure (VI.40)), on constate que les valeurs des maxima marquent une baisse plus ou moins accentuée pour se stabiliser à partir d'un diamètre de 6 m attribué à la cheminée. Pour les diamètres inférieurs à cette limite, il a été constaté que durant les simulations effectuées l'apparition de légères amplifications conduisant à des instabilités. A cet effet et pour un diamètre de 1 m, une mise en résonance de la conduite forcée a été décelée, alors que pour les diamètres 2 m et 3 m, une instabilité est apparue en cet endroit caractérisée par des oscillations entretenues sans amortissement. Ceci montre parfaitement les risques d'une telle conception, d'où la nécessité d'un choix judicieux de la section de la cheminée dans la pratique.



**Figure (VI.40) :** Influence du diamètre de la cheminée sur la charge maximale dans la conduite forcée



En inspectant le problème du côté réel de propagation d'ondes, on s'aperçoit que plus la section du plan d'eau dans la cheminée est réduite, le coefficient de réflexion des ondes reçues prend des valeurs faibles faisant augmenter ainsi le facteur de réfraction. Subséquemment, la cheminée perd sa capacité d'interception des ondes et laisse ces dernières pénétrer dans la galerie d'amenée dont le but initial est de la protéger. En final, on assiste alors à un mouvement saccadé très agité du niveau d'eau dans la cheminée comparativement à des diamètres conséquents de celle-ci, ce que la figure (VI.41) traduit bien.



**Figure (VI.41) :** Influence du diamètre de la cheminée sur les mouvements de plan d'eau dans la cheminée

En toute rigueur, pour les petits diamètres de la cheminée, les forces d'inertie rentrent en jeu pour accélérer le fluide dans l'organe. Ceci fait que la pression à la base de la cheminée soit supérieure à la pression hydrostatique admise dans nos modèles mathématiques. Dans ce cas, il faut adjoindre à l'équation différentielle de stockage, l'équation du mouvement (second principe de la mécanique) pour traduire la variation de l'impulsion en cet endroit (Bergeron, 1949). Cependant, l'influence de ce paramètre est négligeable en pratique, raison pour laquelle on ne s'est pas attaché à cette question étant donné que notre objectif est d'illustrer l'influence qualitative des dimensions de la cheminée.

#### VI.4.4. Synthèse de l'application

A l'issue des résultats obtenus dans cette dernière application, quelques conclusions mérites alors d'être mises en évidence comme synthèse de la masse des constatations relevées, dont l'objectif est de serrer de près l'aspect pratique du calcul numérique de ce genre d'aménagement en régime transitoire, on peut ainsi dire que :

1. L'exécution des calculs suivant la technique usuelle de séparation du problème en oscillation en masse dans la galerie et coup de bélier dans le conduite forcée montre des erreurs plus ou moins importantes. On peut affirmer que pour l'estimation du niveau maximum et minimum dans la cheminée, le calcul usuel peut être utilisé sans risque important d'erreur, dans le cadre d'études sommaires par exemples. A l'opposé, ces méthodes peuvent engendrer des erreurs non négligeables quant à l'estimation des pressions dans la conduite forcée et les débits dans la cheminée. Ceci suggère alors une modélisation numérique complète suivant la théorie des ondes élastiques ;
2. L'effet du caractère élastique réel du fluide et son mode de propagation de l'information se fait ressentir aux faibles dimensions de la cheminée. Pour ces dimensions, les perturbations harmoniques dues aux pulsations dans la conduite forcée viennent perturber l'oscillation fondamentale en se superposition sur celle-ci, conduisant à un risque de résonance ou d'instabilités, en raison du faible facteur de réflexion. Ce fait provoque des interférences plus ou moins marquées faisant perdre à la cheminée son rôle maître dans ces aménagements ;
3. A travers cette application, il a été mis en évidence que la distinction, souvent évoquée dans la littérature, entre théorie d'oscillation en masse et théorie des ondes élastiques ou coup d'onde, deux phénomènes prétendus différents, est absolument factice. En effet, l'arrêt brusque d'un débit aux organes de garde ne peut faire sentir son effet dans la galerie et la cheminée autrement que par propagation d'onde. Ce ne sont que deux visages d'un même phénomène et la double dénomination signalée ne peut que jeter le trouble dans l'esprit. Comme cela été élucidé par *Jaeger* (1933) et remarquablement par *Bergeron* (1949) par sa magistrale méthode, la théorie de la colonne rigide n'est qu'un cas particulier du coup de bélier d'onde, lorsque la célérité des ondes est prise égale à l'infini (fluide et conduite infiniment rigide). Ainsi, pour une analyse rigoureuse d'un système hydraulique, le recours au modèle mathématique des ondes est indispensable.

## VI.5. Conclusion

Couronnant la synthèse bibliographique faite initialement et l'exposé des techniques de discrétisation numérique des équations différentielles hyperboliques gouvernant les écoulements non permanents en charge, le présent chapitre vient se consacrer et se concentrer exclusivement sur les applications pratiques. Ceci fait suite à une logique de toute démarche de recherche scientifique et technique consistant à mettre en œuvre toute théorie, modèle mathématique ou numérique en phase d'expérimentation en vue de tester les performances et les restrictions d'une telle modélisation et la vérification de la validité des hypothèses et simplifications admises plus à l'amont.

A cet effet, la première application vient alors sur ces concepts. Formant une sorte de banc d'essai numérique, il a été procédé à la mise en test de la méthode des volumes finis et les modèles classiques aux différences finies. Nous sommes parvenu au constat que les deux schémas *Godunov* et *Richtmyer L-W* (volumes finis) aboutissent aux mêmes résultats lorsque le terme source (non linéaire) a été omis avec la méthode des caractéristiques et le schéma de *MacCormack*. A l'opposé, l'introduction du frottement a fait révéler des différences légères dans les résultats par suite de la technique d'intégration de ce terme source. Pour des fronts d'ondes raides, le schéma de *MacCormack* a manifesté une instabilité et divergence numérique pour le cas tenant compte des pertes de charge.

Dans la même optique de validation du modèle numérique aux volumes finis, la seconde application a traité un problème pratique d'arrêt des pompes sur conduite unique de refoulement protégée par ballon anti-bélier. La validation des résultats numériques obtenus par le schéma de *Godunov* sur des essais expérimentaux donnés par *Purcell* (1997) a montré une excellente congruence. Il a été mis en relief l'influence de l'étranglement symétrique interposé à la base du ballon sur la réponse du système et la forme des ondes élastiques naissant à la suite de cette pratique. Des déformations sur les fronts d'ondes ont été observées ce qui pourrait être néfaste à la conduite (risque de cavitation et aplatissement des conduites).

Le chapitre a abordé en dernier lieu un cas complexe d'aménagement hydro-électrique muni d'une cheminée d'équilibre prismatique. Les simulations effectuées avaient pour objectif de mettre l'accent sur les limites d'application et erreurs inhérentes aux méthodes de calcul usuelles consistant à séparer oscillation en masse et coup d'onde. Les résultats qui ont en découlés ont à ce sujet recoupé les conclusions de *Hussain Khan* (1966), lequel s'est basé sur une transcription numérique de la méthode graphique de *Bergeron* pour mener son étude.

## Conclusion générale et perspectives.

Nous nous sommes intéressés dans ce travail à l'étude numérique des écoulements non permanents en charge. Il est incarné ainsi dans tout esprit d'hydraulicien ce que présente l'apparition de ce régime, en tant que phénomène du coup de bélier, comme danger potentiel dans la pratique. Par conséquent, une étude soignée des régimes transitoires dans les conduites forcées s'apparente comme nécessité imposante et constituant un test ultime à chaque installation hydraulique (station de pompage, de turbinage...etc.).

La modélisation mathématique de ce type d'écoulement par l'application des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement aboutit à un système d'équations aux dérivées partielles dit de *Saint-Venant*. En physique mathématique, ce système appartient à la classe des équations hyperboliques, gouvernant la quasi-totalité des écoulements non permanents de gaz et de liquides (en charge et à surface libre).

Par ailleurs, ce modèle d'équations hyperboliques forme toujours une barrière infranchissable aux méthodes algébriques connues pour rebondir sur des solutions analytiques applicables aux problèmes pratiques. Face à leur caractère réfractaire envers les concepts analytiques, l'intégration de ces équations différentielles ne se trouve possible que par le biais des méthodes numériques adaptées à ce genre de problèmes.

Parmi tant de modèles numériques s'apprêtant bien à simuler ces phénomènes, récemment la méthode des volumes finis s'est présentée comme étant la plus performante et a ouvert de nouvelles perspectives de recherche. Ceci revient à son approche très physique et sa formulation mathématique qui jouit de nombreux avantages déterminants dans les problèmes hyperboliques, connus en théorie des coniques par l'apparition de discontinuités dans les solutions. Par suite, notre travail s'est focalisé sur l'application de cette méthode pour une simulation correcte des régimes aussi complexes que ceux instationnaires.

Ceci étant, nous avons appliqué, pour la discrétisation des équations du mouvement, le schéma à double pas de *Richtmyer Lax-Wendroff* et la méthode de *Godunov*. Dans cette dernière approche, le calcul des flux numériques a été exécuté en résolvant un problème de

*Riemann* localisé aux interfaces intercellulaires. Vu la linéarité de la fonction de flux dans les équations du mouvement, dû au faible nombre de *Mach* en pratique ( $\ll 1$ ) et l'indépendance de la célérité des ondes et des variables d'état, il a été constaté que la solution exacte au problème de *Riemann* et l'emploi du solveur approché *HLL* aboutit à la même formulation.

Pour le traitement des conditions aux limites du domaine de calcul, nous avons introduit dans ce travail une technique basée sur le concept de « maillage excentré ». Comparativement à la technique usuelle évoquée en littérature, ce concept permet à notre connaissance une meilleure manipulation des équations formées par les organes hydrauliques.

