

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département de Génie Electrique  
Ref :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة الكهربائية  
المرجع:.....

## MEMOIRE DE MAGESTER

Spécialité : **Electrotechnique**  
Option: **Electricité Industrielle**  
Par  
**SAKER MEBARKA**  
(Ingénieur en Electrotechnique)

## THEME

# Combinaison des Méthodes Volumes Finis Et Décomposition du Domaine pour La Résolution Des Systèmes Electromagnétiques

## Devant le jury composé de:

SRAIRI.K	Professeur	Université de Biskra	Président
S.M. MIMOUNE	Professeur	Université de Biskra	Rapporteurs
MENACER Arezki	Maitre de conférence	Université de Biskra	Examineur
TITAOUINE A Nacer	Maitre de conférence	Université de Biskra	Examineur

## **Introduction générale:**

Un grand nombre de problèmes d'ingénierie se réduisent à des équations aux dérivées partielles qui, à cause de leur complexité, doivent être remplacées par des approximations. La Théorie concernant les équations aux dérivées partielles (existence, unicité, problème bien Posé) ne constitue pas un ensemble aussi complet que celle des équations aux dérivées Ordinaires. D'autre part, dans le cas où les solutions analytiques existent, ces solutions sont Triviales ou tellement simples qu'elles ne sont pas utiles en pratique au cours de ces dernières années, l'ingénieur a besoin de modèles physico-mathématique qui lui permettent de simuler le comportement de son dispositif les méthodes de l'ingénieur ont été profondément modifiées par les progrès de l'informatique et par des outils d'analyse numérique parus sur le marché du logiciel.

Nous pouvons distinguer les trois principales :

La méthode des Différences Finies (FDTD), la méthode des éléments finis (FETD) et la méthode des Volumes Finis (FVTD). Elles sont basées sur la résolution des équations de Maxwell dans le domaine temporel et sont généralement utilisées pour construire des simulateurs numériques. Seule la nature ou la géométrie de l'application à modéliser permettent réellement de faire un choix entre ces méthodes [17].

Les méthodes de différences finies basées sur des maillages cartésiens sont faciles à mettre en œuvre et performantes mais mal adaptées à la prise en compte de formes géométriques irrégulières.

La méthode des éléments finis apparaît la plus adaptée à résoudre ce type de problème. Cependant la discrétisation de la structure mathématique engendrée par les équations aux dérivées partielles reste difficile, ces problèmes mais sont pénalisées par la complexité de mise en œuvre et le coût des calculs En effet, les termes sources des équations à résoudre (connues analytiquement) qui sont, généralement, la densité de courant ou le champ source présentent une difficulté majeure, leur discrétisation. De plus, la qualité de la solution dépend directement de la prise en compte de ces termes sources. On notera enfin, qu'en électrotechnique, les termes sources sont généralement des inducteurs.

Les méthodes des Volumes Finis sont utilisées depuis longtemps pour les simulations numériques en mécanique des fluides mais elles ont trouvé une seconde jeunesse avec des applications en électromagnétisme. Elles font partie, au même titre que les Différences Finies, de ces méthodes numériques capables de résoudre les équations de Maxwell dans le domaine temporel.

Les méthodes de volumes finis ont été mises au point initialement pour des lois de conservation, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques. Ces équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. Les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface en utilisant le théorème de flux-divergence. Ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. On utilise une fonction de flux numérique pour faire une approximation des flux aux interfaces.

Tout problème électromagnétique résolu par un code numérique Volumes Finis obéit à une procédure particulière, il faut d'abord diviser (ou mailler) le domaine de calcul en cellules élémentaires (ou mailles) pour ensuite y résoudre les équations de Maxwell. L'attrait principal de type de méthode est la tolérance vis à vis du maillage et de la position des inconnues.

- Le premier a pour objet la description des phénomènes électromagnétiques dans le cadre des hypothèses de l'électrotechnique. Le modèle mathématique, que nous allons présenter, comprendra les équations de Maxwell, les lois de comportement des matériaux et les conditions aux limites. Puis, nous donnons les formulations, de la magnétostatique et de la magnétodynamique en introduisant des potentiels scalaires et vecteurs (magnétique et électrique) qui s'intègrent dans la structure préalablement définie. Nous verrons enfin comment introduire dans les formulations des grandeurs globales telles que la tension ou l'intensité du courant.

Dans le cadre de notre travail, nous proposons un maillage en 1D (monodimensionnel) et 2D (bidimensionnel) de type volume finis classique aux formes géométrique simple Pour la programmation on utilise le logiciel MATLAB pour déterminer le champ magnétique du problème physique et développer la résolution numérique dans le système magnétostatique par la méthode des volumes finis sur une géométrie 2D et 1D

Ce travail est organisé comme suit:

Le premier chapitre envisage les différentes formulations mathématiques et physiques du phénomène électromagnétique. Le deuxième chapitre est consacré aux diverses méthodes de discrétisation nous introduisons la méthode des volumes finis qui présente une solution numérique 1D.

Dans le troisième chapitre nous améliorons le code numérique 2D écrit avec Une méthode de volumes finis et la réalisation d'un programme permettant de calculer une approximation de ces intégrales elliptiques pour des maillages volumiques rectangulaires de validation. Enfin dans le quatrième chapitre, nous proposons les différentes applications pour vérifier la fiabilité du code de calcul établi.

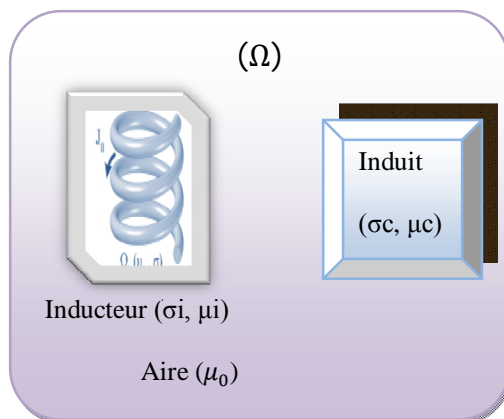
## I.1 INTRODUCTION

Pour l'étude du fonctionnement de tout dispositif physique l'établissement d'un modèle mathématique permettant de décrire les phénomènes qui s'y déroulent constitue la première Approche au problème. Nous exposerons les équations locales, qui décrivent les champs et les formulations en potentiel vecteur magnétique.

Dans ce chapitre, nous allons, essayer d'étudier l'évolution des phénomènes électromagnétiques en prenant comme exemple d'application constitué d'un inducteur, d'un Induit et de l'air environnant, cette quantification est assurée par la formulation des équations aux dérivées partielles caractéristiques. Ces formulations sont déduites à partir des systèmes de MAXWELL.

Le système électromagnétique peut être schématiquement représenté par des trois principaux éléments (figure. I.1). [11]

- Un inducteur : la région de l'excitation.
- Induit : la région de la charge.
- Un isolant électrique : l'air environnant.



$\sigma_i$  : conductivité électrique de l'inducteur  
 $\sigma_c$  : conductivité électrique de la charge  
 $\mu_0$  : perméabilité magnétique absolue du vide  
 $\mu_c$  : perméabilité magnétique de la charge  
 $\Omega$  : Domaine d'étude  
 $\partial\Omega$  : frontière du domaine d'étude

Figure I.1. Objets constitutifs d'un dispositif électromagnétique

## I.2 Équations de Maxwell

Il y a un peu moins de deux cents ans, Maxwell réunit les lois expérimentales trouvées par ses prédécesseurs Faraday, Ampère et Gauss en les mettant en forme et en les exprimant sous forme différentielle. Ces équations mathématiques sont fondamentales, elles sont à l'origine de la théorie de la relativité restreinte et de la physique quantique. Elles constituent la base de l'électromagnétisme.

Les équations de Maxwell font apparaître différentes variables d'état. Suivant chaque type de problèmes électromagnétiques, différentes formulations ou une combinaison de plusieurs d'entre elles permettent de résoudre le problème électromagnétique. Ainsi, de nombreuses formulations ont déjà été développées en deux ou en trois dimensions.

Elles peuvent s'écrire en termes de potentiels scalaires, de potentiels vecteurs ou de champs de nature électrique ou magnétique. Ces phénomènes électromagnétiques variables dans le temps et dans l'espace sont régis par les quatre équations locales de Maxwell qui s'écrivent quel que soit le milieu considéré :

- *Lois de Maxwell- Ampères*

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.1)$$

- *Lois de Maxwell-Faraday (loi de l'induction)*

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

- *Lois de conservation du flux (Loi de Biot - Savart)*

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

- *Lois de Maxwell-gauss*

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (1.4)$$

Chacune de ces équations traduit les propriétés physiques des grandeurs électromagnétiques.

A ces équations, on ajoute les équations de comportement du milieu :

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{J}_d = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.6)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.7)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \left( \mu = \frac{1}{\nu} \right) \quad (1.8)$$

Tel que :-

$\vec{H}$  : champ magnétique [A/m]

$\vec{D}$  : Induction Electrique [C/m<sup>2</sup>]

$\vec{E}$  : Champ Electrique [V/m]

$\vec{B}$  : Induction magnétique [T]

$\vec{J}_c$  : Densité volumique du courant de conduction [A/m<sup>2</sup>]

$\vec{J}_d$  : la densité volumique du courant de déplacement [A/m<sup>2</sup>]

$\rho$  : Densité volumique de la charge électrique [c/m<sup>2</sup>]

$\sigma$  : conductivité électrique [S/m]

$\epsilon$  : Permittivité diélectrique [F/m]

$\nu$  : Reluctivité magnétique [m/H]

### I.3 Descriptions des Équations de MAXWELL

#### I.3.1 la loi d'Ampère

On intégrant le champ magnétique  $\vec{H}$  sur le long d'un contour fermé (c) qui est égale au courant I encerclé par le contour (c), C'est-à-dire :

$$I = \iint_s \vec{j} d\vec{s} \quad (I.9)$$

Donc :

$$\oint_c \vec{H} d\vec{l} = \iint_s \vec{j} d\vec{s} \quad (I.10)$$

De la loi de Stokes :

$$\oint_c \vec{H} d\vec{l} = \iint_s \text{rot} \vec{H} d\vec{s} \quad (I.11)$$

La comparaison entre (I.10) et (I.11) donne (I.1)

La formule (I.1) exprime la dépendance du champ magnétique de la densité de courant total c'est-à-dire le courant de conduction

#### I.3.2 La loi de Faraday

La force électromotrice (e) induite dans un circuit (c) placé dans un champ électrique  $\vec{E}$

Et Donnée par l'intégrale curviligne suivant :

$$e = \oint_c \vec{E} d\vec{l} \quad (I.12)$$

La variation du flux magnétique passant à travers une surface quelconque S limitée par

Un contour est égal à la force électromotrice induite c'est-à-dire :-

$$e = - \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (I.13)$$

Le flux magnétique à travers une surface S est donnée par :

$$\phi = \iint_s \vec{B} \cdot \vec{ds} \quad (I.14)$$

D'après le théorème de Stokes, on a :-

$$e = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_s \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (I.15)$$

En remplaçant l'équation (I.14) dans (I.13) ; on aura :-

$$e = - \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds} \quad (I.16)$$

À partir des équations (I.15) et (I.16), nous avons :-

$$\iint_s \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{ds} = - \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds} \quad (I.17)$$

Finalement, on obtient (I.2), cette équation exprime le couplage électrique magnétique en dynamique ou la variation temporelle de  $\vec{B}$  détermine  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}$ .



