

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département :.....
Ref :.....



Thèse présentée en vue de l'obtention
du diplôme de :

Doctorat en sciences en : Hydraulique
Option : Sciences hydrauliques

THEME

CONTRIBUTION AU DIMENSIONNEMENT DES
CONDUITES FERMEES DE FORME CIRCULAIRE ET NON
CIRCULAIRE

Présentée par : **RIABI Mohammed**

Soutenue publiquement le 10 juin 2012

Devant le jury composé de :

| | | | |
|--------------|-----------------------|------------------------------|-----------------------------|
| Président : | REMINI B. | Professeur | Université de Blida |
| Rapporteur : | ACHOUR B. | Professeur | Université de Biskra |
| Examineur : | HAMOUDI S. | Professeur | Université de Chlef |
| Examineur : | BOUZIANE M. T. | Maitre de Conférences | Université de Biskra |

Remerciements

Je tiens à remercier Monsieur Bachir Achour, pour sa disponibilité, son aide et ses précieux conseils. Je lui exprime ma reconnaissance et ma gratitude.

Je remercie également Monsieur Boualam REMINI, Monsieur Saad HAMOUDI et Monsieur Mohamed Toufik BOUZIANE d'avoir examiné ce travail.

Dédicaces

- *A la mémoire de mon père et à celle de ma mère.*
- *A ma femme.*
- *A mes filles.*

المخلص :

غالبا ما يتم استخدام أنابيب ذات الأشكال الدائرية وغير الدائرية من أجل التخلص من التدفقات العالية في نظم الإمدادات الكبيرة أو خطوط الصرف الصحي. والهدف الرئيسي هو تصميم هذه الأنابيب عندما يكون التدفق ثابتا و دائما .

تم اقتراح النظرية الأولى للتصميم في حالة يكون نظام الجريان مضطرب خشن و التي تقبل معامل مقاومة التدفق المتغير. تم العثور على أكثر من ثلاثين علاقة تقريبية استنادا إلى معامل شيزي ومانينغ لستة أنماط مختلفة من الأنابيب. التي تعطي البعد الخطي D أو العمق y_n بطريقة سريعة وسهلة .

النظرية الثانية تستند على نموذج مرجعي خشن. هذا النموذج له نفس شكل القناة المدروسة لكن خشونته النسبية يتم اختيارها عشوائيا بحيث يكون النظام المستقر مضطرب تماما، إذن معامل الاحتكاك f (Colebrook – white) يبقى ثابت بغض النظر عن عدد $Reynolds$. البعد الخطي يساوي البعد الخطي المتعلق بالنموذج المرجعي الخشن المصحح بمعامل غير بعدي ψ . هذا المعامل يكون معرفا عندما تعرف كل من التدفق الحجمي Q , الميل J , الخشونة المطلقة ϵ و اللزوجة الساكنة ν

إن هذه النظرية المثبتة للأنابيب و قنوات الدعم اقترحت لاحتلتنا عند التدفق الحر. هذه الدراسة هي المعمول بها في المجال الكامل للتدفق المضطرب وتؤدي إلى حلول واضحة و عملية لتصميم هذه الأنابيب. إن حساب البعد الخطي يكون سهلا في نطاق واسع لنسبة التعبئة $0,20 \leq \eta \leq 0,80$ وبالتالي للأنماط الستة التي شملتها الدراسة قدمنا صيغة عامة لتحديد قطرها D بغض النظر عن تحديد المعامل f .

وقد اقترحت طريقتين لتحديد العمق الطبيعي ، الأولى على أساس التوصيل للنموذج المرجعي الخشن ، و الثانية ر على تحديد النسبة Q/Q_{max} . وقد أظهرت النتائج والتحقيقات التي وضعتها العديد من الأمثلة على تطبيق الاعتمادية والبساطة في طريقة النموذج المرجعي الخشن.

مفتاح الكلمات : التدفق الثابت والدائم ; نسبة التعبئة ; البعد الخطي ; معامل التصحيح ; النموذج المرجعي الخشن ; لتوصيلا النسبي ; العلاقة التقريبية

Résumé :

Les conduites de formes circulaires et non-circulaires sont souvent utilisées pour l'évacuation de forts débits dans les grandes adductions ou dans les conduites d'égouts. L'objectif majeur est le dimensionnement de telles conduites lorsque l'écoulement qui s'y installe est permanent uniforme. Une première approche de dimensionnement dans le cas des régimes turbulents rugueux, admettant un coefficient de résistance à l'écoulement invariable, est proposée. Plus de trente relations approchées, basées sur le coefficient de *Chézy* et *Manning* pour six profils différents de conduites sont trouvées. Elles donnent la dimension linéaire D ou la profondeur y_n d'une manière explicite simple et rapide.

La deuxième approche théorique est basée sur un modèle rugueux de référence. Ce modèle a la même forme que la conduite considérée mais sa rugosité relative est arbitrairement choisie de manière que le régime qui s'y installe est pleinement turbulent. Alors le coefficient de frottement f de *Colebrook-White* demeure constant quelque soit le nombre de *Reynolds*. La dimension linéaire est alors égale à celle du modèle rugueux de référence corrigée par un facteur adimensionnel ψ . Ce facteur est bien défini lorsque le débit Q , le gradient de perte de charge J , la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique ν sont connus. Cette approche prouvée pour les conduites et canaux en charge, est proposée dans notre cas aux écoulements à ciel ouvert. L'étude est applicable dans le domaine entier de l'écoulement turbulent et mène à des solutions explicites et pratiques de conception de telles conduites. Le calcul de la dimension linéaire est simple dans une large gamme pratique du taux de remplissage $0,20 \leq \eta \leq 0,80$. Ainsi pour les six profils étudiés nous avons donné une formule généralisée pour la détermination du diamètre caractéristique D sans se soucier du coefficient f .

Deux manières différentes ont été proposées pour la détermination de la profondeur normale y_n , l'une basée sur la conductivité du modèle rugueux de référence, l'autre sur la détermination du rapport Q/Q_{\max} . Les résultats obtenus et les vérifications élaborées par de nombreux exemples d'application ont montré la fiabilité et la simplicité de la méthode du modèle rugueux de référence.

Mot clefs: écoulement permanent uniforme ; taux de remplissage ; dimension linéaire; facteur de correction ; modèle rugueux de référence, conductivité relative ; relation approchée.

Abstract:

The circular and non-circular shapes of the pipes are often used for the disposal of high flows in large supply systems or sewer lines. The main objective is the design of such behavior when the flow fixing it installs permanent uniform. A first approach to design the case of turbulent rough, assuming a coefficient of flow resistance invariable, is proposed. Over thirty approximate relations based on the coefficient of *Chézy* and *Manning* for six different behavior patterns are found. They give the linear dimension D or depth explicitly quick and easy.

The second theoretical approach is based on a rough reference model. This model has the same form as such conduct but the relative roughness is arbitrarily chosen so that the regime is fully turbulent settles. Then the coefficient of friction of Colebrook-White remains constant regardless of the Reynolds number. The linear dimension is equal to that of the reference model rough corrected by a dimensionless factor. This factor is defined as the flow rate, the gradient of pressure drop, the absolute roughness and kinematic viscosity are known. This approach proved to pipes and channels support, is proposed in this case the free flow. The study is applicable in the whole field of turbulent flow and leads to explicit solutions and practical design of such pipelines. The calculation of the linear dimension is simple in practice a wide range of load factors. Thus for the six profiles studied we gave a generalized formula for determining the characteristic diameter D regardless of the coefficient.

Two ways have been proposed for determining the normal depth, one based on the conductivity of the rough reference model, the other on the determination of the ratio. The results and verification developed by many application examples have shown the reliability and simplicity of the method of rough reference model

Keywords: uniform permanent flow; fill rate ; linear dimension; correction factor ; rough reference model; relative conductivity ; approximate relation .

SOMMAIRE

| | |
|--|----|
| Introduction générale | 1 |
| CHAPITRE I | |
| ETAT DES CONNAISSANCES SUR LE CALCUL DES CONDUITES EN COULEMENT A SURFACE LIBRE | 5 |
| Introduction | 5 |
| 1.1 Ecoulement permanent à surface libre-Base théorique..... | 5 |
| 1.1.1 Eléments géométriques de la section droite..... | 6 |
| 1.1.2 Equation de continuité..... | 6 |
| 1.1.3 Equation de mouvement :..... | 6 |
| 1.1.4 Coefficient de frottement f | 8 |
| 1.1.5 Dimensionnement par les méthodes classiques..... | 14 |
| 1.2 Théorie de la longueur fluidodynamique..... | 20 |
| 1.2.1 Base Théorique | 21 |
| 1.2.2 Démonstration de la théorie :..... | 23 |
| 1.3 Longueur fluidodynamique modifiée..... | 34 |
| 1.3.1 Calcul de la dimension linéaire - Cas du régime turbulent rugueux..... | 34 |
| 1.3.2 Calcul de la dimension linéaire- Cas du régime de transition..... | 36 |
| 1.3.3 Calcul de la dimension linéaire. Cas du domaine pratiquement lisse..... | 38 |
| 1.4 Méthode du modèle rugueux de référence..... | 41 |
| 1.4.1 Modèle rugueux de référence | 41 |
| 1.4.2 Calcul de l'écoulement turbulent par le modèle rugueux de référence ... | 43 |
| CHAPITRE II | |
| ETUDE DE L'ECOULEMENT PERMANENT UNIFORME DANS LES CONDUITES CIRCULAIRES | 53 |
| Introduction..... | 53 |
| 2.1 Ecoulement à coefficient de résistance invariable..... | 53 |
| 2.1.1 Eléments hydrauliques de la section transversale..... | 54 |

| | | |
|-------|--|----|
| 2.1.2 | Écoulement à coefficient de résistance de Chézy constant..... | 57 |
| 2.1.3 | Écoulement à coefficient de résistance de Manning constant..... | 66 |
| 2.2 | Écoulement à coefficient de résistance variable..... | 75 |
| 2.2.1 | Expression générale du diamètre..... | 75 |
| 2.2.2 | Variation de la conductivité relative du modèle rugueux de référence Calcul de la profondeur normale..... | 77 |
| 2.2.3 | Expression du débit volume maximal | 79 |
| 2.2.4 | Etude de la variation | 83 |
| 2.3 | Écoulement critique..... | 84 |

CHAPITRE III

| | |
|---|----|
| ETUDE DE CONDUITES FERMEES NON CIRCULAIRES..... | 88 |
|---|----|

CONDUITE OVOIDALE NORMALE (I).....

| | | |
|--------|---|-----|
| 3.1. | Éléments hydrauliques de la section transversale..... | 91 |
| 3.2. | Écoulement à coefficient de résistance de Chézy invariable..... | 100 |
| 3.3. | Écoulement à coefficient de résistance de Manning invariable..... | 104 |
| 3.4. | Écoulement à coefficient de résistance variable..... | 109 |
| 3.4.1. | Expression générale du diamètre..... | 109 |
| 3.4.2. | Variation de la conductivité relative du modèle rugueux de référence : Calcul de la profondeur normale | 110 |
| 3.4.3. | Expression du débit volume maximal | 112 |
| 3.4.4. | Relation approchée de la profondeur normale | 115 |
| 3.5. | Écoulement critique..... | 115 |

CONDUITE EN FORME DE FER A CHEVAL (II).....

| | | |
|--------|---|-----|
| 3.1 | Éléments hydrauliques de la section transversale..... | 119 |
| 3.2. | Écoulement à coefficient de résistance de Chézy invariable..... | 128 |
| 3.3. | Écoulement à coefficient de résistance de Manning invariable..... | 133 |
| 3.4. | Écoulement à coefficient de résistance variable..... | 138 |
| 3.4.1. | Expression générale du diamètre | 138 |

| | | |
|--------|--|-----|
| 3.4.2. | Variation de la conductivité relative du modèle rugueux de référence : | |
| | Calcul de la profondeur normale..... | 139 |
| 3.4.3. | Expression du débit volume maximal | 141 |
| 3.4.4. | Relation approchée de la profondeur normale | 144 |
| 3.5. | Ecoulement critique..... | 144 |

CONDUITE OVOIDALE A RADIERS APLATI (III)

| | | |
|------|---|-----|
| | | 147 |
| 3.1. | Eléments hydrauliques de la section transversale..... | 149 |
| 3.2. | Ecoulement à coefficient de résistance de Chézy invariable..... | 158 |
| 3.3. | Ecoulement à coefficient de résistance de Manning invariable..... | 164 |
| 3.4. | Ecoulement à coefficient de résistance variable..... | 169 |
| | 3.4.1. Expression générale du diamètre..... | 169 |
| | 3.4.2. Variation de la conductivité relative du modèle rugueux de référence : | |
| | Calcul de la profondeur normale..... | 170 |
| | 3.4.3. Expression du débit volume maximal | 172 |
| | 3.4.4. Relation approchée de la profondeur normale | 175 |
| 3.5. | Ecoulement critique..... | 175 |

CONDUITE CIRCULAIRE AVEC BANQUETTES (IV)

| | | |
|------|---|-----|
| | | 178 |
| 3.1. | Eléments hydrauliques de la section transversale..... | 179 |
| 3.2. | Ecoulement à coefficient de résistance de Chézy invariable..... | 184 |
| 3.3. | Ecoulement à coefficient de résistance de Manning invariable..... | 190 |
| 3.4. | Ecoulement à coefficient de résistance variable..... | 196 |
| | 3.4.1. Expression générale du diamètre..... | 196 |
| | 3.4.2. Variation de la conductivité relative du modèle rugueux de référence : | |
| | Calcul de la profondeur normale..... | 197 |
| | 3.4.3. Expression du débit volume maximal | 199 |
| | 3.4.4. Relation approchée de la profondeur normale..... | 201 |
| 3.5. | Ecoulement critique..... | 202 |

| | |
|---|------------|
| CONDUITE EN ARC DE CERCLE ECRASE (V) | 205 |
| 3.1. Caractéristiques de l'écoulement..... | 206 |
| 3.2. Ecoulement à coefficient de résistance de Chézy invariable..... | 212 |
| 3.3. Ecoulement à coefficient de résistance de Manning invariable..... | 218 |
| 3.4. Ecoulement à coefficient de résistance variable..... | 224 |
| 3.4.1. Expression générale du diamètre..... | 224 |
| 3.4.2. Variation de la conductivité relative du modèle rugueux de référence : Calcul de la profondeur normale..... | 225 |
| 3.4.3. Expression du débit volume maximal | 227 |
| 3.4.4. Relation approchée de la profondeur normale :..... | 229 |
| 3.5. Ecoulement critique | 230 |
| Tableau récapitulatif des formules approchées pour les six profils étudiés..... | 234 |
| Conclusion générale..... | 237 |
| Référence bibliographique | 241 |

Liste des figures :

| | |
|---|----|
| Figure 1.1 : Schéma de l'écoulement uniforme..... | 6 |
| Figure 1.2 : Diagramme de <i>Moody</i> | 11 |
| Figure 1.3 : Conduite ovoïdale normale..... | 16 |
| Figure 1.4. $D = f(K_i)$ | 17 |
| Figure 1.5 : longueur fluidodynamique..... | 22 |
| Figure 1.6 : Représentation de l'équation de <i>Nikuradsé</i> (1.20)..... | 24 |
| Figure 1.7 : Parties des abaques 8b, 17a et 17i tracés par <i>G. Lapray</i> | 30 |
| Figure 1.8 : Variation de $\psi(\bar{R})$ selon la relation (1.164) pour diverses valeurs de ε/\bar{D} | 46 |
| | |
| Figure 2.1 : Schéma de définition de l'écoulement en conduite circulaire..... | 54 |
| Figure 2.2 : Variation du rayon hydraulique relatif R_h/D en fonction du taux η | 57 |
| Figure 2.3 : Variation $\eta(Q^*)$, selon la relation (2.25)..... | 59 |
| Figure 2.4 : Ecart relatif $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (2.28) sur le calcul du taux η . | 60 |
| Figure 2.5 : Variation $\eta(Q/Q_p)$, selon la relation (2.28) pour C constant..... | 60 |
| Figure 2.6 : Variation de $\eta(Q/Q_{\max})$ pour C constant selon la relation (2.32)..... | 62 |
| Figure 2.7 : Variation du taux de remplissage η en fonction de la conductivité relative Q_y^* pour C constant. | 64 |
| Figure 2.8 : Ecart relatif $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (2.39) sur le calcul du taux η . | 65 |
| Figure 2.9 : Variation du taux en fonction de la conductivité relative $\eta(Q^*)$, selon la relation (2.42)..... | 67 |
| Figure 2.10 : Ecart relatif $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (2.45) sur le calcul du taux de η . | 68 |
| | |
| Figure 2.11 : Variation $\eta(Q/Q_p)$, selon la relation (2.47) pour n constant..... | 69 |
| Figure 2.12 : Variation de $\eta(Q/Q_{\max})$ pour n constant selon la relation (2.50)..... | 70 |
| Figure 2.13 : Variation du taux η en fonction de la conductivité relative Q_y^* selon la relation (2.53)..... | 73 |
| Figure 2.14 : Ecart relatif $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (2.56) sur le calcul du taux de η . | 73 |
| Figure 2.15 : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs du nombre de <i>Reynolds</i> R_p pour $\varepsilon/D = 0$ à $0,01$ | 81 |
| Figure 2.16 : Variation du taux de remplissage critique η_c en fonction du débit relatif Q^* selon relation | 85 |

(2.84).

| | |
|---|-----|
| Figure 2.17 : Ecarts relatifs $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (2.85) sur le calcul de η_c | 85 |
| Figure 3.1.I : Schéma de définition de la conduite ovoïde normale..... | 89 |
| Figure 3.2.I Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite ovoïdale normale..... | 91 |
| Figure 3.2.I : Variation du rayon hydraulique relatif R_h/D en fonction du taux η | 99 |
| Figure 3.4.I : Variation de la conductivité Q^* en fonction du taux η , tracée selon la relation (2.25)..... | 100 |
| Figure 3.5.I : Ecarts relatifs $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (3.59.I) sur le calcul de η | 101 |
| Figure 3.6.I : Variation de la conductivité relative Q_y^* en fonction du taux de remplissage η | 103 |
| Figure 3.7.I : Ecarts relatifs sur le calcul du taux de remplissage η par (3.64.I-a) et (3.64.I-b)..... | 104 |
| Figure 3.8.I : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction de η selon formule de <i>Manning Strickler</i> | 105 |
| Figure 3.9.I : Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (3.67.I) sur le calcul du taux..... | 106 |
| Figure 3.10.I : Courbes de variation $\eta(Q_y^*)$ dans les conduites ovoïdale normale et circulaire..... | 108 |
| Figure 3.11.I : Ecarts relatifs en (%) occasionnées par les relations approchées (3.72.I-a) et (3.72.I-b)..... | 109 |
| Figure 3.12.I : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs de ε/D et de R_p conformément a la relation (3.84.I). | 113 |
| Figure 3.13.I : Variation du taux critique η_c en fonction de Q^* . Courbe tracée selon la relation (2.83)..... | 115 |
| Figure 3.1.II : Schéma de définition de la conduite en forme de fer à cheval..... | 118 |
| Figure 3.2.II. Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite en forme de fer à cheval..... | 120 |
| Figure 3.3.II : Variation du rayon hydraulique relatif R_h/D en fonction du taux η | 128 |
| Figure 3.4.II : Variation de la conductivité Q^* en fonction du taux η , tracée selon la relation (2.25)..... | 128 |
| Figure 3.5.II : Ecarts $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (3.59.II) sur le calcul du taux..... | 129 |
| Figure 3.6.II : Variation de la conductivité relative Q_y^* en fonction du taux de remplissage η | 132 |
| Figure 3.7.II : Ecarts relatifs occasionnés par (67) sur le calcul du taux de remplissage η | 132 |
| Figure 3.8.II : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction du taux η selon <i>Manning Strickler</i> | 133 |
| Figure 3.9.II : Ecarts relatifs en (%) occasionnés par (3.67.II) sur le calcul de η de la conduite en fer à cheval. | 134 |

| | |
|--|-----|
| Figure 3.10.II : Courbes de variation $\eta(Q_y^*)$ dans les conduites en fer à cheval et circulaire..... | 137 |
| Figure 3.11.II : Ecarts relatifs en (%) occasionnées par les relations (3.72.II-a), (3.72.II-b) et (3.72.II-c)..... | 137 |
| Figure 3.12.II : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs de ε/D et de R_p conformément a la relation 3.84.II). | 142 |
| Figure 3.13.II : Variation du taux critique η_c en fonction de Q^* . Courbe tracée selon la relation (2.83)..... | 144 |
| Figure 3.1.III. Schéma de définition de la conduite ovoïde à radier aplati..... | 147 |
| Figure 3.2.III. Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite ovoïdale à radier aplati..... | 150 |
| Figure 3.3.III : Variation du rayon hydraulique relatif R_h/D en fonction du taux η | 157 |
| Figure 3.4.II : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction du taux de remplissage η | 159 |
| Figure 3.5.III : Ecarts $\Delta\eta/\eta$ (%) occasionnés par la relation approchée (3.57.III) sur le calcul du taux η | 160 |
| Figure 3.6.III : Variation de la conductivité relative Q_y^* en fonction du taux de remplissage η | 163 |
| Figure 3.7.III : Ecarts relatifs occasionnés par (3.63.III) sur le calcul du taux de remplissage η | 163 |
| Figure 3.8.III : Variation de la conductivité Q^* en fonction du taux η selon la formule de <i>Manning Strickler</i> . | 164 |
| Figure 3.9.III : Ecarts relatifs occasionnés par (3.66.III) sur le calcul de η de la conduite à radier aplati..... | 165 |
| Figure 3.10.III : Courbes de variation $\eta(Q_y^*)$ dans les conduites ovoïdale à radier aplati et circulaire..... | 168 |
| Figure 3.11.III : Ecarts relatifs en (%) occasionnées par les relations approchées (3.72.III-a) et (3.72.III-b).... | 168 |
| Figure 3.12.III : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs de ε/D et de R_p conformément a (3.84.III)..... | 173 |
| Figure 3.13.III : Variation du taux de remplissage critique η_c en fonction du débit relatif Q^* selon (2.83)..... | 175 |
| Figure 3.1.IV. Schéma de définition de la conduite circulaire avec banquettes..... | 178 |
| Figure 3.2.IV. Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite circulaire avec banquettes..... | 179 |
| Figure 3.3.IV : Variation du rayon hydraulique relatif R_h/D en fonction du taux η | 184 |
| Figure 3.4.IV : Variation de la conductivité Q^* en fonction du taux η tracée selon la relation (2.25)..... | 184 |
| Figure 3.5.IV : Ecarts relatifs $\Delta\eta/\eta$ (%) occasionnés par (3.28.IV-a) et (3.28.IV-b) sur le calcul de η | 185 |
| Figure 3.6.IV : Variation de la conductivité relative Q_y^* en fonction du taux de remplissage η | 189 |
| Figure 3.7.IV : Ecarts $\Delta\eta/\eta$ (%) occasionnés par (3.33.IV-a), (3.33.IV-b) et (3.33.IV-c) sur le calcul de η .. | 189 |

| | |
|--|-----|
| Figure 3.8.IV : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction de η selon formule de <i>Manning Strickler</i> . | 190 |
| Figure 3.9.IV : Ecart relatifs en (%) occasionnés par les relations approchées (3.36.IV-a) et (3.36.IV-b)..... | 191 |
| Figure 3.10.IV : Courbes de variation $\eta(Q_y^*)$ dans les conduites circulaire avec banquettes et circulaire..... | 195 |
| Figure 3.11.IV : Ecart relatifs en (%) occasionnées par les relations (3.41.IV-a), (3.41.IV-b) et (3.41.IV-c)... | 195 |
| Figure 3.12.IV : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs de ε/D et de R_p conformément a (3.53.IV)..... | 200 |
| Figure 3.13.IV : Variation du taux critique η_c en fonction de Q^* . Courbe tracée selon la relation (2.83)..... | 202 |
| Figure 3.1.V . Schéma de définition de la conduite en arc de cercle écrasé..... | 205 |
| Figure 3.2.V . Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite en arc de cercle écrasé..... | 206 |
| Figure 3.3.V : Variation du rayon hydraulique relatif R_h/D en fonction du taux η | 211 |
| Figure 3.4.V : Variation de la conductivité Q^* en fonction du taux η tracée selon la relation (2.25)..... | 212 |
| Figure 3.5.V : Ecart $\Delta\eta/\eta$ (%) occasionnés par les relations (3.31.V-a) et (3.31.V-b) sur le calcul de η | 213 |
| Figure 3.6.V : Variation de la conductivité relative Q_y^* en fonction du taux de remplissage η | 217 |
| Figure 3.7.V : Ecart relatifs sur le calcul du taux de remplissage η par (3.37.V-a) et (3.37.V-b)..... | 217 |
| Figure 3.8.V : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction de η selon la formule de <i>Manning Strickler</i> . | 218 |
| Figure 3.9.V : Ecart relatifs en (%) occasionnés par (3.40.V-a) et (3.40.V-b) sur le calcul du taux η | 219 |
| Figure 3.10.V : Courbes de variation $\eta(Q_y^*)$ dans les conduites en arc de cercle écrasé et circulaire..... | 223 |
| Figure 3.11.V : Ecart relatifs en (%) occasionnées par les relations (3.46.V-a) et (3.46.V-b)..... | 223 |
| Figure 3.12.V : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs de ε/D et de R_p conformément a relation (3.58.V). | 228 |
| Figure 3.13.V : Variation du taux critique η_c en fonction de Q^* . Courbe tracée selon la relation (2.83)..... | 230 |

Liste des tableaux :

Conduite circulaire

Tableau n°1 : Tableau des Paramètres adimensionnels. 57

Tableau n°2 : Valeurs du taux η pour $Q = Q_{\max}$, pour diverses valeurs de ε/D et R_p . 82

Conduite ovoïdale normale

Tableau n°1 : Tableau des Paramètres adimensionnels. 99

Tableau n°2 : Valeurs du taux η pour $Q = Q_{\max}$, pour diverses valeurs de ε/D et R_p . 114

Conduite en forme de fer à cheval

Tableau n°1 : Tableau des Paramètres adimensionnels. 127

Tableau n°2 : Valeurs du taux η pour $Q = Q_{\max}$, pour diverses valeurs de ε/D et R_p . 143

Conduite ovoïdale à radier aplati

Tableau n°1 : Tableau des Paramètres adimensionnels. 158

Tableau n°2 : Valeurs du taux η pour $Q = Q_{\max}$, pour diverses valeurs de ε/D et R_p . 174

Conduite circulaire avec banquettes

Tableau n°1 : Tableau des Paramètres adimensionnels. 183

Tableau n°2 : Valeurs du taux η pour $Q = Q_{\max}$, pour diverses valeurs de ε/D et R_p . 201

Conduite en arc de cercle écrasé

Tableau n°1 : Tableau des Paramètres adimensionnels. 211

Tableau n°2 : Valeurs du taux η pour $Q = Q_{\max}$, pour diverses valeurs de ε/D et R_p . 229

PRINCIPALES NOTATIONS :

| | |
|--------------------|--|
| $A(m^2)$: | Aire d'une section mouille. |
| $\bar{A}(m^2)$: | Aire d'une section mouille dans le modèle rugueux de référence. |
| $a(m)$: | Dimension linéaire quelconque. |
| A_1 : | Aire d'une section mouille lorsque la dimension linéaire est égale à l'unité. |
| $\bar{a}(m)$: | Dimension linéaire dans la théorie de la longueur fluidodynamique modifiée. |
| \bar{a} : | Dimension linéaire du modèle rugueux de référence (MMR). |
| C : | Coefficient de <i>Chézy</i> . |
| $D(m)$ | Diamètre caractéristique du profil de conduite |
| $\bar{D}(m)$ | Diamètre caractéristique d'une conduite fermée du modèle rugueux de référence |
| $D_h(m)$: | Diamètre hydraulique d'une section mouille. |
| $\bar{D}_h(m)$: | Diamètre hydraulique d'une section mouille dans le modèle rugueux de référence. |
| $e(m)$: | Largeur du plan de la surface libre |
| e_1 : | Largeur du plan de la surface libre d'une section mouille lorsque la dimension linéaire est égale à l'unité. |
| $\bar{e}(m)$: | Largeur du plan d'eau de la surface libre dans le modèle rugueux de référence. |
| f : | Coefficient de frottement. |
| \bar{f} : | Coefficient de frottement dans le modèle rugueux de référence (=1/16). |
| g : | Accélération de la pesanteur |
| J : | Gradient de perte de charge. |
| \bar{J} : | Gradient de perte de charge dans le modèle rugueux de référence. |
| k : | Coefficient de Strickler |
| $Q(m^3/s)$: | Débit volume. |
| $\bar{Q}(m^3/s)$: | Débit volume dans le modèle rugueux de référence |
| Q^* : | Conductivité relative ou débit relatif. |
| \bar{Q}^* | Conductivité relative ou débit relatif dans le modèle rugueux de référence. |

| | |
|--------------------------|--|
| Q_p^* | Conductivité relative ou débit relatif à l'état plein. |
| Q_{\max}^* | Conductivité relative ou débit relatif maximale. |
| $\bar{P}(m)$: | Périmètre d'une section mouille dans le modèle rugueux de référence. |
| P_1 : | Périmètre d'une section mouille lorsque la dimension linéaire est égale à l'unité. |
| $R_h(m)$: | Rayon hydraulique d'une section mouille. |
| $\bar{R}_h(m)$: | Rayon hydraulique d'une section mouille dans le modèle rugueux de référence. |
| R : | Nombre de <i>Reynolds</i> . |
| \bar{R} : | Nombre de <i>Reynolds</i> dans le modèle rugueux de référence. |
| R_{h1} : | Rayon hydraulique d'une section mouille lorsque la dimension linéaire est égale à l'unité. |
| $\varepsilon(m)$: | Rugosité absolue des parois. |
| $\bar{\varepsilon}(m)$: | Rugosité absolue des parois dans le modèle rugueux de référence. |
| η : | Taux de remplissage. |
| $\nu(m^2/s)$: | Viscosité cinématique du liquide. |
| $\bar{\nu}(m^2/s)$: | Viscosité cinématique du liquide dans le modèle rugueux de référence. |
| $\Lambda(m)$: | Longueur fluidodynamique dans LFD |
| $\Gamma(m)$ | Longueur fluidodynamique dans LFDM |
| Y : | Facteur sans dimension de correction de la dimension linéaire. |
| Y_Q : | Facteur sans dimension de correction du débit pour LFD. |
| Y_J : | Facteur sans dimension de correction du gradient de perte de charge pour LFD. |
| \dot{Y} : | Facteur sans dimension de correction de la dimension linéaire LFDM |
| ψ : | Facteur de correction de la dimension linéaire dans la MMR. |
| ψ_Q : | Facteur de correction des débits dans la MMR |
| "0" | Indice "0" distingue un paramètre quelconque sans dimension. |
| "r" | Indice "r" indique le domaine rugueux. |

INTRODUCTION GENERALE

L'étude de la perte de charge en régime permanent uniforme est identique aussi bien dans un canal ouvert que dans un collecteur fermé ou une canalisation en charge. Le régime laminaire est très peu rencontré ; par contre le régime turbulent est très fréquent. L'uniformité du mouvement sous l'action d'une force constante, la pesanteur, n'est possible que par suite des pertes d'énergie qui prennent naissance dans le liquide sous l'effet de la viscosité et de la turbulence.

L'écoulement est considéré comme étant permanent uniforme que lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace. Les caractéristiques principales sont la profondeur h de l'écoulement ou hauteur normale, l'aire de la section mouillée A , la vitesse moyenne V de l'écoulement, le débit Q et le gradient de perte de charge J .

Les formules fondamentales du régime permanent uniforme établissent une relation entre ces caractéristiques. Cette relation se présente, en règle générale, sous la forme $V = CR_h^\beta J^\gamma$, où C est un paramètre qui traduit la résistance de l'écoulement et dépend de la vitesse moyenne V , du rayon hydraulique R_h , de la rugosité absolue ε des parois du canal, de la viscosité ν du liquide et de beaucoup d'autres facteurs.

Le dimensionnement, la détermination de la perte de charge et du débit volume dans ces écoulements uniformes à surface libre ou en charge sont une préoccupation importante pour le projeteur hydraulicien.

Laissant hors considérations l'effet des forces dues à la viscosité, *Chézy* a montré, en 1775, que la résistance à l'écoulement est sensiblement proportionnelle au carré de la vitesse moyenne de l'eau et que l'équation de ce mouvement pouvait s'écrire $V = C\sqrt{R_h J}$ où C est un coefficient appelé coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*, qui ne dépend pas uniquement de la rugosité ε des parois mais aussi de la répartition de la vitesse ; donc des éléments de la surface et de la forme du lit.

Plusieurs formules ont été proposées pour exprimer le coefficient C de *Chézy*, on peut citer par exemple les formules de *Prony*, *Tadini*, *Ganguillet et Kutter* (1870), *Darcy* (1865), *Bazin* (1897), *Powell* (1950) et d'autres formules sous la forme exponentielle $C = \alpha R_h^\beta$ (*Forchheimer*, *Manning* (1891); *Strickler*, 1923 ; *Pavlovski*).

Une autre formule largement utilisée dans les écoulements uniformes dans les canaux ouverts est celle de *Manning* (1891) en raison de sa forme simplifiée et les résultats satisfaisant auxquels elle aboutit. Cette relation s'écrit $V = R_h^{2/3} J^{1/2} / n$ où $n = R_h^{1/6} / C$ est le coefficient de rugosité de *Manning*. En 1911 dans son « étude des canalisations pour l'irrigation et le drainage » *Strickler* énonça la même formule $V = K_s R_h^{2/3} J^{1/2}$ où K_s représente le coefficient de *Strickler* qui est l'inverse de celui de *Manning*.

Ces formules empiriques ont été établies souvent d'après les résultats d'expérience faites dans un domaine assez limité (canaux et conduites de dimensions importantes et utilisation forts débits) elles sont employées par la suite dans tous les cas possibles avec des extrapolations que ceux qui les utilisent ne soupçonnent même pas. Les expressions exponentielles $C = \alpha R_h^\beta$, arrivent à des erreurs déplorables, car l'effet de la viscosité cinématique ν y est négligé et la rugosité y est exprimée grossièrement selon la nature des matériaux constituant la frontière solide

Depuis *Chézy* (1775), les ingénieurs ont cherché longtemps avec intérêt à établir une formule pratique qui donnerait la relation entre la perte de charge (qui représente le frottement), le débit et les autres éléments intervenant dans le mouvement de l'eau. C'est le succès de la similitude qui a permis d'établir la forme générale de la loi de frottement à travers le coefficient de perte de charge f .

Ainsi, pour un fluide quelconque dans un ouvrage quelconque (canalisation en charge, écoulement à surface libre), la pente de frottement s'écrit $J = f/D_h \cdot (V^2/2g)$. Cette relation très utilisée dans notre étude est celle de *Darcy-Weisbach* (1854), développée pour les écoulements en conduites, elle fut généralisée pour tous types de canaux en introduisant le diamètre hydraulique D_h , dimension linéaire caractéristique d'une section transversale de l'ouvrage considéré (diamètre d'une canalisation, diamètre hydraulique de la section mouillée d'un écoulement à surface libre, etc.), f est la résistivité adimensionnelle ou le coefficient de frottement relié lui-même au coefficient de *Chézy* par la relation $C = \sqrt{8g/f}$ et g est l'accélération de la pesanteur.

Le coefficient f est déterminé par la formule *Colebrook-White*, il dépend à la fois de la rugosité relative ε/D_h et du nombre de *Reynolds* R qui lui-même dépend de la nature du régime d'écoulement dans la conduite. La formule de *Colebrook-white* couvre tout le domaine utile de la turbulence, en effet pour l'écoulement théoriquement lisse ($\varepsilon \rightarrow 0$) elle admet comme cas particulier la formule théorique de *Prandtl*, alors pour le régime turbulent rugueux, appartenant à la pleine turbulence ($R \rightarrow \infty$), on trouve la formule de *Nikuradsé*. La représentation graphique de la variation de $f = \chi(R, \varepsilon/D_h)$ est appelé diagramme de *Stanton*.

Les grandeurs physiques, à savoir le débit Q , le gradient J de perte de charge, la rugosité absolue ε , l'une des longueurs caractéristiques de la section, arbitrairement choisie désignée par a , les paramètres de formes tel que $\eta = h/D$ déterminant le taux de remplissage d'une conduite circulaire, ou $\xi = h/e$ donnant le rapport entre la hauteur d'eau et la largeur du plan d'eau pour un profil parabolique, $w = b/h$ et $m = \cotg \varphi$ pour un profil trapézoïdal, ainsi que la viscosité cinématique ν du fluide en écoulement sont reliées entre elles par des relations compliquées, transcendantes voire implicites, que

l'on peut écrire pour une conduite circulaire ou non-circulaire fermée sous la forme $\varphi(a, Q, J, \varepsilon, \nu, \eta) = 0$

Dans la pratique, l'ingénieur doit répondre à trois catégories de problèmes :

- La première catégorie répond à un besoin de dimensionnement et consiste à déterminer la dimension linéaire a à partir des cinq autres valeurs des grandeurs connues.

La relation φ devient alors $a = \varphi_a(Q, J, \varepsilon, \eta, \nu)$. Il n'existe pas de relation explicite susceptible de répondre à ce problème lorsque l'écoulement est de nature lisse ou transitoire, car on ne peut évaluer le nombre de *Reynolds* R qui lui-même dépend de la dimension a recherchée. La solution est donnée par un calcul péniblement laborieux, s'appuyant sur des procédés itératifs. Dans le domaine de pleine turbulence, la dimension a est indépendante de R , l'application des formules de *Chézy* ou de *Manning-Strickler* donnent des résultats satisfaisant.

- La deuxième catégorie de problème consiste à évaluer le débit Q , tel que $Q = \varphi_Q(a, J, \varepsilon, \eta, \nu)$. Ce problème trouve sa solution d'une manière explicite quelque que soit la nature du régime d'écoulement par l'application des formules de *Darcy-Weisbach* et de *Colebrook-White* (1845 ; 1854).

- En fin la troisième catégorie qui consiste à évaluer le gradient de perte de charge tel que $J = \varphi_J(a, Q, \varepsilon, \eta, \nu)$, la formule de *Darcy-Weisbach* (*Swamee et Jain* 1976-1978) est suffisante.

Dans la présente étude nous nous sommes intéressé particulièrement au seul problème de dimensionnement des conduites circulaires et non-circulaires fermées ou l'écoulement est uniforme à ciel ouvert. Les sections de formes ovoïdale normale, ovoïdale à radier aplati, en fer à cheval, circulaire à banquettes et en arc de cercle écrasé ont fait l'objet de notre étude. Les études existantes se rapportant au dimensionnement de telles conduites ne sont pas nombreuses. Elles proposent soit une résolution graphique, soit des solutions itératives basées toutes sur un coefficient de résistance à l'écoulement constant. D'autres donnent, avec des relations approchées explicites, des solutions pour les grosses conduites remplies à 75%. Il n'existe pas actuellement une approche théorique donnant des solutions intégrant toute valeur du taux de remplissage η entre 0 et 1.

La bibliographie montre que dans le domaine tout entier du régime turbulent défini par *Moody*, les formules de *Chézy* et de *Manning* sont écartées en raison de la difficulté à évaluer les coefficients de résistance à l'écoulement. Ces dernières formules peuvent cependant être appliquées au seul cas du régime turbulent rugueux et en considérant que des coefficients de résistance à l'écoulement sont invariable en fonction du taux de remplissage. Cette situation s'éloigne du comportement naturel de l'écoulement et mène à des résultats non satisfaisants.

L'objectif est de proposer une approche théorique pouvant contribuer à une meilleure compréhension du comportement de l'écoulement uniforme dans les conduites circulaires et non-

circulaires. Cette théorie est applicable dans le domaine entier de l'écoulement turbulent et aboutit à des solutions explicites et pratiques de conception de telles conduites.

Basée sur la méthode du modèle rugueux de référence (*B. Achour-2006*), le calcul de la dimension linéaire, y compris celui de la profondeur normale, devient alors aisé dans une large gamme pratique $0,2 \leq \eta \leq 0,8$ du taux de remplissage. La dépendance des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy* ou de *Manning* vis à vis de la variation du taux de remplissage peut être mise facilement en évidence.

Pour la fiabilité de la méthode, nous avons intégrés les contraintes de vitesse et de débit maximal dans la démarche menant au dimensionnement.

La courbe de remplissage des diverses conduites étudiées est clairement définie et interprétée pour toute rugosité relative, tout en mettant en exergue l'influence du nombre de *Reynolds*.

L'approche de dimensionnement peut être considérée comme généralisée car aucune restriction n'est imposée aux paramètres d'entrée de l'écoulement, dans la gamme ci-dessus indiquée du taux de remplissage.

Notre étude s'articule sur trois chapitres principaux :

Le premier chapitre est exclusivement réservé à l'état des connaissances des différentes méthodes de dimensionnement. Il est consacré à une synthèse bibliographique où les insuffisances des méthodes de calcul actuelles sont mises en évidence.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la conduite, la plus répandue, de forme circulaire. Les calculs pour la détermination du diamètre et la profondeur normale d'une conduite circulaire, dans l'écoulement à coefficient de résistance invariable, sont largement abordés et suivis par des exemples d'application.

L'application de la nouvelle méthode dite Méthode du Modèle Rugueux de référence ou " MMR " (*Achour, 2006*), déjà appliquée pour les conduites en charge, est généralisée aux calculs de dimensionnement et de la profondeur normale. Cette méthode ne nécessite ni la connaissance du coefficient de frottement au sens de *Colebrook-White*, ni celle du coefficient de résistance à l'écoulement au sens de *Chézy* ou de *Manning-Strickler*. Les effets de ces coefficients sont implicitement considérés dans les développements théoriques. Ces calculs sont suivis d'exemples d'application et vérifiés par des méthodes fiables et rigoureuses.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des conduites de formes non-circulaire largement utilisées dans les adductions et l'assainissement. La même démarche des calculs a été adoptée pour cinq formes de section. Il s'agit des formes ovoïdale normale, ovoïdale à radier aplati, en fer à cheval, circulaire à banquettes et en arc de cercle écrasé.

Suivis d'exemples d'application, et vérifiés rigoureusement, ces calculs vont montrer la fiabilité et la simplicité de la MMR.

CHAPITRE I

ETAT DES CONNAISSANCES SUR LE CALCUL DES CONDUITES EN ECOULEMENT A SURFACE LIBRE.

Introduction :

Nous avons réservé le présent chapitre à l'état des connaissances sur l'écoulement permanent à surface libre d'un fluide incompressible dans les conduites. Nous allons d'abord rappeler les équations fondamentales du régime permanent et leur application au calcul du gradient de perte de charge. Nous présenterons les différentes formules utilisées pour la détermination du coefficient de résistance à l'écoulement sans tenir compte de la nature du régime d'écoulement. Ensuite nous allons longuement discuter la formule la plus utilisée du coefficient de frottement dite de *Colebrook-White*.

Il nous a paru intéressant de rassembler les principes fondamentaux de l'hydraulique dont chaque ingénieur a constamment besoin et qui lui permettent de mieux approcher les problèmes qu'il doit résoudre, notamment pour le dimensionnement des conduites de distribution et d'évacuation, dans la construction des canaux d'assainissement et de l'irrigation et des stations de pompage, etc.

Basé principalement sur la combinaison des formules de *Darcy-Weisbach*, de *Colebrook-white* et du nombre de *Reynolds*, le calcul classique de cette dimension linéaire passe par une résolution itérative ou graphique.

L'objectif dans ce chapitre, est de passer en revue les diverses méthodes existantes permettant de répondre à ce problème, par un calcul simple de cette dimension linéaire. Un exemple concret de dimensionnement d'une conduite par les différents procédés sera présenté pour montrer les contours de chaque méthode.

1.1 Ecoulement permanent à surface libre-Base théorique

L'écoulement, représenté sur la figure 1.1, est permanent uniforme si la profondeur h , ainsi que les autres paramètres, tels que la vitesse moyenne V , le débit Q , la rugosité ε et la pente de fond J_f restent invariables dans les différentes sections du canal le long de l'écoulement. Les lignes de courant sont rectilignes et parallèles et la pression verticale reste hydrostatique. La pente de fond J_f , la pente de la surface libre J_w et la pente énergétique J_e , toutes nommée J , sont identiques.

L'écoulement véritablement uniforme est très rare dans les canaux naturels et assez rare dans les canaux artificiels mais on l'utilise souvent comme écoulement standard pour l'étude (théorique et expérimentale) de base pour tous les autres types d'écoulements, notamment pour la compréhension de la résistance à l'écoulement (*Graf et Altinakar, 1993*).

1.1.1 Éléments géométriques de la section droite:

Dans la section droite d'une conduite fermée (figure 1.1) :

- la surface libre est celle qui est en contact avec l'air : plan "ab".
- La surface mouillée A est la section droite occupée par le fluide : aire "acb".
- Le périmètre mouillé P est la longueur de la paroi solide de la conduite : ligne "acb".
- Le rayon hydraulique R_h désigne le rapport A/P
- La largeur de la surface mouillée e est la distance "ab".
- Tirant d'eau h est la hauteur d'eau au-dessus du point le plus bas de la section droite.

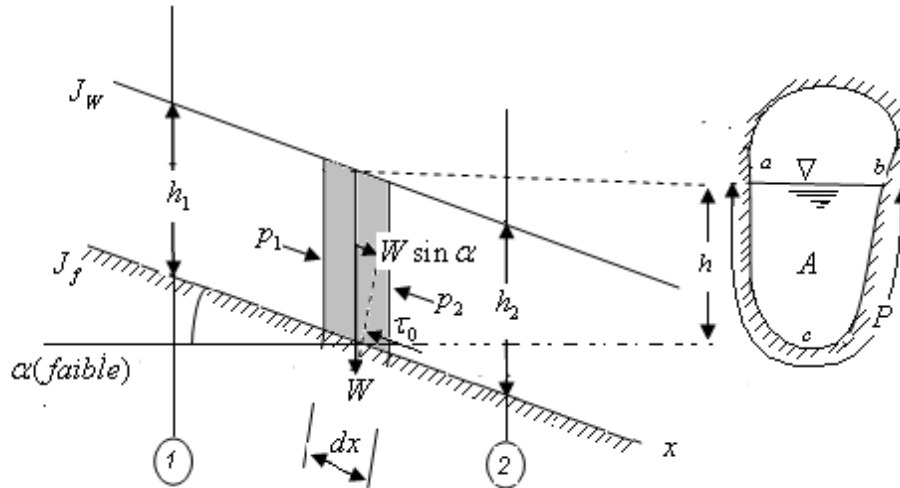


Figure 1.1 : Schéma de l'écoulement uniforme

1.1.2 Equation de continuité

Lorsque l'écoulement est uniforme et permanent, la section ou la surface mouillée, A reste la même selon x et selon t . l'équation qui s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial(VA)}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

Devient :

$$\frac{d(VA)}{dx} = 0 \quad (1.2)$$

Ou V est la vitesse moyenne et A est la section mouillée.

Le débit $Q = VA$ reste constant entre les deux sections 1 et 2 :

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 = VA = \text{constante} \quad (1.3)$$

1.1.3 Equation de mouvement :

i. Dans la conduite fermée (ou un canal prismatique) de la figure 1.1, la tranche fluide " dx " en mouvement exerce une force de frottement sur les parois :

$$F_F = \tau_0 P dx \quad (1.4)$$

Ou τ_0 est la tension moyenne ou contrainte due aux forces de frottement agissant sur la surface Pdx .
Ce mouvement est sous l'action de la composante longitudinale de la force de gravité d'une part et des forces dues à la pression d'autre part, ces deux forces s'écrivent respectivement :

$$F_G = W \sin \alpha = \gamma_f A dx \sin \alpha \quad (1.5)$$

W est le poids de la tranche liquide " dx " et γ_f est le poids spécifique du fluide.

$$F_p = (p_1 - p_2)A = (h_1 - h_2)\gamma_f A \quad (1.6)$$

En écoulement uniforme, il y a équilibre entre ces forces :

$$\tau_0 P dx = (h_1 - h_2)\gamma_f A + \gamma_f A dx \sin \alpha \quad (1.7)$$

Comme $h_1 = h_2$, on obtient :

$$\tau_0 = \gamma_f \frac{A}{P} \sin \alpha \quad (1.8)$$

Le rapport $\frac{A}{P}$ est bien évidemment le rayon hydraulique R_h défini par :

$$R_h = \frac{A}{P} \quad (1.9)$$

L'angle α , généralement petit, peut être confondu avec la tangente de celui-ci, soit :

$$\alpha \cong \sin \alpha = \tan \alpha.$$

Cette tangente représente la pente de fond de la conduite J_f , désigné aussi par J

La relation (1.7) devient alors :

$$\tau_0 = \gamma_f R_h J \quad (1.10)$$

ii. En hydrodynamique, la vitesse de frottement est défini comme suit :

$$u_*^2 = \frac{\tau_0}{\rho_f} \quad (1.11)$$

La masse volumique du fluide $\rho_f = \gamma_f / g$, on peut écrire alors en utilisant (1.10) et (1.11) :

$$u_* = \sqrt{g R_h J} \quad (1.12)$$

La contrainte tangentielle visqueuse à la paroi de la conduite est donné aussi en fonction de la résistivité ou du coefficient de frottement f (Graf & Altinakar, 1993) :

$$\tau_0 = \frac{f}{8} \rho_f V^2 \quad (1.13)$$

iii. En égalisant les relations (1.10) et (1.13), on tire l'expression de la perte de charge par unité de longueur ou gradient de perte de charge J :

$$J = f \frac{1}{4 R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (1.14)$$

Cette relation très utilisée pour les écoulements dans les conduites et canaux, est appelée équation de Darcy-Weisbach.

Elle s'écrit aussi de la manière suivante :

$$V = C\sqrt{R_h J} \quad (1.15)$$

Cette dernière est appelée relation de *Chézy* et C est le coefficient de *Chézy* défini par :

$$C = \sqrt{8g/f} \quad (1.16)$$

1.1.4 Coefficient de frottement f :

L'étude scientifique des dissipations hydrauliques linéaires (ou de frottement) en régime turbulent, dans les conduites circulaires à section constante, est arrivée actuellement à la formule de *Colebrook-white*, pour la résistivité adimensionnelle f . Elle couvre tout le domaine utile du régime. Par contre les écoulements à ciel ouvert restaient tributaires à des formules empiriques, donnant des expressions pour le coefficient de *Chézy*, relié lui-même à la résistivité f par la relation (1.16). Nous citerons quelques formules du coefficient C déduites de la formule de *Chézy* pour les écoulements à surface libre (*Ir. P. NONCLERCQ*, 1982)

– La formule de *Prony* :

$$\frac{1}{C^2} = \frac{a'}{V} + b' \quad \text{Avec } a' = 44.10^{-6} \text{ et } b' = 309.10^{-6}$$

– La formule de *Tadini* :

$$1/C^2 = 0,0004$$

– La formule de *Bazin* (1865)

$$C = \frac{87\sqrt{R_h}}{\gamma + \sqrt{R_h}} \quad \text{Ou } \gamma \text{ est un coefficient dépendant de la nature des parois}$$

– La formule de *Ganguillet et Kutter* (1896-1870)

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{J} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0,00155}{J}\right) \frac{n}{\sqrt{R_h}}}$$

Où J est la pente du fond, n un coefficient en fonction de la rugosité des parois.