La modélisation numérique ainsi faite du phénomène par la méthode des volumes finis a été mise en application et expérimentée dans la dernière partie du travail. Dans un stade préliminaire, nous avons testé la méthode sur un banc d'essai numérique (modèle à blanc) composé d'une conduite unique débouchant d'un bassin infini et contrôlé par un organe obturateur. Les résultats obtenus ont été confrontés à ceux du schéma de *MacCormack* et de la méthode des caractéristiques (MOC). Il a été noté alors la concordance parfaite des résultats avec les solutions analytiques dans le cas hypothétique sans pertes de charge. Cependant, les schémas aux volumes finis ont donné de meilleurs résultats pour le cas de prise en compte du terme dissipatif de frottement en raison de la technique de fractionnement des équations de conservation et d'intégration du terme source. Par ailleurs, le schéma de *MacCormack* s'est manifesté incapable de capturer les fronts d'ondes raides et la solution a présenté des instabilités numériques, inhérentes aux schémas de précisions de second-ordre, lesquelles nécessitent un traitement particulier par viscosité artificielle.

L'examen des résultats obtenus dans la première application montrait en effet que les schémas aux volumes finis de *Richtmyer L-W* et de *Godunov* se recoupaient parfaitement, ce qui revient au caractère linéaire des équations du mouvement sans terme source. En conséquence de ces résultats, la suite des applications ont été étudiées par la méthode de *Godunov*.

La seconde application a concerné quant à elle la simulation de la réponse dynamique d'une installation de pompage protégée par un ballon anti-bélier, testée suivant que ce dernier est à passage libre ou à étranglement. La solution numérique obtenue, confrontée aux données expérimentales, a révélée d'appréciables résultats. Lorsqu'un étranglement symétrique est appliqué à la base du ballon, le calcul numérique a parfaitement reproduit et capturé le front d'onde raide naissant au droit du ballon en raison de la déformation des ondes élastiques. Du point de vue numérique, ce test met bien en relief la puissance des schémas aux volumes finis à capturer ces discontinuités de contact, très fréquentes lors de variations abruptes du régime

d'écoulement. Sur le plan fonctionnel, nous avons mis l'accent sur les effets néfastes que pourrait engendrer cette pratique, qui à notre avis est fortement à proscrire, et dont la conséquence fâcheuse directe étant l'apparition de la cavitation et séparation de la veine liquide sur les points culminants du profil de la conduite. Pour éviter ceci et améliorer la réponse du système en régime transitoire, il est recommandé d'intercaler à la base du ballon des organes à perte de charge dissymétrique tels que les clapets à battant percé ou shunté par by-pass, de façon à n'engendrer aucune perte de charge à la sortie du ballon, et déprimer la veine liquide à son entrée.

Dans la dernière application, nous avons attaqué un problème plus complexe concernant les régimes transitoires dans une installation hydro-électriques protégée par une cheminée d'équilibre. Les tests numériques ont été effectués pour les deux cas d'absence et de prise en compte des pertes de charge dans le système. Entre autres, les simulations visaient à vérifier les hypothèses des calculs, usuellement pratiques, par la séparation de l'oscillation en masse dans la galerie d'amenée et le coup d'onde dans la conduite forcée, et ceci en recourant à une analyse complète par le modèle à ondes élastiques par le schéma de *Godunov*. A cet effet, il a été constaté que le modèle numérique reproduisait parfaitement l'oscillation fondamentale sinusoïdale du plan d'eau dans la cheminée et ceci en omettant dans les calculs la dissipation par frottement. Ce résultat s'accorde avec la théorie simplifiée de la colonne rigide, mais toutefois la simulation met en relief les harmoniques d'ordre élevé se superposant au mode fondamentale de l'oscillation dues aux coups d'ondes venant de la conduite forcée, chose ne pouvant être considérée dans la théorie simplifiée. Comme conséquence de cela, un phénomène de « battement », dû à la différence dans les fréquences, a été enregistré dans le système qui pourrait conduire à une auto-résonance dans ce dernier. La prise en compte des pertes de charge a toutefois amorti les oscillations et a éliminé le battement mais n'a cependant pas touché au phénomène de propagation.

Il en a découlé de cette application que la théorie de l'oscillation en masse pourrait être utilisée seulement pour l'estimation du marnage dans la cheminée, mais risque de conduire à des erreurs aberrantes quant au calcul des autres paramètres du système. Dans ce cas il faut recourir à la résolution numérique du modèle complet reposant sur la propagation des ondes.

A la lumière des expérimentations numériques effectuées dans ce travail, nous pouvons affirmer que la méthode des volumes finis est parfaitement adaptée à la simulation des écoulements non permanents en charge en faisant preuves, à l'instar du domaine des écoulements à surface libre, d'une aptitude à capturer les chocs et les fronts d'ondes raides et

garder la monotonie de la solution, sans manifestations de phénomènes parasites, tels que les oscillations numériques observées sur le schéma de *MacCormack*.

Cependant, le nombre de questions numériques et de problèmes qu'il reste encore à examiner est tel, que nous estimons tout aussi utile de porter sur ceux-ci l'effort de recherches ultérieures. Nous citons, en guise de perspectives de ce travail, parmi les principaux : l'étude du schéma de *Godunov* de deuxième ordre et le test des divers limiteurs de pente fréquemment utilisés, l'analyse des écoulements diphasiques gaz-liquide, écoulement mixte et l'expérimentation d'autres solveurs approchés de *Riemann* pour ces problèmes. L'importance de ces questions provient de l'impossibilité, à ce jour, de résoudre de manière exacte le problème de propagation des ondes dans les écoulements non permanents de manière générale. Ainsi, l'outil numérique, qui est le seul recours, doit être régulièrement forgé et amélioré pour des fins pratiques imposées par la réalité des écoulements aux Ingénieurs.

Nous n'en reconnaissons pas moins qu'il serait très intéressant de comparer la méthode des volumes finis à d'autres méthodes qui marquent actuellement un succès notable pour les problèmes hyperboliques, en l'occurrence la méthode des éléments finis discontinus de *Galerkin*. Cette dernière étant héritière de la puissance de la méthode des volumes finis et la flexibilité des éléments finis.

Cette simple énumération montre bien l'ampleur du domaine ouvert aux recherches ultérieures. Nous avons bien conscience de n'avoir fait, dans ce travail, qu'amorcer le problème. Cependant, il nous semble que nous pouvons, dès maintenant, espérer que la méthode présentée ici reçoive écho chez les Ingénieurs praticiens appelés à résoudre ce genre de problèmes. Il est évident qu'un certain temps est nécessaire pour ceci en raison de l'apparente complexité voilant cette méthode comparativement à la simplicité de la méthode des caractéristiques, mais l'histoire de développement des sciences nous apprend que l'esprit curieux et le temps sont les promoteurs de tout changement.

Enfin, ayant achevé ce travail de recherche, nous estimons que l'important pour l'esprit dans la science n'est pas tellement d'obtenir de nouveaux faits, mais aussi de découvrir de nouvelles façons d'y penser.

"J'ai vu plus loin que les autres parce que je me suis juché sur les épaules des géants. "

Isaac Newton

## Références Bibliographiques

- ABBOTT, M.B. : *"An introduction to the method of characteristics"*. Thames and Hudson, 1966.
- ABDALLAH, M.: *"Sur les méthodes de discrétisation numérique de problèmes hyperboliques non linéaires appliquées aux équations de Barré de Saint-Venant pour la modélisation de l'hydraulique en réseau d'assainissement"*. Thèse de Doctorat en Sciences de l'Ingénieur, Université de Louis Pasteur-Strasbourg I, 2005.
- ACHOUR, B. et BEDJAOU, A. (2012), "Turbulent Pipe-flow Computation Using the Rough Model Method". *International Journal of Civil Engineering and Science*, Vol. 1, N° 1, pp.36-41.
- ACHOUR, B. : *"Calcul des conduites et canaux par la MMR"*. Tome 1, Conduites et canaux en charge. Larhyss, Edition Capitale, 2007.
- AFSHAR M. H. et ROHANI M. (2008), *"Water hammer simulation by implicit method of characteristic"*. *International Journal of Pressure vessels and piping*, 85, pp 851-859.
- ALLIEVI, L.: *"Teoria del colpo d'ariete"*. *Atti Collegio Ing. Arch*,1913. Traduit vers l'anglais par HALMOSS M.E. *"Theory of water hammer"*. Typography Riccardo Garroni, Rome, 1925.
- AXWORTHY, D. H., GHIDAOU, M. S. et MCINNIS, D. A. (2000), *"Extended Thermodynamics Derivation of Energy Dissipation in Unsteady Pipe Flow"*. *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 126(4), pp. 276-287.
- BERGERON, L. : *"Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité. Méthode graphique générale"*. Dunod, Paris, 1949.
- BERREKSI, A. : *"Modélisation et simulation numérique des écoulements non permanents dans des canaux à ciel ouvert "*. Thèse de Doctorat ès Sciences en Hydraulique, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger, 2012.