### I.3.3 La loi de Gauss

Le vecteur champ électrique  $\vec{E}$  sortant d'une surface fermée ('S'), est égale au quotient par  $\epsilon_0$  de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de la somme des charges électriques situées à l'intérieur de cette surface ('S'), tel que :

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (I.18)$$

Si les charges libres sont réparties uniformément selon une densité volumique ( $\rho$ ), la relation précédente devient

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \text{div} \vec{E} \, dV \quad (I.19)$$

De le théorème de Ostrogradski - Gauss on aura :-

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \text{div} \vec{E} \, dv \quad (I.20)$$

Des les deux relations précédentes, on a:-

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (I.21)$$

Le vecteur de densité de polarisation  $\vec{P}$  est le moment électrique d'un petit volume

$dv$  On obtient :-

$$\iiint_V \text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \, dv = \iiint_V \rho \, dv \quad (I.22)$$

Donc :

$$\text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho \quad (I.23)$$

Le vecteur d'induction électrique  $\vec{D}$  est égal :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (I.24)$$

Finalement on trouve la formule précédente (I.4).

### I.3.4 Théorème de la divergence de l'induction magnétique $\vec{B}$

On constate que le flux magnétique à travers une surface quelconque fermée (s) est toujours nul, c'est-à-dire

$$\iint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (I.25)$$

Du théorème d'Ostragradoski-Green, on aura :

$$\oiint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iiint_v \text{div} \vec{B} dv = 0 \quad (I.26)$$

En fin on trouve la formule précédente (I.3).

Cette relation traduit mathématiquement que les seules sources de champ sont fermées sur elles même, ils n'ont ni point ni de départ ni point de convergence, d'où la nomination d'induction conservative

### I.3.5 Conservation de la densité du courant total

Le champ dépend du temps la dérivée par rapport au temps de (I.21) est :

$$\text{div} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (I.27)$$

Puis, en tenant compte de l'équation de continuité :

$$\text{div} \vec{J}_c = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (I.28)$$

De (I.27) et (I.28), on obtient :

$$\text{div} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_c \right) = 0 \quad (I.29)$$

On a alors :

$$\vec{J}_t = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_c \quad (I.30)$$

Finalement, on trouve l'équation (I.1)

## I.4 formulation Mathématique du Système Électromagnétique

Les équations de propagation électromagnétiques, peuvent être formulées de différentes manières suivant les hypothèses auxquelles elles sont soumises, et ne sont par conséquent pas strictement équivalentes en termes d'approximation. On distingue en générale les formulations,

Intégrale et différentielle des équations de Maxwell exprimées dans le domaine temporel ou spectral à chacune de ces représentations correspondent une technique particulière de résolution. On

Retiendra malgré tout, que plus qu'un problème de terminologie auquel tout cela peut se ramener, l'idée directrice est de résoudre les valeurs de champs électromagnétiques en temps et en espace.

### I.4.1 Modèle magnétodynamique

La magnétodynamique consiste en l'étude des phénomènes magnétiques et électriques en régime dynamique, en négligeant toute fois les courants de déplacement  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  c'est-à-dire sous l'hypothèse de l'électrotechnique. Les champs électromagnétiques sont alors variables, soit par Variation de courants d'excitation, soit par mouvement d'une partie de la géométrie. Ce problème de courants induits: il s'agit de calculer, sous l'excitation du courant  $J_s$  variable dans le temps, la distribution du champ magnétique  $\vec{H}$  (ou  $\vec{B}$ ) en tout point du domaine d'étude et de la densité de courant  $J_c$  dans le domaine conducteur pour tout temps supérieur au temps initial.

L'application de ce modèle est très répandue dans l'étude des machines électriques, des dispositifs de chauffage par induction, des transformateurs, ...etc. de l'équation (I.1) et comme dans le cas des systèmes fonctionnant à faible fréquence, le courant de déplacement est fortement négligeable devant le courant de conduction, dans ce cas on peut écrire:

$$\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \sigma \vec{E} \quad (\text{I.31})$$

On intègre la relation (I.2) par rapport du temps, on obtient :

$$\vec{B} = - \int \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} dt \quad (\text{I.32})$$

Mettant l'équation (I.32) dans le (I.31), il vient :

$$-\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \left[ \int \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} dt \right] = \sigma \vec{E} \quad (\text{I.33})$$

Compte tenu de la relation (1.3), l'induction magnétique s'écrit comme le rotationnel d'un vecteur appelé potentiel vecteur magnétique A:

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (\text{I.34})$$

Remplaçant l'équation (I.34) dans le (I.2), on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{I.35})$$

Ceci nous permet de constater que le champ  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  est un champ conservatif ; il vient

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}U \quad (I.36)$$

Tel que U est le potentiel électrique scalaire du champ électromagnétique, on obtient :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (I.37)$$

Ensuite, mettant la relation (I.37) dans (I.33), donc:

$$\frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \left[ \int \overrightarrow{\text{rot}} \left( \overrightarrow{\text{grad}}U + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dt \right] + \sigma \left( \overrightarrow{\text{grad}}U + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (I.38)$$

On constate que le rotationnel d'un gradient est identiquement nulle c'est-à-dire que :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}}U) = \vec{0} \quad (I.39)$$

Finalement, on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu} (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) \right) = -\sigma \left( \overrightarrow{\text{grad}}U + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (I.40)$$

La formule (I.40) est une équation différentielle contient deux inconnues  $\vec{A}$  et U, pour avoir une solution unique.

On doit ajouter à cette équation une autre équation pour former un système de deux équations deux inconnues, dans ce cas l'équation la plus utilisée est celle de la conservation de la densité de courant, Le système obtient est le suivant :

Pour introduire cette densité de courant  $\vec{J}_s$  dans la formulation générale (I.40) et cette grandeur  $\vec{J}_s$  sera éliminé suivant la région étudié car  $\vec{J}_s$  est divergence nulle).

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} U - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{J}_s \\ \text{div} \left( \sigma \overrightarrow{\text{grad}} U - \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.41)$$

Pour surmonter ce problème, on introduit une condition supplémentaire dite de jauge donnée par:

$$\text{div} \vec{A} = 0 \quad (1.42)$$

Dans le cas des dispositifs alimentent en courant, l'équation magnétodynamique s'écrit: [23]

$$\begin{cases} \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{\mu} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \right) + \vec{J}_s \\ \text{div} \vec{A} = 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

## I.4.2 Modèle magnétostatique

La magnétostatique consiste en l'étude des phénomènes magnétiques en régime stationnaire.

Le champ magnétique est alors invariant dans le temps et n'est dû qu'à des courants stationnaires imposés ou à des aimants permanents. Les équations à considérer sont les équations de Maxwell ou les dérivées temporelles sont annulées. Elles sont

Il décrit tous les dispositifs dans la  
 Quel le champ électrique est produit par des charges dont la répartition et la conductivité électrique est nulle puisque le cas est quasi statique.

Deux sortes de ce modèle sont adaptées:

### I.4.2.1 Modèle magnétostatique scalaire

Dans ce modèle, les courants électriques sont nuls, alors les champs ne dépendent pas du temps on obtient les relations suivantes, donc d'après les équations (I.1) et (I.3), on obtient :

$$\begin{cases} \overline{\text{rot}}\vec{H} = \vec{0} \\ \overline{\text{div}}\vec{B} = 0 \end{cases} \quad (1.44)$$

Tel que :

$$\vec{B} = \overline{\text{rot}}\vec{A} \quad (1.45)$$

$\vec{H}$ : est dérive d'un potentiel scalaire, d'où la nomination du modèle magnétostatique scalaire  $\Phi$

La formule précédente, devient :

$$\overline{\text{div}}(\mu\overline{\text{grad}}\phi) = 0 \quad (1.46)$$

#### I.4.2.2 Modèle magnétostatique vectorielle

Dans ce modèle, les courants électriques ne sont pas nul, Alors les deux équations (I.1)

et (I.2) deviennent :

$$\begin{cases} \overline{\text{rot}}\vec{H} = \vec{J} \\ \overline{\text{div}}\vec{B} = \vec{0} \end{cases} \quad (1.47)$$

Combinant les deux formulations (I.38) et (I.8) avec (I.47), on obtient :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{vrot}}\vec{A}) = \vec{J} \quad (1.48)$$

Donc, on tirant une équation qui reliant directement le potentiel vecteur à la densité du courant, et puisque le domaine qui nous étudie dans la vide, donc on peut écrire :

$$\overline{\text{rot}}(\overline{\text{vrot}}\vec{A}) = \overline{\text{grad}}(\overline{\text{vdiv}}\vec{A}) - \overline{\text{v}}\Delta\vec{A} \quad (1.49)$$

Tel que la jauge de Coulomb est la jauge la plus couramment utilisée.