– La formule *Kutter*

$$C = \frac{100\sqrt{R_h}}{b + \sqrt{R_h}} \quad \text{Valable pour } J > 0,0005 \text{ et ou } b \text{ dépend de la nature des parois}$$

– La formule *Manning-Strickler*

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n} = kR_h^{1/6} \quad \text{Ou } n \text{ est le coefficient de Manning en fonction de la rugosité des parois identique à celui de Ganguillet-Kutter et } k \text{ est le coefficient de Strickler}$$

– La formule de *Pavlovski* (*N. Kréménetski et al*, 1984)

$$C = \frac{R_h^y}{n} \quad \text{Ou } n \text{ est un coefficient de la rugosité et } y \text{ un exposant en fonction du rayon } R_h.$$

– La formule *Forchheimer*

$C = kR_h^{0.2}$ Ou k est un coefficient de la rugosité.

Et d'autres formules comme celles de *Thijssse, Blench, Vande perré, White-Colebrook, et Powell.*

Les valeurs des coefficients de résistance à l'écoulement de *Chézy, Manning, Bazin, Kutter* et autres sont, en règle générale des constantes attribuées par expérience, selon le cas étudié et la nature des parois du canal ou de la conduite. Ce sont des valeurs tabulées que l'on peut consulter dans de nombreux ouvrages.

Ils existent beaucoup d'autres formules que celles ci-avant, le choix s'avère donc difficile pour l'ingénieur ; on doit être sensibles aux écarts obtenus dans les résultats, suivant qu'on retient telle ou telle formule.

Nous seulement les formules très anciennes (*Basin, Kutter, Ganguillet-Kutter* etc.) mais aussi les expressions exponentielles $C = \chi R_h^\beta$ (de *Forchheimer, Manning, Strickler, Pavlovski, etc.*) arrivent à des erreurs déplorables, car tous les coefficients sont constant ce qui est contraire à l'expérience. En plus, on néglige l'effet de la viscosité cinématique ν et la rugosité y est exprimée grossièrement selon la nature des matériaux constituant la frontière solide.

De nos jours on est arrivé à la formule de *Colebrook-White* pour exprimer la résistivité adimensionnelle f . Cette formule couvre tout le domaine de la turbulence aussi bien le domaine lisse (ou la rugosité absolue $\varepsilon \rightarrow 0$) que celui turbulent rugueux (ou le nombre de *Reynolds* $R \rightarrow \infty$).

M.CARLIER (*Carlier, 1986*) fait remarquer, au sujet de ces formules, que : "Les formules nouvelles présentent une structure plus conforme aux lois de la mécanique que les formules empiriques souvent établies d'après des résultats d'expériences."

1.1.4.1 Formule de Colebrook-White :

En 1938-1939, *Colebrook* a voulu disposer d'une formule universelle, remédiant aux écarts fréquemment constaté entre la pratique et les résultats de l'analyse mathématique et, même, des essais de laboratoire. Il présenta le premier une formule rendant compte de l'écoulement dans la zone de transition. Il a étudié le frottement dans des tuyaux en rendant artificiellement ceux-ci rugueux au moyen de grains de sables isolés, placés sur le modèle et en utilisant le diamètre moyen des grains comme mesure de la rugosité ainsi créée, il proposa la formule :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.17)$$

Ou f est le coefficient de frottement, ε représente le diamètre moyen des grains du tuyau ou la rugosité absolue, D le diamètre du tuyau et R le nombre de *Reynolds* défini par la relation :

$$R = VD/\nu \quad (1.18)$$

ν est la viscosité cinématique du fluide.

Cette formule couvre tout le domaine utile de la turbulence. En effet pour une rugosité $\varepsilon \rightarrow 0$ elle admet comme cas particulier la formule théorique de *Prandtl*, pour les conduites théoriquement lisses:

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.19)$$

Alors que pour un nombre de *Reynolds* $R \rightarrow \infty$ on retrouve la formule de *Nikuradsé* :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right). \quad (1.20)$$

En dépit du fait que la formule (1.17) ait été établie en conduite, elle est fort intéressante lorsqu'elle est appliquée aux canaux ouverts (*Chow, 1973 ; Sinniger et Hager, 1989*), en apportant la modification suivante : à la place du diamètre de la conduite D , on utilisera le diamètre hydraulique défini en fonction du rayon hydraulique par la relation suivante :

$$D_h = 4R_h \quad (1.21)$$

Ce diamètre hydraulique est utilisé pour les écoulements à ciel ouvert, dans les définitions respectives du nombre de *Reynolds*, de la rugosité relative, de l'équation de *Darcy-Weisbach* et celle de *Colebrook-White* :

$$R = \frac{VD_h}{\nu} \quad (1.22)$$

$$\varepsilon/D_h \quad (1.23)$$

$$J = f \frac{1}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad (1.24)$$

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.25)$$

1.1.4.2 Diagramme universel de *Moody* :

La représentation graphique des valeurs du coefficient de frottement f dans un système de coordonnées à division logarithmique en fonction du nombre de *Reynolds* est appelé diagramme de *Stanton*.

En admettant que les valeurs ε/D et de R soient donnés, la relation (1.17) montre bien que la valeur du coefficient de frottement ne peut être explicitement déterminée. La détermination de f nécessite donc un procédé itératif ou graphique.

En se fondant sur les expériences de *Nikuradsé*, sur l'analyse mathématique de *Prandtl* et de *Von Karman*, sur les observations de *Colebrook-White* et sur un grand nombre d'expériences en conduites industrielles, *Moody* a établi, sur de telles recherches, son diagramme qui est l'un des plus pratiques pour la détermination du coefficient de frottement f . Ce coefficient est déterminé par la relation (1.17), valable pour les conduites industrielles, est exprimé en fonction du nombre de *Reynolds* R et de la rugosité relative ε/D .

Sur ce diagramme figure les observations de *Blasius* (1913) applicable à l'écoulement turbulent lisse ($\varepsilon \rightarrow 0$) en conduite sous pression, ces observations sont représentée graphiquement par une droite, dans le système de coordonnées logarithmique, d'équation :

$$f = \frac{0,223}{R^{0,25}} \quad (1.26)$$

Cette relation est valable pour $750 < R < 2,5.10^4$, cette restriction constitue une contrainte dans l'application de la formule (1.26) car dans les cas pratique le nombre de *Reynolds* $R > 2,5.10^4$.

Les observations de *Prandtl* et *Nikuradsé* figurent sur le diagramme pour un nombre de *Reynolds* plus élevé que celui de *Blasius* et le coefficient de frottement se traduit par l'équation :

$$f = \left[2 \log \left(R \sqrt{f} \right) + 0,4 \right]^{-2} \quad (1.27)$$

Cette relation est aussi implicite vis-à-vis du coefficient f .

La relation (1.17) de *Colebrook-White* représente l'ensemble du diagramme de *Moody*, à l'exception du régime laminaire représenté par la droite à gauche de la figure 1.2. Cette relation est applicable exclusivement à l'écoulement turbulent.

Pour les écoulements turbulent lisse, la courbe enveloppe inférieure du diagramme correspond à la représentation graphique de l'équation (1.19) de *Prandtl*.

A droite de cette courbe enveloppe les courbes pleines occupent la zone de turbulence, ces courbes deviennent pratiquement horizontales traduisant ainsi que le coefficient de frottement f devient exclusivement dépendant de la rugosité relative ε/D avec l'accroissement du nombre de *Reynolds* R . Ces courbes représentent les valeurs de f obtenus par la relation (1.20).

La courbe enveloppe en trait discontinu, correspondant à l'enveloppe inférieure de la zone de pleine turbulence, a été tracé en admettant un écart de 1,5% entre les valeurs du coefficient f obtenues par l'application de la relation (1.17) et celles issues de la relation (1.19).

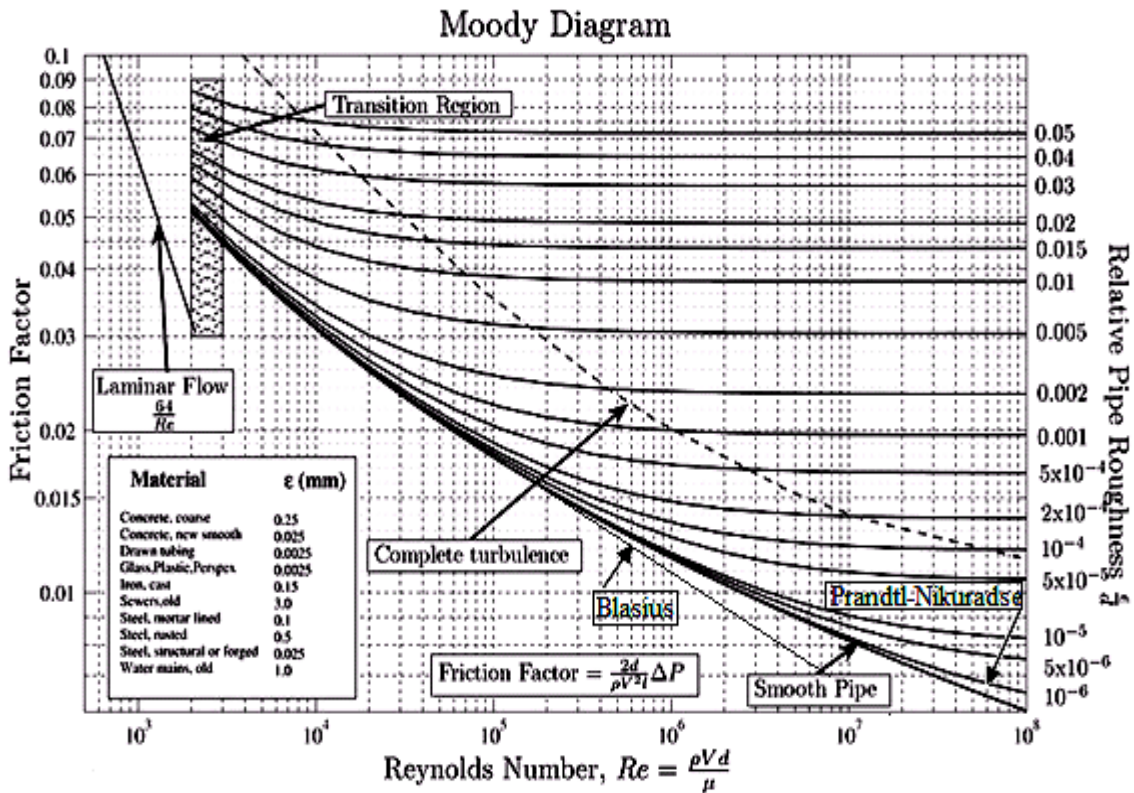


Figure 1.2 : Diagramme de *Moody* (Source : Dynamique des fluides UFA1)

(—) Courbes $f(R)$ pour diverses valeurs de ε/D . (---) Courbe au-delà de laquelle $f \approx$ constante .

Ainsi pour un couple de valeurs $(\varepsilon/D, R)$ indiquant un point situé au dessus de la courbe enveloppe montre que l'écoulement est en régime turbulent rugueux ou considéré comme tel.

L'équation de cette courbe en trait discontinu peut être obtenue en écrivant :

$$f_{colebrook-White} = 1,015 \times f_{Nikuradse} \quad (1.28)$$

Soit :

$$\left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \right]^{-2} = 1,015 \times \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (1.29)$$

Dans cette relation $1/\sqrt{f}$ est donné par :

$$1/\sqrt{f} = (1,015)^{-1/2} \times \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) \right] \quad (1.30)$$

En substituant cette valeur dans le membre droit de la relation (1.17), on obtient, après développement, simplification et réarrangement, la relation $R(\varepsilon/D)$ traduisant la courbe enveloppe :

$$R = 4,9828 \frac{\log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)}{\left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right) - \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)^{0,9926}} \quad (1.31)$$

Selon Hager(1987) cette relation peut s'écrire avec une excellente approximation:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{1050}{R} \quad (1.32)$$

Alors si le couple $(\varepsilon/D, R)$ est tel que :

$$\frac{\varepsilon}{D} R \geq 1050 \quad (1.33)$$

Le régime est turbulent rugueux.

Sur le diagramme de *Moody*, pour $R \geq 10^7$ et $\varepsilon/D < 10^{-6}$ le coefficient f est indépendant de la rugosité relative (ε/D) et correspond au minimum possible. Le régime est turbulent lisse et les pertes de charges ne dépendent que de la viscosité cinématique ν . Si la rugosité ε/D croît en restant supérieure à 10^{-6} , l'écoulement se situe dans la zone de transition et le couple $(\varepsilon/D, R)$ influe sur la valeur du coefficient f de frottement.

En augmentant davantage ε/D jusqu'à la valeur 10^{-2} , l'écoulement serait en régime turbulent rugueux.

Aussi pour $\varepsilon/D = 10^{-2}$ et $R \geq 3.10^5$, le coefficient f prend une valeur presque constante $f \cong 0,0038$.

1.1.4.3 Formule de Swamee et Jain

En 1976, après plusieurs tentatives basées sur un calcul laborieux, *Swamee* et *Jain* ont trouvé une formule destinée au calcul du coefficient de frottement f de l'écoulement turbulent dans les conduites circulaires sous pression. Selon les *Swamee* et *Jain* (1976) la relation (1.17) de *Colebrook-white* peut être remplacée avec une bonne approximation :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{5,74}{R^{0,9}} \right) \right]^{-2} \quad (1.34)$$

On constate dans cette dernière expression que le coefficient de frottement f peut être calculé à partir des valeurs connues de ε/D et de R .

Selon les mêmes auteurs la relation (1.34) doit être appliquée pour $5.10^3 < R < 10^8$ et $10^{-6} < \varepsilon/D < 10^{-2}$.

La relation (1.34) ne couvre pas l'ensemble du diagramme de *Moody* mais elle est largement appliquée en raison de sa simplicité.

Pour apprécier la fiabilité de la relation (1.34), l'écart sur la valeur de f obtenue par la formule de *Colebrook-white*, considéré comme référence, a été comparé à celle obtenue par la formule de *Swamee* et *Jain*. Il ressort que l'écart relatif ($\Delta f/f$) varie entre 0,3% et 2,8% pour $5.10^3 < R < 10^4$. Les forts écarts sont observés pour les plus faibles valeurs du nombre de *Reynolds*. Au delà de $R = 10^4$, les écarts relatifs ($\Delta f/f$) sont acceptable car ils restent inférieur à 1%. La relation de *Swamee* et *Jain* doit être appliquée avec beaucoup de précaution dans la gamme $5.10^3 < R < 10^4$ puisque l'écart de 2,8% sur le coefficient de frottement f engendrerait le même écart dans le calcul du gradient de la perte de charge J , en admettant qu'il n'y a aucun écart sur le débit ou sur le diamètre de la conduite.

1.1.4.4 Formule de *Achour et al.*

Achour et al. (2002) proposèrent une relation approchée pour remplacer la formule (1-25) de *Colebrook-white* dans tout le domaine de l'écoulement turbulent en conduite sous pression :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \right]^{-2} \quad (1.35)$$

La relation (1.35) est appliquée dans la large gamme $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$ pour $R > 10^4$.

L'écart maximal observé entre les valeurs de f calculées à partir de la formule de *Colebrook-white* prise comme référence et la relation (1.35) ne dépasserait guère 2%.

Une étude comparative identique à celle étudiée dans le cas de la relation de *Swamee* et *Jain* a donné les résultats suivants :

Dans la gamme de rugosité relative $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$, la valeur maximal observée de $\Delta f/f$ est de 2% pour $R = 7000$. Au fur et à mesure de l'augmentation de R , l'écart ($\Delta f/f$) diminue sensiblement pour atteindre des valeurs inférieures à 1,2% pour et $R \geq 10^5$ $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,05$. En restreignant la gamme des valeurs de la rugosité relative telle que $0 \leq \varepsilon/D \leq 10^{-2}$, nous pouvons observer que les écarts sont également inférieure à 1,2% pour toute valeur de $R \geq 2300$. Il est intéressant de noter que pour l'écoulement turbulent lisse ou pratiquement lisse correspondant à $\varepsilon/D \rightarrow 0$, l'écart ($\Delta f/f$) reste insignifiant pour toutes les valeurs du nombre de *Reynolds* supérieur à 2300. Pour cet état de l'écoulement on peut écrire :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \right]^{-2} \quad (1.36)$$

1.1.4.5 Nature du régime d'écoulement.

Souvent dans les différents calculs des paramètres hydrauliques, Il est intéressant de connaître la nature du régime d'écoulement dans les conduites, pour utiliser les relations adéquates. Généralement la lecture, sur le diagramme de *Moody* de la rugosité relative ε/D_h et du nombre R de *Reynolds*, donne pour les différentes frontières cette nature du régime d'écoulement.

Parmi les différentes méthodes pour cerner la nature du régime d'écoulement, on peut utiliser les conditions de *Hager* (1987), (*Sinniger & Hager*, 1989), selon lesquelles :

L'écoulement dans une conduite peut être étudié avec suffisamment de précision, dans :

- Le domaine turbulent rugueux si : $\varepsilon^* \geq (60\nu^*)^{10/9}$
- Le domaine pratiquement lisse si : $\varepsilon^* \leq (1,31\nu^*)^{8/9}$
- Le domaine est transitoires si : $(1,31\nu^*)^{8/9} < \varepsilon^* < (60\nu^*)^{10/9}$

Ou ε^* et ν^* sont des paramètres adimensionnels tel que :

$$\varepsilon^* = \varepsilon/d_0 \quad \text{et} \quad \nu^* = \nu d_0/Q$$

d_0 est le paramètre cinétique de *Swamee* et *Jain* défini par $d_0 = (Q^2/gJ)^{1/5}$.

1.1.5 Dimensionnement par les méthodes classiques.

L'écoulement turbulent en conduite sous pression est gouverné par les relations (1-24), (1-25) et (1-22) qui sont respectivement les relations de *Darcy-Weisbach* de *Colebrook-white* et du nombre de *Reynolds*. Au regard de ces relations, nous pouvons énoncer que cinq paramètres influencent l'écoulement turbulent en conduite sous pression. Il s'agit en effet du gradient J de perte de charge, du débit volume Q écoulé par la conduite, du diamètre D de la conduite, de la rugosité absolue ε des parois de la conduite, de la viscosité cinématique ν du liquide.

Dans le cas des 'écoulements à ciel ouvert, la dimension linéaire a de la conduite peut être le diamètre caractéristique D d'une conduite, la profondeur h de l'écoulement, la largeur b d'un canal rectangulaire ou la base d'un trapèze d'un canal à ciel ouvert, un sixième paramètre η intervient dans la relation, ce dernier exprime la forme ou le rapport d'aspect du profil liquide en écoulement, (le taux de remplissage $\eta = h/D$ par exemple). Ces paramètres sont liés par une fonction qui peut prendre la forme suivante :

$$\phi(a, Q, J, \varepsilon, \eta, \nu) \quad (1.37)$$

Trois catégories de problèmes peuvent se poser :

La première catégorie de problèmes consiste à évaluer le débit Q tel que $Q = \phi_Q(a, J, \varepsilon, \eta, \nu)$. Ce problème trouve sa solution d'une manière explicite par la combinaison des relations de *Colebrook-white* et de *Darcy-Weisbach*, et ce quelque soit le régime d'écoulement.

La deuxième catégorie de problème est celle qui consiste à évaluer le gradient de perte de charge tel que $J = \phi_J(a, Q, \varepsilon, \eta, \nu)$. Pour ce cas l'application de la relation type *Darcy-Weisbach* est suffisante.

La troisième catégorie répond à un besoin de dimensionnement et consiste à évaluer la dimension linéaire a à partir des valeurs connues des cinq autres paramètres régissant l'écoulement. La relation (1.37) prend alors la forme suivante:

$$\phi_a(Q, J, \varepsilon, \eta, \nu) \tag{1.38}$$

Selon la bibliographie il n'existe aucune relation explicite susceptible de répondre à cette catégorie de problème lorsque l'écoulement est en régime turbulent transitoire ou lisse. Ceci s'explique du fait que l'on ne peut pas trouver le nombre de *Reynolds* R qui lui même dépend de la dimension linéaire a recherchée. Le problème peut être alors résolu par des procédés itératifs ou graphiques. Pour le régime turbulent rugueux, ou a est indépendante de R , l'application de relations type *Chézy* ou *Manning-Strickler* donnent des résultats satisfaisant.

Seule cette dernière catégorie de problème est exposée dans la présente étude.

1.1.5.1 Cas du régime turbulent rugueux :

Soit à déterminer dans une conduite la dimension linéaire a (le diamètre caractéristique D ou bien la profondeur normale h de l'écoulement).

A partir des données Q et J , du problème on introduit dans la relation de continuité (1.3), les expressions de la vitesse et du coefficient de *Chézy* données par les relations respectives (1.15) et (1.16) on tire l'expression du débit volume :

$$Q = \sqrt{8g/f} A \sqrt{R_h J} \tag{1.39}$$

Le coefficient de frottement f du régime turbulent rugueux donnée la relation (1.20) ou D est remplacé par D_h .

On remplace dans la relation (1.39), on obtient le rapport Q/\sqrt{J} :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = K_i = -2\sqrt{8g} A \sqrt{R_h} \left[\log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right) \right] \tag{1.40}$$

La surface mouillée A , le périmètre mouillée P , le rayon hydraulique R_h et la largeur de la surface mouillée e dépendent de la dimension linéaire a recherchée et l'on peut écrire que quelle que soit la forme du profil géométrique on a :

$$e = a e_1 \tag{1.41}$$

$$A = a^2 A_1 \tag{1.42}$$

$$P = a P_1 \tag{1.43}$$

$$R_h = a \frac{A_1}{P_1} = a R_{h1} \tag{1.44}$$

A_1, P_1, R_{h1} et e_1 sont des paramètres adimensionnels et correspondent respectivement à l'aire de la section mouillée, le périmètre mouillé, le rayon hydraulique et la largeur du plan d'eau lorsque la dimension linéaire a est égal à l'unité. En outre tous ces paramètres ne dépendent, dans toute l'étude des conduites que nous allons considérées, que du taux de remplissage $\eta = y_n/Y_m$ qui représente le rapport de la hauteur normale y_n de l'écoulement sur la hauteur de la conduite Y_m .

En remplaçant A, R_h et D_h dans la relation (1.40) on obtient la relation suivante :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = K_i = -2\sqrt{8g} \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} a^{5/2} \left[\log \left(\frac{\varepsilon P_1}{14,8 A_1} \frac{1}{a} \right) \right] \quad (1.45)$$

Cette expression ne permet pas la détermination explicite de la dimension linéaire a . Pour déterminer a , on prend une série de valeurs arbitraires de cette dimension inconnue et on calcule, avec le membre droit de la relation (1.45), les valeurs respectives de K_i , jusqu'au moment où K_i calculé devient égal à la valeur imposée $K = Q/\sqrt{J}$.

Nous allons éclaircir cette démarche par l'étude d'un exemple concret.

Exemple d'application

La conduite ovoïdale normale représentée par la figure ci-dessous est le siège d'un écoulement uniforme. Elle écoule un débit volume $Q = 0,26 \text{ m}^3/\text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, sous une pente longitudinale $J = 0,0005$. La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-5} \text{ m}$ et le taux de remplissage est $\eta = 0,65$. Calculer la valeur du diamètre D caractéristique de la conduite.

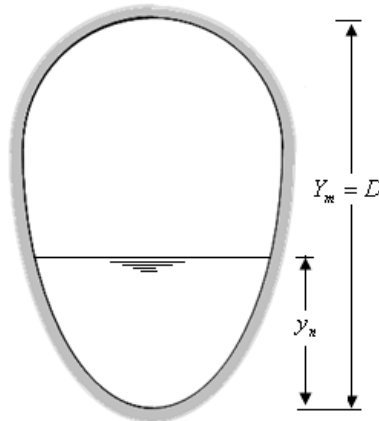


Figure 1.3 : Conduite ovoïdale normale.

Une conduite ovoïdale normale est caractérisée par sa hauteur qui est égale au diamètre caractéristique D . Les caractéristiques de l'écoulement, tels que la surface mouillée A , le périmètre mouillé P et le rayon hydraulique R_h , d'une telle conduite sont exprimées par les relations (1.42), (1.43) et (1.44). Nous avons trouvés (chapitre3) les paramètres adimensionnel A_1 et P_1 en fonction du seul taux de remplissage $\eta = y_n/Y_m$ (ou $\eta = y_n/D$) qui est le rapport entre la profondeur normale de l'écoulement et le diamètre caractéristique D recherché. Lorsque $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, on a :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = D^2 A_1; \quad P = D \vartheta(\eta) = D P_1;$$

$$A_1 = \zeta(\eta) = 1,22481487 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) + \left(\eta - \frac{2}{3}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta \quad (i)$$

$$P_1 = \vartheta(\eta) = 1,59610063 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) \quad (ii)$$

– Si $\eta = 0,65$ on :

$$A_1 = \zeta(\eta) = 0,32481641; \quad P_1 = \vartheta(\eta) = 1,56276575;$$

Introduisons A_1 et P_1 dans la relation (1.45) et remplaçant a par D , on a :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = K_i = \frac{0,26}{\sqrt{0,0005}} = -2 \times \sqrt{8 \times 9,81} \times \frac{0,32481641^{3/2}}{1,56276575^{1/2}} D^{5/2} \left[\log \left(\frac{0,00001 \times 1,56276575}{14,8 \times 0,32481641} \frac{1}{D} \right) \right]$$

$$\Rightarrow K_i = 11,62755348 = -2,62373212 D^{5/2} \times \log(0,00000325/D)$$

Cette expression ne permet pas d'obtenir la valeur de D d'une manière explicite. Alors prenons les valeurs arbitraires suivantes : $D=0,6$ m, $0,7$ m, $0,8$ m, $0,9$ m, $1,0$ m et $1,1$ m et calculons K on a :

| $D(m)$ | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 | 1,1 |
|---------------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| $K_i (m^3/s)$ | 3,8530 | 5,7366 | 8,0971 | 10,9727 | 14,3993 | 18,4114 |

On représente ces valeurs sur un graphe $D = f(K_i)$, et déterminons le diamètre correspondant à la valeur $K_i = 11,63$.

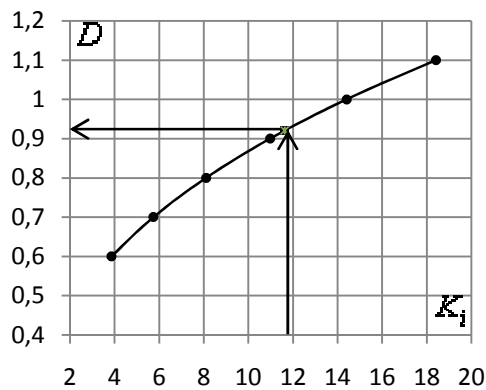


Figure 1.4. $D = f(K_i)$

Le diamètre recherché est alors $D \cong 0,92$ m

1.1.5.2 Cas du régime turbulent :

Lorsque la dimension linéaire a est une inconnue du problème, on a :

- Dans l'équation (1.24) de *Darcy-Weisbach*, trois éléments inconnus : f , D_h et V
- Deux inconnues dans l'équation de continuité: V et A

- Trois inconnues dans la relation (1.22) du nombre de *Reynolds* : V , D_h et R .
- La rugosité relative ε/D_h est aussi indéterminée.

L'équation (1.24) de *Darcy-Weisbach* peut s'écrire, en remplaçant la vitesse V , le diamètre hydraulique D_h et le rayon hydraulique R_h par leurs relations successives (1.3), (1.21) et (1.9) :

$$J = \frac{f}{8g} \frac{P}{A^3} Q^2 \quad (1.46)$$

a) En utilisant (1.42) et (1.43), on peut tirer l'expression de la dimension a de la relation (1.46) :

$$a = \left(\frac{1}{8g} \frac{P_1}{A_1^3} \frac{Q^2}{J} \right)^{1/5} f^{1/5} = C' f^{1/5} \quad (1.47)$$

C' : est un facteur formé avec les valeurs connues de Q , J , P_1 et A_1 .

b) D'autre part la relation (1.22) du nombre de *Reynolds* s'écrit en utilisant (1.3), (1.21) et, (1.9) :

$$R = \frac{4Q}{P\nu} \quad (1.48)$$

En introduisant dans cette dernière, la relation (1.43) de P on a :

$$R = \frac{4Q}{aP_1\nu} = \frac{C''}{a} \quad (1.49)$$

C'' : est un facteur formé avec les valeurs connues de Q , P_1 et ν .

c) On calcule ε/D_h en utilisant les relations (1.21), (1.42) et (1.43)

$$\frac{\varepsilon}{D_h} = \frac{\varepsilon P_1}{4A_1 a} = \frac{C'''}{a} \quad (1.50)$$

C''' : est un facteur formé avec les valeurs connues de ε , A_1 et P_1 .

La solution du problème est donnée par le procédé suivant :

1. On attribue une valeur arbitrairement choisie à f , soit $f = f_1$.
2. On calcule a_1 par la relation (1.47).
3. On utilise cette valeur et on calcule R_1 par la relation (1.49).
4. De même, on calcule $(\varepsilon/D_h)_1$ en utilisant la relation (1.50).
5. Avec R_1 et $(\varepsilon/D_h)_1$ ainsi trouvés, on calcule un nouveau $f = f_2$ à l'aide de la relation (1.25) de *Colebrook-White* ou en utilisant le diagramme de *Moody*.
6. On calcule la nouvelle valeur a_2 , qui est beaucoup plus proche de la valeur exacte recherchée.
7. On répète le procédé avec f_3 et on continue le procédé jusqu'à ce que $f_i \cong f_{i-1}$

Exemple d'application :

Reprenons l'exemple précédent et calculons le diamètre caractéristique D de la conduite, les données sont : $Q = 0,26 \text{ m}^3/\text{S}$; $J = 5.10^{-4}$; $\varepsilon = 10^{-5} \text{ m}$; $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $\eta = 0,65$

$$A_1 = \zeta(\eta) = 0,32481641 \quad P_1 = \vartheta(\eta) = 1,56276575$$

Solution

La solution exacte à ce problème peut être donnée en suivant le procédé décrit plus haut. Déterminons, avec les données du problème, les expressions des relations (1.47), (1.49) et (1.50) en utilisant les valeurs de l'exemple précédent :

$$D = \left(\frac{1}{8 \times 9,81} \times \frac{1,56276575}{0,32481641^3} \times \frac{0,26^2}{0,0005} \right)^{1/5} f^{1/5} = 2,39353366 f^{1/5} \quad (1.47')$$

$$R = \frac{4 \times 0,26}{D \times 1,56276575 \times 10^{-6}} = \frac{665487}{D} \quad (1.49')$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{D_h} \right)_1 = \frac{10^{-5} \times 1,56276575}{4 \times 0,32481641 \times D} = \frac{0,00001203}{D} \quad (1.50')$$

Donnons une valeur arbitraire à f et calculons D_1 , R_1 et $(\varepsilon/D_h)_1$ avec les relations respectives (1.47'), (1.49)' et (1.50'), soit $f = f_1 = 0,01$:

$$D_1 = 0,95288291 \text{ m} \quad R_1 = 698393 \quad \text{et} \quad (\varepsilon/D_h)_1 = 0,00001262$$

Avec R_1 et $(\varepsilon/D_h)_1$, déterminons la nouvelle valeur de f à l'aide de (1.25). On a $f_2 = 0,0126193$.

Calculons les nouvelles valeurs de D_2 , R_2 et $(\varepsilon/D_h)_2$, on a :

$$D_2 = 0,99826672 \text{ m} \quad R_2 = 666642 \quad \text{et} \quad (\varepsilon/D_h)_2 = 0,00001205$$

Avec R_2 et $(\varepsilon/D_h)_2$ déterminons la nouvelle valeur de f à l'aide de (1.25). On a $f_3 = 0,0127056$.

Calculons les nouvelles valeurs de D_3 , R_3 et $(\varepsilon/D_h)_3$:

$$D_3 = 0,99962837 \text{ m} \quad R_3 = 665734 \quad \text{et} \quad (\varepsilon/D_h)_3 = 0,00001203$$

Avec R_3 et $(\varepsilon/D_h)_3$ déterminons la nouvelle valeur de f à l'aide de (1.25). On a $f_4 = 0,0127081$

L'écart $\Delta f / f$ (%) est insignifiant et égal à :

$$\frac{\Delta f}{f} (\%) = \frac{f_4 - f_3}{f_4} (\%) = \frac{0,0127081 - 0,0127056}{0,0127081} \times 100 = 0,02 \%$$

Le diamètre recherché est alors : $D = 0,99962837 \text{ m} \cong 1 \text{ m}$

Nous constatons que l'écart entre le diamètre déterminé en considérant le régime turbulent rugueux dans la solution graphique de l'exemple précédent et sa valeur exacte est de :

$$\frac{\Delta D}{D} (\%) = \frac{0,99962837 - 0,92}{0,99962837} \times 100 \cong 8\% .$$

– Déterminons la nature du régime :

$$d_0 = (Q^2 / gJ)^{1/5} = (0,26^2 / 9,81 \times 0,0005)^{1/5} = 1,69 \text{ m}$$

$$\varepsilon^* = \varepsilon / d_0 = 10^{-5} / 1,69 = 5,9 \cdot 10^{-6}$$

$$\nu^* = \nu d_0 / Q = 10^{-6} \times 1,69 / 0,26 = 6,5 \cdot 10^{-6}$$

$$(1,31\nu^*)^{8/9} = (1,31 \times 6,5 \cdot 10^{-6})^{8/9} = 3,1 \cdot 10^{-5}$$

Puisque $\varepsilon^* \leq (1,31\nu^*)^{8/9}$, le régime est étudié avec suffisamment de précision dans le domaine pratiquement lisse.

- Mais si par exemple la rugosité $\varepsilon = 10^{-3} m$ et la viscosité est $\nu = 10^{-5} m^2/s$, on a alors :

$$\varepsilon^* = \varepsilon/d_0 = 10^{-3} / 1,69 = 5,9.10^{-4}$$

$$\nu^* = \nu d_0/Q = 10^{-5} \times 1,69 / 0,26 = 6,5.10^{-5}$$

$$(1,31\nu^*)^{8/9} = (1,31 \times 6,5.10^{-5})^{8/9} = 2,4.10^{-4}$$

$$(60\nu^*)^{10/9} = (60 \times 6,5.10^{-5})^{8/9} = 2,1.10^{-3}$$

- ε^* est telle que $(1,31\nu^*)^{8/9} < \varepsilon^* < (60\nu^*)^{10/9}$ et le régime est transitoire.

Si l'on répète le procédé du calcul itératif pour déterminer D , le résultat donne $D = 1,13230915 m$.

1.2 Théorie de la longueur fluidodynamique.

Le concept de la longueur fluidodynamique fût trouvé par *G. Lapray*, en 1939 (*Lapray, 1975*). Au début, son application se limitait au domaine restreint des écoulements uniforme d'eau dans des canaux à section trapézoïdale. Puis son application s'étend au vaste domaine de tous les écoulements permanents incompressibles en régime turbulent rugueux ou transitoire :

- Sous pression ou à ciel ouvert.
- A section constante ou variable en absence ou en présence d'un ressaut.
- Et même aux écoulements compressibles sans frottement en absence ou en présence d'une onde de choc droite.

Introduction

Nous avons vu, dans l'exemple précédent, les erreurs déplorables qui peuvent être atteinte lorsqu'on applique les formules du coefficient de résistance à l'écoulement type *Chézy* en considérant le régime turbulent rugueux. Les formules empiriques négligent l'effet de la viscosité cinématique ν et la rugosité y est exprimée grossièrement.

Les nombreuses grandeurs physiques Q, J, ε, a , les paramètres de forme comme η (segments circulaires), ζ (segments parabolique), m et λ (profil trapézoïdal), ainsi que ν , sont reliées entre elles-mêmes par des relations du type $\phi_a(Q, J, \varepsilon, \eta, \nu)$. Ces relations sont compliquées, transcendantes voire implicites, rendant le calcul péniblement laborieux, par l'emploi des itérations. Ceci advient même dans les cas les plus simples des écoulements uniformes.

Afin de rendre ces calculs plus simples, le concept d'une grandeur physique, qui dépend d'un nombre réduit de variable a été introduite par *G.LAPRAY*. Ainsi la longueur fluidodynamique Λ a été trouvé, elle est fonction seulement du rapport Q/\sqrt{J} et de la rugosité absolue ε , et indépendante de la nature du fluide et de la forme géométrique de la section. Il s'agit d'un module de la longueur, voire un étalon de référence. Quand à sa signification physique elle est définie comme suit :

L'on considère un écoulement uniforme à surface libre se produisant sur un plan incliné indéfiniment large, ayant sa pente J et sa rugosité ε . On découpe dans une section droite d'un tel

courant une tranche carrée (figure 1.5), ayant sa largeur b égale à la profondeur h du liquide. Si la fraction du débit, passant à travers de la tranche de section ci-dessus déterminée est Q , on a la longueur fluidodynamique Λ , correspondant à Q/\sqrt{J} et à ε , déterminée par l'identité $\Lambda \equiv h \equiv b$, c'est-à-dire la largeur est égale à la profondeur du carré "L".

Cette conception est un modèle physique extensible à tout autre type d'écoulement de fluide. Par exemple du cas des écoulements fluviaux ou torrentiels ou toutes les dimensions linéaires seront rapportées à la longueur fluidodynamique Λ_K de la section critique.

1.2.1 Base Théorique :

Dans le cas d'un écoulement permanent incompressible d'un fluide passant par une conduite longue à profil constant, les éléments à considérer sont le débit volume Q , le gradient de perte de charge J , la rugosité absolue de la conduite ε , une dimension linéaire a arbitrairement choisie du profil, le ou les paramètre de forme du profil considéré et enfin la viscosité cinématique du fluide véhiculé ν .

Les éléments ci-dessus énumérés ne sont pas indépendants les uns des autres. La relation existant entre eux est régie par une loi physique qui peut être approchée par les formules théoriques et empiriques usuelles, telles que la relation (1.24) de *Darcy-Weisbach*, la relation (1.15) de *Chézy*, et la relation (1.25) de *Colebrook-white*.

La dite relation peut être exprimée symboliquement sous forme implicite :

- Pour les profils circulaires partiellement occupés, par :

$$f_c(J, Q, \varepsilon, a, \eta, \nu) = 0$$

Ou $\eta = h/D$ est un paramètre de forme d'un profil circulaire partiellement mouillé.

- Pour les profils paraboliques, par :

$$f_p(J, Q, \varepsilon, a, \zeta, \nu) = 0$$

Ou $\zeta = h/e$: est un paramètre de forme d'un profil parabolique et e est la largeur du plafond

- Pour les profils trapézoïdaux, par :

$$f_t(J, Q, \varepsilon, a, m \text{ et } \lambda, \nu) = 0$$

m et λ des paramètres de forme d'un profil trapézoïdal ($\lambda = b/h$, $m = \cotg\varphi$).

Des équations analogues peuvent être établies pour tout profil défini par une dimension linéaire a arbitrairement choisie et par un nombre suffisant de paramètres de forme.

Les formules de *Darcy-Weisbach* (1.24) et de *Chézy* (1.15) avec le diagramme de *Moody* permettent la détermination de J en fonction des autres variables cependant la détermination de chacune des autres variables Q , a , ν et les paramètres de forme, n'est possible que par tâtonnement ou approximations successives.

On pourrait imaginer que pour faciliter la détermination de chacune des susdites variables on dresse des tableaux numériques ou des abaques. En effet cela serait possible par une seule courbe dans le cas où la grandeur demandée ne dépendait que d'une seule variable, par une famille de courbes, si elle ne dépendait que de deux variables. L'influence d'une troisième variable nécessiterait déjà une série de familles de courbes, tandis que la dépendance d'une quatrième et à fortiori d'une cinquième variable exclut toute possibilité rationnelle d'une représentation numérique ou graphique de ces fonctions.

Dans le but de trouver une solution directe à ces problèmes, nous allons démontrer que chacune des dimensions linéaires du profil d'un fluide en écoulement incompressible, passant par une conduite à section constante quelconque, peut être déterminée comme le produit de trois facteurs :

– Le **premier** ayant une dimension d'une longueur, désigné par Λ , que nous appellerons pour cette raison "Longueur fluidodynamique". Λ est une fonction monovalente du rapport Q/\sqrt{J} , de la rugosité ε et de l'accélération de la pesanteur g , et symboliquement :

$$\Lambda = f_{\Lambda} \left(\frac{Q}{\sqrt{J}}, \varepsilon, g \right) \quad (1.51)$$

Nous allons démontrer que la signification physique de la longueur fluidodynamique est donnée par la longueur $\Lambda = h = b$ du coté de la tranche quadratique hachurée (carré "L") découpé dans une section droite quelconque d'un courant permanent à profondeur constante (figure 1.5), passant sur un plan incliné indéfiniment large, véhiculant un débit Q passant par le carré "L".

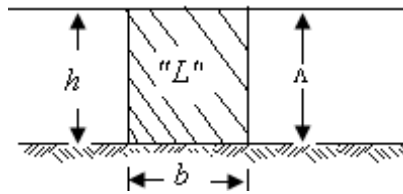


Figure 1.5 : longueur fluidodynamique

▪ Le **second** facteur que nous appellerons "Paramètre de dimension" ou "par.dim." est un nombre sans dimension qui ne dépend que de la forme du profil fluide. Il sera désigné par le même symbole que la dimension respective et distingué par un indice "o" ainsi par exemple pour les profils circulaires partiellement mouillée en choisissant une dimension linéaire D on a :

$$a_0 = D_0 = f_D(\eta) \quad (1.52)$$

Pour le même profil, en choisissant la profondeur d'eau, on a :

$$a_0 = h_0 = f_h(\eta) \quad (1.53)$$

Les paramètres dimensionnels sont indépendants de Q , de J et de ε , ils n'ont pas le caractère d'application générale comme la longueur fluidodynamique, au contraire leur caractère est tout à fait individuel, car le calcul d'une dimension linéaire quelconque du profil liquide ne peut être effectué qu'à l'aide de la valeur du par.dim. y correspondant

– Le **troisième** facteur sera appelé "Facteur de transition" et désigné par Y . C'est un paramètre sans dimension, fonction de la rugosité relative ε/D_h et du nombre de Reynolds R , symboliquement désigné par :

$$Y = f(\varepsilon/D_h, R) \quad (1.54)$$

Avec les éléments définis par (1.51), (1.52) ou (1.53) et (1.54) on a l'équation fondamentale de la théorie de la longueur fluidodynamique :

$$a = \Lambda a_0 Y \quad (1.55)$$

Ainsi :

– Le diamètre d'un profil circulaire $D = \Lambda D_0 Y$.

- La profondeur d'eau d'un profil trapézoïdal $h = \Lambda h_0 Y$ etc.

Pour les écoulements en régime turbulent rugueux caractérisée par $R \geq R_{lim}$, on a $Y = 1$ et l'équation (1.55) se réduit à :

$$a = \Lambda a_0 \tag{1.56}$$

Grace à la notion de la longueur fluidodynamique, on est arrivé à grouper toutes les grandeurs physiques, intervenant au phénomène de l'écoulement, en trois équations seulement :

- La première exprimant la longueur fluidodynamique $\Lambda = f_\Lambda(Q/\sqrt{J}, \varepsilon)$.
- La deuxième donne un coefficient adimensionnel définissant la forme du profil $a_0 = f_0(forme)$.
- La troisième $Y = f(\varepsilon/D_h, R)$ exprime un facteur de transition en fonction de la rugosité relative ε/D_h et du nombre de *Reynolds* R .

Ce qui permet des représentations graphiques aisées et dont l'auteur a dressé tous les abaques.

1.2.2 Démonstration de la théorie :

Dans ce qui suit on exposera seulement la partie concernant les écoulements permanents et uniformes et nous nous intéresserons aux problèmes de dimensionnement uniquement.

1.2.2.1 Ecoulements en régime turbulent rugueux

Pour les écoulements en régime turbulent rugueux, la valeur du coefficient de frottement f déterminé en application de la formule (1.25) de *Colebrook-White* se confond, pour les valeurs élevées du nombre de *Reynolds* R et de la rugosité relative ε/D_h , avec la valeur donnée par la relation (1-20) de *Nikuradsé*.

La représentation de cette équation dans un système de coordonnées logarithmique (figure 1.6), permet de constater que les courbes représentant cette fonction pour diverses valeurs de ε sont très plates et peuvent être remplacées dans un domaine assez étendu de D_h par une droite sécante équilibrée.

Autrement dit la formule exprimée par (1.20) peut être remplacé tronçon par tronçon avec une bonne approximation par des fonctions ayant la forme :

$$\log \frac{1}{\sqrt{f}} = \mathcal{V} \log D_h + \log \mathcal{B} \tag{1.57}$$

Soit :

$$f^{-1/2} = \mathcal{B} (4R_h)^{\mathcal{V}} \tag{1.58}$$

Les valeurs de \mathcal{V} et de \mathcal{B} dépendent essentiellement de la rugosité ε de la conduite et varient légèrement en fonction des limites du domaine de D_h considéré.

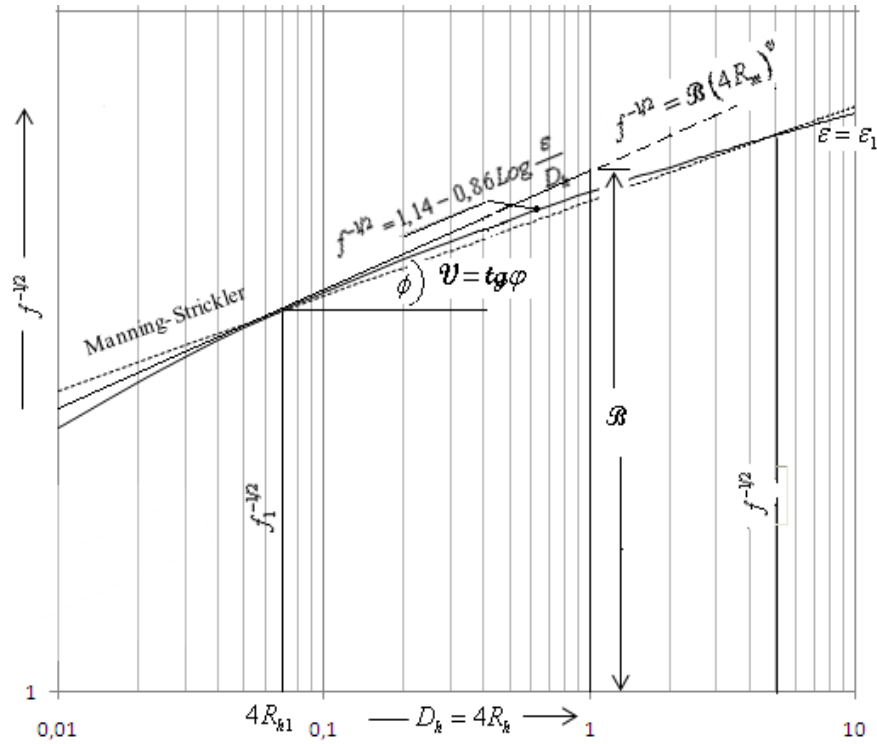


Figure 1.6 : Représentation de l'équation de *Nikuradsé* (1.20)

La famille de courbe représentant l'équation (1.20) permet de définir les valeurs de \mathcal{V} et de \mathcal{B} pour un domaine de D_h plus ou moins étendu selon l'approximation exigé.

Par exemple si l'on divise le champs de la figure 1.6 en trois zones de manière à ce que pour la première $10^{-2}m \leq D_h \leq 10^{-1}m$, pour la deuxième $10^{-1}m \leq D_h \leq 1,0m$ et pour la troisième $1,0m \leq D_h \leq 10m$, la différence entre les valeurs de f déterminées par la formule (1.20) de *Nikuradsé* d'une part et par (1.58) représentée par la droite sécante équilibrée, d'autre part reste inférieur à 1% . Si cette précision n'est pas suffisante on peut déterminer \mathcal{V} et \mathcal{B} pour un domaine plus restreint. Finalement si le domaine considéré se réduit à une seule valeur de D_h , on tire la valeur \mathcal{V} en écrivant :

$$\mathcal{V} = \frac{\partial \log f^{-1/2}}{\partial \log D_h} = \frac{2}{f^{-1/2}} = 2f^{1/2} \quad (1.59)$$

Avec la valeur de \mathcal{V} ainsi déterminé on tire de (1.58) :

$$\mathcal{B} = \frac{1}{D_h^{\mathcal{V}} \sqrt{f}} = \frac{2}{\mathcal{V} D_h^{\mathcal{V}}} \quad (1.60)$$

La relation (1.15) s'écrit aussi, en utilisant la relation (1.16), de la manière suivante :

$$V = f^{-1/2} \sqrt{8g \sqrt{R_h J}} \quad (1.61)$$

Pour un couple arbitrairement choisie de la rugosité $\varepsilon = \varepsilon_1$ et du rayon hydraulique $R_h = R_{h1}$ le facteur $f^{-1/2} = f_1^{-1/2}$ y correspondant peut être graphiquement (figure 1.6) déterminé par l'ordonné du point d'intersection de la courbe déterminée par (1.58) et la verticale d'abscisse $4R_h = 4R_{h1}$.

L'équation (1.61) devient :

$$V = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right) \sqrt{8g} \sqrt{R_h J} \quad (1.62)$$

En substituant (1.58) à la place de (1.25) on a (voir figure 1.6) le même facteur $f_1^{-1/2}$ en représentant (1.58) avec son coefficient \mathcal{B} et son exposant \mathcal{V} correspondant au cas spécial $\varepsilon = \varepsilon_1$ et $R_h = R_{h1}$.

Avec la valeur de $f^{-1/2}$ ainsi déterminée, l'équation (1.62) devient :

$$V = \mathcal{B} (4R_h)^{\mathcal{V}} \sqrt{8g} \sqrt{R_h J} \quad (1.63)$$

Il est évident que \mathcal{V} et \mathcal{B} de l'équation (1.63) ne sont pas indépendant des variations de ε et R_h et ne peuvent être considérée comme constantes. Pour cette raison l'application de (1.63) n'est pas aisée pour la solution du problème. Une troisième méthode pour la détermination du facteur $f^{-1/2}$ de l'équation (1.61) est donnée en attribuant à l'exposant la valeur constante $\mathcal{V} = 0,15$ correspondant a sa moyenne et en tenant compte de la variation de ε et R_h en faisant varier \mathcal{B} en fonction des susdits éléments. Ainsi l'exposant gardant sa valeur constante $\mathcal{V} = 0,15$, on aura en application de (1.60) pour chaque couple de valeur de ε et de $D_h = 4R_h$ la valeur y correspondante de

$$\mathcal{B} = \frac{1}{(4R_h)^{0,15} \sqrt{f}} \quad (1.64)$$

Avec la valeur de $f^{-1/2}$ ainsi déterminée l'équation (1.61) devient :

$$V = \mathcal{B} (4R_h)^{0,15} \sqrt{8g} \sqrt{R_h J} \quad (1.65)$$

En posant :

$$\alpha = 4^{0,15} \mathcal{B} \sqrt{8g} \quad (1.66)$$

L'équation (1.65) devient :

$$V = \alpha R_h^{0,65} J^{0,5} \quad (1.67)$$

En utilisant la relation (1.9) on a :

$$A = P R_h \quad (1.68)$$

Introduisant le paramètre de cambrure :

$$\phi = R_h / P \quad (1.69)$$

On tire de (1.68) et (1.69) :

$$A = R_h^2 / \phi \quad (1.70)$$

En éliminant R_h de (1.68) et (1.70)

$$\phi = A/P^2 \quad (1.71)$$

En utilisant les relations (1.3) et (1.70) d'une part et la relation (1.67) d'autre part on a :

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{\phi Q}{R_h^2} = \alpha R_h^{0,65} J^{0,5} \quad (1.72)$$

Soit :

$$\frac{\phi Q}{\alpha J^{0,5}} = R_h^{2,65} \quad (1.73)$$

D'où

$$R_h = \phi^{1/2,65} \left(\frac{Q}{\alpha \sqrt{J}} \right)^{1/2,65} \quad (1.74)$$

En posant :

$$R_{h0} = \phi^{1/2,65} \quad (1.75)$$

Et

$$\Lambda = \left(\frac{Q}{\alpha \sqrt{J}} \right)^{1/2,65} \quad (1.76)$$

On tire finalement :

$$R_h = R_{h0} \Lambda \quad (1.77)$$

Ainsi il est démontré que le rayon et par conséquent toutes dimensions linéaires y proportionnelles (telles que le diamètre, la profondeur, la largeur de fond, la longueur des cotés etc.) du profil transversal d'une section ayant sa forme déterminée par un nombre suffisant de paramètres de forme, véhiculant un débit d'un fluide incompressible en écoulement turbulent rugueux est le produit de deux facteurs :

– Un premier facteur nommé "paramètre de dimension" ou "par.dim" désigné par la lettre correspondante et distinguée par un indice "0" (par exemple $R_{h0}, D_{h0}, h_0, e_0, b_0 \dots$). Ils sont indépendant du débit Q , du gradient J de la perte de charge et des propriétés (ρ, ν) des fluides mais fonction de la forme du profil défini par ses paramètres de formes.