- BERREKSI, A., KETTAB, A., REMINI, B. et BENMAMAR, S. (2008), "*Computation of two-dimensional unsteady supercritical flows in open channel contraction of spillway chutes*". Dam Engineering, International Papers of Technical Excellence, Water Power and Dam Construction, Vol. XIX, issue 3, pp. 149-168.
- BHALLAMUDI, S. M. et CHAUDHRY, M. H. (1992), "*Computation of flows in open-channel transitions*". Journal of Hydraulic Research Vol. 30, N° 1, pp. 77–93.
- BOILLAT, J. L. et DE SOUSA, P. : "*Hydraulic system*". Communication N°16, Laboratoire de Construction Hydraulique, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2004.
- BOUSSO, S. : "*Modélisation expérimentale des écoulements transitoires avec poches d'air emprisonnées dans les réseaux de drainage urbain*". Mémoire de Maîtrise ès sciences appliquées en Génie civil, Ecole polytechnique de Montréal, 2010.
- BRATER E. F., KING, H. W., LINDELL J. E. et WEI C. Y. : "*Handbook of Hydraulics*". MacGraw-Hill, 1996.
- CAMICHEL, C. : "*Recherches sur les conduites possédant des réservoirs d'air*". Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3<sup>e</sup> série, Tome 10, 1918.
- CAMICHEL, C., EYDOUX, D. et GARIEL, M. : "*Etude théorique et expérimentale des coups de bélier*". Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3<sup>e</sup> série, Tome 8, pp. 1-251, 1916 et Tome 8, pp. 1-145, 1917.
- CARLIER, M. : "*Hydraulique générale et appliquée*". Eyrolles, Paris, 1980.
- CHAUDHRY, M. H. : "*Applied hydraulic transients*". Van Nostrand, 1979.
- CHAUDHRY, M. H. : "*Boundary conditions for analysis of water hammer in pipe systems*". Thèse de Master en sciences appliquées, Université de British Columbia, 1968.
- CHAUDHRY, M. H. : "*Open Channels Flow*". Deuxième édition, Springer, 2008.
- CHAUDHRY, M. H. : "*Resonance in pressurized piping systems*". Thèse de Doctorat de Philosophie (PhD), Université de British Columbia, 1970.
- CHAUDHRY, M. H. et HUSSAINI, M. Y. (1985), "*Second-Order Accurate Explicit Finite-Difference Schemes for Water Hammer Analysis*". Journal of Fluids Engineering, ASME, 107, pp. 523–529.
- CHAUDHRY, M. H., BHALLAMUDI, S.M., MARTIN, C.S. et NAGHASH, M. (1990), "*Analysis of Transient Pressures in Bubbly, Homogeneous, Gas-Liquid Mixtures*". Journal of Fluids Engineering, ASME, 112, pp. 225–231.
- CHAUDHRY, M. H., ROBERSON, J. A. et CASSIDY, J. J. : "*Hydraulic engineering*". Deuxième édition, John Wiley & Sons, New York, 1997.
- COMOLET, R. : "*Mécanique expérimentale des fluides*". Masson, Paris, 1990.

- CRAYA, A. : "*Calcul graphique des régimes variables dans les canaux*". La Houille Blanche, N° 1, Nov. 1945-Jan 1946, pp. 19-38, et N° 2, Mar 1946, pp. 117-130.
- CUNGE, J. A. : "*Simulation des écoulements non permanents dans les rivières et canaux*". Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique de Grenoble, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.
- DAMMAN, D. : "*Formulaire de mathématiques pour la physique*". Dunod, 1996.
- DE ALMEIDA, B., KOELLE, E. : "*Fluid transients in pipe networks*". Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, Glasgow, 1992.
- DEMIDOVITCH, B. et MARON, I. : "*Eléments de calcul numérique*". Traduit du Russe par VALENTIN POLONSKI, Mir – Moscou, 1973.
- DUPONT, A. : "*Hydraulique urbaine*". Tome II, ouvrages de transport, élévation et distribution des eaux. Eyrolles, 1979.
- ESCANDE, L. : "*Méthodes nouvelles pour le calcul des chambres d'équilibre*". Dunod, Paris, 1950.
- ESCANDE, L. : "*Hydraulique Générale*". Tome 2. Institut National Polytechnique de Toulouse, Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique d'Electronique d'Informatique et d'Hydraulique, 1971.
- EYDOUX, D. : "*Contribution à la technique de la houille blanche, Les mouvements de l'eau et les coups de bélier dans les cheminées d'équilibre*". Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3<sup>e</sup> série, Tome 9, pp. 147-285, 1917.
- FANCHI, J.R.: "*Math refresher for Scientists and Engineers*". John Wiley and Sons, Inc. publication, 2006.
- FENNEMA, R. J. et CHAUDHRY, M. H. (1986), "*Explicit Numerical Schemes for Unsteady Free-Surface Flows with Shocks*". Water Resources Research, Vol. 22, N° 13, pp. 1923-1930.
- FENNEMA, R. J. et CHAUDHRY, M. H. (1989), "*Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows*". Journal of Hydraulic Research Vol. 27, N° 3, pp. 321-332.
- FENNEMA, R. J. et CHAUDHRY, M. H. (1990), "*Explicit Methods for 2-D Transient Free-Surface Flows*". Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 116(8), pp. 1013-1034.
- FOX, J. A. : "*Hydraulic Analysis and Unsteady Flow in Pipe Networks*". MacMillan Press, London, 1977.
- FRELIN, M. : "*Coup de bélier*", Technique de l'Ingénieur, Traité de génie mécanique, 2002.
- GARCIA-NAVARRO, P et SAVIRON, J. M. (1992), "*McCormack's method for the numerical simulation of one-dimensional discontinuous unsteady open channel flow*". Journal of Hydraulic Research, Vol. 30, N° 1, pp. 95-105.

- GHIDAOU, M. S., ZHAO, M., MCLNNIS, D. A. et AXWORTH, D. H. (2005), "*A review of Water hammer Theory and Practice*". Transactions of the ASME, Vol. 58, pp. 49-76.
- GODOUNOV, S. : "*Equations de la physique mathématique*". Traduit du Russe par EDOUARD GLOUKHIAN, Mir – Moscou, 1973.
- GOLDBERG, D. et WYLIE, E.B. (1983), "*Characteristics method using time-line interpolations*". Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 109(5), pp. 670-683.
- GRIFFITHS, D. F. et HIGHAM, D. J. : "*Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Initial Value problems*". Springer Undergraduate Mathematics, London, 2010.
- GUINOT, V. (1998), "*Boundary condition treatment in  $2 \times 2$  systems of propagation equations*". International Journal of Numerical Methods in Engineering, 42, pp. 647–666.
- GUINOT, V. (2000), "*Riemann Solvers for Water Hammer Simulations by Godunov Method*". International Journal of Numerical Methods in Engineering, 49, pp. 851–870.
- GUINOT, V. : "*Godunov-type schemes: an introduction for engineers*". Elsevier Science B.V., 2003.
- GUINOT, V. : "*Wave Propagation in Fluids : Models and numerical techniques*". ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc, 2008.
- HOFFMANN, K. A. et CHIANG, S. T. : "*Computational Fluid Dynamics*". Volume 1. Engineering Education System, USA, 2000.
- HOFFMANN, K. A. et CHIANG, S. T. : "*Computational Fluid Dynamics*". Volume 2. Engineering Education System, USA, 2000.
- HUSSAIN KHAN, M. : "*Chambres d'équilibre. Méthodes de calculs détaillés à l'aide d'une calculatrice digitale*". Thèse de Doctorat ès sciences techniques, Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne, SPES Lausanne - Dunod Paris, 1966.
- JAEGER, C. : "*Fluid transients in hydro-electric engineering practice*". Blackie, London 1977.
- JAEGER, C. : "*Théorie générale du coup de bélier. Application au calcul des conduites à caractéristiques multiples et des chambres d'équilibre*". Thèse de Doctorat ès sciences techniques, Ecole Polytechnique Fédérale (ETH) de Zurich, Dunod, Paris, 1933.
- KARNEY, B.W. et GHIDAOU, M. S. (1997), "*Flexible Discretization Algorithm for Fixed Grid MOC in Pipeline Systems*". Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 123(11), pp. 1004-1011.
- KERGER, F., ARCHAMBEAU, P., DEWALS, J. B., ERPICUM, S. et PIROTON, M. : "*Contribution théorique et numérique à la modélisation des écoulements mixtes diphasiques hautement transitoires*". Hydraulic modeling and uncertainty, Sophia Antipolis, 2010.

- KESSAL M. : "*Modélisation, en écoulement homogène, des phénomènes de cavitation lors des régimes transitoires en conduite*". Thèse de Docteur-Ingénieur en Mécanique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1987.
- LAI, C. (1988), "*Comprehensive Method of Characteristics Models for Flow Simulation*". Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 114(9), pp.1074-1097.
- LAROCK B. E., JEPSON, R. W. et WATTERS G. Z. : "*Hydraulics of pipeline systems*". CRS Press, 2000.
- LEE, T. S. (1998), "*A numerical method for the computation of the effects of an air vessel on the pressure surges in pumping systems with air entrainment*". International Journal of Numerical Methods in Fluids, N° 28, pp. 703–718
- LENCASTRE, A. : "*Manuel d'hydraulique générale*". Eyrolles, Paris, 1963.
- LEON S. A. : "*Improved modeling of unsteady free surface, pressurized and mixed flows in storm-sewer systems*". Thèse de Doctorat de Philosophie (PhD) en Génie civil, Université d'Illinois, 2007.
- LEON, A.S., GHIDAOU, M.S., SCHMIDT, A. R., GARCIA, M. H. (2009), "*Application of Godunov-type schemes to transient mixed flows*". Journal of Hydraulic Research, Vol. 47, N° 2, 147–156.
- LEVEQUE, RANDALL, J. : "*Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*". Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- MACCORMACK, R. W. (1971), "*Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer*". Lectures notes in physics, Springer-Verlag, Vol. 8, pp.151-163.
- MASSAU, J. : "*Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles*". premier fascicule, *Mouvement varié des eaux courantes, Mascarets*. Association Des Ingénieurs sortis de l'Ecole Spéciales de Gand, 1899.
- MEUNIER, M. : "*Les coups de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression*". Ecole Nationale du Génie Rural des Eaux et des Forêts, 1980.
- NGUYEN DINH TAM : "*Fluid transients in complex systems with air entrainment*". Thèse de Doctorat, Université nationale de Singapour, 2009.
- OURAGH, Y. : "*Écoulements forcés en hydraulique*". Deuxième partie. Office des Publications Universitaires, OPU, Alger, 1994.
- PARMAKIAN, J. : "*Water hammer analysis*". Deuxième édition, Dover publications Inc., New York, 1963.
- PARMLEY, L. J. : "*A computer program for surge tank analysis*". Thèse de Master en sciences appliquées, Université de British Columbia, 1958.

