

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : **de génie civil et
hydraulique**



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة المدنية و الري
المرجع:.....

Ref :.....

Mémoire présenté en vue de l'obtention
Du diplôme de
Magister

Option : Modélisation des matériaux et structures

MODÉLISATION DES PLAQUES PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Présenté par :
DERBANE Said

Soutenu publiquement le 19/02/2012

Devant le jury composé de :

Président :
Rapporteur :
Examineurs :

Pr. Mekki MELLAS
Dr. Djamel HAMADI
Pr. Rachid CHEBILI
Dr. Abdelhafid OUNIS
Dr. Abdelouahab TATI

Pr. Université de Biskra
M.C. Université de Biskra
Pr. Université de Biskra
M.C. Université de Biskra
M.C. Université de Biskra

RESUME

L'étude du comportement des plaques est un sujet très important non seulement dans le domaine de génie civil mais aussi dans le domaine de mécanique, aéronautique, biomécanique etc..... L'étude des plaques occupe une place très importante dans la recherche scientifique.

Le travail présenté consiste à la formulation de deux éléments de plaque, le premier « ACM » est formulé à base de l'approche en déplacement, le deuxième comprend la formulation de la nouvelle variante de l'élément SBRPS formulée en utilisant l'approche en déformation. La validation de la nouvelle variante a été faite à travers les tests de validation connus dans la littérature. Ces tests étudient la flexion des plaques minces ou épaisses en état plan de contrainte sous différentes conditions aux limites. Un programme élaboré en langage FORTRAN77, permet de calculer les déplacements des nœuds et les moments fléchissants. Les résultats calculés sont comparés à ceux obtenus par les logiciels ANSYS, SAP2000 et RDM6.

Mots clés : Modélisation, plaques minces et épaisses, éléments finis, champs de déplacement, champs de déformations.

ABSTRACT

The study of the behaviour of plaque is a very important issue not only in the field of civil engineering, but also in the field of mechanical, aeronautical, biomechanics..... The study of the plates has a very important place in scientific research.

In this thesis; two rectangular finite elements are used to model thick and thin plates. The first element ACM is formulated by using the displacement approach, the second consists with the formulation of the new variant element "SBRPS" is based on the strain approach. The validation of the formulated element was made through the known validation tests. These tests study the bending of the thin and thick plates in plane state of stress with different boundary conditions. A program was elaborated with FORTRAN77 to calculate the displacements of the nodes and the bending moments. The results obtained are compared with those of software ANSYS, SAP2000 and RDM6.

Keywords: Modeling, thin and thick plates, finite elements, displacement fields, deformations fields.

الخلاصة

إن دراسة سلوك الصفائح موضوع ذو أهمية ليس في مجال الهندسة المدنية فقط ولكن في مجال الهندسة الميكانيكية علوم الطيران و البيوميكانيك الخ. دراسة الصفائح يشغل فضاءا واسعا في مجال البحث العلمي.

تتناول هذه المذكرة بالدراسة صياغة عنصرين، أحدهما مشكل باستعمال مبدأ مقارنة الانتقالات، بينما العنصر الثاني تم تشكيله باستعمال مقارنة مبدأ التشوهات. أجريت الاختبارات على العنصر الجديد من خلال عدة أمثلة وتطبيقات مرجعية خاصة بالصفائح لحساب عزوم الانحناء والانتقالات، مع الأخذ بعين الاعتبار مختلف حالات الارتكاز. كما تم إعداد برنامج بلغة "FORTRAN77" يمكننا من حساب الانتقالات و عزوم الانحناء إضافة إلى مقارنة النتائج المحسوبة مع تلك المحصل عليها باستعمال البرامج ANSYS، SAP2000 و RDM6.

الكلمات الرئيسية : النمذجة ، الصفائح الرقيقة والسميكة ، العناصر المحدودة ، مقارنة الانتقالات و مقارنة التشوهات

REMERCIEMENTS

Je remercie d'abord ALLAH le tout puissant qui m'a guidé et qui m'a donné la force et la volonté de réaliser ce travail.

Je remercie mon Directeur de mémoire, Monsieur HAMADI Djamel; Maitre de conférence au département de génie civil université Mohamed Khider de Biskra, d'avoir accepté de diriger ce travail avec beaucoup de disponibilité et d'efficacité, pour m'avoir fait partager son expérience, pour les conseils et encouragements qu'il a su me prodiguer pendant toute la durée de ce travail.

Je manifeste mes honnêtes remerciements à Monsieur MELLAS Mekki; Maitre de conférence au département de génie civil et hydraulique d'université de BISKRA pour l'honneur et le plaisir qu'il m'a fait en acceptant de présider ce jury.

Je remercie vivement Messieurs CHEBILI Rachid; Professeur au département de génie civil et hydraulique d'université de BISKRA, OUNIS Abdelhafid et Monsieur TATI Abdelouahab Maitres de conférence au département de génie civil et hydraulique d'université de BISKRA, qui ont accepté de juger ce travail. Je leur suis très reconnaissant d'y avoir consacré une partie de leurs temps si spéciaux.

Je remercie vivement le Docteur BOUZRIRA. C; Maitre de conférence au département de génie civil université de Jijel, mon oncle le Docteur BOUDEN.T Maitre de conférence au département d'Automatique à l'université de Jijel, qui ont accepté de m'aider pour finaliser ce travail. Je leur suis très reconnaissant d'y avoir consacré une partie de leur temps si précieux.

Je présente ici mes sincères remerciements à Monsieur BOUCHACHE.A, Chef de département Tunnels au niveau de la direction régionale de l'Autoroute Est Ouest à Constantine, pour m'avoir autorisé à poursuivre mes études en post-graduation à l'université de Biskra et pour ses précieux conseils, qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Mes remerciements sont adressés à l'ensemble du corps enseignant en graduation et en post-graduation qui ont contribué à ma formation.

Je tiens à remercier mes amis et collègues de travail, Mr Fergani Mouhamed, Mr Bérrouel Sayeh, Hcen et Mourad pour leurs aides, je remercie notamment Mr AMOUR Amar et Mr Fatéh Chwiya pour leurs intérêts pour la recherche et pour leurs précieux conseils ainsi que pour tous les bons moments partagés et passés.

Je tiens également à remercier mes collègues de promotion, pour les pauses relaxation et discussions que nous avons partagé durant l'année théorique à l'université de Biskra.

Enfin, mes pensées vont, bien entendu, vers mes parents, mes frères Abdelhakim, abdelhadi, Haroun et ma sœur Rihana, ainsi que vers toute ma famille, leurs soutiens et leurs compréhensions ont été un atout majeur pour la réalisation de ce travail.

DEDICACES

Je dédie ce travail à :

Mes parents

Mes frères et ma sœur

Ma famille.

SOMMAIRE

Résumé	i
Remerciements	ii
Liste des figures	iv
Liste des tableaux	vii
Notations	viii
Sommaire	ix

CHAPITRE I INTRODUCTION GÉNÉRALE

I.1 Introduction	01
I.2 Problématique	01
I.3 Recherche bibliographique	02
I.4 L'approche en déformation	05
I.5 Structuration du mémoire	06

CHAPITRE II THÉORIE DES PLAQUES

II.1 Introduction à la théorie d'élasticité	07
II.1.1 Définition des forces	07
II.1.2 Equations d'équilibre	07
II.1.3 Etude de la théorie d'élasticité plane	07
II.1.3.1 Etat plan de déformation	07
II.1.3.1.1 Matrice des constantes élastiques (matrice contrainte-déformation)	09
II.1.3.2 Etat plan de contraintes	10
II.1.3.2.1 Matrice des constantes élastiques	11
II.1.3.2.2 L'énergie de déformation de l'état plan de contrainte	12
II.2 Théorie des plaques	13
II.2.1 Introduction	13
II.2.2 Définition	13
II.2.3 Différents types de plaques	13
II.2.4 Différents types de comportements des plaques	13
II.2.5 Etat membranaire et état flexionnel	14
II.3 Hypothèses pour l'étude des plaques	15
II.4 Quelques approches d'analyse des plaques	17
II.4.1 L'approche multicouches	18

II.4.2 Approche monocouche équivalente	19
II.4.2.1 Plaques minces et épaisses et critère de classification	19
II.4.2.2 Théorie des plaques minces	20
II.4.2.2.1 Hypothèses pour l'étude des plaques minces	20
II.4.2.2.2 Champs de déplacement	21
II.4.2.3 Théorie des plaques épaisses	22
II.4.2.3.1 Hypothèses pour l'étude des plaques épaisses	23
II.4.2.3.2 Champs de déplacement	24
II.4.2.3.3 Champs de déformation	25
II.4.3 Les approches d'ordre supérieur	26
II.4.4 Approche élastique	27
II.5 Conclusion	27

CHAPITRE III

MODÉLISATION DES PLAQUES PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

III.1 Introduction	28
III.2 Principe de la méthode des éléments finis	28
III.2.1 Caractéristique d'un élément finis	29
III.2.1.1 Attributs d'un élément finis	29
III.3 Formulation générale de la méthode des éléments finis	30
III.3.1 Etude d'un élément, relation fondamentale	30
III.3.2 Calcul des déplacements des nœuds	32
III.4 Structure élastique plans	33
III.4.1 Élément triangulaire ou quadrilatère simple pour l'analyse des plaques	33
III.4.1.1 Fonction d'interpolation	33
III.4.1.2 Déformation	35
III.4.1.3 Contrainte	35
III.4.1.4 Matrice de rigidité de l'élément	35
III.4.1.5 Forces nodale équilibrant une densité de force extérieur	36
III.4.1.6 Effet d'une variation linéaire	36
III.5 Plaque mince	37
III.5.1 Généralités	37
III.5.2 Utilisation d'éléments triangulaires et quadrilatères	38
III.5.2.1 Étude de l'élément $A_i A_j A_k$ simplement appuyé aux nœuds	38
III.5.2.2 Matrice de rigidité généralisée de l'élément $A_i A_j A_k$	40
III.5.2.3 Forces nodales équilibrant une densité de charge $q(x, y)$	41
III.6 Conclusion	41

CHAPITRE IV

DIFFERENTES APPROCHES ET FORMULATION DES ELEMENTS DE PLAQUE

IV.1 Introduction	42
IV.2 Modèle mathématique	42
IV.2.1 Description du problème de la contrainte plane	42
IV. 2.1.1 Données du problème	42
IV.3 Problèmes inconnus	43
IV.4 Différents modèles	43
IV.4.1 Modèle en déplacement	43
IV.4.2 Modèle d'équilibre	44
IV.4.3 Modèle mixte	44
IV.4.4 Modèle hybride	44
IV.5 Modèle en déformation	45
IV.5.1 Définition	45
IV.5.2 Classifications du modèle en déformation	45
IV.5.3 Critères de convergence	45
IV.5.4 Avantages du modèle en déformation	45
IV.5.5 Utilisation du modèle en déformation dans l'analyse des structures	46
IV.6 Formulations des éléments pour la flexion des plaques	47
IV.6.1 Élément finis rectangulaire basé sur l'approche en déplacement (ACM) pour l'étude de la flexion des plaques minces	47
IV.6.1.1 Introduction	47
IV.6.1.2 Calcul de la matrice de rigidité de l'élément rectangulaire	47
IV.6.2 Élément finis rectangulaire basé sur l'approche en déformation pour l'étude de la flexion des plaques minces et épaisses	59
IV.6.2.1 Introduction	59
IV.6.2.2 Les équations de bases de Reissner - Mindlin pour la théorie des plaques	59
IV.6.2.2.1 Champ de déplacement	59
IV.6.2.2.2 Champ de déformation	61
IV.6.2.2.3 Les relations constitutives entre les contraintes et les déformations	61
IV.6.2.2.4 Détermination des termes du mouvement d'un corps rigide	62
IV.6.2.2.5 Détermination des autres termes du mouvement	63
IV.6.3 Formulation de la nouvelle variante de l'élément SBRPS	64
IV.6.3.1 Calcul de la matrice de rigidité de l'élément SBSBRPS	67
IV.6.3.2 Etapes de calcul de la matrice de rigidité	67

CHAPITRE V

APPLICATIONS NUMERIQUES

V.1 Introduction	72
V.2 Développement du programme pour le calcul des plaques	72
V.3 Introduction au logiciel de calcul ANSYS	75
V.3.1 Définition	75
V. 3.2 Principaux produits et capacités	75
V.3.3 Plates formes Ou environnements	75
V. 3.4. Organisation de logiciel d'ANSYS	76
V. 3.4.1 La structure de dossier d'ANSYS	76
V.3.5 Quelques éléments du logiciel ANSYS utilisés dans la modélisation des plaques	77
V.4 Introduction aux logiciels de calcul RDM6	77
V.4.1 Présentation du logiciel RDM6	77
V.4.2 Maillage structuré (maillage par bloc)	77
V.4.3 Modélisation des plaques par RDM6	77
V.4.4 Bibliothèque d'éléments des plaques	78
V.5 Introduction aux logiciels de calcul SAP2000	78
V.5.1 Présentation du logiciel SAP2000	78
V.5.2 Modélisation	78
V.5.3 Éléments de plaque	79
V.5.4 Équations de bases utilisés	79
V.6 Applications numérique	82
V.6.1 Console sous charge concentré	82
V.6.1.1 Représentation graphique de la répartition des déplacements de la console	83
V.6.1.1.1 Représentation graphique du logiciel ANSYS	83
V.6.1.1.2 Représentation graphique du logiciel SAP 2000 V14	84
V.6.1.1.3 Représentation graphique du logiciel RDM 6	84
V.6.2 Flexion d'une plaque carrée à deux bords encastés et les deux autres libres	85
V.6.2.1 Flexion d'une plaque sous charge concentrée	85
V.6.2.1.1 Représentation graphique de la répartition des déplacements	86
V. 6.2.1.1.1 Représentation graphique du logiciel ANSYS	86
V. 6.2.1.1.2 Représentation graphique du logiciel SAP 2000	87
V. 6.2.1.1.3 Représentation graphique du logiciel RDM 6	87
V. 6.2.1.1.4 Représentation graphique du logiciel ANSYS	89
V. 6.2.1.1.5 Représentation graphique du logiciel SAP 2000	89
V.6.2.2 Flexion d'une plaque carrée sous charge uniformément répartie	90
V. 6.2.2.2.1 Représentation graphique du logiciel SAP 2000	91
V. 6.2.2.2.2 Représentation graphique du logiciel SAP 2000	92
V.6.3 Flexion d'une plaque carrée avec diverses conditions	93
V.6.3.1 Flexion d'une plaque mince ($L/h = 100$)	93

V.6.3.1.1 Plaque encastrée sous charge concentrée au centre	94
V.6.3.1.1.1 Représentation graphique du logiciel ANSYS	95
V.6.3.1.2 Plaque encastrée sous charge uniformément répartie	95
V.6.3.1.3 Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre	96
V.6.3.1.3.1 Représentation graphique du logiciel ANSYS	97
V.6.3.1.4 Plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie	98
V.6.3.2 Flexion d'une plaque épaisse carrée ($L/h = 10$)	99
V.6.3.2.1 Plaque encastrée sous charge concentrée au centre	99
V.6.3.2.1.1 Représentation graphique du logiciel ANSYS	100
V.6.3.2.2 Plaque encastrée sous charge uniformément répartie	100
V.6.3.2.3 Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre	101
V.6.3.2.3.1 Représentation graphique du logiciel ANSYS	102
V.6.3.2.4 Plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie	103
V.6.3.3 Analyse et interprétation	104
V.6.4 Effets de cisaillement transversal sur la flèche	105
V.6.4.1 Plaque encastrée sous charge concentrée au centre	106
V.6.4.2 Plaque encastrée sous charge uniformément répartie	106
V.6.4.3 Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre	106
V.6.4.4 Plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie	106
V.6.4.5 Analyse et interprétation	107
Conclusion et recommandations	108
Bibliographie	109
Annexes	112

LISTE DES FIGURES

N°	Figure	Page
II.1	Cas de l'état plan de déformation.	08
II.2	Cas de l'état plan de contrainte.	10
II.3	Efforts intérieurs dans une plaque.	15
II.3.a	Etat membranaire de paroi	15
II.3.b	Etat flexionnel de plaque	15
II.3.c	Plaque membrane : superposition des états membranaire et flexionnel	15
II.3.d	Plaque cinq efforts intérieurs par section droit	15
II.4	Description d'une plaque (géométrie et variables)	16
II.5	Variables cinématiques utilisées pour l'étude des poutres et des plaques en flexion.	18
II.6	Déformation d'une plaque mince.	21
II.7	Cinématique de love - Kirchhoff.	21
II.8	Cinématique de Reissner – Mindlin.	24
II.9	Cinématique d'ordre supérieur.	27
III.1	Élément quadrilatère simple d'une structure.	34
III.2	Élément triangulaire simple d'une structure.	34
IV.1	Modèle mathématique de plaque en contrainte plane	42
IV.2	Comportement d'un élément à quatre nœuds lors de la flexion dans le plan.	46
IV.2.a	Linéarité à la flexion pour le modèle basé sur le déplacement.	46
IV.2.b	Rapprochement du comportement réel pour le modèle basé sur la déformation	46
IV.3	Élément rectangulaire.	48
IV.3.a	Système de coordonnées.	48
IV.3.b	Déplacement nodaux.	48
IV.3.c	Forces nodales	48
IV.4	Section C-C après déplacement	50
IV.5	Relation β_x et β_y (θ_x et θ_y) et convention de signe	60
IV.6	Élément rectangulaire de plaque à quatre nœuds avec W , β_x et β_y sont les trois degrés de libertés pour chaque nœud.	60
V.1	Organigramme pour l'étude de la flexion des plaques	74
V.2	Éléments de la bibliothèque du logiciel ANSYS pour la modélisation des plaques.	76
V.3	Principe de calcul par le logiciel RDM6.	77
V.4	Les modèles utilisés dans le SAP 2000	79
V.5	Contraintes et forces de membrane utilisée dans SAP2000	81
V.6	Model des moments de flexion dans une plaque utilisée dans SAP2000	81
V.7	Console sous charge concentré	82

V.8	Présentation graphique par ANSYS d'une console sous charge concentrée. la flèche maximale ($\frac{L}{h} = 1$ à 100, $P = 0.1$, $\nu = 0.3$, $E = 1.2 \times 10^6$)	83
V.9	Présentation graphique par SAP2000 d'une console sous charge concentrée. la flèche maximale ($\frac{L}{h} = 1$ à 100, $P = 0.1$, $\nu = 0.3$, $E = 1.2 \times 10^6$)	84
V.10	Présentation graphique par RDM6 d'une console sous charge concentrée. la flèche maximale ($\frac{L}{h} = 1$ à 100, $P = 0.1$, $\nu = 0.3$, $E = 1.2 \times 10^6$)	84
V.11	Plaque carrée à deux bords encastres et les deux autres libres	85
V.12	Présentation des résultats pour une plaque C. C. C. L	86
V.13	Présentation graphique par ANSYS d'une plaque carrée à deux bords encastres et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale (C. C. C. L; $L = 10$, $h = 0.4$, $P = 1000$, $\nu = 0.3$, $E = 3600$)	86
V.14	Présentation graphique par SAP2000 d'une plaque carrée à deux bords encastres et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale (C. C. C. L; $L = 10$, $h = 0.4$, $P = 1000$, $\nu = 0.3$, $E = 3600$)	87
V.15	Présentation graphique par RDM6 d'une plaque carrée à deux bords encastres et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale (C. C. C. L; $L = 10$, $h = 0.4$, $P = 1000$, $\nu = 0.3$, $E = 3600$)	87
V.16	Présentation des résultats pour une plaque C. C. C. L	88
V.17	Présentation graphique par ANSYS d'une plaque carrée à deux bords encastres et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale (C. C. C. L; $L = 10$, $h = 0.4$, $P = 100$, $\nu = 0.0$, $E = 3600$)	89
V.18	Présentation graphique par SAP2000 d'une plaque carrée à deux bords encastres et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale (C. C. C. L; $L = 10$, $h = 0.4$, $P = 100$, $\nu = 0.0$, $E = 3600$)	89
V.19	Présentation des résultats de la flexion d'une plaque C. U	90
V.20	Présentation graphique par SAP 2000 d'une plaque carrée à deux bords encastres et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale (C. U; $L = 1$, $h = 0.1$, $Q = 1$, $\nu = 0$, $E = 1000$)	91
V.21	Présentation des résultats de la flexion d'une plaque C. U	92
V.22	Présentation graphique par SAP 2000 d'une plaque carrée à deux bords encastres et les deux autres libres (C. U; $L = 10$, $h = 0.4$, $Q = 0.9$, $\nu = 0.3$, $E = 3600$)	92
V.23	Maillage du quart de la plaque	93
V.24	Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque mince (PE_CCC; $L = 20$, $h = 0.2$, $P = 1$, $\nu = 0.3$, $E = 10^6$)	94
V.25	Présentation graphique par ANSYS du quart de la plaque mince (PE_CCC; $L = 20$, $h = 0.2$, $P = 1$, $\nu = 0.3$, $E = 10^6$)	95
V.26	Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque mince (PE_CU; $L = 20$, $h = 0.2$, $P = 1$, $\nu = 0.3$, $E = 10^6$)	96
V.27	Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque mince (PSA_CCC; $L = 20$, $h = 0.2$, $P = 1$, $\nu = 0.3$, $E = 10^6$)	97

V.28	Présentation graphique par ANSYS du quart de la plaque mince ($PSA_CCC; L = 20, h = 0.2, P = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)	97
V.29	Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque mince ($PSA_CU; L = 20, h = 0.2, P = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)	98
V.30	Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque épaisse ($PE_CCC; L = 20, h = 2.0, P = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)	99
V.31	Présentation graphique par ANSYS du quart de la plaque épaisse ($PE_CCC; L = 20, h = 2.0, P = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)	100
V.32	Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque épaisse ($PE_CU; L = 20, h = 2.0, P = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)	101
V.33	Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque épaisse ($PSA_CCC; L = 20, h = 2.0, P = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)	102
V.34	Présentation graphique par ANSYS du quart de la plaque épaisse ($PSA_CCC; L = 20, h = 2.0, P = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)	102
V.35	Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque épaisse ($PSA_CU; L = 20, h = 2.0, Q = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)	103
V.36	Présentation des résultats de l'effet de cisaillement transversal sur la flèche pour les deux éléments SBRP et ACM avec diverses conditions ($PE_CCC, PE_CU, PSA_CCC, PSA_CU; L = 20, h =$ $0.2 \text{ à } 4, P = 1, Q = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)	107

LISTE DES TABLEAUX

N°	Tableau	Page
V.1	Influence de l'élancement L/h sur la flèche maximale du console	83
V.2	Plaque carrée à deux bords encastres et les deux autres libres. Convergence de la flèche maximale ($C.C.C.L$; $L = 10, h = 0.4, P = 100, \nu = 3, E = 3600$)	85
V.3	Plaque carrée à deux bords encastres et les deux autres libres. Convergence de la flèche maximale ($C.C.C.L$; $L = 10, h = 0.4, P = 100, \nu = 0, E = 3600$)	88
V.4	Plaque carrée à deux bords encastres et les deux autres libres. Convergence de la flèche maximale ($C.U$; $L = 10, h = 0.4, Q = 0,9, \nu = 0,0, E = 3600$)	90
V.5	Plaque carrée à deux bords encastres et les deux autres libres. Convergence de la flèche maximale ($C.U$; $L = 10, h = 0.4, Q = 0,9, \nu = 0,3, E = 3600$)	91
V.6	Plaque carrée à deux bords encastres sous charge concentrée au centre. Convergence de la flèche maximale (PE_CCC ; $L = 20, h = 0.2, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)	94
V.7	Plaque carrée à deux bords encastres sous charge uniformément répartie. Convergence de la flèche maximale (PE_CU ; $L = 20, h = 0.2, Q = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)	95
V.8	Plaque carrée à deux bords simplement appuyées sous charge concentrée au centre. Convergence de la flèche maximale (PSA_CCC ; $L = 20, h = 0.2, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)	96
V.9	Plaque carrée à deux bords simplement appuyées sous charge uniformément répartie. Convergence de la flèche maximale (PSA_CU ; $L = 20, h = 0.2, Q = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)	98
V.10	Plaque carrée à deux bords encastres sous charge concentrée au centre. Convergence de la flèche maximale (PE_CCC ; $L = 20, h = 2.0, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)	99
V.11	Plaque carrée à deux bords encastres sous charge uniformément répartie. Convergence de la flèche maximale (PE_CU ; $L = 20, h = 2.0, Q = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)	100
V.12	Plaque carrée à deux bords simplement appuyées sous charge concentrée au centre. Convergence de la flèche maximale (PSA_CCC ; $L = 20, h = 2.0, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)	101
V.13	Plaque carrée à deux bords simplement appuyées sous charge uniformément répartie. Convergence de la flèche maximale (PSA_CU ; $L = 20, h = 2.0, Q = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)	103
V.14	Plaque encastree sous charge concentrée au centre.	106
V.15	Plaque encastree sous charge uniformément répartie	106
V.16	Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre	106
V.17	Plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie.	106

NOTATIONS

symbole	Notation
$[\sigma_{ij}]$	Tenseur des contraintes
$[\varepsilon_{ij}]$	Tenseur des déformations
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
∂	Dérivée partielle
E	Module de « Young » [N/m^2]
ν	Coefficient de poisson
ρ	Densité du matériau
ds	Surface différentielle [m^2]
dv	Volume différentiel [m^3]
\vec{n}	Normale
$f_i(x)$	Fonctions de forme
$f'_i(x)$	Dérivée première de la fonction de forme
U	Energie de déformation [$N.m$]
$[F]$	Vecteur de force
$F(m)$	Force de volume
$f(p)$	force de surface
$[K]$	Matrice de rigidité
K_{ij}	Coefficients de la matrice de rigidité
$[A]$	Matrice des coefficients correspondant aux coordonnées de l'élément
$[B]$	Matrice dérivée des fonctions de forme
$[D_{ij}]$	Tenseur des constantes élastiques
$[K^e]$	Matrice de rigidité élémentaire
$\{ \ }^T$	Transposé d'un vecteur
$tr \{ \sigma \}$	Trace σ
$\partial\Omega$	Surface d'un corps solide
Ω	Volume d'un corps solide
$\partial\Omega_D$	Surface pour les conditions aux limites cinématiques
W	Le travail des forces volumiques et surfaciques
a, b, h	Dimensions et épaisseur de l'élément de plaque
$u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	Déplacement et rotation d'un point quelconque
x, y, z	Coordonnées du repère global
x', y', z'	Coordonnées du repère local
G	Module de coulomb
n_i	Vecteur unitaire
k	Module de compression
Ψ	Densité d'énergie potentielle de déformation
Ψ^*	Densité d'énergie de déformation complémentaire
Π	Energie potentielle totale
Π^*	Energie potentielle complémentaire totale

CHAPITRE I

INTRODUCTION GÉNÉRALE

I. INTRODUCTION GÉNÉRALE

I.1 Introduction

Le calcul des structures complexes nécessite de mettre en place des outils de modélisation du comportement mécanique de plus en plus sophistiqués, et prenant en compte les spécifications de ces matériaux-structures. Du point de vue pratique, les méthodes numériques, notamment le calcul par la méthode des éléments finis est indispensable pour le dimensionnement et la vérification des structures complexes.

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique d'analyse numérique permettant à obtenir des solutions approximatives à une large variété des sciences de l'ingénieur.

Le principe de base de la MEF consiste à remplacer le domaine réel par un ensemble d'éléments discrets, qui peuvent être réunis de plusieurs manières, et donc les employer pour représenter les formes les plus complexes.

La MEF avec l'apparition des ordinateurs, est devenue pour la première fois en 1956, une formulation générale d'approximation de la mécanique des structures lorsqu'elle fut utilisée chez Boeing par Turner, Clough, Martin et Topp, pour calculer des parties de la structure d'un avion, ces travaux marquèrent la naissance de la méthode des Eléments Finis.

Les applications de la méthode des éléments finis se scindent selon la nature du problème à résoudre en trois catégories. Dans la première catégorie, on y trouve le problème d'équilibre qui s'inscrit dans le domaine de la mécanique des solides, où on a besoin de connaître les déplacements, les déformations et les contraintes pour un chargement mécanique ou thermique donné, dont on trouve la majorité des applications de la MEF. Dans la deuxième catégorie, on retrouve les problèmes des valeurs propres, ceux-ci, sont des problèmes stationnaires dont la solution nécessite souvent la détermination des fréquences naturelles et les modes de vibrations des solides et des fluides. Quant à la troisième catégorie, le facteur temps est intégré aux problèmes des deux premières catégories. Les domaines d'application de la MEF s'étendent à toutes les disciplines de l'ingénieur, mais reste que les ingénieurs en génie civil, mécanique et spatiaux sont les utilisateurs les plus fréquents de cette méthode.

Parmi certaines applications de la méthode des éléments finis, on retrouve la modélisation des plaques; sa géométrie, les conditions aux limites (appuyé ou encasté), l'épaisseur (mince ou épaisse), le matériau utilisé (homogène ou isotrope), tous ces paramètres devraient être bien connus au préalable et leur prise en considération dans la conception du programme d'éléments finis est indispensable.

I.2 Problématique

L'analyse numérique des plaques par la méthode des éléments finis a connu ces dernières années une évolution considérable. La formulation des éléments ne se limite pas à l'utilisation du champ des déplacements, mais récemment, à l'utilisation du champ de déformation pour la formulation des nouveaux éléments, qui a connu également une nouvelle évolution.

Dans cette recherche, premièrement, on s'intéresse à l'étude de certains éléments à travers diverses applications et la détermination des problèmes rencontrés (blocage) dans le domaine

d'application. Deuxièmement, une nouvelle contribution dans la formulation des éléments à base du champ de déformation dans le but d'enrichir la bibliothèque existante.

I.3 Recherche bibliographique

La première impulsion ayant un énoncé mathématique de problèmes de plaque a été probablement faite par Euler, qui en 1776, a effectué une analyse des problèmes des vibrations libres de plaque. Chladni, physicien allemand a découvert les différents modes de vibrations libres. Dans les expériences sur les plaques horizontales, il a utilisé une poudre uniformément répartie, qui faisait régulièrement des schémas après induction d'une vibration. La poudre accumulée le long des lignes nodales, où il n'y a pas eu lieu des déplacements verticaux. J. Bernoulli a tenté de justifier en théorie, les résultats de ces expérimentations acoustiques. La solution de Bernoulli est basée sur les précédents travaux aboutissant à la théorie de la flexion de faisceau d'Euler-D. Bernoulli a présenté la plaque en tant que système de bandes droites perpendiculaires l'une à l'autre, chaque bande considérée fonctionnant comme un faisceau. Mais l'équation différentielle régissant, à distinguer des approches actuelles, ne contient pas le moyen terme.

Le mathématicien français Germain a développé une équation différentielle de plaque, dans laquelle le phénomène de voilement est négligé, il a reçu un prix par l'Académie de Paris en 1816 pour ce travail. Le chercheur Lagrange, a été l'un des commentateurs de ce travail, il a corrigé les résultats de Germain en ajoutant le terme manquant, donc, il fut la première personne qui à présenter correctement l'équation de plaque.

Cauchy et Poisson étaient les premiers à formuler le problème de plaque en flexion sur la base des équations générales de la théorie de l'élasticité. Expansion toutes les grandeurs caractéristiques en série, ils ont conservé seulement les termes du premier ordre de petitesse. De cette manière, ils ont obtenu l'équation différentielle régissant pour la flexion qui coïncide entièrement avec la célèbre équation de Germain-Lagrange. En 1829, Poisson élargi avec succès l'équation de plaque de Germain-Lagrange à la solution d'une plaque sous charge statique. Dans cette solution, cependant, la rigidité de la plaque en flexion D est définie comme étant égale à un terme constant.

Poisson a également suggéré l'établissement de trois conditions aux limites pour n'importe quel point sur une frontière libre. Les conditions aux limites dérivées de Poisson et la question sur le nombre et la nature de ces conditions a fait l'objet de beaucoup de controverses et a fait l'objet d'une recherche plus poussée.

La première théorie de la flexion des plaques est associée au chercheur Navier, qui a examiné l'équation générale de plaque en fonction de la rigidité « D » de plaque épaisse. Il a également mis en place une méthode "exacte" qui transforme l'équation différentielle en expressions algébriques par l'utilisation des séries trigonométriques de Fourier.

En 1850, Kirchhoff a présenté une thèse sur la théorie des plaques minces. Dans cette thèse, Kirchhoff a énoncé deux hypothèses de bases indépendantes, qui sont désormais largement

reconnues dans la théorie de la flexion des Plaques et sont connues sous le nom « hypothèses de Kirchhoff ». En utilisant ces hypothèses, Kirchhoff a simplifié, l'énergie fonctionnelle 3D de la théorie d'élasticité des plaques pliées. En exigeant qu'elle soit stationnaire, il a obtenu l'équation de Lagrange-Germain comme l'équation d'Euler. Il a également fait observer qu'il existe seulement deux conditions aux limites sur le bord d'une plaque. D'autres contributions importantes de Kirchhoff sont la découverte l'équation de la fréquence des plaques et de l'introduction de la méthode des déplacements virtuels dans la solution des problèmes de plaque. Kirchhoff a contribué à la théorie physique clarifiée de la théorie de flexion de plaque et a promu son utilisation très répandue dans la pratique.[1]

Lord Kelvin (Thomson) et Tait ont donné un aperçu supplémentaire relatif à la condition de la limite d'équation en convertissant les moments de torsion, le long d'une plaque dans les forces de cisaillement. Ainsi, les bords ne sont soumis qu'aux deux forces : cisaillement et moment. Un livre de Kirchhoff qui contient la traduction de nombreux commentaires précieux par Saint-Venant : Le plus important étant l'extension de l'équation différentielle des plaques minces de Kirchhoff, qui a considéré, d'une manière mathématique exacte, l'action combinée de la flexion et de l'effort tranchant. Saint-Venant a également souligné que la série proposée par Cauchy et Poisson en règle générale, sont divergentes.

La solution de plaques rectangulaires, avec deux simples appuis en parallèle et les deux autres appuis arbitraires, a été résolue par Levy à la fin du 19^{ème} siècle.

A la fin du 19^{ème} et début du 20^{ème} siècle, les chantiers navals ont changé leurs méthodes de construction avec le bois en le remplaçant par l'acier. Ce changement des matériaux de structure, a été extrêmement fructueux dans le développement des différentes théories de plaque. Des scientifiques russes ont apporté une contribution significative à l'architecture navale en étant les premiers à remplacer les anciennes traditions commerciales avec les théories mathématiques de solides. En particulier, Krylov et son élève Boubnov ont largement contribué à la théorie des plaques minces en flexion et en extension des rigidités. Boubnov a mis les bases de la théorie des plaques souples, et il a été le premier qui a introduire une classification moderne de plaque. Boubnov a proposé une nouvelle méthode d'intégration des équations différentielles de l'élasticité et il a composé des tables des déplacements maximaux et de moment de flexion maximal pour les plaques de diverses propriétés. Ensuite, Galerkin a développé cette méthode et l'appliquée à l'analyse de plaque en flexion. Galerkin a recueilli de nombreux problèmes de flexion pour les plaques de forme arbitraire dans une monographie.

Timoshenko (1921) a apporté une importante contribution à la théorie et à l'application de l'analyse de plaque en flexion. La théorie de Timoshenko est parmi les nombreuses contributions importantes de solutions de plaques circulaires compte tenu de grands déplacements et la formulation des problèmes de stabilité élastique. Timoshenko et Woinowsky-Krieger ont publié une monographie fondamentale qui représentait une profonde analyse de divers problèmes de la flexion des plaques. [2] [3]

Des études vastes dans le domaine de la théorie des plaques en flexion et de ses diverses applications ont été effectuées par des savants éminents, tels que Hencky, Huber, von Karman, Nadai, Foppl. Hencky a fait une contribution à la théorie des grandes déformations et à la théorie générale de la stabilité élastique des plaques minces. Nadai a largement associé la théorie et l'expérimentale à une vérification de l'exactitude de la théorie de plaque de Kirchhoff. Il a traité les différents types de singularités de plaques à raison d'une application de la force concentrée, des effets de point d'appui, etc. Les équations générales pour les grands déplacements des plaques de très mince épaisseur ont été simplifiées par Foppl qui a utilisé la fonction de contrainte agissant dans le plan médian de la plaque. La forme définitive de l'équation différentielle de la théorie de grand déplacement, cependant, a été développée par von Karman. Il a aussi fait des recherches sur le comportement en voilement de plaques.

Huber, a développé une théorie de l'approximation de plaques orthotropes et a soumis à résoudre les plaques ayant une distribution non symétrie des charges et des moments ponctuels. Les bases de la théorie générale des plaques anisotropes ont été élaborées par Gehring et de Boussinesq. Lekhnitskii a apporté une contribution essentielle au développement de la théorie et l'application des analyses linéaires et non linéaires des plaques anisotropes. Il a également mis au point la méthode des variables complexes appliquées à l'analyse des plaques anisotropes.

Le développement de l'industrie aéronautique moderne a donné une autre impulsion forte vers des recherches analytiques plus rigoureuse des problèmes des plaques. Les plaques soumises à une force dans plan, le comportement en voilement, et des problèmes de vibration, les plaques raidies, etc, ont été analysés par un certain nombre de scientifiques et d'ingénieurs.

E.Reissner a mis au point une théorie rigoureuse de plaque qui a considère les déformations provoquées par les forces de cisaillement transversal. [4] [5]

Les œuvres de Volmir et Panov ont été consacrés essentiellement à la solution des problèmes non linéaires de plaque en flexion.

L'équation gouvernante d'une plaque mince rectangulaire soumise à des forces de compression directe N_x a d'abord été retirée par Navier. Le problème pour un voilement de plaque simplement appuyée et soumis directement à la compression constante des forces agissant dans un seul et deux directions a été résolu par Bryan en utilisant la méthode de l'énergie. Cox, et Hartmann, ont présenté des solutions de divers problèmes de voilement des plaques minces rectangulaires en compression, tandis que Dinnik Nadai, Meissner, etc, ont achevé le problème de flambement des plaques circulaires compressées. Un effet des forces de cisaillement direct sur le flambement d'une plaque rectangulaire simplement appuyée a d'abord été étudié par Skan et Southwell. Le comportement d'un voilement d'une plaque rectangulaire sous une charge non uniforme et des forces de compression, ont été étudiés par Timoshenko, Gere et Boubnov. Le comportement en voilement des plaques de différentes formes ont été analysées par Kannan et al. Levy, Marguerre,... Une analyse complète de flambement linéaire et non-linéaire pour les problèmes des plaques minces de différentes formes dans le cadre de divers types de charges, ainsi que d'une présentation de résultats disponibles pour la critique des forces et les modes de

flambement, qui peut être utilisé dans la conception technique, ont été présentés par Timoshenko et Gere, Gerard et Becker, Volmir, Cox.

Une équation différentielle du mouvement des plaques minces peut être obtenue en appliquant soit le principe D'Alambert ou la formulation de travail basé sur la conservation de l'énergie. La première solution exacte du problème des vibrations libres pour les plaques rectangulaires, dont deux côtés opposés sont simplement appuyés, a été réalisée par Voight. Ritz a utilisé le problème de vibration d'une plaque rectangulaire avec des bords libres et à démontrer la fameuse méthode libre de Rayleigh pour l'extension du principe d'obtention de bornes supérieures sur les fréquences de vibration. Poisson a analysé l'équation des vibrations libres de plaques circulaires. Les monographies par Timoshenko et Young, Den Hanog, Thompson, etc, contiennent une analyse et de conception des vibrations libres et forcées des plaques de différentes formes. Un ouvrage de référence par Leissa présente une série de résultats disponibles pour les fréquences et les modes des formes des vibrations libres de plaques pourraient être fournis pour la conception et pour un chercheur dans le domaine de vibrations des plaques. [6]

La tendance récente dans le développement des théories de plaque se caractérise par une forte dépendance moderne des ordinateurs à grande vitesse et le développement de l'ordinateur le plus complet axée sur les méthodes numériques, ainsi que par l'introduction de plus de rigueur les théories à l'égard de divers effets physiques, types de chargement, etc. Le résumé ci-dessus est un très bref aperçu de l'historique de la plaque de flexion théorie et son application. [7]

I.4 L'approche en déformation

L'approche basée sur la déformation est l'une des approches les plus utilisées en sciences appliquées de l'ingénieur, il existe une littérature considérable sur le sujet. Achwel et al en 1971 [8] ont utilisé des fonctions de déformation indépendantes pour développer des éléments pour l'analyse des structures courbées et des coques, dans la même année Sabir et Achwel [9]; montrent l'efficacité de l'élément basé sur le modèle en déformation à travers les résultats donnés en analysant les problèmes d'oscillations libres dans le plan des anneaux circulaires. Sabir et Davis ont intéressé aux éléments modélisant les plaques avec ouvertures et soumises à des forces dans le plan, avec calcul des fréquences naturelles [10]. Des auteurs (Belarbi et Charif en 1998) [11] établis en Algérie se sont vus éblouit par ce model, ont amélioré des éléments secteurs déjà existant en incorporant des rotations dans le plan avec 12 dd1/ élément. Dans la même année et pour la première fois dans les annales de ce modèle Belarbi et Charif [12], ont pût tester des éléments 3D basés sur la déformation, de très bonnes performances ont été enregistrées avec l'utilisation du principe de changement de la loi de comportement dû a Ahmad [13]. La machine a pris de la vitesse par le développement et l'amélioration de plusieurs éléments de différents types pour l'analyse des problèmes de l'élasticité linéaire et même dans le domaine non linéaire [14]. Un élément tridimensionnel vérifiant les équations d'équilibre pour la flexion des plaques minces et épaisses a été développé par Maalem [15]. Les nouvelles générations s'occupant de ce modèle se sont vus frayer des chemins par Djoudi dans les domaines non linéaires et ceux des vibrations des coques cylindriques [16], de très bons résultats ont été obtenus. Djoudi et Bahai se sont ensuite intéressé à l'analyse des vibrations des

panneaux cylindriques avec ouvertures et l'influence de ces dernières sur le comportement dynamique des structures a été citée. Retour sur les éléments pour l'analyse des problèmes anti-plans, Belouinar et Guenfoud en 2005 [17], ont développé des nouveaux éléments rectangulaires modélisant la flexion des plaques minces et épaisses, Un nouvel élément rectangulaire a été élaboré pour l'élasticité plane par Belarbi et maalem [18]. Récemment, un nouvel élément quadrilatéral a été formulé pour l'élasticité plane par Hamadi *et al* [19]; c'est un élément simple et a seulement deux degrés de liberté par nœud. En conclusion, l'efficacité de l'approche en déformation a été confirmée à travers plusieurs applications des éléments développés à partir de cette approche dans le domaine de génie civil.

I.5 Structuration du mémoire

Le mémoire se divise en six (06) chapitres.

- Le premier chapitre présente la problématique, un survol des principaux objectifs de cette recherche, et un aperçu sur les travaux antérieurs (une présentation de l'historique de l'apparition de la notion des plaques, ainsi que leurs utilisations dans le domaine de génie civil).
- Le second chapitre est consacré à présenter une revue de la littérature concernant les principes de base de la théorie de flexion des plaques et de l'élasticité plane.
- Le troisième chapitre présente une revue de la littérature relative aux principes de base de la méthode des éléments finis appliquée aux études des plaques.
- Le quatrième chapitre présente la formulation des éléments de plaque, avec la présentation des étapes utilisées pour le calcul de la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ de l'élément rectangulaire formulé à base du champ de déplacement (ACM), ainsi que la nouvelle variante de l'élément (SBRPS) formulé en utilisant l'approche en déformation.
- Pour étudier la flexion des plaques minces et épaisses avec la prise en considération de l'effet du cisaillement transversal, et les conditions aux limites, le cinquième chapitre a été consacré à la présentation des testes de validations, et quelques applications, avec une comparaison entre les résultats obtenus à l'aide d'un programme en langage « FORTRAN 77 » et ceux calculés par les logiciels de modélisation (ANSYS, SAP 2000 et RDM6).
- Le dernier chapitre est réservé aux conclusions générales de l'étude et des perspectives de développement du présent travail.

CHAPITRE II

THÉORIE DES PLAQUES

II. THÉORIE DES PLAQUES

II.1 Introduction à la théorie d'élasticité

Un comportement élastique signifie que l'application des contraintes mène à des déformations réversibles quand on retire les contraintes, L'élasticité linéaire implique que la relation entre les contraintes et les déformations obéit à une équation linéaire, cette notion est valable seulement dans le cas des petites déformations.

Dans ce chapitre une brève exposition des équations de base de la théorie de l'élasticité et des relations entre contraintes et déformations dans le cas tridimensionnel, sera présentée ultérieurement. De ce cas général, dérive le cas particulier de l'élasticité plane (État plan de déformation et état plan de contrainte). Ce chapitre est consacré aussi à une présentation détaillée de la théorie des plaques.

II.1.1 Définition des Forces

Il y a deux sortes de forces qui agissent sur un solide, les forces de volume et les forces de surface. Les forces de volume sont celles qui agissent dans le volume (forces de gravité, électrostatique, ... etc.). Les forces surfaciques sont celles qui agissent sur la surface extérieure ou celles de séparation des deux parties d'un seul corps et il résulte de ces forces des déplacements et des déformations. [20]

II.1.2 Equations d'équilibre

Tous les problèmes de calcul de structures élastiques se ramènent à un système d'équations aux dérivées partielles, qu'il est souvent impossible de résoudre analytiquement.