L'équation (1.75) ne donne que le par. dim. R_{h0} correspondant à R_h . Pour une solution générale du problème des par.dim. Nous désignerons par a une dimension linéaire arbitrairement choisie d'une section quelconque géométriquement semblable à une forme, par exemple :

- Le diamètre D , le rayon R ou la profondeur h de l'eau dans une section circulaire partiellement mouillée dont la forme est déterminée par $\eta = h/D = cte$.

- La profondeur h ou la largeur e d'une section parabolique dont la forme est désignée par $\zeta = h/e = c^{te}$, etc.

Si pour $a = 1$, l'aire de la section mouillée et la longueur du périmètre mouillé définies dans les relations (1.42) et (1.43) deviennent respectivement A_1 et P_1 , le rayon hydraulique de la relation (1.9) devient :

$$R_h = \frac{A_1}{P_1} a \quad (1.78)$$

En considérons par définition, $R_h = R_{h0} \Lambda$ et $a = a_0 \Lambda$, On tire de (1.78) :

$$a_0 = \frac{P_1}{A_1} R_{h0} \quad (1.79)$$

En éliminant R_{h0} de cette relation en utilisant (1.71) et (1.75) et en remplaçant A et P par les relations (1.42) et (1.43), on tire après simplification l'expression de a_0 :

$$a_0 = \frac{P_1^{0,245}}{A_1^{0,623}} \quad (1.80)$$

L'équation (1.80), ayant validité générale, peut être appliquée à tous les profils, quelle que soit leur forme.

Ainsi pour un profil circulaire plein on a en application de (1.80) :

$$D_0 = a_0 = \frac{\pi^{0,245}}{(\pi/4)^{0,623}} \quad (1.81)$$

– Le second facteur, qui sera appelé "longueur fluidodynamique" et désigné par Λ , est une grandeur ayant la dimension d'une longueur, fonction de Q/\sqrt{J} et du coefficient ε . Ce dernier, étant fonction de ε , subit de lentes variations en fonction de R_h . La valeur de Λ ne dépend pas des propriétés du fluide véhiculé (viscosité, masse volumique) puisque la validité de la théorie est limitée aux écoulements incompressibles (faible gradient de la masse volumique) et, en première phase, aux écoulements turbulents rugueux (indépendant de R et de la viscosité μ). En ce qui concerne la forme du profil, il est évident que la valeur Λ ne peut être parfaitement indépendante de celle-ci car le coefficient ε figurant dans (1.76) subit des variations lentes en fonction de $D_h = \Lambda D_{h0}$. Or le par.dim. $D_{h0} = 4R_{h0}$ est en vertu de (1.75) une fonction de φ et par voie de conséquence de la forme. En utilisant respectivement (1.76), (1.66), (1.64), (1.21), (1.20) et (1.56) on démontre, avec les unités S.I. que :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = -21,81 D_{h0}^{-0,15} \log \left(\frac{\varepsilon/\Lambda D_{h0}}{3,7} \right) \Lambda^{2,5} \quad (1.82)$$

Il serait possible de déterminer Q/\sqrt{J} en fonction de ε et de Λ si D_{h0} était constant. En réalité ce par.dim. varie en fonction de la forme du profil entre les valeurs pratique 1,4 et 2,0 si :

$0,05 \leq \eta \leq 1$ Pour un profil circulaire

$0,00 \leq \lambda \leq 10$ Pour un profil trapézoïdal

$0,10 \leq \zeta \leq 2,5$ Pour un profil parabolique

Si l'on admet que $D_{h0} = 1,67$ (moyenne géométrique de 1,4 à 2) on peut écrire que :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = (15,97 - 20,2 \log \frac{\varepsilon}{\Lambda}) \Lambda^{2,5} \quad (1.83)$$

On démontre que l'erreur relative maximum pouvant affecter la valeur Q/\sqrt{J} en adoptons $D_{h0} = 1,67$ reste inférieure à 1,59% pour les plus faibles et les plus fortes rugosités.

Détermination de f , \mathcal{V} , ε , et Λ

Ainsi pour faciliter la mise en application des considérations exposées, il a été dressé :

- Des abaques permettant la lecture de $f(\varepsilon/D_h)$, de $\mathcal{V} = f(\varepsilon/D_h)$, et de $\varepsilon = f(\varepsilon, D_h)$.
- Un abaque $\Lambda = f(Q/\sqrt{J}, \varepsilon)$. dressée en usant de la relation (1.83) pour $D_{h0} = 1,67$.

L'usage du dernier abaque permet la solution par lecture directe des problèmes suivants :

$$\Lambda = f_1 \left[(Q/\sqrt{J}), \varepsilon \right]$$

$$Q = J^{1/2} f_2(\Lambda, \varepsilon)$$

$$J = [Q / f_2(\Lambda, \varepsilon)]^2$$

$$\varepsilon = f_3[(Q/J), \Lambda]$$

1.2.2.2 Ecoulements en régime de transition.

Dans le cas d'un écoulement en régime turbulent rugueux caractérisé par une valeur constante $f = f_r$, le facteur de transition $Y = 1$, ainsi dans ce cas le facteur Y n'intervient pas dans la détermination de a . Par contre dans les écoulements en transition ($3500 \leq R \leq R_{lim}$) le coefficient $f \geq f_r$ n'est plus une constante mais une fonction de ε/D_h et du nombre de Reynolds R et par voie de conséquence le facteur de transition $Y \geq 1$ qui dépend que de deux variables, à savoir ε/D_h et R ne peut plus être laissé hors considération. Mais du point de vue de la définition précise de ce facteur, on sera obligé de faire la distinction entre les trois catégories de problèmes.

Dans le cas du dimensionnement, la dimension $a = f(Q, J, \varepsilon, \text{par.deforme}, \nu)$ est fonction des autres variables connues du problème. Pour trouver, dans ce cas la fonction déterminant le facteur de transition on écrit l'équation (1.39) et en éliminant les dimensions linéaire et quadratique entre cette équation et (1.55) on tire :

$$Q = Y^{5/2} \Lambda^{5/2} A_0 f^{-1/2} \sqrt{8gR_{h0}J} \quad (1.84)$$

D'où :

$$Y\Lambda = f^{1/5} \sqrt[5]{\frac{Q^2}{8gA_0^2 R_{h0} J}} \quad (1.85)$$

Avec $Y\Lambda$ et les par.dim, ne dépendant que de la forme du profil, on a toutes les dimensions de la section recherchée :

$$A = Y^2 \Lambda^2 A_0 \quad P = Y\Lambda P_0 \quad R_h = Y\Lambda R_{h0} \quad \text{Ou } D_h = Y\Lambda D_{h0} \quad h = Y\Lambda h_0,$$

Nous pouvons aussi démontrer facilement de ce qui précède, en utilisant les relations (1.42) et (1.43) d'une part et (1.55) et (1.80) d'autre part que :

$$A_0 = \frac{P_1^{0,49}}{A_1^{0,246}} \quad (1.86)$$

$$P_0 = \frac{P_1^{1,245}}{A_1^{0,623}} \quad (1.87)$$

$$R_{h0} = \frac{A_1^{0,377}}{P_1^{0,755}} \quad (1.88)$$

En vue de déterminer Y comparons les dimensions ci-dessus à celle d'un profil, géométriquement semblable au premier, capable de véhiculer le même débit Q du même fluide, moyennant le même gradient J de perte de charge et, pour lequel le coefficient de frottement f garderait sa valeur constante f_r , correspondant au régime turbulent rugueux, dans le domaine tout entier des écoulement pour lesquels $3500 \leq R \leq R_{lim}$, c'est-à-dire aussi en zone de transition. En appliquant (1.85) à ce profil *hypothétique* on tire :

$$\Lambda = f_r^{1/5} \sqrt[5]{\frac{Q^2}{8gA_0^2 R_{h0} J}} \quad (1.89)$$

En devisant (1.85) par (1.89) on a :

$$Y = (f/f_r)^{1/5} \quad (1.90)$$

Dans cette dernière équation le dénominateur f_r , donné par la relation (1.20) ne dépend que de la rugosité relative de la conduite *hypothétique* ε/D_{hr} , le diamètre D_{hr} est déduit des relations (1.56) et (1.88), par :

$$D_{hr} = \Lambda D_{h0} = 4\Lambda R_{h0} \quad (1.91)$$

Résolution d'un problème de dimensionnement :

Soit Q, J, ε, ν , et η les données du problème de dimensionnement, procédons alors comme suit :

- A partir du taux de remplissage η on détermine les paramètres A_1 et P_1 du profil, ensuite on calcule le paramètre adimensionnel a_0 par la relation (1.80).
- Le facteur Λ peut être calculé en application de (1.83) ou repéré dans l'abaque 18.a ou 18.b tracé à cet effet par l'auteur (voir extrait sur la figure 1.7).
- A l'aide de la relation (1.20), déterminons f_r ou la rugosité relative ε/D est celle du profil *hypothétique* ε/D_{hr} obtenue en appliquant (1.91).
- Le coefficient f constitue la valeur réelle du coefficient de frottement. Celui-ci est obtenu par la formule de *Colebrook-White* ou par lecture sur le diagramme de *Moody* :
 - En première approximation on débute avec la rugosité relative du profil *hypothétique* ε/D_{hr} en appliquant (1.91). le par.dim. D_{h0} se déduit à partir de la relation (1.88) ou par lecture directe dans les abaques des par.dim. tracés à cet effet.
 - Le nombre de *Reynolds* correspondant à cet écoulement passant par le profil *hypothétique* est défini par la relation (1.48) ou P_0 est donné par la relation (1.87) ou lu sur les graphes des par.dim. :

$$R_r = \frac{4Q}{\Lambda v P_0} \quad (1.92)$$

- On détermine le facteur de transition par la relation (1.90) $Y = (f/f_r)^{1/5}$
- La dimension linéaire recherchée est d'après la relation (1.55) : $a = \Lambda a_0 Y$

La solution obtenue en déterminant le facteur de transition Y , par des approximations successives est laborieuse et aussi longue que la solution classique. Elle devient intéressante lorsque Λ , D_{h0} , P_0 et Y sont déterminées sur les graphes (voir figure 1.7) dressés par l'auteur à cet effet pour :

$$\Lambda = f(Q/\sqrt{J}, \varepsilon) ; D_{h0}, P_0 = f(\eta) \text{ et } Y = a/a_r = f(\varepsilon/D_h, R_r).$$

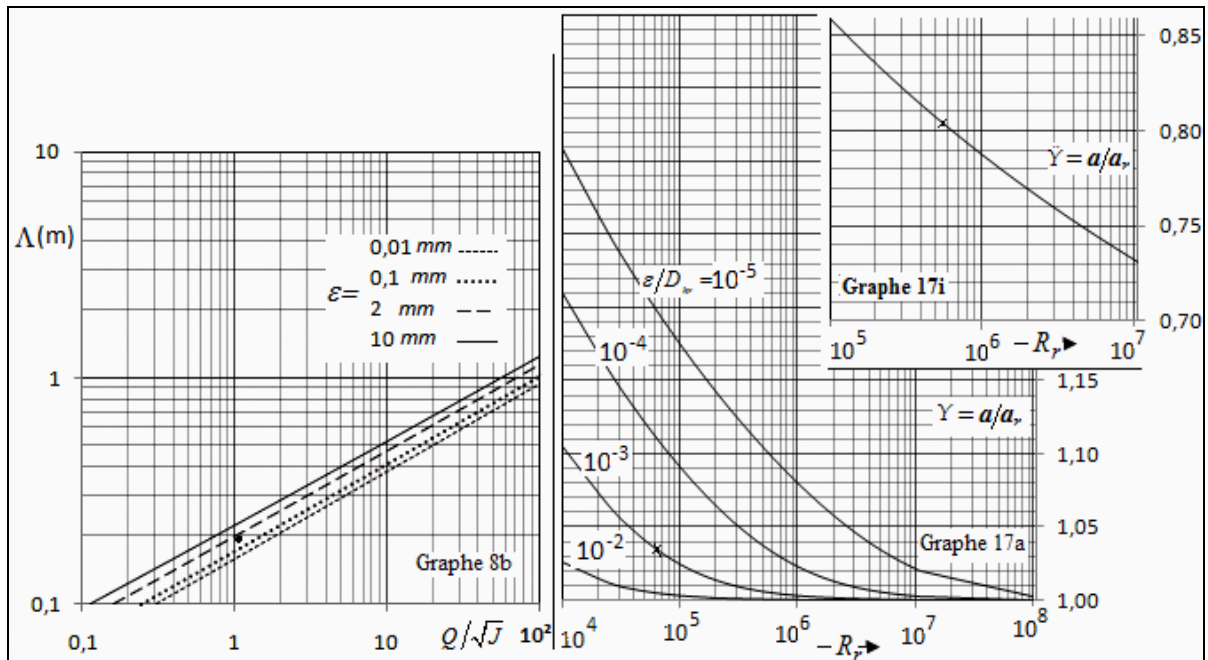


Figure 1.7 : Parties des abaques 8b, 17a et 17i tracés par G. Lapray

La détermination du débit d'une conduite ayant ses caractéristiques données, en régime de transition, correspond aux équations $Q = f_Q(J, \varepsilon, a, par.deforme, v)$. Par contre la détermination du gradient J de la perte de charge en fonction des autres éléments connus en régime de transition répond aux équations $Q = f_J(Q, \varepsilon, a, par.deforme, v)$. Ces deux catégories de problèmes nécessitent la définition d'autres facteurs de transition respectifs Y_Q et Y_J . Ces deux dernières catégories de problèmes ne font pas l'objet de notre étude.

1.2.2.3 Ecoulements en régime pratiquement lisse.

Dans le cas où la paroi de la conduite véhiculant le fluide est parfaitement lisse, autrement dit dans le cas où la rugosité $\varepsilon = 0$ ($\varepsilon/D_h = 0$), la fonction à deux variables, exprimant le coefficient de frottement f dégénère en une seule fonction de la seule variable R . Aussi le nombre *hypothétiques* R_r n'a plus de sens, car la courbe enveloppe de *Moody* correspondant aux conduites lisses n'a pas de tranche rectiligne horizontale.

L'auteur vérifie que la théorie reste valable sans aucun complément des procédés déjà exposés, pour un nombre de *Reynolds* R *hypothétique* ou réel inférieur à 2.10^5 en considérons une rugosité relative $\varepsilon/D_h = 10^{-5}$ qui est la plus faible rugosité considérée dans présente théorie.

Par contre pour les nombres de *Reynolds* R supérieurs à 2.10^5 , on introduira trois paramètres ayant des rôles analogues de Y , Y_Q , et Y_J . Ces paramètres désignés par \ddot{Y} , \ddot{Y}_Q et \ddot{Y}_J expriment le rapport entre les dimensions linéaires du profil réel d'une conduite à parois lisses d'une part, et les dimensions linéaires analogues d'un profil *hypothétique*, ayant une rugosité relative arbitrairement fixée entre les limites $0,005 \leq \varepsilon/D_h \leq 0,015$ et capable de véhiculer le même débit.

Dans le cas où ce sont les dimensions linéaires du profil d'une conduite lisse que l'on cherche à déterminer en fonction des autres variables. Le diamètre hydraulique du profil *hypothétique* étant inconnu on ne peut choisir la rugosité *hypothétique* satisfaisant à l'inégalité précédente. On montre que l'on peut adopter la valeur $\varepsilon/D_h = 0,01$ pour la rugosité du profil *hypothétique* qui satisfait d'une manière sûre, l'inégalité citée plus haut. Alors \ddot{Y} sera déterminé par la relation (1.90) avec $\varepsilon/D_h = 0,01$.

La rugosité ε déterminée par l'application de $\varepsilon/D_h = 0,01$, conjointement aux valeurs de Q et de J , définit la longueur fluidodynamique Λ_r du profil de la conduite *hypothétique* équivalente à celle de la conduite lisse dont les dimensions à déterminer constituent l'essentiel du problème. La longueur fluidodynamique Λ_r correspondant à un tel écoulement est donnée par l'équation (1.89), ou le coefficient f_r est déterminé par la relation (1.20) pour la rugosité relative $\varepsilon/D_h = 0,01$:

$$\Lambda_r = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right) \right]^{-2/5} \sqrt[5]{ \frac{Q^2}{8gA_0^2 R_{h0} J} } \quad (1.93)$$

En remplaçant R_{h0} et A_0 par leurs relations respectives (1.86) et (1.88) et $\varepsilon/D_h = 0,01$, on a après simplification :

$$\Lambda_r = 0,343 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{A_1^{0,115}}{P_1^{0,225}} \right)^{1/5} \quad (1.94)$$

Le produit de Λ_r par les par.dim. respectifs permet d'obtenir :

- le diamètre D_{hr} du profil *hypothétique*.
- La rugosité relative ε/D_{hr} du même profil.

- Et le nombre de Reynolds R_r y correspondant.

En possession des deux derniers éléments on détermine le facteur de transition $\check{Y} = a/a_r$ analogue à Y , par approximations successives, ou graphiquement (voir graphe 17i $\check{Y} = a/a_r = f(R_r)$ sur la figure 1.7), tracé par l'auteur.

Résolution d'un problème de dimensionnement :

Soit Q, J, ε, ν , et η les données du problème de dimensionnement, procédons alors comme suit :

- Avec la relation (1.94), calculons Λ_r .
- A partir du taux de remplissage η on détermine A_1 et P_1 et a_0 .
- A l'aide de la relation (1.20), déterminons f_r ou la rugosité relative $\varepsilon/D_h = 0,01$.
- Le coefficient f constitue la valeur réelle du coefficient de frottement est obtenu par la formule de *Colebrook-White* ou par lecture sur le diagramme de *Moody* :
 - La rugosité relative du profil *hypothétique* $\varepsilon/D_{hr} = 0$.
 - Le nombre de Reynolds correspondant est défini par la relation (1.92).
- On détermine le facteur de correction par la relation $\check{Y} = (f/f_r)^{1/5}$ pour les conduites à parois lisses, ou par lecture directe sur le graphe adéquat.
- Vérifier si $R_r > 2.10^5$ sinon on recalcule comme si le régime était transitoire.

La dimension linéaire recherchée est égale alors à : $a = \check{Y}\Lambda_r a_0$.

Exemple d'application :

Reprenons l'exemple précédent et calculons le diamètre caractéristique D de la conduite, les données sont : $Q = 0,26 \text{ m}^3/\text{S}$; $J = 5.10^{-4}$; $\varepsilon = 10^{-5} \text{ m}$; $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $\eta = 0,65$

$$A_1 = \zeta(\eta) = 0,32481641 \quad P_1 = \vartheta(\eta) = 1,56276575$$

Solution:

Le diamètre caractéristique recherché est donné par une relation similaire à (1.55), savoir :

$$D = Y\Lambda D_0$$

Considérons le régime pratiquement lisse et déterminons Λ_r par la formule (1.94):

$$\begin{aligned} \Lambda_r &= 0,343 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{A_1^{0,115}}{P_1^{0,225}} \right)^{1/5} = 0,343 \times \left(\frac{0,26^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{0,32481641^{0,115}}{1,56276575^{0,225}} \right)^{1/5} \\ &= 0,55360258 \text{ m} \end{aligned}$$

Le par.dim. D_0 se confond avec le par.dim. a_0 , et est égal selon la relation (1.80):

$$a_0 = D_0 = \frac{P_1^{0,245}}{A_1^{0,623}} = \frac{1,56276575^{0,245}}{0,32481641^{0,623}} = 2,2477787$$

A l'aide de la relation (1.20), déterminons f_r ou la rugosité relative $\varepsilon/D_h = 0,01$.

$$f_r = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right) \right]^{-2} = \left[-2 \times \log \left(\frac{0,01}{3,7} \right) \right]^{-2} = 0,03790371$$

Le nombre de Reynolds R_r est égal selon la relation (1.92):

$$R_r = \frac{4Q}{\nu P} = \frac{4Q}{\Lambda_r D_0 P_1 \nu} = \frac{4 \times 0,26}{0,55360258 \times 1,56276575 \times 2,2477787 \times 10^{-6}} = 534796$$

Comme $R_r > 2.10^5$, le calcul de la valeur de Λ_r par la relation (1.94) est correct.

Le coefficient f est obtenu par la formule de Colebrook-White ou par lecture sur le diagramme de Moody ($\varepsilon/D_h = 0,01$; $R_r = 534796$) $\rightarrow f = 0,0129989$:

Le facteur de correction est :

$$\ddot{Y} = \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5} = \left(\frac{0,0129989}{0,03790371} \right)^{1/5} = 0,80731863$$

Ou bien par lecture sur le graphe 17i ($\ddot{Y} = f(R_r)$, (figure 1.7)) :

$$\text{Pour } (R_r = 534796) \rightarrow \ddot{Y} = 0,804$$

Ainsi on détermine en application de (1.55) :

$$D = \ddot{Y} \Lambda_r D_0 = 0,804 \times 0,55360258 \times 2,2477787 = 1,00047837 \text{ m} \cong 1 \text{ m}$$

- Dans le cas où la rugosité $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$ et la viscosité est $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ alors on a :

$$R_r = \frac{4Q}{\Lambda D_0 P_1 \nu} = \frac{4 \times 0,26}{0,55360258 \times 1,56276575 \times 2,2477787 \times 10^{-5}} = 53480$$

Comme $R_r < 2.10^5$, le régime est transitoire et Λ est alors obtenue graphiquement :

$$(Q/\sqrt{J} = 11,6; \varepsilon = 10^{-3} \text{ m}) \xrightarrow{\text{graphe 8a}} \Lambda = 0,49 ;$$

$$D_0 = 2,2477787 ; D_{hr} = 0,91009469 \text{ m} \quad \varepsilon/D_{hr} = 0,00109879 \quad P_0 = 3,51275156; R_r = 60421;$$

A l'aide de la relation (1.20), déterminons f_r :

$$f_r = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right) \right]^{-2} = \left[-2 \times \log \left(\frac{0,00109879}{3,7} \right) \right]^{-2} = 0,02009363$$

Le coefficient f est obtenu par la formule de Colebrook-White ou par lecture sur le diagramme de Moody :

$$(\varepsilon/D_h = 0,00109879; R_r = 60421) \rightarrow f = 0,0237177$$

Le facteur de correction est :

$$\ddot{Y} = \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5} = \left(\frac{0,0237177}{0,02009363} \right)^{1/5} = 1,0337198$$

Ou bien par lecture sur le graphe 17a ($Y = f(\varepsilon/D_h, R_r)$, (figure 1.7)) :

$$\text{Pour } (\varepsilon/D_{hr} = 0,001098; R_r = 60421) \xrightarrow{\text{Graphe (17i)}} Y = 1,035$$

$$D = Y_2 \Lambda D_0 = 1,035 \times 0,41 \times 2,2477787 \cong 1,14 m$$

Les résultats obtenus correspondent bien aux résultats de la méthode classique étudiée plus haut.

En résumé : On constate que la méthode facilite la solution directe de dimensionnement, les lectures sur les graphes, présentant parfois des familles de courbes touffus, reste laborieuse et taché de beaucoup d'erreur de précision.

Aussi le fait que la valeur de α , figurant dans l'équation (1.76), n'est pas rigoureusement constante mais subit des variations lentes en fonction de la variation de D_h , entraîne des erreurs sur la détermination Λ et autres éléments recherchés.

La nature du régime doit être vérifié avec la seule condition $R > 2.10^5$ qui a notre sens est insuffisante et peut entraîner des erreurs sur la lecture des paramètres sur les graphes

1.3 Longueur fluidodynamique modifiée.

En utilisant la combinaison des formules de *Manning-Strickler* et de *Darcy-Weisbach* nous allons réduire la fonction $\phi(a, Q, J, \varepsilon, \eta, \nu)$ des six variables régissant l'écoulement uniforme en un produit de trois fonctions dépendante chacune de deux paramètres, parfois composés. Ainsi cela a permis d'aboutir à une formulation mathématique de la dimension linéaire recherchée, applicable à tous les régimes d'écoulement.

1.3.1 Calcul de la dimension linéaire - Cas du régime turbulent rugueux

En régime d'écoulement turbulent rugueux, la dimension linéaire d'un profil liquide ou géométrique de forme quelconque peut être déduite de la transformation de l'équation de *Manning-Strickler*. Celle-ci est donnée par la relation (1.15) de *Chézy* en remplaçant le coefficient C de *Chézy* par son expression de *Strickler* $C = kR_h^{1/6}$:

$$V = kR_h^{2/3} \sqrt{J} \tag{1.95}$$

Où k , est le coefficient de *Strickler*.

On sait que $V = Q/A$ et $R_h = A/P$, la relation (1.95) devient :

$$\frac{QP^{2/3}}{kA^{5/3} \sqrt{J}} = 1 \tag{1.96}$$

En utilisant les relations (1.42) et (1.43) pour exprimer respectivement A et P , la relation (1.96) devient :

$$\frac{Q(\tilde{a}P_1)^{2/3}}{k(\tilde{a}^2 A_1)^{5/3} \sqrt{J}} = 1 \tag{1.97}$$

La lettre \tilde{a} désignant la dimension linéaire (\tilde{a} pour le cas de la longueur fluidodynamique modifiée).

Soit :

$$\tilde{a} = \left[\frac{Q}{k\sqrt{J}} \right]^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \tag{1.98}$$

On désignera cette dimension par \tilde{a}_r pour noter le caractère du régime turbulent rugueux de l'écoulement. Ainsi on a :

$$\tilde{a}_r = \left[\frac{Q}{k\sqrt{J}} \right]^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (1.99)$$

Par ailleurs selon *Hager* (*Hager, 1987*) $k = (8, 2\sqrt{g/\varepsilon^{1/6}})$

La relation (1.99) s'écrit alors :

$$\tilde{a}_r = \left[\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8, 2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (1.100)$$

En posant :

$$\Gamma = \left[\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8, 2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \quad (1.101)$$

Et
$$\tilde{a}_0 = \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (1.102)$$

La relation (1.100) s'écrit alors d'une manière plus simple :

$$\tilde{a}_r = \Gamma \tilde{a}_0 \quad (1.103)$$

La formule (1.103) montre que la dimension linéaire \tilde{a}_r s'exprime dans le domaine rugueux, par le produit de Γ et \tilde{a}_0 . La fonction Γ dépend de Q, J et ε , mais ne dépend pas de la forme du profil géométrique. On notera que Γ a une dimension de longueur. Par contre le paramètre \tilde{a}_0 dépend exclusivement du profil liquide de l'écoulement, c'est-à-dire en fonction des paramètres de forme.

Dans le domaine turbulent rugueux, le nombre de *Reynolds* donné par la relation (1.48), s'écrit :

$$R_r = \frac{4Q}{P_r \nu} \quad (1.104)$$

Le périmètre mouillée P_r dans le domaine rugueux est déduit des relations (1.43) et (1.103) :

$$P_r = \tilde{a}_r P_1 = \Gamma \tilde{a}_0 P_1 \quad (1.105)$$

Avec cette dernière relation, on tire de la relation (1.104), l'expression du nombre de *Reynolds*, quelle que soit la forme du profil géométrique considéré :

$$R_r = \frac{4Q}{\Gamma \tilde{a}_0 P_1 \nu} \quad (1.106)$$

En utilisant les relations (1.106), (1.101) et (1.102) :

$$R_r \approx \frac{8,805}{\nu} \left[\frac{Q^{5/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right]^{3/8} \left(\frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{5/4} \quad (1.107)$$

D'autre part on sait que :

$$D_{hr} = 4 \frac{A_r}{P_r} = \frac{4\Gamma^2 \tilde{a}_0^2 A_1}{\Gamma \tilde{a}_0 P_1} = 4\Gamma \tilde{a}_0 \frac{A_1}{P_1} = 4\tilde{a}_r \frac{A_1}{P_1}$$

En utilisant cette dernière expression et les relations (1.101) et (1.102), on a :

$$D_{hr} = 1,817 \left(\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \left(\frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{3/4} \quad (1.108)$$

On peut déduire aussi de cette dernière et de (1.101) que :

$$D_{h0} = 4 \left(\frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{3/4} \quad (1.109)$$

La vitesse moyenne d'un écoulement en régime turbulent est selon la relation (1.22) :

$$V_r = \frac{\nu R_r}{D_{hr}} \quad (1.110)$$

En remplaçant D_{hr} et R_r par leurs relations (1.108) et (1.107), la vitesse est quelle que soit la forme du canal considéré :

$$V_r = \left(\frac{8,2 Q^{1/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right)^{3/4} \frac{A_1^{1/4}}{\sqrt{P_1}} \quad (1.111)$$

1.3.2 Calcul de la dimension linéaire- Cas du régime de transition

Dans le domaine de transition, la dimension linéaire \tilde{a} dépend fortement du nombre de *Reynolds*. Nous allons donc corriger la dimension linéaire \tilde{a}_r , calculé selon la relation (1.103) obtenue pour le régime turbulent rugueux, par un coefficient appelé facteur de correction Y , dépendant à la fois du nombre de *Reynolds* et de la rugosité relative ε/D_h . La relation (1.103) s'écrira alors :

$$\tilde{a} = Y \Gamma \tilde{a}_0 = Y \tilde{a}_r \quad (1.112)$$

En conformité avec la relation (1.112) on peut écrire que :

$$A = Y^2 \Gamma^2 \tilde{a}_0^2 A_1 = Y^2 \Gamma^2 A_0.$$

Ou bien :

$$A_0 = \tilde{a}_0^2 A_1 \quad (1.113)$$

De même on peut écrire que :

$$D_h = Y \Gamma D_{h0} \quad (1.114)$$

En introduisant ces deux dernières relations dans l'équation de *Darcy-Weisbach* (1.24) et en remplaçant la vitesse par le rapport Q/A , on a :

$$Y \Gamma = f^{1/5} \sqrt[5]{\frac{Q^2}{2g A_0^2 D_{h0} J}} \quad (1.115)$$

Le coefficient de frottement dans la relation(1.115), s'obtient par l'application de la formule de *Colebrook-white* en se basant sur un procédé itératif.

Dans le domaine rugueux ou $Y = 1$ et $f = f_r$ la relation (1.115) s'écrit :

$$\Gamma = f_r^{1/5} \sqrt[5]{\frac{Q^2}{2gA_0^2 D_{h0} J}} \quad (1.116)$$

Le rapport des relations (1.115) et (1.116) donne :

$$Y = \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5} \quad (1.117)$$

Ainsi, que sa soit dans le domaine de transition ou dans le domaine rugueux, la dimension linéaire \tilde{a} s'écrit en vertu des relations (1.112), (1.100) et (1.117) :

$$\tilde{a} = \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5} \left[\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (1.118)$$

Dans cette relation, le coefficient f peut être calculé par la formule connue de *Colebrook-white* (1.25), en s'appuyant cependant sur un procédé itératif. Par contre le coefficient f_r est obtenu explicitement par l'équation (1.20) de *Nikuradsé* ou D_h est remplacé par D_{hr} :

$$f_r^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7} \right) \quad (1.119)$$

Le coefficient f a été remplacé avec une très bonne approximation par l'équation explicite de *Achour* (*Achour et al, 2002*) suivante :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right) \quad (1.120)$$

- Le nombre de *Reynolds* R est déterminé par la relation (1.104) et en tenant compte que $P = Y P_r$ on a :

$$R = R_r / Y \quad (1.121)$$

- Le diamètre D_h peut s'écrire $D_h = Y D_{hr}$

En tenant de ces considérations la relation (1.120) devient :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7Y} + \frac{4,5Y}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97Y} \right) \quad (1.122)$$

Selon les relations (1.117), (1.119) et (1.122), l'évaluation de Y nécessite un procédé itératif dont le principe est le suivant :

$$f_1^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7Y_0} + \frac{4,5Y_0}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97Y_0} \right), \quad Y_0 = 1$$

$$f_2^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7Y_1} + \frac{4,5Y_1}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97Y_1} \right), \quad Y_1 = \left(\frac{f_1}{f_r} \right)^{1/5}$$

$$f_i^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / D_{hr}}{3,7Y_{i-1}} + \frac{4,5Y_{i-1}}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97Y_{i-1}} \right), \quad Y_{i-1} = \left(\frac{f_{i-1}}{f_r} \right)^{1/5}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Il a été constaté que $(Y_3 - Y_1) \leq 0,01Y_1$.

Alors l'erreur relative commise sur l'évaluation de Y ne dépasse pas 1% en application de (1.117) et pour $f = f_1$. Le facteur Y peut donc être évalué par la relation explicite :

$$Y = \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5} = \left[\frac{\log \left(\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7} + \frac{4,5}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97} \right)}{\log \left(\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7} \right)} \right]^{-2/5} \quad (1.123)$$

Finalement la dimension linéaire \tilde{a} recherchée est selon les relations (1.118) et (1.123) :

$$\tilde{a} = \left[\frac{\log \left(\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7} + \frac{4,5}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97} \right)}{\log \left(\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7} \right)} \right]^{-2/5} \left[\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (1.124)$$

Les paramètres R_r et D_{hr} sont donnés respectivement par les relations (1.107) et (1.108).

1.3.3 Calcul de la dimension linéaire. Cas du domaine pratiquement lisse.

Dans le domaine pratiquement lisse, caractérisé par une rugosité absolue $\varepsilon \rightarrow 0$, nous proposons de corriger la valeur de la dimension linéaire a_r obtenue dans le domaine turbulent rugueux pour une rugosité relative d'une conduite *hypothétique*, par un coefficient \check{Y} analogue au facteur de correction Y . La dimension linéaire s'écrit par similitude à (1.112) :

$$\tilde{a} = \check{Y}\Gamma\tilde{a}_0 = \check{Y}\tilde{a}_r \quad (1.125)$$

L'expression de \check{Y} s'obtient de la même manière que la relation (1.117) donnant Y :

$$\check{Y} = \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5} \quad (1.126)$$

La relation (1.125) devient alors :

$$\tilde{a} = \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5} \Gamma\tilde{a}_0 = \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5} \tilde{a}_r \quad (1.127)$$

Dans cette formule le coefficient f_r n'a pas de sens puisque $\varepsilon \rightarrow 0$. Nous allons alors considérer un canal *hypothétique* de même conductivité que le canal réel, mais caractérisé par une rugosité $\varepsilon/D_{hr} = 1,05 \cdot 10^{-2}$ en régime d'écoulement turbulent rugueux.

Pour ce canal f_r est selon la relation (1.20), $f_r = (\pi/16)^2$

La relation (1.126) devient :

$$f = (\pi/16)^2 \check{Y}^5 \quad (1.128)$$

L'équation de *Colebrook-white* pour $\varepsilon \rightarrow 0$ devient en tenant compte de (1.128) :

$$\frac{\pi}{8} \check{Y}^{5/2} \log \left(\frac{\check{Y}^{5/2} R}{12,78} \right) = 1 \quad (1.129)$$

On peut montre, comme dans le cas du régime transitoire, que $R = R_r / \ddot{Y}$ et la relation (1.129) devient :

$$\frac{\pi}{8} \ddot{Y}^{5/2} \log \left(\frac{\ddot{Y}^{3/2} R_r}{12,78} \right) = 1 \quad (1.130)$$

Cette dernière équation est implicite en \ddot{Y} , mais elle peut être remplacé par une excellente approximation par :

$$\ddot{Y} \sqrt{\log R_r} = 1,910 \quad (1.131)$$

La relation (1.131) permet le calcul explicite du facteur \ddot{Y} , avec une erreur relative maximale inferieure à 0,5% par rapport à la valeur obtenue par application de la relation (1.130).

Les caractéristiques d'un tel écoulement turbulent rugueux s'obtiennent :

En Remplaçant dans les relations (1.101), la rugosité ε par $\varepsilon = 1,05 \cdot 10^{-2} D_{hr}$ et D_{hr} par $4\Gamma D_{h0}$ et en utilisant (1.109), il vient après calcul et simplification :

$$\Gamma \cong 0,349 \left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \left(\sqrt{A_1} / P_1 \right)^{1/20} \quad (1.132)$$

Aussi, en remplaçant, dans les relations (1.108) et (1.111), la rugosité ε par $\varepsilon = 1,05 \cdot 10^{-2} D_{hr}$ on obtient après calcul et simplification:

$$V_r \cong 8,216 \left(gJ \sqrt{Q} \right)^{2/5} \left(\sqrt{A_1} / P_1 \right)^{2/5} \quad (1.133)$$

$$D_{hr} \cong 1,395 \left(Q / \sqrt{gJ} \right)^{2/5} \left(\sqrt{A_1} / P_1 \right)^{4/5} \quad (1.134)$$

Avec ces deux dernières relations, le nombre de *Reynolds* R_r donné par la relation (1.110) devient :

$$R_r \cong \frac{11,46}{\nu} \left(gJQ^3 \right)^{1/5} \left(\sqrt{A_1} / P_1 \right)^{6/5} \quad (1.135)$$

Sachant que $\tilde{a}_r = \Gamma \tilde{a}_0$, en utilisant la relation (1.102) donnant \tilde{a}_0 et celle (1.132) donnant Γ , on tire :

$$\tilde{a}_r \cong 0,349 \left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \quad (1.136)$$

En tenant compte de (1.136) et de (1.131), l'équation (1.125) devient :

$$\tilde{a} \cong \frac{2}{3\sqrt{\log R_r}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \quad (1.137)$$

La relation (1.137) permet d'évaluer la dimension linéaire \tilde{a} lorsque l'écoulement est dans le domaine pratiquement lisse. Il est donc nécessaire de connaître la nature du régime d'écoulement pour l'application des relations adéquates.

Les relations (1.133) à (1.137) sont applicables à tout profil géométrique. Le paramètre de forme de celui-ci est contenu dans les variables A_1 et P_1 .

Exemple d'application :

Reprenons l'exemple précédent et calculons le diamètre caractéristique D de la conduite, les données sont : $Q = 0,26 \text{ m}^3/\text{S}$; $J = 5.10^{-4}$; $\varepsilon = 10^{-5} \text{ m}$; $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $\eta = 0,65$

$$A_1 = \zeta(\eta) = 0,32481641 \quad P_1 = \vartheta(\eta) = 1,56276575 \quad D_{hr} \cong 1,395 \left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \left(\sqrt{A_1} / P_1 \right)^{4/5}$$

Solution:

La aussi il faut connaitre la nature du régime d'écoulement, nous avons trouvé dans le calcul par la méthode classique que l'écoulement est pratiquement turbulent lisse selon les conditions de Hager. La dimension linéaire a est donnée par la relation (1.137), il faut alors déterminer au préalable le nombre de Reynolds R_r par la relation (1.135), soit :

$$\begin{aligned} R_r &\cong \frac{11,46}{\nu} (gJQ^3)^{1/5} \left(\sqrt{A_1} / P_1 \right)^{6/5} \\ &= \frac{11,46}{\nu} (9,81 \times 0,0005 \times 0,26^3)^{1/5} \left(\sqrt{0,32481641} / 1,56276575 \right)^{6/5} = 525541 \end{aligned}$$

La dimension a est déduite de la relation (1.137) :

$$\begin{aligned} \tilde{a} = D &\cong \frac{2}{3\sqrt{\log R_r}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} = \frac{2}{3\sqrt{\log 525541}} \left(\frac{0,26}{\sqrt{9,81 \times 0,0005}} \right)^{2/5} \times \left(\frac{1,56276575}{0,32481641^3} \right)^{1/5} \\ &= 1,01121903 \cong 1 \text{ m} \end{aligned}$$

Il s'agit bien du diamètre déjà déterminé.

Cette valeur pouvait être obtenue en utilisant la relation (1.125) :

$$\ddot{Y} = 1,910 / \sqrt{\log R_r} = 1,910 / \sqrt{\log(525541)} = 0,79856878$$

$$\begin{aligned} \Gamma &\cong 0,349 \left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \left(\sqrt{A_1} / P_1 \right)^{1/20} \\ &= 0,349 \times \left(\frac{0,26}{\sqrt{9,81 \times 0,0005}} \right)^{2/5} \left(\sqrt{0,32481641} / 1,56276575 \right)^{1/20} = 0,56076799 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\tilde{a}_0 = \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} = \frac{1,56276575^{1/4}}{0,32481641^{5/8}} = 2,25787422$$

$$\tilde{a} = \ddot{Y} \Gamma \tilde{a}_0 = 0,79856878 \times 0,56076799 \times 2,25787422 = 1,01110274 \text{ m}$$

• Mais si par exemple la rugosité $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$ et la viscosité cinématique est $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ alors la nature du régime est transitoire. La dimension D est donnée par la relation (1.124) :

Déterminons au préalable les paramètres R_r et D_{hr} par les relations (1.107) et (1.108) :

$$\begin{aligned}
 R_r &\approx \frac{8,805}{\nu} \left[\frac{Q^{5/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right]^{3/8} \left(\frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{5/4} \\
 &= \frac{8,805}{10^{-5}} \left[\frac{0,26^{5/3} \sqrt{9,81 \times 0,0005}}{0,001^{1/6}} \right]^{3/8} \left(\frac{\sqrt{0,32481641}}{1,56276575} \right)^{5/4} = 61093
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{hr} &= 1,817 \left(\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \left(\frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{3/4} \\
 &= 1,817 \times \left(\frac{0,26 \times 0,001^{1/6}}{\sqrt{9,81 \times 0,0005}} \right)^{3/8} \left(\frac{\sqrt{0,32481641}}{1,56276575} \right)^{3/4} = 0,90556356 m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{a} &= \left[\frac{\log \left(\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7} + \frac{4,5}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97} \right)}{\log \left(\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7} \right)} \right]^{-2/5} \left[\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \\
 &= \left[\frac{\log \left(\frac{0,001/0,90556356}{3,7} + \frac{4,5}{61093} \log \frac{61093}{6,97} \right)}{\log \left(\frac{0,001/0,90556356}{3,7} \right)} \right]^{-2/5} \times \left[\frac{0,26 \times 0,001^{1/6}}{8,2 \times \sqrt{9,81 \times 0,0005}} \right]^{3/8} \times \frac{1,56276575^{1/4}}{0,32481641^{5/8}} \\
 &= 1,03559442 \times 0,48243632 \times 2,25787422 = 1,12805284 m
 \end{aligned}$$

Cette valeur est très proche de la valeur trouvée par calcul itératif.

1.4 Méthode du modèle rugueux de référence

Après avoir passé en revue les méthodes les plus significatives destinées au calcul de l'écoulement turbulent en conduite, nous allons dans ce qui suit, présenter les fondements de la théorie du modèle rugueux de référence (Ahour, 2007) ainsi que les principales relations qui en découlent. Cette théorie a été élaborée pour répondre aux trois catégories de problèmes dans les conduites circulaires et non circulaires en charge. Il s'agit de la détermination du débit Q écoulé par une conduite, le gradient de perte de charge J et le calcul de la dimension linéaire des conduites.

1.4.1 Modèle rugueux de référence :

Le modèle rugueux de référence est une conduite circulaire sous pression, caractérisée par un diamètre \bar{D} , une rugosité absolue $\bar{\varepsilon}$, écoulant un débit volume \bar{Q} d'un liquide de viscosité cinématique ν sous un gradient de perte de charge linéaire \bar{J} .

Le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement est \bar{R} et le coefficient de frottement est \bar{f} .

On affecte à cette conduite une forte rugosité relative, arbitrairement choisie égale à $\bar{\varepsilon}/\bar{D} = 3,7 \cdot 10^{-2}$, de telle sorte que le régime de l'écoulement qui s'y installe soit en turbulent rugueux ou supposé être comme tel.

Puisque l'écoulement est en régime turbulent rugueux, le coefficient \bar{f} répond à la relation (1.20):

$$\bar{f} = \left[-2 \log \left(\frac{\bar{\varepsilon}/\bar{D}}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (1.138)$$

En introduisant la valeur choisie $\bar{\varepsilon}/\bar{D} = 3,7 \cdot 10^{-2}$, \bar{f} prend la valeur constante caractérisant l'écoulement turbulent rugueux dans une conduite de référence :

$$\bar{f} = \left[-2 \log \left(\frac{3,7 \cdot 10^{-2}}{3,7} \right) \right]^{-2} = \frac{1}{16} \quad (1.139)$$

L'écoulement dans une telle conduite est régi par les relations du gradient de perte de charge de *Darcy-Weisbach* (1.24) et celle exprimant le nombre de *Reynolds* (1.22).

Pour la conduite rugueuse de référence, la relation de *Darcy-Weisbach* (1.24) devient :

$$\bar{J} = \bar{f} \frac{1}{D} \frac{\bar{V}^2}{2g} = \frac{8\bar{f}\bar{Q}^2}{g\pi^2 \bar{D}^5} \quad (1.140)$$

En substituant la valeur de \bar{f} donnée par la relation (1.139) dans la relation (1.140) il vient que :

$$\bar{J} = \frac{\bar{Q}^2}{2g\pi^2 \bar{D}^5} \quad (1.141)$$

Alors, on peut déduire de la relation (1.141) que \bar{D} est égal :

$$\bar{D} = (2\pi^2)^{-1/5} \left(\frac{\bar{Q}^2}{g\bar{J}} \right)^{1/5} \quad (1.142)$$

Donc :

$$\bar{D} = \text{constante} \times \left(\frac{\bar{Q}^2}{g\bar{J}} \right)^{1/5} \quad (1.143)$$

Si la conduite rugueuse de référence écoule un débit $\bar{Q} = Q$ sous un gradient de perte de charge linéaire $\bar{J} = J$, alors, nous pouvons écrire que :

$$\bar{D} = \text{constante} \times D_0$$

D_0 correspond au diamètre de la conduite rugueuse de référence lorsque celle ci écoule un débit volume $\bar{Q} = Q$ sous un gradient de perte de charge $\bar{J} = J$, ce qui correspond au diamètre caractéristique d_0 de *Swamee et Jain* (1976 ; 1977 ; 1978).

Appliquée à la conduite rugueuse de référence, la relation (1.18) s'écrit :

$$\bar{R} = \frac{\bar{V}\bar{D}}{\nu} = \frac{4\bar{Q}}{\pi D\bar{v}} \quad (1.145)$$

En éliminant le diamètre \bar{D} entre les relations (1.145) et (1.142), on obtient:

$$\bar{R} = \left(\frac{2048}{\pi^3} \right)^{1/5} \frac{(g\bar{J}\bar{Q}^3)^{1/5}}{\nu} \quad (1.146)$$

La relation (1.146) s'écrit alors :

$$\bar{R} = \text{constante} \frac{(g \bar{J} \bar{Q}^3)^{1/5}}{\nu} \quad (1.147)$$

D'autre part en éliminant \bar{Q} entre les relations (1.145) et (1.142) on obtient :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g \bar{J} \bar{D}^3}}{\nu} \quad (1.148)$$

La relation (1.148) peut alors s'écrire :

$$\bar{R} = \text{constante} \frac{\sqrt{g \bar{J} \bar{D}^3}}{\nu} \quad (1.149)$$

On constate que le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement dans une conduite rugueuse de référence en charge s'exprime selon trois relations (1.145), (1.146) et (1.148) en fonction, respectivement de (\bar{Q}, \bar{D}) , (\bar{Q}, \bar{J}) et (\bar{D}, \bar{J}) .

On peut résumer les caractéristiques géométriques de la conduite rugueuse de référence et hydraulique de l'écoulement comme tel :

| Paramètre | Symbole | Relation |
|--------------------------------------|---------------------|---------------------------|
| Diamètre interne | \bar{D} | (1.142) |
| Rugosité absolue | $\bar{\varepsilon}$ | - |
| Gradient de perte de charge linéaire | \bar{J} | (1.141) |
| Débit volume | \bar{Q} | - |
| Coefficient de frottement | $\bar{f} = 1/16$ | (1.139) |
| Nombre de <i>Reynolds</i> | \bar{R} | (1.145), (1.146), (1.148) |

1.4.2 Calcul de l'écoulement turbulent par le modèle rugueux de référence :

Nous allons dans ce qui suit étendre la théorie étudiée pour les écoulements forcés, aux écoulements permanents à surface libre dans les conduites fermées. Il s'agit d'établir principalement les relations permettant de déterminer le débit volume Q écoulé par une conduite, la dimension linéaire a de celle-ci ainsi que le gradient de perte de charge linéaire J .

Les principales relations établies pour l'écoulement en conduites sous pression restent valables à condition de remplacer le diamètre de la conduite par le diamètre hydraulique D_h défini par la relation (1.21).

Dans le cas d'un écoulement permanent incompressible d'un fluide passant par une conduite longue à profil constant, les éléments à considérer sont le débit volume Q , le gradient de perte de charge J , la

rugosité absolue de la conduite ε , une dimension linéaire a arbitrairement choisie du profil, le ou les paramètre de forme du profil considéré et enfin la viscosité cinématique du fluide véhiculé ν .

Dans toutes les conduites fermées qui seront étudiées, les paramètres adimensionnels tels que e_1, A_1, P_1, R_{h1} et D_{h1} seront déterminés en fonction du taux de remplissage η , alors seul le paramètre de forme η représentant le taux de remplissage de conduite sera considéré.

L'écoulement à surface libre turbulent en conduite est calculé en ayant recours aux caractéristiques de l'écoulement dans la conduite rugueuse de référence.

Il s'agit donc de répondre aux trois classes de problèmes de l'écoulement turbulent. Mais des relations fort intéressantes seront proposées pour le nombre de *Reynolds* et le coefficient de frottement f , lorsque l'un des trois paramètres Q , J et a n'est pas connu.

Seul le problème de dimensionnement, c'est-à-dire lorsque la dimension linéaire a est une inconnue du problème, fera l'objet de notre étude.

La relation de *Darcy –Weisbach* régissant l'écoulement à surface libre dans une conduite est $J = f V^2 / 2gD_h$.

Cette relation s'écrit pour un écoulement à surface libre en remplaçant la vitesse V et le diamètre hydraulique D_h par les relations (1.3), (1.21) et (1.9) :

$$J = f \frac{PQ^2}{8gA^3} \tag{1.150}$$

En exprimant dans cette dernière la surface mouillée et le périmètre mouille, en fonction de la dimension linéaire a , par leurs relations respectives (1.42) et (1.43) on a :

$$J = f \frac{Q^2}{8ga^5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right) \tag{1.151}$$

Ou a représente une dimension linéaire caractéristique liée à l'écoulement ou au profil géométrique de la section droite.

Dans le modèle rugueux de référence considéré, c'est-à-dire lorsque a est une inconnue du problème, assumons les égalités $J = \bar{J}$ et $Q = \bar{Q}$ par contre $a \neq \bar{a}$, $A \neq \bar{A}$, et $P \neq \bar{P}$.