- PATANKAR, S. V. : "*Numerical heat transfer and fluid flow*". Series in Computational and Physical Processes in Mechanical and Thermal Sciences, Taylor and Francis, 1980.
- PISKOUNOV, N. : "*Calcul différentiel et intégral*". Tome 1, Mir – Moscou, 1980.
- PURCELL, P. J. (1997), "*Case Study of Check-Valve Slam in Rising Main Protected by Air Vessel*". Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 123 (12), pp.1166-1168.
- RAHMAN, M. et CHAUDHRY, M. H. (1995), "*Simulation of hydraulic jump with grid adaptation*". Journal of Hydraulic Research, Vol. 33, N° 4, pp. 555–569.
- RAHMAN, M. et CHAUDHRY, M. H. (1998), "*Simulation of dam-break flow with grid adaptation*". Advances in Water Resources, Elsevier Sciences, Vol. 21, N°1 , pp. 1-9.
- RAMALINGAM, D., LINGIREDDY, S. et WOOD. J. (2009), "*Using the WCM for transient modeling of water distribution networks*". American Water Work Association, Vol. 101, N° 2, pp. 75-89.
- SABBAGH-YAZDI, S. R., MASTORAKIS, N. E. et ABBASI, A. (2007), "*Water hammer modeling by Godunov type finite volume method*". International Journal of Mathematics and Computer in simulation, Issue 4, Vol. 1, pp. 350-355.
- SANDERS, B. F. (2001), "*High-resolution and non-oscillatory solution of the St. Venant equations in non-rectangular and non-prismatic channels*". Journal of Hydraulic Research, Vol. 39, N° 3, pp. 321–330.
- SATTAR, A. et CHAUDHRY, M. H. (2008), "*Leak detection in pipelines by frequency response method*" Journal of Hydraulic Research Vol. 46, N° 1, pp. 138–151.
- SATTAR, A., DICKERSON, J. R. et CHAUDHRY, M. H. (2009), "*Wavelet-Galerkin Solution to the Water Hammer Equations*". Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 135(4), pp. 283–295.
- SAVIC, Lj. et HOLLY Jr. F. M. (1992), "*Dam-break flood waves computed by modified Godunov method*". Journal of Hydraulic Research, Vol. 31, N° 2, pp. 187–204.
- SIBERTHEROS, I. A., HOLLEY, E. R., et BRANSKI, J. M. (1991), "*Spline Interpolations for Water Hammer Analysis*". Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 117(10), pp. 1332–1351.
- SINGIRESU S. RAO : "*Applied numerical methods for engineers and scientists*". Prentice Hall, New Jersey, 2002.
- SOBEY, R. J. (2004), "*Analytical solutions for unsteady pipe flow*". Journal of Hydroinformatics, 06 (3), pp. 187-207.
- STEPANOFF, A. J. : "*Pompes centrifuges et pompes hélices. Théorie, tracé et applications*". Dunod, Paris 1961.
- STREETER, V. L.: "*Fluid mechanics*". International Student Edition, MacGraw-Hill, 1962.

- STROSKOLAŃSKI, A. : "*Les turbopompes. Théorie, tracé et applications*". Eyrolles, Paris, 1977.
- SWAMEE, P. K., et SHARMA, A. K.: "*Design of water supply pipe networks*". John Wiley & Sons, Inc. 2008.
- SZYMKIEWICZ, R. (1995), "*Method to Solve 1D Unsteady Transport and Flow Equations*". Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 121(5), pp. 396-403.
- SZYMKIEWICZ, R. : "*Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics*". Water Science and Technology Library, Springer, 2010.
- SZYMKIEWICZ, R. et MITOSEK, M. (2005), "*Analysis of unsteady pipe flow using the modified finite element method*". Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 25, pp. 1983-199.
- THORLEY, A.R.D. : "*Fluid transients in pipeline systems*". Deuxieme édition, Professional Engineering Publishing Limited, London, 2004
- TORO ELEUTERIO, F. et GARCIA-NAVARRO, P. (2007), "*Godunov-type methods for free-surface shallow flows: A review*". Journal of Hydraulic Research, Vol. 45, N° 6, pp. 736–751.
- TORO, E. F. : "*Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, A Pratical Introduction*". Troisième édition, Springer-Verlag, 2009.
- TULLIS, J. P. : "*Hydraulics of pipelines. Pumps, valves, cavitation, transients*". Wiley and Sons Inc. New York, 1989.
- TYN MYINT-U. et DEBNATH, L.: "*Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*". Birkhäuser, Boston, 2007.
- VAN EMELLEN, S., SOARES-FRAZÃO, S., RIAHI-NEZHAD, C., CHAUDHRY, M. H., IMRAN, J. et ZECH, Y. (2012), "*Simulations of the New Orleans 17th Street Canal breach flood*". Journal of Hydraulic Research, Vol. 50, N° 1, pp. 70–81.
- VARDY, A. E., et BROWN, J.M.B. (1995), "*Transient, turbulent, smooth pipe friction*". Journal of Hydraulic Research, Vol. 33, N° 4, pp. 435–456.
- VARDY, A. E., et HWANG, K. L. (1991), "*A characteristics model of transient friction in pipes*". Journal of Hydraulic Research, Vol. 29, N° 5, pp. 669–684.
- WANG, Y., LIANG, Q., KESSERWANI, G. et HALL, J.W. (2011), "*A 2D shallow flow model for practical dam-break simulations*". Journal of Hydraulic Research, Vol. 49, N° 3, pp. 307–316.
- WOOD DON, J. (2005), "*Water hammer Analysis—Essential and Easy and Efficient*". Journal of Environmental Engineering, Vol. 131, N° 8. pp. 1123-1131.
- WYLIE, E. B. et STREETER, V. L.: "*Fluid transients*". MacGraw-Hill, 1978.

- YOUNG, Il KIM : "*Advanced Numerical and Experimental Transient Modelling of Water and Gas Pipeline Flow Incorporating Distributed and Local Effects*". Thèse de Doctorat de Philosophie (PhD), Université d'Adelaïde, Australie, 2008.
- ZHAO, M. et GHIDAOUI, M. S. (2004), "*Godunov-type solutions for water hammer flows*". *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 130(4), pp. 341-348.
- ZIELKE, W. : "*Frequency dependent friction in pipe flow*". Thèse de Doctorat de Philosophie (PhD), Université de Michigan, 1966.
- ZIENKIEWICZ, O. C. et TAYLOR, R. L.: "*The Finite Element Method*". Volume 1, 2 et 3, Butterworth-Heinemann, 2000.

## Appendice I.

Nous présentons dans ce qui suit le développement détaillé de la solution générale des équations différentielles de propagation d'ondes élastiques. Cette solution est due aux travaux de *Riemann* et d'*Alembert* dans l'étude des élongations des cordes

Rappelons les équations des cordes vibrantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.I.1})$$

La méthode d'intégration consiste à faire le changement de variables suivant :

$$\left. \begin{aligned} z &= t - \frac{x}{a} \\ w &= t + \frac{x}{a} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.I.2})$$

Où  $z$  et  $w$  sont dit variables de *Riemann*.

$$\text{Alors : } \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \quad \text{car : } \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 1 \quad (\text{A.I.3})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \right) \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial w} \left( \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \right) \frac{\partial w}{\partial t} \quad (\text{A.I.4})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial z \cdot \partial w} + \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \quad (\text{A.I.5})$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{avec : } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{a} \quad (\text{A.I.6})$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{a} \left( -\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \right) \quad (\text{A.I.7})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{a} \left( -\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \right) \right] \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial w} \left[ \frac{1}{a} \left( -\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial w} \right) \right] \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{A.I.8})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = -\frac{1}{a^2} \left( -\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z \cdot \partial w} \right) + \frac{1}{a^2} \left( -\frac{\partial^2 H}{\partial w \cdot \partial z} + \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \right) \quad (\text{A.I.9})$$



$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 H}{\partial z \cdot \partial w} + \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \right) \quad (\text{A.I.10})$$

En introduisant les équations (A.I.5) et (A.I.10) dans (A.I.1a), on obtient :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \Leftrightarrow \left( \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial z \cdot \partial w} + \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \right) = \left( \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 H}{\partial z \cdot \partial w} + \frac{\partial^2 H}{\partial w^2} \right) \quad (\text{A.I.11})$$

L'égalité (A.I.11) n'est valable que si  $\frac{\partial^2 H}{\partial z \cdot \partial w} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial z} = \text{Fonction indépendante de } w \\ \frac{\partial H}{\partial w} = \text{Fonction indépendante de } z \end{cases}$

Posons  $\frac{\partial H}{\partial z} = F'(z)$  par intégration  $H = F(z) + C$

$$\text{Donc : } H = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + C \quad (\text{A.I.12})$$

De même posons  $\frac{\partial H}{\partial w} = f'(w)$ , par intégration :  $H = f(w) + C$

$$\text{Donc : } H = f\left(t + \frac{x}{a}\right) + C \quad (\text{A.I.13})$$

La solution générale est la somme des deux solutions, et on aura en final :

$$H = F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) + C \quad (\text{A.I.14})$$