Les équations d'équilibre pour un corps élastique déformable par rapport aux axes sont résumées comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + f_i = 0 \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \end{cases} \quad \text{avec } i, j = 1, 2, 3 \text{ où } x, y, z \quad (\text{II.1})$$

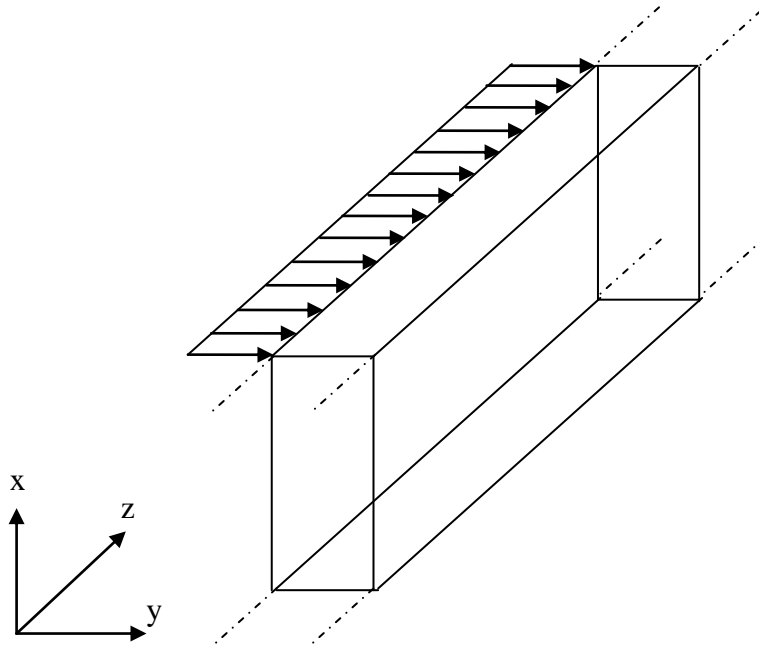
II .1.3 Etude de la théorie d'élasticité plane

II.1.3.1 Etat plan de déformation

On peut dire qu'on est en présence d'un problème de déformation plane lorsqu'on a un corps dont l'une des dimensions est très importante par rapport aux deux autres, et chargé par une force perpendiculaire à la direction de la longueur (Figure. II.1). [21]

Un tel problème est défini par :

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ w = 0 \end{cases} \quad (\text{II.2})$$



(Figure .II.1) : Cas de l'état plan de déformation

Les relations entre les déformations et les déplacements sont :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Dans le cas où la déformation est plane, les contraintes agissant sur un tel corps sont obtenues à partir des équations :

$$\begin{cases} \sigma_x = 2G \cdot \varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \sigma_y = 2G \cdot \varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Inversement ε_x , ε_y , γ_{xy} s'exprime en fonction de σ_x , σ_y , τ_{xy} par les relations :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] \\ \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] \\ \gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Z et \bar{Z} étant nécessairement nuls, les équations d'équilibres deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Et les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \alpha \sigma_x + \beta \tau_{xy} = \bar{X} \\ \alpha \tau_{xy} + \beta \sigma_y = \bar{Y} \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Les conditions d'intégrations du tenseur de déformation se réduisent à la seule condition :

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

La MEF est toujours associée à l'analyse approximative de la forme faible des équations différentielles, on peut déterminer u qui satisfait :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\delta u) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta u \cdot t ds + \int_{\Omega} \delta u \cdot f d\Omega \quad (\text{II.8})$$

Après intégration dans le premier terme de la partie gauche, on obtient l'équation suivante :

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\delta u) = \sigma_x \varepsilon_x(\delta u) + \tau_{xy} \varepsilon_{xy}(\delta u) + \tau_{yx} \varepsilon_{yx}(\delta u) + \sigma_y \varepsilon_y(\delta u) \quad (\text{II.9})$$

En utilisant la propriété de symétrie de $\sigma_{ij}(u)$ et $\varepsilon_{ij}(\delta u)$ par rapport à i et j .

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\delta u) = \sigma_x \varepsilon_x(\delta u) + \tau_{xy} \gamma_{xy}(\delta u) + \sigma_y \varepsilon_y(\delta u) = \{\varepsilon(\delta u)\}^T \{\sigma\} \quad (\text{II.10})$$

$\{\varepsilon(\delta u)\}, \{\sigma\}$ Sont définies par :

$$\{\varepsilon(\delta u)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\delta u) \\ \varepsilon_y(\delta u) \\ \gamma_{xy}(\delta u) \end{Bmatrix}; \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

II.1.3.1.1 Matrice des constantes élastiques (matrice contrainte-déformation)

Basée sur la relation entre σ_{ij} et ε_{ij} , on lie $\{\sigma(u)\}$ et $\{\varepsilon(u)\}$ par la matrice $[D]$

$$\{\sigma(u)\} = [D]\{\varepsilon(u)\} \quad (\text{II.12})$$

$[D]$ Étant la matrice des constantes élastique.

Les composantes de σ_{ij} dans $\{\sigma(u)\}$ sont données par,

$$\sigma_x = k(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_x - \frac{2G}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (\text{II.13})$$

$$\sigma_y = k(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2G\varepsilon_y - \frac{2G}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (\text{II.14})$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (\text{II.15})$$

On peut les mettre sous forme matricielle :

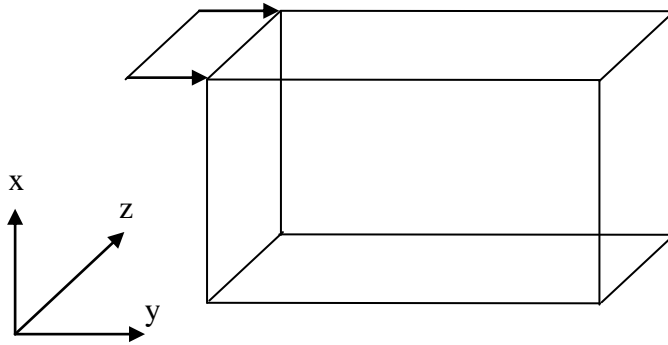
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4G/3 & -2G/3 & 0 \\ -2G/3 & 4G/3 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.16})$$

Les intégrants σ_{ij} et $\varepsilon_{ij}(\delta u)$ dans la partie gauche de la relation (II.8) peuvent être exprimés par :

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\delta u) = \{\varepsilon(\delta u)\}^T [D] \{\varepsilon(u)\} \quad (\text{II.17})$$

II.1.3.2 Etat plan de contraintes

Contrairement à la condition de déformation plane, qui stipule que la dimension longitudinale dans la direction z est importante par rapport aux dimensions suivant x et y ; la condition de contrainte plane est caractérisée par le fait que la dimension suivant la direction z est très petite par rapport aux deux autres dimensions figure (II.2).



(Figure. II.2) : Cas de l'état plan de contrainte.

Ainsi les contraintes $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}, \tau_{yz}$, deviennent nulles. La déformation ε_{zz} n'est pas nulle par effet de poisson.

Dans les deux cas de figures, états plans de contraintes et de déformations, on peut tirer profit des situations qui les caractérisent pour rendre les calculs plus faciles. De la même manière que pour l'état plan de déformation, on aboutit ainsi à :

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(\delta u) = \sigma_x\varepsilon_x(\delta u) + \tau_{xy}\gamma_{xy}(\delta u) + \sigma_y\varepsilon_y(\delta u) = \{\varepsilon(\delta u)\}^T \{\sigma\} \quad (\text{II.18})$$

$\{\varepsilon(\delta u)\}, \{\sigma\}$ Sont définies par

$$\{\varepsilon(\delta u)\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x(\delta u) \\ \varepsilon_y(\delta u) \\ \gamma_{xy}(\delta u) \end{Bmatrix} ; \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

Dans le cas où la déformation est plane, les relations entre les déformations et les contraintes seront :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} \\ \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \end{cases} \quad (\text{II.19.a})$$

Inversement $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_3$ s'expriment en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ par les relations :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \end{cases} \quad (\text{II.19.b})$$

Comme dans le cas de la déformation plane, on a nécessairement $Z = 0; \bar{Z} = 0$, les équations d'équilibre et les conditions aux limites se réduisent aux équations (II.6) et (II.7). Les conditions d'intégrabilité du tenseur de déformation se réduisent aux quatre conditions:

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

$$\sigma_{ij} = k(\text{div } u)\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^D(u) \quad (\text{II.20})$$

II.1.3.2.1 Matrice des constantes élastiques

Basée sur la relation entre σ_{ij} et ε_{ij} , on lie $\{\sigma(u)\}$ et $\{\varepsilon(u)\}$ par la matrice $[D]$

$$\{\sigma(u)\} = [D]\{\varepsilon(u)\} \quad (\text{II.21})$$

Les composantes de σ_{ij} dans $\{\sigma(u)\}$ sont données par,

$$\sigma_x = k(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x - \frac{2G}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (\text{II.22})$$

$$\sigma_y = k(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y - \frac{2G}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (\text{II.23})$$

$$\sigma_z = k(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z - \frac{2G}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0 \quad (\text{II.24})$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (\text{II.25})$$

$$\gamma_{yz} = 0 \quad ; \quad \gamma_{zx} = 0 \quad (\text{II.26})$$

Si on conduit en plus des transformations, on peut donner la relation suivante :

$$\varepsilon_z = \frac{\frac{2G}{3} - K}{\frac{4G}{3} + K} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (\text{II.27})$$

La relation (II.22, 23) devienne:

$$\sigma_x = \frac{2G\left(\frac{2G}{3}+2K\right)}{\frac{4G}{3}+K} \varepsilon_x + \frac{2G\left(k-\frac{2G}{3}\right)}{\frac{4G}{3}+K} \varepsilon_y \quad (\text{II.28})$$

$$\sigma_y = \frac{2G\left(k-\frac{2G}{3}\right)}{\frac{4G}{3}+K} \varepsilon_x + \frac{2G\left(\frac{2G}{3}+2K\right)}{\frac{4G}{3}+K} \varepsilon_y \quad (\text{II.29})$$

On peut les mettre sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2G\left(\frac{2G}{3}+2K\right)}{\frac{4G}{3}+K} & \frac{2G\left(k-\frac{2G}{3}\right)}{\frac{4G}{3}+K} & 0 \\ \frac{2G\left(k-\frac{2G}{3}\right)}{\frac{4G}{3}+K} & \frac{2G\left(\frac{2G}{3}+2K\right)}{\frac{4G}{3}+K} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

De la même façon que précédemment, les intégrants σ_{ij} et $\varepsilon_{ij}(\delta u)$ dans la partie gauche de la relation (II.8) peuvent être exprimés par :

$$\sigma_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(\delta u) = \{\sigma(\delta u)\}^T [D]\{\varepsilon(u)\} \quad (\text{II.31})$$

II.1.3.2.2 L'énergie de déformation de l'état plan de contrainte

L'expression de l'énergie de déformation dans l'état de contrainte tridimensionnel peut être écrite sous la forme.

$$U = \frac{1}{2} \int_v \{\varepsilon\}^t \{\sigma\} dv \quad (\text{II.32})$$

Où σ est le vecteur pour les six composants de contrainte et ε contient les six composants correspondants de déformation.

D'après la loi de Hooke, l'équation d'énergie de déformation peut être exprimée en fonction de contrainte comme suit :

$$U = \int_v \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] dv \quad (\text{II.33})$$

Dans le cas de l'état plan de contrainte on a : $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, donc l'équation (II.34) devient :

$$U = \int_v \left[\frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2) \right] dv \quad (\text{II.35})$$

En utilisant l'équation contrainte / déformation et puis employer l'équation déformation / déplacement on obtient :

$$U = \frac{E}{2(1+\nu^2)} \int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] t dA \quad (\text{II.36})$$

II.2 Théorie des plaques

II.2.1 Introduction

Les plaques sont des structures très utilisées dans l'industrie sous marine, aérospatial, le génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments,...), dans le domaine de l'énergie, et dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de voiture,...), et même dans le monde du vivant (artères, bronches,...), etc. Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle.

II.2.2 Définition

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface de référence plane (plan $x y$) et par une petite épaisseur (notée $h(x, y)$) par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur, figure II.4), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. Une analyse élastique des plaques consiste à une analyse d'un modèle mathématique bidimensionnel ce qui nous conduit à une analyse d'un problème en élasticité plane. [22]

II.2.3 Différents types de plaques

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories;

- 1) *Les plaques isotropes*: elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (E et ν : respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,...).
- 2) *Les plaques orthotropes*: leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotropie peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aeronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art. [23]
- 3) *Les plaques anisotropes*: leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

II.2.4 Différents types de comportements des plaques

L'énergie de déformation d'une plaque peut être décomposée en trois termes principaux : la flexion, la membrane et le cisaillement. Lorsqu'on fait tendre l'épaisseur vers zéro, l'énergie de cisaillement devienne négligeable et la déformation subie par la plaque appartient à l'une des trois catégories asymptotiques suivantes en fonction de la géométrie, des conditions aux limites et des forces appliquées :

- 1) La flexion dominante;
- 2) La membrane dominante;
- 3) Le cas mixte;

Dans les deux premières catégories, c'est la partie correspondante de l'énergie de déformation qui est dominante, tandis que dans les cas mixtes aucune partie n'est négligeable par rapport à l'autre. En considérant la même force, matériau et conditions aux limites, une plaque (plaque) peut exhiber des comportements asymptotiques complètement différents en fonction de la nature géométrique de la surface moyenne. [24] [25]

L'espace continu des déplacements inextensionnels « avec énergies de membrane et cisaillement nul, est nommé V_0 » qui joue un rôle fondamental dans le classement évoqué ci-dessus : dans le cas flexion-dominante, le problème limite est formulé dans cet espace qui doit être différent de zéro, tandis que dans le cas membrane-dominante, cet espace est réduit au champ nul.

II.2.5 Etat membranaire et état flexionnel

L'état de contrainte par le quel l'élément structural résiste aux actions extérieures, est caractérisé par les efforts intérieurs définis au niveau de la surface moyenne. La trace de cette surface dans une section droite s'appelle la ligne moyenne. Les efforts intérieurs sont décrits par unité de longueur de ligne moyenne dans les sections droites.

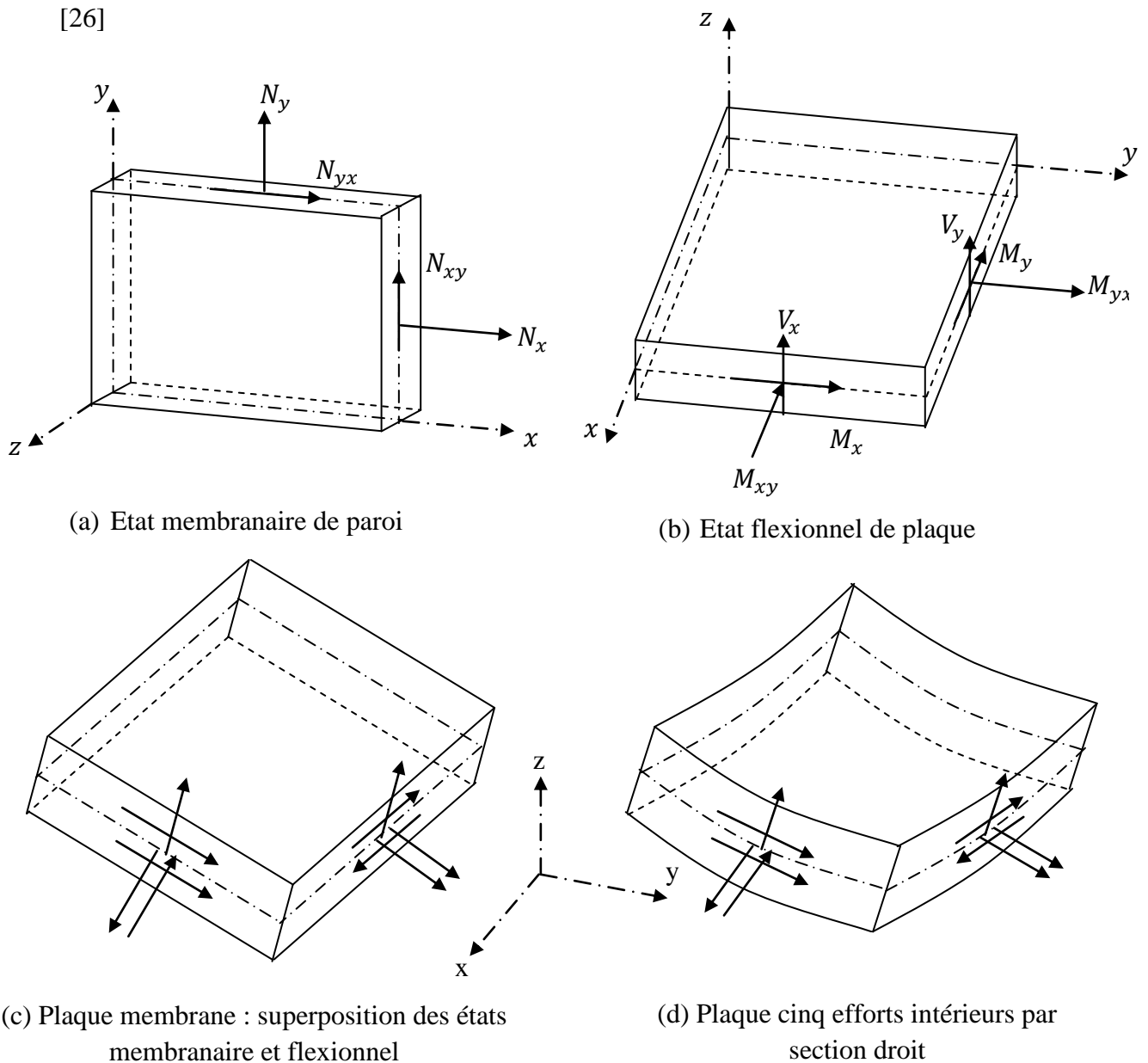
L'état membranaire s'associe aux efforts intérieurs de type force agissant dans la surface moyenne, à savoir les *efforts normaux* et les *efforts tangentiels*.

L'état flexionnel regroupe les efforts intérieurs de caractère flexionnel, soit les *moments de flexion*, les *moments de torsion* et les *efforts tranchants*.

- Selon le mode du comportement, on peut distinguer quatre types d'éléments structuraux : L'élément de paroi est défini par la géométrie plane de surface moyenne (plan moyen) et par son épaisseur : sollicitée par des charges agissant dans son plan moyen, il résiste par un état membranaire (figure. II. 3a); les efforts normaux et tangentiels résultent d'ailleurs de l'état plan de contrainte.
- L'élément de plaque est défini par la géométrie plane de sa surface moyenne (plan ou feuillet moyen); il résiste aux charges agissantes normalement à son plan moyen par un état flexionnel (figure. II.3b).
- L'élément de **plaque-membrane** est la superposition des deux cas précédents et réunit donc l'état membranaire de paroi et l'état flexionnel de plaque (figure. II.3c); bien que plan, il se comporte de manière spatiale, pouvant être soumis à des charges quelconques, tant parallèles que perpendiculaires à son plan moyen; il constitue la base des structures plissées.
- En fin l'élément structural de plaque est, par nature, la courbe spatiale; il utilise les deux états d'effort, *membranaire* et *flexionnel*, pour s'opposer aux actions arbitraires pouvant le solliciter (figure. II.3d); exceptionnellement grâce à sa courbure, une plaque peut ne

résister aux charges que par l'état membranaire (structure gonflable, textile, peau, etc...).

[26]



(Figure. II.3) : Efforts intérieurs dans une plaque.

II.3 Hypothèses pour l'étude des plaques

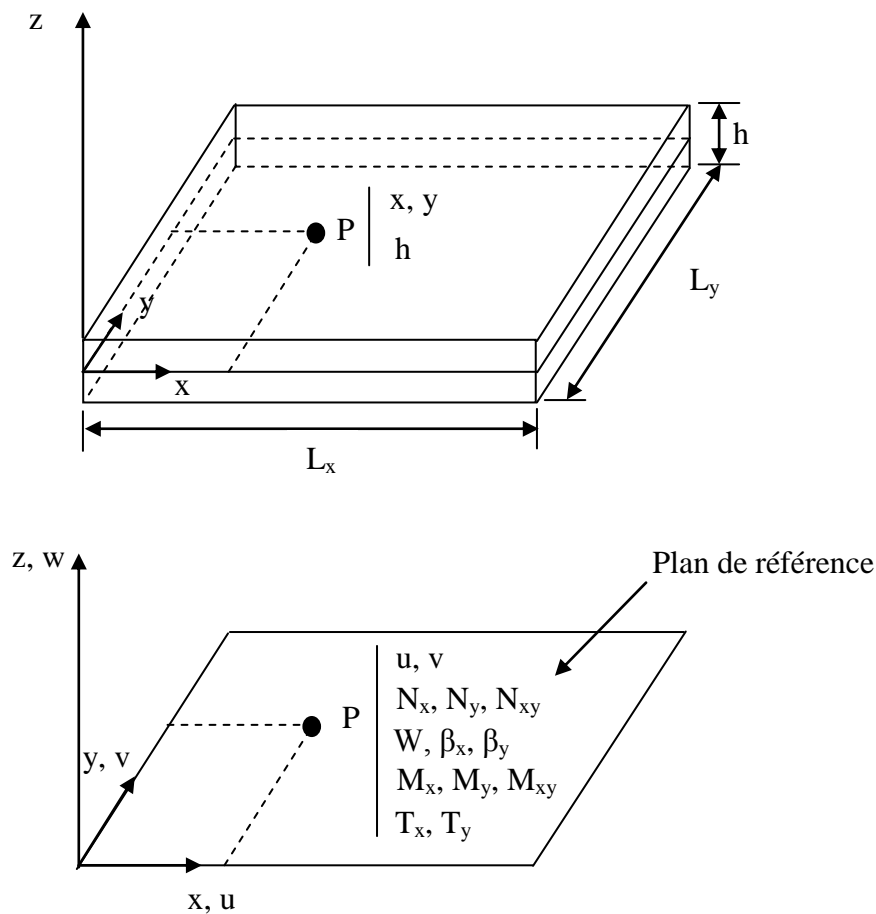
La théorie des plaques, qu'on considère dans ce qui suit, est basée sur :

- L'hypothèse dite des sections droites (ou planes) : les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une droite dans la configuration déformée. les déplacements u et v (suivant x et y) d'un point quelconque x, y, z varient alors linéairement en z et le déplacement transversal w (suivant z) n'est fonction que de x et y . cette hypothèse a été proposée par plusieurs auteurs, dont les plus connus sont Reissner, Hencky, Bollé, Mindlin et permet de prendre en compte l'influence des déformations de CT. Elle a été initialement proposée pour les plaques isotropes mais ensuite a été appliquée aux plaques orthotropes et multicouches.

- L'hypothèse d'une déformation transversale ε_z nulle (pas de variation d'épaisseur).
- L'hypothèse des contraintes planes : dans les relations de comportement, la contrainte σ_z est négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur de contraintes.
- L'hypothèse d'anisotropie plane pour chaque couche dans le cas d'une plaque composite (l'axe z est l'axe d'orthotropie de toutes les couches).
- La prise en compte d'une loi de comportement de cisaillement transversal CT dépendant de facteurs de correction déterminés a priori par des considérations d'équivalences énergétiques, en généralisant la démarche utilisée pour les poutres et en s'inspirant de la théorie mixte de Reissner.

Cette théorie des plaques, dite du premier ordre (relative aux effets de CT) est appelée, dans la suite de ce chapitre, théorie (ou modèle) de Reissner/Mindlin. Elle fait intervenir (figure II.5) :

- Cinq variables cinématiques indépendantes (les déplacements de membrane u et v dans le plan de référence $z = 0$, le déplacement transversal w et les rotations β_x et β_y de la normale à la surface moyenne dans les plans xz et yz respectivement) ;
- Trois efforts résultants de membrane notés N_x, N_y, N_{xy} ; trois moments de flexion (ou couples) notés M_x, M_y, M_{xy} ; deux efforts tranchants notés T_x, T_y .



(Figure. II.4) : Description d'une plaque (géométrie et variables)

II.4 Quelques approches d'analyse des plaques

La théorie de la flexion des plaques la plus simple est la théorie de Kirchhoff-Love, appelée aussi théorie classique de la flexion (Classical Plate Theory). Elle est basée sur le champ de déplacements suivant:

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w = w(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.37})$$

Dans lequel (u, v, w) sont les composantes du déplacement, dans un repère de coordonnées cartésiennes, d'un point appartenant au feuillet moyen (plan de la plaque de coordonnée $z = 0$). Le champ de déplacement, composé des équations (II.37), (II.38) et (II.42), repose sur les hypothèses classiques selon lesquelles une section droite, normale au feuillet moyen avant déformation, reste droite et normale après déformation (Figure. II.3.a). Sous ces hypothèses, les déformations à l'effort tranchant et les contraintes normales au feuillet moyen sont négligées : l'état de déformation est généré uniquement par la flexion et les extensions du feuillet moyen (tensions de membrane).

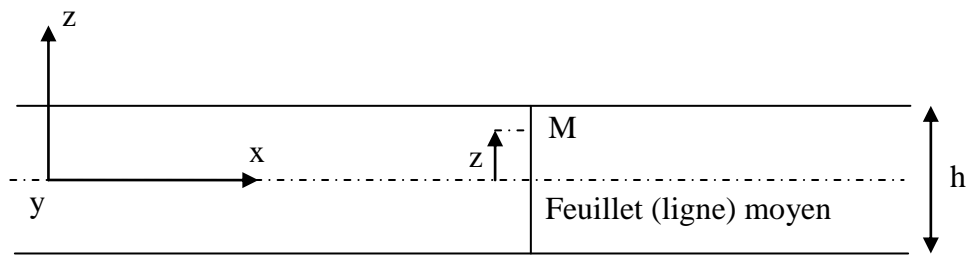
Les bases d'une théorie prenant en compte les déformations au cisaillement ont été posées par Reissner (1945). Puis la théorie complète a été publiée par Mindlin (1951). Cette théorie est connue sous le nom de théorie améliorée (Improved Plate Theory -IPT).

Elle est basée sur le champ de déplacement suivant:

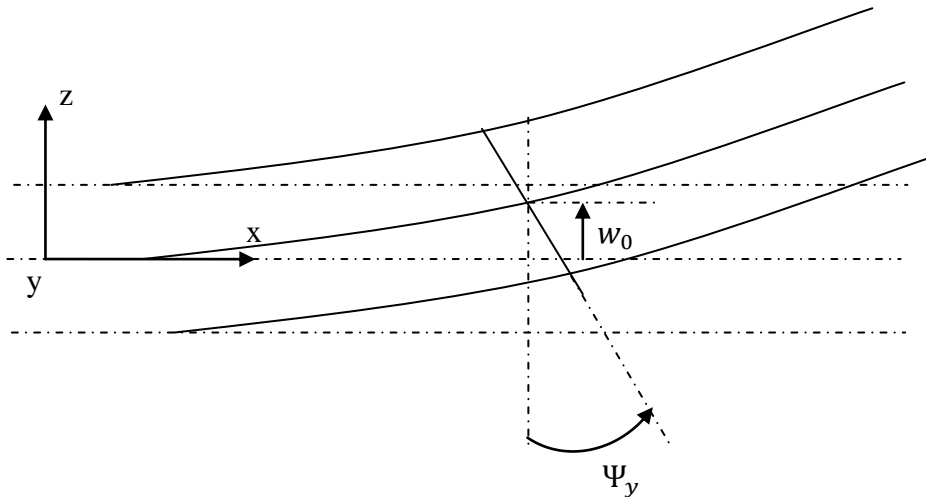
$$\begin{cases} u = -z\phi_y(x, y) \\ v = -z\phi_x(x, y) \\ w = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

Où les termes ϕ_y et ϕ_x désignent les rotations des sections droites autour des axes y et x , respectivement. Selon cette théorie, une section droite, normale au feuillet moyen avant déformation, reste droite mais n'est plus normale au feuillet moyen après déformation (Figure. II.5). De plus, il est possible de prendre en compte, en plus des déformations à l'effort tranchant, l'inertie de rotation des sections droites.

Un modèle de plaque plus complexe peut être développé en utilisant comme composantes du champ de déplacement des fonctions de la variable z d'ordre deux (Reddy (1984)). Ce modèle introduit des nouvelles inconnues dont l'interprétation physique n'est pas évidente. De plus, l'apport de ce type de modèle sur les résultats n'est pas justifié en regard de la complexité introduite dans les calculs (Reddy (1984)).



Configuration non déformée



Configuration déformée – théorie améliorée

(Figure. II.5) : Variables cinématiques utilisées pour l'étude des poutres et des plaques en flexion

II.4.1 L'approche multicouche

Une structure composite multicouche peut être considérée comme un corps hétérogène constitué d'un nombre fini de couches homogènes anisotropes collées. La caractéristique géométrique d'une plaque est une épaisseur faible par rapport aux autres dimensions. La modélisation des structures multicouches modernes avec une forte anisotropie (par exemple : faible rapport du module de cisaillement transverse de l'âme par rapport au module d'élasticité longitudinal des peaux dans le cas des structures sandwich) exige des théories raffinées qui prennent en compte une bonne description des cisaillements transverses. On trouve dans (Carrera) des revues complètes sur les différents modèles existants de type élasticité tridimensionnelle ou de type plaque.

L'intérêt d'une approche tridimensionnelle réside dans l'obtention de résultats satisfaisants tridimensionnels, utilisés notamment comme une référence. L'adoption d'une approche tridimensionnelle ne présente toutefois d'utilité que dans la mesure où les équations différentielles finalement obtenues peuvent être résolues. L'approche tridimensionnelle (3D) est donc limitée à certains cas de géométrie, empilement et chargement simple. De même, la prise en compte des endommagements spécifiques aux stratifiés (délaminage, fissure transverse,...) exige une bonne description des champs au voisinage des interfaces, sites privilégiés de ces endommagements. La encore une approche 3D peut fournir des informations dans certains cas

(bord libre droit, plaque trouée...) mais il est préférable d'envisager des démarches bidimensionnelles (2D) de type plaque plus opératoire. Dans la suite ce sont ces approches 2D qui seront mentionnées.

Durant ces dernières années, plusieurs approches bidimensionnelles ont été développées pour la modélisation des structures multicouches tenant compte les cisaillements transverses ou des endommagements. Ils peuvent être regroupés en fonction du type d'approche adopté :

- L'approche monocouche équivalente
- L'approche par couche
- L'approche développement asymptotique

II.4.2 Approche monocouche équivalente

Dans l'approche monocouche équivalente, le nombre d'équations ne dépend pas du nombre de couche, la plaque multicouche est homogénéisée et est donc considérée comme une seule couche.

Depuis le premier travail de Sophie Germain en 1815 sur les plaques minces en passant par les modèles du premier ordre de Love - Kirchhoff et de Reissner-Mindlin, de nombreux chercheurs ont développé des théories de plaques à partir de cinématiques ou champs de contraintes plus raffinés.

Nous passons en revue, dans ce qui suit, les principaux modèles.

II.4.2.1 Plaques minces et épaisses et critère de classification

- Le plan xy noté A est généralement le plan moyen de la plaque :

$$-t \leq z \leq t \text{ Avec } t = \frac{h}{2}$$

C'est également le plan neutre si les propriétés matérielles sont symétriques par rapport au plan xy .

- Pour les plaques homogènes isotropes, la validité de la théorie de plaque retenue dépend des caractéristiques géométriques. On admet généralement les hypothèses de Mindlin si $4 \leq L/h \leq 20$ et celles de Kirchhoff si $L/h > 20$ où L est une dimension caractéristique dans le plan xy .

- Pour les plaques composites le rôle des déformations de CT dépend non seulement des caractéristiques géométriques (l'élanement L/h), mais également des caractéristiques mécaniques représentées par le rapport E/KG (où E est un module caractéristique intervenant dans la flexion, G un module de CT et k un facteur de correction de CT). comme pour les poutres on peut utiliser le coefficient \emptyset pour évaluer l'influence du CT :

$$\emptyset = (h/l)^2(E/KG) \tag{II.39}$$

Par exemple, pour une plaque carrée homogène isotrope avec $E/KG = 2$:

$$L/h = 4 \quad \emptyset = 0.125 ; L/h = 20 \quad \emptyset = 0.005; L/h = 100 \quad \emptyset = 0.002 \quad (\text{II.40})$$

Pour une plaque composite avec $E/KG = 50$:

$$L/h = 4 \quad \emptyset = 3.125 ; L/h = 20 \quad \emptyset = 0.125; L/h = 100 \quad \emptyset = 0.005 \quad (\text{II.41})$$

On observe que \emptyset est identique pour une plaque isotrope avec $L/h = 4$ et pour une plaque composite ($E/KG = 50$) avec $L/h = 20$ (l'influence du TC sera sensiblement la même pour les deux cas).

- La théorie de Kirchhoff peut être interprétée comme un cas particulier de la théorie de Reissner / Mindlin. (Ainsi, un "bon" modèle élément fini basé sur la théorie de Reissner/Mindlin devra donner des résultats en accord avec la théorie de Kirchhoff si l'influence du CT est faible).

- La détermination de la loi de comportement en cisaillement (relation entre efforts tranchants et cisaillements moyens) peut se faire expérimentalement ou par calculs à partir de différentes hypothèses à caractère statique ou dynamique.

- Pour les plaques composites, la précision des résultats de la théorie du premier ordre en CT (par rapport aux solutions tridimensionnelles) dépend beaucoup de la loi de comportement modifiée par les facteurs correction de CT. Pour les plaques homogènes, le facteur de correction de CT est généralement admis $k = 5/6$ (comme pour les poutres rectangulaires).

- Les théories de plaques dites d'ordre supérieur sont basées sur des distributions plus générales des champs de déplacements (et éventuellement des champs de contraintes σ_{xz} , σ_{yz} , σ_z) : les déplacements u, v, w sont représentés par les termes $1, z, z^2, z^3$ ou trigonométriques. Ces théories d'ordre supérieur permettent d'éviter l'introduction des facteurs de correction de CT mais font généralement intervenir plus de cinq variables cinématiques. signalant qu'une des premières contributions à ces théories fut celle de Lévy en 1877 (ainsi que le soulignent Bollé et Reissner). [22]

II.4.2.2 Théorie des plaques minces

Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff [27] de contraintes planes, les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. La normale reste droite et est perpendiculaire à la surface moyenne après avoir déformée (Figure. II.6 et II.7)

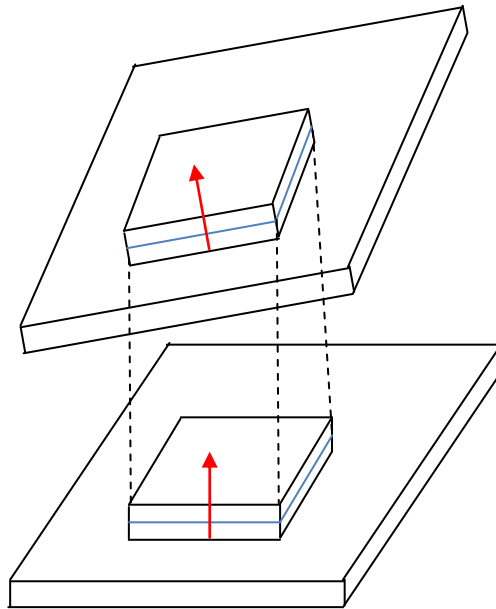
II.4.2.2.1 Hypothèses pour l'étude des plaques minces

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff de contrainte plane, généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant.

- 1) La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
- 2) L'hypothèse des sections droites inclut celle dite de conservation des normales (les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur la normale à

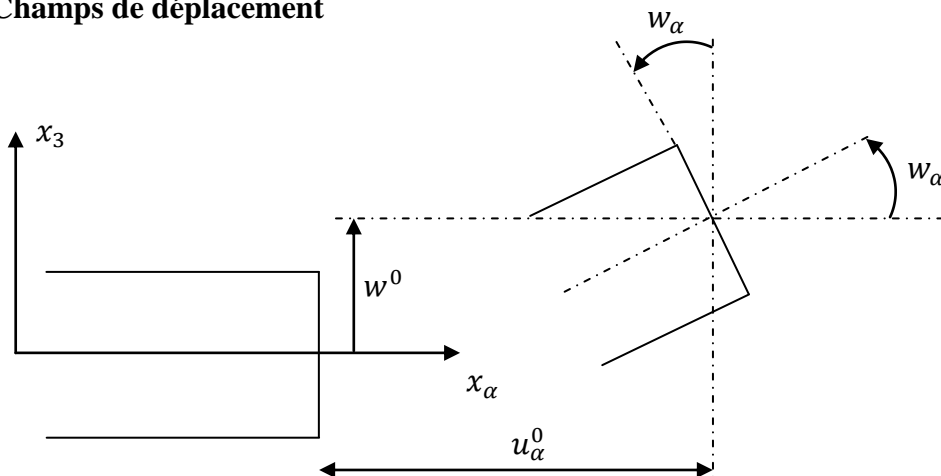
la surface moyenne déformée) ce qui conduit au modèle classique généralement associé au nom de Kirchhoff (mais qui doit également beaucoup aux scientifiques français du 19^e siècle : Sophie Germain, Lagrange, Poisson, Boussinesq, Levy, Saint-Venant).

- 3) La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- 4) Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal w est considéré.
- 5) La contrainte σ_z dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout z .
- 6) Les éléments basés sur la théorie sont les mieux adaptés à la modélisation des plaques minces. Leur formulation ne nécessite que l'approximation d'une seule composante de déplacement $w(x, y)$. Les dérivées secondes des déplacements interviennent dans l'expression de l'énergie de déformation. Ainsi, la condition de compatibilité inter-éléments correspond à la continuité C^1 du déplacement transverse c.-à-d. à la continuité de w et de la pente normale $\frac{dw}{dx}$.



(Figure. II.6) : Déformation d'une plaque mince.

II.4.2.2.2 Champs de déplacement



(Figure. II.7) : Cinématique de love - Kirchhoff.

Les composantes des champs de déplacements pour cette théorie des plaques minces s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z \cdot w_\alpha(x_1, x_2) & \alpha = 1, 2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

Avec :

u_α : le déplacement de membrane dans la direction

w : la flèche de la plaque

w_α : la rotation due à la flexion (sans cisaillement)

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\begin{cases} \beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{II.43})$$

Dans ce cas, le champ de déplacement est défini uniquement par une variable, c'est le déplacement transverse w .

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w = w(x, y) \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

II.4.2.2.3 Champs de déformation

D'après la définition du tenseur des déformations, les équations des déformations sont données comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{z}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\theta_y - \theta_y) = 0 \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (-\theta_x + \theta_x) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

D'autre part, les relations déformations-contraintes sont résumées comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{cases} \quad (\text{II.46})$$

L'équation précédente peuvent s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.47})$$

II.4.2.3 Théorie des plaques épaisses

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion (elle n'est plus très petite devant la dimension des ondes de flexion), une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire.

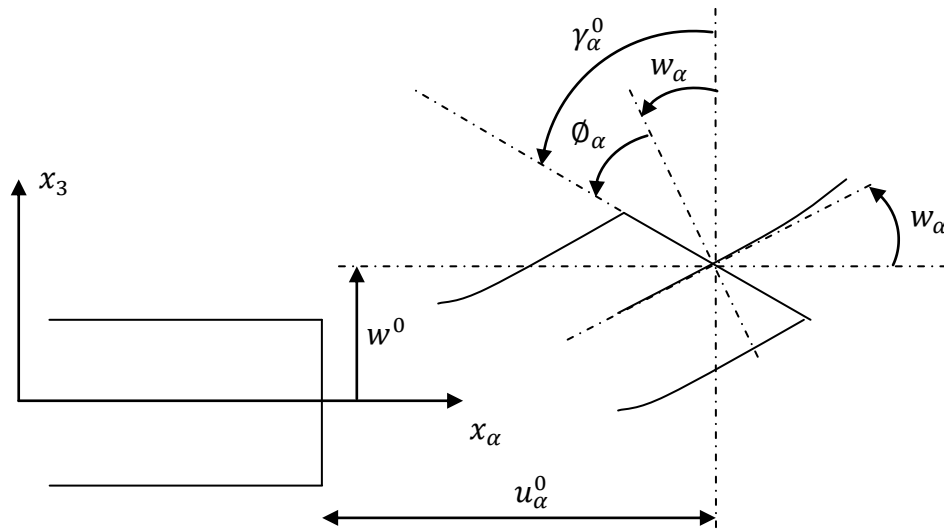
Rayleigh en 1877 puis Timoshenko en 1921 montrent que la prise en compte des effets d'inertie de rotation et de cisaillement, affectent les fréquences propres de flexion des poutres. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonances calculées en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système.

Une extension à la théorie des plaques quant au cisaillement est proposée par Reissner en 1945 dans le cas statique. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand en 1948. C'est cependant l'article de Mindlin, publié trois (3) ans plus tard qui fera date. [28] [29]

II.4.2.3.1 Hypothèses pour l'étude des plaques épaisses

Les hypothèses de Mindlin, reprennent les points 1 et 5 de celles de Kirchhoff. Les points 2 et 4 des précédentes hypothèses ne sont plus retenus afin de prendre en compte les deux nouveaux effets.

- Les éléments basés sur la théorie Mindlin-Reissner sont les mieux adaptés dans le cas des plaques d'épaisseur modérée. Leur formulation est basée sur une approximation des trois variables indépendantes w, θ_x, θ_y . Cependant, on note que dans l'expression de l'énergie de déformation n'interviennent que des dérivées premières de w, θ_x, θ_y . La condition de la compatibilité inter-éléments ne nécessite qu'une continuité C^0 .



(Figure. II.8) : Cinématique de Reissner - Mindlin

II.4.2.3.2 Champs de déplacement

Dans la théorie des plaques épaisses, ou théorie de Reissner et Mindlin, la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen. si θ_x et θ_y désignent les angles que fait la fibre normale avec l'axe z , ils ne correspondent plus à l'inclinaison du plan moyen, on a donc :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) + z \cdot \Phi_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\theta_x \neq \frac{\partial w}{\partial y}; \quad (\text{II.46})$$

$$\theta_y \neq -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (\text{II.47})$$

Donc, les variables cinématiques indépendantes sont :

u et v : Les déplacements de la membrane ;

w : Le déplacement transversal ;

$\beta_x(\theta_y)$: La rotation du plan xy autour de y ;

$\beta_y(-\theta_x)$: La rotation du plan xy autour de x ;

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en z . Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. Cette mauvaise description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement

transversal. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs et l'étude des composites épais restes aléatoires par ce type d'approche cinématique.

Donc, le champ des déplacements s'exprime alors en fonction des trois variables par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.48})$$

II.4.2.3.3 Champs de déformation

Concernant le champ de déformation, les termes gardent leur forme générale :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z = 0 \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (\text{II.49})$$

Et par ailleurs, ε_{xz} et ε_{yz} ne sont plus nuls :

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{dw}{dx} \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{dw}{dy} \end{cases} \quad (\text{II.50})$$

On ne peut donc plus négliger le cisaillement.