La formulation constituée par les équations (I.49) est adaptée aux problèmes bidimensionnels, alors le jauge de coulomb  $\overline{\text{div}}\vec{A} = 0$  il a disparaît alors

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{vrot} \vec{A}) = -v\overrightarrow{\Delta A} \quad (I.50)$$

On introduit un nouvel opérateur :

$$\text{div}(\overrightarrow{grad} \vec{A}) = \overrightarrow{\Delta A} \quad (I.51)$$

On combinant les équations (I.50), (I.51) et (I.47), on obtient :

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{vrot} \vec{A}) = -\text{div}(\overrightarrow{vgrad} \vec{A}) = \vec{J} \quad (I.52)$$

Cette formule représente le potentiel vecteur magnétique de type du poisson. [78]

Pour surmonter ce problème, deux types de classifications sont présenter :

### **I.4.3 Classification mathématique**

En général les équations aux dérivées partielles sont classifiées en trois catégories, appelées elliptiques, paraboliques, et hyperboliques. Pour illustrer cette classification on considère la plus générale équation différentielle de deuxième ordre en deux variables indépendantes x et y :

Si U est une fonction de n variables indépendantes, les E.D.P linéaires des seconds ordres sont du type:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial U}{\partial x_i} + c(x_1, \dots, x_n)U + d(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (I.53)$$

- Si  $a_i=0$  (et de même signe) alors que l'E.D.P est de type elliptique.
- Si  $a_i \neq 0$  on dit que l'E.D.P est de type hyperbolique.
- Si un seul des  $a_i$  est nul et tous les autres de même signe et si  $b_i$  est non nul l'E.D.P. est de type parabolique.

Soient U(x, y) une fonction de deux variables et V(x, y, t) une fonction de trois variables



$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F(x) \quad \text{est une E. D. P elliptique}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + F(x) \quad \text{est une E. D. P hyperbolique}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + F(x) \quad \text{est une E. D. P parabolique}$$

Tel que:

$F(x)$ : c'est la densité de la source

#### **I.4.4 Classification physique des E.D.P**

De nombreux phénomènes physiques se rangent dans l'une des classes suivantes:

- Les problèmes d'équilibre étudient l'état stationnaire d'un phénomène (Champ, Chaleur, etc....) dans un domaine borné ou non, il gouvernés par des E.D.P. elliptique.
- Les problèmes de valeurs propres sont en général des extensions des problèmes d'équilibre dans lesquels les valeurs critiques de certains paramètres doivent être déterminées. C'est le cas par exemple de la rèsonce des circuits électriques.
- Les problèmes d'évolution étudient l'évolution avec le temps d'un phénomène (champ, chaleur, vibration, etc...) à partir d'un état initial.

### **I.5 CONCLUSION**

Dans ce chapitre on se propose, les différentes formulations mathématiques physiques des phénomènes électromagnétiques. Nous avons exposé la formulation magnétostatique en potentiel vecteur magnétique et la formulation magnétodynamique.

Le prochain chapitre sera consacré à étude le modèle numérique des méthodes volumes combiné opté pour la résolution des Formulation mathématique qui décrivent l'évolution spatiotemporelle des phénomènes électromagnétique.

## II.1 Introduction

La modélisation numérique est basée sur la reformulation des équations de conservation sur chaque élément du maillage. Il existe de nombreuses méthodes pour représenter les problèmes continus de façon discrète comme par exemple les approximations par différences finies, par éléments finis, par volumes finis, ou par des méthodes spectrales. La méthode de discrétisation utilisée dans le cadre de ces travaux étant celle des volumes finis, nous rappelons ici les principes sur lesquels elle repose.

Dans ce chapitre nous présentons aussi les différentes méthodes de résolution des équations algébriques.

## II.2 Méthode des différences finis

La méthode des différences finies consiste à discrétiser les équations continues aux nœuds d'un maillage prédéfini en calculant chaque dérivée partielle à l'aide de séries de Taylor tronquées pour obtenir des équations linéaires reliant la valeur de mêmes inconnues aux nœuds voisins. L'écriture de cette transformation pour tous les nœuds du maillage conduit à un système algébrique dont la solution permet d'obtenir la distribution du potentiel  $\vec{A}$  et  $V$  dans le domaine d'étude. De mise en œuvre simple, cette méthode s'adapte mal aux dispositifs de géométrie complexe à cause de « la rigidité » du maillage. De passage d'un milieu physique à un autre (fer-air) et de non-linéarités (saturation...), nécessite un traitement spécifique.

## II.3 Méthode des éléments finis

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis réside dans le découpage du domaine d'étude en domaines élémentaires de dimension finie et à représenter le potentiel  $\vec{A}$  et  $V$  par une approximation polynomiale dans chacune de ces régions ; ensuite, l'erreur due à l'approximation doit être minimisée. Parmi différentes formulations possibles, la méthode dite de Rayleigh-Ritz qui base sur l'expression qui représente l'énergie électromagnétique du la méthode de Galerkin qui consiste à projeter l'EDP sur une fonction de projection [17].

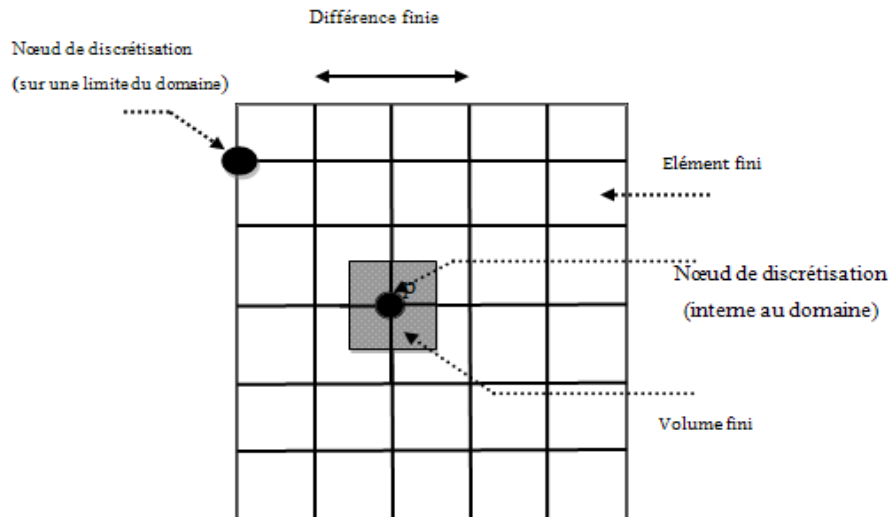


Fig. II.1 Maillage du domaine d'étude

#### II.4 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équations algébriques qui peuvent être résolues numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des. Équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (vc),

Le volume de contrôle de type rectangulaire nous permet de modéliser les phénomènes électromagnétiques que pour des géométrie simples, elle consiste à subdiviser le domaine d'étude en volumes élémentaires, de forme simple, adjacents chaque volumes est délimité par, deux interfaces, dans le cas monodimensionnel (e,v), quatre interfaces dans le cas bidimensionnel chaque volume entoure un nœud ( Figure II.2)

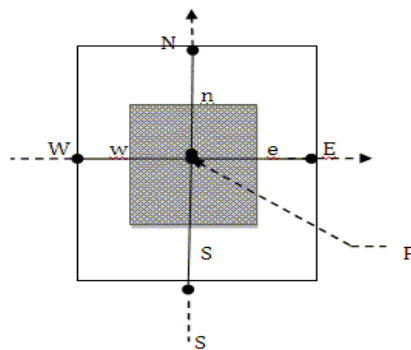


Fig. II.2: Volume élémentaire (2D)

## II.4.1 la méthode MVF en monodimensionnelle

### II.4.1.1 Modèle magnétostatique

Le domaine d'étude  $\Omega$  est divisé en un nombre d'éléments. Chaque élément contient quatre nœud .un volume fini entoure chaque nœud

Supposons l'équation différentielle (II.1) électromagnétique stationnaire en (1D) du type elliptique est que :

$$\frac{d}{dx} \left( v \frac{dA}{dx} \right) + J = 0 \quad (\text{II.1})$$

Tel que:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z \end{pmatrix} = \vec{A}_z \vec{K} = A \vec{K}$$

$$\vec{J} = J_z \vec{K} = J \vec{K}$$

Les étapes qui doivent être suivre, pour obtenir le système d'équations algébriques, sont les suivantes:-

1- Pour discrétiser l'équation sur le volume de contrôle, on choisit dans le domaine d'étude un nombre fini de N nœud ensuite diviser ce domaine en un nombre des volumes finis dont chacun contient un nœud comme montre la figure (II.3)

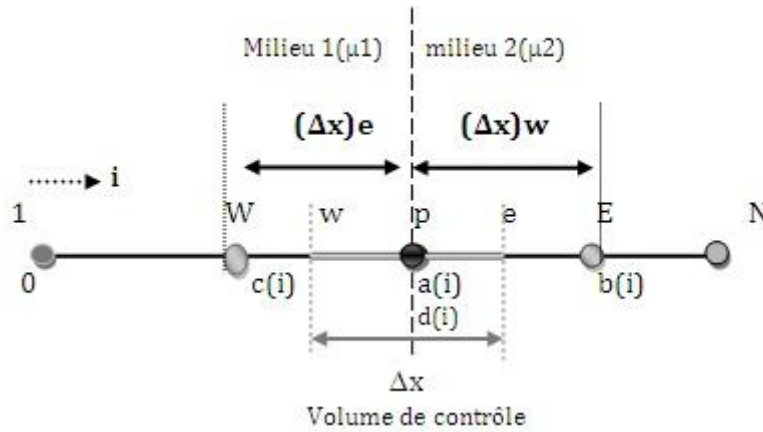


Fig. II-3: Maillage unidimensionnel (1D) entre deux milieux différents

Cette figure décrit un volume élémentaire ( $\Delta v = \Delta x \cdot 1 \cdot 1$ ), délimité par les interfaces West (w) Et Est (e) du volume de contrôle (vc) qui entoure le nœud principal (p) avec  $\Delta x$  largeur du (vc) étudié.

## 2. Intégration de l'équation de conduction 1D sur le VC en P

Pour la résolution du système électromagnétique on discrétise l'équation différentielle (II.1) puis en intégrant l'équation sur le volume de contrôle (vc) (figure. II.1) on obtient successivement

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left( v \frac{dA_y}{dx} \right) dx + \int_w^e J dx = 0 \quad (\text{II. 2})$$

D'après l'intégration, on obtient l'équation (II.3):

$$\frac{(A_{ye} - A_{yp})}{\Delta x_e} - v_w \frac{(A_{yp} + A_{yw})}{\Delta x_w} + J_p \Delta x = 0 \quad (\text{II. 3})$$

Ensuite d'après le calcul, On aura:

$$\left( \frac{v_e}{\Delta x_e} + \frac{v_w}{\Delta x_w} \right) A_{yp} = v_e \frac{A_{ye}}{\Delta x_e} + \frac{v_w A_{yw}}{\Delta x_w} + J_p \Delta x \quad (\text{II. 4})$$

On arrive à une équation algébrique, qui exprime le potentiel vecteur magnétique au nœud principal  $p$  en fonction des potentiels aux nœuds voisins  $E$  et  $W$ .