La constante s'obtient en considérant la pression  $H_0$  au point considéré avant l'apparition du régime transitoire, c'est-à-dire à l'instant  $t = 0$ . Donc :

$$H = H_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (\text{A.I.15})$$

Dérivons l'équation (A.I.15) par rapport à  $x$  et reportons cette dérivée dans l'équation (A.I.1b), celle-ci devient alors :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{g}{a} \left[ F'\left(t - \frac{x}{a}\right) - f'\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \quad (\text{A.I.16})$$

Après intégration, on aura :

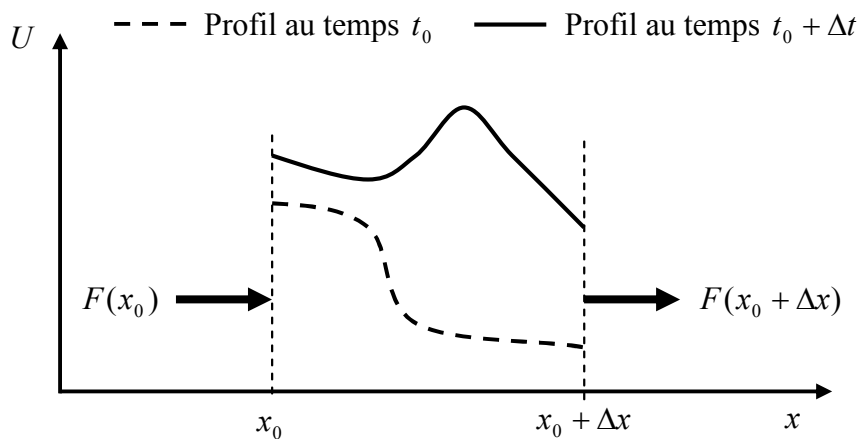
$$V = V_0 - \frac{g}{a} \left[ F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \quad (\text{A.I.17})$$

Où  $V_0$  représente la vitesse dans la canalisation en régime stationnaire.

## Appendice II.

Nous élucidons ici le concept d'application des principes de conservation d'une quantité scalaire ou vectorielle  $U$  sur un volume de contrôle et ainsi l'obtention de la forme intégrale ou faible du problème, qui est la clé de la méthode aux volumes finis. Par la suite, l'application du théorème de *Taylor-Lagrange* permettra de retrouver la formulation différentielle ou forte du dit problème.

Considérons un élément de volume de section unitaire compris entre les abscisses  $x_0$  et  $x_0 + \Delta x$  et effectuons le bilan sur l'évolution, entre les dates  $t_0$  et  $t_0 + \Delta t$  de la quantité totale de la variable  $U$  contenue dans cet élément de volume (*Guinot, 2008*).



**Figure (A.II.1) :** Bilan sur un volume de contrôle (*Guinot, 2008*)

Au temps  $t_0$ , la quantité totale  $M(t_0)$  de la variable  $U$  (c'est-à-dire la masse de  $U$ ) contenue dans le volume est donnée par :

$$M(t_0) = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} U(x, t_0) dx \quad (\text{A.II.1})$$

A la date  $t_0 + \Delta t$ , la masse totale  $M(t_0 + \Delta t)$  est alors :

$$M(t_0 + \Delta t) = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} U(x, t_0 + \Delta t) dx \quad (\text{A.II.2})$$

Entre ces deux dates, le terme source est responsable de l'apparition de la quantité suivante dans le volume considéré :

$$\Delta S = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} S(U, x, t) dx dt \quad (\text{A.II.3})$$

Il est entré par la face gauche du volume la quantité

$$\Delta F(x_0) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F(x_0, t) dt \quad (\text{A.II.4})$$

Par la face droite, il est sorti une quantité :

$$\Delta F(x_0 + \Delta x) = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} F(x_0 + \Delta x, t) dt \quad (\text{A.II.5})$$

Le bilan de  $U$  sur le volume s'écrit :

$$M(t_0 + \Delta t) = M(t_0) + \Delta F(x_0) - \Delta F(x_0 + \Delta x) + \Delta S \quad (\text{A.II.6})$$

En remplaçant les expressions (A.II.1) à (A.II.5) dans l'équation du bilan (A.II.6), on obtient :

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [U(x, t_0 + \Delta t) - U(x, t_0)] dx = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} [F(x_0, t) - F(x_0 + \Delta x, t)] dt + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} S(U, x, t) dx dt \quad (\text{A.II.7})$$

En faisant tendre  $\Delta x$  et  $\Delta t$  vers zéro, on peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} U(x_0, t_0 + \Delta t) - U(x_0, t_0) &= \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t)^2 \\ F(x_0, t_0) - F(x_0 + \Delta x, t_0) &= -\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + O(\Delta x)^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.II.8})$$

Où les quantités  $O(\Delta t)^2$  et  $O(\Delta x)^2$  sont des termes de la série de degré supérieur ou égale à 2 par rapport à  $\Delta t$  et  $\Delta x$  respectivement. Ces termes contiennent également les dérivées d'ordre 2 supérieur par rapport à  $t$  et  $x$ . Lorsque  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendent vers zéro,  $O(\Delta t)^2$  et  $O(\Delta x)^2$  deviennent négligeables par rapport à  $\Delta t \partial U / \partial t$  ainsi que  $\Delta x \partial F / \partial x$  car  $(\Delta t)^2$  et  $(\Delta x)^2$  décroissent plus vite que  $\Delta t$  et  $\Delta x$ .

Les égalités du système (A.II.8) deviennent donc :

$$\left. \begin{aligned} U(x_0, t_0 + \Delta t) - U(x_0, t_0) &\underset{\Delta t \rightarrow 0}{\approx} \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t \\ F(x_0, t_0) - F(x_0 + \Delta x, t_0) &\underset{\Delta x \rightarrow 0}{\approx} -\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.II.9})$$

De même, l'intégrale du terme source tend vers la quantité suivante :

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} S(U, x, t) dx dt \underset{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}}{\approx} S \Delta t \Delta x \quad (\text{A.II.10})$$

En substituant les équivalences (A.II.9) et (A.II.10) dans (A.II.7), il vient :

$$\Delta t \frac{\partial U}{\partial t} \Delta x = - \Delta x \frac{\partial F}{\partial x} \Delta t + S \Delta t \Delta x \quad (\text{A.II.11})$$

En simplifiant par  $\Delta t \Delta x$ , on obtient finalement l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \quad (\text{A.II.12})$$

On fera alors les remarques suivantes, notées précédemment au chapitre IV :

- L'équation (A.II.12) n'est qu'un cas particulier de l'équation intégrale (A.II.7). Elle s'obtient à partir de l'équation intégrale en faisant l'hypothèse que  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tendent vers zéro. L'équation (A.II.7), de forme faible, est donc plus générale ;
- La forme (A.II.12) contient de façon implicite l'hypothèse de continuité et dérivabilité de  $F$  par rapport à  $x$  et  $U$  par rapport à  $t$ . Cela signifie en particulier que la forme (A.II.12) ne s'applique que si les solutions sont continues dans l'espace et le temps. Ceci a des conséquences sur le calcul des solutions discontinues tel qu'a été vu au chapitre quatrième.

## Appendice III.

Ici sont données les résultats analytiques obtenus pour le problème de fermeture de vanne sur une conduite unique. Cette solution analytique est issue principalement des équations d'*Allievi* (*Carlier, 1980*) basées sur la théorie des ondes élastiques, mais elle ne permet de résoudre que quelques cas simples sans l'intervention de la dégradation énergétique. Cependant, elle constitue la seule référence pour la validation des solutions numériques et la comparaison des résultats, de part sa rigueur mathématique.

### A.III.2.1. Fermeture brusque de la vanne ( $T < 2L/a$ )

A l'instant  $t_1 = 0$ , la première équation d'*Allievi* peut s'écrire sous la forme :

$$\xi_1 = H_1 - H_0 = F(t_1) - F\left(t_1 - \frac{2L}{a}\right) \quad (\text{A.III.1})$$

Etant donné que la deuxième onde  $F(t_1 - 2L/a) = F(t_1 - \theta)$  n'existera qu'à partir de l'instant  $t_2 = \theta = 2L/a$ , à la suite de la réflexion de la première onde  $F(t_1)$  sur le réservoir, l'équation (A.III.1) se réduira alors à :

$$\xi_1 = F(t_1) = F_1 \quad (\text{A.III.2})$$

Par ailleurs, la vanne étant fermée, la vitesse sera constamment nulle ( $v = 0$ ), et la seconde équation d'*Allievi* s'écrit :

$$0 = v_0 - \frac{g}{a} \left[ F(t_1) + F\left(t_1 - \frac{2L}{a}\right) \right] \quad (\text{A.III.3})$$

Pour la même raison que précédemment, cette dernière équation se réduit à :

$$0 = v_0 - \frac{g}{a} F(t_1) = v_0 - \frac{g}{a} F_1 \quad (\text{A.III.4})$$

D'où :

$$F_1 = \frac{a.v_0}{g} \quad (\text{A.III.5})$$

Et :

$$\xi_1 = \frac{a.v_0}{g} \quad (\text{A.III.6})$$

Et ceci jusqu'au temps  $t_2 = \theta$ .

A l'instant  $2L/a$  l'onde réfléchie sur la surface libre du réservoir arrive à la vanne :

$$\xi_2 = H_2 - H_0 = F\left(\frac{2L}{a}\right) - F(0) \quad (\text{A.III.7})$$

$$\xi_2 = F(t_2) - F(t_1) \quad (\text{A.III.8})$$

$$\xi_2 = F_2 - F_1 \quad (\text{A.III.9})$$

Et :

$$0 = v_0 - \frac{g}{a}[F_2 + F_1] \quad (\text{A.III.10})$$

$$\frac{a.v_0}{g} = F_2 - F_1 \quad (\text{A.III.11})$$

Et comme :

$$F_1 = \frac{a.v_0}{g} \quad (\text{A.III.12})$$

On en déduit donc, que  $F_2 = 0$ .