C'est à dire, nous faisons écouler dans le modèle rugueux de référence le même débit que celui de la conduite, sous le même gradient de perte de charge linéaire. La relation (1.151) prend alors la forme suivante :

$$J = \bar{f} \frac{Q^2}{8g\bar{a}^5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right) \tag{1.152}$$

Si l'on remplace $\bar{f} = 1/16$ selon la relation (1.139), la relation régissant l'écoulement pour le modèle rugueux de référence s'écrit alors :

$$J = \frac{Q^2}{128g\bar{a}^5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right) \tag{1.153}$$

En comparant (1.151) et (1.153) nous pouvons déduire que $a \neq \bar{a}$. Ainsi, pour écouler le débit Q sous le gradient de perte de charge J , le modèle rugueux de référence doit être caractérisé par une dimension linéaire \bar{a} différente de celle de la conduite.

On tire de la relation (1.153) l'expression de la dimension linéaire dans le régime turbulent rugueux :

$$\bar{a} = 0,379 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \quad (1.154)$$

1.4.2.1 Expression du nombre de *Reynolds*.

Il s'agit d'établir une relation permettant le calcul explicite du nombre de *Reynolds* R caractérisant l'écoulement à surface libre dans une conduite fermée dont la dimension linéaire a est le paramètre inconnu. Les données du problème sont le débit volume Q , le gradient de perte de charge J , le paramètre de forme η , la rugosité absolue ε et la viscosité du liquide ν .

Le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est en vertu de (1.48) et en tenant compte des égalités $J = \bar{J}$ et $Q = \bar{Q}$ citées plus haut :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} \quad (1.155)$$

En vertu de la relation (1.43)

$$\bar{P} = \bar{a}P_1 \quad (1.156)$$

En substituant \bar{P} dans la relation (1.155), on a :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{a}P_1\nu} \quad (1.157)$$

Remplaçons dans cette dernière, \bar{a} par sa relation (1.154), on trouve :

$$\bar{R} = 10,556 \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu} \left(\frac{A_1}{P_1^2} \right)^{3/5} \quad (1.158)$$

En égalant les relations (1.151) et (1.153), il vient après simplification, que :

$$a = (16f)^{1/5} \bar{a} \quad (1.159)$$

Cette dernière peut s'écrire également :

$$a = \psi \bar{a} \quad (1.160)$$

Ou :

$$\psi = (16f)^{1/5} \quad (1.161)$$

Ce facteur peut être donc considéré comme le facteur de correction de la dimension linéaire.

D'autre part le rapport entre la relation (1.48) et la relation (1.155), donne :

$$\frac{R}{\bar{R}} = \frac{\bar{a}}{a} \quad (1.162)$$

Avec $a = \psi \bar{a}$, la relation (1.162) devient :

$$R = \psi^{-1} \bar{R} \quad (1.163)$$

En remplaçant dans la relation (1.25) de *Colebrook -white*, le diamètre D_h par $\psi \bar{D}_h$ en vertu de la relation (1.160), le coefficient de frottement f par la relation (1.161) et le nombre de *Reynolds* R par l'expression (1.163), on obtient après simplification et réarrangement :

$$\psi^{5/2} \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2}\bar{R}} \right) = -2 \quad (1.164)$$

Nous obtenons ainsi une relation implicite $\psi(\varepsilon/\bar{D}_h, \bar{R})$.

ψ est le paramètre fondamental liant les dimensions linéaires du modèle rugueux de référence et la conduite considérée. Il est la clé de voute du calcul des écoulements turbulent par la MMR. Le facteur ψ doit être évalué par un procédé itératif ou graphique en raison de la forme implicite de la relation (1.164). Cette relation a été représentée graphiquement (figure 1.8), pour une conduite sous pression ce qui reste valable pour un écoulement à surface libre, dans un système d'axes de coordonnées à division semi logarithmiques, et a donné un graphe similaire du diagramme de *Moody* ou l'on distingue :

Le domaine lisse, correspondant $\varepsilon/\bar{D}_h \rightarrow 0$, et on a :

$$\psi^{5/2} \log \left(\frac{10,04}{\psi^{3/2}\bar{R}} \right) = -2 \quad (1.165)$$

Le domaine de l'écoulement rugueux, correspondant à $\nu \rightarrow 0$ ou à $\bar{R} \rightarrow \infty$, et on a :

$$\psi^{5/2} \log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{3,7\psi} \right) = -2 \quad (1.166)$$

Le diagramme, ainsi tracé, montre que l'ensemble du domaine turbulent le facteur de correction des diamètres ψ varie dans la gamme $0,55 < \psi < 1$.

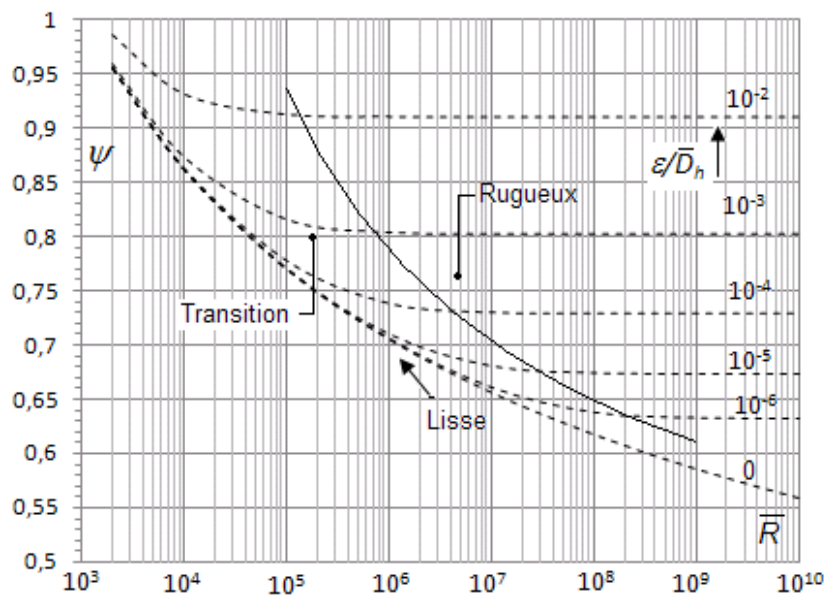


Figure 1.8 : Variation de $\psi(\bar{R})$ selon la relation (1.164) pour diverses valeurs de ε/\bar{D}

\overline{D}_h peut s'exprimer en vertu des relations (1.21), (1.44) et (1.154), pour les valeurs connues Q et J par :

$$\overline{D}_h = 1,516 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{A_1}{P_1^2} \right)^{2/5} \quad (1.167)$$

Par contre \overline{R} est donné par la relation (1.158). La seule variable inconnue dans la relation (1.164) est le facteur de correction ψ .

Afin de faciliter le calcul du facteur de correction ψ , *Achour et Bedjaoui* (*Achour et Bedjaoui*, 2006) recommandent d'utiliser la relation explicite approchée en remplacement de la relation implicite (1.164) :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (1.168)$$

Pour apprécier la fiabilité de cette relation, elle a été comparée à la relation exacte (1.164) et les résultats donnent, pour $\overline{R} \geq 2000$ et dans toute la gamme $0 \leq \varepsilon/\overline{D} \leq 2.10^{-2}$, l'écart relatif $(\Delta\psi)/\psi$ maximal est inférieur à 0,5%.

En assumant la relation (1.168), l'expression du nombre de *Reynolds* R de l'écoulement est déduite de la relation (1.163), soit :

$$R = \frac{\overline{R}}{1,35} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{2/5} \quad (1.169)$$

L'erreur relative $(\Delta R/R)_{\max} = (\Delta\psi/\psi)_{\max}$ ne dépasse pas 0,5%.

Le nombre de *Reynolds* R peut être calculé avec une meilleure précision, en utilisant la relation (1.163) et (1.164):

$$R = \overline{R} \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_h}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2}\overline{R}} \right) \right]^{2/5} \quad (1.170)$$

1.4.2.2 Expression du coefficient de frottement.

Il s'agit d'établir la relation permettant le calcul du coefficient de frottement f à partir des valeurs connues du débit Q , du gradient de perte de charge J , de la rugosité absolue ε , la viscosité cinématique ν et du taux de remplissage η . La dimension linéaire a est une inconnue du problème.

En utilisant les relations (1.161), (1.163) et (1.170) nous avons l'expression du coefficient f :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_h}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2}\overline{R}} \right) \right]^{-2} \quad (1.171)$$

1.4.2.3 Expression du diamètre.

Etablissons une relation permettant le calcul d'une manière explicite la dimension linéaire a d'une conduite en écoulement à surface libre à partir des valeurs connues du débit Q , du gradient de perte de charge J , de la rugosité absolue ε , de la viscosité cinématique ν et du paramètre de forme η .

A partir de la relation (1.160) et (1.168) et après élimination de ψ , on a :

$$a \cong 1,35\bar{a} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (1.172)$$

En introduisant dans cette dernière, l'expression de \bar{a} donnée par la relation (1.154), on a :

$$a \cong 0,512 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \quad (1.173)$$

Où :

- \bar{D}_h est donnée par la relation (1.167).
- \bar{R} est donné par la relation (1.158).

Les relations (1.172) et (1.173) sont applicables au domaine de l'écoulement turbulent pour $\bar{R} \geq 2300$ et $0 \leq \varepsilon/\bar{D} \leq 0,05$. Elles occasionnent un écart de 0,5% sur le calcul de la dimension a , ce qui est largement satisfaisant.

On peut obtenir une troisième relation d'une meilleure précision que la relation (1.173), bien que celle-ci soit largement suffisante, pour l'évaluation de la dimension a d'une manière explicite en utilisant la relation (1.151) et dans laquelle on remplace le coefficient de frottement f par son expression (1.171), soit :

$$a = 0,66 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2}\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \quad (1.174)$$

1.4.2.4 Détermination du débit volume.

Il s'agit d'établir une relation donnant le débit Q lorsque celui-ci est une inconnue du problème. Le calcul de ce débit nécessite la connaissance du gradient de perte de charge J , d'une ou plusieurs dimensions linéaires caractéristiques, des paramètres géométriques de la conduite tel que la surface mouillée A , le périmètre mouillé P , des paramètres de forme de la section droite, de la rugosité ε et la viscosité cinématique ν .

Pour un tel écoulement à surface libre dans une conduite fermée objet de notre étude, assumons les égalités suivantes : $a = \bar{a}$, $A = \bar{A}$, $P = \bar{P}$ et $J = \bar{J}$ le débit $Q \neq \bar{Q}$

La relation (1.150) s'écrit en tenant compte de ces considérations et de la relation (1.139) :

$$\bar{J} = J = \frac{P\bar{Q}^2}{128gA^3} \quad (1.175)$$

En remplaçant A/P par R_h on tire respectivement des relations (1.150) et (1.175) :

$$Q = 2 \frac{1}{\sqrt{f}} \sqrt{2g} A \sqrt{R_h J} \quad (1.176)$$

$$\bar{Q} = 8 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h J} \quad (1.177)$$

Le rapport des relations (1.176) et (1.177) donne :

$$\frac{Q}{\bar{Q}} = \frac{1}{4\sqrt{f}} \quad (1.178)$$

Désignons par ψ_Q le rapport $\left[1/4\sqrt{f}\right]$ figurant dans la relation (1.178) :

$$\psi_Q = \frac{1}{4\sqrt{f}} \quad (1.179)$$

Alors il vient, selon (1.178) :

$$Q = \psi_Q \bar{Q} \quad (1.180)$$

L'égalité $P = \bar{P}$, permet d'écrire la relation (1.48) du nombre de *Reynolds* sous la forme :

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{P\nu} \quad (1.181)$$

On peut déduire de (1.48) et (1.181) que :

$$R = \psi_Q \bar{R} \quad (1.182)$$

En remplaçant, dans la relation (1.25) de *Colebrook-white*, le coefficient f tiré de la relation (1.179), le diamètre hydraulique et le nombre de *Reynolds* par leurs expressions respectives (1.21) et (1.182) il vient :

$$\frac{1}{16\psi_Q^2} = \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/R_h}{14,8} + \frac{2,51 \times 4\psi_Q}{\psi_Q \bar{R}} \right) \right]^2$$

On tire de cette dernière relation:

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon/R_h}{14,8} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (1.183)$$

Le coefficient de frottement f est alors exprimé à partir des relations (1.179) et (1.183) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/R_h}{14,8} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (1.184)$$

Avec cette dernière relation on peut déterminer exactement le coefficient de frottement f pour un nombre de *Reynolds* $R \geq 2300$ si les paramètres tel que J, ε, ν et R_h sont donnés.

On peut aussi exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*, donné par la relation (1.16), par la relation (1.184) :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon/R_h}{14,8} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \quad (1.185)$$

En substituant dans la relation (1.176), le coefficient f , on obtient la relation de *Achour et Bedjaoui* (*Achour et Bedjaoui, 2006*) :

$$Q = -4\sqrt{2g}A\sqrt{R_h}J \log\left(\frac{\varepsilon/R_h}{14,8} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right) \quad (1.186)$$

Le nombre de Reynolds \bar{R} figurant dans la relation (1.184), (1.185) et (1.186) est tiré de la relation (1.181) en remplaçant \bar{Q} par son expression (1.177) et A/P par R_h , soit :

$$\bar{R} = \frac{32\sqrt{2}\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \quad (1.187)$$

Ou en utilisant la relation (1.44) :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2}\left(\frac{A_1}{P_1}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} \quad (1.188)$$

Exemple d'application :

Reprenons l'exemple précédent et calculons le diamètre caractéristique D de la conduite, les données sont : $Q = 0,26 \text{ m}^3/\text{S}$; $J = 5 \cdot 10^{-4}$; $\varepsilon = 10^{-5} \text{ m}$; $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; $\eta = 0,65$

$$A_1 = \zeta(\eta) = 0,32481641 \quad P_1 = \vartheta(\eta) = 1,56276575$$

Solution:

On détermine le diamètre hydraulique \bar{D}_h en utilisant la relation (1.167) :

$$\bar{D}_h = 1,516 \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5} \left(\frac{A_1}{P_1^2}\right)^{2/5} = 1,516 \left(\frac{0,26^2}{9,81 \times 0,0005}\right)^{1/5} \times \left(\frac{0,32481641}{1,56276575^2}\right)^{2/5} = 1,14314367 \text{ m}$$

Le nombre de Reynolds \bar{R} est déterminé par la relation (1.158) :

$$\bar{R} = 10,556 \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu} \left(\frac{A_1}{P_1^2}\right)^{3/5} = 10,556 \times \frac{(9,81 \times 0,0005 \times 0,26^3)^{1/5}}{10^{-6}} \times \left(\frac{0,32481641}{1,56276575^2}\right)^{3/5} = 484085$$

La dimension linéaire a ou le diamètre D , recherchée est égal selon la relation (1.173) :

$$\begin{aligned} D &\cong 0,512 \left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}}\right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3}\right)^{1/5} \\ &= 0,512 \times \left[-\log\left(\frac{10^{-5}/1,14314367}{4,75} + \frac{8,5}{484085}\right) \right]^{-2/5} \times \left(\frac{0,26^2}{9,81 \times 0,0005}\right)^{1/5} \times \left(\frac{1,56276575}{0,32481641^3}\right)^{1/5} \\ &= 0,99916802 \text{ m} \cong 1 \text{ m} \end{aligned}$$

Ou en utilisant la relation (1.174), mais il faut au préalable déterminer ψ par la relation (1.168) :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}}\right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log\left(\frac{10^{-5}/1,14314367}{4,75} + \frac{8,5}{484085}\right) \right]^{-2/5} = 0,72618085$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 D &\cong 0,66 \left[-2 \log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_h}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \\
 &= 0,66 \times \left[-2 \log \left(\frac{10^{-5}/1,14314367}{3,7 \times 0,72618085} + \frac{10,04}{0,72618085^{3/2} \times 484085} \right) \right]^{-2/5} \\
 &\quad \times \left(\frac{1,56276575}{0,32481641^3} \right)^{1/5} \times \left(\frac{0,26^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \\
 &= 1,00011957 \text{ m} \cong 1 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Ou en utilisant la relation (1.160):

Calculons d'abord la dimension linéaire \overline{a} ou (\overline{D}) dans le régime turbulent rugueux par la relation (1.154) :

$$\overline{a} = \overline{D} = 0,379 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} = 0,379 \times \left(\frac{0,26^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{1,56276575}{0,32481641^3} \right)^{1/5} = 1,37498116 \text{ m}$$

$$D = \psi \overline{D} = 0,72618085 \times 1,37498116 = 0,998485 \cong 1 \text{ m}$$

Le diamètre exact a été déterminé dans la solution classique par itérations successives et a donné :

$$D_3 = 0,99962837 \text{ m}$$

L'erreur max commise, obtenue par l'une des méthodes, par rapport à la valeur exacte est de:

$$\frac{0,99962837 - 0,998485}{0,99962837} \times 100\% = 0,11\%$$

- Mais si la rugosité $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$ et la viscosité cinématique est $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ on a :

$$\overline{D}_h = 1,14314367 \text{ m} ; \quad \overline{R} = 48409 ; \text{ Alors le diamètre } D \text{ est selon la relation (1.173) :}$$

$$\begin{aligned}
 D &\cong 0,512 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \\
 &= 0,512 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3}/1,14314367}{4,75} + \frac{8,5}{48409} \right) \right]^{-2/5} \times \left(\frac{0,26^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{1,56276575}{0,32481641^3} \right)^{1/5} \\
 &= 1,13266733 \text{ m}
 \end{aligned}$$

L'erreur n'est que de 0,03%

Conclusion :

L'écoulement turbulent dans une conduite en charge ou à ciel ouvert est calculée par une nouvelle méthode basée sur le modèle rugueux de référence. Ce modèle est caractérisé par une rugosité relative arbitrairement choisie égale à $\varepsilon/\overline{D} = 0,037$ de manière que l'écoulement qui s'y développe est turbulent rugueux. L'application de la relation de *Darcy-Weisbach* a permis d'exprimer les caractéristiques de l'écoulement dans le modèle de référence tels que le gradient de perte de charge J le diamètre D et le nombre de *Reynolds* R .

Le calcul de la dimension linéaire (ou diamètre caractéristique) $D(Q, J, \varepsilon, \nu)$ est mené en assumant que $Q = \bar{Q}$, $J = \bar{J}$ mais $D \neq \bar{D}$. Le diamètre D a été calculé par la relation (1.173) après avoir déterminé \bar{D}_h et \bar{R} par les relations respectives (1.167) et (1.158), ou par la relation (1.174) en calculant en plus $\psi(\varepsilon/\bar{D}_h, \bar{R})$ par la relation (1.168).

La synthèse des méthodes de dimensionnement les plus significatives est déduites de la résolution de l'exemple concret de dimensionnement d'une conduite fermée ovoïdale que nous avons exposée. Elle nous a permis de tirer les conclusions suivantes :

- La détermination exacte de la dimension linéaire passe par la combinaison de la relation de *Darcy-Weisbach* et de celle de *Colebrook-white*. Ces deux relations sont implicites et le calcul se fait par approches successives en déterminant le coefficient de frottement et la dimension approchée a . Ce calcul est lent et laborieux.

- La détermination de cette dimension linéaire par l'équation de *Darcy-Weisbach*, en considérant le coefficient de résistance de *Chézy* constant est implicite aussi. Dans l'exemple d'application, la résolution par la méthode graphique a occasionné une erreur de 8% par rapport à la valeur exacte calculée par approximation successives. Cette erreur peut être plus importante quand l'écoulement devient lisse, car la méthode graphique ne tient pas compte de l'influence du nombre de *Reynolds*.

- La longueur fluidodynamique donne des résultats relativement satisfaisants, mais la lecture sur les graphes pour la détermination des par.dim, de la longueur fluidodynamique Λ et des facteurs de transitions (Υ, \check{Y}) est laborieuse et source de beaucoup d'erreur. Le calcul de la dimension linéaire dépend de la nature du régime d'écoulement et pour les faibles valeurs de la rugosité, on doit vérifier cette nature en utilisant le nombre de *Reynolds*. Cette vérification ne peut se faire qu'une fois la dimension linéaire déterminée, car ε/D_h et R dépendent de cette dimension.

- Le calcul par méthode de la longueur fluidodynamique modifié donne aussi des résultats satisfaisant, mais il faut connaître au préalable la nature de l'écoulement. Les inégalités tirées de la variation $\varepsilon^*(\nu^*)$ permettent la détermination de cette nature. le calcul se fait alors explicitement par la relation (1.100) pour le régime turbulent rugueux, par la relation (1.124) pour le régime transitoire et par la relation (1.137) pour le régime pratiquement lisse. Il faut, bien sur, au préalable déterminer R_r et D_{hr} par les relations (1.107) et 1108). Dans le régime pratiquement lisse la fonction Γ est calculée à partir de la relation (1.132) et non de la relation (1.101).

- Le calcul par la méthode de la MMR est beaucoup plus simple, l'application des formule ne nécessite pas de connaître le type du régime d'écoulement. et les erreurs commises sont insignifiantes. L'application directe de la relation (1.173) donne en un seul calcul la dimension linéaire. Le calcul de \bar{D}_h et de \bar{R} par les relations respectives (1.167) et (1.158) peut être intégré directement dans la relation (1.173). Les erreurs maximales sont de 0,6% seulement. Cette méthode offre de grande possibilité pour résoudre les problèmes de dimensionnement liés à l'écoulement à ciel ouvert des conduites fermées qui seront présentées dans les chapitres suivants.

CHAPITRE II

ETUDE DE L'ÉCOULEMENT PERMANENT UNIFORME DANS LES CONDUITES CIRCULAIRES

Introduction

Les conduites circulaires sont les plus utilisées dans l'assainissement urbain, les grandes adductions de transfert, l'irrigation et dans de nombreux cas des aménagements hydraulique. L'écoulement qui s'y installe est souvent permanent uniforme. Le régime d'écoulement est fréquemment turbulent. Le calcul de la dimension linéaire telle que le diamètre D de la conduite ou la profondeur normale y_n de l'écoulement présente un intérêt majeur pour les projeteurs.

Pour répondre à cette préoccupation, nous allons étudier en premier lieu les écoulements permanents à coefficient de résistance constant, ensuite les écoulements où ce coefficient varie avec la viscosité du liquide et des dimensions de la conduite.

Pour surmonter les difficultés du calcul de la dimension linéaire, on proposera dans le premier cas des relations approchées permettant le calcul explicite et rapide de cette dimension.

Ensuite se basant sur la méthode du modèle rugueux de référence on présentera des relations pour le calcul de la dimension linéaire D et du taux de remplissage de la conduite dans le cas du coefficient de résistance à l'écoulement variable. Les solutions présentées sont valables quelque soit le régime d'écoulement.

On proposera pour l'écoulement critique, une relation approchée fiable pour la détermination explicite du taux de remplissage η_c où de la profondeur y_c .

Des exemples d'application édifiants pour les différents problèmes de dimensionnement rencontrés seront présentés pour mieux comprendre les différentes étapes de calcul.

3.1 Écoulement à coefficient de résistance invariable.

L'écoulement uniforme à surface libre dans les conduites et canaux artificiels est régi comme par cinq paramètres :

- Le débit volume Q .
- La pente longitudinale J du canal.
- La dimension linéaire caractérisant la géométrie du canal. Dans le cas de la conduite en charge ou partiellement occupée cette dimension est le diamètre D .
- La rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne du canal.

- La viscosité cinématique ν du liquide d'écoulement.

La figure 2.1 ci-dessus schématise un écoulement permanent uniforme de profondeur normale y_n dans une conduite circulaire de diamètre interne D .

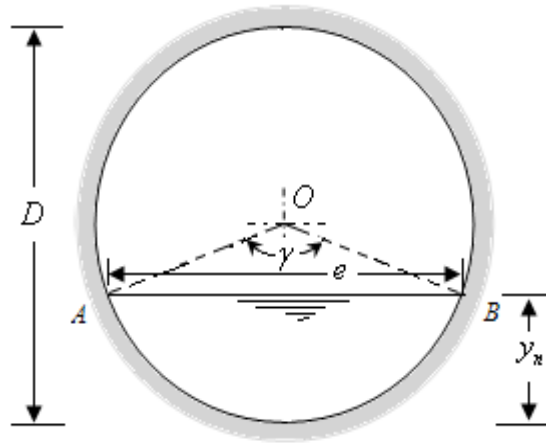


Figure 2.1 : Schéma de définition de l'écoulement en conduite circulaire

La bibliographie montre que l'écoulement uniforme est souvent abordé en utilisant les formules usuelles telles que celle de *Chézy* ou de *Manning Strickler*.

La formule de *Chézy* est établie en utilisant les relations (1.15) et (1.3) :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} \quad (2.1)$$

Par contre la formule de *Manning-Strickler* est donnée en introduisant dans la relation (2.1) l'expression du coefficient de *Chézy*, $C = R^{1/6}/n$ donnée par *Manning* :

$$Q = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (2.2)$$

Dans les relations (2.1) et (2.2), les paramètres C , n , A et R_h désignent respectivement le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Manning*, l'aire de la section mouillée de l'écoulement et le rayon hydraulique.

Il faut noter que ces relations ne tiennent pas compte de la viscosité du liquide, c'est-à-dire que le régime de l'écoulement uniforme considéré est turbulent rugueux. L'application de ces deux relations n'est pas valable lorsque l'écoulement est de nature transitoire ou lisse ou considéré comme tel. Car les coefficients de résistances à l'écoulement de *Chézy* et de *Manning* sont variables en fonction de la viscosité cinématique ν et des dimensions de la conduite.

Afin de définir la géométrie de l'écoulement dans une conduite circulaire partiellement remplie, on a introduit le paramètre ou profondeur relative de remplissage $\eta = y_n/D$, appelé paramètre de forme de la section mouillée. Lorsque l'écoulement occupe la moitié de l'aire de la conduite, la valeur $\eta = 0,5$, tandis que la valeur $\eta = 1$ signifie que la conduite est entièrement remplie par l'écoulement. Le paramètre de forme η est désigné ultérieurement sous le terme de taux de remplissage de la conduite.

3.1.1 Eléments hydrauliques de la section transversale

Dans une conduite circulaire partiellement occupée par l'écoulement, les éléments hydrauliques dans une section droite déterminée sont, en fonction du taux de remplissage :

a. Aire de la section :

L'aire de la section mouillée A est égale à l'aire du segment circulaire OAB auquel il faut retrancher l'aire du triangle OAB soit :

$$A = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \gamma - \left(\frac{D}{2}\right)^2 \sin \gamma = \frac{D^2}{4} \left(\frac{\gamma}{2} - \sin 2\frac{\gamma}{2}\right)$$

Soit :

$$A = \frac{D^2}{4} \left(\frac{\gamma}{2} - 2 \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2}\right) \quad (2.3)$$

Sachant que :

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{(D/2 - y_n)}{D/2} = 1 - 2\eta \quad (2.4)$$

On déduit que :

$$\frac{\gamma}{2} = \cos^{-1}(1 - 2\eta) \quad (2.5)$$

On peut écrire aussi :

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \sqrt{1 - (1 - 2\eta)^2} = 2\sqrt{\eta(1 - \eta)} \quad (2.6)$$

Avec les relations (2.3), (2.4) et (2.5), A est égale :

$$A = \frac{D^2}{4} \left[\cos^{-1}(1 - 2\eta) - 2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)} \right] \quad (2.7)$$

Il apparaît ainsi que l'aire de la section mouillée A est fonction seulement du diamètre D de la conduite et du taux de remplissage η .

La relation (2.7) peut s'écrire sous la forme :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta)\varphi(\eta) \quad (2.8)$$

Où :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) \quad (2.9)$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} \quad (2.10)$$

En remplaçant dans la relation (1.42) la dimension linéaire a par le diamètre D de la conduite circulaire, on obtient la surface mouillée en fonction du paramètre adimensionnel A_1 et du diamètre D , soit :

$$A = D^2 A_1 \quad (2.11)$$

Au vu de la relation (2.8), le paramètre adimensionnel A_1 est donc égal :

$$A_1 = \frac{1}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) \quad (2.12)$$

b. Périmètre mouillée :

Le périmètre mouillé P , est la longueur de l'arc \widehat{AB} tel que :

$$P = \gamma D/2$$

Soit :

$$P = D \cos^{-1}(1 - 2\eta) \quad (2.13)$$

Ou bien :

$$P = D\sigma(\eta) \quad (2.14)$$

Utilisant la relation (1.42) et remplaçant la dimension linéaire a par le diamètre D de la conduite, on obtient le périmètre mouillée en fonction du paramètre adimensionnel P_1 et du diamètre D , soit :

$$P = DP_1 \quad (2.15)$$

Au vu de la relation (2.14), il vient que :

$$P_1 = \sigma(\eta) \quad (2.16)$$

c. Rayon hydraulique :

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$, s'exprime, en ayant recours aux relations (2.8) et (2.14), par :

$$R_h = \frac{D}{4} \varphi(\eta) \quad (2.17)$$

En remplaçant dans la relation (1.44) la dimension linéaire a par le diamètre D . On obtient le rayon hydraulique en fonction des paramètres adimensionnels A_1, P_1 et du diamètre D , soit :

$$R_h = D \frac{A_1}{P_1} \quad (2.18)$$

Le paramètre adimensionnel R_{h1} correspondant à R_h est :

$$R_{h1} = A_1/P_1 = \varphi(\eta)/4 \quad (2.19)$$

d. Largeur de la surface mouillée :

La largeur e de la surface mouillée est déterminée après avoir écrit :

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{e/2}{D/2}$$

On déduit de cette dernière, l'expression de la largeur e , et en utilisant la relation (2.6), on a :

$$e = 2D\sqrt{\eta(1-\eta)} \quad (2.20)$$

Remplaçons dans la relation (1.41), la dimension a par le diamètre D de la conduite, on obtient la largeur de la surface mouillée en fonction du paramètre adimensionnel e_1 et du diamètre D , soit :

$$e = De_1 \quad (2.21)$$

Au vu de la relation (2.20), le paramètre adimensionnel e_1 est donc égal :

$$e_1 = 2\sqrt{\eta(1-\eta)} \tag{2.22}$$

Nous désignerons ultérieurement tous les paramètres adimensionnels correspondant au remplissage total de la section ($\eta = 1$) avec l'indice « p ».

Les paramètres adimensionnels de la section droite figurent dans le tableau suivant :

Tableau des Paramètres adimensionnels.

| Paramètres adimensionnels | 0 ≤ η ≤ 1 | A l'état plein η = 1 |
|---------------------------|--|-------------------------|
| $\sigma(\eta) =$ | $\cos^{-1}(1-2\eta)$ | π |
| $\varphi(\eta) =$ | $1 - \frac{2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)}}{\cos^{-1}(1-2\eta)}$ | 1 |
| $e_1 =$ | $2\sqrt{\eta(1-\eta)}$ | 0 |
| A_1 | $A_1 = \sigma(\eta)\varphi(\eta)/4$ | $A_{1p} = \pi/4$ |
| P_1 | $P_1 = \sigma(\eta)$ | $P_{1p} = \pi$ |

Variation des caractéristiques de l'écoulement

Sur la figure 2.2 nous avons représenté la variation $\eta(R_h/D)$ de la caractéristique adimensionnelle particulière du rayon hydraulique relatif $R_h/D = R_{h1}$ dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$.

On observe que le paramètre R_h/D passe par un maximum pour le taux $\eta = 0,813$.

Pour $\eta = 0,813$, on a : $A_1(\eta = 0,813) = 0,68384469$ et $P_1(\eta = 0,813) = 2,24720954$.

Il vient alors, en application de la relation (2.19) : $R_{h,max} = 0,30430838D$

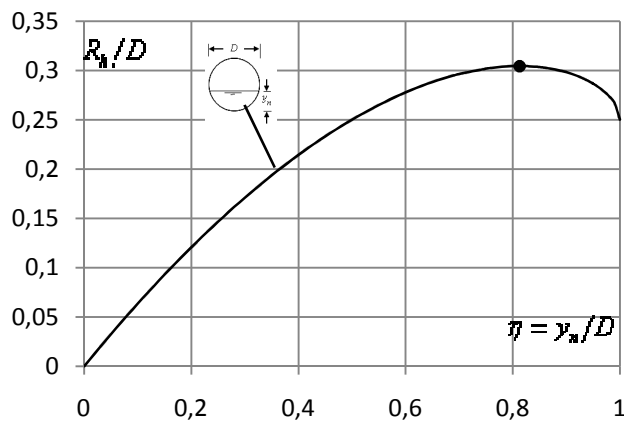


Figure 2.2 : Variation du rayon hydraulique relatif R_h/D en fonction du taux η .
 (●) Taux de remplissage correspondant à $R_{h,max} / D$.

3.1.2 Ecoulement à coefficient de résistance de *Chézy* constant.

On entend par coefficient de résistance constant, un coefficient de résistance à l'écoulement qui reste inchangé même si le taux de remplissage de la conduite varie. Autrement dit, pour une conduite de diamètre donné, ce coefficient reste invariable avec la variation de la profondeur de l'écoulement.

Selon *Chézy*, le débit volume Q s'exprime par la relation (2.1). En remplaçant dans cette relation la surface mouillée A et le rayon hydraulique R_h par leurs expressions respectives (1.42) et (1.44) dans lesquelles la dimension linéaire a se confond avec le diamètre D de la conduite, on a :

$$Q = \sqrt{C^2 D^5 J} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \quad (2.23)$$

En introduisant le débit relatif, ou exactement la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 J}} \quad (2.24)$$

Cette conductivité relative s'écrit alors en terme adimensionnels en utilisant (2.23) :

$$Q^* = \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \quad (2.25)$$

On remarque que cette conductivité n'est fonction que du taux de remplissage η . Ainsi pour une conduite circulaire entièrement pleine, c'est-à-dire $\eta = 1$, $A_{1p} = \pi/4$ et $P_{1p} = \pi$, la relation (2.25) donne la conductivité Q_p^* :

$$Q_p^* = \pi/8 = 0,3927 = \text{constante} \quad (2.26)$$

Parmi les problèmes de dimensionnement, on rencontre souvent le problème de la détermination de la profondeur moyenne y_n à partir des valeurs connues des paramètres tel que le débit volume Q , la pente longitudinale J , le diamètre D et le coefficient de *Chézy* C . Ce problème peut être résolu à partir de la solution de l'équation (2.25), puisque le débit relatif Q^* est une donnée dont la valeur est tirée de l'équation (2.24). L'objectif est donc de déterminer la valeur du taux de remplissage η qui permettrait la déduction de la valeur de la profondeur normale $y_n = \eta D$. Cependant) lorsque l'on introduit les expressions de $A_1(\eta)$ et de $P_1(\eta)$ dans la relation (2.25), il apparait clairement que le paramètre de forme η est implicite vis-à-vis de Q^* et sa détermination nécessite un procédé itératif ou graphique.

L'un de nos objectifs est de proposer dans ce qui suit une solution explicite de la relation (2.25), permettant le calcul, avec une précision suffisante, le paramètre de forme η et par conséquent la profondeur y_n ou profondeur critique y_c avec une relation tirée de la même démarche.

Le calcul du diamètre D est également un objectif principal de notre étude. Il nécessite la connaissance des autres paramètres tel que le débit volume Q , la pente longitudinale J et le coefficient de *Chézy* C , pour la résolution de l'équation (2.24).

Mais on constate que ce calcul n'est pas facile, car Q^* dans la relation (2.24) est déterminée par la relation (2.25) qui est fonction de η qui lui-même est une inconnue du problème. Cette relation doit être transformée pour permettre le calcul simple du taux de remplissage η . Il est donc nécessaire de connaître la variation de la conductivité Q^* en fonction de η pour pouvoir transformer la relation. Il est bien entendu que toutes les considérations se rapportent à la relation (2.24) reposent sur le fait que le coefficient C demeure constant quelque soit la valeur de η .

Alors pour atteindre cette fin, On détermine pour chaque valeur η la valeur Q^* et on dresse un graphe $\eta = f(Q^*)$ pour étudier la variation de la conductivité Q^* en fonction de η .

3.1.2.1 Variation de la conductivité relative $\eta(Q^*)$.

En considérant la relation (2.25), la conductivité relative Q^* a été représentée graphiquement sur la figure 2.3 ci-dessus, dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$

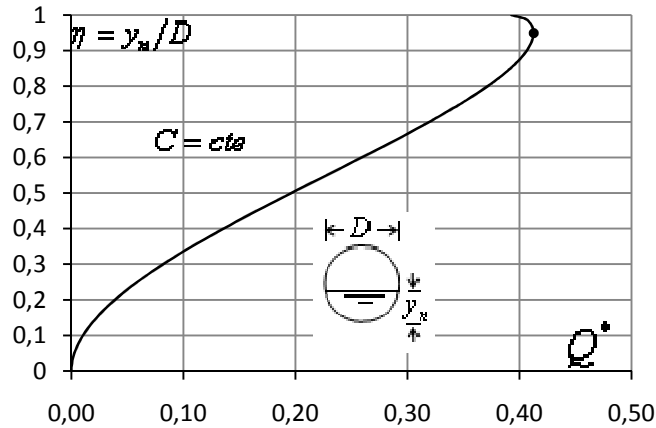


Figure 2.3 : Variation $\eta(Q^*)$, selon la relation (2.25) $\cong 0,41249681$

On constate que la conductivité Q^* augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η jusqu'à une valeur maximale Q_{\max}^* , représentée par un point gris dans le graphe, cette valeur correspond à $\eta = 0,9497$.

La valeur Q_{\max}^* peut être obtenue en remplaçant dans la relation (2.25) les paramètres adimensionnels $A_1(\eta = 0,9497) = 0,77058573$ et $P_1(\eta = 0,9497) = 2,6891913$, on a alors :

$$Q_{\max}^* = 0,41249681 \tag{2.27}$$

Au delà de cette valeur, Q^* diminue avec l'augmentation de η . Lorsque $\eta = 1$, la conductivité relative à l'état plein prend la valeur $Q_p^* \cong 0,3927$.

Notons que pour $\eta = 0,8524493$ la valeur Q^* est $Q^* \cong 0,3927$, cette valeur correspond à la valeur à l'état plein $Q_p^* \cong 0,3927$ sans aucune signification physique.

Dans la large gamme du taux de remplissage $0,06 \leq \eta \leq 0,88$, correspondant à $0,0038 \leq Q^* \leq 0,4014$, nos calculs ont montré que le taux de remplissage de la conduite pouvait s'exprimer par la relation :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,178}\eta\right) = 1,527Q^{*0,516} \quad (2.28)$$

L'écart relatif $\Delta\eta/\eta$ maximal occasionné par la relation approchée (2.28) est inférieur à 0,48% comme le montre clairement la figure 2.4, les plus grands écarts sont obtenus pour les valeurs extrêmes Q^* .

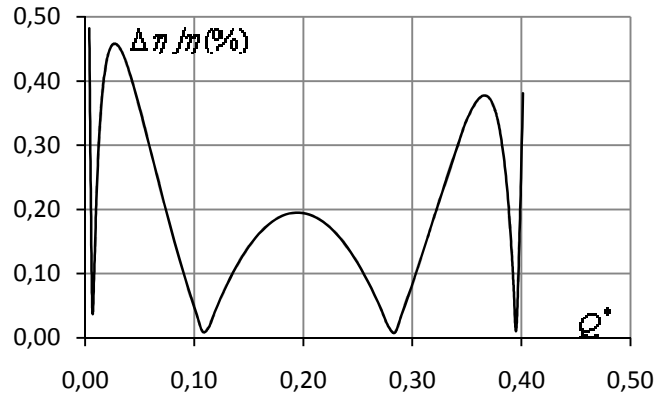


Figure 2.4 : Ecarts relatifs $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (2.28) sur le calcul du taux η , dans la gamme $0,06 \leq \eta \leq 0,88$ correspondant à $0,0038 \leq Q^* \leq 0,4014$.

3.1.2.2 Courbe de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ de la conduite pour C constant.

La courbe de remplissage de la conduite, pour une valeur constante du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy, se traduit par la variation du paramètre de forme $\eta(Q/Q_p)$.

Pour le même diamètre D , la même pente J et pour C constant, nous pouvons écrire :

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{Q^*}{Q_p^*} \quad (2.29)$$

En utilisant les relations (2.25) et (2.26), le rapport (2.29) donne alors :

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{8 A_1^{3/2}}{\pi P_1^{1/2}} \quad (2.30)$$

Dans un graphique, on portera des valeurs choisies entre 0 et 1 du paramètre de forme η , et pour chacune de ces valeurs on calculera la valeur Q/Q_p par la relation (2.28).

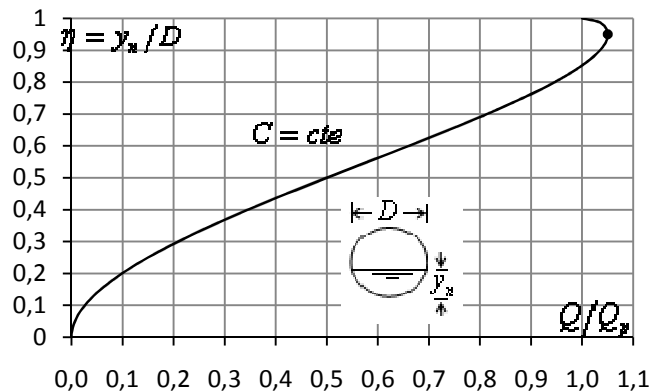


Figure 2.5 : Variation $\eta(Q/Q_p)$, selon la relation (2.28) pour C constant.

(•) Correspond à $Q_{\max}/Q_p = 1,05$ pour $\eta = 0,9497$

Il ressort de ce graphique que :

- Le rapport Q/Q_p augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η et atteint une valeur maximale $Q_{\max}/Q_p = 1,05041386$, indiquée par un point gras sur le graphique, pour un taux de remplissage $\eta \cong 0,9497$. Ainsi la capacité d'évacuation de la conduite correspond donc a un débit maximal égal à 1,05 fois le débit à l'état plein Q_p . Au delà de cette valeur maximale, le rapport Q/Q_p diminue avec l'accroissement du taux de remplissage η et atteint la valeur $Q/Q_p = 1$ pour un taux $\eta = 1$. Cette valeur de $Q/Q_p = 1$ correspond aussi à la valeur de $\eta = 0,852449$.
- Le débit Q vaut la moitié du débit Q_p pour un taux de remplissage $\eta = 0,5$

Dans la large gamme du taux de remplissage $0,06 \leq \eta \leq 0,88$, correspondant à $0,0038 \leq Q^* \leq 0,4014$, la relation (2.28) exprimant $\eta(Q^*)$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,178}\eta\right) = 1,527Q^{*0,516} = 1,527Q_p^{*0,516}\left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,516}$$

On utilisant les relations (2.26) et (2.29), on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,178}\eta\right) = 1,527 \times 0,3927^{0,516} \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,516}$$

Soit :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,178}\eta\right) = 0,943\left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,516} \quad (2.31)$$

Cette relation est valable pour $0,06 \leq \eta \leq 0,88$ correspondant à $0,0097 \leq Q/Q_p \leq 1,0222$ avec une erreur $\Delta\eta/\eta$ maximale de 0,49%.

3.1.2.3 Relation $\eta(Q/Q_{\max})$ pour C constant

La variation du taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max})$ est déterminé par la relation (2.25) après avoir noté que :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \quad (2.32)$$

Nous avons étudié la variation de la conductivité relative dans les paragraphes précédents, et nous avons trouvé que celle-ci Q_{\max}^* est maximale et constante lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy demeure invariable. En tenant compte des relations (2.25), (2.27) et (2.32), nous pouvons alors écrire :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 2,424 \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \quad (2.33)$$

Nous observons donc que le rapport Q/Q_{\max} ne dépend que du taux de remplissage η , dans tout l'intervalle $0 \leq \eta \leq 1$. La relation (2.33) a été représentée graphiquement sur la figure 2.6. La courbe $\eta(Q/Q_{\max})$ obtenue montre que lorsque le taux de remplissage η augmente quand le rapport Q/Q_{\max} augmente, jusqu'à un maximum, puis diminue au-delà de ce maximum pour atteindre la valeur $Q/Q_{\max} = 0,952$ pour $\eta = 1$. Ce résultat est obtenu en insérant la valeur $\eta = 1$ dans la relation (2.33).

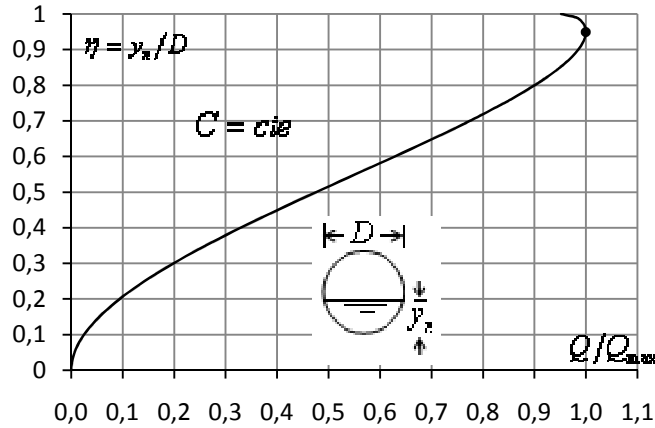


Figure 2.6 : Variation de $\eta(Q/Q_{\max})$ pour C constant selon la relation (2.32)

(•) Correspond à $Q/Q_{\max} = 1$ pour $\eta = 0,9497$

Là aussi on voit que dans la gamme pratique du taux de remplissage $0,06 \leq \eta \leq 0,88$, correspondant à $0,0038 \leq Q^* \leq 0,4014$, la relation (2.28) exprimant $\eta(Q^*)$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,178}\eta\right) = 1,527Q^{*0,516} = 1,527Q_{\max}^{*0,516}\left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,516}$$

On utilisant la relations (2.32) et la valeur de $Q_{\max}^* \cong 0,41249681$, on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,178}\eta\right) = 1,527 \times 0,41249681^{0,516} \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,516}$$

Soit :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,178}\eta\right) = 0,967\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,516} \quad (2.34)$$

Cette relation est valable pour $0,06 \leq \eta \leq 0,88$ correspondant à $0,0092 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,9732$ avec une erreur $\Delta\eta/\eta$ maximale de 0,47%.

Pour vérifier la validité et la fiabilité de ces relations, traitons un exemple concret :

Exemple d'application 1.

Soit à déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans une conduite circulaire de diamètre $D = 1,5m$, écoulant un débit $Q = 1,2m^3/s$ sous une pente longitudinale $J = 0,0005$. Le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy est de $C = 75m^{0,5}/s$.

Solution : On peut déterminer le problème de quatre manières suivantes :

1. Avec la conductivité relative :

i. Déterminons la conductivité relative par la relation de définition (2.24) :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 JD^5}} = \frac{1,2}{\sqrt{75^2 \times 0,0005 \times 1,5^5}} = 0,25966106 < Q_{\max}^* \cong 0,41249681$$

ii. L'application de la relation (2.28) permet de trouver le taux de remplissage η de la conduite :

$$\eta = \frac{2,178}{\pi} \sin^{-1} (1,527 Q^{*0,516}) = \frac{2,178}{\pi} \times \sin^{-1} (1,527 \times 0,25966106^{0,516}) = 0,60012475 \cong 0,6$$

iii. On déduit la profondeur moyenne :

$$y_n = \eta D = 0,60012475 \times 1,5 = 0,90018713 \text{ m} \cong 0,9 \text{ m}.$$

2. Avec le taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$

i. Le rapport $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$ ou $Q_p^* = \pi/8$ selon la relation (2.26). Ainsi :

$$Q/Q_p = Q^*/Q_p^* = \frac{0,25966106}{\pi/8} = 0,66122146$$

ii. On détermine le taux de remplissage en appliquant la relation (2.31) :

$$\eta = \frac{2,178}{\pi} \sin^{-1} \left[0,943 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,516} \right] = \frac{2,178}{\pi} \times \sin^{-1} [0,943 \times 0,66122146^{0,516}] = 0,6003832 \cong 0,6$$

Il s'agit bien de la valeur de η obtenue au point 2-ii

3. Avec la relation (2.34) $\eta(Q/Q_{\max})$

i. Le rapport $Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^*$ et $Q_{\max}^* \cong 0,41249681$ selon la relation (2.27) Ainsi :

$$Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^* = 0,25966106/0,41249681 = 0,62948622$$

ii. On détermine alors le taux de remplissage en appliquant la relation (2.34) :

$$\eta = \frac{2,178}{\pi} \sin^{-1} \left[0,967 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,516} \right] = \frac{2,178}{\pi} \times \sin^{-1} [0,967 \times 0,62948622^{0,516}]$$

$$= 0,60018179 \cong 0,6$$

La aussi, la valeur η est bien celle déterminé au point 1-ii et au point 2-ii.

4. vérification : Déterminant le débit volume Q par la formule de Chézy :

Déterminons A et R_h ; on doit d'abord déterminer A_1 et P_1 :

$$A_1(\eta=0,60018179) = 0,49220647$$

$$P_1(\eta = 0,60018179) = 1,77252534$$

- La surface mouillée est selon (2.11) : $A = A_1 D^2 = 0,49220647 \times 1,5^2 = 1,10746456 \text{ m}^2$

- le rayon hydraulique est selon (2.18): $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 1,5 \times \frac{0,49220647}{1,77252534} = 0,41652984 \text{ m}$

- le débit volume serait donc :

$$Q = CA \sqrt{R_h J} = 75 \times 1,10746456 \sqrt{0,41652984 \times 0,0005} = 1,1986687 \text{ m}^3/\text{s}$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est égal à 0,01% seulement.

Il est permis de conclure la validité des calculs effectués par les différentes méthodes.

3.1.2.4 Conductivité relative Q_y^* rapportée à la profondeur normale.

La relation (2.24) traduisant la variation $\eta(Q^*)$ peut être transformée, en introduisant $y_n = \eta D$, pour s'écrire :

$$Q^* = \frac{\eta^{5/2} Q}{\sqrt{C^2 J y_n^5}} \quad (2.35)$$

Soit la conductivité relative rapportée à la profondeur normale Q_y^* :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 J y_n^5}} \quad (2.36)$$

La relation (2.35) permet alors d'écrire :

$$Q^* = \eta^{5/2} Q_y^* \quad (2.37)$$

En utilisant cette dernière et la relation (2.25) on peut d'écrire :

$$Q_y^* = \eta^{-5/2} \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \quad (2.38)$$

La conductivité relative Q_y^* ne dépend donc que du taux de remplissage η de la conduite. La variation $\eta(Q_y^*)$ a été représentée graphiquement, sur la figure 2.7. Cette représentation montre que Q_y^* augmente lorsque le taux de remplissage η diminue.

Pour l'état plein $\eta = 1$ on a $A_{1p} = \pi/4$ et $P_{1p} = \pi$, la conductivité relative selon la relation (2.38) est $Q_y^* = \pi/8 \cong 0,3927$. Ainsi pour $\eta < 1$, on a $Q_y^* > 0,3927$

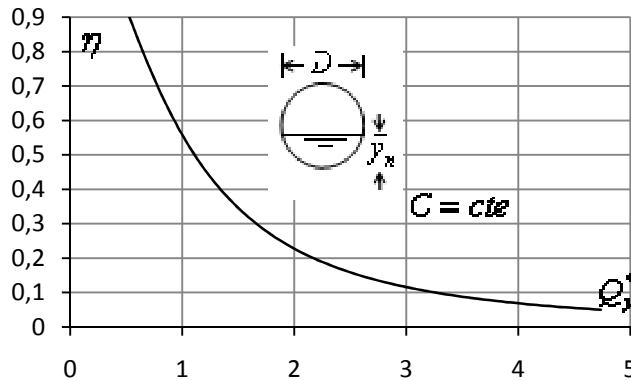


Figure 2.7 : Variation du taux de remplissage η en fonction de la conductivité relative Q_y^* pour C constant selon la relation (2.38)

La relation (2.38) est intéressante du fait qu'elle permet la détermination du taux de remplissage η et donc du diamètre D pour les valeurs imposées de C, J, Q et y_n . Ceci revient à déterminer la valeur du diamètre D pour une valeur imposée de Q_y^* . Cette relation montre clairement que le taux de remplissage η est implicite vis à vis de la conductivité relative Q_y^* . Nous avons alors recherché une relation explicite approchée de $\eta(Q_y^*)$ et nos calculs ont menés aux résultats suivants :

$$\sinh(3\eta) = 2,56Q_y^{*-1,797} \quad (2.39)$$

Cette relation est applicable dans le domaine $0,11 \leq \eta \leq 0,78$ correspondant à $0,674 \leq Q_y^* \leq 3,0884$ avec une erreur relative maximale $\Delta\eta/\eta$ de 0,48% seulement, comme le montre la figure 2.8 ci-dessus. Les écarts maximaux sont observés pour les valeurs extrêmes de Q_y^*

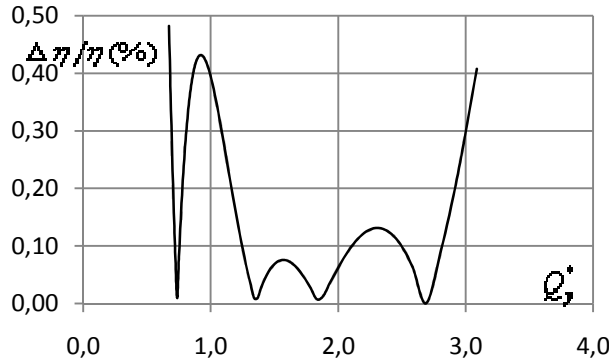


Figure 2.8 : Ecarts relatifs $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (2.39) sur le calcul du taux η , dans la gamme $0,11 \leq \eta \leq 0,78$ correspondant à $0,674 \leq Q_y^* \leq 3,0884$.