Avec :

$$\begin{cases} a(i) = b(i) + c(i) \\ b(i) = \frac{v_e(i)}{\Delta x_e} \\ c(i) = \frac{v_w(i)}{\Delta x_w} \\ d(i) = J_{y_p} \Delta x \end{cases} \quad (II.5)$$

D'après l'équation algébrique (II.4) on peut être écrit sous forme suivante :

$$a(i) \cdot A(i) = b(i) \cdot A(i+1) + c(i) \cdot A(i-1) + d(i) \quad (II.6)$$

#### II.4.1.2 Modèle magnétodynamique

Supposons L'équation différentielle (I.43) électromagnétique instationnaire dans (1D) du type parabolique est la suivante :

En faite l'intégrale de la formule sur le volume ( $v_c$ ):

$$\int_{v_c} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{v A_z}{dx} \right) + j\omega\sigma A_z - J_s \right) dx = 0 \quad (II.7)$$

Pour calculer cette intégrale, la fonction inconnue  $A$  est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation linéaire entre deux nœuds consécutifs, donc:

$$\left. \frac{v dA_{zp}}{dx} \right|_w^e + j\omega\sigma A_{zp} \Delta x - J_{sp} \Delta x = 0 \quad (II.8)$$

Donc, la formule devient:

$$\left(\frac{v_e}{\Delta x} + \frac{v_\omega}{\Delta x} + j\omega\sigma_p\Delta x\right)A_p = \frac{v_e}{\Delta x}A_{z\omega} + \frac{v_\omega}{\Delta x}A_{z\omega} + J_{sp}\Delta x \quad (\text{II. 9})$$

Alors, on trouve:

$$a_b A_p = b A_{ZE} b A_{ZE} + c A_{ZW} c A_{ZW} + d_p \quad (\text{II. 10})$$

Tel que:

$$\begin{cases} a_p = \left(\frac{v_e(i)}{\Delta x} + \frac{v_w(i)}{\Delta x} + j\omega\sigma_p\Delta x\right) \\ b = \frac{v_e(i)}{\Delta x} \\ c = \frac{v_w(i)}{\Delta x} \end{cases} \quad (\text{II. 11})$$

Avec

$$\begin{cases} b(i) = \frac{v_e(i)}{\Delta x} \\ c(i) = \frac{v_w(i)}{\Delta x} \\ a(i) = b(i) + c(i) + j\omega\sigma(i) \\ d(i) = J_s(i)\Delta x \end{cases} \quad (\text{II. 12})$$

## **II.5 Condition aux interfaces**

Le passage d'un matériau à un autre entraîne une discontinuité de certaines variables électrique. Les conditions à l'interface de deux milieux de perméabilité  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et de densité de la courante source  $J_{s1}$ ,  $J_{s2}$ , sont:

$$\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2$$

De même Courant source au nœud commun est:

$$J_S = (J_{S1} + J_{S2})/2$$

## **II.6 Conditions aux limites**

Les conditions aux limites appropriées, dans notre cas celle de Dirichlet, soit:

Pour  $x=0$ , on a  $A(1)=0$

Pour  $x=x_4$  on a  $A(N) = \text{cst}$  (déterminé par la solution analytique)

Pour résolution des équations algébriques fournies la distribution du potentiel A, Il ya deux type de méthodes pour la résolution du système: direct et itérative

### **II.6.1 Méthodes itérative**

Cette méthode consiste à prendre au départ; arbitraire mais proche de la réalité physique, et la nouvelle solution est calculée par des itérative de la formule suivante:

$$A^{K+1}(i) = \left(1/a(i)\right) \cdot (b(i) \cdot A^k(i + 1) + c(i) \cdot A^k(i - 1) + d(i)) \quad (\text{II. 13})$$

Le processus de calcul commence par l'introduction des valeurs initiales (pour :  $k=1$ ) proche de la variation de l'inconnue, généralement on prend ces valeurs nulles. Le processus s'arrête lorsque l'erreur de calcul prend une valeur acceptable.

### **II.6.2 Méthode directe**

Dans ce cas on applique l'algorithme de Thomas, Cet algorithme permet de calculer la solution d'un système linéaire lorsque la matrice est tri diagonale. C'est notre cas, car les équations discrétisées dans le système linéaire s'écrivent [2]:

Pour :  $1 \leq i \leq N$

$$a_i A_i = b_i A_{i+1} + c_i A_{i-1} + d_i \quad (\text{II. 14})$$

Où le maillage est présenté à la figure (II.3)



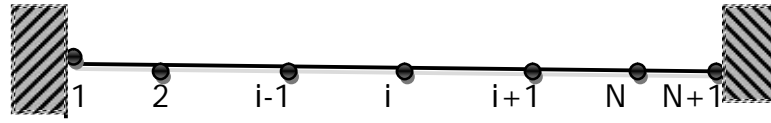


Fig. II.4: Application du TDMA dans le cas 1D

La potentiel  $A_i$  est exprimée en fonction des potentiels voisines  $A_{i-1}$  et  $A_{i+1}$ .  
 Pour prendre en compte la forme spéciale des équations pour les points de frontière 1 et N il faut que :

$$c_1 = 0 \text{ et } b_N = 0$$

Dans cette étape on cherche les relations de type  $A_i = f(A_{i+1})$  sous la forme,

$$A_i = p_i A_{i+1} + Q_i \quad (\text{II. 15})$$

Donc on peut écrire également la relation suivante :

$$a_i A_{i-1} = P_{i-1} A_i + Q_{i-1} \quad (\text{II. 16})$$

En remplaçant l'équation (II-16) dans l'équation (II-14) on obtient :

$$a_i A_i A_{i+1} + c_i (P_{i-1} A_i + Q_{i-1}) + d_i \quad (\text{II. 17})$$

En regroupant les termes dans l'équation (II.17) sous la forme générale (II.18) on obtient

Les coefficients  $P_i$  et  $Q_i$  en fonction des coefficients  $P_{i-1}$  et  $Q_{i-1}$

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (\text{II.18})$$

$$Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}}$$

Pour démarrer le processus de récurrence on constate que pour  $i=1$

L'équation (II.16) est déjà sous la forme (II.17) et les valeurs de  $P_1$  et  $Q_1$  sont données par les formules

$$P_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad \text{et} \quad Q_1 = \frac{d_1}{a_1} \quad (\text{II.19})$$

Il est bien de préciser que les relations (II.20) sont obtenues si l'on remplace  $c_1 = 0$  dans les relations (II-19)

À la fin du processus de récurrence on constate que  $B_N = 0$  et donc  $P_N = 0$  et l'équation (II-16) on obtient :

$$A_N = Q_N \quad (\text{II.20})$$

À ce point, on est dans la situation de démarrer le processus de substitution en arrière en utilisant la relation (II.16)

## II.7 Résultats

Dans ce partie nous allons présentant les résultats obtenus par la méthode numériques direct et itérative dans le régime stationnaire et instationnaire est présente dans la figure ci-dessous:

## II.8 Application magnétostatique

### II.8.1 Caractéristiques physiques

$$- \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$$

$$- \mu_r = 1$$

$$- \mu_a = 1500$$

$$- J_s = 10^6$$

### II.8.2 Caractéristiques géométriques

$$- x_1 = 0.2\text{m}$$

$$x_2 = 0.3\text{m}$$

$$x_3 = 0.4\text{m}$$

$$x_4 = 0.5\text{m}$$

$$- dx = 0.02\text{m}$$

La figure (II.5) montre la variation du potentiel vecteur magnétique dans le Système magnétostatique (1D).

On peut conclure que les deux méthodes itérative et directe donnent le même résultat numérique puisque donne la bonne précision:

On obtient une excellente concordance entre la solution donnée par la méthode directe (o) itérative (-)

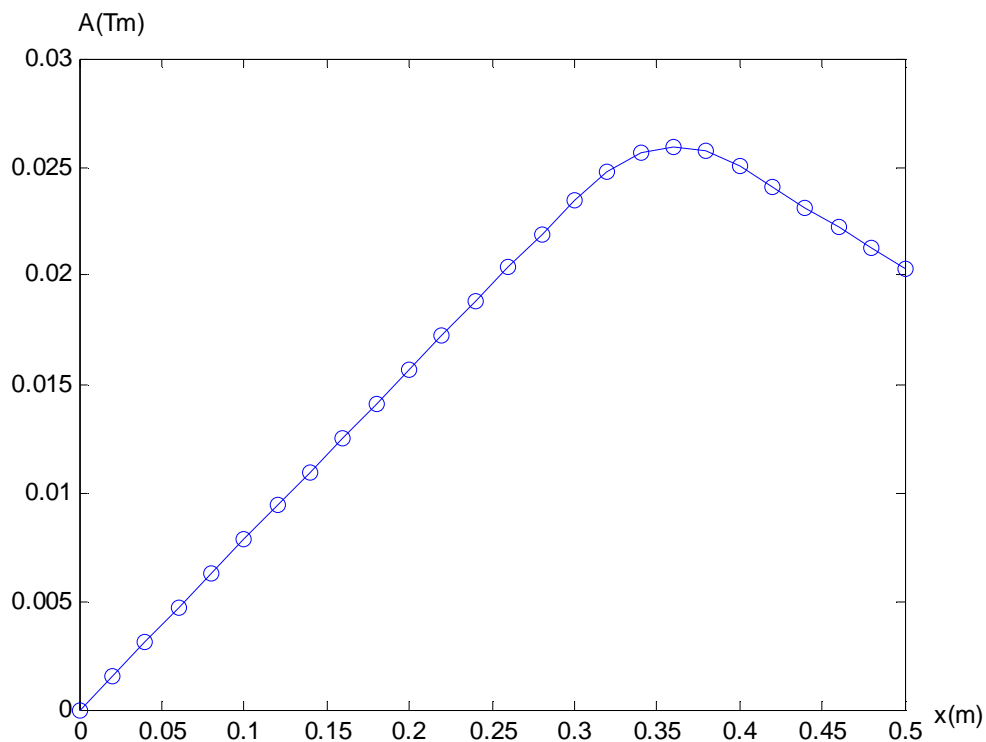


Fig. II.5 Variation du potentiel A dans le domaine d'étude

- Méthodes directe (o)
- Méthode itérative (--)

## II.9 Application magnétodynamique

### II.9.1 Caractéristiques physiques

$$\text{Sigma} = 1^7$$

$$J_s = 10^6$$

### II.9.2 Caractéristiques géométriques

$$x1=0.2m$$

$$x2=0.3m$$

$$x3=0.4m$$

$$x4=0.5m$$

$$dx=0.02m$$

La figure (II.6) montre que le résultat du modèle numérique 1D ceux de la solution exacte.