La dépression engendrée à ce moment à la vanne sera alors :

$$\xi_2 = F_2 - F_1 = -\frac{a.v_0}{g} \quad (\text{A.III.13})$$

A l'instant  $t_3 = t_2 + \theta = 2\theta$  on obtient, de la même façon :

$$\xi_3 = F_3 - F_2 \quad (\text{A.III.14})$$

$$0 = v_0 - \frac{g}{a}[F_3 + F_2] \quad (\text{A.III.15})$$

$$F_3 - F_2 = \frac{a.v_0}{g} = F_3 \quad (\text{A.III.16})$$

Ce qui donne :

$$\xi_3 = F_3 = \frac{a.v_0}{g} \quad (\text{A.III.17})$$

Ainsi, le calcul peut être mené avec l'enchaînement suivant :

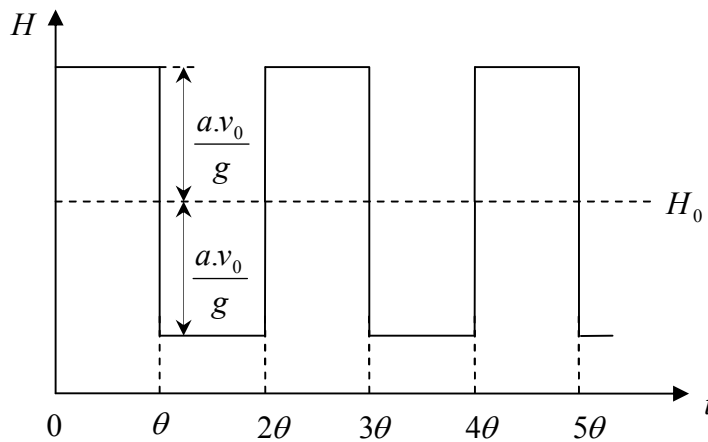
$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 = H_0 + F_1 \\ H_2 = H_0 + F_2 - F_1 \\ \dots\dots\dots \\ H_{i-1} = H_0 + F_{i-1} - F_{i-2} \\ H_i = H_0 + F_i - F_{i-1} \end{array} \right. \quad (\text{A.III.18})$$

Et :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = v_0 - \frac{g}{a} F_1 \\ v_2 = v_0 - \frac{g}{a} [F_1 + F_2] \\ \dots\dots\dots \\ v_{i-1} = v_0 - \frac{g}{a} [F_{i-2} + F_{i-1}] \\ v_i = v_0 - \frac{g}{a} [F_{i-1} + F_i] \end{array} \right. \quad (\text{A.III.19})$$

On remarque par suite, que les résultats se déduisent les uns des autres à partir de la surpression  $\xi_1$  occasionnée à l'instant  $t_1 = 0$ . Pour cette raison, cette méthode a reçue le nom des **séries enchaînées d'Allievi**.

Un monomètre enregistreur placé à l'amont de la vanne, permettra dans ce cas de relever un diagramme de pression analogue à celui de la figure (A.III.1) suivante :



**Figure (A.III.1) :** Diagramme de pression à la vanne pour une fermeture brusque

Ainsi, le phénomène de surpression qui accompagne une fermeture brusque est un phénomène périodique, dont la période a pour valeur :

$$T' = 2\theta = \frac{4L}{a} \quad (\text{A.III.20})$$

Avec  $T'$  est la période d'oscillation de la conduite.

Si toutefois la durée de la fermeture ( $T$ ) n'est pas instantanée mais reste cependant inférieure à  $2L/a$ , on a encore affaire à une **fermeture rapide**, on observera à la vanne le

même phénomène périodique avec la même surpression maximale ( $a.v_0 / g$ ). Le diagramme des pressions à cet endroit par contre, prendra l'allure suivante (Figure A.III.2) :

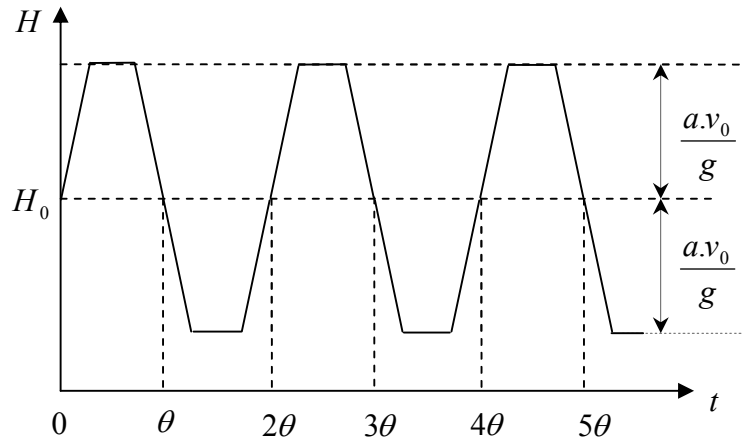


Figure (A.III.2) : Diagramme de pression à la vanne pour une fermeture rapide

La formule trouvée précédemment donnant la valeur de la surpression maximale pour une fermeture rapide (équation (A.III.6)), a été trouvée bien avant par *Joukowski*, d'où le nom qu'elle porte de "formule de *Joukowski-Allievi*"

#### A.III.2.2. Fermeture lente ( $T > 2L/a$ )

Pour simplifier le problème du point de vue analytique, on considère que la fermeture de la vanne suit une loi donnant lieu à une variation linéaire du débit en fonction du temps. Etudions dans ce cas les variations de la surpression ( $\xi$ ) et la vitesse ( $v$ ) à l'extrémité de la conduite, c'est-à-dire pour  $x = 0$ .

A un instant  $t < \theta$ , correspondant au début de la fermeture, les équations d'*Allievi* s'écrivent :

$$\xi_1 = H_1 - H_0 = F(t_1) = F_1 \quad (\text{A.III.21})$$

$$v_1 - v_0 = -\frac{g}{a} F_1 = -\frac{g}{a} \xi_1 \quad (\text{A.III.22})$$

Mais on a, par hypothèse, une variation linéaire du débit en fonction du temps, donc :

$$Q_1 = Q_0 \left( 1 - \frac{t_1}{T} \right) \quad (\text{A.III.23})$$

De ce fait :

$$v_1 = v_0 \left( 1 - \frac{t_1}{T} \right) \quad (\text{A.III.24})$$



$$v_1 - v_0 = \left( -v_0 \frac{t_1}{T} \right) = -\frac{g}{a} \xi_1 \quad (\text{A.III.25})$$

D'où :

$$\xi_1 = \frac{a v_0 t_1}{g T} \quad (\text{A.III.26})$$

Autrement dit, la surpression croit linéairement avec la fermeture de l'obturateur et enregistre sa valeur maximale lorsque le temps ( $t_1$ ) atteint sa limite maximale correspondant à  $\theta = 2L/a$ , qui est la demi période d'oscillation. Cette surpression aura alors pour valeur maximale :

$$\xi_{\max} = \frac{a v_0}{g T} \frac{2L}{a} = \frac{2.v_0.L}{g.T} \quad (\text{A.III.27})$$

Pour étudier le phénomène à partir du temps  $t_1 = \theta$ , considérons l'instant  $t_2 = t_1 + \theta = t_1 + 2L/a$ , avec  $t_1 \leq 2L/a$ .

Les équations d'*Allievi* donnent pour  $x = 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_2 = H_2 - H_0 = F(t_2) - F(t_1) = F_2 - F_1 \\ v_2 - v_0 = -\frac{g}{a} [F(t_2) + F(t_1)] = -\frac{g}{a} [F_2 + F_1] \end{array} \right. \quad (\text{A.III.28})$$

$$(\text{A.III.29})$$

Et comme nous avons, par hypothèse :

$$v_2 = v_0 \left( 1 - \frac{t_2}{T} \right) \quad (\text{A.III.30})$$

$$v_2 - v_0 = \left( -v_0 \frac{t_2}{T} \right) = -\frac{g}{a} [F_2 + F_1] \quad (\text{A.III.31})$$

D'où :

$$F_2 + F_1 = \frac{a v_0 t_2}{g T} \quad (\text{A.III.32})$$

$$F_2 - F_1 = \xi_2 \quad (\text{A.III.33})$$

Avec :

$$F_1 = \xi_1 = \frac{a.v_0.t_1}{g.T} \quad (\text{A.III.34})$$

En éliminant  $F_1$  et  $F_2$  entre ces trois équations, il vient alors :

$$\xi_2 = \frac{a.v_0}{g.T} \left( \frac{2L}{a} - t_1 \right) \quad (\text{A.III.35})$$