Le vecteur et le tenseur des courbures ne peuvent plus se simplifier et restent :

$$\vec{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{II.51})$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) & -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{II.52})$$

Et l'on a toujours

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = z. K \quad (\text{II.53})$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = z. \vec{\mathcal{X}} \quad (\text{II.54})$$

- **Efforts résultants de membrane :**

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz \quad (\text{II.55})$$

- **Moments de flexions :**

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz \quad (\text{II.56})$$

- **Efforts tranchants :**

$$T_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz, \quad T_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz \quad (\text{II.57})$$

II.4.3 Les approches d'ordre supérieur

Pour franchir les limites de la théorie du premier ordre, plusieurs chercheurs proposent des théories à un ordre supérieur. Les concepts sont basés sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur. Ces modèles permettent de représenter le voilement de la section dans la configuration déformée (Figure. II.9). La plupart des modèles d'ordre supérieur utilisent un développement en série de Taylor des champs de déplacements qui s'écrivent, Avec $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$u_i(x_1, x_2, x_3) = u_i^0(x_1, x_2) + z \cdot \varphi_i^{0(1)}(x_1, x_2) + z^2 \cdot \varphi_i^{0(2)}(x_1, x_2) + z^3 \cdot \varphi_i^{0(3)}(x_1, x_2) + z^4 \cdot \varphi_i^{0(4)}(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{II.55})$$

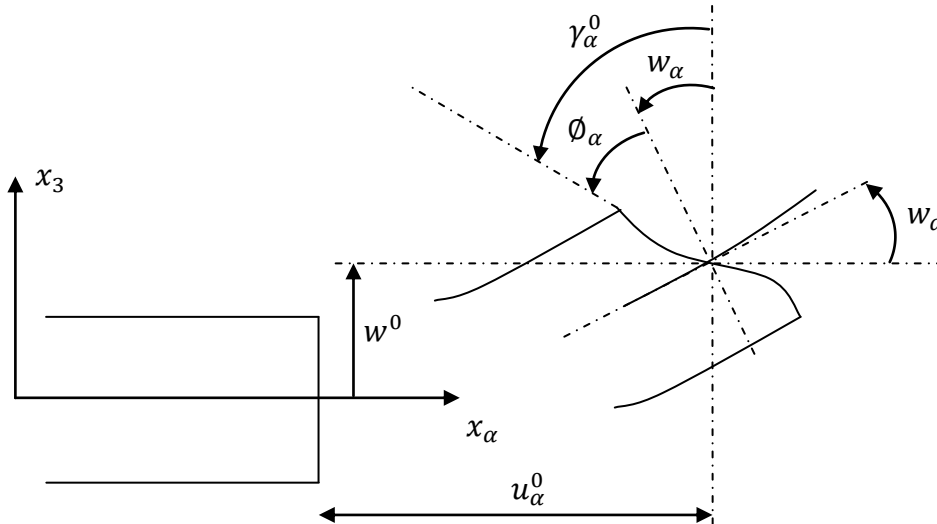
Dans le cas des théories du premier ordre Reissner-Mindlin, on a $\varphi_i^{0(j)} = 0$ pour $j = 2 ; 3 ; 4$ et $\varphi_3^{0(1)} = 0$

Hildebrand et al sont les premiers à introduire ces raffinements avec :

$$\varphi_i^{0(4)} = \varphi_i^{0(3)} = 0 \quad i = 0.$$

Le même développement est utilisé par Nelson et Lorch [30] en introduisant des coefficients de correction. Lo et al. [31] proposent un modèle qui prend en compte également l'effet de déformation normale : $\varphi_i^{0(4)} = \varphi_3^{0(3)} = 0$

Les solutions analytiques de différents modèles d'ordre supérieur sont comparées dans [32]. En principe, ces modèles d'ordre supérieur sont plus précis que les modèles du premier ordre. La précision est augmentée avec l'ordre du développement, c'est à dire avec le nombre de paramètres supplémentaires. Cependant, les conditions limites sur les bords sont difficiles à satisfaire et le nombre de variables de déplacements indépendantes dépasse celui des modèles classiques (trois dans le modèle Love-Kirchhoff et cinq pour le modèle Reissner-Mindlin). Pour réduire le nombre de paramètres de déplacement, plusieurs simplifications sont proposées.



(Figure. II.9) : Cinématique d'ordre supérieur.

Souvent on impose les conditions de nullité des contraintes de cisaillement transversal aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Le développement de (II.42) est utilisé avec :

$$\varphi_i^{0(4)} = \varphi_i^{0(2)} = \varphi_3^{0(3)} = \varphi_3^{0(1)} = 0, \varphi_\alpha^{0(3)}, \alpha = \{1, 2\} \text{ dépend à } \varphi_\alpha^{0(3)} \text{ et à } w_\alpha$$

L'expression de (II.42) devient :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z \cdot w_\alpha + f(z) \gamma_\alpha^0(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases}$$

II.4.4 Approche élastique

Le comportement élastique d'une plaque doit satisfaire trois conditions.

- 1) *l'équilibre*: toutes les forces extérieures, y compris les réactions appliquées au système, doivent s'équilibrer;
- 2) *la résistance*: les efforts intérieurs doivent être en tout point inférieurs à la résistance ultime;
- 3) *la compatibilité et la continuité des déformations*: la déformée de la structure doit être compatible avec les conditions d'appuis et ne doit présenter aucune discontinuité. [33]

II.5 Conclusion

Comme on a vu ci-dessus, il existe donc de différents types de plaques (*isotropes, anisotropes et orthotropes*) qui se comportent avec différents comportements (*flexionnel, membrane ou mixte*), dont les études se font dans différents états (*statique, dynamique*). Ces études se basent généralement sur différentes théories, principalement on utilise celle de **Love - Kirchhoff** dans le cas des plaques minces, et celle de **Reissner - Mindlin** dans le cas des plaques épaisses.

CHAPITRE III

MODÉLISATION DES PLAQUES

PAR LA MÉTHODE DES

ÉLÉMENTS FINIS

III. MODÉLISATION DES PLAQUES PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

III.1 Introduction

L'analyse numérique des plaques est se faire par différences finis, éléments finis ou éléments de frontières. Les avantages et potentialité de la méthode des éléments sont tels que les autres méthodes sont peu utilisées, sauf dans certains cas particuliers. La méthode des éléments finis est extrêmement puissante puisqu'elle permet d'étudier des structures continues ayant des propriétés géométriques et des conditions de charges appliquées. Donc, elle est bien adaptée à l'analyse des structures tridimensionnelles à parois minces, puisqu'elle seule aujourd'hui est capable de résoudre ce type de problème et toute généralité. Elle est donc auxiliaire aux plus précieux pour l'ingénieur.

III.2 Principe de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode approchée de calcul numérique, permettant de déterminer l'équilibre élastique des structures continues à deux ou trois dimensions : structures planes, solides élastiques, plaques minces, membranes et coques.

Grâce au *principe de d'Alembert*, elle permet d'étudier les vibrations de ces structures. Elle peut également être étendue aux structures visco-élastiques ou plastiques.

La méthode des éléments finis consiste à déterminer les déplacements en un certain nombre de points $A_v (v = 1, 2, \dots, N)$ de la structure; ces déplacements sont définis par des matrices colonnes Δv qui sont les inconnues qu'il faut calculer. La méthode repose sur deux hypothèses.

La première hypothèse consiste à diviser, au moyen de lignes ou de surfaces imaginaire passant par les nœuds A_v , la structure en un nombre fini d'éléments $E^\mu (\mu = 1, 2, \dots, M)$ et à supposer que *les élément E^μ ne sont mécaniquement assemblés entre eux qu'aux nœuds A_v .*

La seconde hypothèse consiste à représenter le déplacement en un point M de l'élément E^μ par une *fonction d'interpolation $U(M)$* prenant les valeurs $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma$ lorsque le point M vient aux nœuds $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma, \dots$ de l'élément.

Le théorème des travaux virtuels permet de déterminer quelles forces il faut appliquer aux nœuds $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma, \dots$ pour assurer l'équilibre de E^μ connaissant les déplacements $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma, \dots$ des nœuds, les forces extérieures appliquées à l'élément et les déformations éventuelles (dilatation thermique, retrait) imposées à l'élément. On obtient ainsi les matrices de rigidité généralisées des éléments. Il est donc possible de calculer les déplacements des nœuds.

La première hypothèse conduit à n'écrire que l'équilibre d'ensemble des éléments; localement, les équations de l'équilibre ne sont pas vérifiées, puisqu'on néglige les réactions mutuelles qui s'exercent le long de la frontière commune à deux éléments.

La deuxième hypothèse peut donner lieu à des discontinuités du déplacement (ou de ses dérivées) interpolé à partir des valeurs aux nœuds lorsqu'on traverse la frontière commune à deux éléments.

Il est souhaitable de choisir des fonctions d'interpolation ne conduisant pas à des discontinuités du déplacement, mais ce n'est pas toujours possible.

Pour que la méthode des éléments finis converge vers la solution exacte lorsque le nombre des éléments tend vers l'infini, la plus grande dimension de chaque élément tendant vers zéro, il est *nécessaire* que les deux **critères** suivants soient respectés.

- *La fonction d'interpolation doit être choisie de façon à n'entraîner aucune déformation d'un élément non sollicité dont les déplacements des nœuds résultent d'un déplacement d'ensemble de l'élément.*
- *La fonction d'interpolation doit être choisie de façon à obtenir un état de déformation uniforme d'un élément non sollicité lorsque les déplacements des nœuds sont compatibles avec cet état de déformation uniforme.*

Enfin, pour obtenir une bonne approximation, il faut choisir des éléments dont les différentes dimensions sont sensiblement égales : triangles voisins d'un triangle équilatéral, rectangles voisins d'un carré, etc.

La méthode des éléments finis peut être considérée comme un cas particulier de la méthode de Ritz pour la résolution approchée des problèmes d'élasticité. **La méthode de Ritz** consiste à représenter le déplacement par une combinaison linéaire de fonctions vérifiant les conditions aux limites, et à adopter pour solution approchée la combinaison linéaire qui rend minimale l'énergie potentielle totale.

Ce dernier aspect de la méthode des éléments finis a permis de l'appliquer à de nombreux problèmes de champ, lorsqu'une méthode variationnelle est possible, par exemple déterminer dans un domaine donné les valeurs numériques d'une fonction scalaire $U(M)$ vérifiant une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre, et satisfaisant à des conditions aux limites linéaires sur la frontière du domaine. De tels problèmes, dont le problème de *Dirichlet* et le problème de *Neumann* ne sont que des cas particuliers, se rencontrent souvent. [34]

III.2.1 Caractéristique d'un élément fini

III.2.1.1 Attributs d'un élément fini

Un découpage, artificiel (par l'imagination) d'un milieu continu, en éléments finis permet, d'isoler un élément fini pour l'étudier et en établir les caractéristiques. L'identification d'un élément fini comprend les points suivants.

- **Géométrie** : un élément fini peut être segment de droit ou de courbe, triangle ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre (*brique*). Les frontières entre éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droit ou de courbes, des faces planes ou courbes.

- **Matériau:** le matériau d'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope, etc.)
- **Nœuds:** les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres. Ils occupent les sommets, les extrémités, les milieux des arêtes et faces, etc. on y choisit et définit les degrés de liberté du problème.
- **Degrés de liberté:** la fonction d'approximation choisie (en général le champ des déplacements) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout veillant à respecter certains règles, dites critères de convergence.
- **Forces nodales:** à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température..)
Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un élément fini qui sont sa matrice de rigidité et son vecteur force. [35]

III.3 Formulation générale de la méthode des éléments finis

III.3.1 Etude d'un élément, relation fondamentale

Considérons les éléments E^μ où aux appuis les nœuds sont nommés par : $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma, \dots$. Un repère orthonormé étant choisi, nous représentons le déplacement $U(M)$ d'un point M de l'élément par la formule matricielle : [36]

$$U(M) = \Phi^\mu(M) \Delta^\mu = [\Phi_\alpha^\mu(M) \Phi_\beta^\mu(M) \dots] \begin{bmatrix} \Delta_\alpha \\ \Delta_\beta \\ \dots \end{bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

Les conditions :

$$U(A_\alpha) = \Delta_\alpha, U(A_\beta) = \Delta_\beta, \dots$$

Montrent que la **fonction d'interpolation** $\Phi^\mu(M)$ doit vérifier, quels que soient les nœuds Δ_α et Δ_β , les relations :

$$\Phi_\alpha^\mu(A_\alpha) = I, \quad \Phi_\alpha^\mu(A_\beta) = 0 \quad (\alpha \neq \beta)$$

I : Désignant la matrice unité.

La déformation $D(M)$ se déduit de $U(M)$ par un opérateur différentiel linéaire particulier à chaque type de structure :

Remplaçons $U(M)$ par son expression (III.1); en posant :

$$B^\mu(M) = \{\Phi^\mu(M)\} \text{ et } B_\alpha^\mu(M) = \{\Phi_\alpha^\mu(M)\}$$

Nous obtenons la formule qui donne la déformation $D(M)$ en fonction des déplacements des nœuds de l'élément :

$$D(M)B^\mu(M)\Delta^\mu = \begin{bmatrix} B_\alpha^\mu(M) & B_\beta^\mu(M) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_\alpha \\ \Delta_\beta \\ \dots \end{bmatrix} \quad (\text{III.2})$$

Si r désigne la matrice d'élasticité du matériau constitutif de la structure, qui peut éventuellement être fonction de M , la contrainte au point M est définie par la matrice colonne :

$$C(M) = rD_0(M)$$

Plus généralement, supposons l'élément soumis, du fait de la dilatation thermique ou du retrait, à une déformation imposée $D_0(M)$, la contrainte en point M est donnée par la relation :

$$C(M) = r[D(M) - D_0(M)] \quad (\text{III.3})$$

Proposons nous de déterminer quelles forces, définies par la matrice colonne F^μ formée par la juxtaposition des matrices colonnes $F_\alpha^\mu, F_\beta^\mu, F_\gamma^\mu \dots$, il faut appliquer aux nœuds $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma, \dots$ pour assurer l'équilibre de l'élément sous l'effet :

- des déplacements des nœuds définis par la matrice colonne Δ^μ ;
- d'une densité de force extérieure $f(M)$ appliquée à l'élément;
- d'une déformation $D_0(M)$ imposée à l'élément.

Appliquons le théorème des travaux virtuels :

$$(\delta\Delta^\mu)^t F^\mu + \int_{E^\mu} [\delta U(M)]^t f(M) dM = \int_{E^\mu} [\delta D(M)]^t C(M) dM \quad (\text{III.4})$$

Or il résulte des relations (III.1) et (III.2) que :

$$\delta U(M) = \Phi^\mu(M) \delta\Delta^\mu \text{ et } \delta D(M) = B^\mu(M) \delta\Delta^\mu \quad (\text{III.5})$$

En tenant compte de l'expression (III.7) de $C(M)$, nous obtenons ainsi la relation :

$$(\delta\Delta^\mu)^t F^\mu + (\delta\Delta^\mu)^t \int_{E^\mu} [\Phi(M)]^t f(M) dM = (\delta\Delta^\mu)^t \int_{E^\mu} [B^\mu(M)]^t r [D(M) - D_0(M)] dM \quad (\text{III.6})$$

Nous déduisons de la relation précédente, exacte quelle que soit la variation virtuelle $\delta\Delta^\mu$ la formule fondamentale :

$$F^\mu = R^\mu \Delta^\mu + F'^\mu + F''^\mu \quad (\text{III.7})$$

Dans laquelle :

$$\begin{cases} R^\mu = \int_{E^\mu} [B^\mu(M)]^t r B^\mu(M) dM \\ F'^\mu = - \int_{E^\mu} [\Phi^\mu(M)]^t f(M) dM \\ F''^\mu = - \int_{E^\mu} [B^\mu(M)]^t r D_0(M) dM \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

R^μ : est la matrice de rigidité généralisée de l'élément E^μ .

F'^μ : est la matrice qui définit les forces qu'il faut appliquer aux nœuds pour équilibrer la densité de force $f(M)$ lorsque les nœuds sont fixes ($\Delta^\mu = 0$).

F''^μ : est la matrice qui définit les forces qu'il faut appliquer aux nœuds pour que la déformation imposée $D_0(M)$ n'entraîne aucun déplacement des nœuds ($\Delta^\mu = 0$).

III.3.2 Calcul des déplacements des nœuds

La formule (III.7) donne la matrice définissant la force qu'il faut appliquer au nœud A_ν :

$$F_\nu^\mu = \sum_\alpha R_{\nu\alpha}^\mu \Delta_\alpha + F_\nu'^\mu + F_\nu''^\mu \quad (\text{III.9})$$

La sommation étant étendue aux nœuds de l'élément E^μ et :

$$\begin{cases} R_\nu^\mu = \int_{E^\mu} [B_\nu^\mu(M)]^t r B_\alpha^\mu(M) dM \\ F_\nu'^\mu = - \int_{E^\mu} [\Phi_\nu^\mu(M)]^t f(M) dM \\ F_\nu''^\mu = - \int_{E^\mu} [B_\nu^\mu(M)]^t r D_0(M) dM \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

En supposant que des forces concentrées définies par la matrice colonne F_ν soient appliquées au nœud A_ν , l'équation d'équilibre du nœud A_ν s'écrit :

$$F_\nu = \sum_\alpha R_{\nu\alpha} \Delta_\alpha + F_\nu' + F_\nu'' \quad (\text{III.11})$$

Avec :

$$R_{\nu\alpha} = \sum_\mu R_{\nu\alpha}^\mu \quad F_\nu' = \sum_\mu F_\nu'^\mu \quad F_\nu'' = \sum_\mu F_\nu''^\mu$$

La première sommation étant étendue à l'ensemble des éléments ayant en commun les nœuds A_ν et A_α et les deux dernières à l'ensemble des éléments ayant en commun le nœud A_ν , Si l'on pose :

$$\Delta = \text{Col}(\Delta_\nu), \quad F = \text{Col}(F_\nu), \quad F' = \text{Col}(F_\nu'), \quad F'' = \text{Col}(F_\nu'')$$

L'ensemble des équations d'équilibre des nœuds équivaut à l'unique équation matricielle :

$$F = R\Delta + F' + F'' \quad (\text{III.12})$$

Dont la résolution exige l'inversion de la *matrice de raideur* R . Cette inversion est facilitée parce que la matrice R a beaucoup d'éléments nuls; en effet, toute sous-matrice $R_{\alpha\beta}$ relative à deux nœuds A_α et A_β qui n'appartient pas à un ou plusieurs éléments est nulle. En numérotant convenablement les éléments, la matrice R prend la forme :

$$R = \begin{bmatrix} P_1 & Q_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ Q_1^t & P_2 & Q_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & Q_2^t & P_3 & Q_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & Q_3^t & P_4 & Q_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Et il est facile de montrer que l'inversion de la matrice R revient à inverser un certain nombre de matrices dont la somme des ordres est égale à l'ordre de la matrice R .

III.4 Structures élastiques plans

III.4.1 Élément triangulaire où quadrilatère simple pour l'analyse des plaques

III.4.1.1 Fonction d'interpolation

La structure est divisée en triangles où rectangle. Un élément E_μ comporte trois nœuds pour un élément triangulaire, et quatre nœuds pour un élément quadrilatère, dans cette paragraphe, on prend le cas le plus simple c'est le cas du triangle de nœud A_i, A_j, A_k rangés dans l'ordre où on les rencontre en parcourant le périmètre du triangle dans le sens trigonométrique (figure.III.1). Nous désignons par $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ et (x_k, y_k) les coordonnées des nœuds dans un repère orthonormé fixe Oxy .

Si l'on représente les composantes (u, v) du déplacement au point $M(x, y)$ de l'élément E_μ par des fonctions linéaires :

$$\begin{cases} u(x, y) = a + bx + cy \\ v(x, y) = a' + b'x + c'y \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

On dispose de six constantes que l'on peut déterminer en fonction des déplacements $(u_i, v_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$, des nœuds A_i, A_j, A_k .

Il est intéressant d'utiliser les coordonnées trilineaires liées au triangle $A_i A_j A_k$; si d_i, d_j et d_k désignent les distances du point M aux côtés du triangle dont les hauteurs sont h_i, h_j et h_k :

$$\begin{cases} \xi_i = \frac{d_i}{h_i} \\ \xi_j = \frac{d_j}{h_j} \\ \xi_k = \frac{d_k}{h_k} \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

Les coordonnées trilineaires s'expriment en fonction des coordonnées (x, y) par les formules :

$$\begin{cases} \xi_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y) \\ \xi_j = \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y) \\ \xi_k = \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y) \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Dans lesquelles :

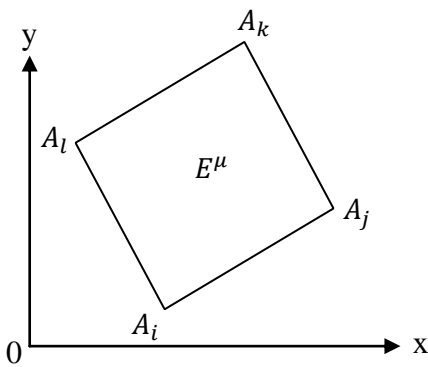
$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ a_j = x_k y_i - x_i y_j \\ a_k = x_i y_j - x_j y_i \end{cases} \quad \begin{cases} b_i = y_j - y_k \\ b_j = y_k - y_i \\ b_k = y_i - y_j \end{cases} \quad \begin{cases} c_i = x_k - x_j \\ c_j = x_i - x_k \\ c_k = x_j - x_i \end{cases}$$

$$2A = a_i + a_j + a_k$$

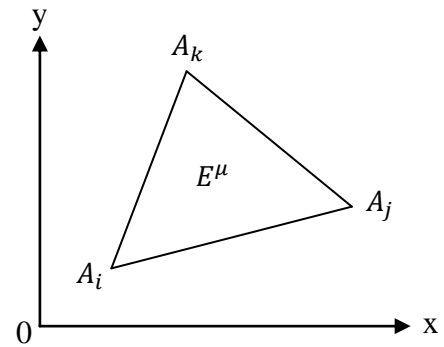
A est l'aire du triangle.

Inversement (x, y) s'exprime en fonction de (ξ_i, ξ_j, ξ_k) par :

$$\begin{cases} x = x_i \xi_i + x_j \xi_j + x_k \xi_k \\ y = y_i \xi_i + y_j \xi_j + y_k \xi_k \end{cases} \quad (\text{III.17})$$



(Figure.III.1) : Elément quadrilatère simple d'une structure.



(Figure.III.2) : Elément triangulaire simple d'une structure.

Les coordonnées trilinéaires vérifient la relation :

$$\xi_i + \xi_j + \xi_k = 1 \quad (\text{III.18})$$

Les coordonnées trilinéaires des nœuds A_i, A_j et A_k sont $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$. Les formules d'interpolations s'écrivent donc :

$$\begin{cases} u = u_i \xi_i + u_j \xi_j + u_k \xi_k \\ v = v_i \xi_i + v_j \xi_j + v_k \xi_k \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

Ou sous forme matricielle :

$$U(M) = \Phi^\mu \quad \Delta^\mu = \xi_i \Delta_i + \xi_j \Delta_j + \xi_k \Delta_k \quad (\text{III.20})$$

La fonction d'interpolation choisie entraîne la continuité de u et de v à la traversée de la frontière commune A_i, A_j à deux éléments, puisque u et v varient linéairement le long de $A_i A_j$ et que les déplacements (u_i, v_i) et (u_j, v_j) sont les mêmes pour les deux éléments [37].

III.4.1.2 Déformation

En un point M de l'élément, la déformation est définie par la matrice colonne :

$$D(M) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Soit, compte tenu de la formule d'interpolation :

$$D(M) = B^\mu \Delta^\mu = B_i^\mu \Delta_i^\mu + B_j^\mu \Delta_j^\mu + B_k^\mu \Delta_k^\mu \quad (\text{III.22})$$

Avec :

$$B_i^\mu = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}, B_j^\mu = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix}, B_k^\mu = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix}$$

III.4.1.3 Contrainte

Elle est définie par la matrice colonne [37]:

$$C(M) = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \tau_3]^t \quad (\text{III.23})$$

Les fonctions d'élasticité plane montrent que la contrainte $C(M)$ se déduit de la déformation $D(M)$ par la relation :

$$C(M) = r D(M) \quad (\text{III.24})$$

Dans laquelle la matrice d'élasticité r a pour expression, dans le cas de la **contrainte plane** :

$$r = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Et dans le cas de la **déformation plane** :

$$r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{III.26})$$

Avec : E module d'Young

ν coefficient de Poisson

III.4.1.4 Matrice de rigidité de l'élément

Elle est de la forme :

$$\begin{bmatrix} R_{ii}^\mu & R_{ij}^\mu & R_{ik}^\mu \\ R_{ji}^\mu & R_{jj}^\mu & R_{jk}^\mu \\ R_{ki}^\mu & R_{kj}^\mu & R_{kk}^\mu \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Les sous-matrices sont données par la première formule (III.10). La fonction à intégrer se réduisant à une constante, on trouve, dans le cas de la **contrainte plane**, en désignant par e l'épaisseur de l'élément : et, dans le cas de la **déformation plane**, pour une tranche d'épaisseur égale à l'unité:

III.4.1.5 Forces nodales équilibrant une densité de force extérieure

Lorsque les composantes (p, q) de la densité de force extérieure sont constantes, la seconde formule donne, moyennant des calculs simples :

$$F_i'^\mu = F_j'^\mu = F_k'^\mu = -\frac{1}{3}A \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \quad (\text{III.28})$$

III.4.1.6 Effet d'une variation linéaire

Une dilatation uniforme τ causée par la température ou le retrait impose à l'élément une déformation :

$$D_0 = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Dans le cas de la contrainte plane}$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} (1+\nu)\tau \\ (1+\nu)\tau \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Dans le cas de la déformation plane}$$

La dernière formule (III.10) donne, moyennant des calculs simples :

$$F_i''^\mu = -\frac{\tau E e}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix} \text{ Dans le cas de la contrainte plane}$$

$$F_i''^\mu = -\frac{\tau E}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix} \text{ Dans le cas de la déformation plane}$$

Nous avons ainsi calculé tous les termes qui figurent dans la formule fondamentale (III.7).

Nous pouvons donc calculer les déplacements des nœuds et en déduire la contrainte constante

$$C^\mu = r B^\mu \Delta^\mu \quad (\text{III.29})$$

de l'élément E^u . Il est naturel de supposer que la contrainte ainsi calculée est la contrainte au centre de gravité de l'élément, et que la contrainte en un nœud est la moyenne des contraintes calculées pour les éléments qui aboutissent à ce nœud.

III.5 Plaques minces

III.5.1 Généralités

Considérons une plaque mince dont le plan moyen Oxy devient après déformation une surface S d'équation $Z = w(x, y)$; le plan tangent à S au point $M(x, y)$ a pour équation [38] :

$$Z - w = (X - x) \frac{\partial w}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{III.30})$$

Donc le déplacement d'un élément de plaque de centre M est le produit d'une translation de composante w suivant Oz , et d'une rotation de composantes α et β suivant Ox et Oy :

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \beta = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Le déplacement de l'élément de plaque de centre M est défini par la matrice colonne :

$$U(M) = [w \quad \alpha \quad \beta]^t \quad (\text{III.31})$$

La plaque est sollicitée par une densité de force généralisée définie par la matrice colonne :

$$f(M) = [q(M) \quad \gamma_x(M) \quad \gamma_y(M)]^t \quad (\text{III.32})$$

$q(M)$ est la composante de la densité de force suivant Oz ; $\gamma_x(M)$ et $\gamma_y(M)$ sont les composantes de la densité de couple suivant Ox et Oy .

La méthode des éléments finis consiste à remplacer la plaque par une structure composée d'éléments polygonaux E^μ assemblés entre eux de façon rigide aux nœuds A_v . Les déplacements des nœuds et les forces nodales appliquées à l'élément E^μ sont définis par les matrices colonnes [38]:

$$\Delta_v = U(A_v) \quad (\text{III.33})$$

$$F^\mu = [Q^\mu \quad \Gamma_x^\mu \quad \Gamma_y^\mu]^t$$

La contrainte de la plaque est définie par la matrice colonne :

$$C(M) = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^t \quad (\text{III.34})$$

Dans laquelle M_x, M_y et M_{xy} désignent les moments fléchissant et le moment de torsion.

La déformation de la plaque est définie par la matrice colonne :

$$D(M) = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^t \quad (\text{III.35})$$

La théorie des plaques montre que :

$$C(M) = rD(M) \quad (\text{III.36})$$

La matrice d'élasticité r ayant pour expression :

$$r = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Avec : E module d'Young
 h épaisseur de la plaque
 ν coefficient de Poisson

On notera que la connaissance de la fonction $w(x, y)$ entraîne celle des matrices $U(M)$ et $D(M)$.

III.5.2 Utilisation d'éléments triangulaires et quadrilatères

Nous supposons la plaque divisée en éléments triangulaires $A_i A_j A_k$, (figure.III.2) et en élément quadrilatère $A_i A_j A_k A_l$ (figure.III.1), l'ordre $A_i A_j A_k A_l$ correspondant au parcours du périmètre du rectangle ou du triangle dans le sens trigonométrique.

Si nous représentons le déplacement transversal w de l'élément E^u par un polynôme du troisième degré en x et y , ce polynôme contient dix coefficients. Comme il n'y a que neuf composantes de déplacement des nœuds pour l'élément triangulaire, le polynôme dépendra linéairement d'un paramètre que l'on pourrait déterminer en écrivant que l'énergie, de déformation est minimale.

Nous procéderons de façon différente. Nous étudierons d'abord l'élément $A_i A_j A_k$ simplement appuyé aux nœuds ; dans ce cas $w_i = w_j = w_k = 0$ et les réactions verticales des appuis se déterminent à l'aide des seules équations d'équilibre de la statique. Nous passerons ensuite au cas général en donnant un déplacement d'ensemble à l'élément supposé sur appuis simples.

Pour conserver la symétrie de l'élément, nous utiliserons les coordonnées trilineaires (ξ_i, ξ_j, ξ_k) définies au paragraphe III.4.1.1, et nous conserverons les notations définies dans ce paragraphe.

III.5.2.1 Étude de l'élément $A_i A_j A_k$ simplement appuyé aux nœuds

Nous accentuons toutes les quantités relatives à l'élément $A_i A_j A_k$, simplement appuyé. Les déplacements des nœuds sont définis par les matrices [39]:

$$\Delta'_i = \begin{bmatrix} \alpha'_i \\ \beta'_i \end{bmatrix} \quad \Delta'_j = \begin{bmatrix} \alpha'_j \\ \beta'_j \end{bmatrix} \quad \Delta'_k = \begin{bmatrix} \alpha'_k \\ \beta'_k \end{bmatrix}$$

Et les forces nodales correspondantes sont définies par les matrices :

$$F_i{}^{ru} = \begin{bmatrix} \Gamma'_{xi} \\ \Gamma'_{yi} \end{bmatrix} \quad F_j{}^{ru} = \begin{bmatrix} \Gamma'_{xj} \\ \Gamma'_{yj} \end{bmatrix} \quad F_k{}^{ru} = \begin{bmatrix} \Gamma'_{xk} \\ \Gamma'_{yk} \end{bmatrix}$$

Représentons le déplacement transversal w' par un polynôme du troisième degré en x et y ; ce polynôme doit vérifier les conditions :

$$\begin{aligned} \text{en } A_i \quad w' &= 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial y} = \alpha'_i, \quad \frac{\partial w'}{\partial x} = -\beta'_i; \\ \text{en } A_j \quad w' &= 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial y} = \alpha'_j, \quad \frac{\partial w'}{\partial x} = -\beta'_j; \\ \text{en } A_k \quad w' &= 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial y} = \alpha'_k, \quad \frac{\partial w'}{\partial x} = -\beta'_k \end{aligned}$$

Ce polynôme dépend donc d'un paramètre λ ; en observant que la fonction $\xi_i \xi_j \xi_k$ ainsi que ses dérivées par rapport à x et à y sont nulles aux nœuds A_i , A_j et A_k , on met sans difficultés $w'(x, y)$ sous la forme :

$$w' = \sum_{i,j,k} [b_j(\xi_i^2 \xi_k + \lambda \xi_i \xi_j \xi_k) - b_k(\xi_i^2 \xi_k + \lambda \xi_i \xi_j \xi_k)] \alpha'_i + \sum_{i,j,k} [c_j(\xi_i^2 \xi_k + \lambda \xi_i \xi_j \xi_k) - c_k(\xi_i^2 \xi_j + \lambda \xi_i \xi_j \xi_k)] \beta'_i \quad (\text{III.37})$$

Les coefficients b_i, b_j, b_k , et c_i, c_j, c_k sont définis au paragraphe III.3.1.1.

Lorsque l'élément est soumis à un état de déformation uniforme, les dérivées secondes de w' sont des constantes, et w' est un polynôme du second degré qui s'annule aux nœuds, donc de la forme :

$$w' = c_i \xi_i \xi_j \xi_k + c_j \xi_i \xi_j \xi_k + c_k \xi_i \xi_j \xi_k \quad (\text{III.38})$$

Si nous voulons que l'expression (III.37) puisse représenter un état de déformation uniforme, il faut que cette expression se réduise à l'expression (III.38) lorsqu'on donne aux rotations les valeurs correspondant à un état de déformation uniforme défini par (III.38). Un calcul simple montre que cela n'est possible que lorsque $\lambda = 1/2$, valeur que nous adopterons désormais dans la fonction d'interpolation (III.37). Cette fonction d'interpolation n'entraîne pas la continuité du déplacement $U(M)$ à la traversée de la frontière commune à deux éléments.

La déformation $D(M)$ se déduit de l'expression de w' .

$$D(M) = \left[\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} \right] = \sum_{i,j,k} \beta'_i{}^\mu(M) \Delta'_i \quad (\text{III.39})$$

$\beta'_i{}^\mu(M)$ Étant une matrice de dimension (3,2) dont il serait facile de donner l'expression.

Les sous-matrices de la matrice de rigidité R'^μ de l'élément E^μ simplement appuyé aux nœuds sont alors données par la première formule (III.10) :

$$R'_{mn}{}^\mu = \iint [\beta'_m{}^\mu(M)]^t r \beta'_n{}^\mu(M) dx dy \quad (\text{III.40})$$

Le calcul de $R'_{mn}{}^\mu$ peut être achevé en utilisant la valeur des intégrales :

$$J_{r,s} = \int_E \xi_i^r \xi_i^s dx dy = 2A \frac{r!s!}{(r+s+2)} \quad (r, s \text{ entiers}) \quad (\text{III.41})$$

III.5.2.2 Matrice de rigidité généralisée de l'élément $A_i A_j A_k$

Au cours de la déformation de la plaque, les nœuds A_i, A_j et A_k se déplacent normalement au plan moyen et viennent en A'_i, A'_j , et A'_k [39] :

$$\overline{A_i A'_i} = w_i, \quad \overline{A_j A'_j} = w_j, \quad \overline{A_k A'_k} = w_k$$

L'équation du plan $A_i A_j A_k$ est :

$$z = w_i \xi_i + w_j \xi_j + w_k \xi_k \quad (\text{III.42})$$

Il ne résulte que le déplacement normal w a pour valeur :

$$w = w' + w_i \xi_i + w_j \xi_j + w_k \xi_k \quad (\text{III.43})$$

w' Étant donné par la formule (III.38) dans laquelle $\lambda = 1/2$. En dérivant l'expression précédente par rapport à x et à y , nous trouvons :

$$\alpha'(M) = \frac{\partial w'}{\partial x} = \alpha(M) - \frac{1}{2A} (c_i w_i + c_j w_j + c_k w_k)$$

$$\beta'(M) = \frac{\partial w'}{\partial y} = \beta(M) - \frac{1}{2A} (b_i w_i + b_j w_j + b_k w_k)$$

En plaçant successivement M en A_i, A_j et A_k , nous obtenons ainsi six relations équivalentes à relation matricielle :

$$\Delta'^{\mu} = T \Delta^{\mu} \quad \text{avec} \quad \Delta'^{\mu} = \begin{bmatrix} \Delta'_i \\ \Delta'_j \\ \Delta'_k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta^{\mu} = \begin{bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_j \\ \Delta_k \end{bmatrix}$$

T Désignant la matrice de dimension (6.9) :

$$T = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -c_i & 2A & 0 & -c_j & 0 & 0 & -c_k & 0 & 0 \\ b_i & 0 & 2A & b_j & 0 & 0 & b_k & 0 & 0 \\ -c_i & 0 & 0 & -c_j & 2A & 0 & -c_k & 0 & 0 \\ b_i & 0 & 0 & b_i & 0 & 2A & b_k & 0 & 0 \\ -c_i & 0 & 0 & -c_i & 0 & 0 & -c_k & 2A & 0 \\ b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 & b_k & 0 & 2A \end{bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

Les équations de la statique permettent de déterminer les réactions verticales d'appui de l'élément simplement appuyé. Nous savons donc calculer les forces nodales F^u connaissant les forces nodales F'^u . Nous trouvons la relation:

$$F^{\mu} = T^t F'^{\mu} \quad (\text{III.45})$$

Que l'on peut également démontrer au moyen du théorème des travaux virtuels :

$$(\delta\Delta^\mu)^t F^\mu = (\delta\Delta'^\mu)^t F'^\mu \quad (\text{III.46})$$

Nous déduisons successivement des relations précédentes :

$$F^\mu = T^t F'^\mu = T^t R'^\mu \Delta'^\mu = (T^t R'^\mu \Delta'^\mu) \Delta^\mu \quad (\text{III.47})$$

Donc la matrice de rigidité généralisée R^μ se déduit de la matrice de rigidité de l'élément supposé sur appuis simples par la formule :

$$R^\mu = T^t R'^\mu T \quad (\text{III.48})$$

III.5.2.3 Forces nodales équilibrant une densité de charge $q(x, y)$

L'expression de w en fonction des déplacements des nœuds se déduit des formules données précédemment [30] :

$$w = \sum_{i,j,k} (L_i w_i + M_i \alpha_i + N_i \beta_i) \quad (\text{III.49})$$

Avec :

$$L_i = 3\xi_i^2 - 2\xi_i^3 + 2\xi_i \xi_j \xi_k \quad (\text{III.50})$$

$$M_i = b_i \xi_i^2 \xi_k - b_k \xi_i^2 \xi_k + \frac{1}{2}(b_j - b_k) \xi_i \xi_j \xi_k \quad (\text{III.51})$$

$$N_i = c_i \xi_i^2 \xi_k - c_k \xi_i^2 \xi_k + \frac{1}{2}(c_j - c_k) \xi_i \xi_j \xi_k \quad (\text{III.52})$$

La deuxième formule (III.10) donne les forces nodales $F_i'^\mu$ qui équilibrent la densité de charge $q(x, y)$:

$$F_i'^\mu = \int_{E^\mu} q(x, y) \begin{bmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{bmatrix} dx dy \quad (\text{III.53})$$

Lorsque la densité de charge est constante est égale à q , nous trouvons :

$$F_i'^\mu = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 8 \\ b_j - b_k \\ c_j - c_k \end{bmatrix} \quad (\text{III.54})$$

III.6 Conclusion

Cette présentation de la MEF nous facilite la modélisation numérique des plaques. En même temps l'utilisation d'un élément finis rectangulaire, nous a permis d'estimer la matrice de rigidité élémentaire ainsi que la matrice des forces.

CHAPITRE IV

DIFFÉRENTES APPROCHES ET FORMULATION DES ÉLÉMENTS DE PLAQUE

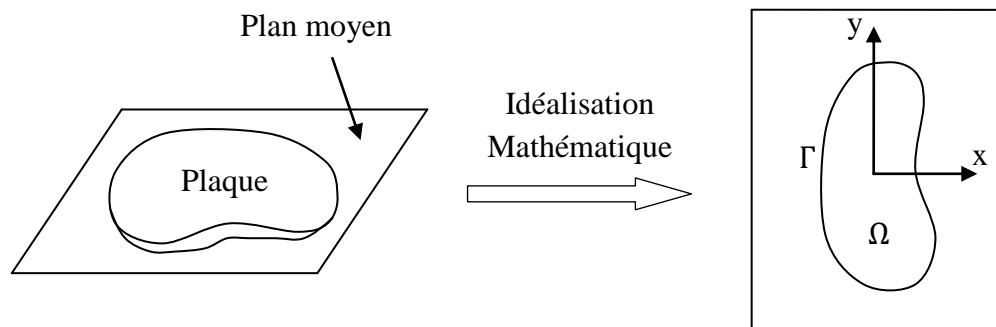
IV. DIFFÉRENTES APPROCHES ET FORMULATIONS DES ÉLÉMENTS DE PLAQUE

IV.1 Introduction

Les définitions données pour les plaques, disent que la plaque est solide bidimensionnel, c'est-à-dire; on néglige la troisième dimension (très petite) par rapport aux deux autres. Une analyse élastique des plaques consiste à une analyse d'un modèle mathématique bidimensionnel ce qui nous conduit à une analyse d'un problème en élasticité plane. Ce chapitre consacré à une présentation des différents modèles de modélisation des plaques, en particulier les modèles en déplacement et en déformation, avec la présentation des étapes nécessaires pour le calcul de la matrice de rigidité $[K^e]$ à travers ces deux approches.

IV.2 Modèle mathématique

Le modèle mathématique de la plaque en contraintes planes, est un problème bidimensionnel avec des conditions aux limites connues. Ce problème est posé sur un domaine plan Ω avec une limite Γ comme l'illustré à la (Figure. IV.1).



(Figure. IV.1) : Modèle mathématique de plaque en contrainte plane

Dans cette idéalisation la troisième dimension exprimée en fonction de x et y qui sont intégrés à travers l'épaisseur de la plaque. Les ingénieurs travaillent souvent avec les forces internes qui résultent de l'intégration des contraintes dans le plan à travers l'épaisseur. [40]

IV.2.1 Description du problème de la contrainte plane

IV.2.1.1 Données du problème

Les données incluent :

La géométrie du domaine: C'est définie par la limite (Γ) illustrée dans la (Figure. IV.1).

L'épaisseur : La plupart des plaques l'utilisent comme composants structurels qui donnent une épaisseur constante. Si l'épaisseur $h = h(x,y)$ ne varie pas dans ce cas, il devrait le faire graduellement pour maintenir l'état de contrainte plane.

La donnée de la matière : C'est définie par les équations fondamentales. Ici nous supposons que la matière plaque est linéairement élastique mais pas nécessairement isotropique.

Spécification Intérieur des Forces : Ceux sont des forces connues qui agissent à l'intérieur de (Ω) de la plaque. Il y'a deux types : Forces de corps ou forces de volume sont des forces spécifiées par unité de volume de la plaque; par exemple le poids de la plaque. L'action tangentielle des forces de surfaces par rapport à la face de la plaque est transportée au plan moyen par exemple : le frottement sur la peau de l'aéroplane et de ce type si la peau est modelée pour être dans le plan de contrainte.

Spécification des forces de surfaces : Les actions des forces sur la limite (Γ) de la plaque sont connues. En élasticité sont appelées les surfaces de tractions, dans l'application actuelle il est important de savoir si ces forces, sont spécifiées par unité de longueur.

La condition aux limites des déplacements : Elle spécifie l'état de maintenir la plaque. Les points sur la limite de la plaque peuvent être fixés. Cette condition permet le déplacement dans une direction ou soumise a multipoints de contrainte. Si les conditions aux limites des déplacements sont imposées, la structure de la plaque est mentionnée pour être strictement libre.

IV.3 Problèmes inconnus

A cause de la supposition d'une homogénéité des plaques des trois domaines inconnus « déplacements, déformations et contraintes »; on a supposée une épaisseur constante à travers les composantes de la plaque.

- Déplacement: Le champ de déplacement dans le plan est défini par deux composants :

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

Les composantes transversales de déplacement $u_z(x, y, z)$ sont différentes de zéro, généralement à cause de l'effet du rapport de Poisson ν , et dépend de z . Cependant, ce déplacement n'apparaît pas dans les équations gouvernantes.

IV.4 Différents modèles

IV.4.1 Modèle en déplacement

Dans ce model le but c'est d'exprimer le déplacement, en tout point d'un solide, cela est réalisé en formulant le déplacement comme une combinaison linéaire de fonctions de forme (III.5). Une matrice de rigidité approximative peut être trouvée pour chaque élément, liant toutes les forces aux déplacements des nœuds. Les déplacements peuvent être par conséquent calculés, ainsi que les contraintes dans l'élément, une fois les déplacements nodaux sont connus. L'approximation du champ de déplacement pour résoudre les problèmes d'élasticité est toujours continue, mais ce n'est en général pas le cas des dérivées partielles de cette approximation. Dans les problèmes pratiques, on désire en général connaître les contraintes, on doit au préalable calculer les

composantes de la déformation et utiliser ensuite les équations de constitution pour calculer ces contraintes. Les dérivées partielles de l'approximation des composantes de déplacement peuvent cependant poser de sérieux problèmes d'interprétation aux valeurs nodales. Les contraintes et les déformations seront approximatives et discontinues aux frontières de l'élément. Les déplacements sont approximatifs mais continus aux frontières de l'élément. L'approximation en déplacement minimise l'énergie potentielle totale. Les éléments de déplacement pur sont cinématiquement admissibles, ils assurent la continuité des déplacements à l'intérieur de l'élément et d'un élément à l'autre. Dans ce cas, le champ de contraintes, déduit du champ de déplacement, vérifie les équations d'équilibre en moyenne mais pas localement. [12] [17]

Les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de l'énergie potentielle totale (IV.1) forment la formulation faible du problème.

$$-\int_{\partial\Omega} t_i \cdot u_i \cdot dS - \int_{\Omega} f_i \cdot u_i d\Omega + \int_{\Omega} \Psi d\Omega = \Pi \quad (\text{IV.1})$$

IV.4.2 Modèle d'équilibre

Le principe de ce modèle consiste dans un premier temps à choisir une forme paramétrique simple du champ de contraintes vérifiant les équations d'équilibre (III.1). On définit ainsi un ensemble de solutions admissibles. Pour imposer la réciprocité des tractions de surface à la frontière de deux éléments, il est nécessaire de choisir des connecteurs définissant univoquement ces tractions d'interface. Dans un second temps on recherche, dans cet ensemble de solutions, celle qui rend l'énergie potentielle complémentaire totale minimale. Pour cela on doit annuler la variation première de la fonctionnelle (IV.2) par rapport au paramètre définissant le champ de contraintes.

$$-\int_{\partial\Omega} u_i \cdot T_i dS - \int_{\Omega} u_i \cdot f_i \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \Psi^* d\Omega = \Pi^* \quad (\text{IV.2})$$

Le modèle en équilibre n'a pas connu le même succès que le modèle en déplacement, en partie à cause de sa grande complexité. Les éléments du modèle pur sont statiquement admissibles et assurent la continuité de contraintes à l'intérieur de l'élément et d'un élément à un autre. Le champ de déplacement est déduit du champ de contrainte, où les conditions de compatibilité ne sont vérifiées qu'en moyenne et non localement.