On obtient une excellente concordance entre la solution donnée par la méthode directe (o) itérative (-)

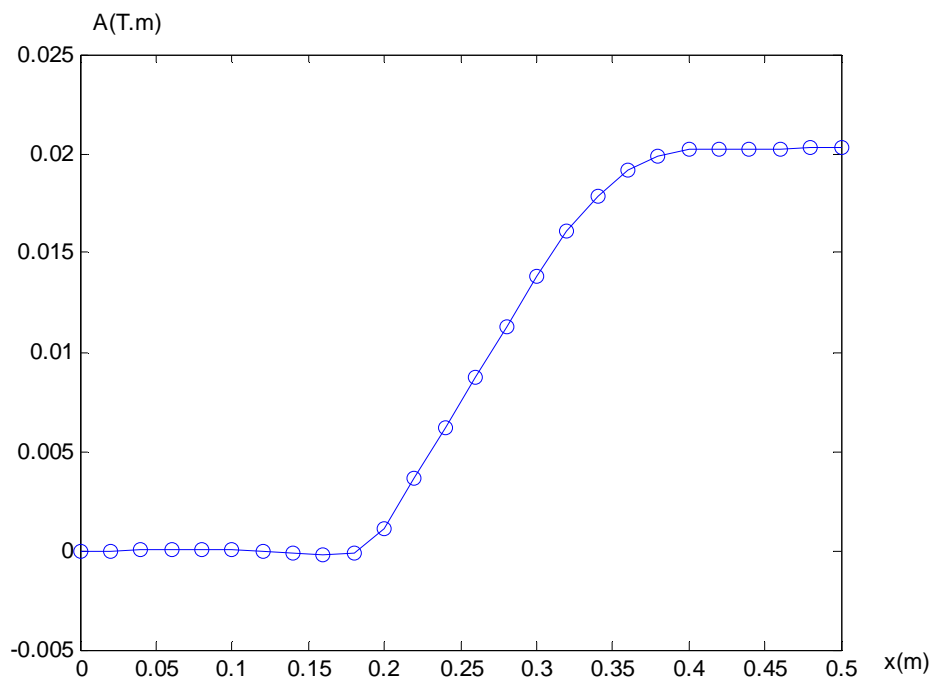


Fig. II.6 Variation du potentiel A dans le domaine d'étude ( 26 nœuds)

- Méthodes directe (o)
- Méthode itérative (--)

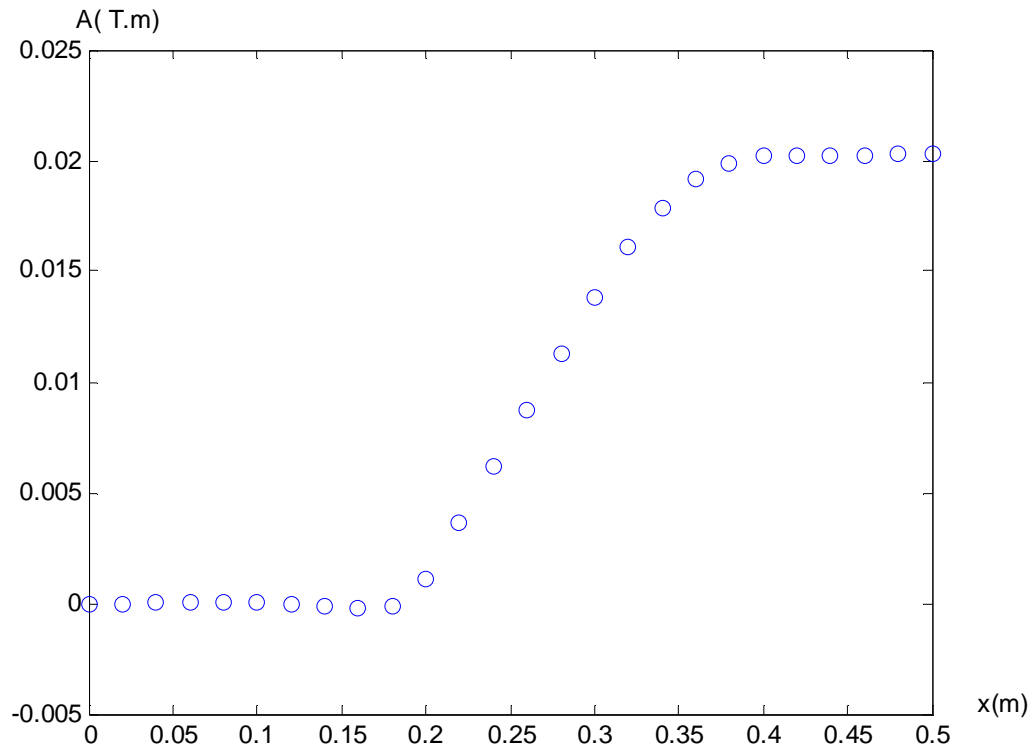


Fig. II.7 Variation du potentiel A dans le domaine d'étude (26 nœuds) méthodes itérative

Cette méthode consiste à prendre au départ une solution au départ, arbitraire mais proche de la réalité physique, et la nouvelle solution est calculée par des itérations successives.

Le processeur s'arrête lorsque :

$$A_i^k - A_i^{k-1} < \varepsilon$$

## II.10 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation de quelques méthodes numériques d'approximation pour la résolution des problèmes électromagnétiques 1D, nous espérons avoir que la méthode de volume fini est validée pour un dispositif présentant une solution numérique, les résultats sont bons et très précis.

Nous avons développé un maillage de type conforme ce qui est le sujet du chapitre suivant.

### III.1 Introduction

La modélisation numérique repose sur la reformulation des équations de conservation sur des volumes élémentaires (vc) ou discrets, appelées éléments ou mailles. Associés à ces éléments, nous retrouvons les nœuds de discrétisation, c'est-à-dire les points de résolution des équations discrètes. Ceux-ci peuvent être aussi bien places aux sommets des éléments qu'en leur centre ou encore sur les faces, selon la méthode de discrétisation utilisée.

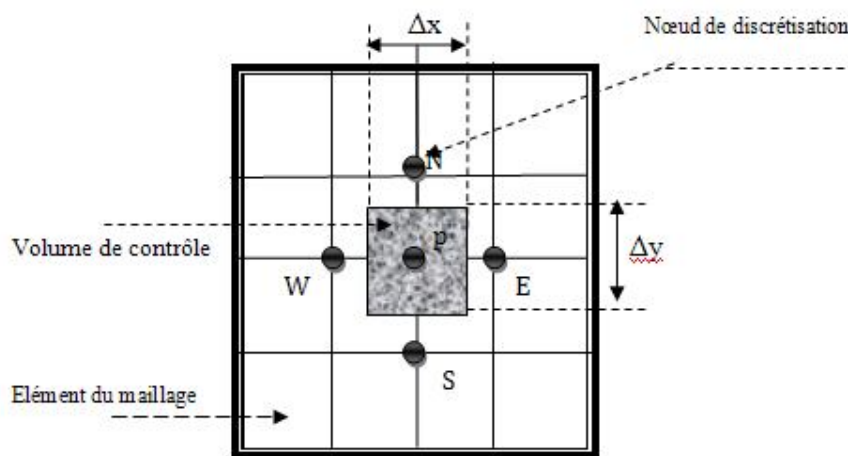


Fig. III.1 Maillage 2D

De plus, par rapport au maillage 1D, aux nœuds voisins, “East” (E) et “West” (W) du point P on ajoute les voisins “ North” (N) et “South” (S).

### III.2 Géométrie et topologie

Nous faisons la différence entre la géométrie qui caractérise la forme du domaine et la topologie qui est le résultat du découpage spatial du domaine sur lequel s'appuie le maillage. La topologie est donc une classification des objets de type segments, faces, etc.

Les problèmes à modéliser sont constitués de plusieurs objets (régions) ayant différentes dimensions. Afin d'adapter notre maillage à ce type de problème, nous avons considéré deux types de grilles ; régulière et irrégulière (Fig.III.2). Pour éviter une forte discontinuité, le maillage irrégulier est réalisé avec une progression logarithmique dans l'espace (Fig.III.2.b).[7]

On peut ensuite définir différentes zones de propriétés physiques distinctes:-

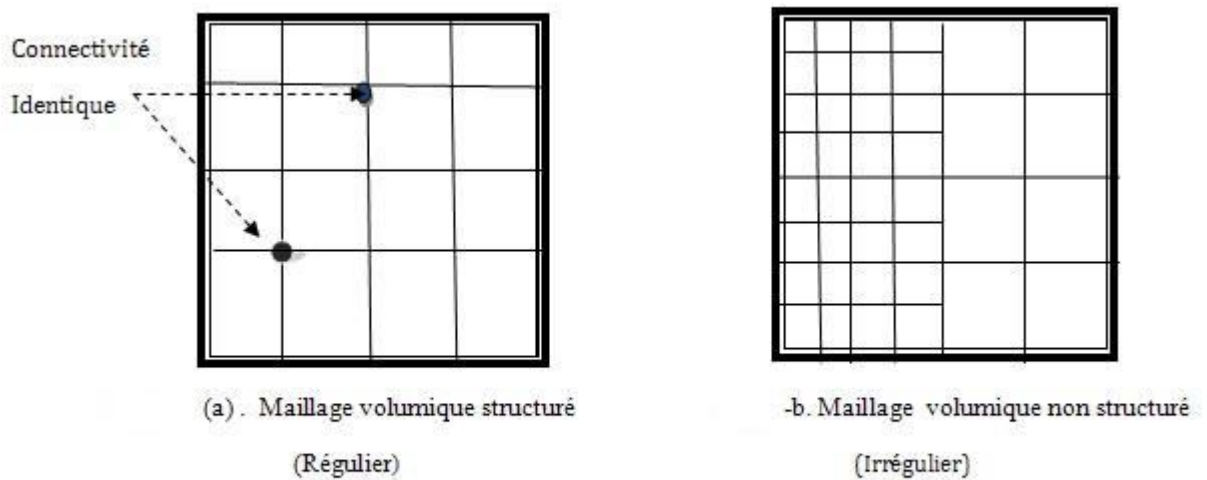


Fig.III-2 Différentes partitions du domaine

Le maillage doit fournir la description de tables de connectivité entre les numéros de ces nœuds, ceux des mailles et ceux de leurs facettes. Enfin, dans notre cas particulier, le fichier de maillage contient de plus l'ensemble des conditions limites du problème, écrit aux frontières du domaine, ainsi que les propriétés physiques du sous-sol, qui peuvent être définies par zones.