Or :

$$0 < t_1 \leq \frac{2L}{a} \quad (\text{A.III.36})$$

Donc :

$$0 < \frac{2L}{a} - t_1 \leq \frac{2L}{a} \quad (\text{A.III.37})$$

$$0 < \xi_2 \leq \frac{a.v_0}{g.T} \frac{2L}{a} \quad (\text{A.III.38})$$

D'où :

$$\xi_2 \leq \frac{2.v_0.L}{g.T} \quad (\text{A.III.39})$$

Ainsi, pendant la seconde période s'écoulant du temps  $\theta$  au temps  $2\theta$  après le début de la fermeture de la vanne, la surpression maximale est alors donnée par :

$$\xi_{2\max} = \xi_{1\max} = \frac{2.v_0.L}{g.T} \quad (\text{A.III.40})$$

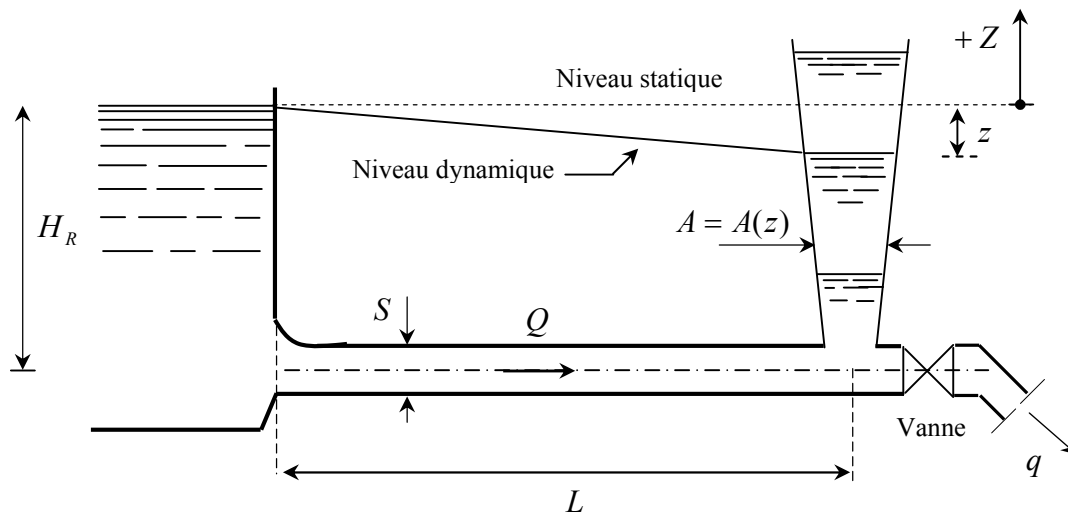
On montrerait facilement qu'il en est de même pour les intervalles de temps (de  $2\theta$  à  $3\theta$ , de  $3\theta$  à  $4\theta$ , etc.).

La formule (A.III.40) qui donne la surpression maximale, dite de *Michaud*, est la seule utilisée pratiquement dans le cas des fermetures lentes,  $T > 2L/a$ .

## Appendice IV.

Un exposé détaillé de la théorie de l'oscillation en masse est donné dans ce qui suit. Etant un cas particulier du modèle de propagation par ondes, cette approche se trouve justifiée dans les circonstances de variations lentes du régime d'écoulement, en particulier en présence des organes capacitifs tels que les cheminées d'équilibre.

Considérons une installation hydro-électrique représentée sur la figure (A.IV.1), dotée d'une cheminée d'équilibre au bout du tunnel d'amenée des eaux pour le protéger des variations brusques du régime d'écoulement. Lors de la fermeture des vannes conduisant à l'annulation du débit dans la conduite forcée qui fait suite à la cheminée, l'eau en mouvement du tunnel est animée d'une énergie cinétique qui ne peut être annulée instantanément. En vertu de la loi de conservation d'énergie, toute l'énergie cinétique se trouve alors transformée en énergie potentielle se manifestant par une surélévation du niveau d'eau dans la cheminée jusqu'à atteindre le niveau maximum lorsque la force vive de l'eau a été entièrement utilisée pour remonter le niveau d'eau au dessus du niveau statique.



**Figure (A.IV.1) :** Schéma d'une installation hydro-électrique munie d'une cheminée d'équilibre

Par suite de la pesanteur, l'eau dans la cheminée tend à redescendre et communique à l'eau de la galerie d'amenée une force vive qui déplace celle-ci en sens inverse du mouvement précédent et ainsi de suite (Eyedoux, 1917). On observe donc une oscillation pendulaire de

grande période autour d'une position d'équilibre jusqu'à ce qu'elle soit absorbée par les pertes de charge dans le système. Ce phénomène analogue à celui de l'oscillation d'une colonne d'eau dans un tube en U, a été assimilé à un mouvement en bloc du fluide et sa théorie a reçu le nom de la théorie de la **colonne rigide**.

#### A.IV.1. Hypothèses de calcul

Pour procéder au dimensionnement d'une cheminée d'équilibre, il faut connaître l'évolution du plan d'eau ( $z$ ) en fonction du temps. Pour ce faire, les hypothèses conventionnelles suivantes sont admises (*Boillat et De Souza, 2004*) :

1. Le fluide est incompressible ;
2. Les conduites sont infiniment rigides ;
3. Les paramètres géométriques et hydrauliques sont continuellement dérivables ;
4. Le plan d'eau dans la cheminée est toujours horizontal ;
5. L'inertie du fluide dans la cheminée est négligeable.

Les hypothèses 1 et 2 impliquent que tout changement d'état dans l'écoulement se transmet instantanément à l'ensemble du système considéré, contrairement à la réelle propagation par ondes élastiques dans le cas du coup de bélier.

L'hypothèse 3 indique que le plan d'eau dans la cheminée peut être trouvé par une approche d'équation différentielle. De plus, l'écoulement non stationnaire peut être considéré comme graduellement varié, où les paramètres ne changent que graduellement à l'endroit considéré par rapport au temps.

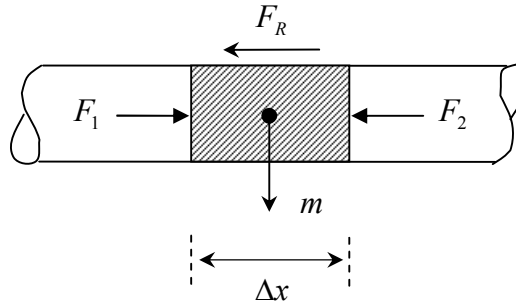
L'hypothèse 4 admet que le niveau d'eau n'est fonction que du temps, et est indépendant de sa position dans la cheminée d'équilibre, ce qui n'est pas satisfait dans le cas des cheminées inclinées fréquemment utilisées. L'hypothèse 5 quant à elle est généralement admise en raison des faibles masses et vitesses de l'eau dans la cheminée.

#### A.IV.2. Equation dynamique

Découpons un volume élémentaire du fluide contenu dans la conduite, qui est dans ce cas considéré comme un bloc solide, et établissons le bilan des forces qui lui sont appliqués (Figure (A.IV.2)).

- sur la face amont depuis le réservoir, la force  $F_1 = \varpi . S . H_R$
- à la face aval depuis la cheminée d'équilibre, la force  $F_2 = \varpi . S . (H_R + z)$
- la force résistante due aux frottements sur les parois  $F_f = \varpi . S . J$

Où  $S$  représente la section transversale de la conduite,  $H_R$  est la charge statique sur l'axe de la conduite,  $z$  étant le niveau d'eau au dessus de la charge statique et  $J$  la charge perdue par le fluide pour atteindre la cheminée



**Figure (A.IV.2) :** Schématisation du volume de contrôle

En considérant le sens d'écoulement vers l'aval comme positif, alors la somme des forces extérieures appliquées à l'élément fluide devient :

$$\sum F_{ext} = F_1 - F_2 - F_3 \quad (\text{A.IV.1})$$

D'où :

$$\sum F_{ext} = -\varpi.S.(z + J) \quad (\text{A.IV.2})$$

La masse du liquide considéré étant :

$$m = \frac{\varpi}{g} S.L \quad (\text{A.IV.3})$$

Si ( $v$ ) est la vitesse au temps considéré ( $t$ ), la variation temporelle de la quantité de mouvement vaut :

$$\frac{L}{g} \varpi.S. \left( \frac{dv}{dt} \right) \quad (\text{A.IV.4})$$

Conformément au principe fondamental de la dynamique de *Newton*, stipulant que la somme des forces extérieures est égale à la variation de l'impulsion par rapport au temps, il en résultera alors:

$$\frac{L}{g} \varpi.S. \left( \frac{dv}{dt} \right) = -\varpi.S.(z + J) \quad (\text{A.IV.5})$$

Ou encore :

$$\frac{L}{g} \left( \frac{dv}{dt} \right) + z + J = 0 \quad (\text{A.IV.6})$$

En exprimant la perte de charge  $J$  en fonction du débit  $Q$  et en prenant soin du sens de l'écoulement, on écrit alors :

$$\frac{L}{g} \left( \frac{dv}{dt} \right) + z + R.Q.|Q| = 0 \quad (\text{A.IV.7})$$

Avec  $R$  représentant la résistance de la conduite.

L'expression (A.IV.7) est l'équation dynamique d'une cheminée d'équilibre simple. Pour le cas stationnaire ( $dv/dt = 0$ ), on retrouve l'équation classique de conservation d'énergie.

### A.IV.3. Equation de continuité

En se référant au schéma de la figure (A.IV.1), l'équation de continuité appliquée à la jonction de la cheminée d'équilibre implique que le débit d'amené  $Q$  soit égal à la somme des débits entrant à la cheminée ( $V.A$ ) et le débit partiel ( $q$ ) passant à travers la vanne, soit :

$$Q = V.A + q \quad (\text{A.IV.8})$$

En exprimant la vitesse  $V$  dans la cheminée d'équilibre comme étant le changement de la coordonnée verticale du plan d'eau par rapport au temps, l'équation (A.IV.8) s'écrira :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{A} (Q - q) \quad (\text{A.IV.9})$$

Le mouvement d'oscillation du plan libre de l'eau  $z(t)$  dans une cheminée d'équilibre au bout d'une conduite est donc décrit par le système d'équations différentielles (A.IV.7) et (A.IV.9), qu'il convient alors de résoudre. Comme pouvons-nous constater, du fait de la rigidité supposée du fluide et des parois, la variabilité dans l'espace est absente ( $\partial/\partial x = 0$ ), la variable indépendante sera seule le temps ce qui facilitera la résolution du problème comparé à celui des ondes élastiques. Mais la présence du terme non linéaire  $R.Q.|Q|$  dans l'équation (A.IV.7), outre le débit ( $q$ ) qui peut être une fonction quelconque du temps dans l'équation (A.IV.9), rend la résolution analytique directe de ces équations impossible. Pour contourner cette difficulté, plusieurs méthodes approchées d'intégration pas par pas ont été utilisées, parmi lesquelles nous citons (*Escande, 1950* et *Jaeger, 1977*) ;

- Méthode de *Pressel* ;
- Méthode d'*Escande* ;
- Méthode graphique de *Schoklitsch* ;
- Méthode numérique de *Runge-Kutta*.