Exemple d'application 2.

On veut déterminer le diamètre d'une conduite circulaire dans laquelle l'écoulement est maintenu à la profondeur $y_n = 1,30\text{m}$. Le débit volume écoulé est de $Q = 2,85\text{m}^3/\text{s}$ sous une pente $J = 0,0005$. Le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy est $C = 78\text{m}^{0,5}/\text{s}$.

Solution :

i. Calculons la conductivité relative Q_y^* de la conduite avec la relation (2.36) :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 J y_n^5}} = \frac{2,85}{\sqrt{78^2 \times 0,0005 \times 1,3^5}} = 0,84802152$$

ii. La relation (2.39) permet de déterminer le taux de remplissage η , soit :

$$\eta = \frac{1}{3} \sinh^{-1} (2,56 Q_y^{*-1,797}) = \frac{1}{3} \sinh^{-1} (2,56 \times 0,84802152^{-1,797}) = 0,64994819 \cong 0,65$$

iii. Le diamètre recherché est alors :

$$D = y_n / \eta = 1,30 / 0,65 = 2\text{m}$$

iv. Vérifions, pour le diamètre ainsi trouvé, que la conductivité Q^* définie par la relation (2.24) est bien inférieur à la conductivité maximale $Q_{\max}^* \cong 0,41249681$

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 J D^5}} = \frac{2,85}{\sqrt{78^2 \times 0,0005 \times 2^5}} = 0,2888619 < Q_{\max}^*$$

v. Déterminons encore une fois le taux de remplissage par la formule rapprochée (2.28) :

$$\eta = \frac{2,178}{\pi} \sin^{-1} (1,527 Q^{*0,516}) = \frac{2,178}{\pi} \times \sin^{-1} (1,527 \times 0,2888619^{0,516}) = 0,64816321 \cong 0,65$$

vi. Déterminons aussi, le taux de remplissage par la formule rapprochée (2.31) $\eta(Q/Q_p)$:

$$\text{Le rapport } Q/Q_p = Q^*/Q_p^* = \frac{0,2888619}{\pi/8} = 0,73558079$$

Nous obtenons alors :

$$\eta = \frac{2,178}{\pi} \sin^{-1} \left[0,943 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,516} \right] = \frac{2,178}{\pi} \sin^{-1} \left[0,943 \times (0,73558079)^{0,516} \right] = 0,64846125 \cong 0,65$$

vii. Enfin on peut aussi déterminer ce taux par la relation (2.34) $\eta(Q/Q_{\max})$:

$$\text{Le rapport } Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^* = 0,2888619/0,41249681 = 0,69968784$$

Le taux de remplissage est alors égal à :

$$\eta = \frac{2,178}{\pi} \sin^{-1} \left[0,967 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,516} \right] = \frac{2,178}{\pi} \sin^{-1} \left[0,967 \times (0,69968784)^{0,516} \right] = 0,64782155 \cong 0,65$$

Dans tous nos calculs l'écart n'a pas atteint 0,34% de la valeur déterminée au point ii.

1. vérification : Déterminant le débit volume Q par la formule de Chézy :

Déterminons A et R_h , on doit d'abord déterminer A_1 et P_1 :

$$A_1(\eta=0,64994819) = 0,54036826 \qquad P_1(\eta = 0,64994819) = 1,87538036$$

- La surface mouillée est selon (2.11) : $A = A_1 D^2 = 0,54036826 \times 2^2 = 2,16147304 m^2$

- le rayon hydraulique est selon (2.18) : $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 2 \times \frac{0,54036826}{1,87538036} = 0,57627591 m$

- le débit volume serait donc :

$$Q = CA \sqrt{R_h J} = 78 \times 2,16147304 \times \sqrt{0,57627591 \times 0,0005} = 2,86183546 m^3/s$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est égal à 0,41% seulement.

Il est permis de conclure à la validité des calculs effectués par les différentes méthodes

3.1.3 Ecoulement à coefficient de résistance de Manning constant.

Selon Manning-Strickler, le débit volume Q s'exprime par la relation (2.2), en remplaçant dans cette relation la surface mouillée A et le rayon hydraulique R_h par leurs expressions respectives (1.42) et (1.44) dans lesquelles la dimension linéaire a se confond avec le diamètre caractéristique D on a :

$$Q = \frac{1}{n} D^{8/3} \sqrt{J} \left(\frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \right) \tag{2.40}$$

En introduisant le débit relatif, ou exactement la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{J}} \tag{2.41}$$

On tire des relations (2.40) et (2.41), la conductivité relative en terme adimensionnels :

$$Q^* = \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \tag{2.42}$$

On remarque que la conductivité relative n'est fonction que du taux de remplissage η . Ainsi pour une conduite circulaire entièrement pleine, c'est-à-dire $\eta = 1$, $A_{1p} = \pi/4$ et $P_{1p} = \pi$ la relation (2.42) donne Q_p^* , ou l'indice p désigne l'état plein de la conduite :

$$Q_p^* = \pi/4^{5/3} = 0,3117 = \text{constante} \tag{2.43}$$

Cette valeur est bien inférieure à celle donnée par la formule de *Chézy* qui est de 0,3927

3.1.3.1 Variation de la conductivité relative Q^* .

La détermination de la profondeur normale y_n de l'écoulement passe par la connaissance du taux de remplissage η de la conduite, pour les paramètres connus n, Q, D , et J et par conséquent de la conductivité Q^* . Cependant, la relation (2.42) montre que η est explicite vis-à-vis de Q^* et sa détermination nécessite un procédé itératif ou graphique.

On proposera dans ce qui suit une solution explicite de la relation (2.42), permettant le calcul, avec une précision suffisante, le paramètre de forme η et par conséquent la profondeur y_n .

Le calcul du diamètre D et de la profondeur normale y_n demeurent notre objectif principal.

Ce calcul nécessite la connaissance des autres paramètres tel que le coefficient de *Manning* n , le débit volume Q , et la pente longitudinale J pour la résolution de l'équation (2.41), la aussi toutes nos considérations ne sont valables que si le coefficient de *Manning* est invariable. Mais on constate que ce calcul n'est pas facile car Q^* , dans la relation (2.41), est déterminée par la relation (2.42) qui est fonction de η , qui lui-même est une inconnue du problème. Cette relation doit être transformée pour permettre le calcul simple du taux de remplissage η . Il est donc nécessaire de connaître la variation de la conductivité Q^* en fonction de η . A cette fin on déterminera pour chaque valeur η la valeur Q^* et on dressera un graphique $Q^* = f(\eta)$.

En considérant la relation (2.42), la conductivité relative Q^* a été représentée graphiquement sur la figure 2.9 ci-dessus, dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$ $n = \text{constant}$

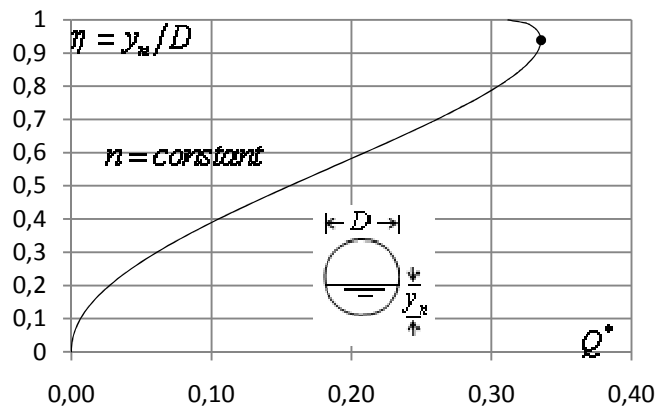


Figure 2.9 : Variation du taux de remplissage en fonction de la conductivité relative $\eta(Q^*)$, selon la relation (2.42)

On constate que la conductivité Q^* augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η jusqu'à une valeur maximale $Q_{\max}^* \cong 0,33528197$, représentée par un point gras dans le graphe, cette valeur correspond à $\eta = 0,9382$.

La valeur Q_{\max}^* peut être obtenue en remplaçant dans la relation (2.42) les paramètres adimensionnels $A_1(\eta = 0,9382) = 0,76529792$ et $P_1(\eta = 0,9382) = 2,63913157$, on a alors :

$$Q_{\max}^* = 0,33528197$$

Au delà de cette valeur, Q^* diminue avec l'augmentation de η . Lorsque $\eta = 1$, la conductivité relative à l'état plein prend la valeur $Q^* \cong 0,3117$.

Notons là aussi que la valeur $Q_p^* \cong 0,3117$ correspond à la valeur du taux de remplissage $\eta = 0,819629$ sans aucune signification physique.

Dans la gamme pratique du taux de remplissage $0,06 \leq \eta \leq 0,88$, correspondant à $0,0022 \leq Q^* \leq 0,3286$, nos calculs ont montré que le taux de remplissage de la conduite pouvait s'exprimer par la relation :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,112}\eta\right) = 1,64Q^{*0,477} \quad (2.45)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (2.45) est inférieur à 0,49% comme le montre clairement la figure 2.10, les plus grands écarts sont obtenus pour les valeurs extrêmes Q^* .

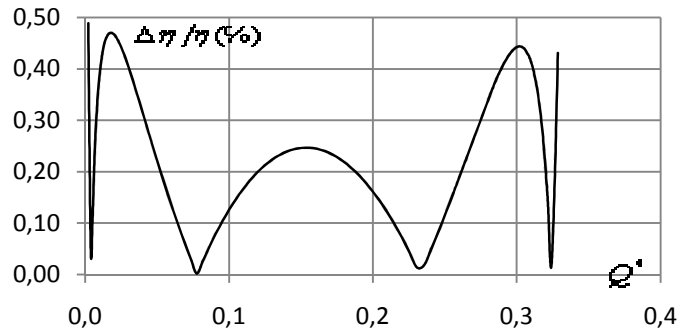


Figure 2.10 : Ecarts relatifs $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (2.45) sur le calcul du taux de remplissage η , dans la gamme $0,06 \leq \eta \leq 0,88$ correspondant à $0,0022 \leq Q^* \leq 0,3286$.

3.1.3.2 Courbe de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ de la conduite pour n constant.

Pour un même diamètre D , une même pente J et pour n constant, le rapport :

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{Q^*}{Q_p^*} \quad (2.46)$$

En utilisant (2.42) et (2.46) on a :

$$\frac{Q}{Q_p} = 3,208 \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \quad (2.47)$$

La courbe de remplissage de la conduite, pour une valeur constante du coefficient de résistance à l'écoulement n de Manning, se traduit par la variation du paramètre de forme $\eta(Q/Q_p)$ défini par la relation (2.47).

Dans un graphique, on porte des valeurs choisies entre 0 et 1 du paramètre de forme η , et pour chacune de ces valeurs on calcule la valeur Q/Q_p par la relation (2.47).

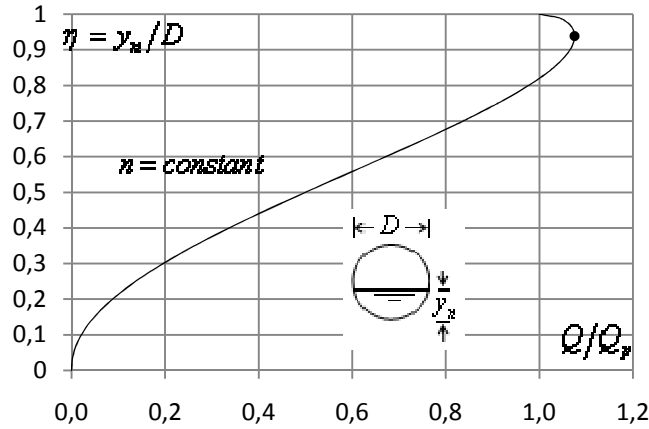


Figure 2.11 : Variation $\eta(Q/Q_p)$, selon la relation (2.47) pour n constant.

(•) Correspond à $Q_{\max}/Q_p = 1,0757$ pour $\eta = 0,9382$

Il ressort de ce graphique que :

- Le rapport Q/Q_p augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η et atteint une valeur maximale $Q_{\max}/Q_p = 1,07570613$, indiquée par un point gras sur le graphique, pour un taux de remplissage $\eta \cong 0,9382$. Ainsi la capacité d'évacuation de la conduite correspond donc à un débit maximal égal à 1,08 fois le débit à l'état plein Q_p . Au delà de cette valeur maximale, le rapport Q/Q_p diminue avec l'accroissement du taux de remplissage η et atteint la valeur $Q/Q_p = 1$ pour un taux $\eta = 1$. Cette valeur de $Q/Q_p = 1$ correspond aussi à la valeur de $\eta = 0,81963$.
- Le débit Q vaut la moitié du débit Q_p pour un taux de remplissage $\eta = 0,5$

Dans la gamme pratique du taux de remplissage $0,06 \leq \eta \leq 0,88$, correspondant à $0,0022 \leq Q^* \leq 0,3286$, la relation (2.45) exprimant $\eta(Q^*)$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,112}\eta\right) = 1,64Q^{*0,477} = 1,64Q_p^{*0,477}\left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,477}$$

On utilisant les relations (2.43) et (2.46), on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,112}\eta\right) = 1,64Q_p^{*0,477}\left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,477} = 1,64 \times 0,3117^{0,477}\left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,477}$$

Soit :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,112}\eta\right) = 0,94\left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,477} \quad (2.48)$$

Cette relation est valable pour $0,07 \leq \eta \leq 0,87$ correspondant à $0,0098 \leq Q/Q_p \leq 1,047$ avec une erreur maximale de 0,42%.

3.1.3.3 Relation $\eta(Q/Q_{\max})$ pour n constant

Le taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max})$ est déterminé par les relations (2.42) après avoir noté que :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \quad (2.49)$$

Nous avons vu précédemment que la conductivité relative maximale Q_{\max}^* est une constante lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement de Manning demeure invariable et que sa valeur est $Q_{\max}^* \cong 0,33528197$, pour le taux de remplissage $\eta = 0,9382$. En tenant compte des relations (2.42) et (2.49), nous pouvons alors écrire que pour :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 2,983 \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \quad (2.50)$$

Nous pouvons donc observer que le rapport Q/Q_{\max} ne dépend que du taux de remplissage η , dans tout l'intervalle $0 \leq \eta \leq 1$. La relation (2.50) a été représentée sur la figure 2.12. La courbe $\eta(Q/Q_{\max})$ obtenue montre que lorsque le taux de remplissage η augmente quand le rapport Q/Q_{\max} augmente, jusqu'à un maximum, puis diminue au-delà de ce maximum pour atteindre la valeur $Q/Q_{\max} = 0,93$ pour $\eta = 1$. Ce résultat peut être obtenu en insérant la valeur $\eta = 1$ dans la relation (2.50).

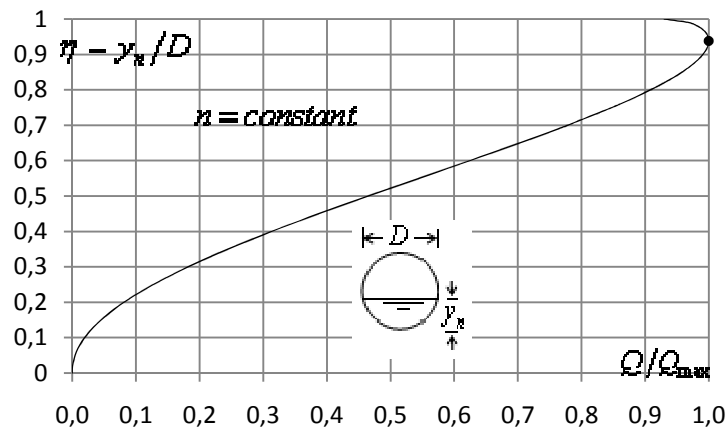


Figure 2.12 : Variation de $\eta(Q/Q_{\max})$ pour n constant selon la relation (2.50).

(•) Correspond à $Q/Q_{\max} = 1$ pour $\eta = 0,9382$

La aussi on voit que dans la gamme pratique du taux de remplissage $0,06 \leq \eta \leq 0,88$, correspondant à $0,0022 \leq Q^* \leq 0,3286$, la relation (2.45) exprimant $\eta(Q^*)$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,112}\eta\right) = 1,64Q^{*0,477} = 1,64Q_{\max}^{*0,477}\left(\frac{Q}{Q_p^*}\right)^{0,477}$$

On utilisant la relations (2.49) et la valeur de $Q_{\max}^* \cong 0,33528197$, on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,112}\eta\right) = 1,64Q_{\max}^{*0,477}\left(\frac{Q}{Q_p^*}\right)^{0,477} = 1,64 \times 0,3353^{0,477}\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,477}$$

Soit :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,112}\eta\right) = 0,974\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,477} \tag{2.51}$$

Cette relation est valable pour $0,06 \leq \eta \leq 0,88$ correspondant à $0,0066 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,98$ avec une erreur maximale de 0,49%.

Exemple d'application 3.

Soit à déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans une conduite circulaire de diamètre $D=1,6m$, écoulant un débit volume $Q=1,13m^3/s$ sous une pente longitudinale $J=0,0005$. Le coefficient de résistance à l'écoulement de Manning est de $n=0,0145m^{0,5}/s$.

Solution : On peut déterminer le problème de quatre manières suivantes :

1. Avec la conductivité relative :

i. Déterminons la conductivité relative par la relation de définition (2.41) :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3}\sqrt{J}} = \frac{0,0145 \times 1,13}{1,6^{8/3} \times \sqrt{0,0005}} = 0,20923845$$

Cette valeur est bien inférieure à la conductivité relative maximale $Q_{\max}^* \cong 0,3353$

ii. L'application de la relation (2.45) permet de trouver le taux de remplissage η :

$$\eta = \frac{2,112}{\pi} \sin^{-1}\left(1,64Q^{*0,477}\right) = \frac{2,112}{\pi} \times \sin^{-1}\left(1,64 \times 0,20923845^{0,477}\right) = 0,59894955 \cong 0,6$$

iii. On déduit la profondeur moyenne :

$$y_n = \eta D = 0,59894955 \times 1,6 = 0,95831928m \cong 0,96m.$$

2. Avec le taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$

i. Le rapport Q/Q_p est tel que $\frac{Q}{Q_p} = \frac{Q^*}{Q_p^*} = \frac{0,20923845}{\pi/4^{5/3}} = 0,67131282$.

ii. On détermine le taux de remplissage en appliquant la relation (2.48) :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2,112}{\pi} \times \sin^{-1}\left[0,94\left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,477}\right] = \frac{2,112}{\pi} \times \sin^{-1}\left[0,94 \times 0,67131282^{0,477}\right] \\ &= 0,59853088 \cong 0,6 \end{aligned}$$

Il s'agit bien de la valeur obtenue au point 2-ii

3. Avec le rapport Q/Q_{\max} de la relation (2.50) :

i. Le rapport Q/Q_{\max} est tel que $\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{Q^*}{Q_{\max}^*} = \frac{0,20923845}{0,33528197} = 0,62406711$.

ii. On obtient alors avec la relation (2.51) :

$$\eta = \frac{2,112}{\pi} \sin^{-1} \left[0,974 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,477} \right] = \frac{2,112}{\pi} \times \sin^{-1} [0,974 \times 0,62406711^{0,477}]$$

$$= 0,59913044 \cong 0,6$$

La aussi, la valeur du taux de remplissage est bien celle déterminé au point 1-ii et au point 2.

4. vérification : Déterminant le débit volume Q par la formule de Manning :

Déterminons A et R_h , on doit d'abord déterminer A_1 et P_1 :

$$A_1(\eta=0,59894955) = 0,49099891 \qquad P_1(\eta = 0,59894955) = 1,77001049$$

- La surface mouillée est selon (2.11) : $A = A_1 D^2 = 0,49099891 \times 1,6^2 = 1,25695721 m^2$

- le rayon hydraulique est selon (2.18): $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 1,6 \times \frac{0,49099891}{1,77001049} = 0,44383819 m$

- le débit volume est donc :

$$Q = \frac{1}{n} R_h^{2/3} A \sqrt{J} = \frac{1}{0,0145} \times 0,44383819^{2/3} \times 1,25695721 \times \sqrt{0,0005} = 1,12785674 m^3/s$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est égal à 0,19% seulement. Il est permis de conclure à la validité des calculs effectués par les différentes méthodes

3.1.3.4 Conductivité relative Q_y^* rapportée à la profondeur normale.

La relation (2.41) traduisant la variation $\eta(Q^*)$ peut être transformée, en introduisant $y_n = \eta D$, pour s'écrire :

$$Q^* = \frac{\eta^{8/3} n Q}{y_n^{8/3} \sqrt{J}} \tag{2.52}$$

En introduisant la conductivité relative Q_y^* telle que :

$$Q_y^* = \frac{n Q}{y_n^{8/3} \sqrt{J}} \tag{2.53}$$

Les relations (2.52) et (2.53) permettent alors d'écrire :

$$Q^* = \eta^{8/3} Q_y^* \tag{2.54}$$

En utilisant cette dernière, la relation (2.42) permet d'écrire :

$$Q_y^* = \eta^{-8/3} \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \tag{2.55}$$

La conductivité relative Q_y^* ne dépend donc que du taux de remplissage η de la conduite. Nous avons représenté la variation $\eta(Q_y^*)$ graphiquement sur la figure 2.13. Cette représentation montre que Q_y^*

augmente lorsque le taux de remplissage η diminue. A l'état plein ($\eta = 1$) la conductivité relative est selon la relation (2.55) $Q_y^* = 0,31168547$. Par contre pour $\eta < 1$, on a $Q_y^* > 0,3117$.

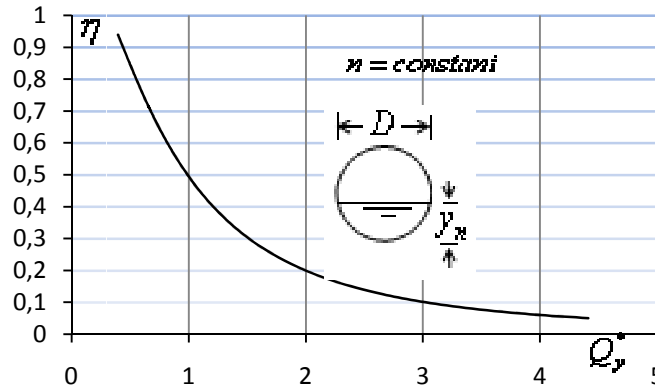


Figure 2.13 : Variation du taux de remplissage η en fonction de la conductivité relative Q_y^* pour n constant selon la relation (2.53)

La relation (2.55) est intéressante du fait qu'elle permet la détermination du taux de remplissage η et donc du diamètre D pour les valeurs imposées de n, i, Q et y_n . Ceci revient à déterminer la valeur du diamètre D pour une valeur imposée de Q_y^* . Mais elle montre clairement que le taux de remplissage η est implicite vis-à-vis de la conductivité relative Q_y^* . Nous avons recherché une relation approchée de $\eta(Q_y^*)$ et nos calculs ont aboutis aux résultats suivants :

$$\sinh(3,3\eta) = 2,45Q_y^{*-1,797} \tag{2.56}$$

Cette relation est applicable dans le domaine $0,09 \leq \eta \leq 0,78$ correspondant à $0,5759 \leq Q_y^* \leq 3,2047$ avec une erreur $\Delta\eta/\eta$ maximale de 0,49% seulement, comme le montre la figure ci-dessus. Les écarts maximaux sont observés pour les valeurs extrêmes de Q_y^*

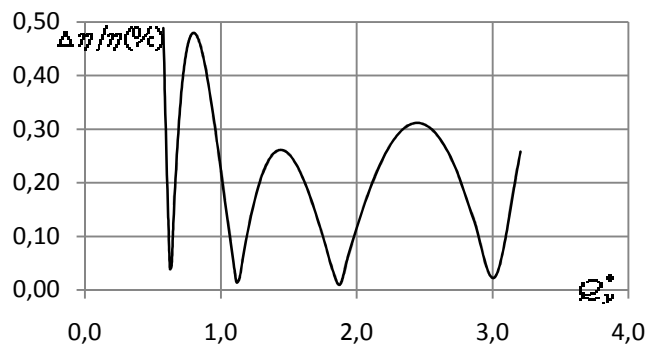


Figure 2.14: Ecart relatif $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (2.56) sur le calcul du taux de η , dans la gamme $0,09 \leq \eta \leq 0,78$ correspondant à $0,5759 \leq Q_y^* \leq 3,2047$.

Exemple d'application 4.

On veut déterminer le diamètre d'une conduite circulaire dans laquelle l'écoulement est maintenu à la profondeur $y_n = 1\text{ m}$. Le débit volume écoulé est de $Q = 1,03\text{ m}^3/\text{s}$ sous une pente $J = 0,0005$. Le coefficient de résistance à l'écoulement de Manning est $n = 0,0142\text{ m}^{0,5}/\text{s}$.

Solution :

- Calculons la conductivité relative Q_y^* de la conduite avec la relation (2.53) :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{J}} = \frac{0,0143 \times 1,03}{1^{8/3} \times \sqrt{0,0005}} = 0,6540946$$

- La relation (2.56) permet de déterminer le taux de remplissage η , soit :

$$\eta = \frac{1}{3,3} \sinh^{-1} (2,45 Q_y^{*-1,797}) = \frac{1}{3,3} \sinh^{-1} (2,45 \times 0,6540946^{-1,797}) = 0,71545597 \cong 0,72$$

- Le diamètre recherché est alors :

$$D = y_n / \eta = 1 / 0,71545597 = 1,39771005\text{ m} \cong 1,4\text{ m}$$

- Vérifions, pour le diamètre ainsi trouvé, que la conductivité Q^* définie par la relation (2.41) est bien inférieure à la conductivité maximale $Q_{\max}^* \cong 0,33528197$

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{J}} = \frac{0,0142 \times 1,03}{1,4^{8/3} \times \sqrt{0,0005}} = 0,26666487 < Q_{\max}^*$$

- Déterminons encore une fois le taux de remplissage par la formule rapprochée (2.45) :

$$\eta = \frac{2,112}{\pi} \sin^{-1} (1,64 Q^{*0,477}) = \frac{2,112}{\pi} \times \sin^{-1} (1,64 \times 0,26666487^{0,477}) = 0,71353644$$

- Déterminons aussi, le taux de remplissage par la formule rapprochée (2.48) $\eta(Q/Q_p)$:

$$\text{Le rapport } Q/Q_p = Q^*/Q_p^* = 0,26666487 / 0,3117 = 0,85551771$$

Nous obtenons alors :

$$\eta = \frac{2,112}{\pi} \sin^{-1} \left[0,94 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,477} \right] = \frac{2,112}{\pi} \sin^{-1} \left[0,94 \times (0,85551771)^{0,477} \right] = 0,71290406$$

- En fin avec la relation (2.51), $\eta(Q/Q_{\max})$:

$$Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^* = 0,26666487 / 0,33528197 = 0,79534509$$

On trouve :

$$\eta = \frac{2,112}{\pi} \sin^{-1} \left[0,974 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,477} \right] = \frac{2,112}{\pi} \sin^{-1} \left[0,974 \times (0,79534509)^{0,477} \right] = 0,71650206$$

Dans tous nos calculs l'écart n'a pas atteint que 0,36% de la valeur obtenue au point ii.

- Vérification : Déterminant le débit volume Q par la formule de Manning :

Déterminons d'abord A_1, P_1, A et R_h

$$A_1(\eta=0,71545597) = 0,60128795$$

$$P_1(\eta = 0,71545597) = 1,77001049$$

- La surface mouillée est selon (2.11) : $A = A_1 D^2 = 0,60128795 \times 1,4^2 = 1,17852438 m^2$

- le rayon hydraulique est selon (2.18): $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 1,4 \times \frac{0,60128795}{2,01629944} = 0,41749906 m$

- le débit volume est donc :

$$Q = \frac{1}{n} R_h^{2/3} A \sqrt{J} = \frac{1}{0,0145} \times 0,41749906^{2/3} \times 1,17852438 \times \sqrt{0,0005} = 1,0366661 m^3/s$$

• L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est égal à 0,65% seulement.

Il est permis de conclure à la validité des calculs effectués par les différentes méthodes

3.2 Ecoulement à coefficient de résistance variable

Il est tout à fait justifié d'admettre que, pour une même conduite, le coefficient de résistance à l'écoulement varie en fonction du taux de remplissage η . Ceci serait valable aussi bien pour le coefficient de résistance C de *Chézy* que pour le coefficient n de *Manning*.

En pratique, lorsqu'il s'agit de dimensionner une conduite circulaire à écoulement libre, les paramètres connus sont le débit volume Q , la pente longitudinale J de la conduite, la rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite, le taux de remplissage η et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Ni le coefficient de *Chézy* ni celui de *Manning* ne sont des données du problème car eux même dépendent de la dimension linéaire.

3.2.1 Expression générale du diamètre

Pour calculer la dimension linéaire a (diamètre D ou la hauteur h) dans le cas d'une conduite circulaire partiellement remplie pour les valeurs données de Q, J, ε, ν et η , nous allons nous baser sur la méthode du modèle rugueux de référence étudiée au chapitre 1. Utilisons la formule principale (1.173) trouvée dans ce chapitre et valable pour n'importe quelle dimension linéaire recherchée et pour n'importe quelle forme de la section droite. Dans le cas d'une conduite circulaire la dimension linéaire recherchée est généralement le diamètre D , la relation (1.173) peut s'écrire alors :

$$D \cong 0,512 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \quad (2.57)$$

Où :

- \overline{D}_h est le diamètre hydraulique du modèle rugueux de référence donnée par la relation (1.167).
- \overline{R} est le nombre de *Reynolds* du modèle rugueux de référence donné par la relation (1.158).

Nous obtenons ainsi une relation générale du diamètre D de la conduite. Pour le calcul de ce diamètre, on suit les étapes suivantes :

- a) Connaissant la valeur du taux de remplissage η , on calcule A_1 et P_1 par les relations (2.12) et (2.16) moyennant les fonctions (2.9) et (2.10).

b) Avec les valeurs données de Q, J et ν , on détermine le diamètre hydraulique \overline{D}_h du modèle rugueux de référence en utilisant la relation (1.167) et le nombre de Reynolds \overline{R} par la relation (1.158).

c) Tous les paramètres de la relation (2.57) sont connus, le diamètre peut alors être calculé.

On peut aussi faire appel aux relations (1.160), (1.154) et (1.168) ou (1.174) et (1.168).

Exemple d'application 5.

Déterminer le diamètre d'une conduite circulaire véhiculant un débit volume $Q = 2,6 \text{ m}^3/\text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, sous une pente longitudinale $J = 0,0005$. La paroi interne de la conduite est caractérisée par une rugosité absolue $\varepsilon = 0,0002 \text{ m}$ et le taux de remplissage est de $\eta = 0,6$.

a) Pour un taux de remplissage $\eta = 0,6$, les éléments $\sigma(\eta)$, $\varphi(\eta)$, A_1 et P_1 prennent respectivement les valeurs selon les relations (2.9), (2.10), (2.12) et (2.16) :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,6) = 1,77215425$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{2(1 - 2 \times 0,6)\sqrt{0,6 \times (1 - 0,6)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,6)} = 1,11057682$$

$$A_1(\eta = 0,6) = \frac{1}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{1}{4} \times 1,77215425 \times 1,11057682 = 0,49202836$$

$$P_1(\eta = 0,6) = \sigma(\eta) = 1,77215425$$

b) On détermine le diamètre hydraulique \overline{D}_h en utilisant la relation (1.167) :

$$\overline{D}_h = 1,516 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{A_1}{P_1^2} \right)^{2/5} = 1,516 \left(\frac{2,6^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{0,49202836}{1,77215425^2} \right)^{2/5} = 3,06588299 \text{ m}$$

c) Le nombre de Reynolds \overline{R} est déterminé par la relation (1.158) :

$$\begin{aligned} \overline{R} &= 10,556 \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu} \left(\frac{A_1}{P_1^2} \right)^{3/5} = 10,556 \times \frac{(9,81 \times 0,0005 \times 2,6^3)^{1/5}}{10^{-6}} \times \left(\frac{0,49202836}{1,77215425^2} \right)^{3/5} \\ &= 2126197 \end{aligned}$$

d) On déduit la dimension linéaire recherchée D en appliquant la relation (2.57):

$$\begin{aligned} D &\cong 0,512 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \\ &= D \cong 0,512 \left[-\log \left(\frac{0,0002/3,06588299}{4,75} + \frac{8,5}{2126197} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{2,6^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \left(\frac{1,77215425}{0,49202836^3} \right)^{1/5} \\ &= 1,99946665 \text{ m} \cong 2 \text{ m} \end{aligned}$$

3.2.2 Variation de la conductivité relative du modèle rugueux de référence : Calcul de la profondeur normale.

L'un des problème que l'on peut rencontrer en pratique est celui qui consiste à déterminer la valeur du taux de remplissage de la conduite circulaire et par voie de conséquence la profondeur normale y_n , à partir des valeurs imposées du débit volume Q , du diamètre de la conduite D , du gradient de perte de charge J , de la rugosité absolue de la conduite ε et de la viscosité du liquide. Dans le modèle rugueux de référence considéré, c'est-à-dire lorsque y_n est une inconnue du problème, assumons les égalités $J = \bar{J}$ et $Q = \bar{Q}$ par contre $a \neq \bar{a}$; $D \neq \bar{D}$; $y_n \neq \bar{y}_n$ $A \neq \bar{A}$, et $P \neq \bar{P}$.

La relation régissant l'écoulement pour le modèle rugueux de référence considéré a été donnée par la relation (1.153), elle s'écrit pour une conduite circulaire de diamètre D :

$$J = \frac{Q^2}{128g\bar{D}^5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right) \quad (2.58)$$

Définissons la conductivité relative dans le modèle rugueux de référence :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gJ\bar{D}^5}} \quad (2.59)$$

Cette conductivité relative s'écrit alors en terme adimensionnels en utilisant (2.58) :

$$\bar{Q}^* = \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \quad (2.60)$$

Cette conductivité relative a la même expression que la relation (2.25). Les remarques et observations tirées de la variation $\eta(Q^*)$ à coefficient de Chézy constant, étudiées au paragraphe (II-1.1.1), s'applique à la variation $\bar{\eta}(\bar{Q}^*)$ du modèle rugueux de référence, on a :

$$\bar{Q}_p^* = \left(A_{1p}^{3/2} / P_{1p}^{1/2} \right) = \pi/8 = 0,39269908 = \text{constante} \quad (2.61)$$

$$\bar{Q}_{\max}^* = 0,41249681 \quad (2.62)$$

De même, pour la valeur à l'état plein $\bar{Q}_p^* \cong 0,3927$ correspond $\bar{\eta} = 1$ et $\bar{\eta} = 0,8524493$ sans aucune signification physique.

La fonction $\bar{\eta}(\bar{Q}^*)$ est implicite vis-à-vis de $\bar{\eta}$. La relation approchée (2.28) déjà trouvée, reste valable pour le modèle rugueux de référence et s'écrit :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,178}\bar{\eta}\right) = 1,527\bar{Q}^{*0,516} \quad (2.63)$$

Elle est valable dans la gamme pratique du taux de remplissage $0,06 \leq \bar{\eta} \leq 0,88$, correspondant à $0,0038 \leq \bar{Q}^* \leq 0,4014$. L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (2.63) est inférieur à 0,48%.

Le diamètre à l'état plein \overline{D}_p du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.59) après avoir remplacé $A_1 = A_{1p} = \pi/4$ et $P_1 = P_{1p} = \pi$:

$$\overline{D}_p = 0,551 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \quad (2.64)$$

Ce modèle rugueux de diamètre \overline{D}_p a la même conductivité relative que celui de même diamètre mais avec un taux de remplissage $\overline{\eta} = 0,8524493$. Déterminons avec cette valeur $\overline{\eta}$ et le diamètre \overline{D}_p tiré de (2.64), le périmètre \overline{P} , le rayon hydraulique \overline{R}_h et le nombre \overline{R} de *Reynolds* correspondant, en utilisant les relations (2.15), (2.18) et (1.48) et les fonctions (2.9) et 2.12), il vient :

$$A_1(\overline{\eta} = 0,8524493) = 0,7132667 \quad P_1(\overline{\eta} = 0,8524493) = 2,35307651$$

$$\overline{P} = \overline{D}_p P_1(\overline{\eta} = 0,8524493) = 2,35307651 \overline{D}_p \quad (2.65)$$

$$\overline{R}_h = \frac{\overline{D}_p A_1(\overline{\eta} = 0,8524493)}{P_1(\overline{\eta} = 0,8524493)} = 0,30312091 \overline{D}_p \quad (2.66)$$

$$R = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4Q}{\nu P(\overline{\eta} = 0,8524493)} = 1,31960543 \frac{Q}{\nu \overline{D}_p} \quad (2.67)$$

Introduisant ces expressions dans la relation (1.168) pour déterminer le facteur de correction des dimensions linéaires ψ , on a après calcul :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_p}{5,76} + 6,44 \frac{\nu \overline{D}_p}{Q} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.68)$$

Ainsi avec les données du problème : Q, D, J, ε et ν nous pouvons déterminer le taux de remplissage $\overline{\eta} = \eta$ et par voie de conséquence la profondeur normale y_n , en procédant comme suit :

- Avec Q et J , déterminons tout d'abord le diamètre \overline{D}_p du modèle rugueux de référence par la relation (2.64).
- A l'aide de la relation (2.68) calculons le facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- Comme le diamètre D est une donnée du problème, affectons à ce modèle rugueux un nouveau diamètre $\overline{D} = D/\psi$.
- Avec le diamètre \overline{D} , Q et J calculons la conductivité relative \overline{Q}^* par la relation (2.59).
- Avec la conductivité relative obtenue déterminons à l'aide de la relation approchée (2.63), le taux de remplissage $\overline{\eta} = \eta$ et déduisons la profondeur normale $y_n = \eta D$.

Exemple d'application 6 :

Reprenons l'exercice précédent. Soit les données suivantes :

$$Q = 2,6 \text{ m}^3/\text{s} ; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} ; J = 0,0005 ; \varepsilon = 0,0002 \text{ m et le diamètre } D = 2 \text{ m}.$$

- Le diamètre \overline{D}_p à l'état plein du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.64) :

$$\bar{D}_p = 0,551 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = 0,551 \times \left(\frac{2,6^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} = 2,33890798 \text{ m}$$

- A l'aide de la relation (2.68) calculons le facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

$$\begin{aligned} \psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_p}{5,76} + 6,44 \frac{\nu \bar{D}_p}{Q} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{0,0002/2,33890798}{5,76} + 6,44 \times \frac{10^{-6} \times 2,33890798}{2,6} \right) \right]^{-2/5} = 0,72784384 \end{aligned}$$

- Affectons à ce modèle rugueux le diamètre $\bar{D} = D/\psi = 2/0,72784384 = 2,74784215 \text{ m}$.

- Ce nouveau diamètre \bar{D} donne la conductivité relative en application de la relation (2.59) :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gJ\bar{D}^5}} = \frac{2,6}{\sqrt{128 \times 9,81 \times 0,0005 \times 2,74784215^5}} = 0,2621618$$

- Avec la conductivité relative obtenu déterminons à l'aide de la relation approchée (2.63), le taux de remplissage η , la profondeur normale est alors donnée par $y_n = \eta D$.

$$\bar{\eta} = \frac{2,178}{\pi} \sin^{-1} \left(1,527 \bar{Q}^{*0,516} \right) = \frac{2,178}{\pi} \sin^{-1} \left(1,527 \times 0,2621618^{0,516} \right) = 0,60417701$$

Ce résultat est bien celui donné dans les énoncés de l'exemple précédent.

$$y_n = \eta D = 0,60417701 \times 2 = 1,20835403 \text{ m}$$

3.2.3 Expression du débit volume maximal Q_{\max}

Tout d'abord assumons les égalités suivantes $a = \bar{a} = D = \bar{D}$ et $J = \bar{J}$.

Pour déterminer l'expression du débit volume maximal Q_{\max} , correspondant à la capacité d'évacuation de la conduite, utilisons la formule générale (1.186). Celle-ci s'écrit en tenant compte des relations (2.11) et (2.18) :

$$Q = -4\sqrt{2g} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(A_1/P_1)} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.69)$$

Le nombre de *Reynolds* figurant dans cette formule est exprimé par la relation (1.188). A l'état plein, ce nombre de *Reynolds* prend la valeur particulière R_p qui s'écrit en remplaçant dans la relation (1.188), les paramètres adimensionnels A_1 et P_1 , selon le tableau 1, par les valeurs A_{1p} et P_{1p} :

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} \quad (2.70)$$

Tenant compte de (2.70), la relation (1.188) s'écrit :

$$\bar{R} = 8 \left(\frac{A_1}{P_1} \right)^{3/2} R_p \quad (2.71)$$

Remplaçant maintenant dans la relation (2.69), le nombre de *Reynolds* \bar{R} par la relation (2.71) :

$$Q = -4\sqrt{2g} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(A_1/P_1)} + \frac{1,255}{(A_1/P_1)^{3/2} R_p} \right) \quad (2.72)$$

Introduisons la conductivité relative :

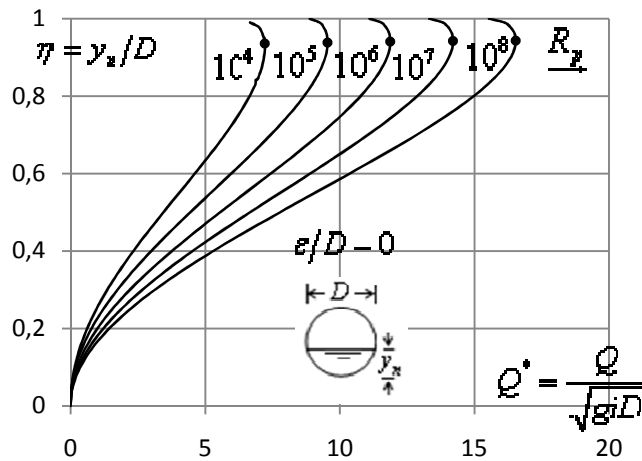
$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gJD^5}} \quad (2.73)$$

La relation (2.72) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

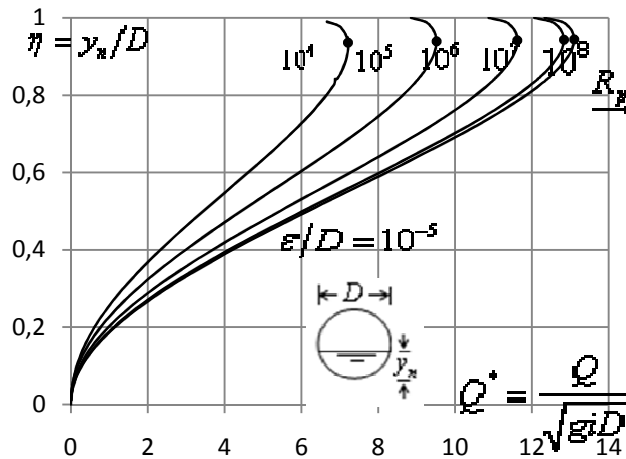
$$Q^* = -4\sqrt{2} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(A_1/P_1)} + \frac{1,255}{(A_1/P_1)^{3/2} R_p} \right) \quad (2.74)$$

Le débit relatif Q^* est donc une fonction de la rugosité relative ε/D , du nombre de *Reynolds* à l'état plein et du taux de remplissage η . Une étude détaillée de l'expression (2.74) a été effectuée pour diverse valeur de la rugosité relative ε/D et du nombre de *Reynolds* R_p . Nous avons montré sur les figures (2.15.a) à (2.15.e), la variation du taux de remplissage η en fonction du débit relatif Q^* pour les valeurs de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds* R_p suivantes :

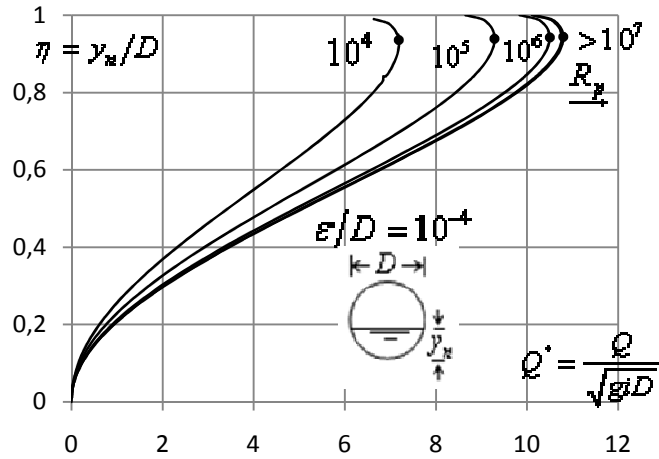
$$\varepsilon/D = 0; \quad 0^{-5}; \quad 10^{-4}; \quad 10^{-3}; \quad 10^{-2} \quad \text{et} \quad R_p = 10^4 - 10^5 - 10^6 - 10^7 - 10^8$$



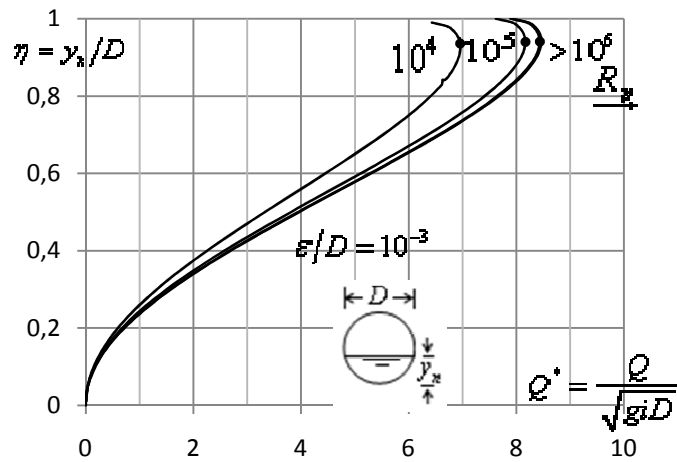
14.a



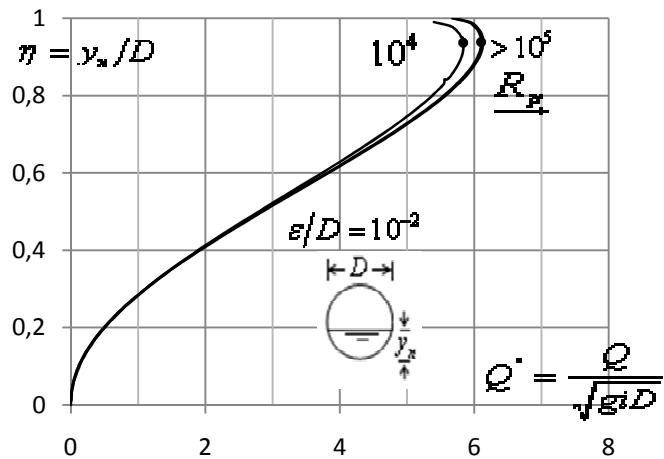
14. b-



14. c



14. d



14. e

Figure 2.15 : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs du nombre de Reynolds R_p pour $\varepsilon/D = 0$ à $0,01$ conformément à la relation (2.74).

(•) Valeurs maximales de Q^* correspondant à $0,9355 \leq \eta \leq 0,9383$.

Il ressort principalement des figures 2.15-a à 2.15-e que la conductivité relative Q^* augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage η , puis diminue dans un second temps

même si η continue d'augmenter. La variation $\eta(Q^*)$ passe ainsi par un maximum qui dépend à la fois de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p .

Le tableau 2 regroupe les valeurs particulières η_0 du taux de remplissage correspondant $Q^* = Q_{\max}^*$, calculées selon la relation (2.74) pour diverses valeurs de ε/D et R_p . L'espace grisâtre du tableau 2 correspond au domaine pratique de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p .

La figure 2.15-a montre bien que la valeur maximale du débit relatif Q^* n'est pas unique pour les faibles valeurs de la rugosité relative ε/D . Par contre la figure 2.15-e indique que pour les fortes rugosités relatives, la valeur maximale de Q^* demeure quasiment invariable quelque soit la valeur du nombre de Reynolds R_p .

Tableau 2 : Valeurs du taux de remplissage η pour $Q = Q_{\max}$, calculées selon la relation (2.74) pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p .

| $\varepsilon/D \rightarrow$ | | 0 | 10^{-5} | 5.10^{-5} | 10^{-4} | 5.10^{-4} | 10^{-3} | 5.10^{-3} | 10^{-2} | 5.10^{-2} |
|-----------------------------|----------|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----------|-------------|
| R_p | 10^4 | 0,9355 | 0,9355 | 0,9355 | 0,9355 | 0,9358 | 0,9360 | 0,9365 | 0,9364 | 0,9357 |
| | 5.10^4 | 0,9379 | 0,9379 | 0,9380 | 0,9382 | 0,9388 | 0,9390 | 0,9386 | 0,9378 | 0,9367 |
| | 10^5 | 0,9387 | 0,9387 | 0,9390 | 0,9392 | 0,9398 | 0,9399 | 0,9390 | 0,9381 | 0,9368 |
| | 5.10^5 | 0,9402 | 0,9404 | 0,9410 | 0,9413 | 0,9413 | 0,9409 | 0,9393 | 0,9382 | 0,9369 |
| | 10^6 | 0,9407 | 0,9412 | 0,9418 | 0,9420 | 0,9416 | 0,9411 | 0,9393 | 0,9383 | 0,9369 |
| | 5.10^6 | 0,9417 | 0,9428 | 0,9429 | 0,9427 | 0,9418 | 0,9412 | 0,9394 | 0,9383 | 0,9369 |
| | 10^7 | 0,9421 | 0,9433 | 0,9431 | 0,9429 | 0,9418 | 0,9412 | 0,9394 | 0,9383 | 0,9369 |
| | 5.10^7 | 0,9428 | 0,9439 | 0,9433 | 0,9430 | 0,9418 | 0,9412 | 0,9394 | 0,9383 | 0,9369 |
| | 10^8 | 0,9431 | 0,9440 | 0,9434 | 0,9430 | 0,9418 | 0,9412 | 0,9394 | 0,9383 | 0,9369 |

Il ressort de ce tableau :

1. pour une valeur fixée de la rugosité relative ε/D , η augmente avec l'accroissement du nombre de Reynolds R_p et tend à devenir constant.
2. Pour une valeur fixée du nombre de Reynolds R_p , la taux de remplissage $\eta(Q = Q_{\max})$ augmente et diminue en passant par une valeur maximale.
3. Pour les valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p , souvent utilisées dans la pratique, figurant dans l'espace gris du tableau n°2, la valeur moyenne du taux de remplissage η est $\eta \cong 0,9398$

On peut déterminer pour cette valeur moyenne, l'expression du débit maximal Q_{\max} d'une conduite circulaire à écoulement uniforme, lorsque les paramètres tel que la rugosité absolue ε , le diamètre D , la pente longitudinale J et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement sont connus. Il suffit

pour cela d'introduire cette valeur dans les relations (2.9) et (2.10) pour trouver les fonctions $\sigma(\eta)$ et $\varphi(\eta)$, de déduire A_1 , P_1 et d'écrire l'expression de Q_{\max} tirée de la relation (2.72). Soit :

$$A_1 = \frac{1}{4} \sigma(\eta = 0,9398) \varphi(\eta = 0,9398) = \frac{1}{4} \times 2,64581703 \times 1,15815079 = 0,76606377$$

$$P_1 = \varphi(\eta = 0,9398) = 2,64581703$$

La relation (2.72) devient :

$$Q_{\max} = -4 \times \sqrt{2} \left(\frac{0,76606377^{3/2}}{2,64581703^{1/2}} \right) \sqrt{gJD^5} \\ \times \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(0,76606377/2,64581703)} + \frac{1,255}{(0,76606377/2,64581703)^{3/2} R_p} \right)$$

Soit :

$$Q_{\max} = -2,332 \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{4,285} + \frac{8,055}{R_p} \right) \quad (2.75)$$

La conductivité maximale est alors :

$$Q_{\max}^* = -2,332 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{4,285} + \frac{8,055}{R_p} \right) \quad (2.76)$$

3.2.4 Etude de la variation $\eta(Q/Q_{\max})$: Relation approchée de la profondeur normale.

Nous avons déjà établi les relations approchées (2.34) et (2.51) de $\eta(Q/Q_{\max})$, dans les cas du coefficient de résistance à l'écoulement invariable. On utilise la même démarche pour établir une relation approchée qui servira à évaluer le taux de remplissage η (ou y_n) de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance variable.