### III.2.1 La Connectivité

La connectivité décrit les liaisons entre les sommets des éléments. On parle de maillage structurée si les nœuds de même type (dans le domaine, sur une limite ou sur un coin) ont toujours le même nombre de nœud voisins, ou sont associées au même nombre d'éléments. La connectivité associée à ces nœuds est alors toujours de même type. Dans le cas d'un maillage non-structuré, la connectivité est de type quelconque, et le nombre de voisins de chaque nœud diffère localement (figure III.2.b).[3]

### III.3 La méthode MVF en bidimensionnelle (2D)

On s'intéresse à la résolution numérique des d'équations qui décrivent le modèle magnétostatique et magnétodynamique

### III.3.1 .Modèle magnétostatique

La méthodologie utilisée pour la discrétisation de l'équation dans le cas unidimensionnel peut être utilisée facilement dans le cas bidimensionnel (2D). Pour illustrer cette technique on considère l'équation 2D stationnaire le modèle magnétostatique est définie dans le chapitre I par l'équation suivante;

Donc, On peut écrire la formule (I.52), sous la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J = 0 \quad (\text{III. 1})$$

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_z \end{pmatrix} = \vec{A}_z \vec{K} = A \vec{K}$$

$$\vec{J} = J_z \vec{K} = J \vec{K}$$

Avec

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

### III.4 Discrétisation des formulations électromagnétiques

La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles sur chaque volume de contrôle pour obtenir les équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle (vc).

#### III.4.1 Discrétisation de la formulation magnétostatique

L'intégration de l'équation (III. 1), sur le volume de contrôle (vc), donne:

$$\int_{vc} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) dx dy + \int_{vc} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy + \int_{vc} J dx dy = 0 \quad (\text{III. 2})$$



Pour calculer cette intégrale, la fonction inconnue A est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation linéaire entre deux nœuds consécutifs, donc

$$\iint_{ws}^{en} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) dx dy + \iint_{ws}^{en} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{ws}^{en} J dx dy \quad (III.3)$$

Le résultat de l'intégration donne:

$$\int_s^n \left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right|_w^e dy + \int_w^e \left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right|_s^n dx = -J \Delta x \Delta y \quad (III.4)$$

Si on prend une variation linéaire entre deux nœuds, les dérivées aux interfaces s'écrivent:

$$\frac{1}{\mu_e} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_e \Delta y - \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_w \Delta y + \frac{1}{\mu_n} \frac{\partial A}{\partial y} \Big|_n \Delta x - \frac{1}{\mu_s} \frac{\partial A}{\partial y} \Big|_s \Delta x = -J \Delta x \Delta y \quad (III.5)$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_e} \frac{A_e - A_p}{\Delta x} \Delta y - \frac{1}{\mu_w} \frac{A_p - A_w}{\Delta x} \Delta y + \frac{1}{\mu_n} \frac{A_n - A_p}{\Delta y} \Delta x - \frac{1}{\mu_s} \frac{A_p - A_s}{\Delta y} \Delta x \\ & = -J \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (III.6)$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\mu_e} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{1}{\mu_w} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{1}{\mu_n} \frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{1}{\mu_s} \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) A_p &= \frac{1}{\mu_e} \frac{\Delta y}{\Delta x} A_e + \frac{1}{\mu_w} \frac{\Delta y}{\Delta x} A_w + \\ & \frac{1}{\mu_n} \frac{\Delta x}{\Delta y} A_n + \frac{1}{\mu_s} \frac{\Delta x}{\Delta y} A_s + J \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (III.7)$$

On arrive à une équation algébrique, qui exprime le potentiel vecteur magnétique au nœud principal p en fonction des potentiels aux nœuds voisins e, w, n, s.

### III.4.1.1 Modèle algébrique

En écrivant la relation (III.7) pour tous les nœuds du maillage, on obtient un système d'équation algébriques, pour le nœud  $i$  et  $j$ , donner par l'expression suivante :

$$A(i,j) = \frac{1}{a_p(i,j)} (a_E(i,j)A(i+1,j) + a_W(i,j)A(i-1,j) +$$

$$a_N(i,j)A(i,j+1) + a_S(i,j)A(i,j-1) + S_p(i,j)) \quad (\text{III. 8})$$

Tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_E(i,j) = \frac{1}{\mu_e(i,j)} \frac{\Delta y(i,j)}{\Delta x(i,j)} \\ a_W(i,j) = \frac{1}{\mu_w(i,j)} \frac{\Delta y(i,j)}{\Delta x(i,j)} \\ a_N(i,j) = \frac{1}{\mu_n(i,j)} \frac{\Delta x(i,j)}{\Delta y(i,j)} \\ a_S(i,j) = \frac{1}{\mu_s} \frac{\Delta x(i,j)}{\Delta y(i,j)} \\ S_p = J_p \Delta x \Delta y \end{array} \right. \quad (\text{III. 9})$$

### III.4.2 Discrétisation de la formulation magnétodynamique

A partir de la formule de conservation précédente (I.43) dans le (chapitre I), on peut écrit:

$$\sigma \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J \quad (\text{III. 10})$$

C'est une équation de conservation aux dérivées partielles (EDP) du deuxième ordre on régime instationnaire de type parabolique

Pour calculer les intégrales de ce système, on prend la variation linéaire du potentiel vecteur magnétique  $A$ .

Et en régime fréquentiel et en régime linéaire on a:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = j\omega \vec{A}$$

Donc la formule (III.10), s'écrit comme suit:

$$j\omega\sigma A = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) + J \quad (\text{III.11})$$

L'intégration de cette équation peut s'écrire, sous la forme suivante:

$$\iint_{ws}^{en} j\omega\sigma A \, ds = \iint_{ws}^{en} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) \, ds + \iint_{ws}^{en} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \, ds + \iint_{ws}^{en} J \, ds \quad (\text{III.12})$$

Le système d'équations différentielles sera intégré dans le volume fini ( $ds = dx \times dy$ )

Correspondant au nœud principal p, on a:

$$j\omega\sigma A_p \Delta x \Delta y = \int_s^n \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right)_\omega^e \, dy + \int_\omega^e \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right)_s^n + J \Delta x \Delta y \quad (\text{III.13})$$

L'intégrale se devient:

$$j\omega\sigma A \Delta x \Delta y = \frac{1}{\mu_e} \frac{(A_e - A_p)}{\Delta x_e} \Delta y - \frac{1}{\mu_\omega} \frac{(A_p - A_\omega)}{\Delta x_\omega} \Delta y + \frac{1}{\mu_n} \frac{(A_n - A_p)}{\Delta y_n} \Delta x - \frac{1}{\mu_s} \frac{(A_p - A_s)}{\Delta y_s} \Delta x + J_p \Delta x \Delta y \quad (\text{III.14})$$

Alors:

$$\left( \frac{1}{\mu_e} \frac{\Delta y}{\Delta x_e} + \frac{1}{\mu_w} \frac{\Delta y}{\Delta x_w} + \frac{1}{\mu_n} \frac{\Delta x}{\Delta y_n} + \frac{1}{\mu_s} \frac{\Delta x}{\Delta y_s} + j\omega\sigma\Delta x\Delta y \right) A_p$$

$$\frac{1}{\mu_e} \frac{\Delta y}{\Delta x_e} A_e + \frac{1}{\mu_w} \frac{\Delta y}{\Delta x_w} A_w + \frac{1}{\mu_n} \frac{\Delta x}{\Delta y_n} A_n + \frac{1}{\mu_s} \frac{\Delta x}{\Delta y_s} A_s + J_p\Delta x\Delta y \quad (\text{III. 15})$$

Finalement on trouve:

$$b_p(i,j) \cdot A(i,j) = b_E(i,j)A_E + b_W(i,j)A_W + b_N(i,j)A_N + b_S(i,j)A_S$$

$$+K(i,j) \quad (\text{III. 16})$$

Tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_E(i,j) = \frac{1}{\mu_e(i,j)} \frac{\Delta y(i,j)}{\Delta x(i,j)} \\ b_W(i,j) = \frac{1}{\mu_w} \frac{\Delta y(i,j)}{\Delta x_w(i,j)} \\ b_N(i,j) = \frac{1}{\mu_n} \frac{\Delta x(i,j)}{\Delta y_n(i,j)} \\ K(i,j) = J_p\Delta x\Delta y \\ b_p(i,j) = b_E(i,j) + b_W(i,j) + b_N(i,j) + b_S(i,j) + j\omega\sigma\Delta x\Delta y \end{array} \right. \quad (\text{III. 17})$$

### III.4.3 Équations algébriques aux limites

Il ya deux types de condition aux limites:

- **Conditions aux limites de type DIRICHLET**

Les équations algébriques des nœuds se trouvant aux limites avec une condition de type

Dirichlet sont éliminées les inconnue c'est-à-dire  $A=0$

- **Condition aux limites de type de NEWMAN**

Elle est utilisée dans le cas où étudier présente des plans de symétries cette condition

Exprime la variation de la fonction inconnue:

- ❖ Condition de NEWMAN homogène :

$$\frac{\partial A}{\partial n} = 0$$

- ❖ Condition de NEWMAN non homogène:

$$\frac{\partial A}{\partial n} \neq 0$$

### III.4.4 Méthodes de résolution des systèmes d'équations

La résolution des équations algébriques (III.16), fourni la distribution du potentiel A Dans les différentes régions du domaine. Deux types de méthodes de résolutions

De ces équations peuvent être utilisés:

- Méthodes itératives
- Méthodes directes

L'utilisation des méthodes itératives offre l'avantage de ne pas occupé une grande place En mémoire. Mais la méthode direct nécessite beaucoup de place mémoire pour l'inconnue A.