IV.4.3 Modèle mixte

Plusieurs champs indépendants (déplacement, déformation, contrainte) sont considérés ici, ce qui rend la formulation, ou la mise au point longue et coûteuse; mais en contrepartie les éléments qui en découlent sont d'excellente qualité. On utilise parfois ce modèle pour corriger certains défauts du modèle de déplacement.

IV.4.4 Modèle hybride

Deux interpolations indépendantes sont considérées, l'une portant sur le champ intérieur de l'élément, l'autre sur le champ décrivant la frontière. Les paramètres inconnus du champ intérieur sont exprimés en fonction des paramètres nodaux de champ de bord. On cherche à minimiser la différence entre les deux champs. Ces derniers peuvent être du même type

(déplacement - déplacement) ou de types différents (déplacement – contrainte). En général ce modèle donne des résultats meilleurs que le modèle déplacement surtout au niveau des contraintes. Parmi les modèles hybrides, le modèle Trefftz est considéré, actuellement parmi les plus précis.

IV.5 Modèle en déformation

IV.5.1 Définition

Un élément basé sur le modèle en déformation signifie que sa formulation s'obtient en intégrant un champ de déformation défini auparavant, dont les fonctions sont indépendantes. Cette idée qui a, de plus, fait sa gloire est basée sur un calcul exact des termes représentant les modes rigides, les autres composantes du champ de déplacement sont basées sur l'intégration de présumées fonctions indépendantes de déformation et le tout vérifie les équations de compatibilités.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (\text{IV.3})$$

Cette approche permet la représentation du champ de déplacement par un ordre élevé des termes des polynômes sans besoin d'introduire des degrés de liberté supplémentaires ni de nœuds intermédiaires. Les éléments produits sont non- conformes mais conduisent à des résultats très encourageants. En plus, la convergence obtenue est rapide, lorsque les résultats sont comparés avec ceux donnés par des éléments basés sur le modèle en déplacement ayant le même nombre de degré de liberté.

IV.5.2 Critères de convergence

Un des critères principaux pour qu'un élément fini soit validé, pour une application générale dans la mécanique des structures, est qu'il soit en mesure de représenter les modes de corps rigides et ceux des déformations constantes. La représentation adéquate de ces modes est une condition nécessaire pour qu'on ait une bonne précision et des propriétés de convergence. Donc, lorsqu'une théorie imprudente est employée pour le développement d'un élément fini, de faux modes de corps rigides et de déformation peuvent apparaître.

IV.5.3 Avantages du modèle en déformation

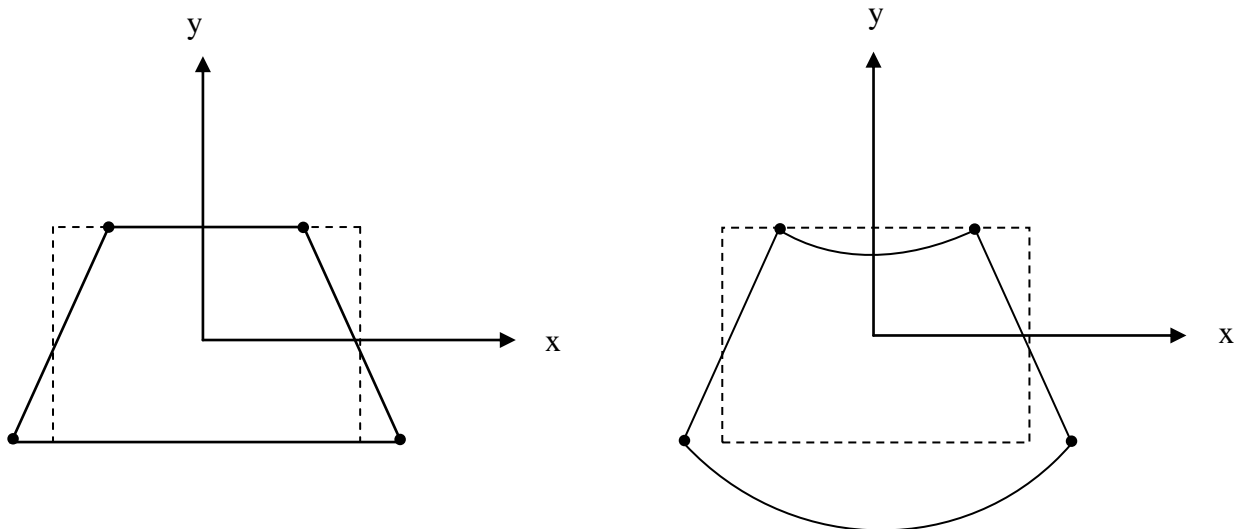
L'utilisation du modèle en déformation apporte de nombreux avantages en termes de comportement des structures. En effet, on tire profit des bonnes adaptations pour la description exacte des mouvements : corps rigides et déformations constantes. Ainsi, les éléments développés permettront d'augmenter la performance des résultats, avec seulement un nombre limité d'éléments. Les avantages des éléments à modèle en déformation sont :

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence liés directement aux déformations (mode de déformation constante et mode de corps rigide).
- Découplage plus facile des différentes composantes des déformations (un champ de déplacements découplés engendre des déformations couplées).

- Possibilité d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans l'introduction de nœuds intermédiaires ni de degrés de liberté supplémentaires. [17] [19]

IV.5.4 Utilisation du modèle en déformation dans l'analyse des structures

Les éléments basés sur la déformation ont de très nombreuses applications, à commencer par les structures courbes, telles que : coques cylindriques, arcs hémisphères, etc. Comme on peut les retrouver dans les structures planes minces et épaisses, plaques, murs, etc. Et de manière générale, dans tous les types de structures. Le but recherché le plus souvent en choisissant un élément basé sur la déformation parmi d'autres est le gain appréciable en matière du nombre d'éléments et ce, pour un même nombre de nœuds. D'autres applications visent plutôt une augmentation de la fiabilité des éléments. Pour les structures telles que les poutres à parois minces, l'élément utilisé permet d'approcher les solutions analytiques, tout en utilisant un nombre minimum d'éléments. Dans ce cas en emploi des éléments membranaires basés sur ce modèle, ce qui permet d'améliorer les points faibles de l'élément traditionnel basé sur les déplacements, pour un même nombre de nœuds, à savoir la sur rigidité et la linéarité à la flexion (Figure. IV.2). L'utilisation de ce modèle peut améliorer plusieurs propriétés, tel que décrit dans le paragraphe précédent, plusieurs investigations ont d'ailleurs été effectuées dans cette optique. Les conditions d'équilibre et de compatibilité peuvent être satisfaites selon le type d'élément utilisé. Ce dernier variera en fonction des géométries des structures. [41]



(a) Linéarité à la flexion pour le modèle basé sur le déplacement.

(b) Rapprochement du comportement réel pour le modèle basé sur la déformation.

(Figure. IV.2) : Comportement d'un élément à quatre nœuds lors de la flexion dans le plan.

IV.6 Formulations des éléments pour la flexion des plaques

IV.6.1 Élément fini rectangulaire basé sur l'approche en déplacement (ACM) pour l'étude de la flexion des plaques minces

IV.6.1.1 Introduction

On considère dans ce paragraphe l'application de la technique des éléments finis à la résolution des problèmes de flexion des plaques, dans le modèle en déplacement, les fonctions d'interpolation sont tirées à partir des termes du triangle de pascal (pyramide de pascal en 3D) en annexe A, donc le nombre total des constantes indépendantes est égal au nombre de degré de liberté de l'élément.

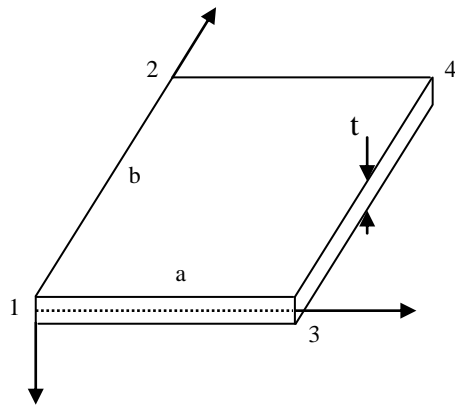
On suppose que l'épaisseur de la plaque à étudier, est petite comparée à ses autres dimensions et que sa flèche quand elle est chargée est petite par rapport à son épaisseur. Ces deux hypothèses ne sont pas particulières à la méthode des éléments finis et sont aussi prises en compte dans la résolution classique de la flexion des plaques. Elles sont nécessaires car si l'épaisseur de la plaque est importante, on doit considérer que cette dernière à trois dimensions et si les flèches dues à la charge sont aussi importantes, il s'établit des forces internes dites « de membrane » dans le plan de la plaque et on doit en tenir compte dans l'étude. On peut étendre la méthode des éléments finis à la résolution de ces problèmes, mais la technique utilisée dépasse largement le cadre du présent exemple qui a pour but l'étude des plaques minces sujettes seulement à des flèches peu importantes. Cela représente une classe extrêmement importante de problèmes qui ont un grand nombre d'applications pratiques comme les dalles plates, les tabliers des ponts et les planchers. [41]

IV.6.1.2 Calcul de la matrice de rigidité de l'élément rectangulaire

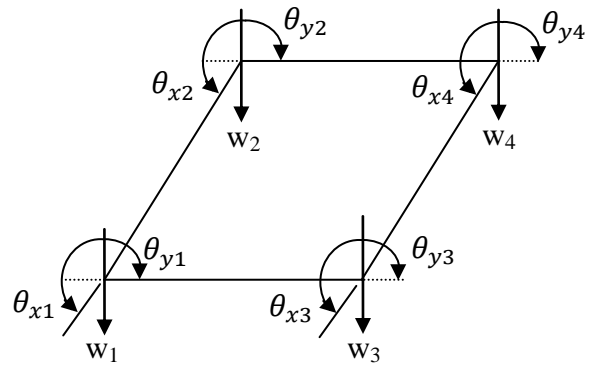
Le calcul de la matrice de rigidité de l'élément rectangulaire suit une fois de plus les sept étapes résumées ci-après :

Étape I : Choisir un système de coordonnées convenable et numéroter les nœuds.

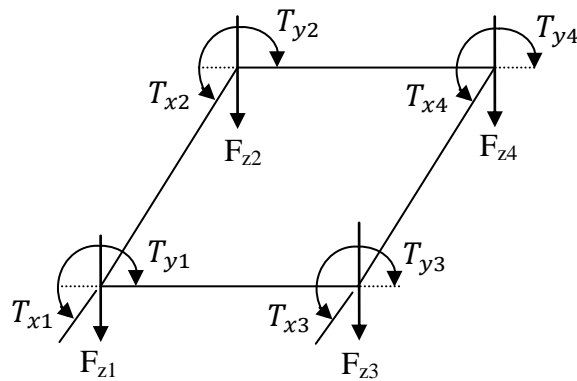
Les systèmes de coordonnées et la numérotation des nœuds; de l'élément rectangulaire utilisé pour la flexion des plaques est représenté sur la (figure .IV.3.a), l'axe des z ayant été pris normal au plan de la plaque. Dans le cas de la flexion des plaques, l'élément a trois degrés de liberté en chaque nœud, c'est-à-dire deux rotations et la flèche transversale. La déformation latérale est représentée par w , la rotation autour de l'axe des x par θ_x et celle autour de l'axe des y par θ_y . Les directions positives de ces rotations sont définies selon la règle du tire-bouchon. L'élément a alors un total de douze (12) degrés de liberté (figure .IV.3.b). Les moments et les forces correspondantes consistent en deux moments T_x et T_y et une force de cisaillement F_z en chaque nœud (figure .IV.3.c).



(Figure. IV.3.a) : Système de coordonnées.



(Figure. IV.3.b) : Déplacement nodaux.



(Figure. IV.3.c) : Forces nodales

(Figure. IV.3) : Élément rectangulaire.

Les déplacements au nœud 1 peuvent être écrits de la façon suivante :

$$\{\delta_1\} = \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \end{Bmatrix} \tag{IV.4}$$

Et de même pour les forces et les moments correspondants au nœud 1 :

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} T_{x1} \\ T_{y1} \\ F_{z1} \end{Bmatrix} \tag{IV.5}$$

De telle sorte que les vecteurs complets des forces et des déplacements pour l'élément s'écrivent :

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} \{\delta_1\} \\ \{\delta_2\} \\ \{\delta_3\} \\ \{\delta_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \\ \theta_{x2} \\ \theta_{y2} \\ w_2 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_3 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{x1} \\ T_{y1} \\ F_{z1} \\ T_{x2} \\ T_{y2} \\ F_{z2} \\ T_{x3} \\ T_{y3} \\ F_{z3} \\ T_{x4} \\ T_{y4} \\ F_{z4} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

Puisque chacun de ces vecteurs contient douze termes, la matrice de rigidité de l'élément est carrée d'ordre de douze (12).

$$\{F^e\} = [K^e] \{\delta^e\} \quad (\text{IV.7})$$

Étape II : Choisir la fonction de déplacement $[f(x, y)]$ qui définit le déplacement $\{\delta(x, y)\}$ en chaque point de l'élément.

Dans le cas de la flexion des plaques où les flèches sont petites, l'état des déplacements en chaque point de l'élément peut être représenté par trois composantes :

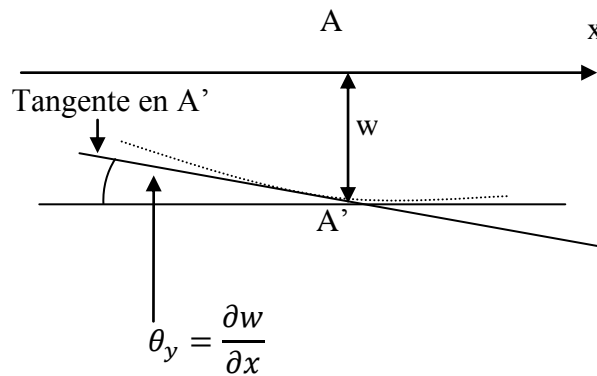
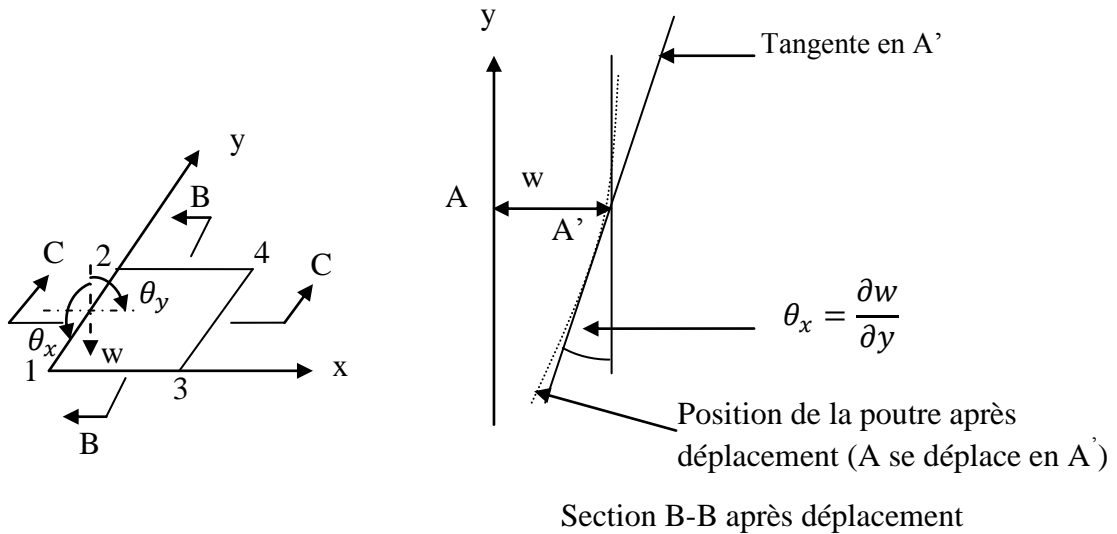
$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

Ceci est illustré pour le point A dans la (figure IV.4).

Les deux rotations θ_x et θ_y sont reliées au déplacement latéral w par les expressions :

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} \text{ et } \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{IV.9})$$

Les directions positives de θ_x et θ_y étant choisies pour coïncider avec celles choisies pour θ_{x1} , θ_{y1} . D'où, une fois que la fonction de déplacement est choisie pour w , les fonctions θ_x et θ_y sont automatiquement définies.



(Figure. IV.4) : Section C-C après déplacement

Puisque l'élément a douze degrés de liberté, on doit avoir douze coefficients indéterminés dans le polynôme qui représente w , donc l'équation ou la fonction convenable est donnée comme suit : [41]

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (IV.10)$$

On remarque que quand x ou y est constant, cette expression devient la même que celle prise pour un élément de poutre.

La fonction de déplacement donne les expressions suivantes pour les rotations :

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} = -(\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2) \quad (IV.11)$$

et

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3 \quad (\text{IV.12})$$

Il faut maintenant vérifier que cette fonction assure la continuité des flèches et des pentes de la solution. Considérant un bord de l'élément par exemple le bord 1-2 où x est constant et égal à zéro. Le déplacement latéral et les pentes en chaque point de ce bord (figure. IV.4) sont donnés à partir de l'équation (IV.10) par :

$$w = \alpha_1 + \alpha_3 y + \alpha_6 y^2 + \alpha_{10} y^3.$$

$$\theta_x = -(\alpha_3 + 2\alpha_6 y + 3\alpha_{10} y^2) \quad (\text{IV.13})$$

$$\theta_y = \alpha_2 + \alpha_5 y + \alpha_9 y^2 + \alpha_{12} y^3$$

On considérant les conditions aux extrémités de ces bords, c'est-à-dire au nœud 1, quand :

$$y = 0 \text{ (nœud 1),}$$

$$w = w_1 = \alpha_1.$$

$$\theta_x = \theta_{x1} = -\alpha_3 \quad (\text{IV.14})$$

$$\theta_y = \theta_{y1} = \alpha_2$$

Et quand $y = b$ (nœud 2),

$$w = w_2 = \alpha_1 + \alpha_3 b + \alpha_6 b^2 + \alpha_{10} b^3.$$

$$\theta_x = \theta_{x2} = -(\alpha_3 + 2\alpha_6 b + 3\alpha_{10} b^2) \quad (\text{IV.15})$$

$$\theta_y = \theta_{y2} = \alpha_2 + \alpha_5 b + \alpha_9 b^2 + \alpha_{12} b^3$$

Ainsi on dispose seulement de six équations pour obtenir les coefficients inconnus $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{12})$ qui ne peuvent donc être déterminés. Cependant un examen approfondi montre que w et θ_x contiennent les mêmes quatre coefficients $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_{10})$ tandis que θ_y contient les quatre autres coefficients $(\alpha_2, \alpha_5, \alpha_9, \alpha_{12})$. Puisque quatre des conditions sur la frontière se rapportent à w et à θ_x , on a un nombre suffisant d'équations pour calculer les coefficients reliés à ces quantités et on peut exprimer w et θ_x en fonction des déplacements nodaux. Les deux équations restantes ne suffisent pas pour déterminer les quatre inconnues dans θ_y . D'où, bien qu'il soit clair que le déplacement latéral w et la rotation le long du bord θ_x sont complètement définis par les mouvements des extrémités, la rotation normale au bord θ_y n'est pas définie de façon unique. Puisque les mouvements des extrémités sont compatibles, cela signifie que la continuité de w et θ_x est assurée le long des bords où x est constant mais θ_y , d'autre part, est discontinu le long de ces bords.

On a seulement considéré ci-dessus le cas du bord 1-2 où $x = 0$.

Cependant, la conclusion est généralement vraie et une discontinuité de la pente normale peut exister le long de n'importe quel bord. A cause de cela, la fonction choisie n'est pas idéale et est appelée une « fonction non conforme ». Ecrire l'équation (IV.10) sous forme matricielle donne l'équation (IV.19) qui peut être résumée par l'équation générale suivante. [41]

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)]\{\alpha\} \quad (\text{IV.16})$$

Etape III : Exprimer l'état des déplacements $\{\delta(x, y)\}$ dans l'élément en fonction des déplacements nodaux $\{\delta^e\}$.

On remplaçant les coordonnées nodales par leurs valeurs et en cherchant $\{\alpha\}$ solution; cela nous mène à la formation de la matrice $[A]$ définie par l'équation suivante :

$$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\} \quad (\text{IV.17})$$

Puisque dans le cas présent, l'élément, a un total de douze degrés de liberté, $[A]$ est carré d'ordre douze (12) et ses coefficients sont donnés par l'équation (IV.20). On doit maintenant inverser cette matrice et la relation cherchée est donnée par l'équation générale :

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)][A]^{-1}\{\delta^e\} \quad (\text{IV.18})$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -x & -2y & 0 & -x^2 & -2xy & -3y^2 & -x^3 & -3xy^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

On remplace les coordonnées de chaque nœud pour obtenir la matrice $[A]$:

Nœud 1 : $x = 0, y = 0$.

Nœud 2 : $x = 0, y = b$.

Nœud 3 : $x = a, y = 0$.

Nœud 4 : $x = a, y = b$.

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & -3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3 \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 & -a^3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -a & -2b & 0 & -a^2 & -2ab & -3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\ 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \end{bmatrix} \quad (IV.20)$$

Étape IV : Relier les déformations $\{\varepsilon(x, y)\}$ en chaque point aux déplacements nodaux $\{\delta(x, y)\}$ et donc aux déplacements nodaux $\{\delta^e\}$

Dans le cas d'un problème de flexion des plaques, l'état des déformations en chaque point peut être représenté par trois composantes : la courbure dans la direction des x , la courbure dans la direction des y et la torsion. La courbure dans la direction des x est égale à la variation de la dérivée par rapport à x et est égale à :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (IV.21)$$

De même la courbure dans la direction des y est égale à :

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (IV.22)$$

Enfin la torsion est égale à la variation par rapport à x de la dérivée par rapport à y , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (IV.23)$$

Dans cette étape, les courbures et la torsion seront multipliées par les moments internes en vue d'obtenir le travail interne effectué. Les signes des expressions ci-dessus correspondent à ceux définis pour les moments internes dans l'étape V. [41]

Les moments internes M_x et M_y agissent chacun sur deux côtés de l'élément; il en est de même pour les moments de torsion M_{xy} et M_{yx} , mais puisque M_{xy} est égal à M_{yx} , on peut considérer qu'un des deux, par exemple M_{xy} , agit sur les quatre côtés, cela en doublant le terme de torsion dans le vecteur des déformations.

L'état des déformations dans l'élément peut ainsi être représenté par :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.24})$$

Et on remplaçant w par sa valeur à partir de l'équation (IV.10) on obtient l'équation (IV.25) qui peut être écrite :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [C]\{\alpha\} \quad (\text{IV.25})$$

De façon à définir la matrice $[C]$ pour le cas de la flexion des plaques. La relation cherchée entre déformations et déplacements nodaux est obtenue par :

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B]\{\delta^e\} \quad (\text{IV.26})$$

$$[B] = [C][A]^{-1} \quad (\text{IV.27})$$

Encore une fois, à cause de la taille des matrices considérées, la matrice $[B]$ ne sera pas développée explicitement. En pratique cela peut être fait avec l'ordinateur.

Étape V : Relier les contraintes internes $\{\sigma(x, y)\}$ aux déformations et aux déplacements nodaux $\{\delta^e\}$.

Dans la résolution des problèmes de flexion des plaques, les contraintes internes sont réellement les moments de flexion et de torsion et les déformations les courbures et les torsions étudiées à l'étape IV. Ainsi l'état des contraintes peut être représenté par les trois composantes M_x, M_y et M_{xy} comme cela est indiqué par l'équation (IV.28).

$$\{\sigma(x, y)\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

M_x et M_y sont les moments de flexion internes par unité de longueur et M_{xy} est le moment de torsion interne par unité de longueur. L'action de ces moments de flexion et de torsion internes on considérant une petite portion rectangulaire de l'élément fini considéré; avec $M_{xy} = M_{yx}$. Les relations entre contraintes et déformations, c'est-à-dire entre moments et courbures, sont données par la théorie de la flexion des plaques.

$$\{\varepsilon(x, y)\} = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -(2\alpha_4 + 6\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + 6\alpha_{11} xy) \\ -(2\alpha_6 + 2\alpha_9 x + 6\alpha_{10} y + 6\alpha_{12} xy) \\ 2(\alpha_5 + 2\alpha_8 x + 2\alpha_9 y + 3\alpha_{11} x^2 + 3\alpha_{12} y^2) \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= - \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= - \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= 2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.30})$$

Ces relations sont écrites en termes généraux pour une plaque orthotrope, c'est-à-dire une plaque ayant des propriétés élastiques différentes dans deux directions perpendiculaires, une tôle ondulée en étant un exemple type. D_x et D_y sont les rigidités de flexion dans les directions x et y respectivement, D_1 est une rigidité de couplage ayant un effet du type coefficient de Poisson et D_{xy} est la rigidité de torsion.

D'autre part, une plaque isotrope, a, les mêmes propriétés élastiques dans toutes les directions et dans ce cas particulier on a :

$$D_x = D_y = D = Et^3/12(1 - \nu^2)$$

$$D_1 = \nu D \quad \text{et} \quad D_{xy} = \frac{1}{2}(1 - \nu)D$$

Les équations (IV.28) et (IV.30) peuvent s'écrire alors sous forme matricielle :

$$\{\sigma(x, y)\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ 2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.31})$$

C'est-à-dire :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D]\{\varepsilon(x, y)\} \quad (\text{IV.32})$$

Définissant ainsi la matrice $[D]$. On prenant la valeur de $\{\varepsilon(x, y)\}$ dans l'équation (IV.26), on obtient la relation cherchée entre les contraintes de l'élément et ses déplacements nœux :

$$\{\sigma(x, y)\} = [D][B]\{\delta^2\} \quad (\text{IV.33})$$

Étape VI : Remplacer les contraintes internes $\{\sigma(x, y)\}$ par des forces nodales statiquement équivalentes $\{F^e\}$, relier ces forces nodales aux déplacements nodaux $\{\delta^e\}$ et de là obtenir la matrice de rigidité de l'élément $[K^e]$:

La relation entre les charges nodales $\{F^e\}$ et les déplacements est donnée dans le cas général par l'équation suivante :

$$\{F^e\} = \left[\int [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \right] \{\delta\} \quad (\text{IV.34})$$

Pour le cas particulier d'un élément pour la flexion des plaques, le travail total effectué par les moments et les torsions internes par unité de longueur (M_x, M_y, M_{xy}) pendant un déplacement virtuel de l'élément est obtenu en intégrant le produit de ces moments et de ces torsions ainsi que leurs courbures associées sur la surface de l'élément. Ainsi on doit remplacer l'expression $\int_V d(\text{vol})$ de l'équation (VI.34) pour le cas général par l'expression $\int_0^b \int_0^a dx dy$ pour le cas spécifique d'un élément rectangulaire pour la flexion des plaques, de telle sorte que l'équation (IV.34) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\{F^e\} = \left[\int_0^b \int_0^a [B]^T [D] [B] dx dy \right] \{\delta^e\}$$

Et la matrice de rigidité de l'élément $[K^e]$ est définie par :

$$[K^e] = \int_0^b \int_0^a [B]^T [D] [B] dx dy \quad (\text{IV.35})$$

Pour l'élément d'élasticité plane, les contraintes internes considérées étaient les contraintes réelles établies dans l'élément σ_x, σ_y et τ_{xy} de telle sorte que dans ces cas $\int d(\text{vol})$ restait sous cette forme.

On a calculé dans cette partie les matrices requises pour obtenir $[K^e]$ à partir de l'équation (IV.35). $[B] = [C][A]^{-1}$ à partir de l'équation (IV.27) où $[A]$ est définie dans l'équation (IV.20) et $[C]$ est définie dans l'équation (IV.29) et $[D]$ dans (IV.31).

A nouveau, comme dans le cas de l'élément rectangulaire pour la résolution des problèmes d'élasticité plane, la matrice $[B]$ fait intervenir des termes en x et en y ; on doit donc intégrer le produit de matrices $[B]^T [D] [B]$ sur la surface de l'élément.

Les calculs sont assez compliqués et on ne les envisagera pas explicitement. Cependant la valeur finale de la matrice de rigidité $[K^e]$ obtenue par ces calculs est donnée par l'équation (IV.38) ou ces expressions sont valables pour le cas général orthotrope. Dans n'importe quel problème particulier on doit donner aux rigidités de flexion D_x, D_y, D_1 et D_{xy} des valeurs appropriées.

Où

$$\begin{aligned}
 p &= a/b & SM &= 30p^{-2}D_x - 60p^2D_y - 30D_1 - 84D_{xy} \\
 SA &= 20a^2D_y + 8b^2D_{xy} & SN &= 10a^2D_y - 8b^2D_{xy} \\
 SB &= 15abD_1 & SO &= -15paD_y + 15bD_1 + 6bD_{xy} \\
 SC &= 20b^2D_x + 8a^2D_{xy} & SP &= 5a^2D_y + 2b^2D_{xy} \\
 SD &= 30apD_y + 15bD_1 + 6bD_{xy} & SQ &= 15apD_y - 6bD_{xy} \\
 SE &= 30bp^{-1}D_x + 15aD_1 + 6aD_{xy} & SR &= 10b^2D_x - 2a^2D_{xy} \\
 SF &= 60p^{-2}D_x + 60p^2D_y + 30D_1 + 84D_{xy} & SS &= 30bp^{-1}D_x + 6aD_{xy} \\
 SG &= 10a^2D_y - 2b^2D_{xy} & ST &= 5b^2D_x + 2a^2D_{xy} \\
 SH &= -30apD_y - 6bD_{xy} & SU &= 15bp^{-1}D_x - 6aD_{xy} \\
 SI &= 10b^2D_x - 8a^2D_{xy} & SX &= 60p^{-2}D_x + 30p^2D_y - 30D_1 - 84D_{xy} \\
 SJ &= 15bp^{-1}D_x - 15aD_1 - 6aD_{xy} & SY &= -30p^{-2}D_x - 30p^2D_y + 30D_1 + 84D_{xy}
 \end{aligned}$$

Et avec l'expression des courbures et des torsions obtenus à partir de l'équation (IV.29) :

$$M_x, M_y = f(2\alpha_4 + 6\alpha_7x + 2\alpha_8y + 6\alpha_{11}xy, 2\alpha_6 + 2\alpha_9x + 6\alpha_{10}y + 6\alpha_{12})xy$$

$$M_{xy} = f(\alpha_5 + 2\alpha_8x + 2\alpha_9y + 3\alpha_{11}x^2 + 3\alpha_{12}y^2) \quad (\text{IV.39})$$

De telle sorte que, pour n'importe quelle valeur constante de x ou de y , les moments de flexion M_x et M_y varient linéairement à travers l'élément, de la même façon que les contraintes à travers l'élément rectangulaire pour la résolution des problèmes d'élasticité plane. D'autre part, le moment de torsion M_{xy} n'est pas linéairement distribué mais varie selon une expression quadratique en x quand y est constant et inversement. [41]

IV.6.2 Élément fini rectangulaire basé sur l'approche en déformation pour l'étude de la flexion des plaques minces et épaisses

IV.6.2.1 Introduction

L'élément étudié par cette application qui est basée sur l'approche en déformation, l'application de cette approche n'est pas limitée seulement aux éléments rectangulaires, mais peut être employée pour développer des éléments efficaces pour résoudre les problèmes généraux de l'élasticité plane.

L'élément présente exactement les modes de corps rigide et permet aussi de vérifier les équations de compatibilité.

A la différence des éléments classiques, les fonctions de formes ne sont pas indépendantes mais liées conformément aux relations cinématiques déplacement-déformation.

Cet élément appelé SBRP (Strain - Based Rectangulaire Plate) ; élément rectangulaire pour l'étude de la flexion des plaques minces ou épaisses possède quatre nœuds, avec la nécessité d'avoir trois degrés de liberté pour représenter les mouvements possibles pour chaque des nœuds (w, θ_x, θ_y) , donc cet élément contient douze (12) degrés de liberté. [11] [12]

IV.6.2.2 Les équations de bases de Reissner - Mindlin pour la théorie des plaques

IV.6.2.2.1 Champ de déplacement

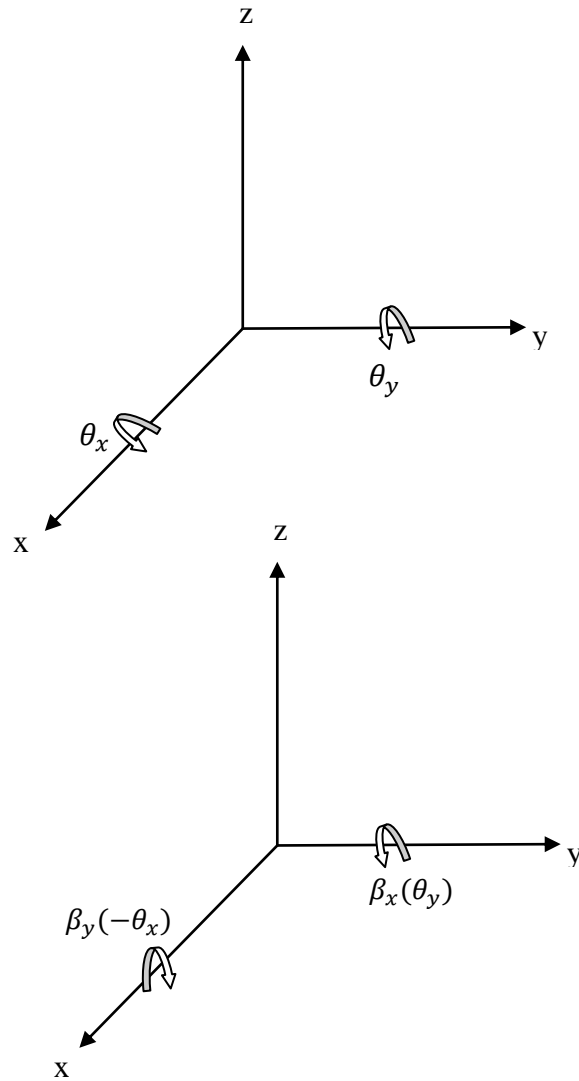
Le champ de déplacement dans n'importe quel point dans le système des coordonnées cartésien est donné par :

$$U = u(x, y, z) = z\beta_x(x, y)$$

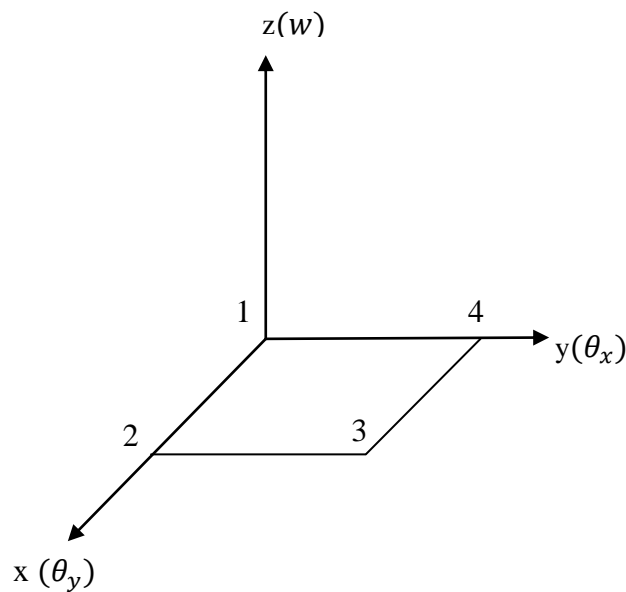
$$V = v(x, y, z) = z\beta_y(x, y) \tag{IV.40}$$

$$W = w(x, y, z) = w(x, y)$$

$$\{\delta\} = \{W, \beta_x, \beta_y\}^T$$



(Figure. IV.5) : Relation β_x et β_y (θ_x et θ_y) et convention de signe



(Figure. IV.6) : Élément rectangulaire de plaque à quatre nœuds avec W, β_x et β_y sont les trois degrés de libertés pour chaque noeud.

IV.6.2.2.2 Champ de déformation

Les cinq composants du champ de déformation sont donnés par :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{IV.41})$$

Les courbures sont données comme suit :

$$\begin{cases} k_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ k_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ k_{xy} = \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{IV.42})$$

Les déformations du cisaillement sont données par:

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{IV.43})$$

Donc; le vecteur –contrainte- est :

$$\{\varepsilon\} = \{k_x, k_y, k_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T \quad (\text{IV.44})$$

Les cinq composants du champ de déformation citées ci-dessus et données par les équations (IV.42) et (IV.43) doivent satisfaire les équations de compatibilité suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 k_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial k_{xy}}{\partial x} = 2 \frac{k_x}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial k_{xy}}{\partial y} = 2 \frac{k_y}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{IV.45})$$

IV.6.2.2.3 Les relations constitutives entre les contraintes et les déformations

Pour un matériau isotrope, les relations constitutives entre les contraintes et les déformations pour la théorie de Reissner / Mindlin sont données par : [17] [18]

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.46})$$

Avec M_x , M_y , M_{xy} , T_x , T_y représentent les moments de flexion et les forces de cisaillement transversales par unité de longueur, respectivement.

La matrice de rigidité $[D]$ contient les valeurs d_{ij} , qui sont définies par :

$$d_{11} = d_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad d_{12} = \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$d_{33} = d_{11} \frac{(1-\nu)}{2} \quad \text{et} \quad d_{44} = d_{55} = \frac{kEh}{2(1-\nu)}$$

Avec h est l'épaisseur de plaque. Et k représente le facteur de cisaillement « qui est habituellement pris comme $k = \frac{5}{6}$ ».

IV.6.2.2.4 Détermination des termes du mouvement d'un corps rigide

Les relations déformations – déplacement en élasticité plane sont données par l'équation (IV.42) comme suit :

$$\begin{cases} k_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ k_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ k_{xy} = \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{cases}$$

$$\text{Si on a } \begin{cases} k_x = 0 \\ k_y = 0 \\ k_{xy} = 0 \end{cases}$$

Après intégration des termes de l'équation (IV.42) on obtient :

$$\beta_x = cte = a_2, \quad \beta_y = cte = a_3$$

$$\text{On a aussi } \begin{cases} \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Après substitution les valeurs de β_x et β_y dans l'équation précédente on trouve :

$$\begin{cases} a_2 + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ a_3 + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Après intégration de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} w = -a_2x + C_1 \\ w = -a_3y + C_2 \end{cases}$$

Si on suppose que $C_1 + C_2 = a_1$

Donc la translation totale est:

$$w = a_1 - a_2x - a_3y \quad (\text{IV.47})$$

Cette équation représente le mouvement d'un corps rigide (translation et rotation).

IV.6.2.2.5 Détermination des autres termes du mouvement

Pour présenter l'état flexionnel de cet élément, le champ de déplacement doit donc contenir aussi douze coefficients indépendants, trois ont été utilisés (a_1, a_2, a_3) pour la représentation du MCR dans l'équation (IV.47), il en reste donc neuf coefficients ($a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$) pour représenter de façon approximative la déformation dans l'élément, tout en vérifiant les équations de compatibilité.

– Les termes des déformations ($k_x, k_y, k_{xy}, \gamma_{xz}$ et γ_{yz}) devraient être proposés de façons à satisfaire les équations de compatibilité suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 k_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial k_{xy}}{\partial x} = 2 \frac{\partial k_x}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial k_{xy}}{\partial y} = 2 \frac{\partial k_y}{\partial x} \end{cases}$$

- **L. Belouar** a formulé un élément nommé **SBRP** dont les valeurs de $k_x, k_y, k_{xy}, \gamma_{xz}$ et γ_{yz} sont résumés comme suit : [17]

$$\begin{cases} k_x = a_4 + a_5y \\ k_y = a_6 + a_7x \\ k_{xy} = a_8 \\ \gamma_{xz} = a_9 + a_{10}y - a_7y^2 \\ \gamma_{yz} = a_{11} + a_{12}x - a_5x^2 \end{cases} \quad (\text{IV.48})$$

On peut constater clairement que le découplage des différentes composantes du vecteur de déformation citées dans l'équation (IV.48), peut être facilement assuré, ce qui n'est pas le cas si on adopte le modèle en déplacement.

Les fonctions des déplacements (w, β_x, β_y) de l'élément **SBRP** sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{cases} w = -a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^2 y}{2} - a_6 \frac{y^2}{2} - a_7 \frac{xy^2}{2} - a_8 \frac{xy}{2} + a_9 \frac{x}{2} + a_{10} \frac{xy}{2} + a_{11} \frac{y}{2} + a_{12} \frac{xy}{2} \\ \beta_x = a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} + \frac{a_9}{2} + a_{10} \frac{y}{2} - a_{12} \frac{y}{2} \\ \beta_y = -a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} - a_{10} \frac{x}{2} + \frac{a_{11}}{2} + a_{12} \frac{x}{2} \end{cases} \quad (IV.49)$$

Le champ de déplacement final (w, β_x, β_y) pour l'élément **SBRP** sera obtenu par superposition des équations du mouvement d'un corps rigide (IV.47) et des termes de d'équation (IV.50) : [17]

$$\begin{cases} w = a_1 - a_2 x - a_3 y - a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^2 y}{2} - a_6 \frac{y^2}{2} - a_7 \frac{xy^2}{2} - a_8 \frac{xy}{2} + a_9 \frac{x}{2} + a_{10} \frac{xy}{2} + \\ \quad a_{11} \frac{y}{2} + a_{12} \frac{xy}{2} \\ \beta_x = a_2 + a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} + \frac{a_9}{2} + a_{10} \frac{y}{2} - a_{12} \frac{y}{2} \\ \beta_y = a_3 - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} - a_{10} \frac{x}{2} + \frac{a_{11}}{2} + a_{12} \frac{x}{2} \end{cases} \quad (IV.50)$$

IV.6.3 Formulation de la nouvelle variante de l'élément SBRPS

Dans notre travail, on à conserver les mêmes termes des déformations $(k_x, k_y, k_{xy}, \gamma_{xz}$ et $\gamma_{yz})$ de l'élément **SBRP**, et on a essayé de chercher une autre variante pour la fonction de déplacement (w) , et des rotations $(\beta_x$ et $\beta_y)$ dont le but d'avoir des améliorations de l'élément existant dans certains applications.

Pour déterminer les nouvelles fonctions de w, β_x et β_y on va suivre les étapes suivantes :

- On substituant les termes des déformations de l'équation (IV.48) dans les équations (IV.42) et (IV.43) comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = a_4 + a_5 y & (a) \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = a_6 + a_7 x & (b) \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} = a_8 & (c) \\ \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = a_9 + a_{10} y - a_7 y^2 & (d) \\ \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = a_{11} + a_{12} x - a_5 x^2 & (a) \end{cases} \quad (IV.51)$$

D'après l'équation (a) de (IV.51) on obtient :

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial x} = a_4 + a_5 y$$

Après intégration, on trouve :

$$\beta_x = a_4 x + a_5 xy + f(y) \quad (\text{IV.52})$$

D'après l'équation (b) de (IV.51) on obtient :

$$\frac{\partial \beta_y}{\partial y} = a_6 + a_7 x$$

Après intégration, on trouve :

$$\beta_y = a_6 y + a_7 xy + g(x) \quad (\text{IV.53})$$

D'après l'équation (c) de (IV.51) on obtient :

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} = a_8 = a_5 x + f'(y) + a_7 y + g'(x) \quad (\text{IV.54})$$

Après la séparation des variables on obtient :

$$f'(y) + a_7 y = a_8 - a_5 x - g'(x) = \text{cst} = c_1$$

$$\text{Donc : } f'(y) = c_1 - a_7 y$$

Après intégration, on trouve :

$$f(y) = c_1 y - \frac{a_7}{2} y^2 + c_2 \quad (\text{IV.55})$$

D'autre part : $-g'(x) - a_5 x + a_8 = c_1$ ça implique que :

$$g'(x) = a_8 - a_5 x - c_1$$

Après intégration, on trouve :

$$g(x) = a_8 x - \frac{a_5}{2} x^2 - c_1 x + c_3 \quad (\text{IV.56})$$

Avec : $c_1, c_3 = \text{cst}$

On remplace les expressions de $f(y)$ et $g(x)$ dans les fonctions de β_x et β_y , on obtient donc :

$$\begin{cases} \beta_x = a_4 x + a_5 xy + c_1 y - a_7 \frac{y^2}{2} + c_2 \\ \beta_y = a_6 y + a_7 xy + a_8 x - a_5 \frac{x^2}{2} - c_1 x + c_3 \end{cases} \quad (\text{IV.57})$$

D'après l'équation (d) de (IV.51) on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = a_9 + a_{10}y - a_7y^2 - B_x = a_9 + a_{10}y - a_7y^2 - a_4x - a_5xy - c_1y + \frac{a_7}{2}y^2 - c_2$$

Après intégration, on trouve :

$$w = a_9x + a_{10}xy - a_7xy^2 - a_4\frac{x^2}{2} - a_5y\frac{x^2}{2} - c_1xy + \frac{a_7}{2}xy^2 - c_2x + T(y)$$

Donc :

$$w = -a_4\frac{x^2}{2} - a_5y\frac{x^2}{2} - a_7x\frac{y^2}{2} + (a_{10} - c_1)xy + (a_9 - c_2)x + T(y) \quad (IV.58)$$

Après la recherche des termes de la fonction $T(y)$, on remplace cette dernière dans l'équation (IV.58) pour obtenir la fonction de déplacement w .