Cela consiste à déterminer la loi de variation du taux de remplissage η en fonction de Q/Q_{\max} . Il est alors nécessaire d'étudier la variation $\eta(Q/Q_{\max})$ pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p en utilisant les relations (2.74) et (2.76). Les courbes représentatives $\eta(Q/Q_{\max})$ ne se superposent pas parfaitement pour différentes valeurs de ε/D et de R_p . Après des calculs laborieux, nous avons pu montrer que le taux de remplissage η pouvait s'exprimer en fonction Q/Q_{\max} , dans une large gamme pratique d'utilisation $0,20 \leq \eta \leq 0,82$, par la relation suivante:

$$\sin \left(\frac{\pi}{2,195} \eta \right) = 0,956 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,495} \quad (2.77)$$

La profondeur normale s'exprime alors par :

$$y_n = \frac{2,195}{\pi} D \sin^{-1} \left[0,956 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,495} \right] \quad (2.78)$$

La relation (2.77) a été soumise à de nombreuses vérifications par l'application de plusieurs exemples numériques. Cette relation entraîne des erreurs de l'ordre de 0,5% dans le calcul du taux de remplissage η . Elles peuvent atteindre pour les faibles valeurs de η et du nombre de Reynolds R_p plus de 1% lorsque les valeurs de la rugosité relatives ε/D sont très faibles (domaine pratiquement lisse).

3.3 Ecoulement critique

La profondeur critique permet d'identifier le caractère d'un régime d'écoulement fluvial ou torrentiel. Lorsque la profondeur critique est supérieure à la profondeur normale le régime est torrentiel, dans le cas contraire le régime est dit fluvial.

L'écoulement critique est régi par la relation bien connue de criticité, qui s'écrit :

$$\frac{Q^2 e_c}{g A_c^3} = 1 \quad (2.79)$$

Ou e_c désigne la largeur du plan d'eau e (Figure 2.1) et l'indice "c" désigne l'état critique de l'écoulement. Si $\eta_c = y_c/D$ est le taux de remplissage à l'état critique, la largeur du plan d'eau e_c s'écrit en utilisant la relation (2.21) :

$$e_c = D e_{1c} \quad (2.80)$$

La section mouillée correspondante s'écrit selon la relation (2.11):

$$A_c = D^2 A_{1c} \quad (2.81)$$

En utilisant les relations (2.80) et (2.81) dans (2.79), on a :

$$\frac{e_{1c}}{A_{1c}^3} \left(\frac{Q^2}{g D^5} \right) = 1 \quad (2.82)$$

Introduisant le débit relatif :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g D^5}} \quad (2.83)$$

Des relations (2.82) et (2.83) on peut déduire :

$$Q^* = \sqrt{\frac{A_{1c}^3}{e_{1c}}} \quad (2.84)$$

La relation (2.84) régit l'écoulement critique dans une conduite circulaire. A_{1c} et e_{1c} sont les paramètres adimensionnels définis dans le tableau 1, fonction du taux de remplissage η_c , correspondant à l'état critique. En pratique les paramètres Q et D et par conséquent Q^* sont connus et l'on recherche alors à déterminer la profondeur critique y_c . La détermination de celle-ci passe par celle de η_c puisque $y_c = \eta_c D$. Après remplacement de A_{1c} et e_{1c} , la relation (2.84) montre que η_c est implicite de Q^* et l'évaluation de η_c nécessiterait un procédé itératif ou graphique. Nous allons proposer une relation approchée pour la détermination de η_c et donc de la profondeur critique y_c .

La variation $\eta_c(Q^*)$ traduite par la relation (2.84) a été représentée graphiquement sur la figure 2.16 :

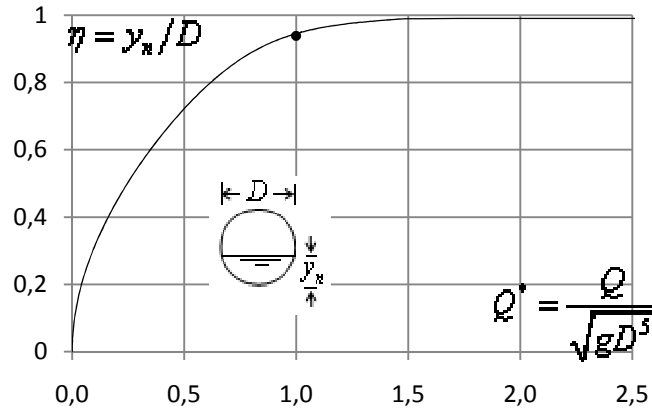


Figure 2.16 : Variation du taux de remplissage critique η_c en fonction du débit relatif Q^* selon la relation (2.84)

La courbe montre que η_c augmente avec l'accroissement du débit relatif Q^* et on constate que $Q^* \rightarrow \infty$ lorsque $\eta_c \rightarrow 1$. Nous avons pu, après plusieurs tentatives, proposer une relation approchée dans une gamme pratique de η_c . Ainsi pour des taux de remplissage ne dépassant pas 0,78, nos calculs ont montré que la relation implicite (2.84) peut être approchée par une relation fiable telle que :

$$\sin\left(\frac{\pi}{11}\eta_c\right) = 0,292Q^{*0,513} \tag{2.85}$$

L'écart relatif qu'elle occasionne reste inférieur à 0,44% pour une gamme très pratique $0,10 \leq \eta_c \leq 0,78$ correspondant à $0,0107 \leq Q_c^* \leq 0,5854$ comme le montre la figure 2.17 ci après :

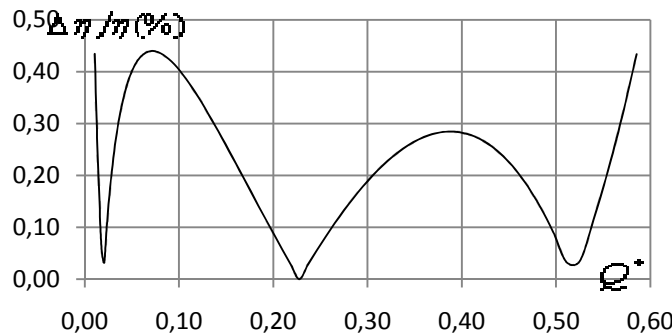


Figure 2.17 : Ecart relatif $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (2.85) sur le calcul de η_c , dans la gamme $0,10 \leq \eta_c \leq 0,78$ correspondant à $0,0107 \leq Q_c^* \leq 0,5854$.

La relation approchée (2.85) permet aussi d'écrire que :

$$y_c = \frac{11}{\pi} D \sin^{-1}\left(0,292Q^{*0,513}\right) \tag{2.86}$$

Exemple d'application 7 :

Un collecteur d'assainissement circulaire de diamètre $D = 1,5\text{m}$ doit être soulagé à la sortie de la commune par un déversoir d'orage dont la côte doit être déterminé. Le débit qui doit arriver à la

station d'épuration ne doit pas dépasser $Q = 1,2 \text{ m}^3/\text{s}$. La pente longitudinale est $J = 0,0005$ et la rugosité absolue est de $\varepsilon = 2.10^{-5} \text{ m}$. La viscosité cinématique du liquide est de $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

1. A quelle hauteur de la génératrice inférieure, le déversoir doit être arasé pour limiter le débit vers la station d'épuration à la valeur donnée.
2. Quelle est la nature de l'écoulement en comparant y_c et la hauteur critique.

Solution :

1. Déterminons la capacité maximale du collecteur et cherchons la cote laquelle doit être arasé le déversoir d'orage pour ne laisser passer que le débit donné.

- Le nombre de Reynolds R_p est selon la relation (2.70):

$$R_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 727832$$

- Le débit maximal est selon la relation (2.75)

$$Q_{\max} = -2,332 \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{4,285} + \frac{8,055}{R_p} \right)$$

$$= -2,332 \sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,5^5} \times \log \left(\frac{2.10^{-5}/1,5}{4,285} + \frac{8,055}{727832} \right) = 2,18208297 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Selon la relation approchée (2.78), la profondeur normale est égale à :

$$y_n = \frac{2,195}{\pi} D \sin^{-1} \left[0,956 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,495} \right] = \frac{2,195}{\pi} \times 1,5 \times \sin^{-1} \left[0,956 \times \left(\frac{1,2}{2,18208297} \right)^{0,495} \right]$$

$$= 0,82901316 \text{ m} \cong 0,83 \text{ m}$$

C'est à dire la cote du déversoir doit être à 0,83 m de la génératrice inférieure du collecteur.

Vérifions nos calculs, en déterminons le débit volume par la formule générale (1.186):

Le taux de remplissage est : $\eta = 0,82901316/1,5 = 0,55267544$

Les paramètres $\sigma(\eta)$, $\varphi(\eta)$, A_1 et P_1 prennent respectivement les valeurs :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,55267544) = 1,67634306$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2 \times (1 - 2\eta) \sqrt{\eta(1 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)}$$

$$= 1 - \frac{2(1 - 2 \times 0,55267544) \sqrt{0,55267544 \times (1 - 0,55267544)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,55267544)} = 1,06249593$$

$$A_1 = \frac{1}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{1}{4} \times 1,67634306 \times 1,06249593 = 0,44527361$$

$$P_1 = \sigma(\eta) = 1,67634306$$

- l'aire de la section mouillée est selon (2.11) :

$$A = D^2 A_1 = 1,5^2 \times 0,44527361 = 1,00186562 \text{ m}^2$$

- le rayon hydraulique est en vertu de (2.18) :

$$R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 1,5 \times \frac{0,44527361}{1,67634306} = 0,39844014 \text{ m}$$

- le nombre de Reynolds est selon (1.187) :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 0,39844014^3}}{10^{-6}} = 797130$$

- le débit volume serait donc selon la relation (1.186) :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{JR_h} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,00186562 \times \sqrt{0,39844014 \times 0,0005} \times \log \left(\frac{0,00002}{14,8 \times 0,39844014} + \frac{10,04}{797130} \right)$$

$$= 1,201673 \cong 1,2 \text{ m}^3/\text{s}$$

L'écart relatif entre le débit volume déterminé et celui donné à l'énoncé de l'exemple considéré est égal à 0,14% seulement.

2. la nature de l'écoulement peut être connue en déterminant la profondeur critique, en application de la relation (2.86) :

Il faut au préalable déterminer le débit relatif Q_c^* selon la relation (2.83), qui est:

$$Q_c^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} = \frac{1,2}{\sqrt{9,81 \times 1,5^5}} = 0,13903322$$

$$y_c = \frac{11}{\pi} D \sin^{-1} \left(0,292 Q_c^{*0,513} \right) = \frac{11}{\pi} \times 1,5 \times \sin^{-1} \left(0,292 \times 0,13903322^{0,513} \right) = 0,55841271 \cong 0,56 \text{ m}$$

Nous pouvons ainsi déduire que l'écoulement est de nature fluviale puisque $y_n = 0,83 > y_c$.

Conclusion :

Les relations usuelles de l'écoulement uniforme ne permettent pas en règle générale le calcul explicite de la profondeur normale y_n ou du diamètre D de la conduite. Avec les formules approchées proposées, le dimensionnement des conduites circulaires en écoulement à surface libre est très aisé.

Dans le cas du coefficient de résistance à l'écoulement constant de *Chézy* ou de *Manning* les relations proposées donnent une très bonne précision du calcul du taux de remplissage dans une gamme largement acceptable dans les cas pratiques. L'erreur relative maximale occasionnée ne dépasse pas 0,50% dans ces cas de dimensionnement, ce qui est largement acceptable pour le calcul des collecteurs d'assainissement.

Dans le cas réel où le coefficient de résistance à l'écoulement est variable, nous avons proposé, sur la base de la MMR, une relation générale pour le calcul du diamètre, ce calcul simple et rapide n'a pas nécessité la connaissance du coefficient de résistance à l'écoulement au sens de *Colebrook-White*, de *Chézy* ou de *Manning*. Son effet est implicitement introduit dans le développement théorique. Les résultats obtenus ont une très bonne précision.

L'utilisation la variation de la conductivité relative $\bar{\eta}(\bar{Q}^*)$ du modèle rugueux de référence est particulièrement intéressante pour la détermination rapide du taux de remplissage. Enfin la relation $\eta(Q/Q_{\max})$ donne une autre possibilité pour le calcul simple de ce taux. Les résultats obtenus des exemples concrets d'application apportent la preuve de la fiabilité des relations proposées et montre la simplicité de l'application de la méthode du modèle rugueux de référence.

CHAPITRE III

ETUDE DE CONDUITES FERMEES NON CIRCULAIRES

Introduction

Le présent chapitre est consacré à l'application des différentes méthodes de dimensionnement à cinq profils de conduites non circulaires largement utilisées dans les grands collecteurs d'assainissement, les adductions et les transferts d'eau. Il s'agit des conduites fermées ayant toutes comme dimension linéaire caractéristique un diamètre D (Lancastre, 1996):

- I. Conduites ovoïdales normales ;
- II. Conduites en forme de fer à cheval ;
- III. Conduites ovoïdales à radier aplati ;
- IV. Conduites circulaires avec banquettes ;
- V. Conduites en arc de cercle écrasé.

Pour chaque profil nous donnerons en premier lieu les caractéristiques géométriques de la section droite et les caractéristiques de l'écoulement en fonction du taux de remplissage. Ensuite avec une présentation succincte, la même démarche de calcul que celle menée pour la conduite circulaire, est présentée pour les cinq profils. La recherche, nécessaire dans plusieurs cas pratiques, de la dimension linéaire telle que la profondeur normale ou le diamètre caractéristique dans un écoulement permanent à coefficient de résistance constant sera présentée.

Pour l'écoulement à coefficient de résistance variable, on utilisera essentiellement la méthode du modèle rugueux de référence pour établir les principales relations de dimensionnement. Pour chaque profil on étudiera :

- La détermination du diamètre caractéristique de la conduite et de la profondeur normale dans le cas des écoulements à coefficient de résistance constant.
- La détermination du taux de remplissage η en étudiant la variation $\bar{\eta}(\bar{Q}^*)$ et $\eta(Q/Q_{\max})$ pour le cas des écoulements à coefficient de résistance variable.
- La détermination du taux critique de remplissage η_c en étudiant la variation $\eta_c(Q_c^*)$.

De nombreux exemples d'application seront présentés pour une meilleure compréhension des différentes étapes de calcul.

CONDUITE OVOÏDALE NORMALE (I)

La conduite ovoïdale considérée dans la présente étude est celle communément appelée conduite ovoïdale normale représentée par la figure 3.1.I. Elle est caractérisée par la dimension linéaire $Y_m = D$.

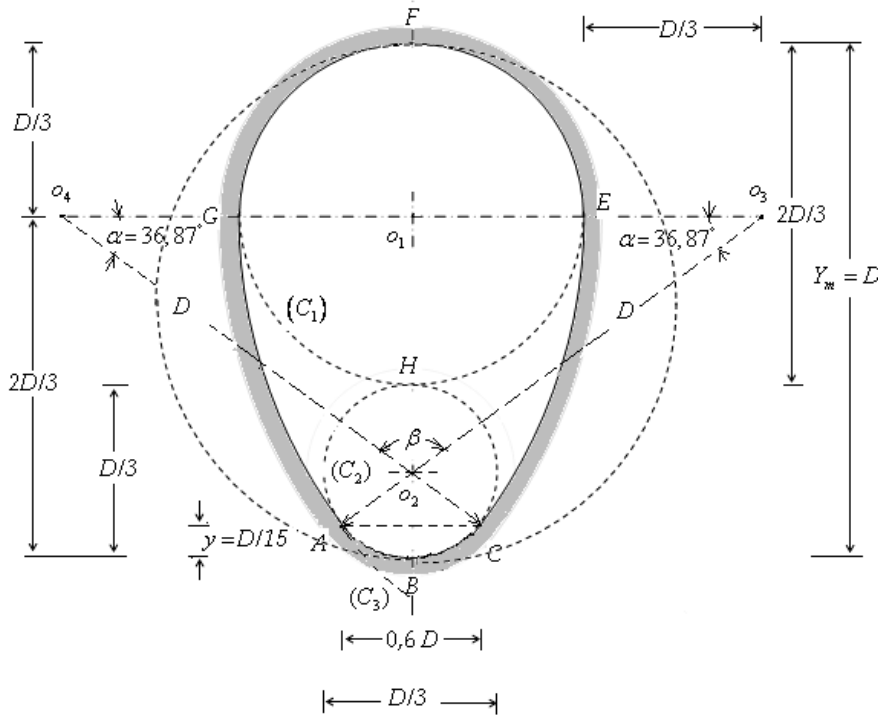


Figure 3.1.I : Schéma de définition de la conduite ovoïdale normale.

Caractéristiques géométriques de la conduite.

Les étapes constructives de la section droite d'une telle conduite sont les suivantes :

- i. Sur un axe vertical, on trace le cercle (C_1) de centre o_1 et de diamètre $2D/3$.
- ii. Tracer en dessous de (C_1) , et tangent au point H, le cercle (C_2) de centre o_2 et de diamètre $D/3$.
- iii. Considérons deux points o_3 et o_4 tel que $\overline{o_3G} = \overline{o_4E} = D$.
- iv. Tracer les arcs de cercle \widehat{GA} et \widehat{EC} , respectivement de centre o_3 et o_4 et de rayon $\overline{o_3A}$ et $\overline{o_4C}$ égal à D , On démontrera que les points A et C sont des points de tangence au cercle (C_2) .
- v. La figure $AGFE CB$ ainsi obtenue représente la section droite d'une conduite ovoïdale normale.
 - Cette figure suggère les remarques suivantes :

1. Dans le triangle $(\Delta o_3 o_1 o_2)$ on peut écrire :

$$\tan(\alpha) = \frac{o_1 o_2}{o_1 o_3} = \frac{o_1 H + H o_2}{o_1 E + E o_3} = \frac{D/3 + D/6}{D/3 + D/3} = \frac{D/2}{2D/3} = \frac{3}{4}$$

Soit :

$$\alpha = 0,64350111 \text{ radian} \quad \text{Ou bien : } \alpha = 36,87^\circ .$$

Nous pouvons écrire par suite dans le triangle $\Delta o_3 o_4 o_2$:

$$\beta = \pi - 2\alpha = \pi - 2 \times 0,64350111 = 1,85459043 \text{ radian} \quad \text{Ou : } \beta = 106,26^\circ$$

On peut écrire aussi que :

$$\overline{o_2 o_3} = \sqrt{(\overline{o_1 o_3})^2 + (\overline{o_1 o_2})^2} = \sqrt{(2D/3)^2 + (D/2)^2} = 5D/6$$

$$\text{Comme } \overline{o_2 A} = D/6$$

Alors on a :

$$\overline{o_3 A} = \overline{o_2 o_3} + \overline{o_2 A} = \frac{5}{6}D + \frac{1}{6}D = D$$

Mais $\overline{o_3 A}$, égal à D , est le rayon de l'arc \widehat{GA} par définition, ce qui prouve que les points o_3, o_2 et A sont alignés et par conséquent le cercle (C_3) et (C_1) sont tangents aux points A et C .

2. Dans le triangle $(\Delta A o_2 C)$ on peut écrire :

$$\cos(\beta/2) = \frac{D/6 - y}{D/6} = 1 - 6y/D$$

Ou bien :

$$y/D = \frac{1 - \cos(\beta/2)}{6} = \frac{1 - \cos(1,85459044/2)}{6} = 1/15$$

Soit :

$$y = D/15$$

3. En outre la longueur de la corde \overline{AC} peut être déterminée comme suit :

$$\tan(\beta/2) = \frac{\overline{AC}/2}{D/6 - y} = \frac{\overline{AC}/2}{D/6 - D/15} = \frac{\overline{AC}}{0,2D}$$

Ou bien :

$$\overline{AC} = 0,2D \tan(\beta/2) = 0,2 \times D \times \tan(1,85459044/2)$$

Soit :

$$\overline{AC} = \frac{4}{15}D$$

4. On peut aussi déterminer les longueurs des arcs \widehat{AC} et \widehat{GA} :

$$\widehat{AC} = \frac{D}{6} \beta = \frac{1}{6} \times 1,85459043 \times D$$

$$\widehat{GA} = D\alpha = 0,64350111 \times D$$

Soit :

$$\widehat{AC} = 0,30909841D$$

$$\widehat{GA} = 0,64350111D$$

3.4 Eléments hydrauliques de la section transversale.

Les caractéristiques de l'écoulement, telle que l'aire de la section mouillée A , le périmètre mouillé P , le rayon hydraulique R_h ou la largeur du plan d'eau e dépendent du taux de remplissage $\eta = y_n/D$ ou y_n est la profondeur normale de l'écoulement et D est la hauteur de la conduite. Ces caractéristiques s'expriment par différentes relations selon le lieu géométrique de l'écoulement. La figure 3.2.I montre trois lieux géométriques différents que peut occuper l'écoulement, selon la valeur du taux η :

- Entre les points B et I de la partie circulaire basse c'est-à-dire $\eta \leq (D/15)/D$ ou $\eta \leq 1/15$
- Entre les points I et o_1 de l'espace délimité par \widehat{GA} et \widehat{CE} , c'est-à-dire $1/15 \leq \eta \leq 2/3$
- Entre les points o_1 et F de la partie circulaire la plus haute de la conduite c'est-à-dire $2/3 \leq \eta \leq 1$.

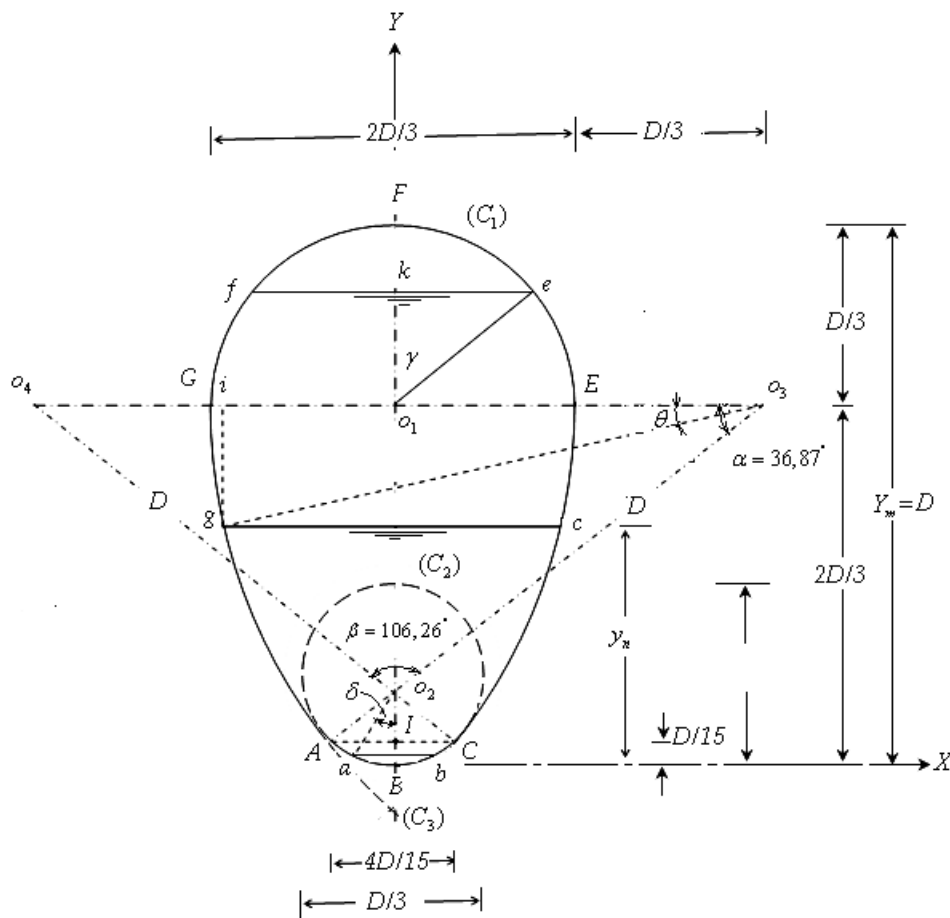


Figure 3.2.I Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite ovoïdale normale.

1) $\eta \leq 1/15$

e. Largeur du plan d'eau :

Lorsque $\eta \leq 1/15$, la largeur du plan d'eau e correspond à la corde \overline{ab} . Les points a et b appartiennent au cercle (C_2) , de centre o_2 et de diamètre $D/3$.

Ainsi :

$$e = 2 \left[\frac{D}{6} \sin(\delta) \right]$$

Ou bien :
$$e = \frac{D}{3} \sqrt{1 - \cos^2(\delta)}$$

Où l'angle δ est le demi angle au centre, tel que :

$$\cos(\delta) = \frac{D/6 - y_n}{D/6} = 1 - 6 \frac{y_n}{D} = 1 - 6\eta$$

On a alors : $\delta = \cos^{-1}(1 - 6\eta)$

$$\sin(\delta) = \sqrt{1 - \cos^2(\delta)} = 2\sqrt{3\eta(1 - 3\eta)}$$

$$e = \frac{2D}{3} \sqrt{3\eta(1 - 3\eta)} \tag{3.1.I}$$

f. Périmètre mouillée :

Le périmètre mouillé P correspond à la longueur de l'arc \widehat{ab} , appartenant au cercle (C_2) , de centre o_2 et de diamètre $D/3$.

Ainsi :
$$P = 2\delta(D/6)$$

Soit :

$$P = \frac{D}{3} \cos^{-1}(1 - 6\eta) \tag{3.2.I}$$

Définissons la fonction :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 6\eta) \tag{3.3.I}$$

La relation (3.2.I) devient :

$$P = \frac{D}{3} \sigma(\eta) \tag{3.4.I}$$

d. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspond à l'aire du segment circulaire $aBba$, appartenant au cercle (C_2) , de centre o_2 et de diamètre $D/3$. Ainsi :

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{6} \right)^2 [2\delta - \sin(2\delta)] = \frac{D^2}{36} [\delta - \sin(\delta) \cos(\delta)]$$

Soit :

$$A = \frac{D^2}{36} \left[\cos^{-1}(1 - 6\eta) - 2(1 - 6\eta) \sqrt{3\eta(1 - 3\eta)} \right] \tag{3.5.I}$$

Définissons la fonction :

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1 - 6\eta) \sqrt{3\eta(1 - 3\eta)}}{\cos^{-1}(1 - 6\eta)} \tag{3.6.I}$$

La relation (3.5.I) permet d'écrire :

$$A = \frac{D^2}{36} \sigma(\eta) \varphi(\eta) \tag{3.7.I}$$

e. Rayon hydraulique

Les relations (3.4.I) et (3.7.I) permettent de déduire que le rayon hydraulique $R_h = A/P$ est :

$$R_h = \frac{D}{12} \varphi(\eta) \quad (3.8.I)$$

2) $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

a. Largeur du plan d'eau

Lorsque $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, la largeur du plan d'eau e correspond à \overline{gc} (Figure 3.2.I). Le point g appartient au cercle (C_3) de centre de centre o_3 et de rayon D . L'équation de ce cercle est :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (D)^2 \quad (3.9.I)$$

Où x_0 et y_0 sont les coordonnées du point o_3 . Dans le système d'axes XY de la figure 3.2.I, le point o_3 a pour coordonnées $x_0 = 2D/3$ et $y_0 = 2D/3$. Dans le même système d'axes, le point g a pour coordonnées $x = -e/2$ et $y = y_n$. La relation (3.9.I) s'écrit alors :

$$\left(\frac{e}{2} + \frac{2D}{3}\right)^2 + \left(y_n - \frac{2D}{3}\right)^2 = D^2$$

En divisant les deux membres de cette équation par D^2 , on trouve la largeur e après calcul :

$$e = 2D \left[\sqrt{1 - \left(\eta - \frac{2}{3}\right)^2} - \frac{2}{3} \right] \quad (3.10.I)$$

b. Périmètre mouillé

Lorsque $1/15 \leq \eta \leq 2/3$, le périmètre mouillé P correspond à deux fois la longueur de l'arc \widehat{gA} , à laquelle il faut rajouter la longueur de l'arc de cercle \widehat{AC} . La longueur de l'arc \widehat{gA} est égale à la différence des longueurs des arcs \widehat{GA} et \widehat{Gg} . Le périmètre mouillé sera donc égal :

$$P = 2 \times \widehat{gA} + \widehat{AC} = 2 \times (\widehat{GA} - \widehat{Gg}) + \widehat{AC}$$

Les longueurs des arcs \widehat{GA} et \widehat{AC} ont été déterminées au point 4 des caractéristiques géométriques.

La longueur de l'arc \widehat{Gg} est égale à $\widehat{Gg} = D\theta$

θ Peut être déterminé dans le triangle rectangle (Δgio_3) par :

$$\sin(\theta) = \frac{\overline{ig}}{D} = \frac{(\overline{Bo_1} - y_n)}{D} = \left(\frac{2D/3 - y_n}{D}\right)$$

Soit :

$$\sin(\theta) = \frac{2}{3} - \eta \quad (3.11.I)$$

Ou bien :

$$\theta = \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \quad (3.12.I)$$

La longueur de l'arc \widehat{Gg} est tel que :

$$\widehat{Gg} = D\theta = D \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \quad (3.13.I)$$

Le périmètre mouillé est donc égal après calcul :

$$P = D \left[1,59610063 - 2 \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \right] \quad (3.14.I)$$

Définissons la fonction :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610063 - 2 \sin^{-1} \left(\frac{2}{3} - \eta \right) \quad (3.15.I)$$

Le périmètre sera égal à :

$$P = D\vartheta(\eta) \quad (3.16.I)$$

c. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspondant à $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ est définie par l'espace $gcBg$ de la figure 3.2.I L'aire de cette section mouillée A peut être décomposée en trois aires qui sont :

- $2 A_0$, où A_0 est l'aire de la section du segment circulaire de corde \overline{gA} .
- A_1 , l'aire du trapèze $gcAC$ dont les caractéristiques sont :
 - Grande base = largeur du plan d'eau $\overline{gc} = e$, définie par la relation (3.10.I)
 - Petite base $\overline{AC} = 4D/15$, déterminée par la relation (3.1.I) pour la valeur de $\eta = 1/15$
 - Hauteur $h = (y_n - y) = y_n - D/15$
- A_2 , l'aire du segment circulaire $ABCA$.

L'aire de la section A recherchée est donc : $A = 2A_0 + A_1 + A_2$

- L'aire de la section du segment circulaire de corde \overline{gA} , appartient au cercle (C_3) de centre o_3 et de rayon D , et a un l'angle au centre $(\alpha - \theta)$. Nous pouvons écrire, pour $(\alpha - \theta)$ exprimé en radian :

$$A_0 = \frac{D^2}{2} [(\alpha - \theta) - \sin(\alpha - \theta)]$$

Ou bien :

$$2A_0 = D^2 [(\alpha - \theta) - \sin(\alpha - \theta)] \quad (3.17.I)$$

La quantité $\sin(\alpha - \theta)$ peut s'écrire :

$$\sin(\alpha - \theta) = \sin(\alpha) \cos(\theta) - \cos(\alpha) \sin(\theta) \quad (3.18.I)$$

Par ailleurs de la relation (3.11.I) on peut déduire :

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta \right)^2} \quad (3.19.I)$$

En utilisant la valeur de α déterminée au point 1 des caractéristiques géométriques, les relations (3.11.I), (3.12.I) et (3.19.I) dans la relation (3.17.I), il vient après calcul et simplification :

$$2A_0 = D^2 \left[1,17683444 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}-\eta\right) - \frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}-\eta\right)^2} - \frac{4}{5}\eta \right] \quad (3.20.I)$$

-L'aire de la section mouillée A_I du trapèze $gcAC$ s'écrit :

$$A_1 = \frac{(e+4D/15)}{2}(y_n - D/15) \quad (3.21.I)$$

Ou bien :

$$A_1 = D^2 \left(\frac{e}{2D} + \frac{2}{15} \right) \left(\eta - \frac{1}{15} \right) \quad (3.22.I)$$

En tenant compte de la relation (3.10.I), la relation (3.22.I) devient :

$$A_1 = D^2 \left[\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}-\eta\right)^2} - 1 + \frac{2}{15} \right] \left(\eta - \frac{1}{15} \right) \quad (3.23.I)$$

Après réarrangements, la relation (3.23.I) mène à :

$$A_1 = D^2 \left[\frac{8}{15^2} + \left(\eta - \frac{1}{15} \right) \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}-\eta\right)^2} - \frac{8}{15}\eta \right] \quad (3.24.I)$$

- L'aire A_2 du segment circulaire $ABCA$ est donnée par la relation (3.7.I) pour $\eta = 1/15$:

$$A_2 = \frac{D^2}{36} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{D^2}{36} \left[\cos^{-1}\left(1-6 \times \frac{1}{15}\right) \left(1 - \frac{2 \times \left(1-6 \times \frac{1}{15}\right) \times \sqrt{3 \times \frac{1}{15} \times \left(1-3 \times \frac{1}{15}\right)}}{\cos^{-1}\left(1-6 \times \frac{1}{15}\right)} \right) \right]$$

Soit :

$$A_2 = 0,01242487D^2 \quad (3.25.I)$$

Finalement, l'aire recherchée $A = 2A_0 + A_1 + A_2$, compte tenu des relations (3.20.I), (3.24.I) et (3.25.I), est égale après arrangement :

$$A = D^2 \left[1,22481487 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}-\eta\right) + \left(\eta - \frac{2}{3}\right) \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}-\eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta \right] \quad (3.26.I)$$

Définissons, par souci de simplification d'écriture, la fonction :

$$\zeta(\eta) = 1,22481487 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}-\eta\right) + \left(\eta - \frac{2}{3}\right) \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}-\eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta \quad (3.27.I)$$

La relation (3.26.I) s'écrit alors :

$$A = \zeta(\eta)D^2 \quad (3.28.I)$$

d. Rayon hydraulique

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$ s'écrit, en ayant recours aux relations (3.16.I) et (3.28.I) :

$$R_h = A/P = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \quad (3.29.I)$$

3) $\frac{2}{3} \leq \eta \leq 1$

e. Largeur du plan d'eau

Lorsque $\frac{2}{3} \leq \eta \leq 1$, la largeur du plan d'eau e correspond à la corde \overline{fe} . Les points f et e appartiennent au cercle (C_1) , de centre o_1 et de diamètre $2D/3$. Ainsi :

$$e = \overline{ef} = 2 \frac{D}{3} \sin(\gamma) = \frac{2}{3} D \sin(\gamma)$$

Dans le triangle rectangle $\Delta o_1 k e$ on peut écrire :

$$\overline{ek} = e/2 \quad (3.30.I)$$

$$\overline{o_1 k} = \overline{Bk} - \overline{o_1 B} = y_n - 2D/3 \quad (3.31.I)$$

Par ailleurs on a :

$$\overline{ek}^2 + \overline{o_1 k}^2 = (D/3)^2 \quad (3.32.I)$$

Les relations (3.30.I), (3.31.I) et (3.32.I) mènent à écrire que :

$$(e/2)^2 = (D/3)^2 - (y_n - 2D/3)^2 \quad (3.34.I)$$

En remplaçant $y_n = \eta D$, la relation (3.34.I) s'écrit après calcul et simplification :

$$e^2 = 4D^2 \left[\left(\eta - \frac{1}{3} \right) (1 - \eta) \right]$$

Ainsi, la largeur du plan d'eau est :

$$e = 2D \sqrt{(\eta - 1/3)(1 - \eta)} \quad (3.35.I)$$

f. Périmètre mouillé

Pour $\frac{2}{3} \leq \eta \leq 1$, le périmètre mouillé correspond à la somme des périmètres :

- $P_0 =$ la longueur de l'arc \widehat{GBE}
- $P_1 =$ Deux fois la longueur de l'arc \widehat{Fg}

La longueur de l'arc \widehat{GBE} s'obtient par la relation (3.14.I) pour la valeur $\eta = 2/3$, soit :

$$P_0 = 1,59610063D \quad (3.36.I)$$

Le périmètre P_1 , correspondant à deux fois la longueur \widehat{Fg} , est égale à la différence des longueurs des arcs \widehat{GE} et \widehat{fe} :

$$\widehat{GE} = \frac{1}{2} \pi \frac{2D}{3} \quad (3.37.I)$$

La longueur de l'arc \widehat{fe} est égale à :

$$\widehat{fe} = \frac{2D/3}{2} (2\gamma) = \frac{2}{3} D\gamma \quad (3.38.I)$$

Or dans le triangle $\Delta o_1 k e$, nous pouvons écrire :

$$\cos(\gamma) = \frac{\overline{ko_1}}{o_1e} = \frac{y_n - 2D/3}{D/3}$$

Soit :

$$\cos(\gamma) = 3\left(\eta - \frac{2}{3}\right) \quad (3.39.I)$$

Par ailleurs nous pouvons écrire également dans le même triangle :

$$\sin(\gamma) = \frac{\overline{ke}}{o_1e} = \frac{e/2}{D/3} = \frac{3}{2} \frac{e}{D} \quad (3.40.I)$$

Tenant compte de la relation (3.35.I), la relation (3.40.I) devient :

$$\sin(\gamma) = 3\sqrt{\left(\eta - \frac{1}{3}\right)(1-\eta)} \quad (3.41.I)$$

Soit :

$$\gamma = \sin^{-1} \left[3\sqrt{\left(\eta - \frac{1}{3}\right)(1-\eta)} \right] \quad (3.42.I)$$

La relation (3.38.I) s'écrit en tenant compte de (3.39.I) :

$$\widehat{fe} = \frac{2D}{3} \cos^{-1} \left[3\left(\eta - \frac{2}{3}\right) \right] \quad (3.43.I)$$

Le périmètre ainsi recherché est obtenu en ayant recours aux relations (3.36.I), (3.37.I) et (3.43.I) après simplification et réarrangement :

$$P = D \left(2,64329818 - \frac{2}{3} \cos^{-1} \left[3\left(\eta - \frac{2}{3}\right) \right] \right) \quad (3.44.I)$$

Définissons la fonction :

$$\tau(\eta) = 2,64329818 - \frac{2}{3} \cos^{-1} \left[3\left(\eta - \frac{2}{3}\right) \right] \quad (3.45.I)$$

La relation (3.44.I) s'écrit alors :

$$P = D\tau(\eta) \quad (3.46.I)$$

g. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A , dans le cas où $2/3 \leq \eta \leq 1$, correspond à l'espace $feEBGf$ de la figure 3.2.I. Cette aire est la somme des aires $GEBG$ et $feEGf$.

Désignons par A_0 l'aire de la section $GEBG$. Cette aire est donnée par la relation (3.26.I) pour $\eta = 2/3$, soit après calcul :

$$A_0 = 0,33592598D^2 \quad (3.47.I)$$

Désignons également par A_1 l'aire de la section mouillée du segment circulaire $feEGf$. Ce segment circulaire appartient au cercle (C_1) de centre o_1 et de rayon $D/3$, son aire peut être déduite en retranchant de la surface A_2 du segment circulaire $GFEG$ la surface A_3 du segment circulaire $fFef$.

Il vient donc que : $A_1 = A_2 - A_3$.

L'aire A_2 du segment circulaire $GFEG$ est celle du demi cercle de rayon $D/3$ et égale à :

$$A_2 = \frac{\pi(D/3)^2}{2} \quad (3.48.I)$$

L'aire A_3 du segment circulaire $fFef$ appartenant au cercle (C_1) de centre o_1 et de rayon $D/3$, est déterminée, pour l'angle γ exprimé en radian, par l'expression suivante :

$$A_3 = \frac{(D/3)^2}{2} [2\gamma - \sin(2\gamma)] = \left(\frac{D}{3}\right)^2 [\gamma - \sin(\gamma)\cos(\gamma)] \quad (3.49.I)$$

Tenant compte des relations (3.39.I) et (3.41.I), la relation (3.49.I) s'écrit :

$$A_3 = \frac{D^2}{9} \left\{ \cos^{-1} \left[3\left(\eta - \frac{1}{3}\right) \right] - \left(\eta - \frac{2}{3}\right) \sqrt{\left(\eta - \frac{1}{3}\right)(1-\eta)} \right\} \quad (3.50.I)$$

L'aire A ainsi recherchée, est égale à :

$$A = A_0 + A_1 = A_0 + A_2 - A_3$$

En utilisant (3.47.I), (3.48.I), et (3.50.I), L'aire A est égale après simplification et réaménagement :

$$A = D^2 \left[0,5104589 - \frac{1}{9} \cos^{-1} \left[3\left(\eta - \frac{2}{3}\right) \right] + \left(\eta - \frac{2}{3}\right) \sqrt{\left(\eta - \frac{1}{3}\right)(1-\eta)} \right] \quad (3.51.I)$$

Définissons la fonction :

$$\lambda(\eta) = 0,5104589 - \frac{1}{9} \cos^{-1} \left[3\left(\eta - \frac{2}{3}\right) \right] + \left(\eta - \frac{2}{3}\right) \sqrt{\left(\eta - \frac{1}{3}\right)(1-\eta)} \quad (3.52.I)$$

La relation (3.51.I) s'écrit alors plus simplement :

$$A = D^2 \lambda(\eta) \quad (3.53.I)$$

Pour l'état plein, correspondant au taux de $\eta = 1$, la relation (3.51.I) mène à écrire que :

$$A_{p(ON)} = 0,5104589 D^2 \quad (3.54.I)$$

Nous désignerons ultérieurement tous les paramètres adimensionnels correspondant au remplissage total de la section ($\eta = 1$) avec l'indice « p ».

L'aire de la conduite circulaire pleine de diamètre D est égale à $A_{p(c)} = \pi D^2 / 4$.

Par suite, nous pouvons déduire que :

$$\frac{A_{p(ON)}}{A_{p(c)}} (\%) = \frac{0,5104589 D^2}{\pi D^2 / 4} \times 100 \cong 65\% \quad (3.55.I)$$

La conduite ovoïde normale occupe 65% de la surface de la conduite circulaire de même hauteur.

h. Rayon hydraulique

Lorsque $2/3 \leq \eta \leq 1$, le rayon hydraulique s'exprime, compte tenu des relations (3.46.I) et (3.53.I), par :

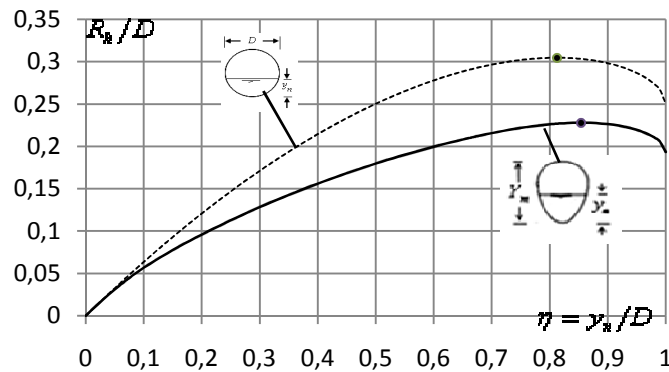
$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \quad (3.56.I)$$

Tableau n°1 des Paramètres adimensionnels.

| | Expressions des fonctions de η | | | A l'état plein $\eta = 1$ |
|---------------------|--|--|-------------------------------------|------------------------------|
| $\sigma(\eta) =$ | $\cos^{-1}(1-6\eta)$ | | | |
| $\varphi(\eta) =$ | $1 - \frac{2(1-6\eta)\sqrt{3\eta(1-3\eta)}}{\cos^{-1}(1-6\eta)}$ | | | |
| $\vartheta(\eta) =$ | $1,59610063 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right)$ | | | |
| $\zeta(\eta) =$ | $1,22481487 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) + \left(\eta - \frac{2}{3}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta$ | | | |
| $\tau(\eta) =$ | $2,64329818 - \frac{2}{3} \cos^{-1}\left[3\left(\eta - \frac{2}{3}\right)\right]$ | | | $P_{1p} = 2,64329818$ |
| $\lambda(\eta) =$ | $0,5104589 - \frac{1}{9} \cos^{-1}\left[3\left(\eta - \frac{2}{3}\right)\right] + \left(\eta - \frac{2}{3}\right)\sqrt{\left(\eta - \frac{1}{3}\right)(1-\eta)}$ | | | $A_{1p} = 0,5104589$ |
| Par.dim | $\eta \leq 1/15$ | $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ | $2/3 \leq \eta \leq 1$ | |
| e_1 | $\frac{2}{3}\sqrt{3\eta(1-3\eta)}$ | $2\left[\sqrt{1 - \left(\eta - \frac{2}{3}\right)^2} - \frac{2}{3}\right]$ | $2\sqrt{(\eta - 1/3)(1-\eta)}$ | 0 |
| A_1 | $A_1 = \sigma(\eta)\varphi(\eta)/36$ | $A_1 = \zeta(\eta)$ | $A_1 = \lambda(\eta)$ | $A_{1p} = 0,5104589$ |
| P_1 | $P_1 = \sigma(\eta)/3$ | $P_1 = \vartheta(\eta)$ | $P_1 = \tau(\eta)$ | $P_{1p} = 2,64329818$ |
| R_{h1} | $R_{h1} = \varphi(\eta)/12$ | $R_{h1} = \zeta(\eta)/\vartheta(\eta)$ | $R_{h1} = \lambda(\eta)/\tau(\eta)$ | $R_{h1p} = 0,19311438$ |

Variation des caractéristiques de l'écoulement

La variation de la caractéristique adimensionnelle de l'écoulement, en particulier le rayon hydraulique relatif $R_h/D = R_{h1}$ est représenté sur les figures 3 dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$. Le paramètre R_h/D passe par un maximum pour le taux $\eta = 0,854$. En application (3.56.I) et les valeurs $A_1(\eta = 0,854)$ et $P_1(\eta = 0,854)$ on a $R_{h,\max} = 0,22763018D$


Figure 3.2.I : Variation du rayon hydraulique relatif R_h/D en fonction du taux η .

 (●) Taux de remplissage correspondant à $R_{h,\max}/D$.

On choisira dans toute notre étude, la dimension linéaire recherchée a , figurant dans les relations (1.41), (1.42), (1.43) et (1.44), le diamètre caractéristique D de la conduite ovoïdale normale.

3.5 Ecoulement à coefficient de résistance de Chézy invariable.

3.2.1. Variation de la conductivité relative $\eta(Q^*)$ pour C constant.

Rappelons que selon Chézy la conductivité relative s'exprime par la relation (2.25). En faisant varier A_1 et P_1 , selon le taux η , La conductivité Q^* a été représentée sur la fig. 3.4.I, dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$.

On remarque que la conductivité Q^* augmente avec l'accroissement de η , jusqu'à un maximum correspondant à $\eta = 0,9617$, puis diminue au-delà de ce maximum.

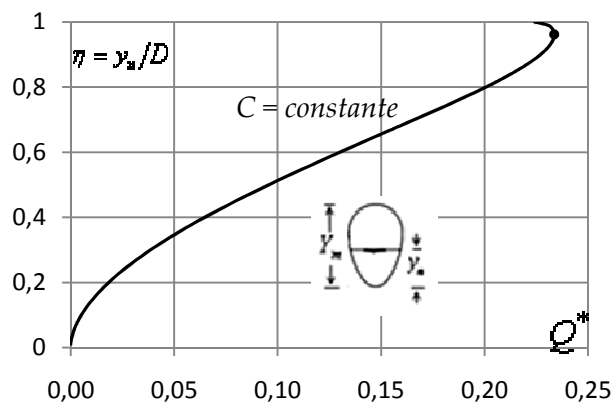


Figure 3.4.I : Variation de la conductivité Q^* en fonction du taux η , tracée selon la relation (2.25).

(●). $Q_{\max}^* = 0,2338$ Correspondant à $\eta = 0,9617$.

A l'état plein, on a, en introduisant $A_{1p} = 0,5104589$ et $P_{1p} = 2,64329818$ dans la relation (2.25) :

$$Q_p^* = 0,22432005 = \text{constante} \quad (3.57.I)$$

En outre la conductivité maximale Q_{\max}^* correspondant à la valeur $\eta = 0,9617$. Elle est égale selon la relation (2.25) et en introduisant $A_1(\eta=0,9617) = 0,50244099$ et $P_1(\eta=0,9617) = 2,32057319$ à :

$$Q_{\max}^* = 0,23379217 \quad (3.58.I)$$

On peut tirer des relations (3.57.I) et (3.58.I) que $Q_{\max}^* = 1,042226Q_p$

Selon l'intervalle de η , la conductivité Q^* , calculée à partir de (2.25), varie comme suit:

- $0 \leq Q^* \leq 0,00249109$, correspondant à $\eta \leq 1/15$
- $0,00249109 \leq Q^* \leq 0,15411157$, correspondant à $1/15 \leq \eta \leq 2/3$
- $0,15411157 \leq Q^* \leq 0,23379217$, correspondant à $2/3 \leq \eta \leq 1$.

Afin d'évaluer de manière explicite la valeur du taux $\eta(Q^*)$ à partir des paramètres connus du problème C, Q, D , et J , nos calculs ont montré que dans $0,14 \leq \eta \leq 0,82$ correspondant à $0,0097 \leq Q^* \leq 0,2069$ la relation (2.25) peut être remplacée par la relations approchée suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 1,753 Q^{*0,535} \quad (3.59.I)$$

L'écart relatif maximal $\Delta\eta/\eta$ occasionné par la relation approchée (3.59.I) est inférieur à 0,47%.

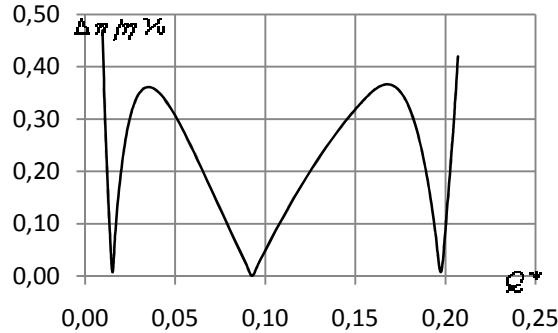


Figure 3.5.I : Ecarts relatifs $\Delta\eta/\eta$ (%) occasionnés par la relation approchée (3.59.I) sur le calcul de η , dans la gamme $0,14 \leq \eta \leq 0,82$ correspondant à $0,0097 \leq Q^* \leq 0,2069$.