Dans ce qui suit, nous exposons la solution analytique de ces équations pour un cas simple sans pertes de charge (linéaire et singulière), et avec une forme prismatique de la cheminée d'équilibre pour valider les résultats numériques issus de la méthode des caractéristiques.

#### **A.IV.4. Solution des équations**

Dans le cas où le système est dépourvu de la dégradation énergétique, et pour une fermeture brusque de l'obturateur ( $q = 0$ ), l'équation de continuité se réduira alors à :

$$v.S = A \frac{dz}{dt} \quad (\text{A.IV.10})$$

L'équation dynamique quant à elle, prendra la forme :

$$\frac{L}{g} \left( \frac{dv}{dt} \right) + z = 0 \quad (\text{A.IV.11})$$

Dérivons à présent l'équation (A.IV.10) par rapport au temps, on aura :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{A}{S} \frac{d^2z}{dt^2} \quad (\text{A.IV.12})$$

En portant l'équation (A.IV.12) dans l'équation dynamique (A.IV.11), l'équation différentielle du mouvement oscillatoire devient :

$$\frac{L}{g} \cdot \frac{A}{S} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + z = 0 \quad (\text{A.IV.13})$$

C'est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficient constant. Du fait de l'absence du terme ( $dz/dt$ ), la solution générale de l'équation (A.IV.13) sera :

$$z = C_1 \cos(\omega.t) + C_2 \cdot \sin(\omega.t) \quad (\text{A.IV.14})$$

Avec :  $\omega = \sqrt{\frac{g.A}{L.S}} = \frac{2.\pi}{T}$  dite fréquence angulaire,  $T$  : période d'oscillation,  $C_1$  et  $C_2$

sont des constantes arbitraires déterminées par les conditions initiales.

D'où :

$$z = C_1 \cos\left(\frac{2.\pi}{T} t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{2.\pi}{T} t\right) \quad (\text{A.IV.15})$$

A  $t = 0$ , le niveau du plan d'eau dans la cheminée est celui du niveau statique,  $z = 0$ , alors :

$$z = C_2 \cdot \sin\left(\frac{2.\pi}{T} t\right) \quad (\text{A.IV.16})$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2.\pi}{T} C_2 \cdot \cos\left(\frac{2.\pi}{T} t\right) \quad (\text{A.IV.17})$$

Par ailleurs :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{v.S}{A} \quad (\text{A.IV.18})$$

D'où :

$$v = \frac{A}{S} C_2 \frac{2.\pi}{T} \cdot \cos\left(\frac{2.\pi}{T} t\right) \quad (\text{A.IV.19})$$

A  $t = 0$ ,  $v = v_0$ , on aura :

$$v_0 = \frac{A}{S} C_2 \frac{2.\pi}{T} \quad (\text{A.IV.20})$$

Sachant que la période des oscillations s'écrit :

$$T = 2.\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g} \frac{A}{S}} \quad (\text{A.IV.21})$$

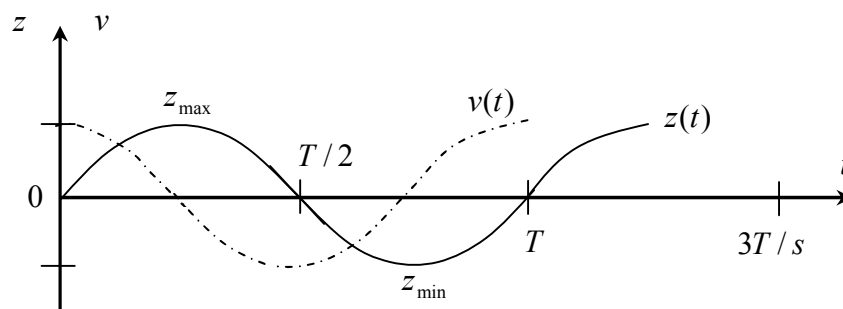
La substitution de l'équation (A.IV.21) dans (A.IV.20) donnera la constante  $C_2$  telle que:

$$C_2 = v_0 \sqrt{\frac{L}{g} \frac{S}{A}} \quad (\text{A.IV.22})$$

D'où l'équation décrivant les oscillations du plan d'eau en fonction du temps :

$$z = v_0 \sqrt{\frac{L}{g} \frac{S}{A}} \cdot \sin\left(\frac{2.\pi}{T} t\right) \quad (\text{A.IV.23})$$

On remarque que l'oscillation de la masse d'eau dans une cheminée d'équilibre prismatique autour de sa position d'équilibre (niveau statique) est sinusoïdale, si l'effet de frottement est négligé (Figure (A.IV.3)).



**Figure (A.IV.3) :** Solution analytique de l'oscillation du plan libre dans la cheminée (cas simple)



De l'équation (A.IV.23), on déduit que l'amplitude maximale de l'oscillation du plan libre d'eau dans la cheminée vaut :

$$z_{\max} = v_0 \sqrt{\frac{L}{g} \frac{S}{A}} \quad (\text{A.IV.24})$$

On s'aperçoit que la période d'oscillation est indépendante du débit initial, contrairement à l'amplitude qui est proportionnelle à ce dernier.

Notons que la valeur de l'amplitude maximale ( $z_{\max}$ ) trouvée à partir de la résolution de l'équation différentielle du mouvement (A.IV.13), peut être trouvée immédiatement par des considérations mécaniques simples telle que l'application du théorème des forces vives, et ceci en écrivant que l'énergie cinétique initiale  $\left( \frac{\varpi}{g} S.L \frac{v_0^2}{2} \right)$  du fluide, en s'annulant a fait un travail correspondant à la montée dans la cheminée d'un poids d'eau ( $\varpi.A.z_{\max}$ ) à la hauteur du centre de gravité du volume d'eau  $\frac{z_{\max}}{2}$ . Mais cette considération ne donne que la fluctuation maximale, et ne permet en aucun cas de retrouver l'allure sinusoïdale du mouvement en fonction du temps.

## **Résumé:**

Dans les installations hydrauliques, les écoulements non permanents en charge provoqués par les variations du régime conduisent souvent à des conséquences néfastes, d'où la nécessité d'une analyse fine du comportement dynamique des systèmes en ces conditions de marche exceptionnelles. Le présent travail s'est alors porté sur l'étude des régimes transitoires par voie de simulation numérique et ceci par usage de la Méthode des Volumes Finis (M.V.F.), très réputée dans la résolution des problèmes hyperboliques.

En première partie du travail, consacrée à la revue de littérature, sont données les généralités et état de l'art concernant la problématique, modélisation mathématique des régimes transitoires en charge pour en suite aborder les méthodes numériques de résolution des équations différentielles du mouvement instationnaire. Après avoir présenté les modèles classiques aux différences finies (schéma de *MacCormack* et méthode des caractéristiques), un accent particulier est mis dans ce travail sur les schémas aux volumes finis de type *Godunov* et problème de *Riemann* associé ainsi que celui de *Richtmyer-Lax Wendroff*.

La seconde partie, constituant le noyau du travail, est vouée à la modélisation et simulation numérique. Il a été procédé à la discrétisation du modèle mathématique par la méthode des volumes finis et où une nouvelle technique d'implémentation des conditions aux limites est introduite suivant un concept de maillage excentré. Les différents schémas numériques d'abord sont testés sur un banc d'essai, pour enchaîner après avec des cas de test pratiques. Les performances de la méthode des volumes finis sont analysées et confrontées aux mesures expérimentales dans le cas d'une installation de pompage protégée par un ballon anti-bélier à passage libre et avec étranglement à sa base. Finalement un cas complexe d'une installation hydroélectrique munie d'une cheminée d'équilibre est simulé. À l'issue de chaque analyse, des conclusions sur le plan numérique et pratique sont dégagées en vue d'une meilleure modélisation et conception des dispositifs de protection anti-bélier.

**Mots clés :** Régime transitoire – Coup de bélier – Simulation numérique – Méthode des volumes finis – Manœuvre des vannes – Réservoir d'air – Cheminée d'équilibre

## **Abstract:**

In the hydraulic installations, the unsteady pressurized flows caused by the variations of the flow conditions often lead to fatal consequences, from where need for a fine analysis of the dynamic behaviour of the systems in these exceptional conditions. This work was then concerned the study of the hydraulic transients meaning numerical simulation and this by the use of the Finite Volume Method (F.V.M), largely applied in the resolution of the hyperbolic problems.

In first part of work, devoted to the review of literature, are given the general information and state of the art concerning the problems, mathematical modelling of the hydraulic transient then the numerical methods used for resolution of the differential equations of the unsteady flow. After having presented the traditional models based on finite-differences approach (*MacCormack* scheme and method of the characteristics), a particular attention is given in this work to the *Godunov* type and *Richtmyer-Lax Wendroff* finite volume method and associated *Riemann* problem.

The second part, constituting the heart of the work, is dedicated to modelling and numerical simulation. It was preceded to the discretization of the mathematical model by the finite volume method where a new method of implementation of the boundary conditions is introduced according to a concept of decentered grid. The various numerical schemes are initially tested on a numerical test bench, to attack after then with practical test cases. The performances of the finite volume method are analyzed and confronted with experimental measurements in the case of a pumping station protected by an air vessel with free passage and with throttling at its base. Finally a complex case of a hydroelectric installation protected with a surge tank is simulated. From each analysis, conclusions on the numerical and practical level are shown for a better modelling and design of hydraulic transient protection devices.

**Key words:** Unsteady flow – Water hammer – Numerical simulation – Finite volume method – Valves operations – Air vessels – Surge tank