#### III.4.4.1 Méthodes Directes

Ces méthodes sont applicables pour les systèmes linéaires dont le nombre d'élément est minimum, elles sont exactes mais demandent beaucoup d'espace mémoire et de temps de calcul.

$$[A] \{X\} = \{B\} \text{ avec } A = \text{constante}$$

Parmi les méthodes directes nous citons :

- Méthode de Cramer, méthode de Gauss, méthode de Jordon, méthode de Croûte,
- Méthode de Chklovski

### III.4.4.2 Méthodes Itératives

Ces méthodes sont mieux adaptées aux matrices d'ordre élevé comportant de nombreux éléments nuls (matrice creuse). Parmi ces méthodes, nous citons :

#### a) Méthode de Jacobi

Elle est basée sur la transformation du système  $A \cdot X = B$  en

$$X_i^{(k+1)} = \frac{[b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^k]}{a_{ii}} \quad ; \quad (i \neq j); i = 1, \dots, n$$

On estime un arbitraire initial  $X_i^0$  pour ( $k = 0$ )

Dans le cas d'une pression absolue on aura :

$$|X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)}| < \varepsilon$$

Tel que :  $\varepsilon$  : précision imposée par l'utilisateur.

#### b) Méthode de Gauss Seidel

Cette méthode consiste à transformer le système  $A \cdot X = B$  en :

$$X_i^{(k+1)} = [b_i - \sum_{j=1}^{(i-1)} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=(i+1)}^n a_{ij} X_j^k] / a_{ii}, i = 1, \dots, n$$

En donnant aux inconnues  $X_i^k$  des valeurs arbitraires initiales  $X_i^0$  pour ( $k=0$ ), le calcul sera arrêté si :

$$|X_i^{(k+1)} - X_i^k| < \varepsilon \text{ où } |X_i^{(k+1)} - X_i^k| / X_i^k < \varepsilon$$

### III.5 ALGORITHME DE CALCULE

Le traitement numérique des dispositifs électromagnétiques par la méthode des volumes finis abordé aux chapitres précédents ne peut être bénéfique que s'il est implémenté dans un programme de calcul.

Le programme de calcul est constitué des étapes suivantes:

1-description de la géométrie et des caractéristiques physiques (module d'entrée).

2-mise en œuvre de la méthode adoptée pour la résolution (module de calcul).

3-visualisation et interprétation des résultats de la simulation (module de sortie).

Ce code de calcul est réalisé à partir des sous modules effectuant chaque module est réalisé par un programme interactif.

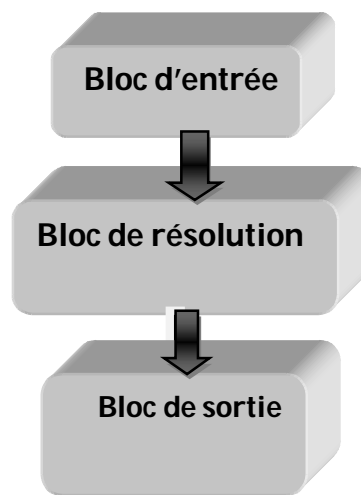


Figure. III.3 Organisation du code de calcul électromagnétique.

### III.5.1 Bloc d'entrée

Le bloc d'entrée, est constitué de quatre modules : Module de maillage, Module de Base de données, Module d'affectation et le Module de conditions aux limites. Il consiste à préparer les données nécessaires pour le bloc de résolution. Ces données concernant la description de la géométrie du domaine, la discrétisation, l'introduction des propriétés physiques du dispositif étudié,

Le calcul des coefficients algébriques et le type de conditions aux limites. Ces quatre modules sont décrits comme suit :

### III.5.1.1 Module de maillage

Ce module consiste à décrire la géométrie du domaine à étudier. Il permet de définir suivant chaque direction :

- Le nombre de domaines géométriques ;
- La dimension de chaque domaine géométrique ;
- Le nombre des nœuds dans chaque domaine ;
- Le pas de chaque domaine représentant l'infini physique

### III.5.1.2 Module de base de données

Ce module consiste à donner et introduire les propriétés physiques électromagnétiques de chaque milieu d'étude. Il permet de définir dans chaque milieu et dans le cas général :

- La perméabilité magnétique ;
- La densité du courant d'excitation.

### III.5.1.3 Module D'affectation

Ce module consiste à calculer les coefficients des équations algébriques à résoudre à partir des propriétés physiques et électromagnétiques des modules précédents.

### III.5.1.4 Module de conditions aux limites

Ce module consiste à donner le type de condition aux limites (Dirichlet ou Newman) et de modifier les coefficients des équations algébriques suivant le type de limite : surface, arrête et coin.

### III.5.2. Bloc de résolution

Dans cette résolution le bloc est constitué dans un premier temps d'un seul module. Ce module est constitué par les équations algébriques discrétisées des inconnues. Il procède à la mise en œuvre de la méthode itérative utilisée, c'est-à-dire la résolution du système d'équations Linéaires



Qui proviennent de la formulation de la méthode des volumes finis. La précision de Calcul est déterminée en fonction du nombre des nœuds. Le résultat du calcul permet d'évaluer les composantes du potentiel vecteur magnétique A

### III.5.3 Bloc de sortie

Il est constitué de plusieurs modules, qui sont les modules d'exploitation. C'est modules consiste à calculer et à visualiser en bidimensionnel (2D) les grandeurs électromagnétiques (A(Tm), B(T), J).

Le modèle algébrique de l'équation magnétique, présenté au chapitre précédant sous une forme matricielle est donné par :