3.2.2. Courbe de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ pour C constant.

La courbe de remplissage se traduit par la variation de $\eta(Q/Q_p)$. Tenant compte des relations (2.25), (2.29) et (3.57.I), nous pouvons écrire :

$$\frac{Q}{Q_p} = 4,458 \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \quad (3.60.I)$$

On peut déduire de la relation approchée (3.59.I) $\eta(Q^*)$ obtenue précédemment :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 1,753 Q^{*0,535} = 1,753 Q_p^{*0,535} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,535}$$

Par ailleurs la relation (3.57.I) donne $Q_p^* = 0,22432005$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 1,753 Q_p^{*0,535} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,535} = 1,753 \times 0,22432005^{0,535} \times \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,535} = 0,788 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,535}$$

Et en utilisant (2.29) on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 0,788 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,535} \quad (3.61.I)$$

La relation (3.61.I) est valable pour $0,14 \leq \eta \leq 0,82$ correspondant à $0,0432 \leq Q/Q_p \leq 0,9224$

L'écart relatif maximal occasionné par cette relation approchée est inférieur à 0,48%.

3.2.3. Relation $\eta(Q/Q_{\max})$ pour C constant

En tenant compte des relations (2.25), (2.32) et (3.58.I) nous pouvons alors écrire :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 4,2773 \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \quad (3.62.I)$$

On peut déduire de la relation approchée (3.59.I) $\eta(Q^*)$ obtenue précédemment :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 1,753 Q^{*0,535} = 1,753 Q_{\max}^{*0,535} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,535}$$

Par ailleurs on sait que selon la relation (3.58.I) : $Q_{\max}^* = 0,23379217$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 1,753 Q_{\max}^{*0,535} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,535} = 1,753 \times 0,23379217^{0,535} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,535} = 0,806 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,535}$$

Ou bien en utilisant (2.32) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 0,806 \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,535} \quad (3.63.I)$$

La relation (3.63.I) est valable pour $0,14 \leq \eta \leq 0,82$ correspondant à $0,0415 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,8851$ et l'écart relatif maximal occasionné par cette relation est inférieur à 0,50%.

Exemple d'application 1.

Soit à déterminer la profondeur normale dans une conduite ovoïdale normale de diamètre $D = 2,5 \text{ m}$, écoulant un débit $Q = 2,78 \text{ m}^3/\text{s}$ sous une pente $J = 0,0004$. Le coefficient $C = 85 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$.

Solution :

On peut déterminer le problème de trois manières suivantes :

2. Avec la conductivité relative Q^* :

i. Déterminons la conductivité relative par la relation de définition (2.24) :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 J}} = \frac{2,78}{\sqrt{85^2 \times 2,5^5 \times 0,0004}} = 0,16548013 < Q_{\max}^*$$

ii. Q^* se situe dans $0,0097 \leq Q^* \leq 0,2069$, l'application de (3.59.I) permet de trouver le taux η :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1}(1,753 Q^{*0,535}) = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1}(1,753 \times 0,16548013^{0,535}) = 0,70059442 \cong 0,7$$

iii. On déduit la profondeur moyenne : $y_n = \eta D = 0,7 \times 2,5 = 1,75 \text{ m}$.

3. Avec la relation $\eta(Q/Q_p)$

iii. $Q_p^* = 0,22432005$ et selon la relation (2.29) on a :

$$Q/Q_p = Q^*/Q_p^* = 0,16548013 / 0,22432005 = 0,73769656$$

ii. Par suite, Q/Q_p appartient $0,0432 \leq Q/Q_p \leq 0,9224$ et le taux η est régi par (3.61.I) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,788 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,535} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,788 \times 0,73769656^{0,535} \right] = 0,70065364 \cong 0,7$$

Il s'agit bien de la valeur de η obtenue au point 1-ii

4. Avec la relation $\eta(Q/Q_{\max})$

iii. $Q_{\max}^* = 0,23379217$ et selon la relation (2.32) on a :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{Q^*}{Q_{\max}^*} = \frac{0,16548013}{0,23379217} = 0,70780869$$

iv. On obtient alors par application de la relation approchée (3.63.I) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,806 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,535} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,806 \times 0,70780869^{0,535} \right] = 0,70104877 \cong 0,7$$

La aussi, la valeur η est bien celle déterminé au point 1-ii et au point 2-ii.

Vérification : Pour le résultat obtenu déterminons le débit volume Q par la formule de Chézy. Pour

$\eta = 0,7$. On détermine A_1 et P_1 . Comme $2/3 \leq \eta \leq 1$ on a selon le tableau des par.dim. :

$$A_1 = \zeta(\eta = 0,7) = 0,3581111 \quad P_1 = \vartheta(\eta = 0,7) = 1,66287891$$

- La surface mouillée est : $A = A_1 D^2 = 0,3581111 \times 2,5^2 = 2,23819438 m^2$
- le rayon hydraulique est : $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 2,5 \times \frac{0,3581111}{1,66287891} = 0,53839022 m$
- le débit volume serait donc :

$$Q = CA \sqrt{R_h J} = 85 \times 2,23819438 \sqrt{0,53839022 \times 0,0004} = 2,79187072 m^3/s$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est égal à 0,43 % seulement.

3.2.4. Conductivité relative Q_y^* rapportée à la profondeur normale.

La conductivité relative rapportée à la profondeur normale y_n s'exprime en fonction de η par la relation (2.38). Pour $0 \leq \eta \leq 1$, la variation $\eta(Q_y^*)$ a été représentée sur la figure 3.6.I. Q_y^* diminue avec la diminution de η . Pour $\eta \leq 1$, $Q_y^* \geq 0,2243$ tandis que $Q_y^*(\text{circulaire}) \geq 0,3927$ pour $\eta \leq 1$.

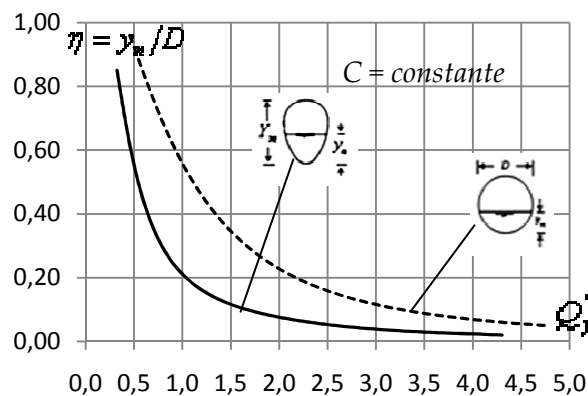


Figure 3.6.I : Variation de la conductivité relative Q_y^* en fonction du taux de remplissage η pour les cas des conduites ovoïdale normale (—) et circulaire (---).

La relation (2.38) est implicite vis avis de η . Elle a fait l'objet d'une étude particulière qui a consisté à déterminer une relation explicite qui lui est approchée. Le calcul a montré que pour :

a) $0,16 \leq \eta \leq 0,69$, correspondant à $0,4111 \leq Q_y^* \leq 1,2067$, le taux de remplissage η est tel que :

$$\sinh(1,62\eta) = 0,349Q_y^{*-1,542} \quad (3.64.I-a)$$

L'écart relatif maximal $\Delta\eta/\eta$ occasionné par la relation approchée (3.64.I-a) est inférieur à 0,50%.

b) $0,68 \leq \eta \leq 0,97$, correspondant à $0,2578 \leq Q_y^* \leq 0,4168$, le taux η est tel que :

$$\eta = 1,435 - 1,818Q_y^* \quad (3.64.I-b)$$

L'écart relatif maximal $\Delta\eta/\eta$ occasionné par la relation approchée (3.64.I-b) est inférieur à 0,49%.

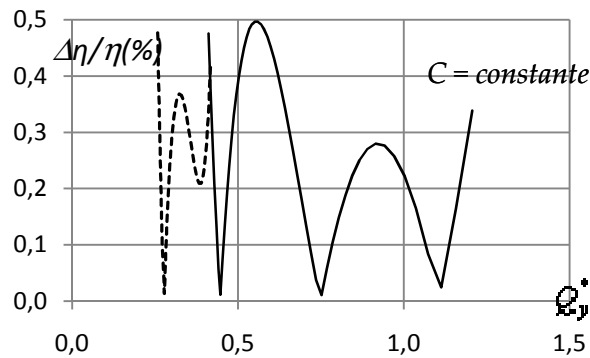


Figure 3.7.I : Ecarts relatifs sur le calcul du taux de remplissage η par (3.64.I-a) et (3.64.I-b)
(—) dans la gamme $0,16 \leq \eta \leq 0,69$ (- - -) dans la gamme $0,68 \leq \eta \leq 0,97$

Exemple d'application 2

Reprenons les données de l'exemple 1 et évaluons cette fois-ci le diamètre D de la conduite.

Les données sont donc : $Q=2,78\text{m}^3/\text{s}$ $C=85\text{m}^{0,5}/\text{s}$ $J=0,0004$ $y_n=1,75\text{m}$

Solution :

Pour les données du problème, la conductivité relative est selon la relation (2.36) :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 J y_n^5}} = \frac{2,78}{\sqrt{85^2 \times 0,0004 \times 1,75^5}} = 0,40364609$$

Q_y^* est tel que $0,2578 \leq Q_y^* \leq 0,4168$ et le taux η est donc régi par (3.64.I-b) :

$$\eta = 1,435 - 1,818Q_y^* = 1,435 - 1,818 \times 0,40364609 = 0,70117141 \cong 0,7$$

Il s'agit bien de la valeur proche de η , calculée au cours des étapes 1-ii, 2-ii et 3-ii de l'exemple 1. Par suite, le diamètre D recherché est : $D = y_n/\eta = 1,75/0,7 = 2,5\text{m}$

3.6 Ecoulement à coefficient de résistance de Manning invariable;

La conductivité relative s'exprime, pour n constant, par la relation (2.42) : $Q^* = A_1^{5/3} / P_1^{2/3}$

A l'état plein ($\eta = 1$), $A_{1p} = 0,5104589$ et $P_{1p} = 2,64329818$ la conductivité relative Q_p^* est égale :

$$Q_p^* = 0,17054429 = \text{constante} \quad (3.65.I)$$

3.3.1. Variation de la conductivité relative $\eta(Q^*)$ pour n constant.

La variation $\eta(Q^*)$, pour n constant, de la relation (2.42), a été représentée sur la figure 3.8.I. La conductivité Q^* augmente avec l'accroissement de η jusqu'à un maximum, puis diminue au-delà de ce maximum. Pour le cas de la conduite ovoïdale normale, le taux de remplissage $\eta = 0,9529$, correspondant à Q_{\max}^* .

En utilisant les valeurs $A_1(\eta = 0,9529) = 0,49956963$ et $P_1(\eta = 0,9529) = 2,28458567$ on a :

$$Q_{\max}^* = 0,18132392 \quad (3.66.I)$$

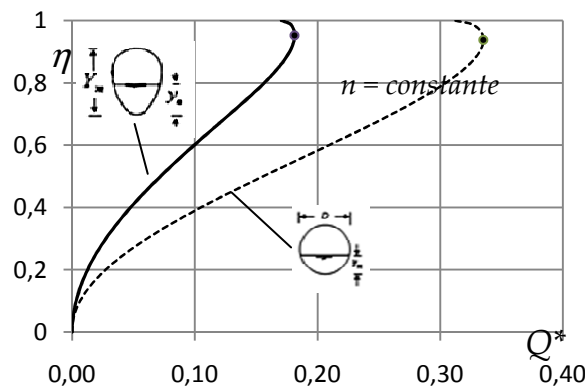


Figure 3.8.I : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction du taux de remplissage η selon la formule de Manning Strickler, pour le cas des conduites ovoïdale normale et circulaire.

(•) $Q_{\max}^* = 0,18132392$ pour $\eta = 0,9529$ pour la conduite ovoïdale normale.

Les calculs ont également montré que pour :

- $0 \leq \eta \leq 1/15$ $0 \leq Q^* \leq 0,001458$
- $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ $0,001458 \leq Q^* \leq 0,118859$
- $2/3 \leq \eta \leq 1$ $0,118859 \leq Q^* \leq 0,170544$

La relation (2.42) est implicite vis-à-vis de η , afin d'évaluer de manière explicite la valeur du taux η , à partir de Q^* , nos calculs ont montré que dans la gamme $0,14 \leq \eta \leq 0,82$, correspondant à $0,0063 \leq Q^* \leq 0,1616$, la relation (2.42) pouvait être remplacée par la relation approchée suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,891}\eta\right) = 1,932Q^{*0,501} \quad (3.67.I)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation (3.67.I) est inférieur à 0,48% (figure 3.9.I).

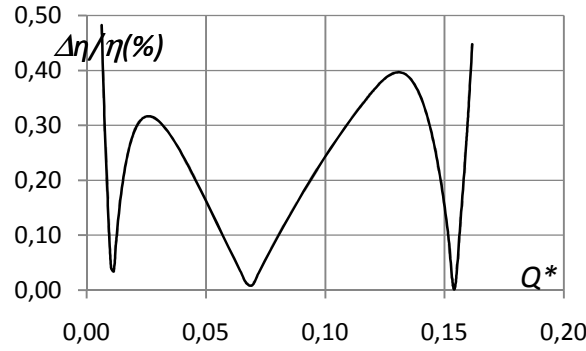


Figure 3.9.I : Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (3.67.I) sur le calcul du taux dans la gamme $0,14 \leq \eta \leq 0,82$ correspondant à $0,0063 \leq Q^* \leq 0,1616$.

3.3.2. Courbe de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ pour n constant.

La variation $\eta(Q/Q_p)$, pour n constant, s'écrit en tenant compte de (2.46), (2.42) et (3.65.I).

$$\frac{Q}{Q_p} = 5,864 \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \quad (3.68.I)$$

Le rapport Q/Q_p ne dépend que du taux η . Il apparaît que le taux η est implicite vis-à-vis de Q/Q_p .

On peut déduire de la relation approchée (3.67.I) obtenue précédemment ce qui suit :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,891} \eta\right) = 1,932 Q^{*0,501} = 1,932 (Q_p^*)^{0,501} \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,501}$$

Par ailleurs on sait que $Q_p^* = 0,17054429$, il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,891} \eta\right) = 1,932 (Q_p^*)^{0,501} \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,501} = 1,932 \times 0,17054429^{0,501} \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,501} = 0,796 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,501}$$

Ou bien en utilisant (2.46) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,891} \eta\right) = 0,796 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,501} \quad (3.69.I)$$

La relation (3.69.I) est valable pour $0,14 \leq \eta \leq 0,82$ ou $0,0368 \leq Q/Q_p \leq 0,9475$ et l'écart relatif maximal occasionné par les relations approchées (3.69.I) est inférieur à 0,50%.

3.3.3. Relation $\eta(Q/Q_{\max})$ pour n constant

La variation $\eta(Q/Q_{\max})$, s'écrit en tenant compte de (2.49), (2.42) et de $Q_{\max}^* = 0,18132392$:

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 5,515 \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \quad (3.70.I)$$

Le rapport Q/Q_{\max} est implicite vis-à-vis du taux η . On peut déduire de la relation de (3.67.I) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,891}\eta\right) = 1,932 Q^{*0,501} = 1,932(Q_{\max}^*)^{0,501} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,501}$$

Par ailleurs on a déterminé précédemment que $Q_{\max}^* = 0,18132392$, alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,891}\eta\right) = 1,932(Q_{\max}^*)^{0,501} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,501} = 1,932 \times 0,18132392^{0,501} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,501} = 0,821 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,501}$$

Ou bien en utilisant (2.49) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,891}\eta\right) = 0,821 \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,501} \quad (3.71.I)$$

La relation (3.71.I) est valable pour $0,14 \leq \eta \leq 0,82$ ou $0,0346 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,8912$ et l'écart relatif maximal occasionné par les relations approchées (3.71.I) est inférieur à 0,50%.

Exemple d'application 3 :

On souhaite déterminer le taux de remplissage η dans une conduite ovoïdale normale de diamètre $D = 2\text{ m}$, écoulant un débit $Q = 1,2\text{ m}^3/\text{s}$ sous une pente $J = 0,0005$. Le coefficient $n = 0,0148\text{ m}^{1/3}\text{ s}$.

Solution :

On peut déterminer le problème de trois manières suivantes :

4. Avec la conductivité relative $\eta(Q^*)$

i. Calculons la conductivité relative Q^* par application de la relation (2.41) :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3}\sqrt{J}} = \frac{0,0148 \times 1,2}{2^{8/3}\sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} = 0,12508675$$

ii. La conductivité appartient $0,0063 \leq Q^* \leq 0,1616$, le taux η est, selon la relation (3.67.I) :

$$\eta = \frac{2,891}{\pi} \times \sin^{-1}(1,932 \times 0,12508675^{0,501}) = 0,69048288 \cong 0,69$$

iii. La profondeur normale y_n recherchée est, par suite :

$$y_n = D\eta = 2 \times 0,69 = 1,38\text{ m}$$

5. Avec le taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$

i. Compte tenu du fait que $Q_p^* = 0,17054429$ et que $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$, alors :

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{0,12508675}{0,17054429} = 0,73345609$$

ii. le taux η de la conduite peut alors être évalué par la relation approchée (3.69.I), soit :

$$\eta = \frac{2,891}{\pi} \sin^{-1} \left[0,796 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,501} \right] = \frac{2,891}{\pi} \sin^{-1} [0,796 \times 0,73345609^{0,501}] = 0,6900002 \cong 0,69$$

Il s'agit bien de la valeur obtenue au point 2-ii

6. Avec la conductivité maximale $\eta(Q/Q_{\max})$:

i. Compte tenu du fait que $Q_{\max}^* = 0,18132392$ et que $Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^*$, on a :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{0,12508675}{0,18132392} = 0,68985245$$

ii. Le taux η de la conduite peut alors être évalué par la relation approchée (3.71.I), soit :

$$\eta = \frac{2,891}{\pi} \sin^{-1} \left[0,821 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,501} \right] = \frac{2,891}{\pi} \sin^{-1} [0,821 \times 0,68985245^{0,501}] = 0,69018674 \cong 0,69$$

La aussi, la valeur du taux est bien celle déterminé au point 2-ii et au point 1-ii.

Vérification : Pour le résultat obtenu déterminons le débit volume Q par la formule de Manning : Pour $\eta = 0,69$. On doit déterminer A_1 et P_1 , comme $2/3 \leq \eta \leq 1$ on a selon le tableau des par.dim. :

$$A_1(\eta=0,69) = \zeta(\eta=0,69) = 0,35146882 \quad P_1(\eta=0,69) = \vartheta(\eta=0,69) = 1,64280549$$

- La surface mouillée est : $A = A_1 D^2 = 0,35146882 \times 2^2 = 1,40587528 m^2$

- le rayon hydraulique est : $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 2 \times \frac{0,35146882}{1,64280549} = 0,42788854 m$

- le débit volume est donc :

$$Q = \frac{1}{n} R_h^{2/3} A \sqrt{J} = \frac{1}{0,0148} \times 0,42788854^{2/3} \times 1,40587528 \times \sqrt{0,0005} = 1,20612046 m^3/s$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est égal à 0,51% seulement.

3.3.4. Conductivité relative Q_y^* rapportée à la profondeur normale.

La conductivité Q_y^* a été définie par la relation (2.55). Ainsi, dans $0 \leq \eta \leq 1$, la conductivité relative Q_y^* ne dépend que du taux η . La relation (2.55) a été représentée sur la figure 3.10.I.

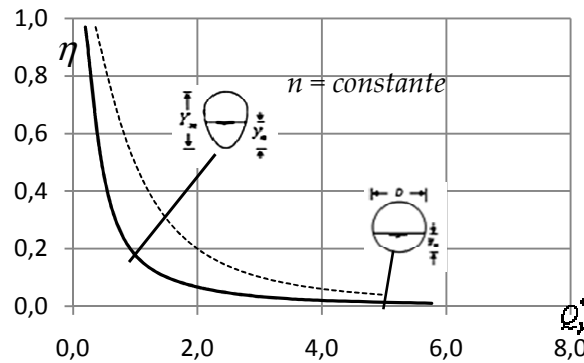


Figure 3.10.I : Courbes de variation $\eta(Q_y^*)$ dans les conduites ovoïdale normale et circulaire.

L'étude de la relation (2.55) a montré que η peut s'exprimer explicitement, en fonction de Q_y^* par :

a) $0,08 \leq \eta \leq 0,34$ correspondant $0,6212 \leq Q_y^* \leq 1,768$

$$\sinh\left(\frac{\pi}{2} \eta\right) = 0,283 Q_y^{*-1,422} \quad (3.72.I-a)$$

b) $0,34 \leq \eta \leq 0,82$, correspondant à $0,2743 \leq Q_y^* \leq 0,6212$

$$\sinh\left(\frac{\pi}{1,27} \eta\right) = 0,417 Q_y^{*-1,703} \quad (3.72.I-b)$$

Les écarts issus de l'application des relations (3.72.I-a) et (3.72.I-b) restent inférieur à 0,50% (fig. 11).

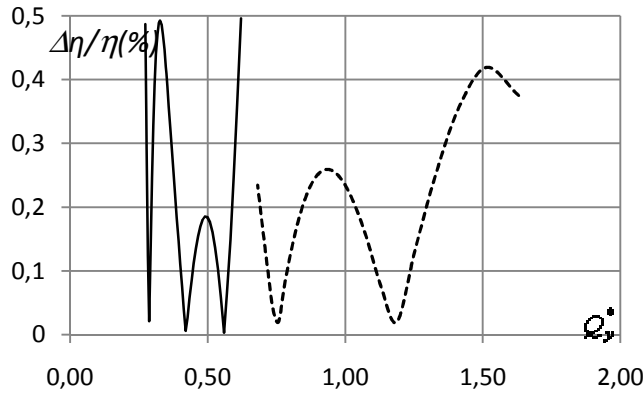


Figure 3.11.I : Ecart relatifs en (%) occasionnées par les relations approchées (3.72.I-a) et (3.72.I-b).
Ecart (-----) pour la gamme $0,08 \leq \eta \leq 0,34$ (—) pour la gamme $0,34 \leq \eta \leq 0,82$

Exemple d'application 4

Reprenons les données de l'exemple d'application 3 et déterminons le diamètre D de la conduite. Les données sont alors : $Q=1,2\text{m}^3/\text{s}$ $J=0,0005$ $n=0,0148\text{m}^{1/3}\text{s}$ $y_n=1,38\text{m}$

Solution :

i. Calculons Q_y^* , rapportée à la profondeur normale y_n , par application de la relation (2.53), soit :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{J}} = \frac{0,0148 \times 1,2}{1,38^{8/3} \times \sqrt{0,0005}} = 0,33647055$$

On a $0,2743 \leq Q_y^* \leq 0,6212$, alors le taux η est donc régi par la relation approchée (3.72.I-b), soit :

$$\eta = \frac{1,27}{\pi} \sinh^{-1} \left(0,417 Q_y^{*-1,703} \right) = \frac{1,27}{\pi} \sinh^{-1} \left(0,417 \times 0,33647055^{-1,703} \right) = 0,69003233 \cong 0,69$$

ii. Ainsi, le diamètre D recherché est :

$$D = \frac{y_n}{\eta} = \frac{1,38}{0,69003233} = 1,99990628 \cong 2\text{m}$$

L'écart entre cette valeur et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application 3 est insignifiante.

3.7 Ecoulement à coefficient de résistance variable

3.4.1. Expression générale du diamètre

Pour calculer le diamètre D (ou la hauteur h) dans le cas d'une conduite ovoïdale normale partiellement remplie pour les valeurs données de Q, J, ε, ν et η , nous allons nous baser sur la formule (1.173) trouvée dans le chapitre 1 et qui est valable pour n'importe quelle dimension linéaire :

$$D \cong 0,512 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5}$$

Où \overline{D}_h est donnée par la relation (1.167) et \overline{R} est donné par la relation (1.158).

On peut aussi faire appel aux relations (1.160), (1.154) et (1.168) ou (1.174) et (1.168)

Exemple d'application 5.

Déterminer le diamètre d'une conduite ovoïdale véhiculant un débit $Q = 1,27 \text{ m}^3/\text{s}$ sachant que :
 $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $J = 0,0005$, $\varepsilon = 0,0002 \text{ m}$ et $\eta = 0,6$.

a) Pour un taux de remplissage $\eta = 0,6$, le tableau des paramètres adimensionnels donne :

$$A_1(\eta = 0,6) = 0,29158037 \quad P_1(\eta = 0,6) = 1,46266833$$

b) On détermine le diamètre hydraulique \bar{D}_h en utilisant la relation (1.167) :

$$\bar{D}_h = 1,516 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{A_1}{P_1^2} \right)^{2/5} = 1,516 \left(\frac{1,27^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{0,29158037}{1,46266833^2} \right)^{2/5} = 2,1771057 \text{ m}$$

Le nombre de Reynolds \bar{R} est déterminé par la relation (1.158) :

$$\bar{R} = 10,556 \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu} \left(\frac{A_1}{P_1^2} \right)^{3/5} = 10,556 \times \frac{(9,81 \times 0,0005 \times 1,27^3)^{1/5}}{10^{-6}} \times \left(\frac{0,29158037}{1,46266833^2} \right)^{3/5} = 1272300$$

c) On déduit la dimension linéaire recherchée D en appliquant la relation (1.173) :

$$\begin{aligned} D &\cong 0,512 \times \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \\ &= 0,512 \left[-\log \left(\frac{0,0002/2,1771057}{4,75} + \frac{8,5}{1272300} \right) \right]^{-2/5} \times \left(\frac{1,27^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{1,46266833}{0,29158037^3} \right)^{1/5} \\ &= 2,00592311 \text{ m} \cong 2 \text{ m} \end{aligned}$$

3.4.2. Variation de la conductivité relative du modèle rugueux de référence : Calcul de la profondeur normale.

Soit les données du problème : Q, D, J, ε et ν . Quel serait alors la profondeur y_n dans la conduite.

Assumons $J = \bar{J}$ et $Q = \bar{Q}$ par contre $a \neq \bar{a}$ ou $D \neq \bar{D}$ $A \neq \bar{A}$, et $P \neq \bar{P}$.

La relation régissant l'écoulement pour le modèle rugueux de référence a été donnée par la relation (2.58) et la conductivité relative est donnée par la relation (2.59). Cette conductivité relative a la même expression que la relation (2.25). D'autre part on a aussi :

$$\bar{Q}_p^* = (A_{1p}^{3/2} / P_{1p}^{1/2}) = 0,22432005 = \text{constante} \quad (3.73.I)$$

$$Q_{\max}^* = 0,23379217 \quad (3.74.I)$$

Pour la valeur à l'état plein $\bar{Q}_p^* = 0,22432005$ correspond $\bar{\eta} = 1$ et $\bar{\eta} = 0,88634414$.

La variation $\bar{\eta}(\bar{Q})$ est explicite vis-à-vis de $\bar{\eta}$. Dans la gamme du taux $0,14 \leq \bar{\eta} \leq 0,82$, correspondant à $0,0097 \leq \bar{Q} \leq 0,2069$, elle s'exprime par une relation similaire à la relation (3.59.I) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} \bar{\eta}\right) = 1,753 \bar{Q}^{0,535} \quad (3.75.I)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (3.75.I) est inférieur à 0,47%.

Le diamètre à l'état plein \overline{D}_p du modèle rugueux de référence est tiré de la relation (2.59) a validité générale, après avoir remplacé $A_1 = A_{1p} = 0,5104589$ et $P_1 = P_{1p} = 2,64329818$:

$$\overline{D}_p = 0,689 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \quad (3.76.I)$$

Ce modèle rugueux de diamètre \overline{D}_p a la même conductivité relative que celui de même diamètre mais avec un taux de remplissage $\overline{\eta} = 0,88634414$. Avec cette valeur $\overline{\eta}$ et le diamètre \overline{D}_p déterminé par (3.76.I), on détermine \overline{P} , \overline{R}_h et \overline{R} , en utilisant les relations (2.15), (2.18), (1.48) et le tableau des paramètres adimensionnels :

$$A_1(\overline{\eta} = 0,88634414) = 0,47094813 \quad P_1(\overline{\eta} = 0,88634414) = 2,07578833$$

$$\overline{P} = \overline{D}_p P_1(\overline{\eta} = 0,88634414) = 2,07578833 \overline{D}_p \quad (3.77.I)$$

$$\overline{R}_h = \overline{D}_p \frac{A_1(\overline{\eta} = 0,88634414)}{P_1(\overline{\eta} = 0,88634414)} = 0,22687676 \overline{D}_p \quad (3.78.I)$$

$$R = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4Q}{v P(\overline{\eta} = 0,88634414)} = 1,92697875 \frac{Q}{v \overline{D}_p} \quad (3.79.I)$$

Introduisant ces expressions dans la relation (1.168) pour déterminer le facteur ψ on a :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_p}{4,31} + 4,41 \frac{v \overline{D}_p}{Q} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.80.I)$$

Pour déterminer la profondeur y_n , procédons maintenant comme dans le cas de la conduite circulaire :

- Avec Q et J , déterminons \overline{D}_p et calculons ψ . D est une donnée, affectons $\overline{D} = D/\psi$.
- Avec \overline{D} , calculons à l'aide de (2.59) la conductivité relative \overline{Q}^* et déterminons η à l'aide de la relation approchée (3.75.I) le taux η et déduisons $y_n = \eta D$.

Exemple d'application 6 :

Reprenons l'exercice précédent, soit : $Q = 1,27 \text{ m}^3/\text{s}$, $v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $J = 0,0005$, $\varepsilon = 0,0002 \text{ m}$ et $D = 2 \text{ m}$. Quelle est la profondeur normale y_n ?

Le diamètre \overline{D}_p à l'état plein du modèle rugueux de référence est donné par la relation (3.76.I) :

$$\overline{D}_p = 0,689 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = 0,689 \times \left(\frac{1,27^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} = 2,19590177 \text{ m}$$

- A l'aide de la relation (3.80.I) calculons le facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

$$\begin{aligned}\psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_p}{4,31} + 4,41 \frac{\nu \bar{D}_p}{Q} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{0,0002/2,19590177}{4,31} + 4,41 \times \frac{10^{-6} \times 2,19590177}{1,27} \right) \right]^{-2/5} = 0,73699309\end{aligned}$$

- Affectons à ce modèle rugueux le diamètre $\bar{D} = D/\psi = 2/0,73699309 = 2,71372964m$.
- Ce nouveau diamètre \bar{D} donne la conductivité relative à l'aide de la relation (2.59) :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gJ\bar{D}^5}} = \frac{1,27}{\sqrt{128 \times 9,81 \times 0,0005 \times 2,71372964^5}} = 0,13211824$$

- Avec \bar{Q}^* obtenue déterminons à l'aide de la relation (3.75.I), le taux η et la profondeur normale.

$$\bar{\eta} = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left(1,753 \bar{Q}^{*0,535} \right) = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left(1,753 \times 0,13211824^{0,535} \right) = 0,60688661$$

Ce résultat correspond à celui de l'énoncé de l'exemple précédent.

$$y_n = \eta D = 0,60688661 \times 2 = 1,21377321m$$

3.4.3. Expression du débit volume maximal Q_{\max}

L'expression du débit Q_{\max} , est déduite de la formule (1.186) dans laquelle R est donné par (1.188).

A l'état plein, Le nombre de Reynolds prend la valeur particulière R_p . En remplaçant dans la relation (1.188), les paramètres adimensionnels A_1 et P_1 , selon le tableau des par.dim. A_{1p} et P_{1p} on a :

$$R_p = 32\sqrt{2} \left(\frac{A_{1p}}{P_{1p}} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \left(\frac{0,5104589}{2,64329818} \right)^{3/2} \times \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu}$$

Soit :

$$R_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} \quad (3.81.I)$$

Tenant compte de (3.81.I), la relation (1.188) s'écrit :

$$R = 11,785 \left(\frac{A_1}{P_1} \right)^{3/2} R_p \quad (3.82.I)$$

Remplaçant dans la relation (1.186), A , R_n et R par les relations (1.42), (1.44) et (3.82.I) :

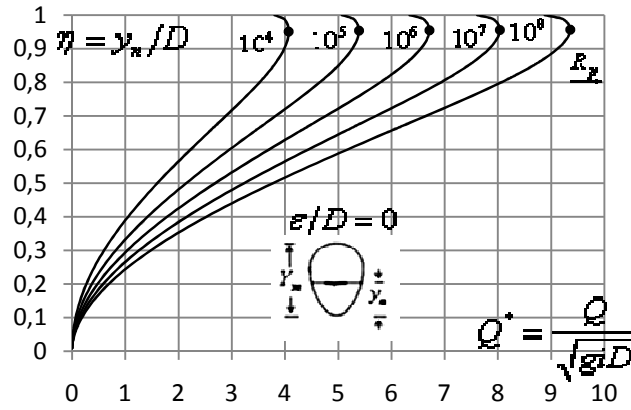
$$Q = -4\sqrt{2} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(A_1/P_1)} + \frac{0,8519}{(A_1/P_1)^{3/2} R_p} \right) \quad (3.83.I)$$

En introduisant Q^* donnée par (2.72), la relation (3.83.I) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

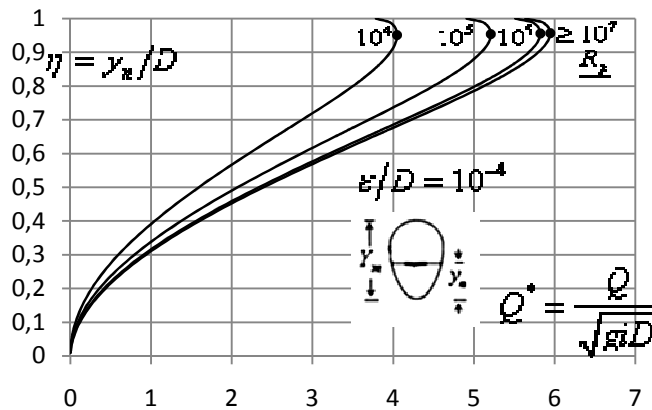
$$Q^* = -4\sqrt{2} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(A_1/P_1)} + \frac{0,8519}{(A_1/P_1)^{3/2} R_p} \right) \quad (3.84.I)$$

Rappelons R_p est donné par la relation (3.81.I). La relation (3.84.I) montre que la conductivité Q^* est fonction à la fois de η , de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p à l'état plein.

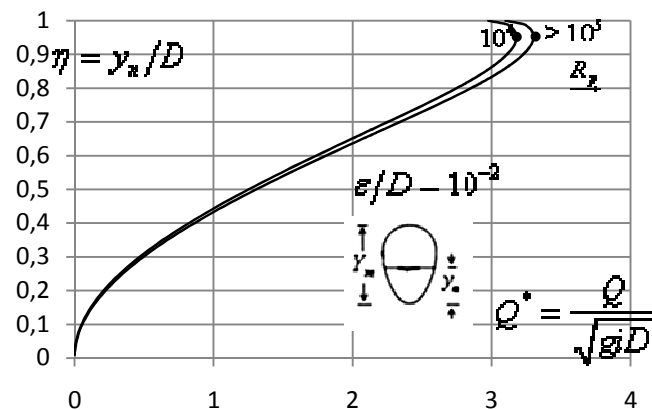
La variation du taux de remplissage η en fonction de la conductivité relative Q^* a été représentée sur la figure 3.12.I (a à c), conformément a la relation (3.84.I).



a)



b)



c)

Figure 3.12.I : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p conformément a la relation (3.84.I).

Nos remarques sont, au vu de la figure 2.12.I (a à c), les mêmes que celles concernant la variation de la conductivité relative Q^* de la conduite circulaire étudiée au chapitre 2.

Le tableau 2 regroupe les valeurs particulières η_0 du taux de remplissage η correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$, calculées selon la relation (3.84.I), pour diverses valeurs de ε/D et de R_p . L'espace grisâtre du tableau 2 correspond au domaine pratique d'utilisation de la rugosité ε/D et du nombre R_p .

Nous pouvons ainsi constater que dans $10^{-5} \leq \varepsilon/D \leq 5.10^{-3}$ et $5.10^4 \leq R_p \leq 5.10^7$, la valeur $\eta_0 = 0,9548$ peut être considérée comme la valeur la plus appropriée pour le calcul du débit Q_{\max} .

Tableau 2 : Valeurs du taux de remplissage η_0 correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$ pour diverses valeurs de la rugosité ε/D et du nombre de Reynolds R_p

| $\varepsilon/D \rightarrow$ | | 0 | 10^{-5} | 5.10^{-5} | 10^{-4} | 5.10^{-4} | 10^{-3} | 5.10^{-3} | 10^{-2} |
|-----------------------------|----------|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------|---------------|
| R_p | 10^4 | 0,9508 | 0,9508 | 0,9509 | 0,9509 | 0,9511 | 0,9513 | 0,9516 | 0,9514 |
| | 5.10^4 | 0,9527 | 0,9527 | 0,9528 | 0,9529 | 0,9534 | 0,9536 | 0,9530 | 0,9523 |
| | 10^5 | 0,9533 | 0,9533 | 0,9536 | 0,9537 | 0,9542 | 0,9542 | 0,9533 | 0,9525 |
| | 5.10^5 | 0,9545 | 0,9547 | 0,9552 | 0,9553 | 0,9552 | 0,9549 | 0,9535 | 0,9526 |
| | 10^6 | 0,9548 | 0,9553 | 0,9557 | 0,9558 | 0,9554 | 0,9550 | 0,9535 | 0,9526 |
| | 5.10^6 | 0,9556 | 0,9565 | 0,9565 | 0,9563 | 0,9555 | 0,9550 | 0,9535 | 0,9526 |
| | 10^7 | 0,9559 | 0,9569 | 0,9566 | 0,9564 | 0,9555 | 0,9551 | 0,9535 | 0,9526 |
| | 5.10^7 | 0,9565 | 0,9573 | 0,9566 | 0,9565 | 0,9555 | 0,9551 | 0,9535 | 0,9526 |
| | 10^8 | 0,9567 | 0,9573 | 0,9569 | 0,9565 | 0,9555 | 0,9551 | 0,9535 | 0,9526 |

On détermine pour cette valeur moyenne, l'expression de Q_{\max} d'une conduite ovoïdale normale à écoulement uniforme, lorsque les paramètres tel que D , J , ε et ν du liquide sont connus. Il suffit d'introduire $\eta_0 = 0,9548$ dans (3.52.I) et (3.45.I) pour trouver A_1 et P_1 et de calculer Q_{\max} par (3.83.I).

Pour $2/3 \leq \eta_0 = 0,9548 \leq 1$, les paramètres A_1 et P_1 figurant au tableau 1 prennent les valeurs :

$$A_1 = \lambda(\eta = 0,9548) = 0,50021267 \qquad P_1 = \tau(\eta = 0,9548) = 2,29207119$$

La relation (3.83.I) donne alors :

$$Q_{\max} = -1,322 \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,23} + \frac{8,356}{R_p} \right) \qquad (3.85.I)$$

La conductivité relative maximale est alors :

$$Q_{\max}^* = -1,322 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,23} + \frac{8,356}{R_p} \right) \qquad (3.86.I)$$

Nous obtenons l'expression du débit volume maximal en fonction de ε/D et R_p à l'état plein.

3.4.4. Relation approchée de la profondeur normale :

Comme dans le cas de la conduite circulaire, cette partie de l'étude vise à établir une relation approchée susceptible d'évaluer y_n de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance variable. Pour cela, on a eu recours aux relations (3.83.I) et (3.85.I). Afin de déterminer la loi $\eta(Q/Q_{\max})$, il a été nécessaire d'étudier la variation de $\eta(Q/Q_{\max})$ pour diverses valeurs de ε/D et R_p , en s'appuyant sur les relations (3.83.I) et (3.85.I). Après un travail assez laborieux, nos calculs ont pu montrer que, le taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max})$ de la conduite pouvait s'exprimer par la relation :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,947}\eta\right) = 0,81\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,509} \quad (3.87.I)$$

La profondeur normale s'exprime alors par : $y_n = \eta D$

La relation (3.87.I) est valable dans la gamme pratique du taux compris $0,14 \leq \eta \leq 0,80$ avec une erreur relative de 0,50%. Elle est applicable pour $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,01$ et $5.10^4 \leq R_p \leq 10^8$.

L'exemple n° 7 montre les étapes de calcul pour la détermination de y_n par application de (3.87.I).

3.8 Ecoulement critique

La conductivité relative correspond à l'état critique est donnée par la relation (2.83) $Q_c^* = \sqrt{A_{1c}^3/e_{1c}} \cdot A_{1c}$ et e_{1c} (l'indice "c" se réfère l'état critique) sont définis selon le taux η dans le tableau 1 de la conduite ovoïdale normale. La relation (2.83) montre clairement que η_c est implicite vis-à-vis de Q_c^* .

Proposons une relation approchée fiable au calcul explicitement de η_c et donc de la profondeur critique y_c , pour cela étudions la variation $\eta_c(Q_c^*)$ en représentons la relation (2.83) sur le graphe ci-dessous :

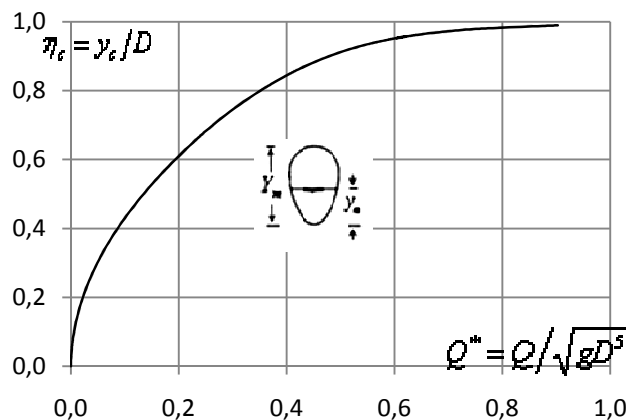


Figure 3.13.I : Variation du taux critique η_c en fonction de Q^* . Courbe tracée selon la relation (2.83).

Ce graphe montre que η_c augmente avec Q^* . En outre, lorsque $Q^* \rightarrow \infty$, $\eta_c \rightarrow 1$.

Les calculs menés, pour le cas de la conduite ovoïdale normale, dans une large gamme pratique $0,07 \leq \eta_c \leq 0,83$, ont permis de trouver une relation fiable explicite qui approche le mieux la relation implicite générale (2.83), soit :

$$\sinh\left(\frac{\pi}{4,5}\eta_c\right) = 1,014Q^{*0,521} \quad (3.88.I)$$

L'écart relatif maximal du à la relation approchée (3.88.I) est inférieur à 0,48% :

Exemple d'application 7

Reprenons les données de l'exercice du collecteur circulaire étudié au chapitre 2 pour le cas de la conduite ovoïdale normale : $D = 1,5 \text{ m}$, $J = 0,0005$ et $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ $\nu = 10^{-6}$.

- i. A quelle hauteur de la génératrice inférieure, le déversoir doit être arasé pour limiter le débit vers la station d'épuration à la valeur donnée de $Q = 0,65 \text{ m}^3/\text{s}$.
- ii. Quelle est la nature de l'écoulement en comparant y_n et la hauteur critique.

Solution :

1. Déterminons la capacité maximale du collecteur et cherchons la cote à laquelle doit être arasé le déversoir d'orage pour ne laisser passer que le débit donné.

- Le nombre de Reynolds R_p est selon la relation (3.81.I):

$$R_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 494069$$

- Le débit maximal est selon la relation (3.85.I)

$$Q_{\max} = -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,23} + \frac{8,356}{R_p} \right)$$

$$= -1,322 \sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,5^5} \times \log \left(\frac{2 \cdot 10^{-5}/1,5}{3,23} + \frac{8,356}{494069} \right) = 1,19327657 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Selon la relation (3.87.I), le taux de remplissage est égal :

$$\eta = \frac{2,947}{\pi} \sin^{-1} \left[0,81 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,509} \right] = \frac{2,947}{\pi} \sin^{-1} \left[0,81 \times \left(\frac{0,65}{1,19327657} \right)^{0,509} \right]$$

$$= 0,59728109 \cong 0,6$$

La profondeur normale recherchée est $y_n = \eta D = 0,59728109 \times 1,5 = 0,89592164 \text{ m}$.

C'est à dire la cote du déversoir doit être à 0,9 m de la génératrice inférieure du collecteur.

Vérifions nos calculs, en déterminons le débit volume par la formule générale (1.186):

Pour le taux obtenu $\eta = 0,59728109$, les paramètres A_1 et P_1 prennent respectivement les valeurs :

$$A_1(\eta = 0,59728109) = 0,28978036 \quad P_1(\eta = 0,59728109) = 1,45721789$$

- l'aire de la section mouillée est selon (2.11) :

$$A = D^2 A_1 = 1,5^2 \times 0,28978036 = 0,65200581 \text{ m}^2$$

- le rayon hydraulique est en vertu de (2.18) :

$$R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 1,5 \times \frac{0,28978036}{1,45721789} = 0,29828795 \text{ m}$$

- le nombre de Reynolds est selon (1.187) :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 0,29828795^3}}{10^{-6}} = 516343$$

- le débit volume serait donc selon la relation (1.186) :

$$\begin{aligned} Q &= -4\sqrt{2g} A \sqrt{JR_h} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,65200581 \times \sqrt{0,29828795 \times 0,0005} \times \log \left(\frac{0,00002}{14,8 \times 0,29828795} + \frac{10,04}{516343} \right) \\ &= 0,65182172 \cong 0,65 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui de l'énoncé est égal à 0,28% seulement.

3. la nature de l'écoulement peut être connue en déterminant y_c en application de (3.88.I) :

Selon la relation (2.82), le débit relatif Q_c^* est :

$$Q_c^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} = \frac{0,65}{\sqrt{9,81 \times 1,5^5}} = 0,07530966$$

$$y_c = \frac{4,5}{\pi} D \sinh^{-1}(1,014 Q_c^{*0,521}) = \frac{4,5}{\pi} \times 1,5 \times \sinh^{-1}(1,014 \times 0,07530966^{0,521}) = 0,55992071 \text{ m}$$

Nous pouvons ainsi déduire que l'écoulement est de nature fluviale puisque $y_n = 0,9 > y_c$.

CONDUITE EN FORME DE FER A CHEVAL (II)

La conduite en forme de fer à cheval considérée dans la présente étude est dessinée sur la figure 3.1.II. Elle est caractérisée par sa hauteur $Y_m = D$ et la dimension y de l'arc de cercle formant son radier.

Caractéristiques géométriques de la conduite.

La hauteur Y_m correspond au diamètre D du cercle (C_0) de centre O .

Sa forme est définie par le demi-cercle $EOBCE$, les arcs \widehat{EF} , \widehat{AB} et l'arc \widehat{FGA} .

- vi. Le demi-cercle $EOBCE$ (C_0) a un centre O et un diamètre D .
- vii. L'arc de cercle \widehat{EF} est déterminé par le cercle (C_1) de centre B et de diamètre $2D$.
- viii. L'arc de cercle \widehat{BA} est déterminé par le cercle (C_2) de centre E et de diamètre $2D$.
- ix. L'arc de cercle \widehat{FGA} est déterminé par le cercle (C_3) de centre C et de diamètre $2D$.

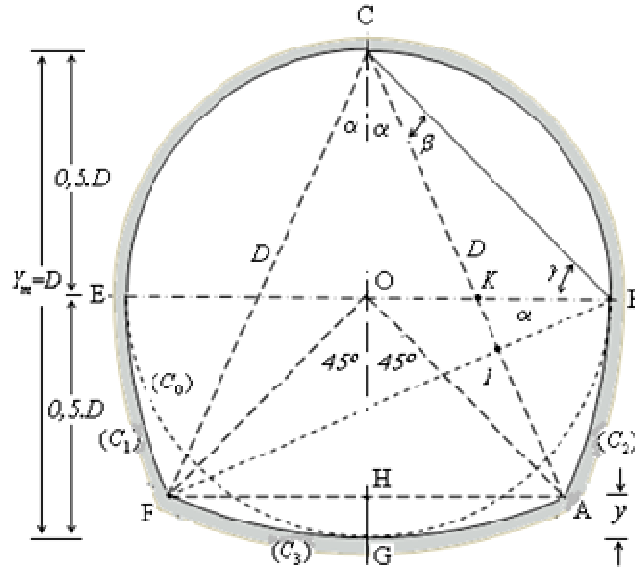


Figure 3.1.II : Schéma de définition de la conduite en forme de fer à cheval.

Nous pouvons faire, sur la figure 3.1.I, les remarques suivantes :

- i. Dans le triangle ΔCOB on a :
 - $\overline{CB} = \sqrt{2}D/2 = 0,70710678D$
 - L'angle $\gamma = 45^\circ$
 - $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$

Soit : $\alpha + \beta = 45^\circ$

Les triangles ΔCOK et ΔKIB permettent de dire que le triangle ΔCIB est droit, et l'angle $CIB=90^\circ$, alors :

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{CI}}{\overline{CB}} = \frac{2\overline{CI}}{D\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

Dans le triangle $\triangle CIF$, nous pouvons écrire :

$$\cos(2\alpha) = \frac{\overline{CI}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{CI}}{D}$$

ii. Ainsi :

$$\cos(2\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

La valeur de α correspondante est donc égale à :

$$\alpha = 24,295189^\circ, \text{ ou bien } \alpha = 0,42403104 \text{ radian}$$

iii. Dans le triangle $\triangle CFH$ nous avons :

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{FH}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{FH}}{D}$$

Soit :

$$\overline{FH} = D \sin(\alpha) = D \sin(24,295189) = 0,41143783D$$

Ainsi :

$$\overline{FA} = 2\overline{FH} = 2 \times 0,41143783D = 0,82287566D$$

iv. Dans le triangle $\triangle OFH$ nous pouvons écrire :

$$\overline{FH} = \overline{OH} = 0,41143783D$$

v. La dimension linéaire y est :

$$\overline{HG} = y = \overline{OG} - \overline{OH} = 0,5D - 0,41143783D$$

Soit :

$$y = 0,08856217D$$

vi. **La longueur de l'arc de cercle \widehat{FA}**

$$\widehat{FA} = 2\alpha D = 2 \times 0,42403104D = 0,84806208D$$

vii. **Les longueurs $\overline{EG} = \overline{FG} = \overline{GA} = \overline{AB}$ mènent à écrire que la longueur de l'arc \widehat{EF} est :**

$$\widehat{EF} = \alpha D = 0,42403104D$$

3.9 Eléments hydrauliques de la section transversale.

Les caractéristiques, telle que l'aire de la section mouillée A , le périmètre mouillé P , le rayon hydraulique R_h ou la largeur du plan d'eau e dépendent du taux de remplissage $\eta = y_n/D$ ou y_n est la profondeur normale de l'écoulement. Ces caractéristiques s'expriment par différentes relations selon le lieu géométrique de l'écoulement. La figure 3.2.II montre trois lieux géométriques que peut occuper l'écoulement, selon la valeur du taux de remplissage :

- $\eta \leq 0,08856217$, l'écoulement de plan \overline{ga} , se situe dans la partie circulaire basse de la conduite ou $y_n \leq y$

- $0,08856217 \leq \eta \leq 0,5$, l'écoulement de plan \overline{fb} , se situe dans l'espace délimité par les arcs de cercle \widehat{EF} et \widehat{AB} ou $y \leq y_n \leq D/2$
- $0,5 \leq \eta \leq 1$, l'écoulement de plan \overline{ec} , se situe dans la partie circulaire la plus haute de la conduite ou $D/2 \leq y_n \leq D/D = 1$.