On remplace les termes de la dérivée de la fonction w dans les équations (d) et (e) de (IV.51) pour obtenir les fonctions des rotations β_x et β_y .

Finalement, et après plusieurs opérations et intégrations mathématiques pour définir les constants d'intégrations, les fonctions des déplacements et des rotations (w, β_x, β_y) pour la variante **SBRPS** sont donnés comme suits :

$$\begin{cases} w = -a_4\frac{x^2}{2} - a_5\frac{x^2y}{2} - a_6\frac{y^2}{2} - a_7\frac{xy^2}{2} - a_8\frac{xy}{2} + a_9\frac{4x}{5} + a_{10}\frac{xy}{2} + \\ \quad a_{11}\frac{4y}{5} + a_{12}\frac{xy}{2} \\ \beta_x = a_4x + a_5xy - a_7\frac{y^2}{2} + a_8\frac{y}{2} + \frac{a_9}{5} + a_{10}\frac{y}{2} - a_{12}\frac{y}{2} \\ \beta_y = -a_5\frac{x^2}{2} + a_6y + a_7xy + a_8\frac{x}{2} - a_{10}\frac{x}{2} + \frac{a_{11}}{5} + a_{12}\frac{x}{2} \end{cases} \quad (IV.59)$$

Le champ de déplacement final (w, β_x, β_y) pour la variante **SBRPS** sera obtenu par superposition des termes de l'équation (IV.47) et celle de l'équation (IV.59), on obtient donc :

$$\begin{cases} w = a_1 - a_2x - a_3y - a_4\frac{x^2}{2} - a_5\frac{x^2y}{2} - a_6\frac{y^2}{2} - a_7\frac{xy^2}{2} - a_8\frac{xy}{2} + a_9\frac{4x}{5} + a_{10}\frac{xy}{2} + \\ \quad a_{11}\frac{4y}{5} + a_{12}\frac{xy}{2} \\ \beta_x = a_2 + a_4x + a_5xy - a_7\frac{y^2}{2} + a_8\frac{y}{2} + \frac{a_9}{5} + a_{10}\frac{y}{2} - a_{12}\frac{y}{2} \\ \beta_y = a_3 - a_5\frac{x^2}{2} + a_6y + a_7xy + a_8\frac{x}{2} - a_{10}\frac{x}{2} + \frac{a_{11}}{5} + a_{12}\frac{x}{2} \end{cases} \quad (IV.60)$$

Les fonctions de déplacement de la variante **SBRPS** donnés par l'équation (IV.60) contient la représentation exacte des modes de corps rigide du mouvement à travers les termes associés aux constants a_1, a_2 et a_3 , et satisfaire aussi la compatibilité dans la présentation approximative de la déformation dans l'élément.

IV.6.3.1 Calcul de la matrice de rigidité de l'élément SBRPS

Dans le cas d'un matériau isotrope, les relations contraintes-déformations pour la théorie de Reissner/Mindlin sont données par :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.61})$$

Avec $M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y$ représentent les moments de flexion, les moments de torsion (moments tangentiels) et les forces de cisaillement transversales.

Les valeurs de la matrice de rigidité sont données comme suites :

$$d_{11} = d_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, d_{12} = \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$d_{33} = d_{11} \frac{(1-\nu)}{2} \text{ et } d_{44} = d_{55} = \frac{kEh}{2(1+\nu)}$$

IV.6.3.2 Etapes de calcul de la matrice de rigidité

Etape I : Identifier le problème, donc on doit choisir un système de coordonnées convenable et numéroté les nœuds et d'assurer l'écriture suivante :

$$\{F^e\} = [k^e].\{\delta^e\}$$

Etape II : Calcul des fonctions de déplacement w et des rotations β_x et β_y , qui seront déterminées à partir des champs de déformation proposés, donc pour chaque nœud de cet élément, les déplacements sont présentés sous la forme suivante :

$$\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = [Q(x, y)]\{A\} \quad (\text{IV.62})$$

$$\{\delta^e\} = [C].\{A\} \quad (\text{IV.63})$$

Les vecteurs $\{\delta^e\}$ et $\{A\}$ sont donnés par :

$$\{\delta^e\} = \{w_1 \beta_{x1} \beta_{y1} w_2 \beta_{x2} \beta_{y2} w_3 \beta_{x3} \beta_{y3} w_4 \beta_{x4} \beta_{y4}\}^T$$

$$\{A\} = \{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12}\}^T$$

On peut présenter les fonctions des déplacements et des rotations sous forme matricielle comme suit :

La matrice $[c]$ est une matrice de 12x12 éléments, les termes de cette matrice peuvent être divisés dans la forme suivante :

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ [C_3] \\ [C_4] \end{bmatrix} \quad (IV.64)$$

Où les matrices $[C_i]$ sont des matrices de 3x12 éléments, l'écriture générale des matrices $[C_i]$ est donnée comme suit :

$$[C_i] = \begin{bmatrix} 1 & -x_i & -y_i & -\frac{x_i^2}{2} & -\frac{x_i^2 y_i}{2} & -\frac{y_i^2}{2} & -\frac{x_i y_i^2}{2} & -\frac{x_i y_i}{2} & \frac{4x_i}{5} & \frac{x_i y_i}{2} & \frac{4y_i}{5} & \frac{x_i y_i}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_i & x_i y_i & 0 & -\frac{y_i^2}{2} & \frac{y_i}{2} & \frac{1}{5} & \frac{y_i}{2} & 0 & \frac{y_i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{x_i^2}{2} & y_i & x_i y_i & \frac{x_i}{2} & 0 & -\frac{x_i}{2} & \frac{1}{5} & \frac{x_i}{2} \end{bmatrix} \quad (IV.65)$$

Avec x_i, y_i sont les coordonnées des nœuds i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Etape III : Exprimer l'état des déplacements $\delta(x, y)$ dans l'élément en fonction des déplacements nodaux $\{\delta^e\}$, donc on exprime dans cette étape l'état des déplacements dans chaque point de l'élément, en utilisant l'équation :

$$\{\delta(x, y)\} = [f(x, y)][A]^{-1}\{\delta^e\}$$

Donc, on peut écrire l'équation suivante :

$$\begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & \frac{-x^2}{2} & \frac{-x^2 y}{2} & \frac{-y^2}{2} & \frac{-xy^2}{2} & \frac{-xy}{2} & \frac{4x}{5} & \frac{xy}{2} & \frac{4y}{5} & \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & xy & 0 & \frac{-y^2}{2} & \frac{y}{2} & \frac{1}{5} & \frac{y}{2} & 0 & \frac{-y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-x^2}{2} & y & xy & \frac{x}{2} & 0 & \frac{-x}{2} & \frac{1}{5} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (IV.66)$$

Après l'introduction des coordonnées des nœuds on obtient le système d'équation suivant:

$$\begin{Bmatrix} w_1 \\ B_{x1} \\ B_{y1} \\ w_2 \\ B_{x2} \\ B_{y2} \\ w_3 \\ B_{x3} \\ B_{y3} \\ w_4 \\ B_{x4} \\ B_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{-a^2}{2} & \frac{a^2b}{16} & \frac{-b^2}{2} & \frac{ab^2}{16} & \frac{-ab}{8} & \frac{-4.a}{10} & \frac{ab}{8} & \frac{-4.b}{10} & \frac{ab}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a}{2} & \frac{ab}{4} & 0 & \frac{-b^2}{8} & \frac{-b}{4} & \frac{1}{5} & \frac{-b}{4} & 0 & \frac{b}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-a^2}{8} & \frac{-b}{2} & \frac{ab}{4} & \frac{-a}{4} & 0 & \frac{a}{4} & \frac{1}{5} & \frac{-b}{4} \\ 1 & \frac{-a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{-a^2}{8} & \frac{a^2b}{16} & \frac{-a^2}{8} & \frac{ab^2}{16} & \frac{ab}{8} & \frac{4.a}{10} & \frac{-ab}{8} & \frac{-4.b}{10} & \frac{-ab}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{2} & \frac{-ab}{4} & 0 & \frac{-b^2}{8} & \frac{-b}{4} & \frac{1}{5} & \frac{-b}{4} & 0 & \frac{b}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-a^2}{8} & \frac{-b}{2} & \frac{-ab}{4} & \frac{a}{2} & 0 & \frac{-a}{4} & \frac{1}{5} & \frac{a}{4} \\ 1 & \frac{-a}{2} & \frac{-b}{2} & \frac{-a^2}{8} & \frac{-a^2b}{16} & \frac{-b^2}{8} & \frac{-ab^2}{16} & \frac{-ab}{8} & \frac{4.a}{10} & \frac{ab}{8} & \frac{4.b}{10} & \frac{ab}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a}{2} & \frac{ab}{4} & 0 & \frac{-b^2}{8} & \frac{b}{4} & \frac{1}{5} & \frac{b}{4} & 0 & \frac{-b}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-a^2}{8} & \frac{b}{2} & \frac{ab}{4} & \frac{a}{4} & 0 & \frac{-a}{4} & \frac{1}{5} & \frac{a}{4} \\ 1 & \frac{a}{2} & \frac{-b}{2} & \frac{-a^2}{8} & \frac{-a^2b}{16} & \frac{-b^2}{8} & \frac{ab^2}{16} & \frac{ab}{8} & \frac{-4.a}{10} & \frac{-ab}{8} & \frac{4.b}{10} & \frac{-ab}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a}{2} & \frac{-ab}{4} & 0 & \frac{-b^2}{8} & \frac{b}{4} & \frac{1}{5} & \frac{b}{4} & 0 & \frac{-a}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-a^2}{8} & \frac{b}{2} & \frac{-ab}{4} & \frac{-a}{4} & 0 & \frac{a}{4} & \frac{1}{5} & \frac{-a}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{Bmatrix} \quad (IV.67)$$

Etape IV : Relier les déformations $\varepsilon(x,y)$ dans chaque point de l'élément au déplacement $\delta(x,y)$, et donc aux déplacements nodaux $\{\delta^e\}$:

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [C]\{\alpha\}$$

$$\{\varepsilon(x,y)\} = [B]\{\delta^e\}$$

$$[B] = [C][A]^{-1}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix}}_Q [C]^{-1}\{\delta^e\} \quad (IV.68)$$

La matrice contrainte $[Q]$ est donnée par :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y^2 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (IV.69)$$

Etape V : Relier les déformations $\{\varepsilon(x, y)\}$ aux contraintes internes $\{\sigma(x, y)\}$, puis relier les contraintes aux déplacements nodaux $\{\delta^e\}$:

$$\{\sigma(x, y)\} = [D].\{\varepsilon(x, y)\}$$

Avec $[D]$ représente la matrice d'élasticité et contient les propriétés élastiques de l'élément.

$$\{\varepsilon(x, y)\} = [B].\{f^e\}$$

$$\{\sigma(x, y)\} = [D].[B].\{\delta^e\}$$

La matrice $[D]$ est donnée sous la forme suivante :

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.70})$$

Etape VI : Remplacer les contraintes internes $\{\sigma(x, y)\}$ par des forces nodales statiquement équivalentes $\{F^e\}$, relier ces forces nodales aux déplacements nodaux $\{\delta^e\}$ et de là obtenir la matrice de rigidité de l'élément $[K^e]$:

$$\{F^e\} = \left[\int [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \cdot d(\text{vol}) \right] \cdot \{\delta^e\}$$

$$\text{Avec : } \{F^e\} = [k^e]\{\delta^e\}$$

$$\text{Donc, } [K^e] = \iint [B]^T [D] [B] \cdot dx \cdot dy$$

Etape VII : Etablir la matrice $[H]$ reliant les contraintes et les déformations :

$$\{\sigma(x, y)\} = [H].\{\delta^e\}$$

$$\text{Avec } [H] \text{ est donnée par : } [H] = [D].[B]$$

$$[k^e] = [C]^{-T} \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [Q]^T [D] [Q] ds \right) [C]^{-1} \quad (\text{IV.71})$$

$$[k_0] = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [Q]^T [D] [Q] ds \quad (\text{IV.72})$$

La matrice $[K_0]$ pour l'élément **SBRPS** est donné par :

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2 & H_5 & H_6 & H_7 & 0 & 0 & 0 & H_8 & H_9 \\ 0 & 0 & 0 & H_3 & H_6 & H_{10} & H_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_4 & H_7 & H_{11} & H_{12} & 0 & H_{13} & H_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{13} & 0 & H_{16} & H_{17} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{14} & 0 & H_{17} & H_{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{19} & H_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{20} & H_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.73})$$

Avec:

$$\begin{aligned} H_1 &= d_{11} S; H_2 = d_{11} S_y; H_3 = d_{11} S_x; H_4 = d_{11} S_x; H_5 = d_{11} S_{yy} + d_{55} S_{xxx}; H_6 = d_{12} S_y; H_7 = d_{12} S_{xy}; \\ H_8 &= -d_{55} S_{xx}; H_9 = -d_{55} S_{xxx}; H_{10} = d_{22} S_x; H_{11} = d_{22} S_x; H_{12} = d_{22} S_{xx} + d_{44} S_{yyyy}; \\ H_{13} &= -d_{44} S_{yy}; H_{14} = -d_{44} S_{yyy}; H_{15} = d_{33} S; H_{16} = d_{44} S; H_{17} = d_{44} S_y; H_{18} = d_{44} S_{yy}; H_{19} = d_{55} S; \\ H_{20} &= d_{55} S_x; H_{21} = d_{55} S_{xx} \end{aligned}$$

Le terme S, S_x, etc. sont des intégrales au-dessus du secteur du rectangle et sont donnés par :

$$\begin{aligned} S &= \int_s ds = ab; \quad S_x = \int_s x ds; \quad S_y = \int_s y ds; \quad S_{xy} = \int_s xy ds; \\ S_{xx} &= \int_s x^2 ds; \quad S_{yy} = \int_s y^2 ds; \quad S_{xxx} = \int_s x^3 ds; \quad S_{yyy} = \int_s y^3 ds; \\ S_{xxxx} &= \int_s x^4 ds; \quad S_{yyyy} = \int_s y^4 ds. \end{aligned}$$

La matrice $[k_0]$ de la variante **SBRPS** est détaillée dans l'annexe A.

CHAPITRE V

APPLICATIONS NUMÉRIQUES

V. APPLICATIONS NUMERIQUES

V.1 Introduction

Après la présentation de la théorie relative au comportement des plaques au chapitre II, et la formulation de la nouvelle variante de l'élément SBRPS au chapitre IV. Il est évident que la solution des équations différentielles gouvernant, le comportement des plaques est impossible par une des méthodes analytiques. Pour cette raison, le recours à une méthode numérique est devenu une obligation. Pour cela, la méthode des éléments finis est sélectionnée comme une méthode numérique de cette étude. La structure d'un programme de calcul en FORTRAN77 est formée d'un ensemble de blocs, ces derniers sont constitués par les différentes sous-routines du programme source. En plus en sa forme, il est totalement identique aux programmes développés dans le domaine du calcul numérique.

La validation de l'élément formulé, est représentée par la comparaison entre les résultats analytiques, indiqués dans la littérature et les résultats donnés par les autres éléments à travers des tests similaires.

A cet effet une étude comparative entre les résultats obtenus à l'aide du programme FORTRAN77 a été réalisée avec ceux des logiciels de calcul tel que (ANSYS), (SAP2000) et (RDM6).

Le programme de FORTRAN77, est structuré par un ensemble de blocs. Sa composition passe par des opérations très diverses, à savoir : (1) Organisation des données, (2) Intégration analytique, (3) Résolution du système d'équations. Le traitement numérique s'effectue au niveau des éléments finis, pour cela ce programme inclut quelques blocs fonctionnels caractérisés par les étapes suivantes :

- 1) Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques (conductivités, module d'élasticité, etc...), les sollicitations et conditions aux limites ;
- 2) Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de celle ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations;
- 3) Résolution du système d'équation après prise en compte des conditions aux limites;
- 4) Impression des résultats après calcul éventuel des variables additionnelles (déplacements, moments)

V.2 Développement du programme pour le calcul des plaques

On considère une plaque homogène soumise à une charge uniformément répartie ou concentrée, qu'on discrétise en éléments rectangulaires égaux, (n) éléments suivant l'axe x et (n) éléments suivant l'axe y , on calcule les déplacements et les rotations (w, θ_x, θ_y) au niveau de chaque nœud, en fin on procède au calcul des réactions et des contraintes dans le milieu de chaque élément, avec la détermination des valeurs maximales.

Les processus de calcul dans le programme se font comme suit :

- Discrétisation de la plaque en éléments finis, puis définition du nombre d'éléments selon les axes(x, y).
- Détermination des caractéristiques physiques et géométriques de la plaque.
- Définition du chargement de la plaque.
- Numérotation des nœuds, puis définition des conditions aux limites.
- Assemblage des éléments pour la détermination de la matrice de rigidité de la plaque.
- Résolution du système d'équations.
- Détermination des déplacements et des rotations des nœuds.
- En fin, vient le calcul des contraintes au niveau de chaque élément.

La structure du programme de l'analyse des plaques se présente selon l'ordre suivant :

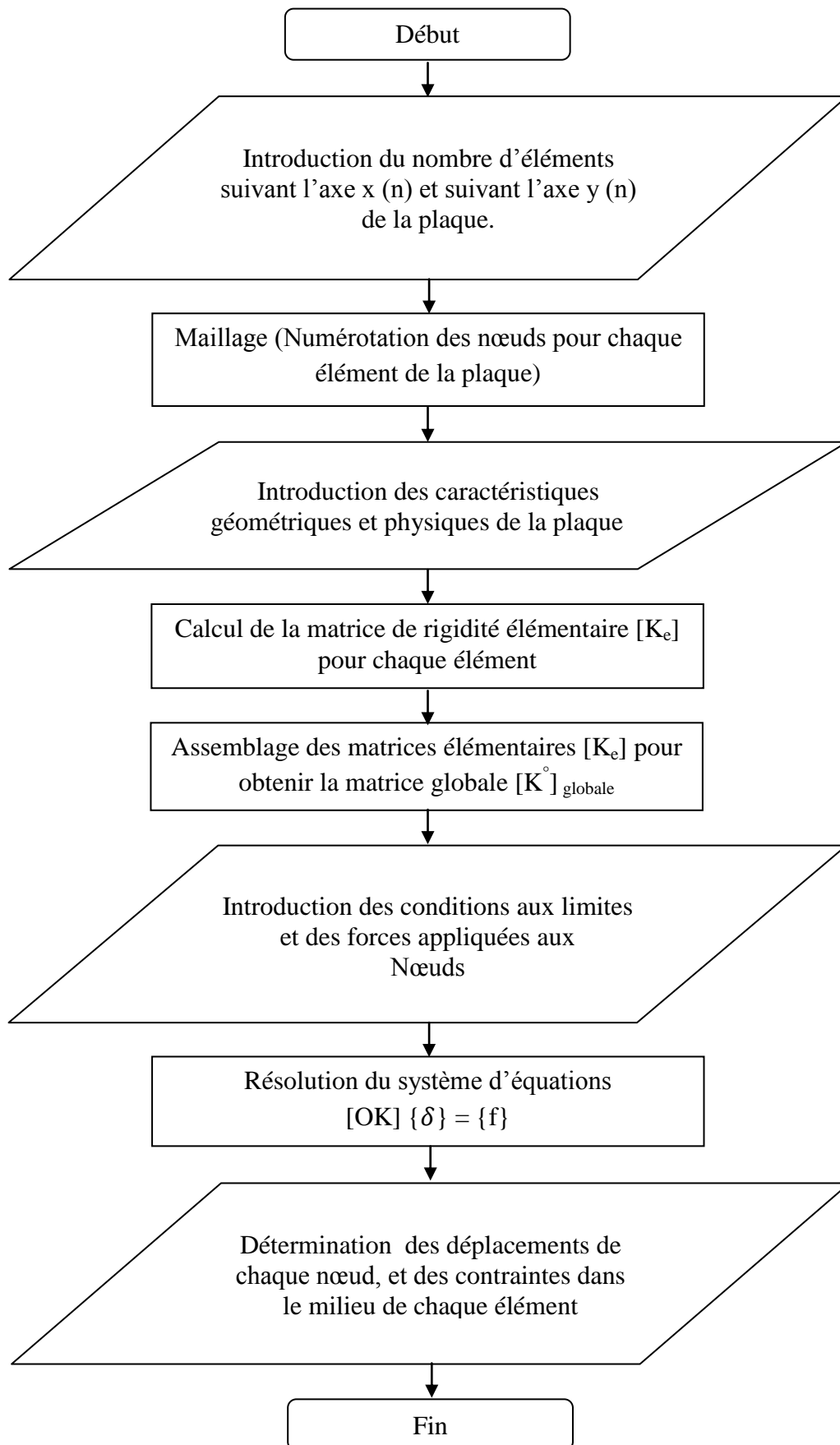
- Un programme principal qui regroupe la grande partie des opérations effectuées, allant de la lecture des données dans un fichier texte, dont le nom (données.dat), et finissant par trouver les résultats dans un autre fichier texte, dont le nom (résultats.txt).
- Un fichier d'introduction des données dans lequel l'utilisateur devra mettre les valeurs numériques concernant l'application voulue, selon l'ordre suivant :

- 1) La dimension de la plaque suivant l'axe x (a).
- 2) la dimension de la plaque suivant l'axe y (b).
- 3) Le nombre des nœuds par élément.
- 4) Le nombre de degrés de liberté par élément.
- 5) Le nombre de degrés de liberté par Nœud.
- 6) L'épaisseur de la plaque (h), Module de Young (E), coefficient de poisson (ν).
- 7) Type de chargement et sa valeur.

- Un fichier de résultat, où sont détaillés tous les résultats, à savoir :

- 1) Valeurs des déplacements et des rotations au niveau de chaque nœud.
- 2) Valeurs des contraintes.
- 3) Valeurs des réactions au niveau des appuis.

Pour plus de détails, voir ce programme sous forme d'organigramme en (figure. V.1).



(Figure .V.1) : Organigramme pour l'étude de la flexion des plaques.

V.3 Introduction au logiciel de modélisation et de calcul ANSYS

V.3.1 Définition

ANSYS, est l'un des plus grands développeurs et fournisseurs de logiciels de simulation numérique au monde. Ses produits majeurs sont des logiciels qui mettent en œuvre la méthode des éléments finis, afin de résoudre des modèles discrétisés.

V.3.2 Principaux produits et capacités

- **ANSYS Structural** : Ce produit permet d'effectuer des simulations mécaniques en calculant les structures. Ses principales capacités sont : (1) l'analyse statique, (2) l'analyse modale, (3) l'analyse harmonique (réponse forcée), (4) l'analyse temporelle ou transitoire (5) la gestion de différentes situations non linéaires (contacts, plasticité des matériaux, grands déplacements ou grandes déformations).
- **ANSYS Mechanical** : Ce produit dispose les mêmes capacités qu'ANSYS structural, en y ajoutant notamment une solution thermique, avec modélisation du **rayonnement**.
- **ANSYS CFX et Fluent** : Ces deux logiciels permettent d'effectuer des simulations en matière de **mécanique des fluides**. Ils portent le nom des compagnies qui les ont développés, rachetées par ANSYS.Inc respectivement en février 2003 et en février 2006.
- **ANSYS AUTODYN et ANSYS LS-DYNA** : Ces logiciels possèdent des solutions utilisant les formulations explicites des équations à résoudre, contrairement aux produits précédemment cités. Leur domaine d'application est réservé aux modélisations mettant en jeu des situations mécaniques aux très larges déformations.
- **ANSYS Electromagnetics** : Ce produit permet de résoudre des modélisations mettant en jeu des phénomènes électromagnétiques.
- **ANSYS Multiphysics** : Ce produit rassemble l'ensemble des capacités d'ANSYS en matière de simulation numérique implicite.

V.3.3. Plateformes ou environnements

Deux environnements logiciels permettent de mettre en œuvre le code ANSYS :

- **ANSYS classique** : Chronologiquement, c'est la première solution de ce logiciel qui est développée par le constructeur. Elle est destinée à la construction de modèles éléments finis à la géométrie simple, facilement constructible à l'aide d'opérations basiques. À partir de cet environnement, l'utilisateur construit directement un modèle éléments finis en se basant sur les commandes disponibles dans le code ANSYS. Il est donc destiné à des utilisateurs compétents dans le domaine de la simulation numérique.
- **ANSYS Workbench** : Cette plateforme propose une approche différente dans la construction d'un modèle, en réutilisant le code ANSYS initial. Elle est particulièrement adaptée au traitement de cas à la géométrie complexe (nombreux corps de pièce) et aux utilisateurs non confirmés dans le domaine du calcul. Dans cet environnement, l'utilisateur travaille essentiellement sur une géométrie et non plus sur le modèle lui-même. La plate forme est donc chargée de convertir les requêtes entrées par l'utilisateur en code ANSYS avant de lancer la

résolution. Le modèle éléments finis généré reste néanmoins manipulable en insérant des commandes propres au code ANSYS.

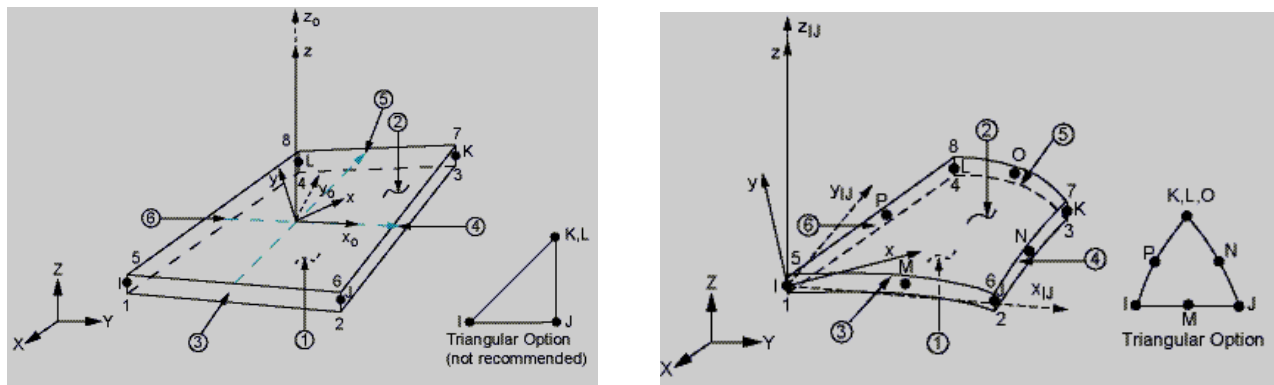
V.3.4. Organisation de logiciel ANSYS

Il y a deux niveaux primaires dans le programme d'ANSYS : (a) Passage dans et hors d'ANSYS et de plate-forme : pour utiliser certaines commandes globales telles que le titre de travail changeant, etc. (b) Processeur de niveau : Ce niveau contient les processeurs (pré processeur, solution, post processeur, etc.) qui sont employés pour réaliser des analyses par éléments finis.

V.3.4.1 La structure de dossier d'ANSYS

Plusieurs dossiers sont créés pendant une analyse typique d'ANSYS. Certains de ces dossiers sont dans le format d'ASCII, tandis que les autres sont binaires.

V.3.5. Quelques éléments du logiciel ANSYS utilisés dans la modélisation des plaques



(Figure .V.2) : Eléments de la bibliothèque du logiciel ANSYS pour la modélisation des plaques.

V.4 Introduction au logiciel de calcul RDM6

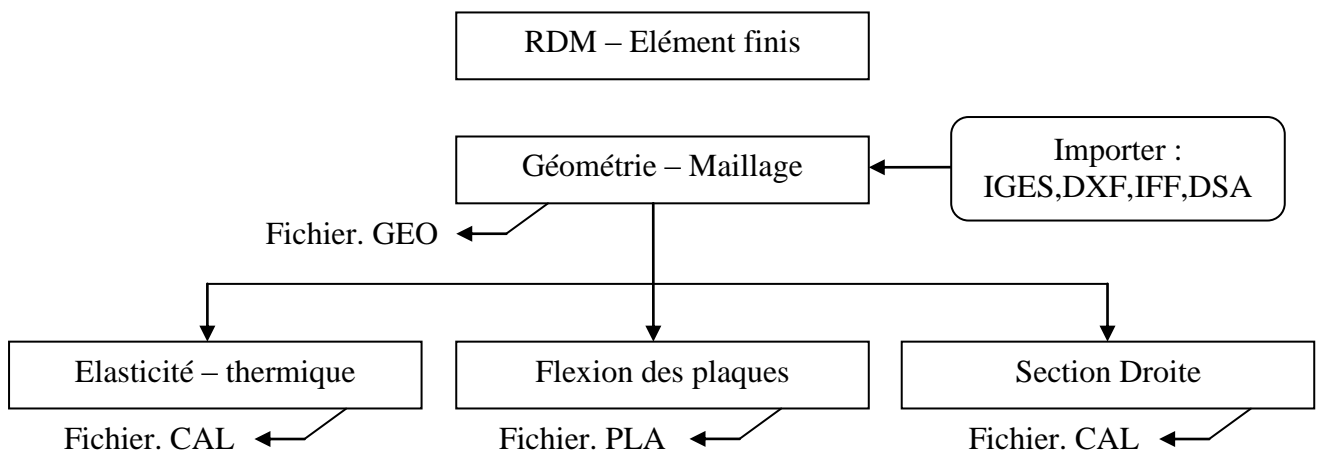
V.4.1 Présentation du logiciel RDM6

RDM6 est un logiciel destiné au calcul des structures par la méthode des éléments finis.

Ce logiciel permet :

- La modélisation et le maillage d'un domaine plan.
- L'évaluation du comportement mécanique et/ou thermique d'une pièce plane ou axisymétrique.
- Le calcul des caractéristiques d'une section droite de poutre et les contraintes dans celle-ci pour une force intérieure donnée. [Manuel RDM.6.17]

-



(Figure. V.3) : Principe de calcul par le logiciel RDM6.

Dans le choix de la méthode pour le maillage du domaine, le logiciel propose deux types de maillage (Maillage automatique, maillage structure ou par bloc).

V.4.2 Maillage structuré (maillage par bloc)

Le maillage par bloc ou maillage structuré permet la discrétisation d'un domaine plan en :

- Triangles à 3 ou 6 nœuds.
- Quadrilatères à 4, 8 ou 9 nœuds.

V.4.3 Modélisation des plaques par RDM6

Ce logiciel permet la détermination du comportement statique et dynamique de plaques sollicitées en flexion.

Les hypothèses retenues sont :

- Les déplacements sont petits.
- Les matériaux sont isotropes.
- Les relations entre les contraintes et les déformations sont linéaires.
- Les cisaillements transversaux peuvent être pris en compte (modèle de Reissner - Mindlin) ou négligé (hypothèse de Kirchhoff).

- Les sollicitations prises en compte sont : les charges ponctuelles et nodales, les charges linéiques, les charges surfaciques, le poids propre, et les déplacements d'appuis.

V.4.4 Bibliothèque d'éléments des plaques

- Les éléments utilisés sont le triangle à 3 nœuds et le quadrilatère à quatre nœuds.
- Éléments avec prise en compte du cisaillement transversal; leur formulation est basée sur la théorie de Meissner - Mindlin :
 - Élément triangle à 3 nœuds : DST (Discrete Shear Triangle).
 - Élément quadrilatère à 4 nœuds : Q4g (MITC4) (Mixed Interpolated Tensorial Components).
- Éléments de Kirchhoff ou l'énergie de cisaillement transverse est négligée. Les hypothèses de Kirchhoff sont introduites de manière discrète.
 - Élément triangle à 3 nœuds : DKT (Discrete Kirchhoff Triangle).
 - Élément quadrilatère à 4 nœuds : DKQ (Discrete Kirchhoff Quadrilateral).

V.5 Introduction au logiciel de calcul SAP2000

V.5.1 Présentation du logiciel SAP2000

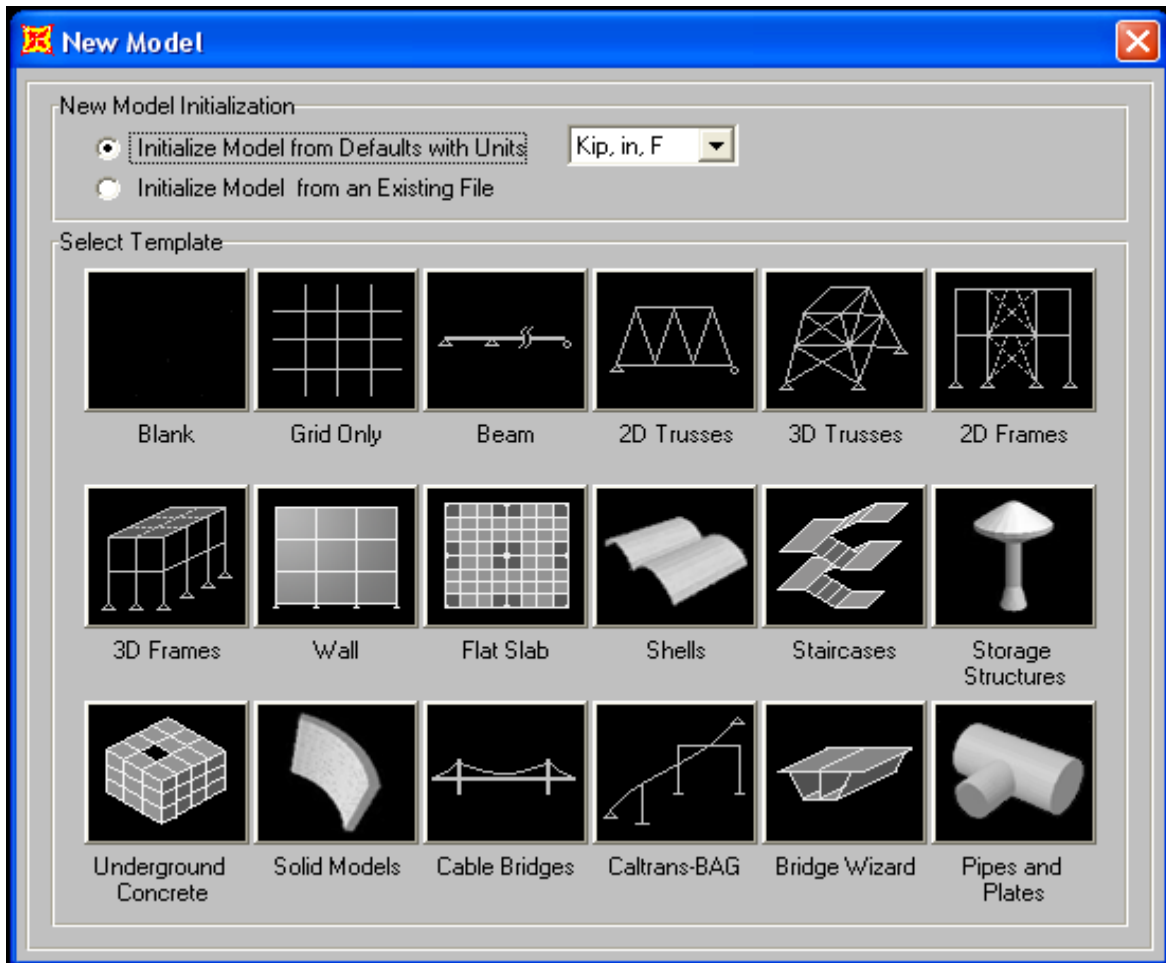
SAP 2000 est un logiciel de calcul et de conception des structures d'ingénierie particulièrement adapté aux bâtiments et ouvrage de génie civil. Il permet en un même environnement la saisie graphique des ouvrages de BTP avec une bibliothèque d'élément autorisant l'approche du comportement de ce type de structure. Il offre de nombreuses possibilités d'analyse des effets statiques et dynamiques avec des compléments de conception et de vérification des structures en béton armé, charpente métallique. Le post-processeur graphique disponible facilite considérablement l'interprétation et l'exploitation des résultats et la mise en forme des notes de calcul et des rapports explicatifs. [Manuel SAP.2000 V12]

V.5.2 Modélisation

Le logiciel permet d'effectuer les étapes de modélisation (définition de la géométrie, conditions aux limites, chargements des structures, etc.) de façon totalement graphique, numérique ou combinées, en utilisant les innombrables outils disponibles.

En effet, une structure peut être composée en sous schémas (portiques, treillis, dalle, voile) chacun défini dans sa base graphique correspondante, ensuite assemblée en schéma final de calcul, pendant que la compatibilité des connections s'effectue automatiquement.

Par ailleurs, les éléments finis, associés à une des bases graphiques de génération de schéma (base de treillis, de portique, de trame de poutre, de dalle, de voile, de coque, etc.), sont directement paramétrés (Figure. V.3).



(Figure. V.4) : Les modèles utilisés dans le SAP 2000

V.5.3 Éléments de plaque pour SAP2000

Ils sont utilisés pour la modélisation des dalles, tabliers.....etc. Ce type d'élément n'équilibre que les moments d'axes tangents à leur surface et des forces perpendiculaires au plan tangent. Trois degrés de liberté sont pris en compte en chaque nœud, deux rotations dans le plan tangent, une translation perpendiculaire au plan auquel sont associés deux moments et une force.

Deux modèles utilisés pour le calcul des plaques à savoir :

- Plaques épaisses où l'effet du cisaillement transversal est pris en compte (modèle de Reissner - Mindlin).
- Plaque mince où l'effet cisaillement transversal est négligé (modèle de Kirchhoff).

V.5.4 Équations de bases utilisés

Les moments de flexion de la plaque sont donnés par les expressions suivantes :

$$M_{11} = - \int_{-\frac{thb}{2}}^{+\frac{thb}{2}} x_3 \sigma_{11} dx_3 \quad (V.1)$$

$$M_{22} = - \int_{-\frac{thb}{2}}^{+\frac{thb}{2}} x_3 \sigma_{22} dx_3 \quad (\text{V.2})$$

Le moment de torsion de la plaque est donné par l'expression suivante :

$$M_{12} = - \int_{-\frac{thb}{2}}^{+\frac{thb}{2}} x_3 \sigma_{12} dx_3 \quad (\text{V.3})$$

Les forces de cisaillement transversales sont données par les expressions suivantes :

$$V_{13} = \int_{-\frac{thb}{2}}^{+\frac{thb}{2}} \sigma_{13} dx_3 \quad (\text{V.4})$$

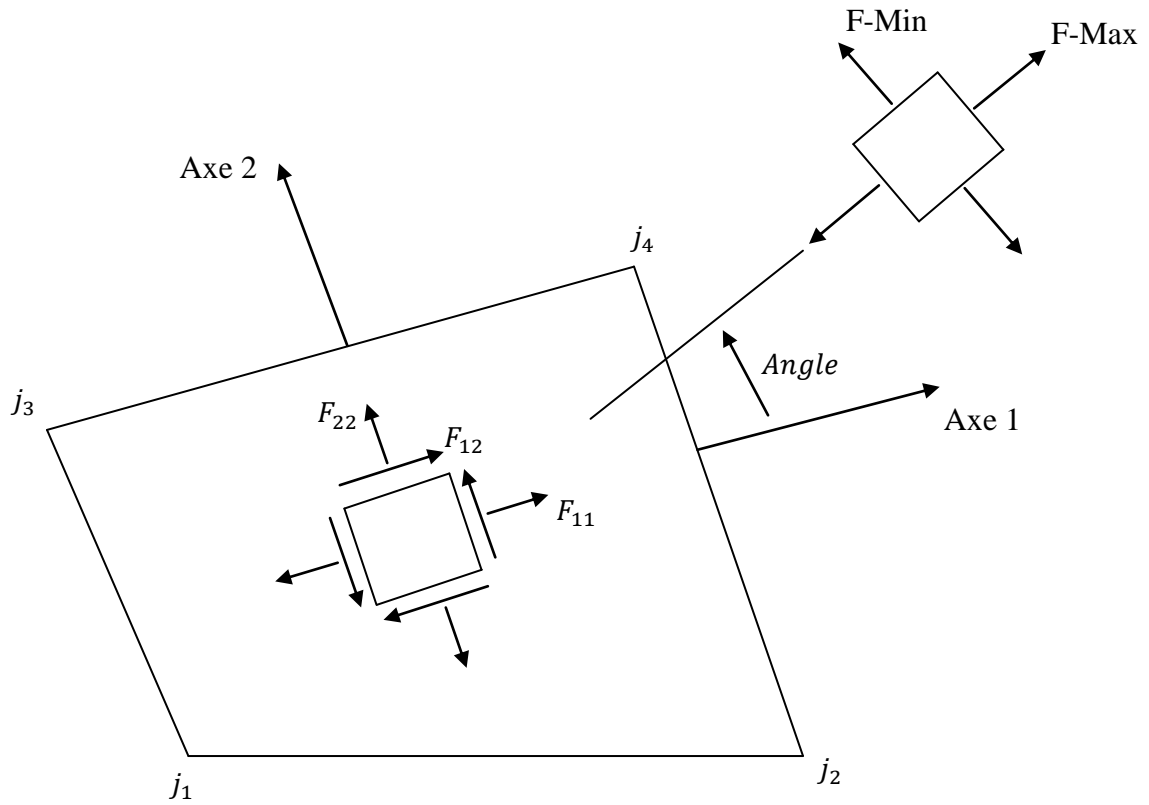
$$V_{23} = \int_{-\frac{thb}{2}}^{+\frac{thb}{2}} \sigma_{23} dx_3 \quad (\text{V.5})$$

D'autre part :

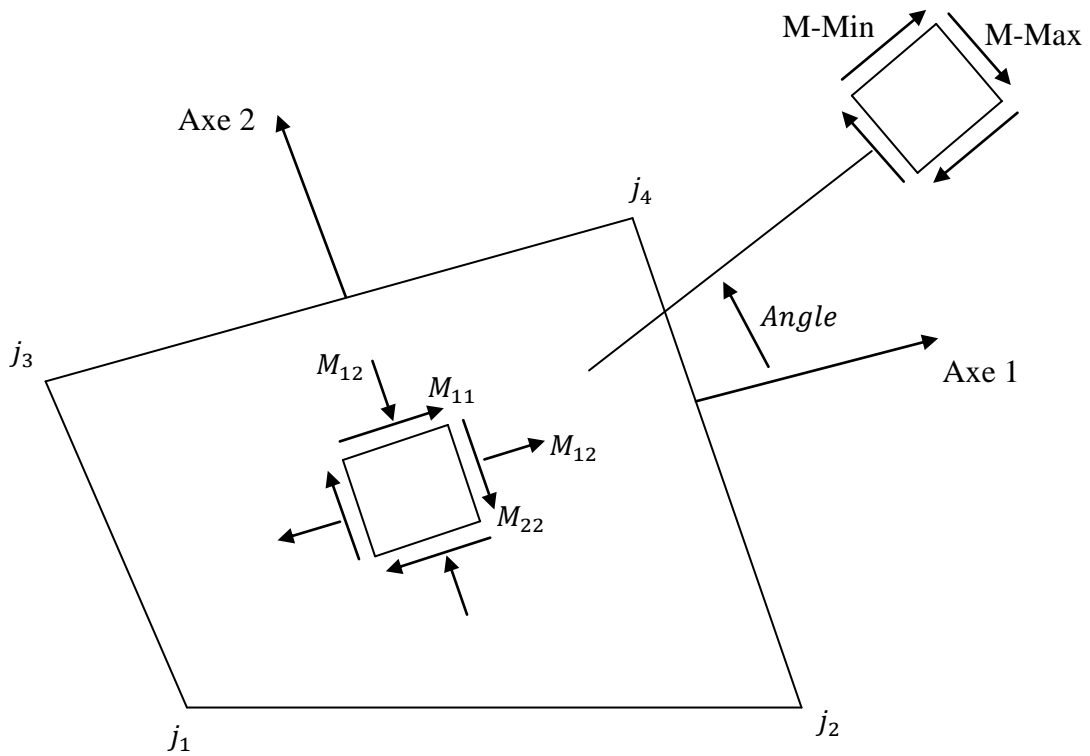
$$V_{13} = - \frac{dM_{11}}{dx_1} - \frac{dM_{12}}{dx_2} \quad (\text{V.6})$$

$$V_{23} = - \frac{dM_{12}}{dx_1} - \frac{dM_{22}}{dx_2} \quad (\text{V.7})$$

Avec thb représente l'épaisseur de la plaque.



(Figure. V.5) : Contraintes et forces de membrane utilisé dans SAP2000

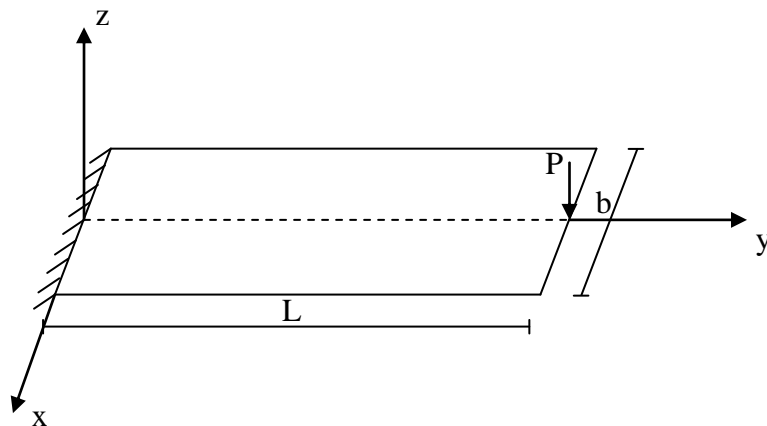


(Figure. V.6) : Model des moments de flexion dans une plaque utilisé dans SAP2000

V.6 Validation et applications

V.6.1 Console sous charge concentrée

Nous traitons l'exemple de la (figure .V.7). Il s'agit d'évaluer le déplacement vertical W_{max} à l'extrémité libre de la console, le rapport entre la longueur et l'épaisseur est donné par ($\frac{L}{h} = 1$ à 100) afin de voir l'influence du cisaillement transversal introduit discrètement sur le comportement de la structure, la longueur $L = 10$, la largeur $b = 1$, le module d'élasticité (Module de Young) du matériau $E = 1.2 \times 10^6$, le coefficient de Poisson $\nu = 0$, une charge concentrée à l'extrémité de la console $P = 0.1$.