[M+iL] : c'est une vecteur de matrice inconnue

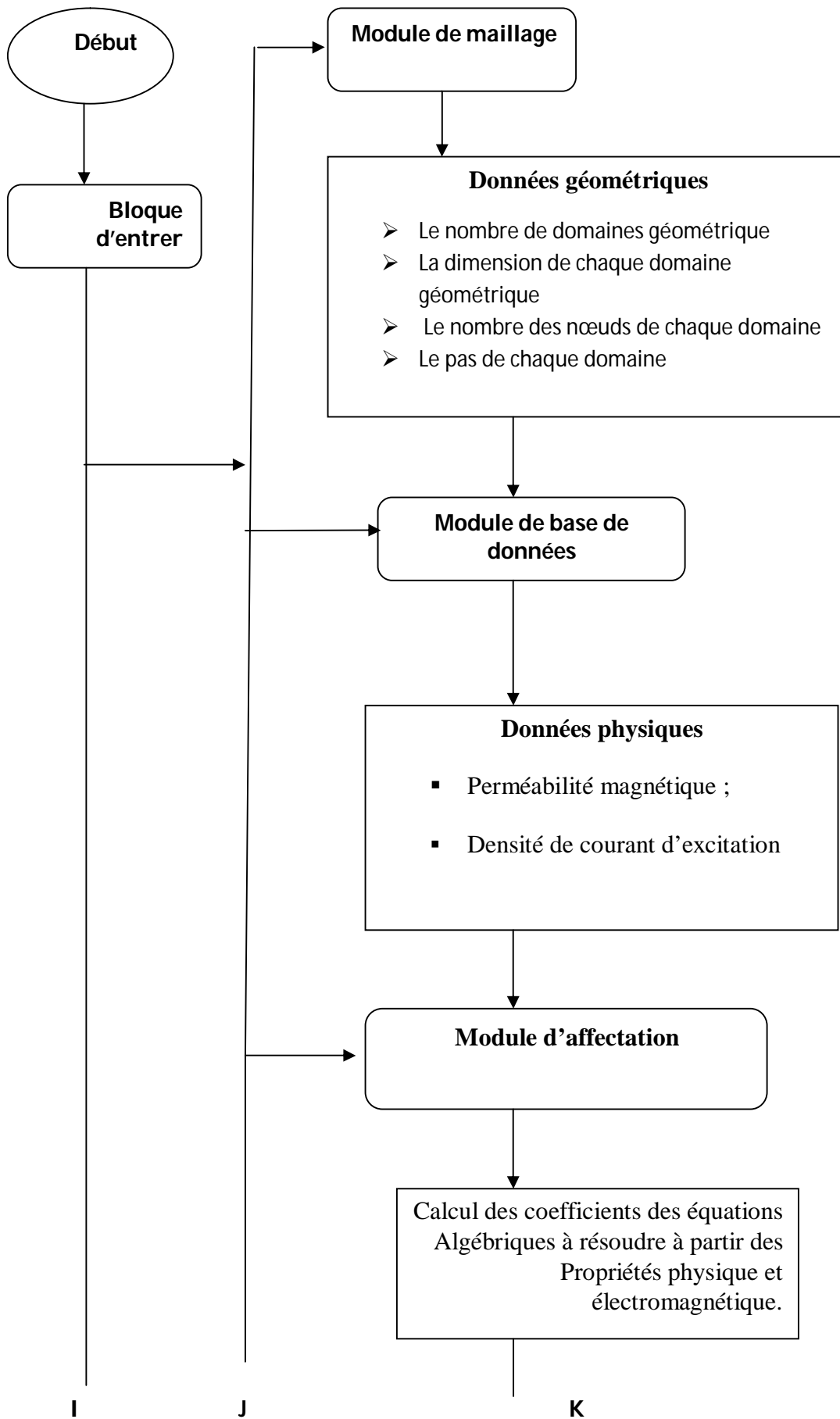
[A] : c'est un vecteur inconnu

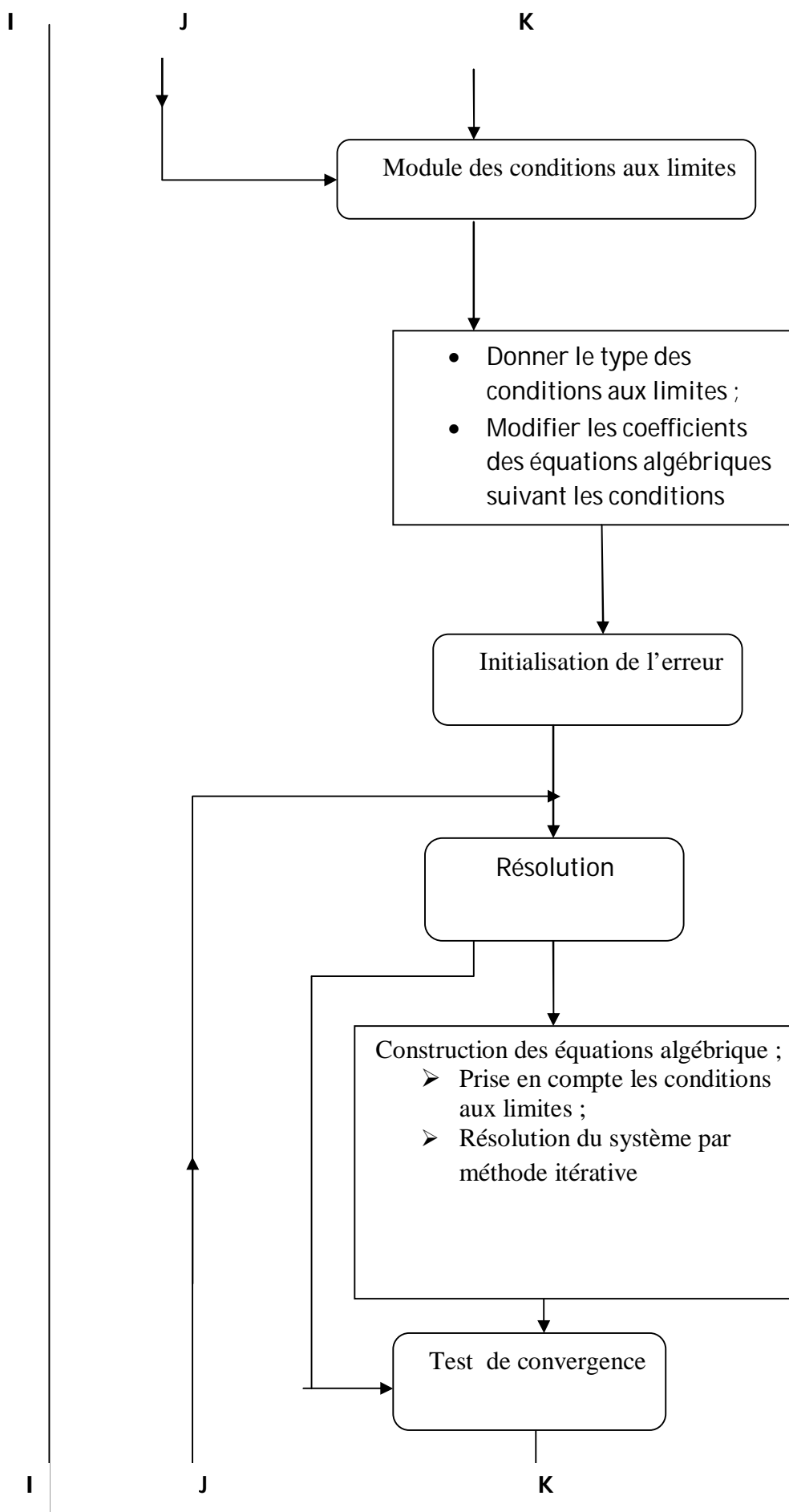
[S] : est le vecteur de la densité du courant :

-Les coordonnées des nœuds ainsi que les coefficients de la matrice du système s'écrit comme suit :

$$[M+iL][A] = [S]$$

La figure (III.6.1) illustre les différentes fonctions de la procédure du calcul et de la résolution de l'équation électromagnétique.





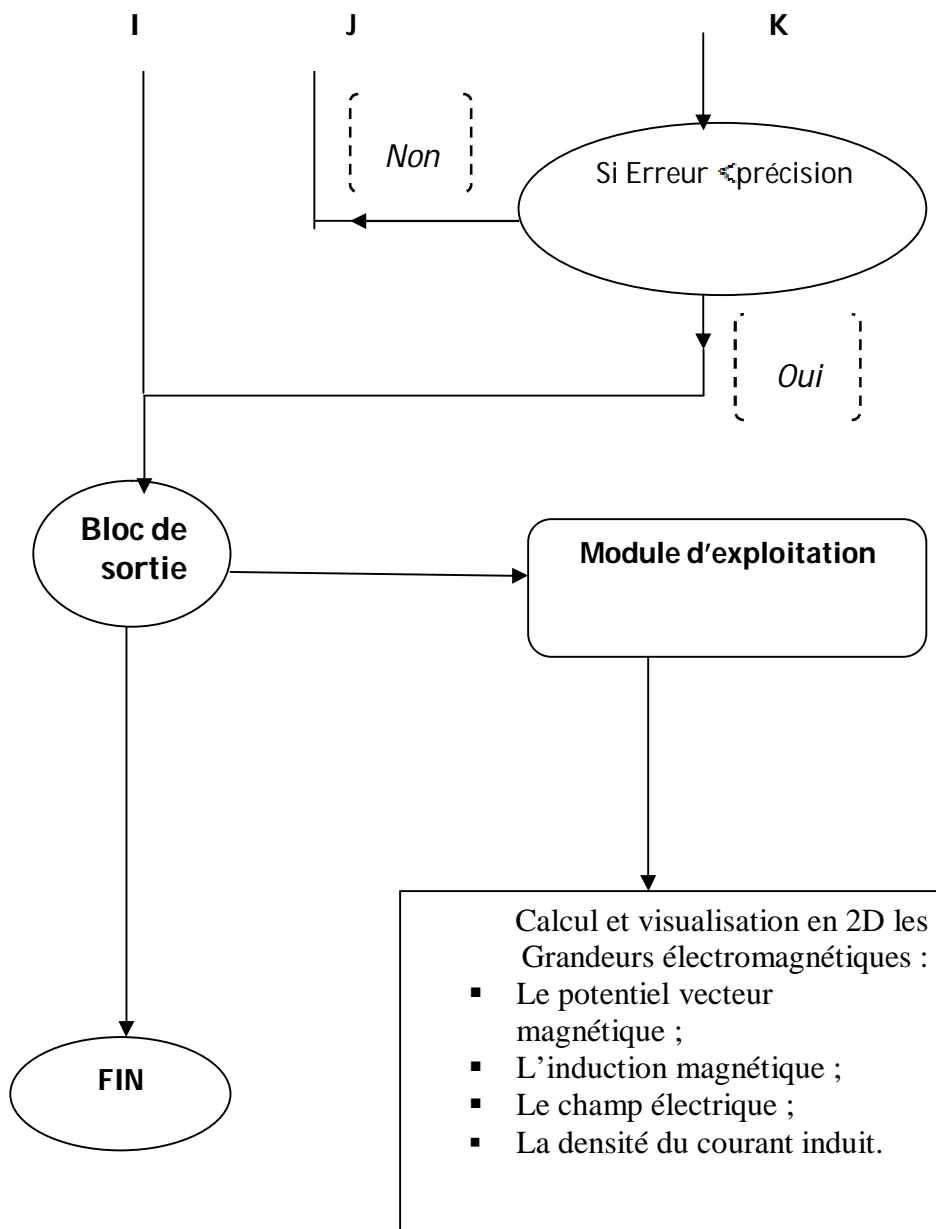


Fig.III.4: Algorithme de résolution de l'équation électromagnétique.

### III.6 CONCLUSION

Le but de notre chapitre est initié à la méthode de volumes fini a l'aides des modelés simples, on présente le cours d'une manière simple qui nécessité un bagage minimum d'analyse.

Ce chapitre a été consacré à la présentation de quelques méthodes numériques D'approximation pour la résolution des problèmes électromagnétiques. En considération du type d'application à traiter, le cas circuit magnétique été détaillé.

Dans le cadre de notre travail, la méthode utilisée pour la résolution des systèmes d'équations algébriques en électromagnétisme obtenue après avoir appliqué la (MVF) pour la transformation des (EPS) est la méthode itérative, car elle consomme moins d'espace mémoire et converge souvent plus vite.

Les différentes applications de description des modèles seront détaillées dans le prochain chapitre

## Conclusion générale

L'objectif de la présente thèse était l'utilisation d'une nouvelle méthode numérique pour la résolution des problèmes électromagnétiques

Notre étude fait parti des travaux consacrés à la modélisation et consiste à établir une structure mathématique qui décrit les phénomènes physiques. En électromagnétisme la réunion du théorème d'Ampère et de la loi de Faraday forme le système d'équations de Maxwell qui est un modèle aux dérivées partielles locales.

La simulation numérique en génie électrique permet de réduire les coûts de développement en prédise les performances d'un dispositif

Nous nous sommes intéressés, dans ce travail, à l'étude d'un circuit magnétique d'induction magnétique et potentielle pour une solution présente un système symétrique. Il faut noter que même si la notion de potentiel permet de simplifier la résolution de nombreux problèmes, nous avons généralement besoin de connaître le champ électrique. Parfois, c'est le champ qui permettra le calcul du potentiel et parfois c'est le potentiel qui sera plus simple à trouver et qui permettra de calculer le champ.

L'algorithme d'inversion du problème proposé où une convergence des valeurs de la potentielle et induction magnétique de la charge a été observée.

On constate à travers les différents résultats obtenus une bonne concordance avec réalité physique.

Comme la méthode de différences finies est la plus ancienne et peut être la base des méthodes numériques d'approximation des équations différentielles, alors l'apprentissage d'une telle méthode va permettre l'étudiant de comprendre la base mathématique des méthodes numériques.

La méthode de volumes finis est parmi les méthodes les plus universelles. D'un autre côté, y'a beaucoup de groupes de recherche à travers le monde qui travaillent dans cette méthode riche.

. L'avantage de cette technique sur les différences finies est qu'elle s'adapte facilement à des géométries complexes qui interviennent dans de nombreux problèmes industriels. La

Difficulté essentielle réside dans l'estimation des flux aux frontières De chaque volume de contrôle lors de la mise en œuvre de cette technique.

Donc l'étudiant peut avoir des relations avec la communauté de volumes finis; ce qui est intéressant pour le futur recherche de l'étudiant.

L'utilisation de la MVF pour le problème non linéaire à géométrie complexe, sera l'objectif de nos prochains travaux scientifiques puisque après les résultats obtenus dans Ce travail nous espérons que la MVF trouvera sa place dans les prochains travaux de recherche.