(Figure .V.7) : Console sous charge concentrée

Ce problème a été traité par plusieurs chercheurs dont Messieurs Belarbi et Charif, afin de tester la performance de l'élément SBH8 où :

SBH8 : (Strain Based Hexaedrom 8-node), est un élément tridimensionnel de huit nœuds et de 24 degrés de liberté, destiné au calcul des plaques minces et épaisses en flexion.

SBRP : (Strain Based Rectangulaire Plate), est un élément rectangulaire de quatre nœuds et de 12 degrés de liberté, destiné au calcul des plaques minces et épaisses en flexion.

ACM : Élément rectangulaire basé sur l'approche en déplacement pour l'étude de la flexion des plaques minces.

Le déplacement vertical à l'extrémité libre de la plaque est évalué, afin de montrer l'influence du cisaillement transversal sur le comportement de la console. La solution analytique du déplacement vertical W à l'extrémité libre donnée par :

$$W = \frac{4PL^3}{Ebh^3} \left[1 + \frac{1}{2K} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right]$$

Si on néglige l'effet de cisaillement transversal ($\frac{h}{L} \ll 1$), l'expression du déplacement vertical de la plaque devient :

$$W = \frac{4PL^3}{Ebh^3}$$

Les résultats du déplacement vertical à l'extrémité libre de la poutre avec un maillage de dix éléments (2X5), sont présentés dans le tableau suivant :

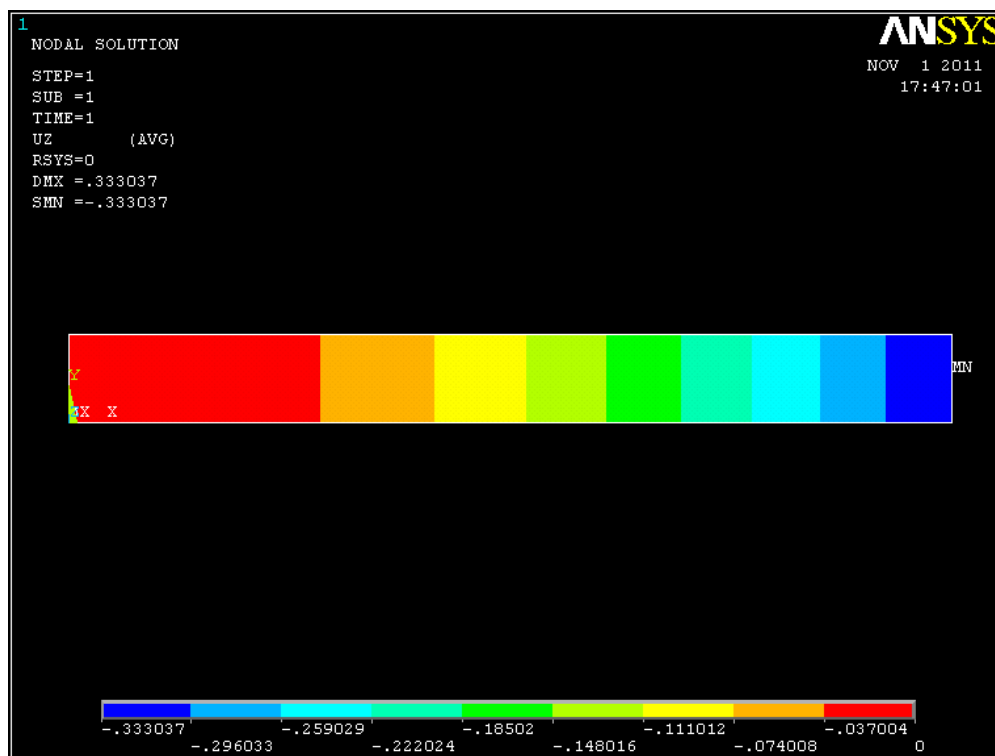
$\frac{L}{h}$	W_{max}						
	1	2	3	4	5	10	100
ACM	3.34×10^{-7}	2.68×10^{-6}	9.06×10^{-6}	2.14×10^{-5}	4.18×10^{-5}	3.44×10^{-4}	0.3344
SBH8	5.3×10^{-7}	3.1×10^{-6}	9.6×10^{-6}	2.2×10^{-5}	4.3×10^{-5}	3.3×10^{-4}	0.3325
SBRP	5.3×10^{-7}	3.1×10^{-6}	9.6×10^{-6}	2.2×10^{-5}	4.3×10^{-5}	3.3×10^{-4}	0.3325
SBRPS	5.32×10^{-7}	3.06×10^{-6}	9.52×10^{-6}	2.19×10^{-5}	4.23×10^{-5}	3.32×10^{-4}	0.3334
ANSYS	5.34×10^{-7}	3.06×10^{-6}	9.58×10^{-6}	2.2×10^{-5}	4.24×10^{-5}	3.33×10^{-4}	0.3331
SAP2000	5.34×10^{-7}	3.07×10^{-6}	9.65×10^{-6}	2.22×10^{-5}	4.3×10^{-5}	3.36×10^{-4}	0.3336
RDM6	5.58×10^{-7}	3.18×10^{-6}	9.68×10^{-6}	2.22×10^{-5}	4.27×10^{-5}	3.35×10^{-4}	0.3327
Solution Analytique	5.33×10^{-7}	3.1×10^{-6}	9.6×10^{-6}	2.2×10^{-5}	4.3×10^{-5}	3.3×10^{-4}	0.3333

(Tableau .V.1) : Influence de l'élancement L/h sur la flèche maximale w_{max} et un coefficient de cisaillement transversal ($K = 5/6$).

- Pour la variante **SBRPS**, la valeur de la flèche (W_{max}) pour ($\frac{L}{h} = 100$) est de 0.3334.

V.6.1.1 Représentation graphique de la répartition des déplacements de la console

V.6.1.1.1 Représentation graphique du logiciel ANSYS



(Figure. V.8) : Présentation graphique par ANSYS d'une console sous charge concentrée. Convergence de la flèche maximale

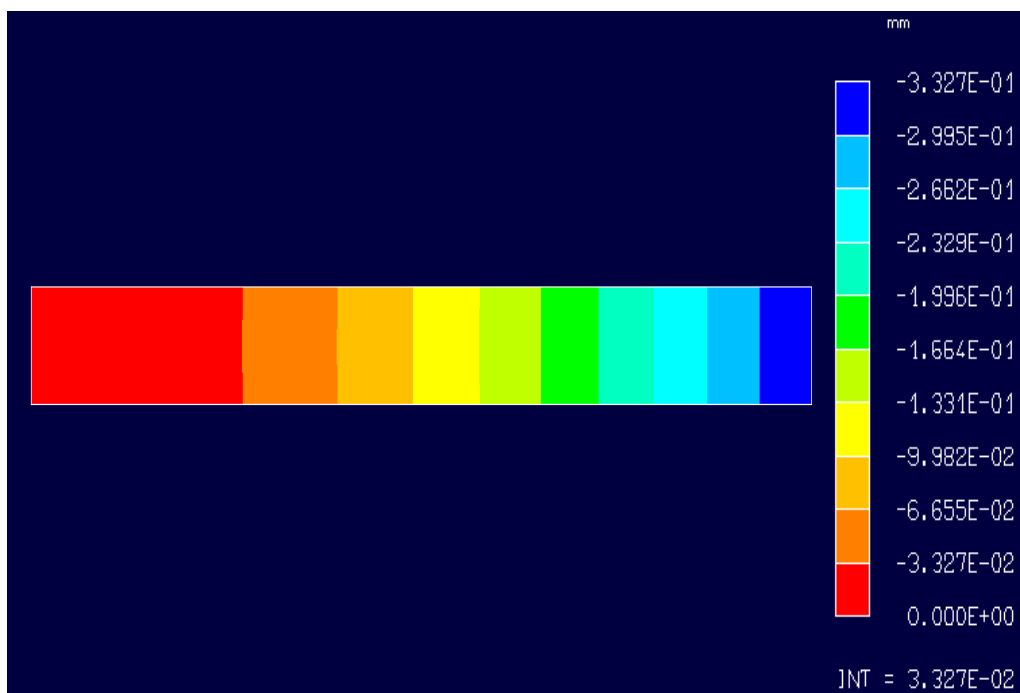
$$\left(\frac{L}{h} = 1 \text{ à } 100, P = 0.1, \nu = 0.3, E = 1.2 \times 10^6\right)$$

V.6.1.1.2 Représentation graphique du logiciel SAP 2000 V14



(Figure. V.9) : Présentation graphique par SAP 2000 V14 d'une console sous charge concentrée ($\frac{L}{h} = 1$ à 100, $P = 0.1$, $\nu = 0.3$, $E = 1.2 \times 10^6$)

V.6.1.1.3 Représentation graphique du logiciel RDM 6



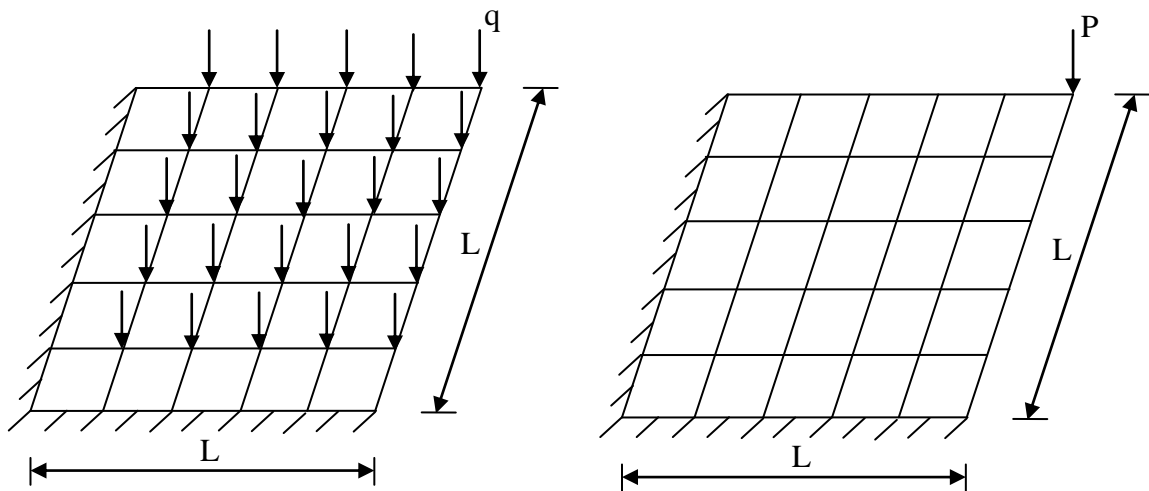
(Figure. V.10) : Présentation graphique par RDM 6 d'une console sous charge concentrée ($\frac{L}{h} = 1$ à 100, $P = 0.1$, $\nu = 0.3$, $E = 1.2 \times 10^6$)

V.6.2 Flexion d'une plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres

Dans cette partie, la plaque étudiée est discrétisée respectivement en différents maillages. Il s'agit de passer du maillage grossier au maillage fin pour montrer l'effet de la discrétisation géométrique sur la réponse de la plaque d'une part, et de prendre le maillage qui convient à la présente analyse d'autre part.

Dans ce cadre, nous avons effectué un calcul d'une plaque de côté L , homogène d'épaisseur h , possédant deux bords encastrés et deux bords libres. La plaque est soumise à deux types de sollicitations : - Charge Uniforme (C.U)
- Charge Concentré au Coin Libre (C.C.C.L)

Le maillage a été effectué avec des éléments rectangulaires (figure. V.8), il s'agit de quatre différentes discrétisations : à 4 éléments, à 16 éléments, à 64 éléments et en fin à 81 éléments, les résultats obtenus sont présentés ci-après :



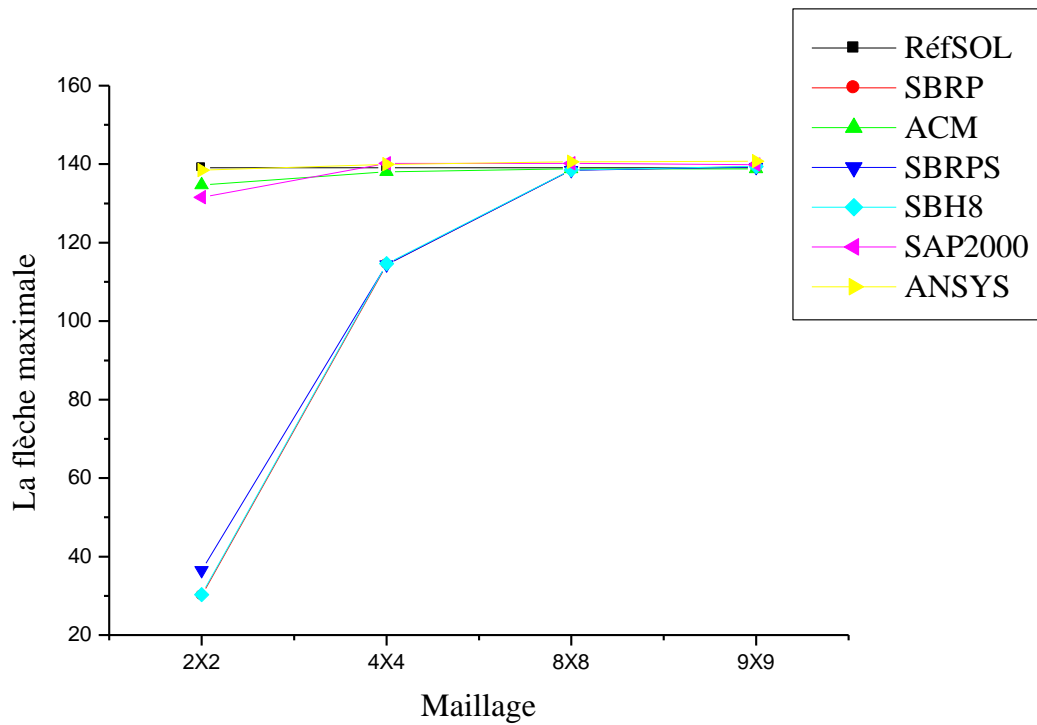
(Figure .V.11) : plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres

V.6.2.1 Flexion d'une plaque carrée sous charge concentrée

Maillage	Flèche maximale						
	SBH8	SBRP	ACM	SBRPS	ANSYS	SAP 2000	RDM6
2X2	30,293	29,976	134,70	36,497	138,49	131,54	133,0
4X4	114,650	114,382	138,10	114,38	139,96	140,22	138,40
8X8	138,540	138,496	138,80	138,50	140,61	140,23	140,20
9X9	139,440	139,401	138,80	139,24	140,76	139,18	140,40
Solution de réf.[DER 90]	139,07						

(Tableau V.2) : Plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres.

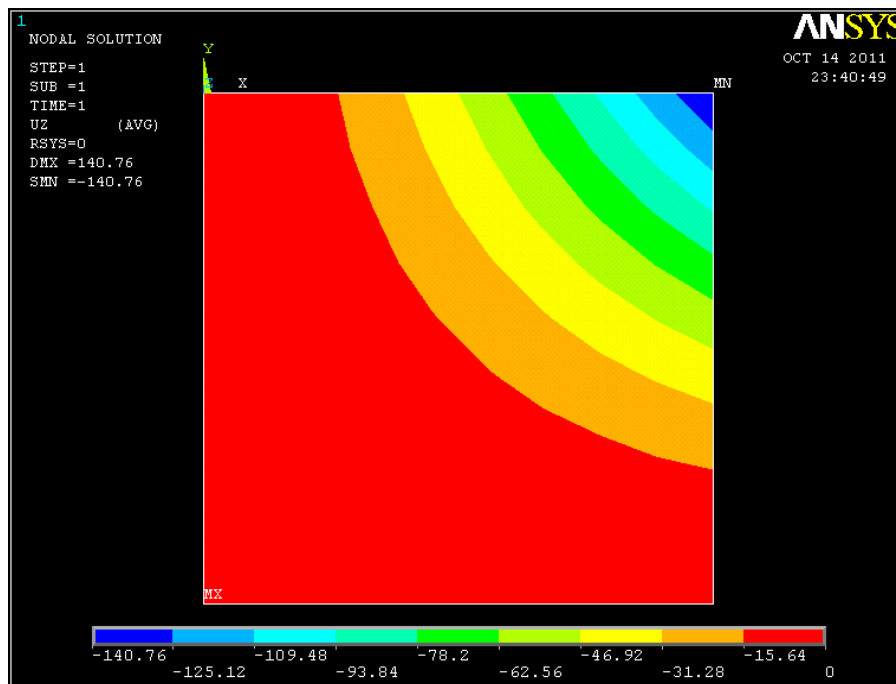
Convergence de la flèche maximale (C.C.C.L; $L = 10, h = 0.4,$
 $P = 100, \nu = 0,3, E = 3600$)



(Figure .V.12) : Présentation des résultats pour une plaque *C. C. C. L*

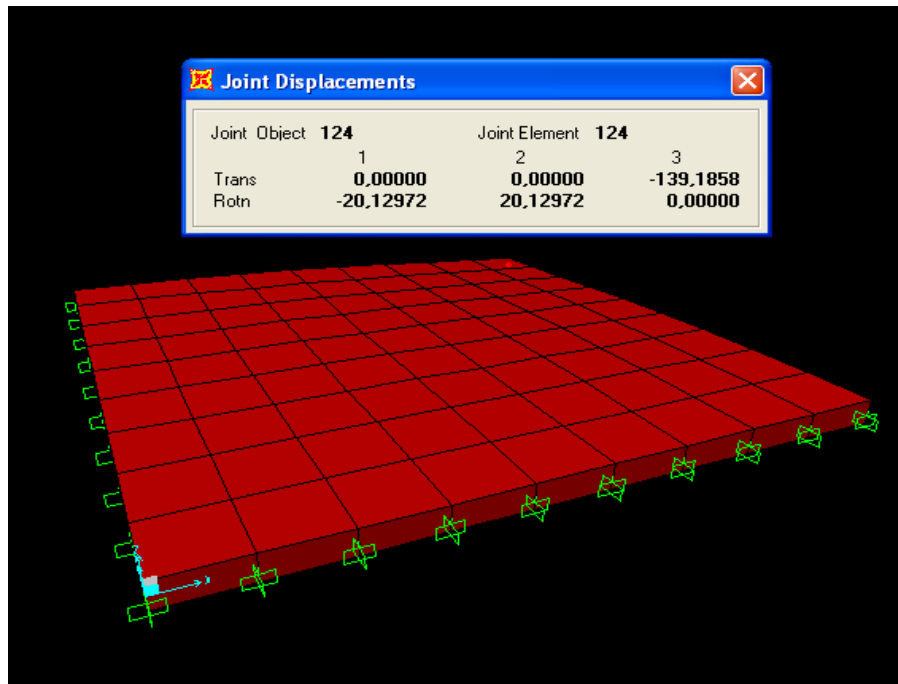
V.6.2.1.1 Représentation graphique de la répartition des déplacements

V. 6.2.1.1.1 Représentation graphique du logiciel ANSYS



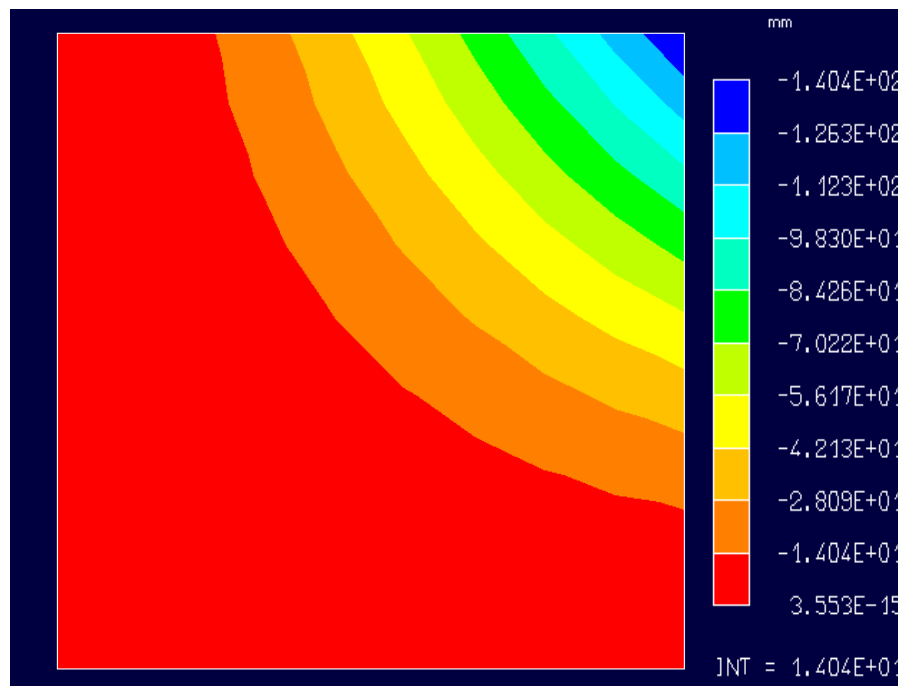
(Figure. V.13) : Présentation graphique par ANSYS d'une plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale (*C.C.C.L*; $L = 10, h = 0.4, P = 100, \nu = 0,3, E = 3600$)

V. 6.2.1.1.2 Représentation graphique du logiciel SAP 2000



(Figure. V.14) : Présentation graphique par ANSYS d'une plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres ($C.C.C.L$; $L = 10, h = 0.4, P = 1000, \nu = 0,3, E = 3600$)

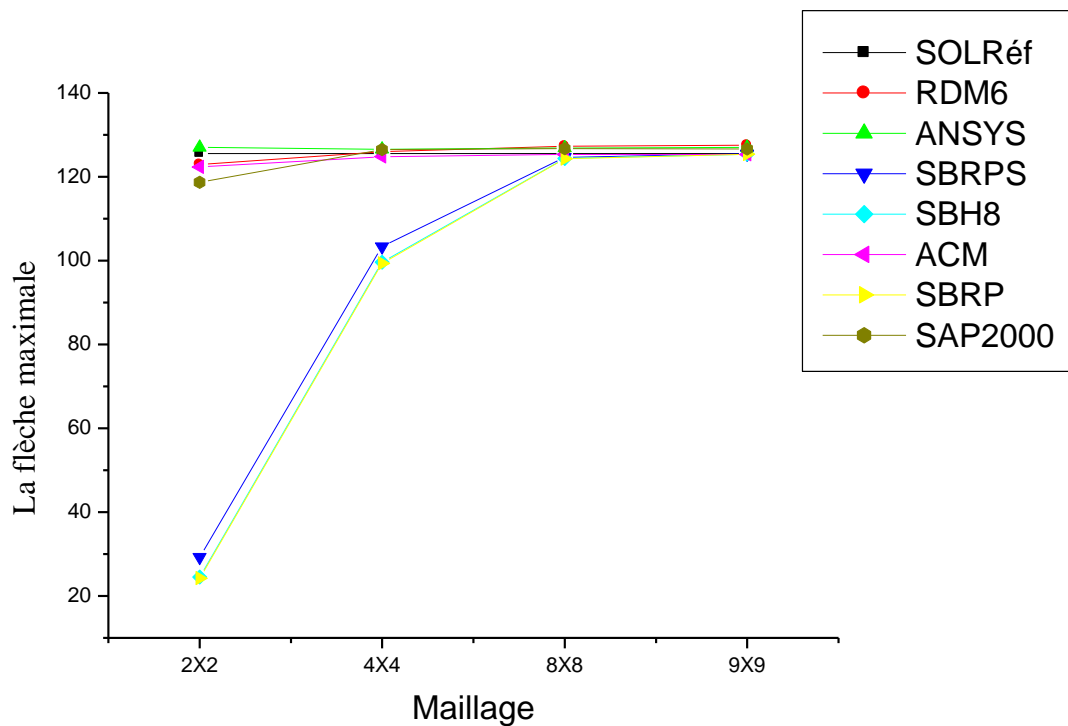
V. 6.2.1.1.3 Représentation graphique du logiciel RDM 6



(Figure. V.15) : Présentation graphique par RDM 6 d'une plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres ($C.C.C.L$; $L = 10, h = 0.4, P = 1000, \nu = 0,3, E = 3600$)

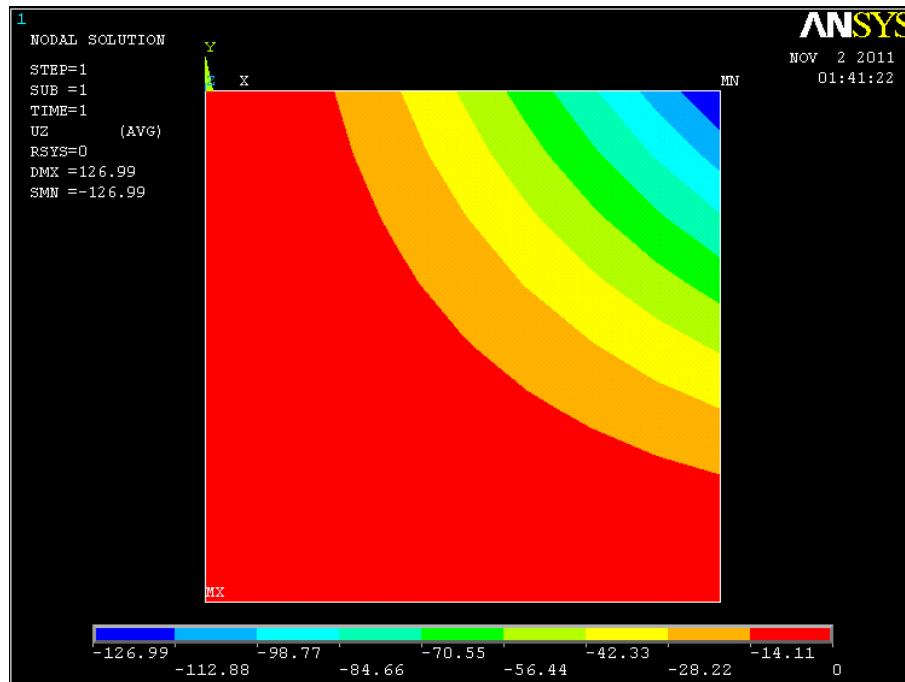
Maillage	Flèche maximale						
	SBH8	SBRP	ACM	SBRPS	ANSYS	SAP 2000	RDM6
2X2	24,515	24,247	122,3	29,27	127,00	118,72	122,9
4X4	99,631	99,374	124,8	103,34	126,55	126,48	126,0
8X8	124,37	124,323	125,3	124,66	126,86	126,7	127,3
9X9	125,41	125,368	125,3	125,49	126,99	126,64	127,5
Solution de réf.[POZ]	125,52						

(Tableau V.3) : Plaque carrée à deux bords encastés et les deux autres libres.
 Convergence de la flèche maximale ($C.C.C.L$; $L = 10, h = 0.4,$
 $P = 100, \nu = 0, E = 3600$)



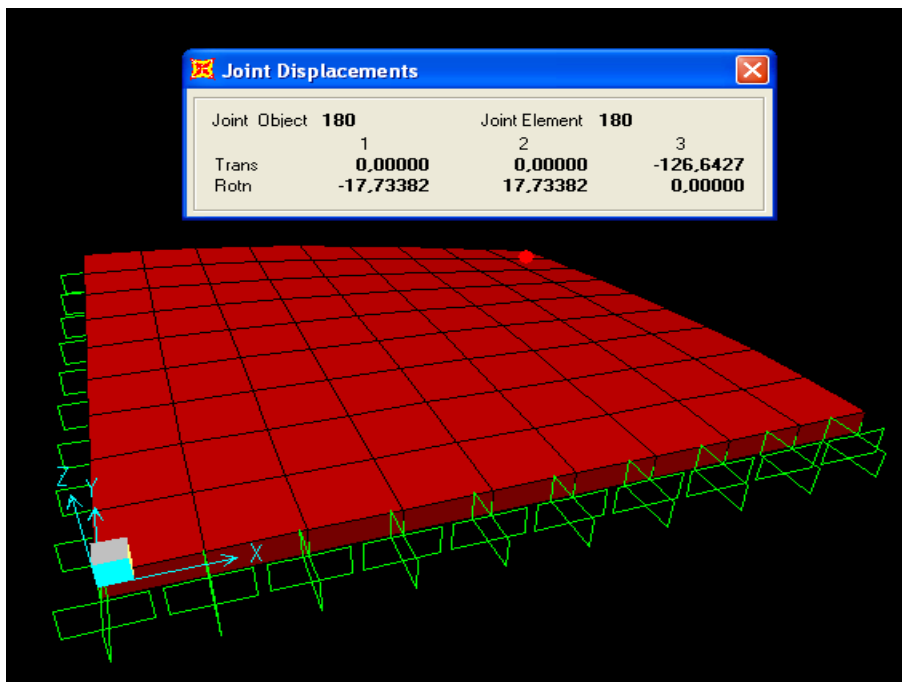
(Figure .V.16) : Présentation des résultats pour une plaque $C.C.C.L$

V. 6.2.1.1.4 Représentation graphique du logiciel ANSYS



(Figure. V.17) : Présentation graphique par ANSYS d'une plaque carrée à deux bords encastés et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale ($C.C.C.L$; $L = 10, h = 0.4, P = 100, \nu = 0,0, E = 3600$)

V. 6.2.1.1.5 Représentation graphique du logiciel SAP 2000

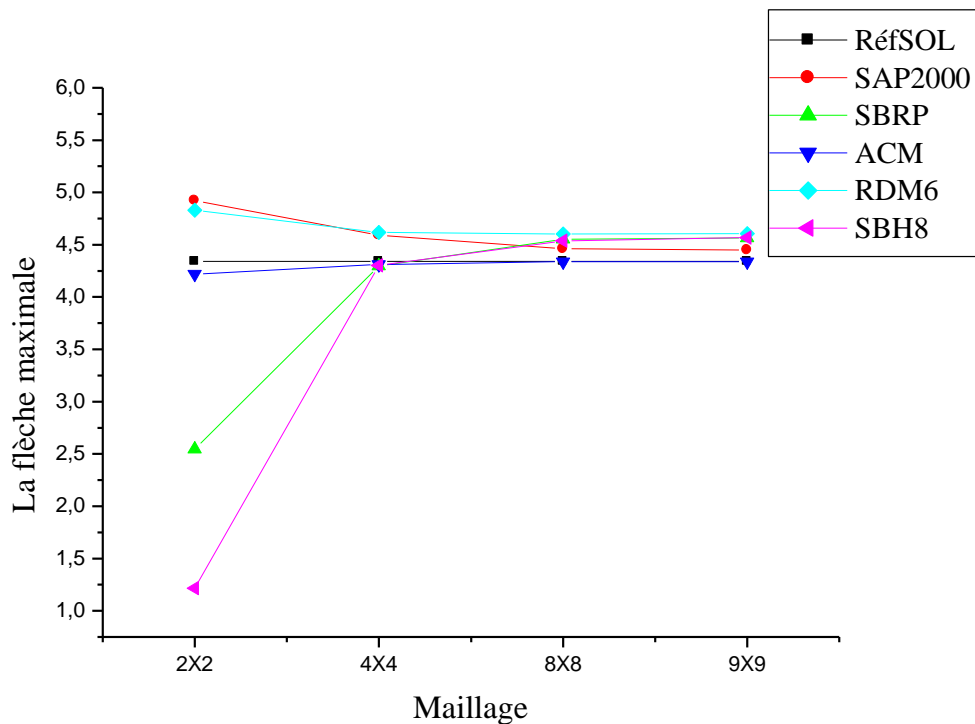


(Figure. V.18) : Présentation graphique par SAP 2000 d'une plaque carrée à deux bords encastés et deux autres libres ($C.C.C.L$; $L = 10, h = 0.4, P = 100, \nu = 0,0, E = 3600$)

V.6.2.2 Flexion d'une plaque carrée sous charge uniformément répartie

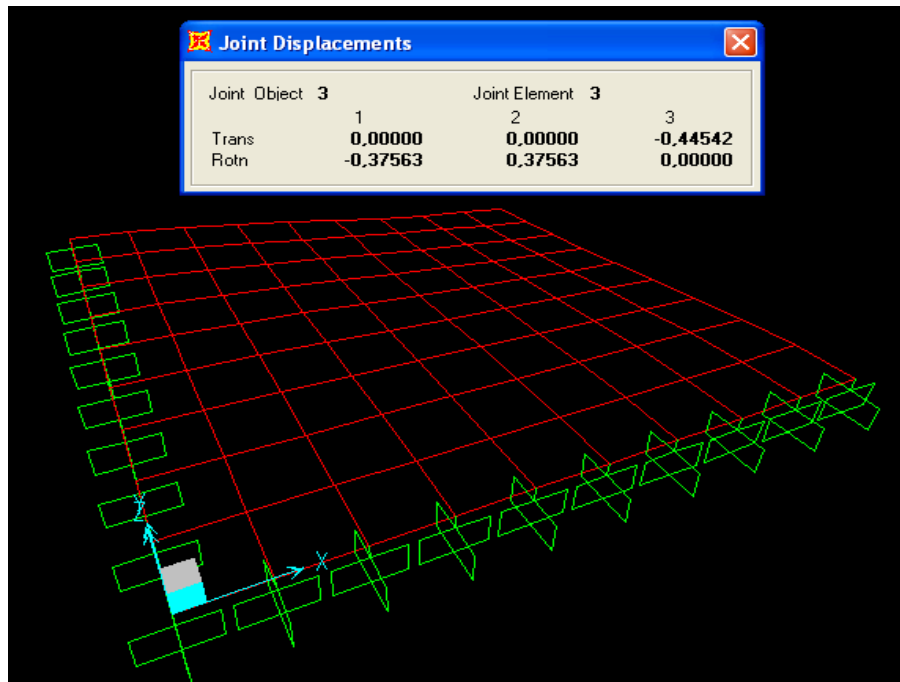
Maillage	Flèche maximale x 10				
	SBH8	SBRP	ACM	SAP 2000	RDM6
2X2	1,215	2,544	4,22	4,92	4,83
4X4	4,302	4,296	4,31	4,59	4,617
8X8	4,537	4,553	4,337	4,46	4,604
9X9	4,568	4,565	4,338	4,45	4,607
Solution de réf.[POZ]	4,3404				

(Tableau .V.4) : Plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres.
 Convergence de la flèche maximale ($C.U$; $L = 1, h = 0.1,$
 $Q = 1, \nu = 0, E = 1000$)



(Figure .V.19) : Présentation des résultats pour une plaque $C.U$

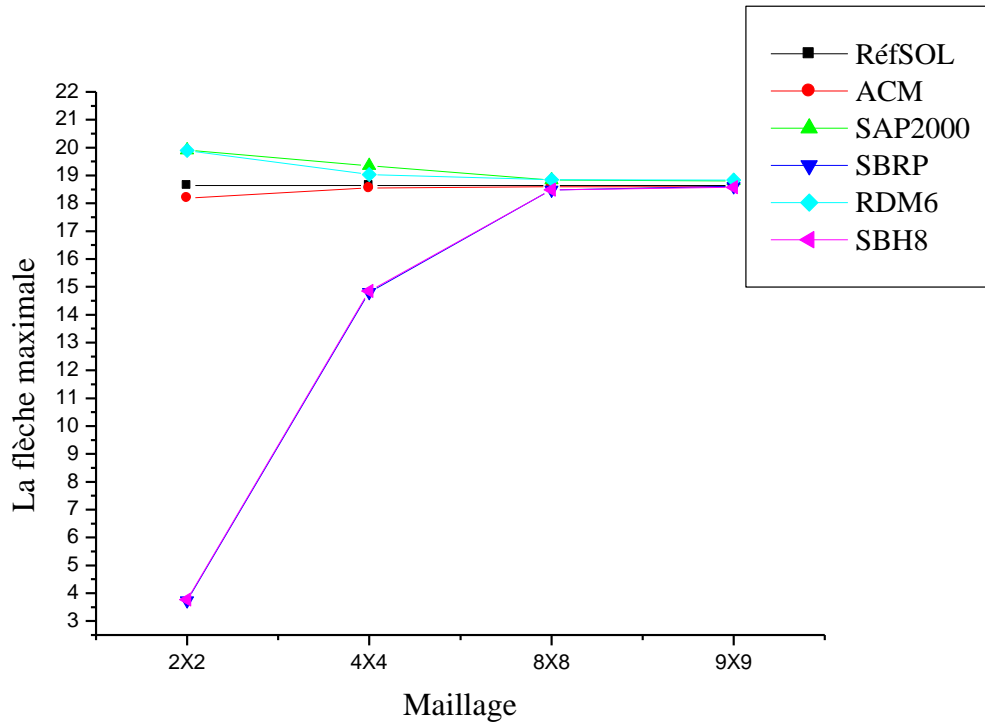
V. 6.2.2.2.1 Représentation graphique du logiciel SAP 2000



(Figure. V.20) : Présentation graphique par SAP 2000 d'une plaque carrée à deux bords encastés et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale ($C.U; L = 1, h = 0.1, Q = 1, \nu = 0, E = 1000$)

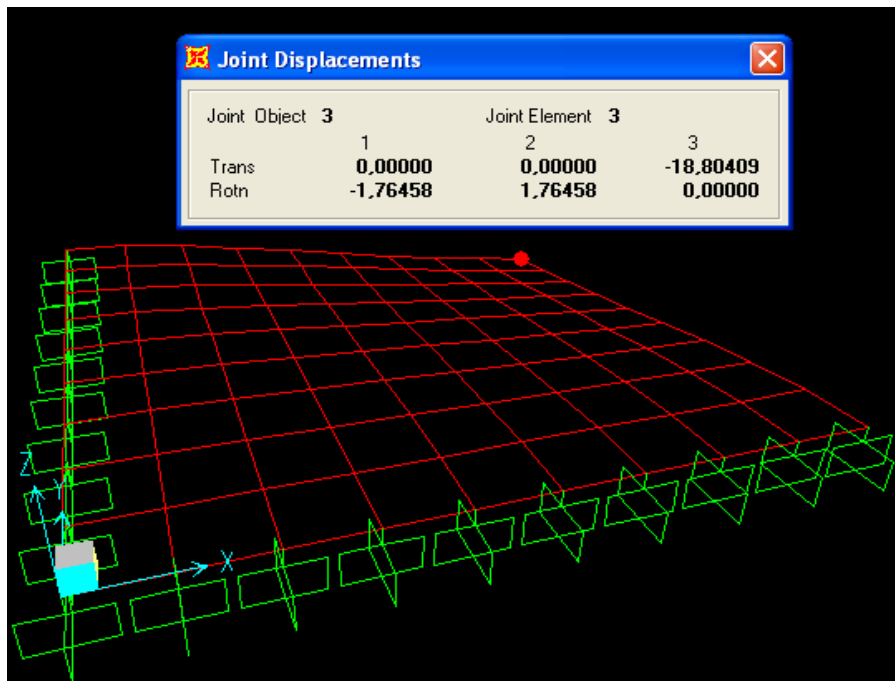
Maillage	Flèche maximale				
	SBH8	SBRP	ACM	SAP 2000	RDM6
2X2	3,775	3,735	18,19	19,91	19,90
4X4	14,850	14,811	18,55	19,35	19,03
8X8	18,489	18,483	18,59	18,84	18,85
9X9	18,571	18,604	18,60	18,80	18,84
Solution de réf.[POZ]	18,64				

(Tableau V.5) : Plaque carrée à deux bords encastés et les deux autres libres. Convergence de la flèche maximale ($C.U; L = 10, h = 0.4, Q = 0,9, \nu = 0,3, E = 3600$)



(Figure .V.21) : Présentation des résultats de la flexion d'une plaque $C. U$

V. 6.2.2.2 Représentation graphique du logiciel SAP 2000



(Figure. V.22) : Présentation graphique par SAP 2000 d'une plaque carrée à deux bords encastrés et les deux autres libres ($C. U$; $L = 10, h = 0.4, Q = 0,9, \nu = 0,3, E = 3600$)

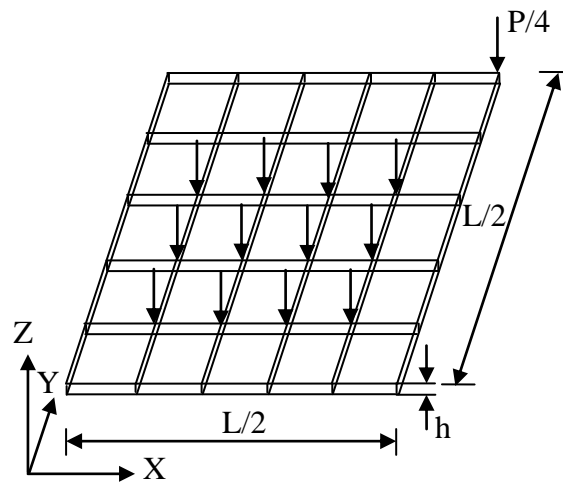
V.6.3 Flexion d'une plaque carrée avec diverses conditions

Pour simplifier la lecture, nous adoptons les notations suivantes:

- PSA_CU : Plaque Simplement Appuyée sous Charge Uniforme.
- PSA_CCC : Plaque Simplement Appuyée sous Charge Concentrée au Centre.
- PE_CU : Plaque Encastrée sous Charge Uniforme.
- PE_CCC : Plaque Encastrée sous Charge Concentrée au Centre.

Il est inutile de préciser les unités à cause des rapports adimensionnels.

On représente le maillage le plus fin du quart de la plaque (figure V.10).



(Figure V.23) : Maillage du quart de la plaque.

Les résultats de la flèche adimensionnelle obtenus au centre pour divers schémas de maillage sont donnés sous formes de graphes, notre étude sera limitée à la modélisation d'un quart de la plaque pour des raisons de symétrie.

V.6.3.1 Flexion d'une plaque mince ($L/h = 100$)

Pour différents maillages du quart de la plaque, la convergence de la flèche adimensionnelle maximale obtenue au centre est tracée sous forme de graphes.

Les résultats sont comparés à la solution analytique donnée par Timoshenko.

V.6.3.1.1 Plaque encadrée sous charge concentrée au centre

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Maillage	Flèche maximale $((WD/PL^2).10000)$						
	SBH8	SBRP	SBRPS	ACM	SAP 2000	RDM6	ANSYS
2X2	1,078	1,064	1,518	61,337	106,227	65,476	51,036
4X4	24,204	24,039	25,183	58,022	80,586	61,666	55,099
8X8	51,216	51,183	48,897	56,722	65,934	57,802	56,028
10X10	53,531	53,513	53,692	56,538	56,41	56,19	56,145
Solution de Kirchhoff	56,0						

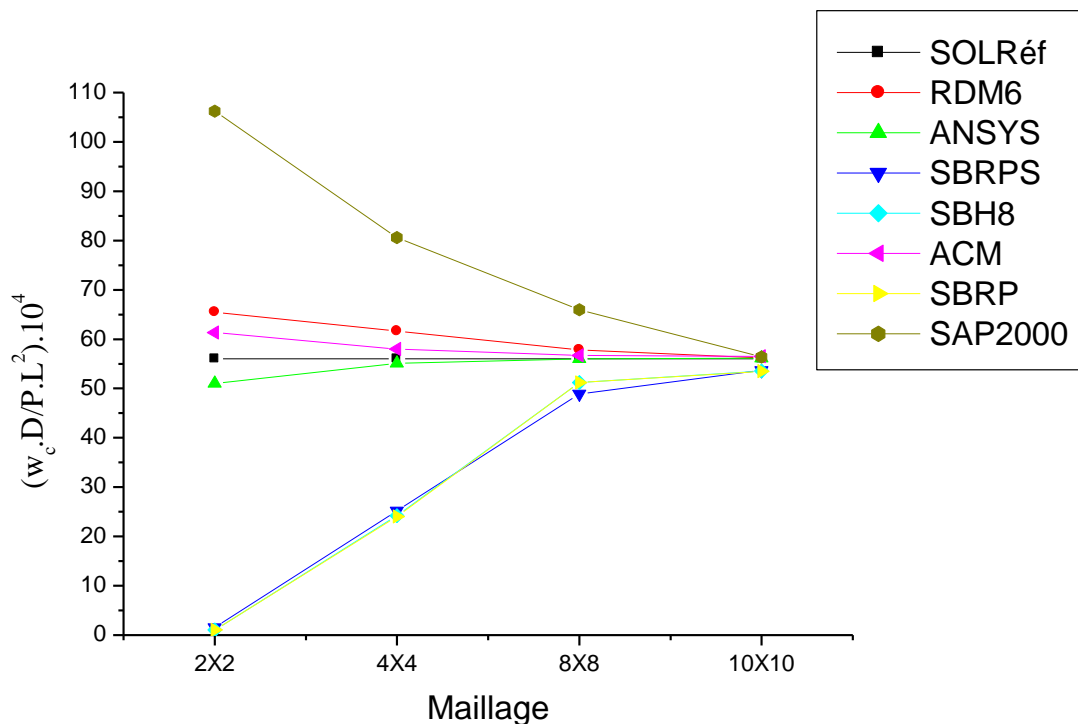
(Tableau V.6) : Plaque carrée à deux bords encadrés sous charge concentrée au centre.

Convergence de la flèche maximale ($PE_CCC; L = 20, h = 0.2,$

$P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)

La solution analytique est donnée par l'équation suivante :

PE_CCC plaque mince : ($W_{ref} = 5,6 \cdot 10^{-3} \frac{PL^2}{D}$)

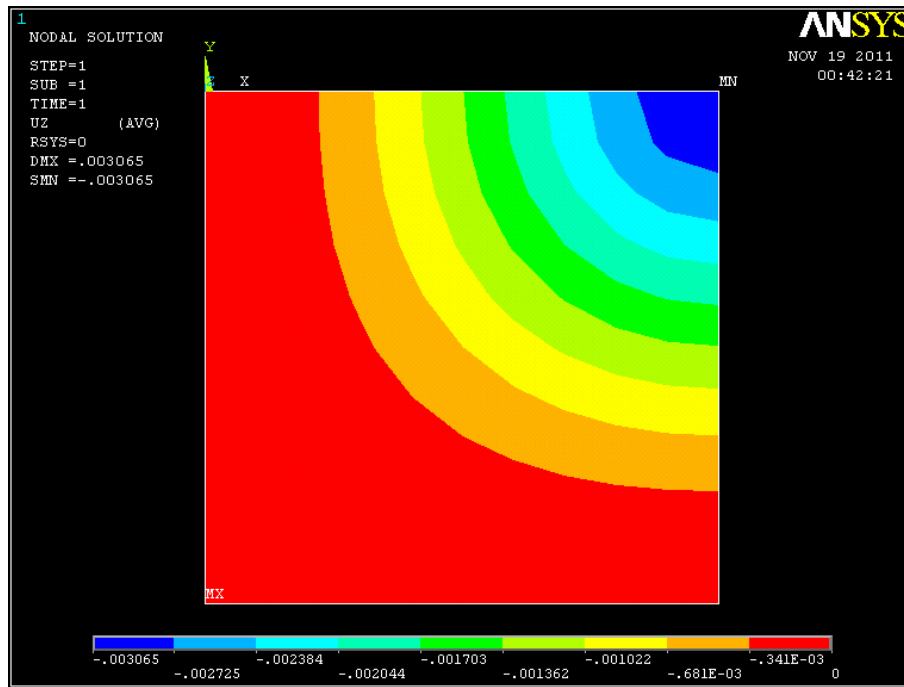


(Figure .V.24) : Présentation des résultats de la flèche maximale pour

une plaque mince ($PE_CCC; L = 20, h = 0.2,$

$P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)

V.6.3.1.1 Représentation graphique du logiciel ANSYS



(Figure .V.25) : Présentation graphique par ANSYS du quart de la plaque mince ($PE_CCC; L = 20, h = 0.2, P = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)

V.6.3.1.2 Plaque encastée sous charge uniformément répartie

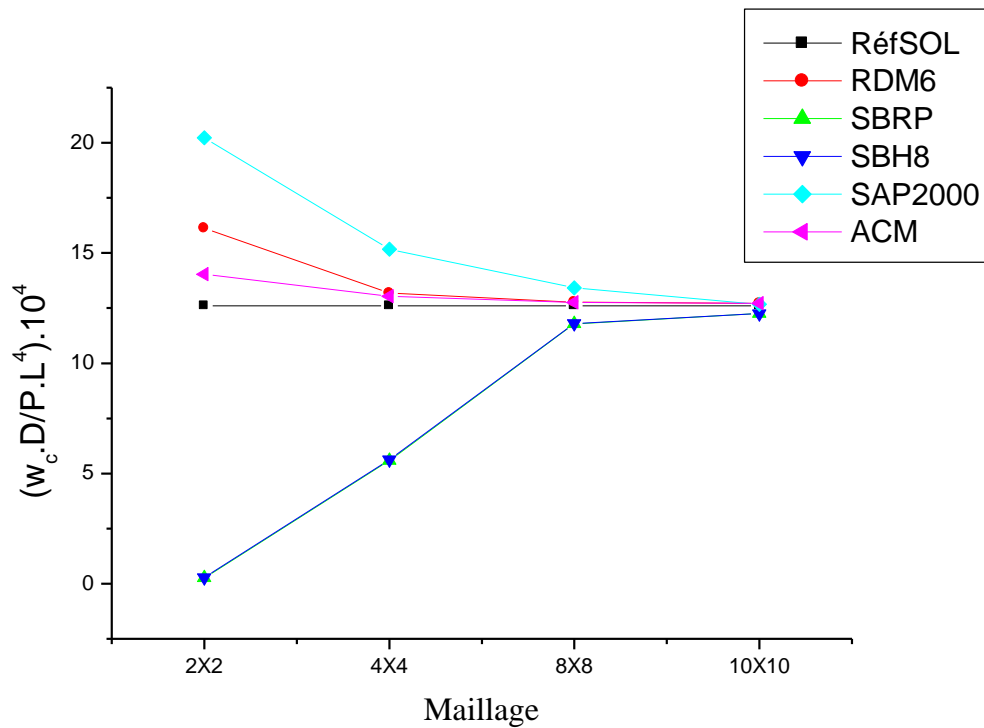
Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Maillage	Flèche maximale $((WD/PL^4).10000)$				
	SBH8	SBRP	ACM	SAP 2000	RDM6
2X2	0,273	0,270	14,034	20,228	16,122
4X4	5,623	5,584	13,04	15,169	13,182
8X8	11,797	11,789	12,752	13,42	12,778
10X10	12,253	12,25	12,715	12,674	12,7106
Solution de Kirchhoff	12,6				

(Tableau V.7) : Plaque carrée à deux bords encastés sous charge uniformément répartie
 Convergence de la flèche maximale ($PE_CU; L = 20, h = 0.2, Q = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)

La solution analytique est donnée par l'équation suivante :

PE_CU plaque mince : $(W_{ref} = 1,26 \cdot 10^{-3} \frac{qL^4}{D})$



(Figure .V.26) : Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque mince (PE_{CU} ; $L = 20, h = 0.2,$
 $P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)

V.6.3.1.3 Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre

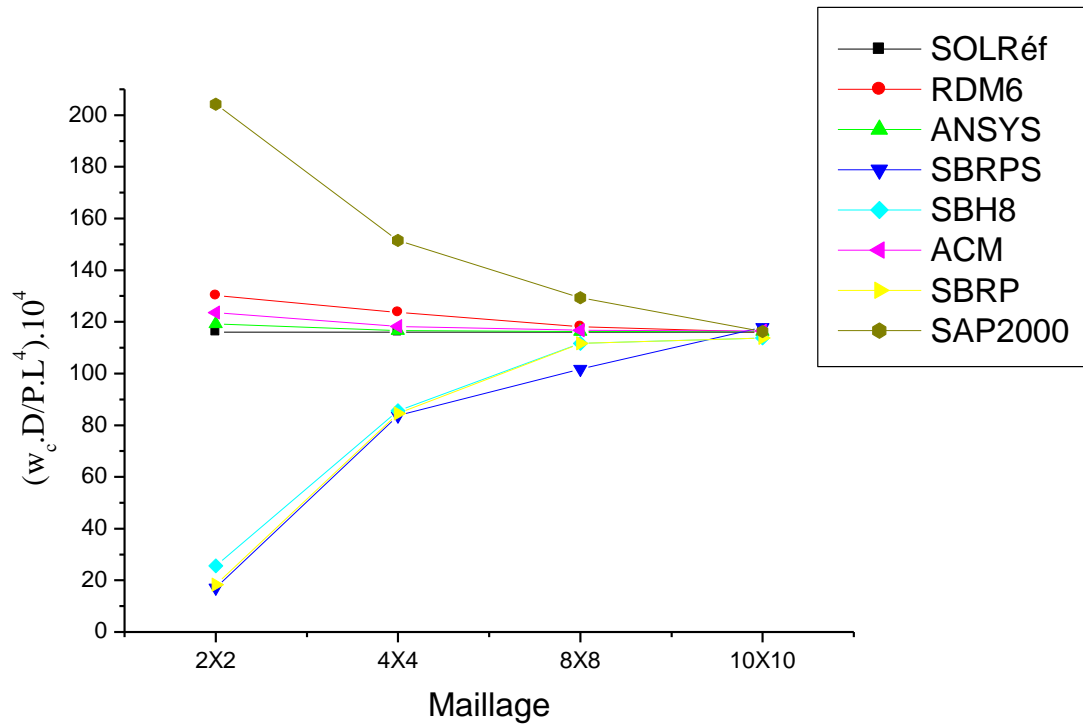
Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Maillage	Flèche maximale $((WD/PL^2).10000)$						
	SBH8	SBRP	SBRPS	ACM	SAP 2000	RDM6	ANSYS
2X2	25,566	18,284	17,092	123,553	204,212	130,146	119,251
4X4	85,63	84,496	83,712	118,297	151,465	123,645	116,601
8X8	111,674	111,641	101,809	116,703	129,304	118,15	116,287
10X10	113,756	113,74	117,967	116,465	116,30	116,062	116,265
Solution de Kirchhoff	116,0						

(Tableau V.8) : Plaque carrée à deux bords simplement appuyées sous charge concentrée au centre. Convergence de la flèche maximale (PSA_{CCC} ; $L = 20, h = 0.2,$
 $P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)

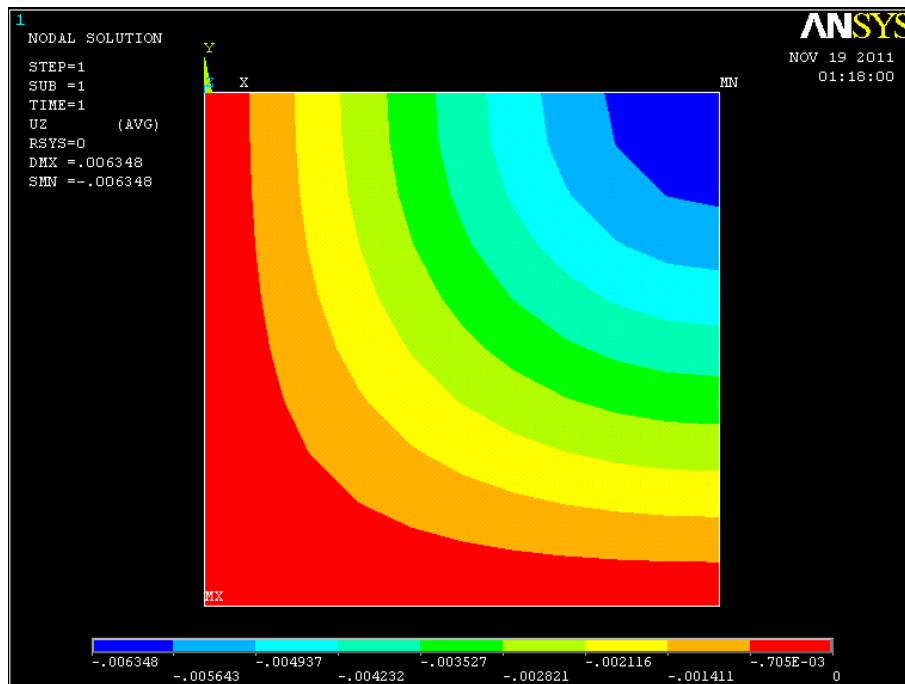
La solution analytique est donnée par l'équation suivante :

PSA_{CCC} plaque mince : $(W_{ref} = 11,6 \cdot 10^{-3} \frac{PL^2}{D})$



(Figure .V.27) : Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque mince ($PSA_CCC; L = 20, h = 0.2, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)

V.6.3.1.3.1 Représentation graphique du logiciel ANSYS



(Figure .V.28) : Présentation graphique par ANSYS du quart de la plaque mince ($PSA_CCC; L = 20, h = 0.2, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)

V.3.1. 4 Plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie

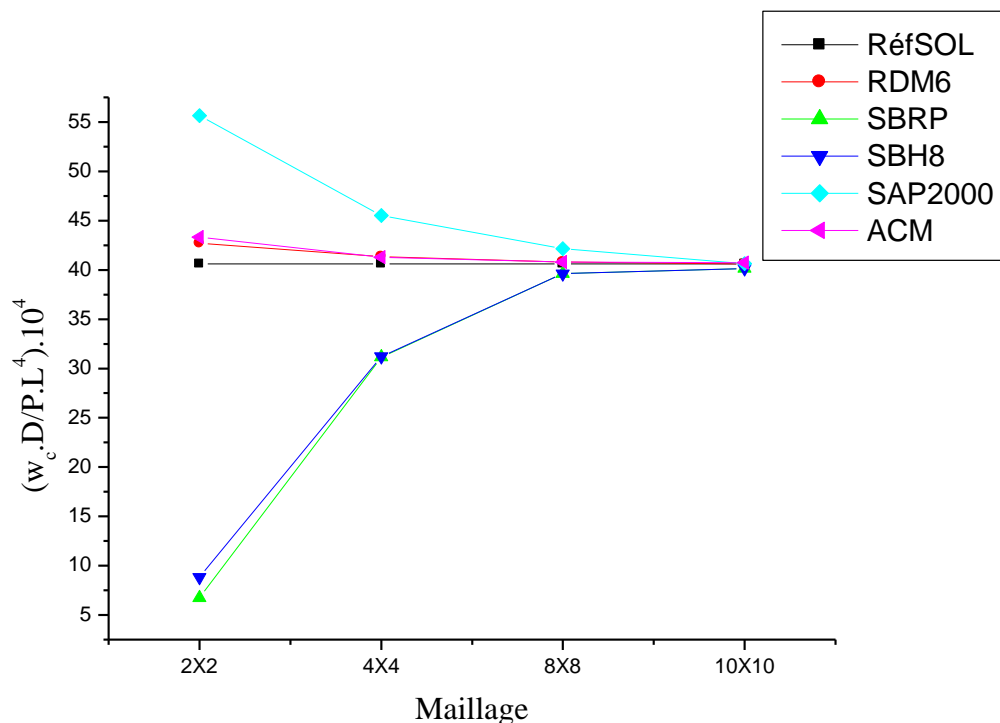
Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Maillage	Flèche maximale $((WD/PL^4).10000)$				
	SBH8	SBRP	ACM	SAP 2000	RDM6
2X2	8,817	6,733	43,338	55,65	42,72
4X4	31,235	31,151	41,296	45,53	41,34
8X8	39,628	39,616	40,792	42,14	40,8
10X10	40,157	40,153	40,733	40,65	40,62
Solution de Kirchhoff	40,62				

(Tableau V.9) : Plaque carrée à deux bords simplement appuyées sous charge uniformément répartie Convergence de la flèche maximale (PSA_{CU} ; $L = 20, h = 0.2, Q = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)

La solution analytique est donnée par l'équation suivante :

$$PSA_{CU} \text{ plaque mince : } (W_{ref} = 4,062 \cdot 10^{-3} \frac{qL^4}{D})$$



(Figure V.29) : Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque mince (PSA_{CU} ; $L = 20, h = 0.2, P = 1, \nu = 0.3, E = 10^6$)

V.6.3.2 Flexion d'une plaque épaisse carrée ($L/h = 10$)

Les mêmes tests ont été effectués pour les plaques épaisses, d'éclatement 10.

La convergence de la flèche maximale est montrée ci-dessous.

V.6.3.2.1 Plaque encadrée sous charge concentrée au centre

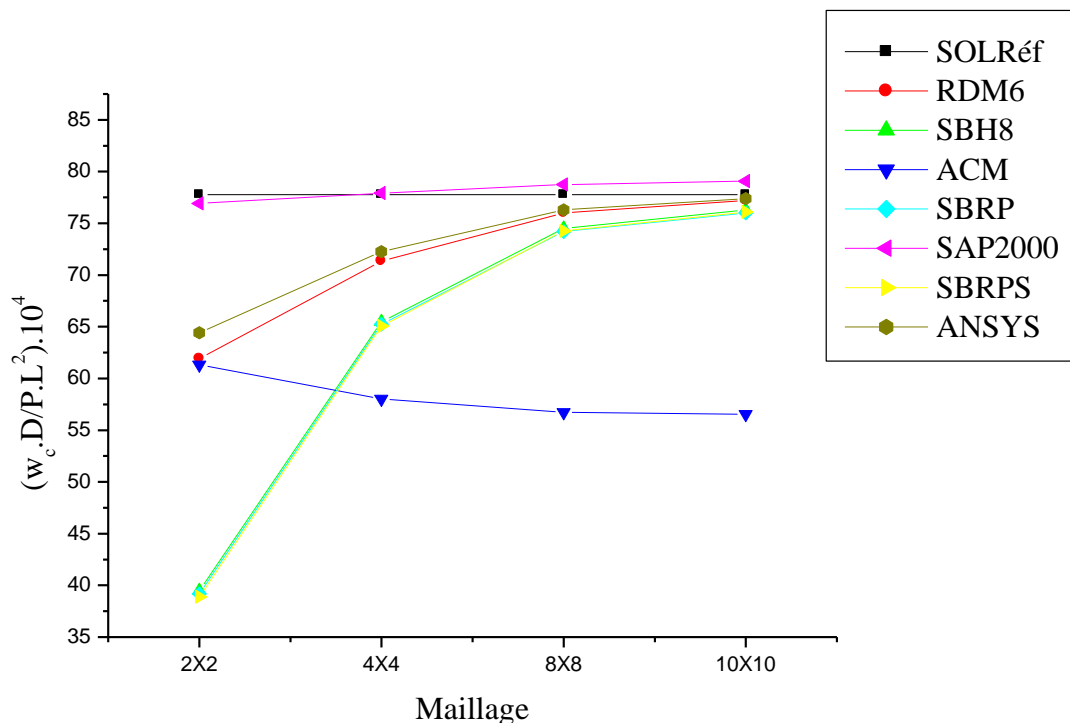
Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Maillage	Flèche maximale ($(WD/PL^2).10000$)						
	SBH8	SBRP	SBRPS	ACM	SAP 2000	RDM6	ANSYS
2X2	39,486	39,20	38,879	61,337	76,923	61,923	64,427
4X4	65,482	65,236	65,082	58,022	77,93	71,337	72,255
8X8	74,492	74,212	74,253	56,722	78,736	76,001	76,287
10X10	76,294	76,00	76,08	56,538	79,066	77,216	77,402
Solution de Réf.[11]	77,77						

(Tableau V.10) : Plaque carrée à deux bords encadrés sous charge concentrée au centre.

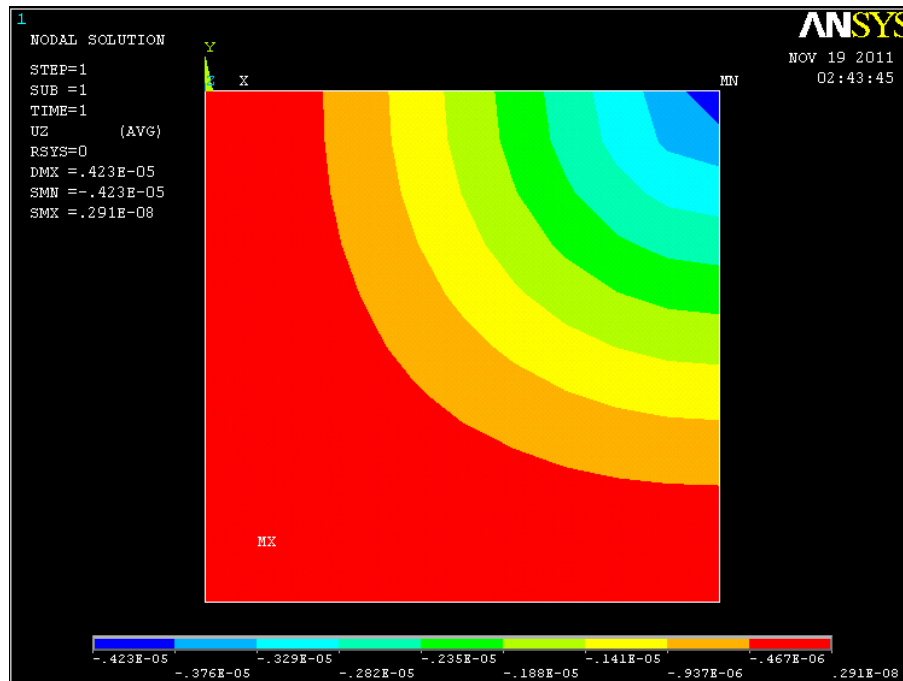
Convergence de la flèche maximale ($PE_CCC; L = 20, h = 2.0,$

$P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)



(Figure V.30) : Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque épaisse ($PE_CCC; L = 20, h = 2.0, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)

V.6.3.2.1 Représentation graphique du logiciel ANSYS



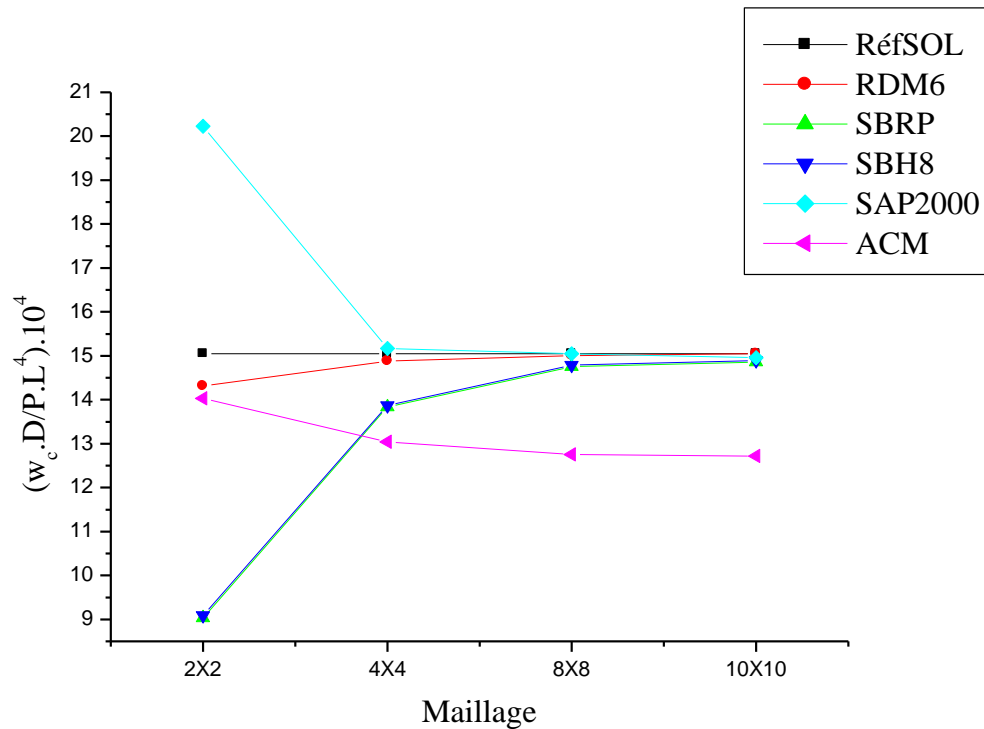
(Figure .V.31) : Présentation graphique par ANSYS du quart de la plaque épaisse ($PE_CCC; L = 20, h = 2.0, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)

V.6.3.2.2 Plaque encastée sous charge uniformément répartie

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Maillage	Flèche maximale $((WD/PL^4).10000)$				
	SBH8	SBRP	ACM	SAP 2000	RDM6
2X2	9,089	9,033	14,034	20,229	14,308
4X4	13,871	13,837	13,04	15,169	14,881
8X8	14,789	14,757	12,752	15,046	15,005
10X10	14,894	14,862	12,715	14,959	15,046
Solution de Référence	15,046				

(Tableau V.11) : Plaque carrée à deux bords encastés sous charge uniformément répartie convergence de la flèche maximale ($PE_CU; L = 20, h = 2.0, Q = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)



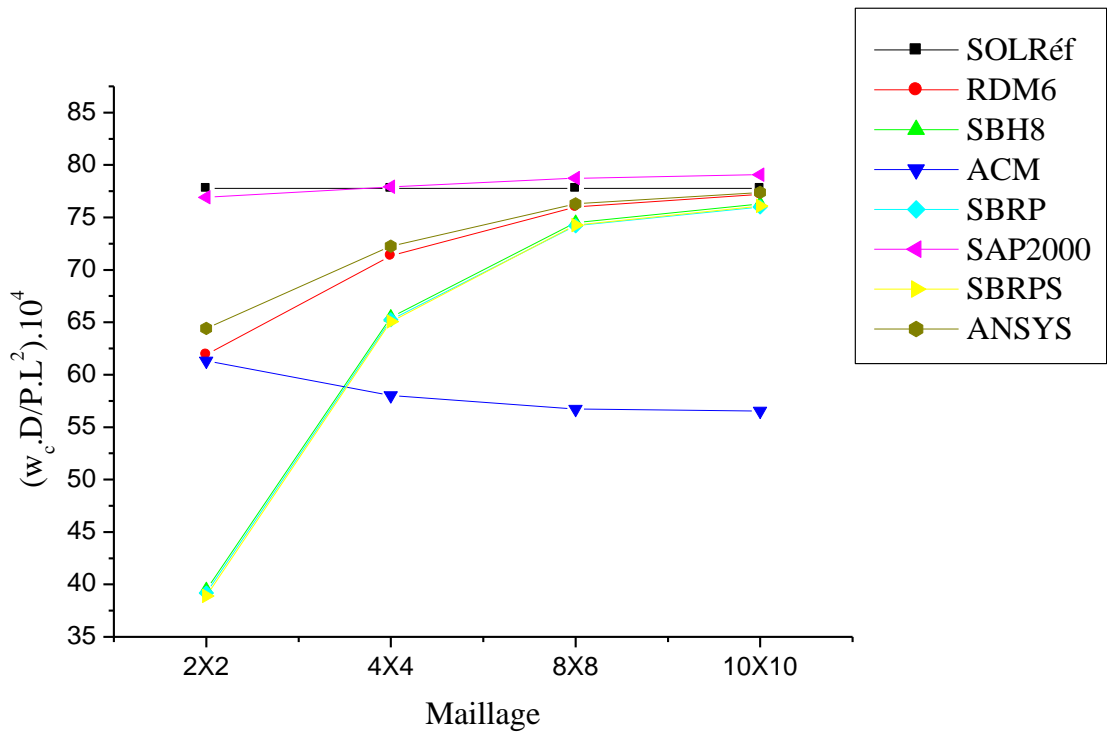
(Figure V.32) : Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque épaisse (PE_CU ; $L = 20, h = 2.0, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)

V.6.3.2.3 Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

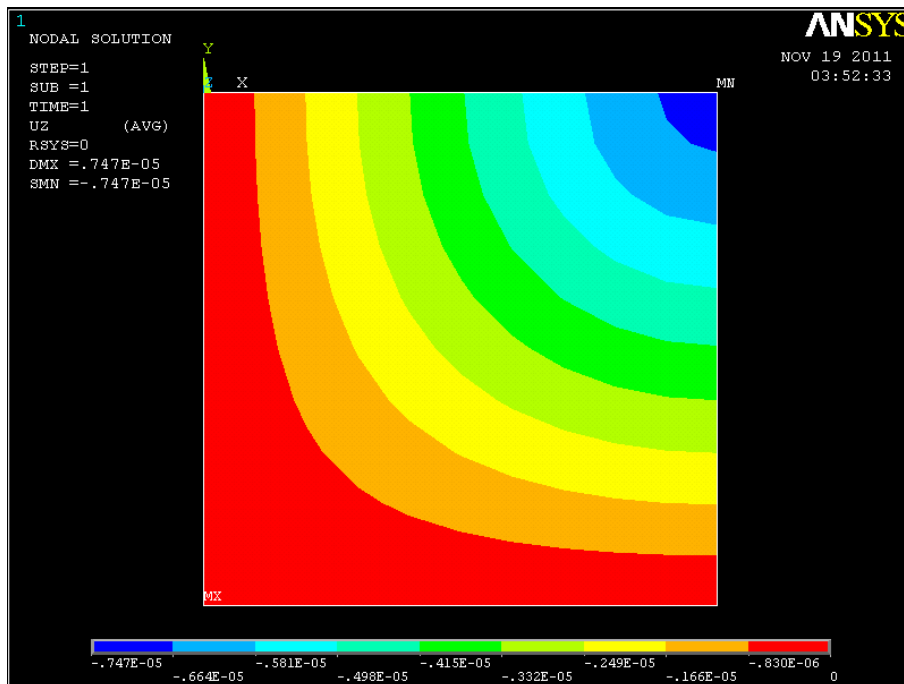
Maillage	Flèche maximale ($(WD/PL^2).10000$)						
	SBH8	SBRP	SBRPS	ACM	SAP 2000	RDM6	ANSYS
2X2	106,336	106,04	103,762	123,553	178,535	133,407	132,694
4X4	130,142	129,855	129,291	118,297	151,447	137,198	132,694
8X8	140,198	139,877	134,028	116,703	143,645	141,978	135,826
10X10	142,254	141,914	142,832	116,465	143,095	143,315	136,78
Solution de Réf.[11]	144,267						

(Tableau V.12) : Plaque carrée à deux bords simplement appuyées sous charge concentrée au centre, convergence de la flèche maximale (PSA_CCC ; $L = 20, h = 2.0, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)



(Figure V.33) : Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque épaisse (PSA_CCC; $L = 20, h = 2.0, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)

V.6.3.2.3.1 Représentation graphique du logiciel ANSYS



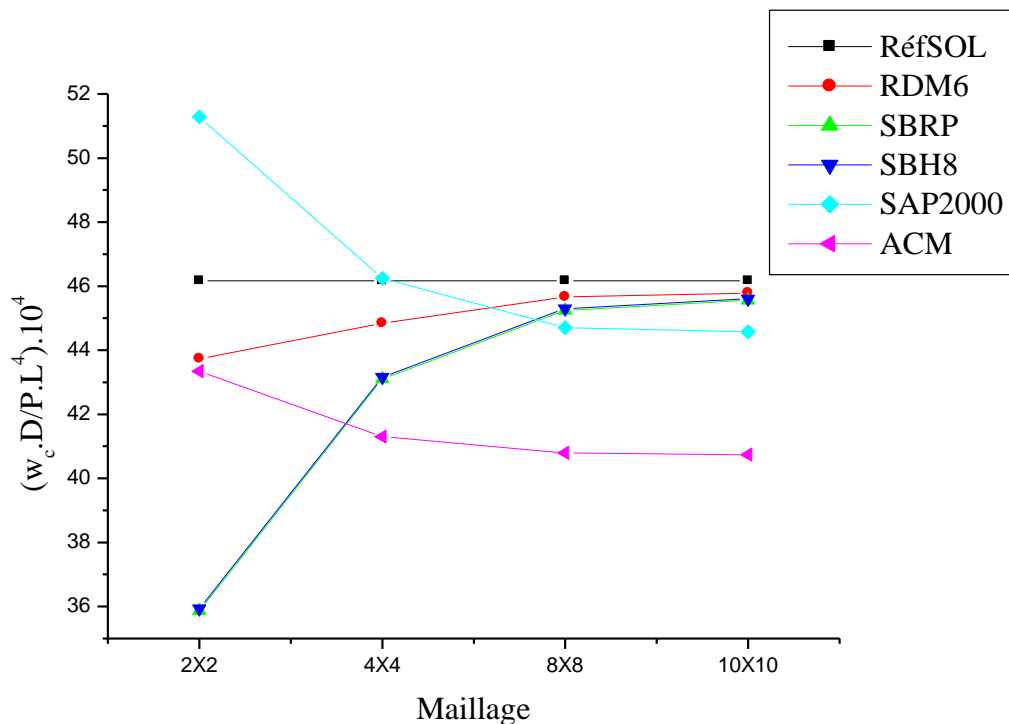
(Figure V.34) : Présentation graphique par ANSYS du quart de la plaque épaisse (PSA_CCC; $L = 20, h = 2.0, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)

V.6.3.2.4 Plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Maillage	Flèche maximale $((WD/PL^4).10000)$				
	SBH8	SBRP	ACM	SAP 2000	RDM6
2X2	35,935	35,869	43,338	51,282	43,732
4X4	43,161	43,106	41,296	46,245	44,84
8X8	45,299	45,245	40,792	44,710	45,659
10X10	45,609	45,555	40,733	44,574	45,788
Solution de Référence	46,169				

(Tableau V.13) : Plaque carrée à deux bords simplement appuyées sous charge uniformément répartie, convergence de la flèche maximale (PSA_{CU} ; $L = 20, h = 2.0, Q = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)



(Figure .V.35) : Présentation des résultats de la flèche maximale pour une plaque épaisse (PSA_{CU} ; $L = 20, h = 2.0, Q = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)

V.6.3.3 Analyse et interprétation

Les résultats numériques obtenus et montrés dans les figures. V.12, V.16, V.19 et V.21, présentent une satisfaction importante, car lorsque le maillage de la plaque devient de plus en plus fini, les résultats de la simulation pour les éléments SBH8, SBRP et la variante SBRPS, convergent suffisamment vers ceux de référence et plus rapidement que l'élément ACM.

Les éléments SBH8 et SBRP et la variante SBRPS se comportent bien, que ce soit en plaques minces ou épaisses (aucun phénomène de blocage en CT).

La variante SBRPS qu'on a formulé, donne de bons résultats (valeur mieux que celle donnée par SBRP) dans l'exemple d'une console sous charge concentrée à l'extrémité avec le rapport $\frac{L}{h} = 100$ (Tableau .V.1), la différence entre la valeur de la solution analytique et celle donnée par la variante SBRPS est de 0,01%, par contre, pour l'élément SBRP est de 0,08%.

Dans le cas d'une plaque carrée à deux bords encastés et les deux autres libres sous charge concentrée à l'extrémité ($L = 10, h = 0.4, P = 100, \nu = 0,3, E = 3600$) avec le rapport $\frac{L}{h} = 25$ (Figure .V.12), la différence entre la valeur de la solution de référence et celle donnée par la variante SBRPS pour un maillage de 2X2 est de 73,756 %, par contre celle de l'élément SBRP pour le même maillage est de 79,44 %, d'autre part, et pour un maillage plus fin de 9X9, la variante SBRPS a donnée un pourcentage d'erreur de 0,1222%, par contre celle donnée par l'élément SBRP est de 0,238 %.

En gardant les mêmes caractéristiques du test précédent, sauf qu'un changement dans la valeur du module du Young ($\nu = 0,0$), (Figure .V.16), la différence entre la valeur de la solution de référence et celle donnée par la variante SBRPS pour un maillage de 2X2 est de 76,681 %, par contre celle de l'élément SBRP pour le même maillage est de 80,683 %, d'autre part, et pour un maillage plus fin de 9X9, la variante SBRPS a donnée un pourcentage d'erreur de 0,0239 %, par contre celle donnée par l'élément SBRP est de 0,1211 %.

Dans le cas d'un quart de la plaque mince encastée sous charge concentrée à l'extrémité ($PE_CCC; L = 20, h = 0.2, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$) avec le rapport $\frac{L}{h} = 100$ (Figure.V.24), la différence entre la valeur de la solution de référence et celle donnée par la variante SBRPS pour un maillage de 2X2 est de 97,289 %, par contre celle de l'élément SBRP pour le même maillage est de 98,1 %, d'autre part, et pour un maillage plus fin de 10X10, la variante SBRPS a donnée un pourcentage d'erreur de 4,121%, par contre celle donnée par l'élément SBRP est de 4,441 %.

Dans le cas d'un quart de la plaque mince simplement appuyée sous charge concentrée à l'extrémité ($PSA_CCC; L = 20, h = 0.2, P = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$) avec le rapport $\frac{L}{h} = 100$ (Figure.V.27), la différence entre la valeur de la solution de référence et celle donnée par la variante SBRPS pour un maillage plus fin de 10X10 est de 1,695 %, par contre celle donnée par l'élément SBRP est de 1,948 %.

En gardant les mêmes caractéristiques des deux tests précédents, sauf qu'un changement dans la valeur de l'épaisseur ($h = 2,0$, plaque épaisse encastrée $\frac{L}{h} = 10$), (Figure .V.28, V.30), la différence entre la valeur de la solution de référence et celle donnée par la variante SBRPS pour un maillage de 2X2 est de 50,008 %, par contre celle de l'élément SBRP pour le même maillage est de 49,595 %, d'autre part, et pour un maillage plus fin de 10X10, la variante SBRPS a donnée un pourcentage d'erreur de 2,173 %, par contre celle donnée par l'élément SBRP est de 2,276 %.

Dans le Figure .V.31, V.33 et pour une plaque épaisse simplement appuyée $\frac{L}{h} = 10$, la différence entre la valeur de la solution de référence et celle donnée par la variante SBRPS pour un maillage de 2X2 est de 28,076 %, par contre celle de l'élément SBRP pour le même maillage est de 26,497 %, d'autre part, et pour un maillage plus fin de 10X10, la variante SBRPS a donnée un pourcentage d'erreur de 0,994 %, par contre celle donnée par l'élément SBRP est de 1,631 %.

Les résultats obtenus à l'aide des logiciels ANSYS et SAP2000 montrent clairement une excellente convergence dans l'analyse des plaques épaisses ou minces.

L'utilisation du logiciel RDM6 nécessite un raffinement du maillage; pour obtenir la solution analytique souhaitée, vu l'utilisation de l'élément DKQ (Discrete Kirchhoff Quadrilatéral).

Conclusion : Ces résultats illustrent la stabilité, l'efficacité et la bonne performance, la convergence monotone des éléments SPH8, SBRP et pour la variante SBRPS pour les plaques minces et épaisses; Par contre, pour l'élément ACM standard, la précision est toujours largement insuffisante, il est très sensible au phénomène de blocage en cisaillement transversal dans le cas des plaques épaisses ($L/h=10$).

La variante étudiier (SBRPR) a l'avantage d'étudier le problème de flexion des plaques minces où épaisse de manière économique (car ne nécessitant pas un raffinement important du maillage, vu qu'un maillage de 10X10 peut nous donner une convergence satisfaisante par rapport aux solutions de référence et cela pour la totalité des tests réalisés). Il met en évidence l'effet des constantes de contraintes planes, et l'effet de cisaillement transversal.

V.6.4 Effet de cisaillement transversal sur la flèche

Nous avons étudié l'effet de cisaillement transversal sur la flèche, et cela pour différentes valeurs de l'élancement.

L'effet de cisaillement transversal est vérifié à travers une série de tests qui consistent à évaluer l'influence de l'élancement L/h (longueur/épaisseur) d'une plaque carrée sur la flèche au centre W_c .

Une étude comparative entre les deux éléments SBRP et ACM a été réalisée.

V.6.4.1 Plaque encastrée sous charge concentrée au centre

PE_CCC plaque mince : ($W_{ref} = 5,6 \cdot 10^{-3} \frac{PL^2}{D}$)

L/h		5	10	20	40	50	100
$\frac{W_c}{W_{réf}}$	SBRP	2,4835	1,3570	1,0691	0,9934	0,9826	0,9556
	ACM	0,01352	0,1082	0,8654	1,0093	1,0094	1,0096

(Tableau V.14) : Plaque encastrée sous charge concentrée au centre

V.6.4.2 Plaque encastrée sous charge uniformément répartie

PE_CU plaque mince : ($W_{ref} = 1,26 \cdot 10^{-3} \frac{qL^4}{D}$)

L/h		5	10	20	40	50	100
$\frac{W_c}{W_{réf}}$	SBRP	1,7115	1,1795	1,0372	0,9980	0,9920	0,9720
	ACM	0,01352	0,1081	0,8653	1,0090	1,0094	1,0091

(Tableau V.15) : Plaque encastrée sous charge uniformément répartie

V.6.4.3 Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre

PSA_CCC plaque mince : ($W_{ref} = 11,6 \cdot 10^{-3} \frac{PL^2}{D}$)

L/h		5	10	20	40	50	100
$\frac{W_c}{W_{réf}}$	SBRP	1,8167	1,2234	1,0548	1,0039	0,9964	0,9805
	ACM	0,0134	0,1076	0,8609	1,0041	1,0040	1,0040

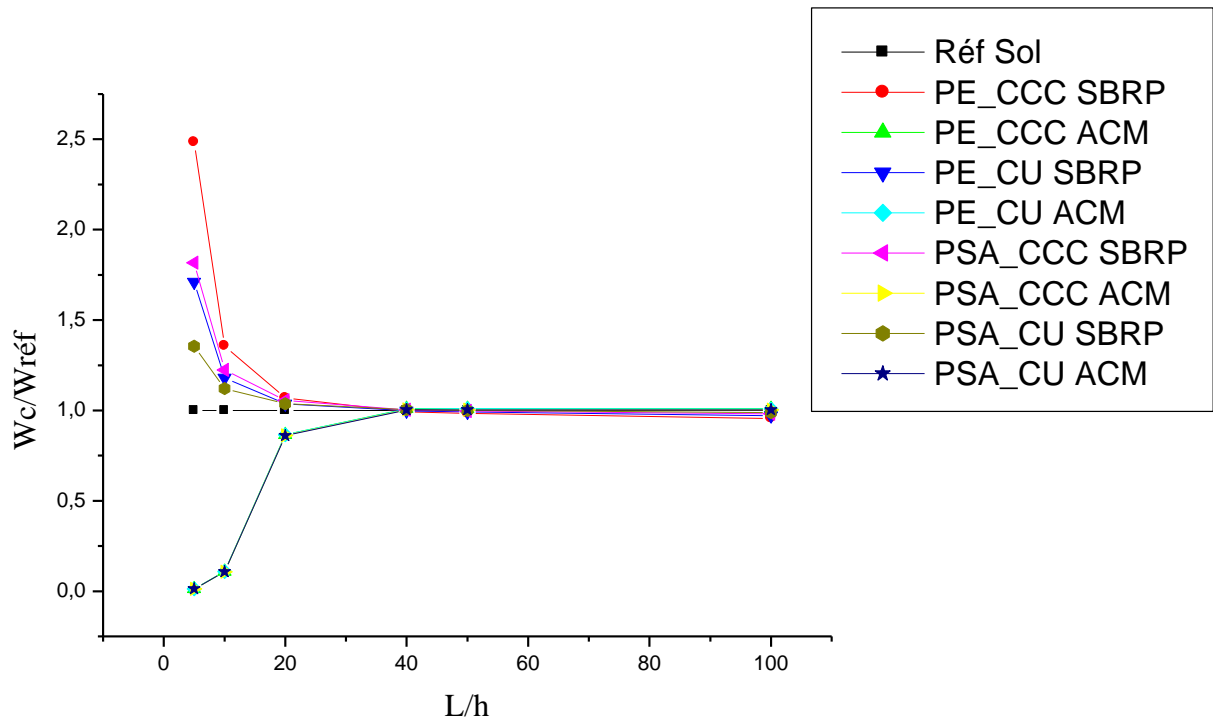
(Tableau V.16) : Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre

V.6.4.4 Plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie

PSA_CU plaque mince : ($W_{ref} = 4,062 \cdot 10^{-3} \frac{qL^4}{D}$)

L/h		5	10	20	40	50	100
$\frac{W_c}{W_{réf}}$	SBRP	1,3545	1,1215	1,0368	1,0049	0,9997	0,9885
	ACM	0,0134	0,1075	0,8598	1,0027	1,0028	1,0028

(Tableau V.17) : Plaque simplement appuyée sous charge uniformément répartie.



(Figure V.36) : Présentation des résultats de l'effet de cisaillement transversal sur la flèche pour les deux éléments SBRP et ACM avec diverses conditions ($PE_CCC, PE_CU, PSA_CCC, PSA_CU$; $L = 20, h = 0.2 \text{ à } 4, P = 1, Q = 1, \nu = 0,3, E = 10^6$)

V.6.4.5 Analyse et interprétation

D'après les résultats présentés dans la Figure (V.32) ci-dessus, on constate ce qui suit :

On a en générale une confirmation des résultats de l'élément (SBRP) par rapport aux résultats de plusieurs chercheurs; qui ont démontré dans plusieurs exemples bien adaptés aux méthodes des éléments finis (plaque carrée, $PSA_CU, L/h = 10$), que les résultats obtenus pour les plaques épaisses ont un rapport de 1,13 par rapport à ceux calculés analytiquement en théorie de Love-Kirchhoff.

L'élément ACM présente une grande performance pour l'analyse des plaques minces, mais il donne de très mauvais résultats (blocage très sévère en cisaillement transversal) dans l'analyse des plaques épaisses.

CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS

L'étude du comportement des plaques est un sujet très important dans le domaine de calcul des structures, il occupe une place aussi vaste dans la recherche scientifique depuis des siècles, avec le développement des outils informatique très puissants et l'apparition des logiciels de calcul très performants, la modélisation des plaques comme d'autres domaines de modélisation des structures est devenue très efficace et très rationnelle, c à d on peut arriver à comprendre leurs comportement avec des models numériques et atteint des résultats plus correctes.

Dans ce travail, après une synthèse théorique (chapitre I, chapitre II, chapitre III) et une présentation de la méthode de formulation des éléments finis à travers les deux approches en déplacement et en déformation (chapitre IV); utilisés pour l'étude des plaques, on a cité l'effet des différents paramètres qui influent sur la réponse et le comportement des plaques tel que le rapport géométrique (L/h), le module de Young, le coefficient de Poisson.

Les résultats obtenus à partir de ce travail nous a permis de mettre en évidence certains points, à savoir :

- i. Comprendre le comportement élastique des plaques et donne de très bonne présentation de l'état flexionnel sous l'effet de chargement (répartie ou concentré).
- ii. L'influence d'une variation dans l'épaisseur h sur l'état flexionnel des plaques.
- iii. La formulation des éléments de plaque à travers l'approche en déformation, peut être étendue même aux problèmes de flexion des plaques, qu'elles soient minces ou épaisses. Si les problèmes de flexion des plaques sont résolus en utilisant des éléments rectangulaires basés sur le modèle en question, et en particulier l'élément SBRP ou SBRPS, l'analyse par éléments finis sera très simplifiée.
- iv. L'utilisation du modèle basé sur l'approche en déformation a confirmé son efficacité dans l'étude de la flexion des plaques minces ou épaisses sans modifier la loi de comportement, ni d'utiliser des coefficients correctifs de cisaillement transversal.

L'élément SBRPS présente l'avantage d'avoir des améliorations dans la convergence de l'élément SBRP dans certaines applications.

La fiabilité du présent élément a été démontrée à travers diverses applications et tests de validations, la flexion des plaques peut être très bien simulée par un élément rectangulaire simple SBRP d'élasticité, basé sur le modèle en déformation.

Une recommandation de pour améliorer la formulation de cet élément en vu de l'utiliser dans l'étude de flexion des plaques complexes en utilisant des éléments distordus.

Une recommandation pour la formulation des éléments triangulaires ou d'un élément secteur pour la modélisation des plaques de forme irrégulière ou circulaire.

BIBLIOGRAPHIE

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Love A. E. H. « On the small free vibrations and deformations of elastic shells ». Philosophical trans. of the Royal Society (London), 1888, Vol. série A, N° 17.
- [2] Timoshenko S. « On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars ». Philosophical Magazine, 1921, Vol. 41 (series 6).
- [2] Timoshenko S. « On on the transverse vibrations of bars of uniform cross-section ». Philosophical Magazine, 1922, Vol. 43 (series 6).
- [4] Mindlin R. D. « Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics, 1951, Vol. 18.
- [5] Reissner E. « The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates ». J. of Appl. Mech., 1945, Vol. 12 p. A69–A77.
- [6] Rayleigh L. « Theory of sound ». Vol I et Vol. II. Dover Pub. 1945.
- [7] EDUQRD VENTSEL & THORDOR KRANTHAMMER. « thin plates and shelles ».
- [8] Ashwell D.G., Sabir A.B. and Roberts T.M., Further studies in the application of curved finite elements to circular arches. IJMS Vol 13, 1971
- [9] Sabir A.B. and Ashwell D.G., A comparaison of curved beam finite elements when used in vibration problems. Journal of sound and vibration, Vol 18, N°11, 1971
- [10] Sabir A.B. and Davies G.T., Natural frequencies of square plates with reinforced central holes subjected ti in-plane loads. Thin-walled structures (28), 1997
- [11] Belarbi M.T et Charif « Nouvel élément secteur basé sur le model en déformation avec rotation dans le plan », Revue Européenne des Eléments Finis Vol.7, Juin 1998.
- [12] Belarbi M.T et Charif « Nouvel Hexaèdre simple (SBH8) pour l'étude des plaques minces et épaisses », Revue Européenne des Eléments Finis Vol.8, Juin 1999.
- [13] Ahmed S., Irons B.M. and Zienkiewick O.C., Analyse of thin and thick shell structure by curved elements, IJMNE, Vol.2, 1970.
- [14] Belarbi M.T., Development de nouveaux éléments finis à model en déformation, appliqué linéaire et non linéaire. Thèse de dpctorat, université de constantine, Février 2000.
- [15] Maalem T., Investigation numérique des problèmes de fléxion de plaque par un élément finis par un élément parallélépédique basé sur le modèle en déformation, mémoire de de magistère, université de constantine. 2002.
- [16] Djoudi M.S and Bahai H., A shallow shell finite element for the linear and nonlinear analysis of cylindrical shells. Engineering structures. Vol.25, 2003.

- [17] Belounar.L et Guenfoud.M « Nouvel élément rectangulaire basé sur l'approche en déformation », Thin Walled Structures, Vol.43, Juin 2005
- [18] Belarbi M.T. et Maalem T., On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis, Revue européenne des éléments finis, Vol. 14, N° 8, 2005.
- [19] D. Hamadi, M. Mellas, R. Chebili and M. Nouaouria, "An efficient quadrilateral membrane element for civil engineering analysis", World Journal of Engineering, Vol. 4 No.1, 2007.
- [20] Yves DEBARD « RDM Compléments théoriques Bibliographie » I.U.T(2001)
- [21] O.Rahmani, et S.Kabdani, « Introduction à la méthode des éléments finis pour les Ingénieurs », office des publications universitaires, édition (1994)
- [22] Jean-Luis Batoz, « Modélisation des structures par éléments finis », volume 2, Poutres et Plaques.
- [23] K.J. BATHE, D. CHAPELLE, and P.S. Lee « A shell problem 'highly sensitive' to thickness changes. Internat ». J. Numer. Methods Engrg, 2003
- [24] J. PITKÄRANTA, Y. LEINO, O. OVASKAINEN, and J. PIILA. « Shell deformation states and the finite element method: a benchmark study of cylindrical shells ». Comput. Methods Appt. Mech. Engrg, 1995.
- [25] J. SANCHEZ-HUBERT and E. SANCHEZ-PALENCIA. « Coques Elastiques Minces- Propriétés Asymptotiques ». Masson, Paris, 1997.
- [26] C. BAIOCCHI and C. LOVADINA. « A shell classification by interpolation ». Math. Models Methods Appt. Sci., 2002.
- [27] G. KIRCHHOFF. Uher das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. Journal fur reine und angewandte Mathematik, vol. 40.
- [28] Luc Jaouen « Vibrations de flexion des plaques », Université de Sherbrooke, édition Mars 2002.
- [29] S.Timoshenko « Théorie des plaques et coques », Université de Stanford, édition 1961, volume 1 et 2.
- [30] R.B. NELSON & D.R. LORCH. « A re_ned theory for laminated orthotropic plates. ASME J. Appl. Mech., vol. 41, 1974.
- [31] K.H. Lo & R.M. Christensen. « A high-order theory of plate deformation. Part 2 :laminated plates. J. Applied Mechanics, vol. 44, 1977.
- [32] T. KANIT& K. SWAMINATHAN. « Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher arder re_ned theoly ». Composite Structures, vol. 56, 2002.
- [33] (J.A.CARBAJAL) these doctorat ELPFL.
- [34] François. Frey, et Jarostove. Jirousek, « Analyse des structures et milieu continu par la méthode des éléments finis », volume 6, Presses polytechniques, édition (2001).
- [35] François. Frey « Analyse des structures et milieux continus (Mécanique des solides) », volume3 Presses polytechniques, édition (1999).
- [36] PING-CHUN WANG. – Calcul des structures par les méthodes numériques et matricielles. Dunod (1969).

- [37] ALBIGES (M.), COIN (A.) et JOURNAL (H.). -*Étude des structures par les méthodes matricielles*. Eyrolles (1969).
- [38] ROBINSON (J.). -*Analyse matricielle des structures*. Dunod (1971).
- [39] COURBON (J.).-*Calcul des structures*. , Dunod (1972).
- [40] Philippe.Fichou, « La méthode des éléments finis », Article, (2000-2001).
- [41] Lenneth ROCKEY et William GRIFFITHS « Introduction à la Méthode des éléments Finis», EDITION EYROLLES, édition 1979.

LOGICIELS UTILISES

- [FOR.95] Fortrant Power Station 5.0, Microsoft Developer Studio 1995, Microsoft Corporation.
- [ANSYS V10] Logiciel de modélisation des structures, mécanique, fluide “Linear and Nonlinear Static and Dynamic Analysis and Design ”.
- [RDM.6.17] Logiciel destiné au calcul des structures par la méthode des éléments finis.
- [SAP.2000 V12] Logiciel de modélisation des structures “Linear and Nonlinear Static and Dynamic Analysis and Design of Three Dimensional Structures”.
- [Scientifique work place 5.0] Logiciel de calcul mathématique.
- [ORIG.97] ORIGIN 5.0, Microsoft Origin, Microsoft Software, Inc. 1997.

ANNEXES

ANNEXE A

Pyramide de Pascale

Dans cette annexe, est détaillée la pyramide de Pascal en 3D qui concerne le Fonctions d'interpolation du modèle de déplacement IV.6. Le polynôme D'interpolation s'écrit (composante U par exemple) :

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) = & a_1 \\
 & + a_2x + a_3y + a_4z \\
 & + a_5x^2 + a_6xy + a_7y^2 + a_8yz + a_9z^2 + a_{10}zx \\
 & + a_{11}x^3 + a_{12}x^2y + a_{13}xy^2 + a_{14}y^3 + a_{15}y^2z + a_{16}yz^2 + a_{17}z^3 + a_{18}z^2x + a_{19}zx^2 + a_{20}xyz \\
 & + \dots
 \end{aligned}$$

Pyramide	Degré	P	Nombre de termes
----------	-------	---	------------------

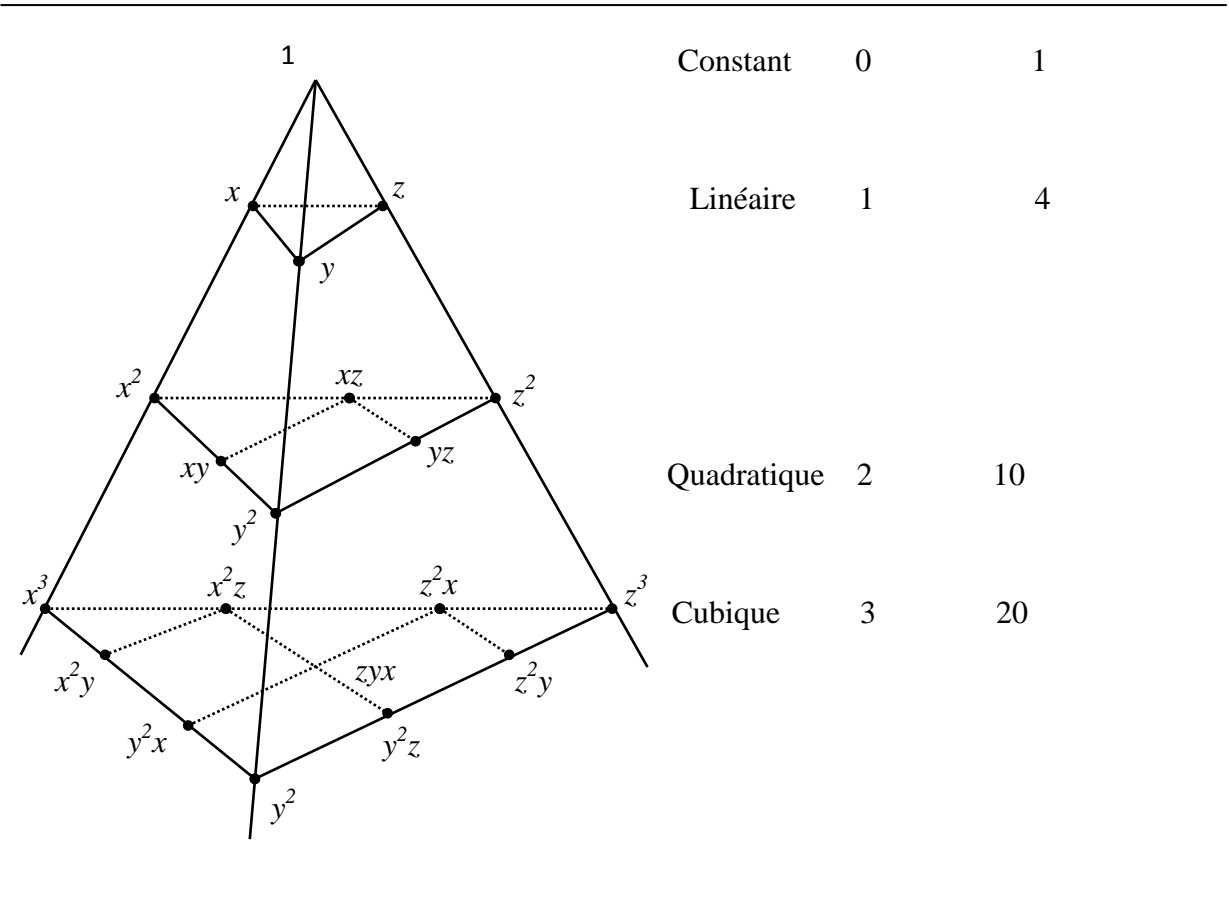


Fig.A.1 : Pyramide de Pascal

ANNEXE B

Elément flexionnel ACM

On retrouve ici la représentation graphique des 03 d.d.1 de l'élément flexionnel ACM

Ainsi que les matrices $[A]$; $[K_0]$ et $[Q]$ (IV.6).

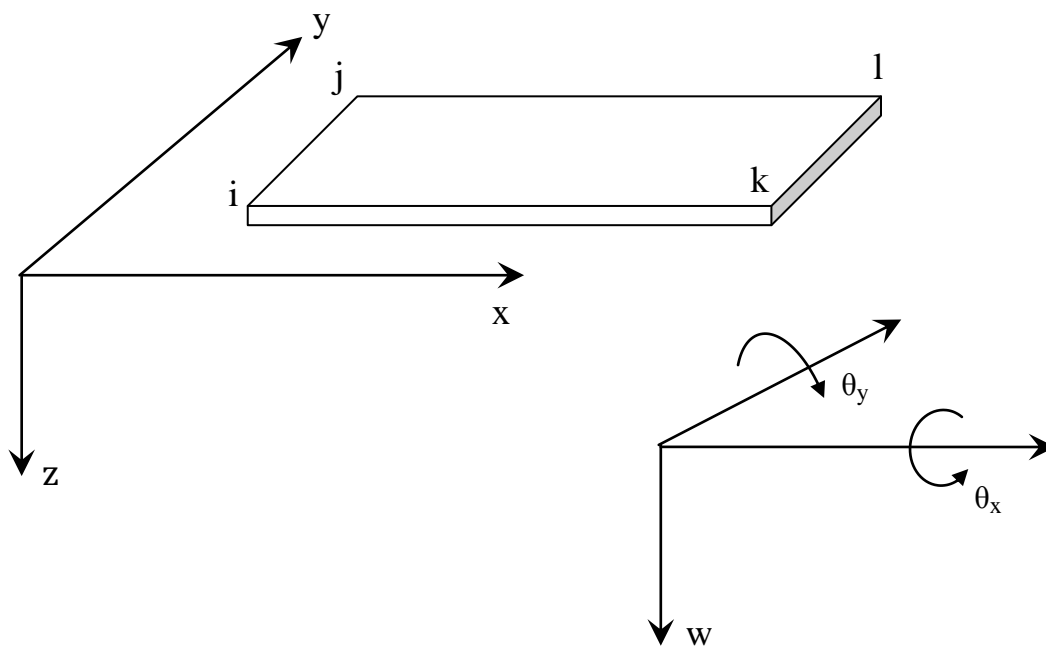


Figure B.1 : d.d.1. de l'élément flexionnel

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & a & 0 & b^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -a & 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 & -a^3 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 2a & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -a & -2b & 0 & -a^2 & -2ab & -3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\
 0 & 1 & 0 & 2a & b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & 3a^2b & b^3 \\
 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2b & 0 & 0 & 0 & -3b^2 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & b^3
 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3\frac{1}{a^2} & 0 & -2\frac{1}{a} & 3\frac{1}{a^2} & 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{ab} & \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & \frac{1}{ab} & -\frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ -3\frac{1}{b^2} & 2\frac{1}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 2\frac{1}{a^3} & 0 & \frac{1}{a^2} & -2\frac{1}{a^3} & 0 & \frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3\frac{1}{a^2b} & 0, & 2\frac{1}{ab} & 3\frac{1}{a^2b} & 0 & \frac{1}{ab} & 3\frac{1}{a^2b} & 0 & -\frac{1}{ab} & -3\frac{1}{a^2b} & 0, & -2\frac{1}{ab} & 0 \\ 3\frac{1}{ab^2} & -2\frac{1}{ab} & 0, & -3\frac{1}{ab^2} & 2\frac{1}{ab} & 0 & 3\frac{1}{ab^2} & \frac{1}{ab} & 0 & -3\frac{1}{ab^2} & -\frac{1}{ab} & 0 & 0 \\ 2\frac{1}{ba^3} & -\frac{1}{b^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ -2\frac{1}{ba^3} & 0 & -\frac{1}{a^2b} & 2\frac{1}{ba^3} & 0 & -\frac{1}{a^2b} & -2\frac{1}{ba^3} & 0 & \frac{1}{a^2b} & -2\frac{1}{ba^3} & 0 & \frac{1}{a^2b} & 0 \\ -2\frac{1}{ab^3} & \frac{1}{ab^2} & 0 & 2\frac{1}{ab^3} & -\frac{1}{ab^2} & 0 & -2\frac{1}{ab^3} & -\frac{1}{ab^2} & 0 & 2\frac{1}{ab^3} & 2\frac{1}{ab^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

La matrice $[H^e]$ pour l'élément ACM est donnée par :

$$[H^e] = \begin{bmatrix} -4aD_1 & 4bD_x & 6p^{-1}D_x + 6pD_1 & -2aD_1 & 0 & -6pD_1 & 0 & 2bD_x & -6p^{-1}D_x & 0 & 0 & 0 \\ -4aD_y & 4bD_1 & 6pD_y + 6p^{-1}D_1 & -2aD_y & 0 & -6pD_y & 0 & 2bD_1 & -6p^{-1}D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2bD_{xy} & -2aD_{xy} & -2D_{xy} & 0 & 2aD_{xy} & 2D_{xy} & -2bD_{xy} & 0 & 2D_{xy} & 0 & 0 & -2D_{xy} \\ 2aD_1 & 0 & -6pD_1 & 4aD_1 & 4bD_x & 6p^{-1}D_x + 6pD_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2bD_x & -6p^{-1}D_x \\ 2aD_y & 0 & -6pD_y & 4aD_y & 4bD_1 & 6pD_y + 6p^{-1}D_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2bD_1 & -6p^{-1}D_1 \\ 0 & -2aD_{xy} & -2D_{xy} & 2bD_{xy} & 2aD_{xy} & 2D_{xy} & 0 & 0 & 2D_{xy} & -2bD_{xy} & 0 & -2D_{xy} \\ 0 & -2bD_x & -6p^{-1}D_x & 0 & 0 & 0 & -4aD_1 & -4bD_x & 6p^{-1}D_x + 6pD_1 & 2aD_1 & 0 & -6pD_1 \\ 0 & -2bD_1 & -6p^{-1}D_1 & 0 & 0 & 0 & -4aD_y & 6bD_1 & 6pD_y + 6p^{-1}D_1 & -2aD_y & 0 & -6pD_y \\ 2bD_{xy} & 0 & -2D_{xy} & 0 & 0 & 2D_{xy} & -2bD_{xy} & -2aD_{xy} & 2D_{xy} & 0 & 2aD_{xy} & -2D_{xy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2bD_x & -6p^{-1}D_x & 2aD_1 & 0 & -6pD_1 & 4aD_1 & -4bD_x & 6p^{-1}D_x + 6pD_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2bD_1 & -6p^{-1}D_1 & 2aD_y & 0 & -6pD_y & 4aD_y & 4bD_1 & 6pD_y + 6p^{-1}D_1 \\ 0 & 0 & -2D_{xy} & 2bD_{xy} & 0 & 2D_{xy} & 0 & -2aD_{xy} & 2D_{xy} & 2bD_{xy} & 2aD_{xy} & -2D_{xy} \end{bmatrix}$$

(B.4)

La matrice $[K^0]$ pour l'élément ACM est donnée par :

$$[K_0] = [D] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4ab & 0 & 4vab & 6a^2b & 2ab^2 & 2va^2b & 6vab^2 & 3a^2b^2 & 3va^2b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(-1+v)a^2b & 0 & 0 & -2(-1+v)a^2b & -2(-1+v)ab^2 & 0 & -2(-1+v)a^3b & -2(-1+v)ab^3 \\ 0 & 0 & 0 & 4vab & 0 & 4ab & 6va^2b & 2va^2b^2 & 2a^2b & 6ab^2 & 3va^2b^2 & 3a^2b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 6a^2b & 0 & 6va^2b & 12ba^3 & 3a^2b^2 & 4va^2b & 9va^2b^2 & 6a^2b^2 & 6va^3b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2ab^2 & -2(-1+v)a^2b & 2vb^2 & 3a^2b & \frac{28}{3}ba^3 - \frac{8}{3}va^3b + \frac{4}{3}ab^3 & -(v-2)a^2b^2 & 4vab^3 & 3a^4b - 3a^4bv + 2a^2b^3 & 2a^2b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 2va^2b & -2(-1+v)ab^2 & 2a^2b & 4va^2b & -(v-2)a^2b^2 & \frac{4}{3}ba^3 - \frac{8}{3}ab^3 - \frac{8}{3}vab^3 & 3a^2b^2 & 2a^3b^2 & 2a^3b^2 + 3ab^4 - 3ab^4v \\ 0 & 0 & 0 & 6vab^2 & 0 & 6ab^2 & 9va^3b^2 & 2vab^3 & 3a^2b^2 & 12ab^3 & 6va^2b^3 & 6a^2b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 3a^2b^2 & -2(-1+v)a^3b & 3va^2b^2 & 6a^2b^3 & 3a^4b - 3a^4bv + 2a^2b^3 & 2a^3b^2 & 6va^2b^3 & \frac{18}{5}a^5b - \frac{18}{5}a^5bv + 4a^3b^3 & 2(v+1)a^3b^3 \\ 0 & 0 & 0 & 3va^2b^2 & -2(-1+v)ab^3 & 3a^2b^2 & 6va^3b^2 & 2a^2b^3 & 2a^3b^2 + 3ab^4 - 3ab^4v & 6a^2b^3 & 2(v+1)a^3b^3 & 4a^3b^3 + \frac{18}{5}ab^5 - \frac{18}{5}ab^5v \end{bmatrix} \quad (B.5)$$

$$\text{Avec } [D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -6x & -2y & 0 & 0 & -6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2x & -6y & 0 & -6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}$$

La matrice $[K_0]$ pour l'élément SBRPS est donnée par :

$$[K_0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abd_{11} & 0 & abd_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12}ab^3d_{11} - \frac{1}{80}a^5bd_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12}a^3bd_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abd_{12} & 0 & abd_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12}ab^3d_{22} - \frac{1}{80}a^5bd_{44} & 0 & -\frac{1}{12}a^3bd_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & abd_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12}a^3bd_{44} & 0 & abd_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12}ab^3d_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12}a^3bd_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & abd_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12}ab^3d_{55} \end{bmatrix}$$

(B.6)

ANNEXE C

Fichier de donnée du programme de calcul en FORTRAN 77 pour l'élément SBRPS pour un maillage de 2X2.

```
*SAID_SBRPS
***PRECISION
1E50
***TITRE
CALCUL D une plaque rectangulaire
***DEFINITION
9 NTNO
4 NTEL
15 NTDI
1 NTFI
15 LB
6 ICCC
***UNITE
CM N
***DONNEE
*COO
0.0 0.
0.0 5.0
0.0 10.

5.0 0.0
5.0 5.0
5.0 10.0

10.0 0.0
10.0 5.0
10.0 10.0
*CON
1 4 5 2
2 5 6 3
4 7 8 5
5 8 9 6
*SECTION
0.4
*MAT
3600 0.3
*DEPLACEMENT IMPOSE
1 1 0
1 2 0
1 3 0

4 1 0
4 2 0
4 3 0
```

71 0
72 0
73 0

8 1 0
8 2 0
8 3 0

9 1 0
9 2 0
8 3 0

*FORCES IMPOSEES

3 1 100.

***DEP

***EFF

***FIN

**Fichier des résultats du programme de calcul en FORTRAN 77 pour l'élément SBRPS
pour un maillage de 2X2.**

```

*****
**  CALCUL D'UNE PLAQUE RECTANGULAIRE PAR L'ELEMENT SBRPS  **
*****

*****
***  DEFINITION DU PROBLEME      ***
*****
***
***          ***
*** NOMBRE TOTALE DES NOEUDS      9 ***
***          ***
*** NOMBRE TOTALE D ELEMENTS     4 ***
***          ***
*** NOMBRE DES DEPLACEMENTS IMPOSES  15 ***
***          ***
*** NOMBRE DES FORCES IMPOSEES    1 ***
***          ***
*** LARGEUR DE BANDE             15 ***
***          ***
*** POINTS DE CONTRAINTES A CHOISIR  6 ***
***          ***
*****
*****  U N I T E S      *****
*****
***          ***
*** CMN                  ***
*****
*****  C O O R D O N N E E S  *****
*****
*****          *****

```

```

***** COORD >>>> 1 >>>> X *****
***** COORD >>>> 2 >>>> Y *****
*****
*** NOEUD *** COORD >>> 1 * COORD >>> 2 *
*****
*** 1 *** .00000E+00 * .00000E+00 *
*** 2 *** .00000E+00 * .50000E+01 *
*** 3 *** .00000E+00 * .10000E+02 *
*** 4 *** .50000E+01 * .00000E+00 *
*** 5 *** .50000E+01 * .50000E+01 *
*** 6 *** .50000E+01 * .10000E+02 *
*** 7 *** .10000E+02 * .00000E+00 *
*** 8 *** .10000E+02 * .50000E+01 *
*** 9 *** .10000E+02 * .10000E+02 *
*****
***** CONNEXIONS *****
*****
*** ELEMENT *** NOEUD >>> 1 * NOEUD >>> 2 * NOEUD >>> 3 * NOEUD >>> 4 *
*****
*** 1 *** 1 * 4 * 5 * 2 *
*** 2 *** 2 * 5 * 6 * 3 *
*** 3 *** 4 * 7 * 8 * 5 *
*** 4 *** 5 * 8 * 9 * 6 *
*****
***** SECTIONS *****
*****
*****
*****
***** CONSTANTES LE LONG DE L ELEMENT *****
*****
***** SECTION - 1 ==>>> EPAISSEUR *****
*****
***** TOUTE LES ELEMENTS POSSEDENTS LES *****
***** MEME CARACTERISTIQUES DE SECTIONS *****
*****
*****
*****
***** ELEMENT *** SECT >>> 1 *
*****
*** 1 *** .40000E+00 *
*****
*****
***** CARACTERISTIQUES DU MATERIAU *****
*****
*****
*****
***** MODULE - 1 ==>>>> YOUNG1 *****
***** MODULE - 2 ==>>>> POISSON1 *****
***** MODULE - 3 ==>>>> GAMA *****
***** MODULE - 4 ==>>>> YOUNG2 *****
***** MODULE - 5 ==>>>> POISSON2 *****
***** MODULE - 6 ==>>>> CISAILLEMENT2 *****

```

```

*****  MODULE - 7 ==>>>> BETA  *****
*****
*****  TOUTE LES ELEMENTS POSSEDENTS LES  *****
*****  MEME CARACTERISTIQUES DE MATERIAUX *****
*****
*****
*****
***** ELEMENT *** MODULE >> 1 * MODULE >> 2 *
*****
*** 1 *** .36000E+04 * .30000E+00 *
*****
*****
***** DEPLACEMENTS IMPOSES *****
*****
*****
*** NOEUD *** DIERCTION * VALEUR *
*****
*** 1 *** 1 * .00000E+00 *
*** 1 *** 2 * .00000E+00 *
*** 1 *** 3 * .00000E+00 *
*** 4 *** 1 * .00000E+00 *
*** 4 *** 2 * .00000E+00 *
*** 4 *** 3 * .00000E+00 *
*** 7 *** 1 * .00000E+00 *
*** 7 *** 2 * .00000E+00 *
*** 7 *** 3 * .00000E+00 *
*** 8 *** 1 * .00000E+00 *
*** 8 *** 2 * .00000E+00 *
*** 8 *** 3 * .00000E+00 *
*** 9 *** 1 * .00000E+00 *
*** 9 *** 2 * .00000E+00 *
*** 8 *** 3 * .00000E+00 *
*****
***** FORCES IMPOSEES *****
*****
*** NOEUD *** DIRECTION * VALEUR *
*****
*** 3 *** 1 * .10000E+03 *
*****
*****
***** DEPLACEMENTS *****
*****
* NODE * W * Bx * By *
*****
* 1 * .11760E-49 * -.53249E-50 * -.51057E-50 *
*-----*-----*-----*
* 2 * .97300E+01 * .12443E+01 * -.33778E+01 *
*-----*-----*-----*
* 3 * .36497E+02 * .60996E+01 * -.65219E+01 *
*-----*-----*-----*

```


ANNEXE D

Fichier des résultats du logiciel ANSYS pour une plaque carrée à deux bords encastres et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale (C. C. C. L; $L = 10, h = 0.4, P = 1000, \nu = 0,3, E = 3600$) pour un maillage de 9X9.

PRINT U NODAL SOLUTION PER NODE

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL
COORDINATE SYSTEM

NODE	UZ
1	0.0000
2	0.0000
3	0.0000
4	0.0000
5	0.0000
6	0.0000
7	0.0000
8	0.0000
9	0.0000
10	0.0000
11	-140.76
12	-2.8952
13	-11.066
14	-23.186
15	-38.277
16	-55.746
17	-75.116
18	-95.976
19	-117.97
20	0.0000
21	-117.97
22	-95.976
23	-75.116
24	-55.746
25	-38.277
26	-23.186
27	-11.066
28	-2.8952
29	0.0000
30	0.0000
31	0.0000
32	0.0000

33 0.0000
34 0.0000
35 0.0000
36 0.0000
37 -0.26547E-02

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL
COORDINATE SYSTEM

NODE	UZ
38	-0.77778E-01
39	-0.27180
40	-0.57553
41	-0.97147
42	-1.4496
43	-1.9989
44	-2.6518
45	-0.77778E-01
46	-0.45299
47	-1.2269
48	-2.3730
49	-3.8371
50	-5.5642
51	-7.5225
52	-9.5214
53	-0.27180
54	-1.2269
55	-2.9513
56	-5.3814
57	-8.4032
58	-11.905
59	-15.734
60	-19.626
61	-0.57553
62	-2.3730
63	-5.3814
64	-9.4522
65	-14.399
66	-20.021
67	-26.089
68	-32.307
69	-0.97147
70	-3.8371
71	-8.4032
72	-14.399

73 -21.540
74 -29.556

***** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING *****

LOAD STEP= 1 SUBSTEP= 1
TIME= 1.0000 LOAD CASE= 0

THE FOLLOWING DEGREE OF FREEDOM RESULTS ARE IN THE GLOBAL
COORDINATE SYSTEM

NODE	UZ
75	-38.162
76	-47.022
77	-1.4496
78	-5.5642
79	-11.905
80	-20.021
81	-29.556
82	-40.184
83	-51.569
84	-63.349
85	-1.9989
86	-7.5225
87	-15.734
88	-26.089
89	-38.162
90	-51.569
91	-65.950
92	-80.898
93	-2.6518
94	-9.5214
95	-19.626
96	-32.307
97	-47.022
98	-63.349
99	-80.898
100	-99.280

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES

NODE 11
VALUE -140.76

ANNEXE E

Fichier des résultats du logiciel SAP2000V14 pour une plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale

(C.C.C.L; $L = 10, h = 0.4,$

$P = 100, \nu = 0,3, E = 3600$) pour un maillage de 9X9.

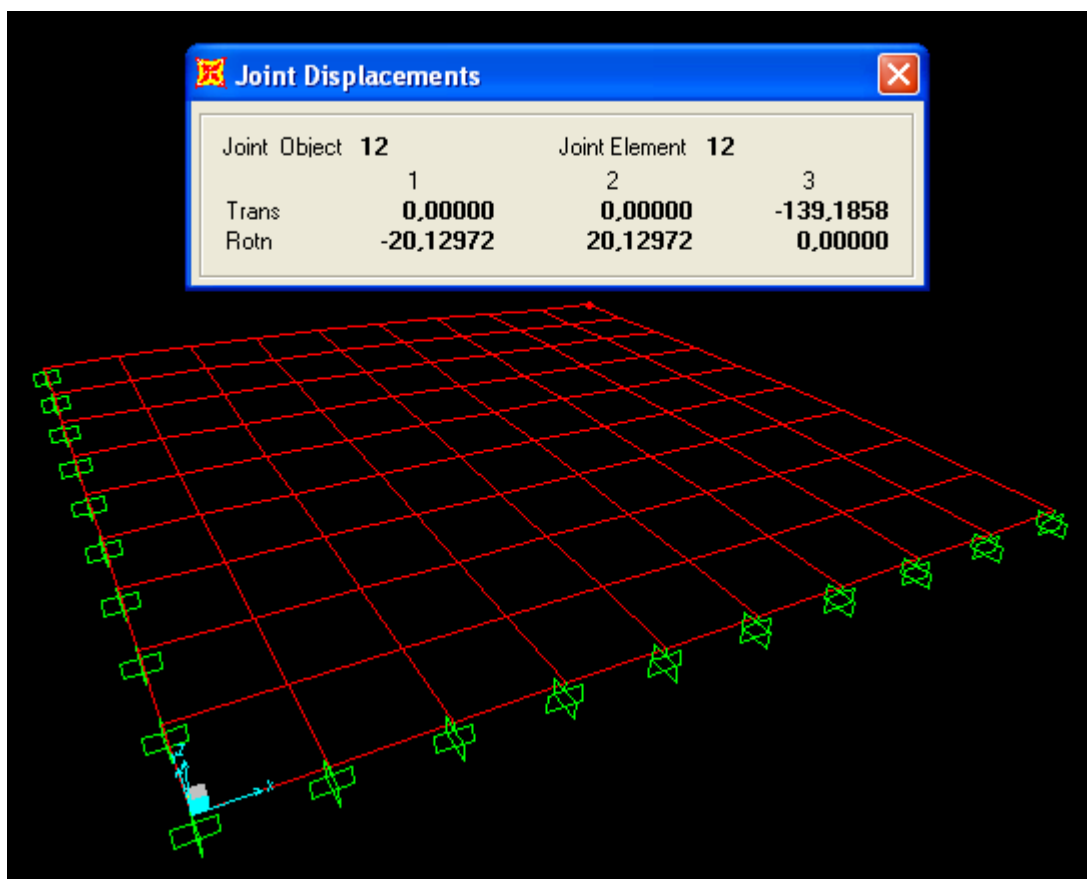


Fig.E.1 : Géométrie et résultat de l'analyse par SAP 2000 d'une plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres.

Tableau des résultats des déplacements et des réactions du logiciel SAP 2000V14

TABLE: Joint Displacements								
Joint	OutputCase	CaseType	U1	U2	U3	R1	R2	R3
Text	Text	Text	m	m	m	Radians	Radians	Radians
10	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
11	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
12	P	LinStatic	0	0	139,185793	20,129725	20,129725	0
13	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
14	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
P								

15	P	LinStatic	0	0	0,006368	-0,015345	0,015345	0
16	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
17	P	LinStatic	0	0	-0,067774	-0,121283	0,173294	0
18	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
19	P	LinStatic	0	0	-0,264061	-0,229534	0,52574	0
20	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
21	P	LinStatic	0	0	-0,571905	-0,32198	1,060049	0
22	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
23	P	LinStatic	0	0	-0,974586	-0,401379	1,750139	0
24	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
25	P	LinStatic	0	0	-1,461633	-0,475307	2,574449	0
26	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
27	P	LinStatic	0	0	-2,031354	-0,552291	3,514986	0
28	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
29	P	LinStatic	0	0	-2,66516	-0,568814	4,488324	0
30	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
31	P	LinStatic	0	0	-2,966962	0,3343	5,207009	0
32	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
33	P	LinStatic	0	0	-0,067774	-0,173294	0,121283	0
34	P	LinStatic	0	0	-0,449346	-0,521876	0,521876	0
35	P	LinStatic	0	0	-1,229307	-0,875872	1,217459	0
36	P	LinStatic	0	0	-2,378923	-1,184707	2,184037	0
37	P	LinStatic	0	0	-3,843966	-1,445157	3,379531	0
38	P	LinStatic	0	0	-5,574677	-1,663749	4,754916	0
39	P	LinStatic	0	0	-7,51574	-1,813684	6,237769	0
40	P	LinStatic	0	0	-9,516668	-1,720529	7,725107	0
41	P	LinStatic	0	0	-11,138775	-1,102918	9,259189	0
42	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
43	P	LinStatic	0	0	-0,264061	-0,52574	0,229534	0
44	P	LinStatic	0	0	-1,229307	-1,217459	0,875872	0
45	P	LinStatic	0	0	-2,960734	-1,886223	1,886223	0
46	P	LinStatic	0	0	-5,386873	-2,46347	3,205074	0
47	P	LinStatic	0	0	-8,396736	-2,937302	4,772053	0
48	P	LinStatic	0	0	-11,873868	-3,302177	6,519932	0
49	P	LinStatic	0	0	-15,677465	-3,511481	8,373291	0
50	P	LinStatic	0	0	-19,57369	-3,442224	10,277339	0
51	P	LinStatic	0	0	-23,159414	-2,916338	12,252972	0
52	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
53	P	LinStatic	0	0	-0,571905	-1,060049	0,32198	0
54	P	LinStatic	0	0	-2,378923	-2,184037	1,184707	0
55	P	LinStatic	0	0	-5,386873	-3,205074	2,46347	0
56	P	LinStatic	0	0	-9,441108	-4,063915	4,063915	0
57	P	LinStatic	0	0	-14,354433	-4,751694	5,910589	0
58	P	LinStatic	0	0	-19,934197	-5,260483	7,935727	0
59	P	LinStatic	0	0	-25,963452	-5,550519	10,077954	0
60	P	LinStatic	0	0	-32,158299	-5,542282	12,299555	0

61	P	LinStatic	0	0	-38,132791	-5,13972	14,607164	0
62	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
63	P	LinStatic	0	0	-0,974586	-1,750139	0,401379	0
64	P	LinStatic	0	0	-3,843966	-3,379531	1,445157	0
65	P	LinStatic	0	0	-8,396736	-4,772053	2,937302	0
66	P	LinStatic	0	0	-14,354433	-5,910589	4,751694	0
67	P	LinStatic	0	0	-21,44249	-6,808979	6,808979	0
68	P	LinStatic	0	0	-29,397112	-7,468535	9,049835	0
69	P	LinStatic	0	0	-37,940938	-7,862564	11,426157	0
70	P	LinStatic	0	0	-46,751765	-7,938886	13,906158	0
71	P	LinStatic	0	0	-55,443712	-7,639171	16,482765	0
72	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
73	P	LinStatic	0	0	-1,461633	-2,574449	0,475307	0
74	P	LinStatic	0	0	-5,574677	-4,754916	1,663749	0
75	P	LinStatic	0	0	-11,873868	-6,519932	3,302177	0
76	P	LinStatic	0	0	-19,934197	-7,935727	5,260483	0
77	P	LinStatic	0	0	-29,397112	-9,049835	7,468535	0
78	P	LinStatic	0	0	-39,938738	-9,877094	9,877094	0
						-		
79	P	LinStatic	0	0	-51,234043	10,401407	12,447873	0
						-		
80	P	LinStatic	0	0	-62,927053	10,585755	15,151658	0
						-		
81	P	LinStatic	0	0	-74,617648	10,391793	17,969577	0
82	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
83	P	LinStatic	0	0	-2,031354	-3,514986	0,552291	0
84	P	LinStatic	0	0	-7,51574	-6,237769	1,813684	0
85	P	LinStatic	0	0	-15,677465	-8,373291	3,511481	0
						-		
86	P	LinStatic	0	0	-25,963452	10,077954	5,550519	0
						-		
87	P	LinStatic	0	0	-37,940938	11,426157	7,862564	0
						-		
88	P	LinStatic	0	0	-51,234043	12,447873	10,401407	0
						-		
89	P	LinStatic	0	0	-65,479771	13,137028	13,137028	0
						-		
90	P	LinStatic	0	0	-80,291954	13,460451	16,045571	0
						-		
91	P	LinStatic	0	0	-95,243225	13,382576	19,097362	0
92	P	LinStatic	0	0	0	0	0	0
93	P	LinStatic	0	0	-2,66516	-4,488324	0,568814	0
94	P	LinStatic	0	0	-9,516668	-7,725107	1,720529	0
						-		
95	P	LinStatic	0	0	-19,57369	10,277339	3,442224	0
						-		
96	P	LinStatic	0	0	-32,158299	12,299555	5,542282	0
						-		
97	P	LinStatic	0	0	-46,751765	13,906158	7,938886	0

98	P	LinStatic	0	0	-62,927053	15,151658	10,585755	0
99	P	LinStatic	0	0	-80,291954	16,045571	13,460451	0
100	P	LinStatic	0	0	-98,44194	16,555285	16,555285	0
101	P	LinStatic	0	0	116,918358	16,625126	19,853946	0
102	P	LinStatic	0	0	-2,966962	-5,207009	-0,3343	0
103	P	LinStatic	0	0	-11,138775	-9,259189	1,102918	0
104	P	LinStatic	0	0	-23,159414	12,252972	2,916338	0
105	P	LinStatic	0	0	-38,132791	14,607164	5,13972	0
106	P	LinStatic	0	0	-55,443712	16,482765	7,639171	0
107	P	LinStatic	0	0	-74,617648	17,969577	10,391793	0
108	P	LinStatic	0	0	-95,243225	19,097362	13,382576	0
109	P	LinStatic	0	0	116,918358	19,853946	16,625126	0

ANNEXE F

Fichier des résultats du logiciel RDM6 pour une plaque carrée à deux bords encastrés et deux autres libres. Convergence de la flèche maximale ($C.C.C.L$; $L = 10, h = 0.4$, $P = 100, \nu = 0,3, E = 3600$) pour un maillage de 4X4.

Nom du projet : Flexion d'une plaque

+-----+

| Déplacements nodaux [m rad] |

+-----+

Noeud	dz	rotx	roty	Noeud	dz	rotx	roty
1	0.0000	0.0000	0.0000	2	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	0.0000	4	-0.1330	-19.8410	19.8410
5	0.0000	0.0000	0.0000	6	0.0000	0.0000	0.0000
7	-0.0417	-16.5350	5.8651	8	-0.0417	-5.8651	16.5350
9	-0.0135	-5.4383	5.4383				

Valeur(s) maximale(s) :

dz = 1.33000E-01 [Noeud 4]

rotx = 1.98410E+01 [Noeud 4]

roty = 1.98410E+01 [Noeud 4]

+-----+

| Contraintes moyennes aux noeuds - Moments résultants [MPa N radian] |

+-----+

Les contraintes sont calculées sur la peau supérieure de la plaque

N1 et N2 sont les directions principales

T1 est l'angle de la direction N1 avec l'axe x

Mxx , Myy , Mxy sont les moments résultants par unité de longueur

Noeud	Sxx	Syy	Sxy	Mxx	Myy	Mxy
	S1	S2	T1	Mises	Delta	
1	2616.59	784.98	324.84	70	21	9
	2672.50	729.07	0.17	2392.77	2391.80	
2	1118.72	1118.72	602.38	30	30	16
	1721.10	516.34	0.79	1529.74	1528.80	
3	784.95	2616.62	324.78	21	70	9
	2672.50	729.07	1.40	2392.77	2391.80	
4	87.80	87.80	1229.20	2	2	33
	1317.00	-1141.40	0.79	2130.85	2129.90	
5	1748.67	555.34	620.31	47	15	17
	2012.70	291.31	0.40	1884.01	1883.00	
6	555.32	1748.69	620.29	15	47	17
	2012.70	291.31	1.17	1884.01	1883.00	
7	241.32	701.96	844.93	6	19	23
	1347.40	-404.12	0.92	1588.49	1587.50	
8	701.95	241.33	844.93	19	6	23

1347.40 -404.12 0.65 1588.49 1587.50
 9 471.60 471.60 844.90 13 13 23
 1316.50 -373.30 0.79 1537.52 1537.60

+-----+
 | Action(s) de liaison [N N.m] |
 +-----+

Noeud	Rz	Mx	My
1	5.4276E+01	-1.0919E-02	-2.2099E-01
2	-1.2374E+01	2.8994E-02	-2.8994E-02
3	5.4276E+01	2.2099E-01	1.0919E-02
5	1.9111E+00	4.1328E-02	-1.6729E-01
6	1.9111E+00	1.6729E-01	-4.1328E-02

Somme des forces appliquées à la structure :

Fz = -2.00008898332271E-0011 N
 Mx = -1.84685600146395E-0013 N.m
 My = 1.58546309930827E-0013 N.m