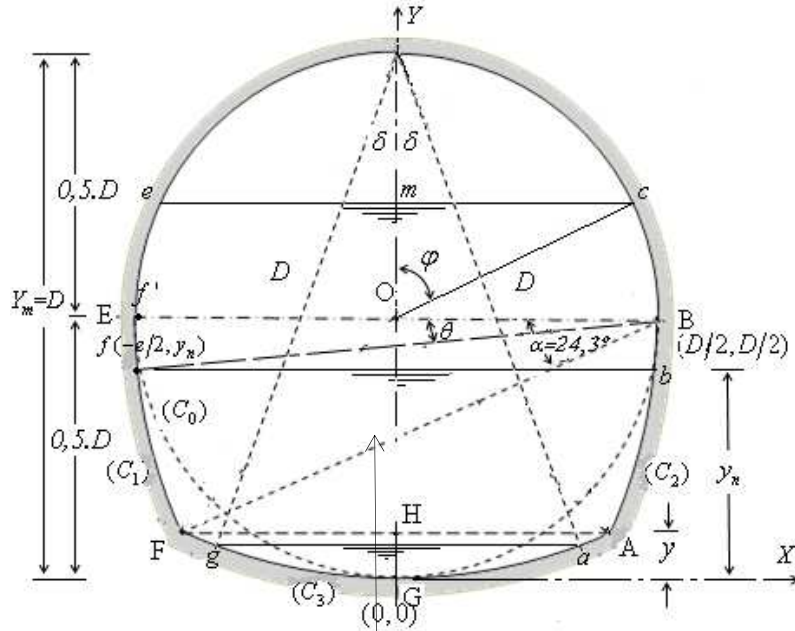


Figure 3.2.II. Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite en forme de fer à cheval.

4) $\eta \leq 0,08856217$

g. Largeur du plan d'eau :

Lorsque $\eta \leq 0,08856217$, la largeur du plan d'eau e correspond à la corde \overline{ag} . Les points a et g appartiennent au cercle (C_3) , de centre C et de diamètre $2D$. Ainsi :

$$e = 2D \sin(\delta) = 2D \sqrt{1 - \cos^2(\delta)}$$

Où l'angle δ est le demi angle au centre, tel que :

$$\cos(\delta) = \frac{D - y_n}{D} = 1 - \eta$$

$$\delta = \cos^{-1}(1 - \eta)$$

$$\sin(\delta) = \sqrt{1 - \cos^2(\delta)} = \sqrt{\eta(2 - \eta)}$$

Il vient alors :

$$e = 2D \sqrt{\eta(2 - \eta)} \quad (3.1.II)$$

h. Périmètre mouillé

Le périmètre mouillé P correspond à la longueur de l'arc \widehat{AGg} , appartenant au cercle (C_3) , de centre C et de diamètre $2D$. Ainsi $P = 2\delta D$ et en utilisant l'expression de δ on a :

$$P = 2D \cos^{-1}(1 - \eta) \quad (3.2.II)$$

Définissons la fonction :

$$\sigma(n) = \cos^{-1}(1-\eta) \quad (3.3.II)$$

La relation (3.2.II) devient :

$$P = 2D\sigma(\eta) \quad (3.4.II)$$

i. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspond à l'aire du segment circulaire $aGga$, appartenant au cercle (C_3) , de centre C et de diamètre $2D$. Ainsi :

$$A = \frac{1}{2}D^2[2\delta - \sin(2\delta)] = D^2[\delta - \sin(\delta)\cos(\delta)]$$

Soit :

$$A = D^2[\cos^{-1}(1-\eta) - (1-\eta)\sqrt{\eta(2-\eta)}] \quad (3.5.II)$$

Définissons la fonction :

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{(1-\eta)\sqrt{\eta(2-\eta)}}{\cos^{-1}(1-\eta)} \quad (3.6.II)$$

La relation (3.5.II) permet d'écrire :

$$A = D^2\sigma(\eta)\varphi(\eta) \quad (3.7.II)$$

j. Rayon hydraulique

Les relations (3.4.II) et (3.7.II) permettent de déduire que le rayon hydraulique, $R_h = A/P$ est :

$$R_h = \frac{D}{2}\varphi(\eta) \quad (3.8.II)$$

$$0,08856217 \leq \eta \leq 0,5$$

a. Largeur du plan d'eau

Lorsque $0,08856217 \leq \eta \leq 0,5$, la largeur du plan d'eau e correspond à \overline{fb} (figure 3.2.II). Le point f appartient au cercle (C_1) de centre de centre B et de rayon D . L'équation de ce cercle est :

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = D^2 \quad (3.9.II)$$

Où x_0 et y_0 sont les coordonnées du point B . Dans le système d'axes XGY de la figure 3.2.II, le point B a pour coordonnées $x_0 = D/2$ et $y_0 = D/2$. Dans le même système d'axes, le point f a pour coordonnées $x = -e/2$ et $y = y_n$. La relation (3.9.II) s'écrit alors :

$$\left(\frac{e}{2} + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y_n - \frac{D}{2}\right)^2 = D^2$$

En divisant les deux membres de cette équation par D^2 , on trouve la largeur e après calcul :

$$e = 2D \left[\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2} - \frac{1}{2} \right] \quad (3.10.II)$$

b. Périmètre mouillé

Lorsque $0,08856217 \leq \eta \leq 0,5$, le périmètre mouillé P correspond à deux fois la longueur de l'arc \widehat{fF} , à laquelle il faut rajouter la longueur de l'arc \widehat{FA} . La longueur de l'arc \widehat{fF} est égale à la différence

des longueurs des arcs \widehat{EF} et \widehat{Ef} . La longueur de l'arc $\widehat{FA} = 0,84806208D$ et celle de l'arc $\widehat{EF} = 0,4203104D$ (étapes vi et vii des caractéristiques géométriques).

La longueur de l'arc \widehat{Ef} est par suite $\widehat{Ef} = D\theta$

$$\text{D'autre part : } \sin(\theta) = \frac{\frac{D}{2} - y_n}{D}$$

$$\sin(\theta) = \frac{1}{2} - \eta \quad (3.11.II)$$

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} - \eta\right) \quad (3.12.II)$$

L'angle θ ainsi défini varie entre 0° et $24,2951890^\circ$, valeur correspondant à celle de l'angle α .

Soit f' la projection de f sur BE, nous pouvons écrire :

$$\cos(\theta) = \frac{\frac{e}{2} + \frac{D}{2}}{D}$$

Soit en tenant compte de la relation (3.10.II)

$$\cos(\theta) = \frac{e}{2D} + \frac{1}{2} = \sqrt{\left[1 - \left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2\right]} \quad (3.13.II)$$

La longueur \widehat{Ef} est en tenant compte de (3.12.II) :

$$\widehat{Ef} = D \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} - \eta\right)$$

La longueur \widehat{fF} devient :

$$\widehat{fF} = \widehat{EF} - \widehat{Ef} = 0,42403104D - D \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} - \eta\right) = D \left[0,42403104 - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} - \eta\right)\right]$$

Le périmètre mouillé est donc égal :

$$P = 2\widehat{fF} - \widehat{FGA}$$

Soit :

$$P = 2D \left[0,42403104 - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} - \eta\right)\right] + 0,84806208D$$

Ou bien :

$$P = D \left[1,69612416 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} - \eta\right)\right] \quad (3.14.II)$$

Définissons la fonction :

$$\vartheta(\eta) = 1,69612416 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{2} - \eta\right) \quad (3.15.II)$$

Le périmètre sera égal à :

$$P = D\vartheta(\eta) \quad (3.16.II)$$

c. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspondant à $0,08856217 \leq \eta \leq 0,5$ est définie par l'espace $fFGAb$ de la figure 3.2.II. L'aire de la section mouillée A peut être décomposée en trois aires qui sont :

- $2 A_0$, où A_0 est l'aire de la section du segment circulaire fFf .
- A_1 , l'aire du trapèze $fbAF$ dont les caractéristiques sont :
 - Grande base = largeur du plan d'eau = e , définie par la relation (3.10.II)
 - Petite base = $\overline{FA} = 0.82287566D$ déterminée à l'étape *iii* des caractéristiques géométriques.
 - Hauteur $h = (y_n - HG) = y_n - 0.08856217D$
- A_2 , l'aire du segment circulaire $FGAF$ qui s'exprime par la relation (3.5.II) pour $\eta = 0,08856217$.

L'aire de la section A recherchée est donc :

$$A = 2A_0 + A_1 + A_2$$

L'aire du segment circulaire fFf appartient au cercle (C_1) de centre B , de rayon D et d'angle au centre $(\alpha - \theta)$. Nous pouvons ainsi écrire que, pour α et θ exprimés en radian :

$$A_0 = \frac{1}{2} D^2 [(\alpha - \theta) - \sin(\alpha - \theta)]$$

Ou bien :

$$2A_0 = D^2 [(\alpha - \theta) - \sin(\alpha - \theta)] \quad (3.17.II)$$

La quantité $\sin(\alpha - \theta)$ s'écrit :

$$\sin(\alpha - \theta) = \sin(\alpha) \cos(\theta) - \cos(\alpha) \sin(\theta) \quad (3.18.II)$$

L'angle $\alpha = 0,42403104$ radian (étape *ii* des caractéristiques géométriques).

Ceci permet d'écrire que :

$$\sin(\alpha) = \sin(0,42403104) = 0,41143783$$

$$\cos(\alpha) = \cos(0,42403104) = 0,91143783$$

En tenant compte des relations (3.11.II) et (3.13.II), la relation (3.18.II) s'écrit alors :

$$\sin(\alpha - \theta) = 0.41143783 \sqrt{1 - (\frac{1}{2} - \eta)^2} - 0.91143783 (\frac{1}{2} - \eta) \quad (3.19.II)$$

Avec $\alpha = 0,42403104$ radian et en ayant recours aux relations (3.12.II) et (3.19.II), la relation (3.17.II) devient :

$$2A_0 = D^2 [0.42403104 - \sin^{-1}(\frac{1}{2} - \eta) - 0.41143783 \sqrt{1 - (\frac{1}{2} - \eta)^2} + 0.91143783 (\frac{1}{2} - \eta)]$$

Ou bien :

$$2A_0 = D^2 [0.87974995 - \sin^{-1}(\frac{1}{2} - \eta) - 0.41143783 \sqrt{1 - (\frac{1}{2} - \eta)^2} - 0.91143783 \eta] \quad (3.20.II)$$

L'aire de la section mouillée A_1 du trapèze $fFAB$ s'écrit :

$$A_1 = \frac{(e + 0.84806208D)}{2} (y_n - 0.08856217D) \quad (3.21.II)$$

Ou bien :

$$A_1 = D^2 \left[\frac{e}{2D} + 0.41143783 \right] (\eta - 0.8856217) \quad (3.22.II)$$

En tenant compte de la relation (3.10.II), la relation (3.22.II) devient :

$$A_1 = D^2 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2} - \frac{1}{2} + 0.41143783 \right] (\eta - 0.8856217) \quad (3.23.II)$$

Après réarrangements, la relation (3.23.II) mène à :

$$A_1 = D^2 \left[0.00784325 + (\eta - 0.8856217) \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2} - 0.08856217\eta \right] \quad (3.24.II)$$

L'aire A_2 du segment circulaire $FAGF$ est donnée par la relation (3.5.II) pour $\eta=0,008856217$, soit:

$$A_2 = 0.04903104D^2 \quad (3.25.II)$$

Finalement et compte tenu des relations (3.20.II), (3.24.II) et (3.25.II), l'aire recherchée est égale après calcul, simplification $A = 2A_0 + A_1 + A_2$:

$$A = D^2 \left[0.93662424 - \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} - \eta\right) - \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2} - \eta \right] \quad (3.26.II)$$

Définissons, par souci de simplification d'écriture, la fonction :

$$\zeta(\eta) = 0.93662424 - \sin^{-1} \left(\frac{1}{2} - \eta\right) - \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2} - \eta\right)^2} - \eta \quad (3.27.II)$$

La relation (3.26.II) s'écrit alors :

$$A = \zeta(\eta) D^2 \quad (3.28.II)$$

i. Rayon hydraulique

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$ s'écrit, en ayant recours aux relations (3.16.II) et (3.28.II) :

$$R_h = A/P = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \quad (3.29.II)$$

3.9.1.1.1 $0,5 \leq \eta \leq 1$

j. Largeur du plan d'eau

Lorsque $0,5 \leq \eta \leq 1$, la largeur du plan d'eau e correspond à la longueur du segment \overline{ec} . Dans le triangle droit ΔOcm , nous pouvons écrire que :

$$mc = e/2 \quad (3.30.II)$$

$$om = y_n - D/2 \quad (3.31.II)$$

$$\overline{mc}^2 + \overline{om}^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \quad (3.32.II)$$

Les relations (3.30.II), (3.31.II) et (3.32.II) mènent à écrire que :

$$(e/2)^2 + (y_n - D/2)^2 = (D/2)^2 \quad (3.33.II)$$

Ou bien en remplaçant y_n par ηD on a après calcul :

$$(e/2)^2 = D^2(1 - \eta)\eta \quad (3.34.II)$$

Ainsi, la largeur du plan d'eau est :

$$e = 2D\sqrt{\eta(1-\eta)} \quad (3.35.II)$$

k. Périmètre mouillé

Pour $0,5 \leq \eta \leq 1$, le périmètre mouillé correspond à deux fois la longueur de l'arc \widehat{eE} à laquelle il faut rajouter la longueur \widehat{EFGAB} . Celle-ci s'obtient par la relation (3.14.II) pour $\eta = 0,5$. La longueur $2\widehat{eE}$ est quant à elle égale à la différence des longueurs des arcs \widehat{ECB} et \widehat{ec} .

Désignons par P_0 la longueur \widehat{EFGAB} . Pour $\eta = 0,5$, la relation (3.14.II) donne :

$$P_0 = 1.69612416D \quad (3.36.II)$$

Désignons par P_1 la longueur de l'arc \widehat{ECB} . Celle-ci correspond au demi périmètre du cercle (C_0) centre O et de rayon $D/2$. Ainsi :

$$P_1 = \pi D/2 \quad (3.37.II)$$

Désignons également par P_2 la longueur de l'arc \widehat{ec} . Nous pouvons alors écrire que :

$$P_2 = 2\varphi \frac{D}{2} = \varphi D \quad (3.38.II)$$

Or, dans le triangle ΔOcm , nous pouvons écrire que :

$$\cos(\varphi) = \frac{(y_n - D/2)}{D/2}$$

Soit :

$$\cos(\varphi) = (2\eta - 1) \quad (3.39.II)$$

Notons également que le triangle ΔOcm permet d'écrire :

$$\sin(\varphi) = \frac{e/2}{D/2} = \frac{e}{D} \quad (3.40.II)$$

Tenant compte de la relation (3.35.II), la relation (3.40.II) devient :

$$\sin(\varphi) = 2\sqrt{\eta(1-\eta)} \quad (3.41.II)$$

Soit :

$$\varphi = \sin^{-1}(2\sqrt{\eta(1-\eta)}) \quad (3.42.II)$$

Tenant compte de (3.42.II), la relation (3.38.II) s'écrit :

$$P_2 = D \sin^{-1} \left[2\sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \quad (3.43.II)$$

Le périmètre $P = P_0 + P_1 - P_2$ recherché est, en ayant recours à (3.36.II), (3.37.II) et (3.43.II) :

$$P = D \left\{ 1,69612416 + \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left[2\sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \right\}$$

Ou bien, plus simplement :

$$P = D \left\{ 3,26692049 - \sin^{-1} \left[2\sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \right\} \quad (3.44.II)$$

Définissons la fonction :

$$\tau(\eta) = 3,26692049 - \sin^{-1} \left[2\sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \quad (3.45.II)$$

La relation (3.44.II) s'écrit alors :

$$P = D\tau(\eta) \quad (3.46.II)$$

1. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A , dans le cas où $0,5 \leq \eta \leq 1$, correspond à l'espace $ecBAFEe$ de la figure 3.2.II. L'aire de la section mouillée A est la somme des aires $EBAF$ et $ecBE$.

Désignons par A_0 l'aire de $EBAF$. Cette aire est donnée par la relation (3.26.II) pour $\eta = 0,5$, soit :

$$A_0 = 0,43662424D^2 \quad (3.47.II)$$

Désignons également par A_1 l'aire de la section mouillée du segment circulaire eCc . Ce segment appartient au cercle de centre O et de rayon $D/2$. Nous pouvons alors écrire que, pour φ en radian :

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2} \right)^2 [2\varphi - \sin(2\varphi)]$$

Soit :

$$A_1 = D^2 \left[\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{4}\sin(\varphi)\cos(\varphi) \right] \quad (3.48.II)$$

Tenant compte des relations (3.39.II) et (3.41.II), la relation (3.48.II) s'écrit :

$$A_1 = D^2 \left[\frac{1}{4}\cos^{-1}(2\eta-1) - \frac{1}{2}(2\eta-1)\sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \quad (3.49.II)$$

Désignons aussi par A_2 l'aire du demi-cercle $ECBE$, de rayon $D/2$. Il vient que :

$$A_2 = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{8}D^2 \quad (3.50.II)$$

L'aire $A = A_0 + (A_2 - A_1)$ recherchée est, en ayant recours aux relations (3.47.II), (3.49.II) et (3.50.II) :

$$A = D^2 \left[0,82932333 - \frac{1}{4}\cos^{-1}(2\eta-1) + \frac{1}{2}(2\eta-1)\sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \quad (3.51.II)$$

Définissons la fonction :

$$\lambda(\eta) = 0,82932333 - \frac{1}{4}\cos^{-1}(2\eta-1) + \frac{1}{2}(2\eta-1)\sqrt{\eta(1-\eta)} \quad (3.52.II)$$

La relation (3.51.II) s'écrit alors plus simplement :

$$A = D^2\lambda(\eta) \quad (3.53.II)$$

Pour l'état plein ($\eta = 1$), pour la conduite en forme de fer à cheval, la relation (3.51.II) mène à écrire :

$$A_p = 0,82932333D^2 \quad (3.54.II)$$

L'aire de la conduite circulaire pleine de diamètre D est égale à $A_{p(c)} = \pi D^2/4$.

Par suite, nous pouvons déduire que :

$$\frac{A_{p(FAC)}}{A_{p(e)}} (\%) = \frac{0,82932333D^2}{\pi D^2/4} \times 100 \cong 106\% \quad (3.55.II)$$

La conduite en forme de fer à cheval occupe 106% de la surface de la conduite circulaire.

m. Rayon hydraulique

Lorsque $0,5 \leq \eta \leq 1$, le rayon hydraulique s'écrit, compte tenu des relations (3.53.II) et (3.46.II), par :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \quad (3.56.II)$$

On choisira dans notre étude, pour une conduite en fer à cheval fermée, la dimension linéaire a , figurant dans les relations (1.41), (1.42), (1.43) et (1.44), le diamètre caractéristique de la conduite D . Ainsi, nous avons exprimé dans le tableau ci-dessous les fonctions $f(\eta)$ et les paramètres adimensionnels A_1, P_1, R_{h1} et e_1 selon le taux de remplissage $\eta = y_n/D$:

Tableau n°1 des paramètres adimensionnels

| | Expressions des fonctions de η | | | A l'état plein $\eta = 1$ |
|---------------------|---|---|-------------------------------------|------------------------------|
| $\sigma(\eta) =$ | $\cos^{-1}(1-\eta)$ | | | |
| $\varphi(\eta) =$ | $1 - \frac{(1-\eta)\sqrt{\eta(2-\eta)}}{\cos^{-1}(1-\eta)}$ | | | |
| $\vartheta(\eta) =$ | $1,69612416 - 2 \sin^{-1}(\frac{1}{2}-\eta)$ | | | |
| $\zeta(\eta) =$ | $0,93662424 - \sin^{-1}(\frac{1}{2}-\eta) - (\frac{1}{2}-\eta)\sqrt{1-(\frac{1}{2}-\eta)^2} - \eta$ | | | |
| $\tau(\eta) =$ | $3,26692049 - \sin^{-1}\left[2\sqrt{\eta(1-\eta)}\right]$ | | | 3,26692049 |
| $\lambda(\eta) =$ | $0,82932333 - \frac{1}{4} \cos^{-1}(2\eta-1) + \frac{1}{2}(2\eta-1)\sqrt{\eta(1-\eta)}$ | | | 0,82932333 |
| Par.dim | $\eta \leq 0,08856217$ | $0,08856217 \leq \eta \leq 0,5$ | $0,5 \leq \eta \leq 1$ | |
| e_1 | $2\sqrt{\eta(2-\eta)}$ | $2\left[\sqrt{1-(\frac{1}{2}-\eta)^2} - \frac{1}{2}\right]$ | $2\sqrt{\eta(1-\eta)}$ | 0 |
| A_1 | $A_1 = \sigma(\eta)\varphi(\eta)$ | $A_1 = \zeta(\eta)$ | $A_1 = \lambda(\eta)$ | $A_{1p} = 0,82932333$ |
| P_1 | $P_1 = 2\sigma(\eta)$ | $P_1 = \vartheta(\eta)$ | $P_1 = \tau(\eta)$ | $P_{1p} = 3,26692049$ |
| R_{h1} | $R_{h1} = \varphi(\eta)/2$ | $R_{h1} = \zeta(\eta)/\vartheta(\eta)$ | $R_{h1} = \lambda(\eta)/\tau(\eta)$ | $R_{h1p} = 0,25385476$ |

Variation des caractéristiques de l'écoulement

La caractéristique adimensionnelle de l'écoulement, en particulier le rayon hydraulique relatif $R_h/D = R_{h1}$ est représenté sur les figures 3 dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$. R_h/D passe par un maximum pour le taux $\eta = 0,811$. En appliquant (3.56.II) ou $A_1 = \lambda(\eta = 0,811)$ et $P_1 = \tau(\eta = 0,811)$, on a :

$$R_{h,\max} = 0,30675059D$$

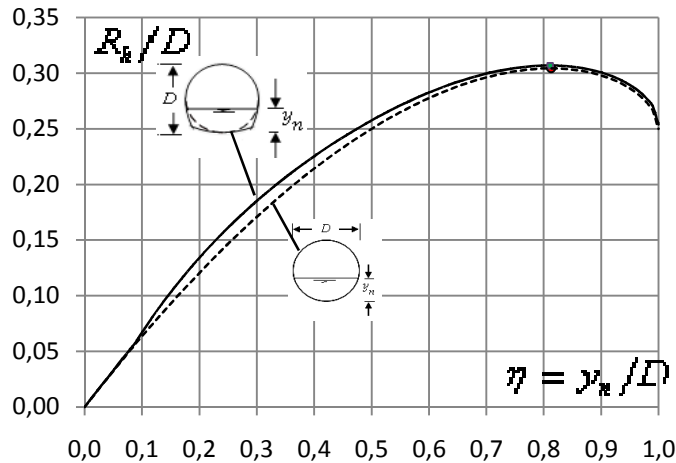


Figure 3.3.II : Variation du rayon hydraulique relatif R_h/D en fonction du taux η .

(●) Taux de remplissage correspondant à $R_{h,\max}/D$.

3.2. Ecoulement à coefficient de résistance de Chézy invariable.

6.2.1. Variation de la conductivité relative $\eta(Q^*)$ pour C constant.

Rappelons que selon Chézy la conductivité relative s'exprime par la relation (2.25). En faisant varier A_1 et P_1 , selon le taux η , La conductivité Q^* a été représentée sur la fig.3.4.II, dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$. La conductivité relative Q^* augmente avec l'accroissement de η , jusqu'à un maximum $\eta = 0,9492$, puis diminue au-delà de ce maximum.

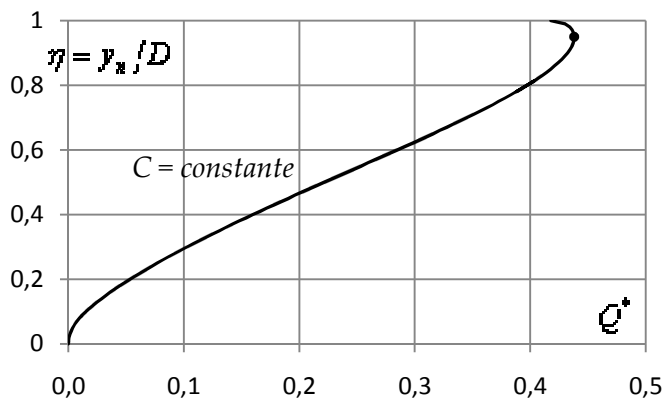


Figure 3.4.II : Variation de la conductivité Q^* en fonction du taux η , tracée selon la relation (2.25).

(●) - $Q_{\max}^* = 0,4382$ pour $\eta = 0,9492$

A l'état plein, on a, en introduisant $A_{1p} = 0,82932333$ et $P_{1p} = 3,26692049$ dans la relation (2.25) :

$$Q_p^* = 0,41784628 = \text{constante} \quad (3.57.II)$$

En outre la conductivité maximale Q_{\max}^* correspondant à $\eta = 0,9492$, est en application de la relation (2.25) et avec les valeurs $A_1 = \lambda(\eta=0,9492) = 0,81429182$ et $P_1 = \tau(\eta=0,9492) = 2,81223682$:

$$Q_{\max}^* = 0,43817154 \quad (3.58.II)$$

On peut tirer des relations (3.57.II) et (3.58.II) que $Q_{\max} = 1,0486429Q_p$

En remplaçant A_1 et P_1 par selon l'intervalle de η , La conductivité relative Q^* est telle que :

- $0 < Q^* \leq 0,01178943$, correspondant à $\eta \leq 0,08856217$
- $0,01178943 \leq Q^* \leq 0,22153021$, correspondant à $0,08856217 \leq \eta \leq 0,5$
- $0,22153021 \leq Q^* \leq 0,41784628$, correspondant à $0,5 \leq \eta \leq 1$.

Afin d'évaluer de manière explicite la valeur du taux $\eta(Q^*)$ à partir des paramètres connus du problème C, Q, D , et J , nos calculs ont montré que dans $0,17 \leq \eta \leq 0,86$ correspondant à $0,0405 \leq Q^* \leq 0,4211$ la relation (2.25) peut être remplacée par la relations approchée suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 1,539Q^{*0,594} \quad (3.59.II)$$

L'écart relatif maximal $\Delta\eta/\eta$ occasionné par la relation (3.59.II) est inférieur à 0,48%.

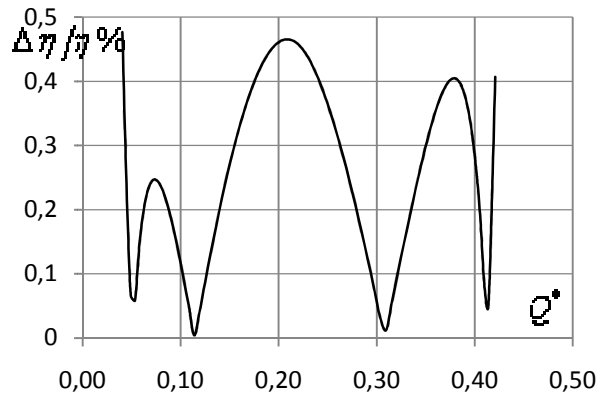


Figure 3.5.II : Ecart $\Delta\eta/\eta$ (%) occasionnés par la relation approchée (3.59.II) sur le calcul du taux η , dans la gamme $0,17 \leq \eta \leq 0,86$ correspondant à $0,0405 \leq Q^* \leq 0,4211$.

6.2.2. Courbe de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ pour C constant.

La courbe de remplissage pour C constant, se traduit par la variation du paramètre de forme $\eta(Q/Q_p)$.

Tenant des relations (2.25), (2.29) et (3.57.II), nous pouvons écrire :

$$\frac{Q}{Q_p} = 2,3932 \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \quad (3.60.II)$$

On peut déduire de la relation (3.59.II) ce qui suit :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 1,539 Q_p^*{}^{0,594} = 1,539 Q_p^{*0,594} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,594}$$

Par ailleurs la relation (3.57.II) donne $Q_p^* = 0,41784628$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 1,539 Q_p^{*0,594} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,594} = 1,539 \times 0,41784628^{0,594} \times \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,594} = 0,916 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,594}$$

Ou bien en utilisant (2.29) on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 0,916 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,594} \tag{3.61.II}$$

La relation (3.61.II) est valable pour $0,17 \leq \eta \leq 0,86$ correspondant à $0,0969 \leq Q/Q_p \leq 1,0078$

L'écart relatif maximal occasionné par cette relation approchée est inférieur à 0,50%.

6.2.3. Relation $\eta(Q/Q_{\max})$ pour C constant

En tenant compte des relations (2.25), (2.32) et (3.58.II) nous pouvons alors écrire :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 2,2822 \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \tag{3.62.II}$$

On peut déduire de la relation (3.59.II) ce qui suit :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 1,539 Q_{\max}^*{}^{0,594} = 1,539 Q_{\max}^{*0,594} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,594}$$

Par ailleurs on sait que selon la relation (3.58.II) : $Q_{\max}^* = 0,43817154$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 1,539 Q_{\max}^{*0,594} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,594} = 1,539 \times 0,43817154^{0,594} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,594} = 0,943 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,594}$$

Ou bien en utilisant (2.32) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 0,943 \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,594} \tag{3.63.II}$$

La relation (3.63.II) est valable pour $0,17 \leq \eta \leq 0,86$ correspondant à $0,09238 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,96104$

L'écart relatif maximal occasionné par cette relation est inférieur à 0,46%.

Exemple d'application 1

Soit à déterminer la profondeur normale dans une conduite en forme de fer à cheval de diamètre

$D = 2,5 \text{ m}$, écoulant un débit $Q = 2,78 \text{ m}^3/\text{s}$ sous une pente $J = 0,0004$. Le coefficient $C = 85 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$.

Solution :

On peut déterminer le problème de trois manières suivantes :

5. Avec la conductivité relative Q^* :

i. Déterminons la conductivité relative par la relation de définition (2.24) :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 J}} = \frac{2,78}{\sqrt{85^2 \times 2,5^5 \times 0,0004}} = 0,16548013 < Q_{\max}^* = 0,4382$$

ii. Q^* se situe dans $0,0405 \leq Q^* \leq 0,4211$, l'application de (3.59.II) permet de trouver le taux η :

$$\eta = \frac{2,3}{\pi} \sin^{-1}(1,539 Q^{*0,594}) = \frac{2,3}{\pi} \times \sin^{-1}(1,539 \times 0,16548013^{0,594}) = 0,40779934 \cong 0,41$$

iii. La profondeur moyenne est déduite :

$$y_n = \eta D = 0,41 \times 2,5 = 1,02 m.$$

6. Avec le taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$

iv. Le rapport $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$ ou $Q_p^* = 0,41784628$ et selon la relation (2.29) on a :

$$Q/Q_p = Q^*/Q_p^* = 0,16548013 / 0,41784628 = 0,39603112$$

iii. Par suite, Q/Q_p appartient à $0,0969 \leq Q/Q_p \leq 1,0078$ et le taux η est régi par (3.61.II) :

$$\eta = \frac{2,3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,916 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,594} \right] = \frac{2,3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,916 \times 0,39603112^{0,594} \right] = 0,40756114 \cong 0,41$$

Il s'agit bien de la valeur de η obtenue au point 1-ii

7. Avec la relation $\eta(Q/Q_{\max})$

v. Le rapport $Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^*$ et $Q_{\max}^* = 0,43817154$. Ainsi :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{Q^*}{Q_{\max}^*} = \frac{0,16548013}{0,43817154} = 0,37766061$$

vi. On obtient alors par application de la relation approchée (3.63.II) :

$$\eta = \frac{2,3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,943 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,594} \right] = \frac{2,3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,943 \times 0,37766061^{0,594} \right] = 0,40794262 \cong 0,41$$

La aussi, la valeur η est bien celle déterminer au point 1-ii et au point 2-ii.

Vérification : Pour le résultat obtenu déterminons le débit volume Q par la formule de Chézy. Pour cela recherchons A et R_h pour un taux de remplissage $\eta = 0,41$. On doit d'abord déterminer A_1 et P_1 , comme $0,08856217 \leq \eta \leq 0,5$ on a selon le tableau des par.dim. :

$$A_1 = \zeta(\eta = 0,41) = 0,34686754 \quad P_1 = \vartheta(\eta = 0,41) = 1,51588027$$

- La surface mouillée est selon (2.11) : $A = A_1 D^2 = 0,34686754 \times 2,5^2 = 2,16792213 m^2$

- le rayon hydraulique est selon (2.18): $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 2,5 \times \frac{0,34686754}{1,51588027} = 0,57205629 m$

- le débit volume serait donc :

$$Q = CA \sqrt{R_h J} = 85 \times 2,16792213 \sqrt{0,57205629 \times 0,0004} = 2,78748143 m^3/s$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est égal à 0,27 % seulement.

6.2.4. Conductivité relative Q_y^* rapportée à la profondeur normale.

La conductivité relative rapportée à la profondeur normale s'exprime en fonction de η par la relation (2.38). Pour $0 \leq \eta \leq 1$, la variation $\eta(Q_y^*)$ a été représentée sur la figure 3.6.II. Q_y^* diminue avec la diminution de η . Pour $\eta \leq 1$, $Q_y^* \geq 0,4178$, tandis que $Q_y^*(\text{circulaire}) \geq 0,3927$ pour $\eta \leq 1$.

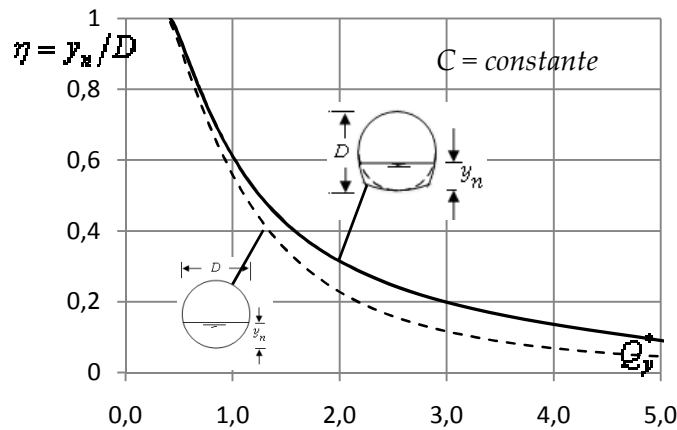


Figure 3.6.II : Variation de la conductivité relative Q_y^* en fonction du taux de remplissage η .

(---) Conduite circulaire. (—) Conduite en forme de fer à cheval.

La relation (2.38) est implicite vis-à-vis de η . Elle a fait l'objet d'une étude particulière qui a consisté à déterminer une relation explicite qui lui est approchée. Le calcul a montré que pour :

a) $0,09 \leq \eta \leq 0,21$ correspondant à $2,865 \leq Q_y^* \leq 5,019$, le taux de remplissage $\eta(Q_y^*)$ est tel que :

$$\sin(5,6\eta) = 1,511 - 0,205Q_y^* \quad (3.64.II-a)$$

b) $0,20 \leq \eta \leq 0,81$, correspondant à $0,680 \leq Q_y^* \leq 2,984$, le taux de remplissage $\eta(Q_y^*)$ est tel que :

$$\sinh(2\eta) = 1,54Q_y^{*-1,205} \quad (3.64.II-b)$$

c) $0,80 \leq \eta \leq 1$, correspondant à $0,418 \leq Q_y^* \leq 0,694$, le taux de remplissage $\eta(Q_y^*)$ est donné par :

$$\eta = 1,311 - 0,733Q_y^* \quad (3.64.II-c)$$

L'écart relatif maximal occasionné par les relations approchées (3.64.II-a), (3.64.II-b) et (3.64.II-c) est inférieur à 0,47% seulement.

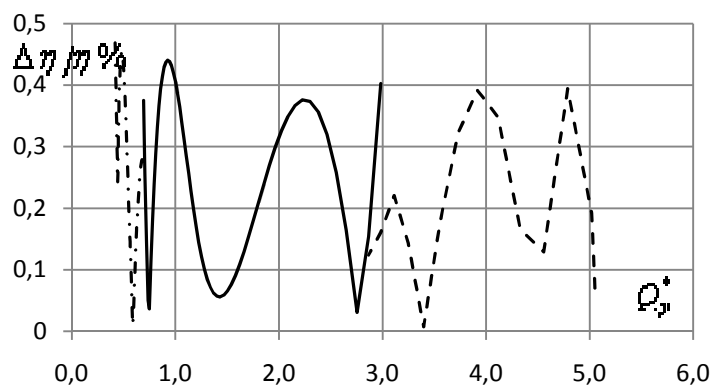


Figure 3.7.II : Ecarts relatifs occasionnés par (67) sur le calcul du taux de remplissage η .

(---) Ecart pour $0,80 \leq \eta \leq 1$ (—) Ecart pour $0,20 \leq \eta \leq 0,81$ (-.-) Ecart pour $0,09 \leq \eta \leq 0,21$

Exemple d'application 2

Reprenons les données de l'exemple 1 et évaluons cette fois-ci le diamètre D de la conduite.

Les données sont donc : $Q=2,78m^3/s$; $C=85m^{0.5}/s$; $J=0,0004$; $y_n=1,02m$.

Solution :

Pour les données du problème, la conductivité relative est selon la relation (2.36) :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 J y_n^5}} = \frac{2,78}{\sqrt{85^2 \times 0,0004 \times 1,02^5}} = 1,55630763$$

Q_y^* appartient à l'intervalle $0,680 \leq Q_y^* \leq 2,984$ et le taux η est donc régi par la relation (3.64.II-b) :

$$\eta = \frac{1}{2} \sinh^{-1} (1,54 Q_y^{*-1,205}) = \frac{1}{2} \times \sinh^{-1} (1,54 \times 1,55630763^{-1,205}) = 0,40582384 \cong 0,41$$

Il s'agit bien de la valeur proche de η , calculée au cours des étapes 1-ii, 2-ii et 3-ii de l'exemple 1.

Par suite, le diamètre D recherché est :

$$D = y_n / \eta = 1,02 / 0,41 \cong 2,5m$$

3.3. Ecoulement à coefficient de résistance de Manning invariable;

La conductivité relative s'exprime, pour n constant, par la relation (2.42) : $Q^* = A_1^{5/3} / P_1^{2/3}$

A l'état plein ($\eta = 1$), $A_{1p} = 0,82932333$ et $P_{1p} = 3,26692049$ la conductivité relative Q_p^* est égale :

$$Q_p^* = 0,33249166 = \text{constante} \tag{3.65.II}$$

6.3.1. Variation de la conductivité relative $\eta(Q^*)$ pour n constant.

La variation $\eta(Q^*)$, pour n constant, de la relation (2.42), a été représentée sur la figure 3.8.II :

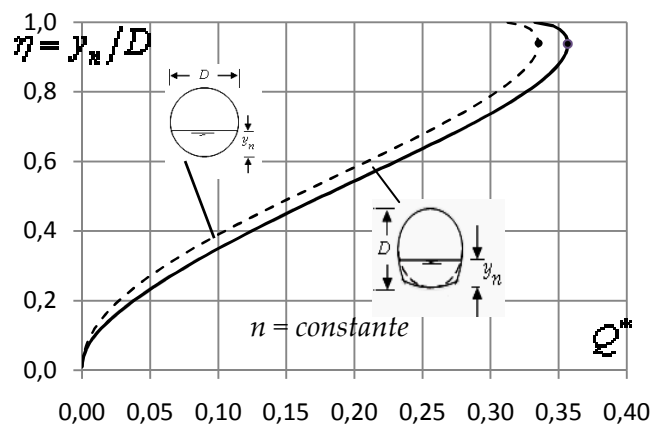


Figure 3.8.II : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction du taux η selon la formule de Manning Strickler. (●) $Q_{\max}^* = 0,181324$ pour $\eta = 0,9529$.

Q^* augmente avec l'accroissement de η jusqu'à un maximum, puis diminue au-delà de ce maximum.

Pour a conduite en forme de fer à cheval, le taux η , correspondant à Q_{\max}^* , est $\eta = 0,9375$.

En introduisant dans (2.42), $A_1 = \lambda(\eta=0,9375) = 0,80888509$ et $P_1 = \tau(\eta=0,9375) = 2,76155998$.

$$Q_{\max}^* = 0,3567591 \quad (3.66.II)$$

Les calculs ont montré que pour :

- $\eta \leq 0,08856217$ $0 \leq Q^* \leq 0,007332$
- $0,08856217 \leq \eta \leq 0,5$ $0,007332 \leq Q^* \leq 0,176688$
- $0,5 \leq \eta \leq 1$ $0,176688 \leq Q^* \leq 0,332492$

Afin d'évaluer de manière explicite la valeur du taux η , à partir de la valeur connue de la conductivité relative Q^* , nos calculs ont montré que dans la large gamme $0,19 \leq \eta \leq 0,83$, correspondant à $0,0348 \leq Q^* \leq 0,3368$, la relation (2.42) pouvait être remplacée par la relation approchée suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 1,655Q^{*0,556} \quad (3.67.II)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (3.67.II) est inférieur à 0,49% (fig.3.9.II).

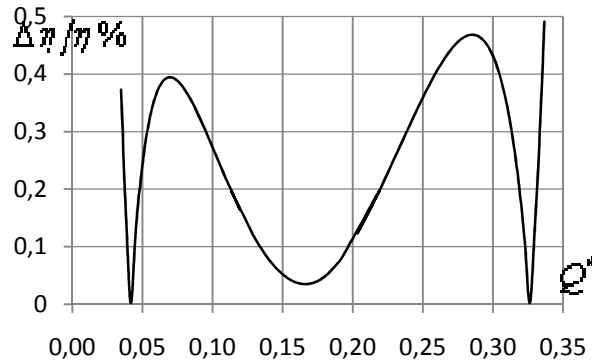


Figure 3.9.II : Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation (3.67.II) sur le calcul de η de la conduite en fer à cheval dans la gamme $0,19 \leq \eta \leq 0,83$ correspondant à $0,0348 \leq Q^* \leq 0,3368$

6.3.2. Courbe de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ pour n constant.

La variation $\eta(Q/Q_p)$, pour n constant, s'écrit en tenant compte de (2.46), (2.42) et (3.65.II).

$$\frac{Q}{Q_p} = 3,0076 \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \quad (3.68.II)$$

Q/Q_p ne dépend que du taux η . Il apparaît que le taux η est implicite vis-à-vis de Q/Q_p .

On peut déduire de la relation (3.67.II) ce qui suit :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 1,655Q^{*0,556} = 1,655(Q_p^*)^{0,556} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,556}$$

Par ailleurs on sait que $Q_p^* = 0,33249166$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 1,655(Q_p^*)^{0,556} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,556} = 1,655 \times 0,33249166^{0,556} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,556} = 0,897 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,556}$$

Ou bien en utilisant (2.46) on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 0,897 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,556} \quad (3.69.II)$$

La relation (3.69.II) est valable pour $0,19 \leq \eta \leq 0,83$ ou $0,1046 \leq Q/Q_p \leq 1,0029$ et l'écart relatif maximal occasionné par les relations approchées (3.69.II) est inférieur à 0,43%.

6.3.3. Relation $\eta(Q/Q_{\max})$ pour n constant

La variation $\eta(Q/Q_{\max})$, s'écrit en tenant compte de (2.49), (2.42) et de $Q_{\max}^* = 0,3567591$:

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 2,803 \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \quad (3.70.II)$$

Q/Q_{\max} ne dépend que du taux η . On peut déduire de la relation de (3.67.II) obtenue précédemment :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 1,655 Q^{*0,556} = 1,655 (Q_{\max}^*)^{0,556} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,556}$$

Par ailleurs on a déterminé précédemment que $Q_{\max}^* = 0,3567591$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 1,655 (Q_{\max}^*)^{0,556} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,556} = 1,655 \times 0,3567591^{0,556} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,556} = 0,933 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,556}$$

Ou bien en utilisant (2.49) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 0,933 \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,556} \quad (3.71.II)$$

La relation (3.71.II) est valable pour $0,19 \leq \eta \leq 0,83$ ou $0,0975 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,9346$ et l'écart relatif maximal occasionné par les relations approchées (3.71.II) est inférieur à 0,46%.

Exemple d'application 3.

On souhaite déterminer le taux de remplissage η dans une conduite en forme de fer à cheval de diamètre $D = 2m$, écoulant un débit $Q = 2,2m^3/s$ sous une pente $J = 0,0005$. $n = 0,0148m^{1/3}s$.

Solution :

On peut déterminer le problème de trois manières suivantes :

7. Avec la conductivité relative $\eta(Q^*)$

i. Calculons la conductivité relative Q^* par application de la relation (2.41) :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3}\sqrt{J}} = \frac{0,0148 \times 2,2}{2^{8/3}\sqrt{5.10^{-4}}} = 0,2293257$$

ii. La conductivité appartient $0,0348 \leq Q^* \leq 0,3368$, le taux η est, en vertu de (3.67.II) :

$$\eta = \frac{2,3}{\pi} \sin^{-1}\left(1,655 Q^{*0,556}\right) = \frac{2,3}{\pi} \times \sin^{-1}\left(1,655 \times 0,2293257^{0,556}\right) = 0,59890025 \cong 0,6$$

iii. La profondeur normale y_n recherchée est, par suite :

$$y_n = D\eta = 2 \times 0,6 = 1,2 \text{ m}$$

8. Avec le taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$

iii. Compte tenu du fait que $Q_p^* = 0,33249166$ et que $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$, alors :

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{0,2293257}{0,33249166} = 0,68971865$$

iv. le taux η de la conduite peut alors être évalué par la relation approchée (3.69.II), soit :

$$\eta = \frac{2,3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,897 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,556} \right] = \frac{2,3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,897 \times 0,68971865^{0,556} \right] = 0,59869218 \cong 0,6$$

Il s'agit bien de la valeur obtenue au point 2-ii

9. Avec la conductivité maximale $\eta(Q/Q_{\max})$:

iii. Compte tenu du fait que $Q_{\max}^* = 0,3567591$ et que $Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^*$, on a :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{0,2293257}{0,3567591} = 0,64280266$$

iv. Le taux η appartient est tel que $0,0975 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,9346$ et peut être évalué par (3.71.II) :

$$\eta = \frac{2,3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,933 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,556} \right] = \frac{2,3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,933 \times 0,64280266^{0,556} \right] = 0,59883388 \cong 0,6$$

La aussi, la valeur du taux est bien celle déterminé au point 2-ii et au point 1-ii.

Vérification : Pour le résultat obtenu déterminons le débit volume Q par la formule de Manning.

Pour cela recherchons A et R_h pour un taux de remplissage $\eta = 0,6$. On doit d'abord déterminer A_1 et

P_1 , comme $0,5 \leq \eta \leq 1$ on a selon le tableau des par.dim. :

- $A_1(\eta=0,6) = \lambda(\eta=0,6) = 0,53595352$
- $P_1(\eta = 0,6) = \tau(\eta = 0,6) = 1,89748208$

- La surface mouillée est selon (2.11) : $A = A_1 D^2 = 0,53595352 \times 2^2 = 2,14381408 \text{ m}^2$

- le rayon hydraulique est selon (2.18) : $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 2 \times \frac{0,53595352}{1,89748208} = 0,56491023 \text{ m}$

- le débit volume est donc :

$$Q = \frac{1}{n} R_h^{2/3} A \sqrt{J} = \frac{1}{0,0148} \times 0,56491023^{2/3} \times 2,14381408 \times \sqrt{0,0005} = 2,21341763 \text{ m}^3/\text{s}$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est égal à 0,5% seulement.

6.3.4. Conductivité relative Q_y^* rapportée à la profondeur normale.

La conductivité Q_y^* est définie par la relation (2.55). Ainsi, dans $0 \leq \eta \leq 1$, la conductivité relative Q_y^* ne dépend que du taux η . La relation (2.55) a été représentée sur la figure 3.10.II.

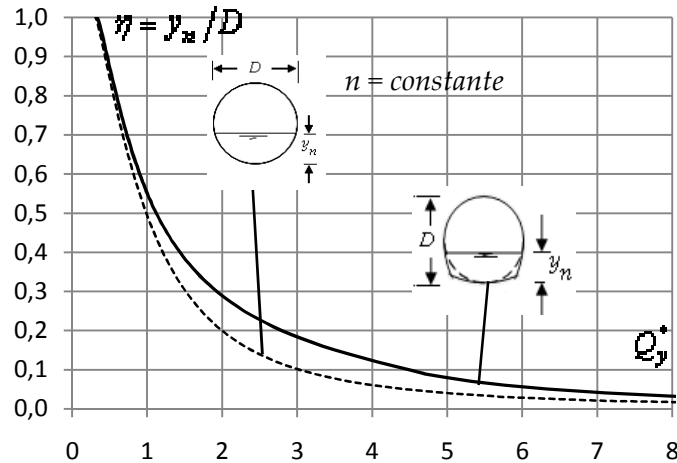


Figure 3.10.II : Courbes de variation $\eta(Q_y^*)$ dans les conduites en fer à cheval et circulaire.

L'étude de la relation (2.55) a montré que η peut s'exprimer explicitement, en fonction de Q_y^* par :

c) $0,09 \leq \eta \leq 0,21$ correspondant à $2,6773 \leq Q_y^* \leq 4,6779$

$$\sin(5,4\eta) = 1,493 - 0,219Q_y^* \quad (3.72.II-a)$$

b) $0,20 \leq \eta \leq 0,80$, correspondant à $0,5916 \leq Q_y^* \leq 2,7916$

$$\sinh(2,2\eta) = 1,53Q_y^{*-1,18} \quad (3.72.II-b)$$

c) $0,72 \leq \eta \leq 1$, correspondant à $0,3325 \leq Q_y^* \leq 0,7015$

$$\eta = 1,264 - 0,779Q_y^* \quad (3.72.II-c)$$

L'écart maximal occasionné par les relations (3.72.II-a), (3.72.II-b) et (3.72.II-c) est inférieur à 0,50%.

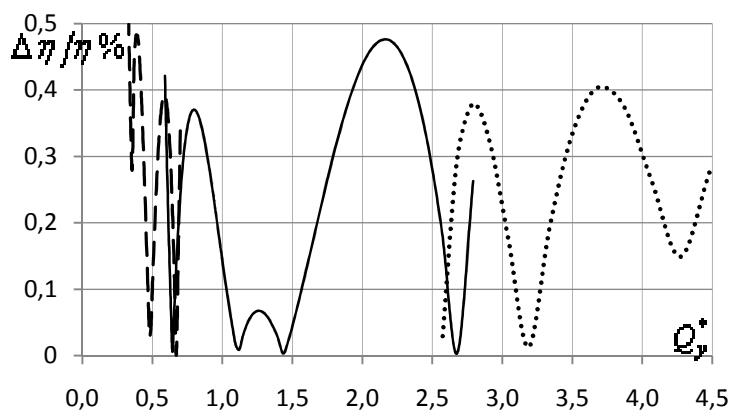


Figure 3.11.II : Ecart relatif en (%) occasionnées par les relations (3.72.II-a), (3.72.II-b) et (3.72.II-c).

Ecart (....) pour $0,09 \leq \eta \leq 0,21$ (---) pour $0,20 \leq \eta \leq 0,80$ (---) pour $0,72 \leq \eta \leq 1$

Exemple d'application 4

Reprenons les données de l'exemple d'application 3 et déterminons le diamètre D de la conduite. Les

données sont alors : $Q=1,2m^3/s$ $J=0,0005$ $n=0,0148m^{1/3}s$ $y_n=1,2m$

Solution :

i. Calculons Q_y^* , rapportée à la profondeur y_n , par application de la relation (2.53), soit :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{J}} = \frac{0,0148 \times 2,2}{1,2^{8/3} \times \sqrt{0,0005}} = 0,89546663$$

Q_y^* est telle que $0,5916 \leq Q_y^* \leq 2,7916$, Alors le taux η est régi par la relation (3.72.II-b), soit :

$$\eta = \frac{1}{2,2} \sinh^{-1} (1,53 Q_y^{*-1,18}) = \frac{1}{2,2} \sinh^{-1} (1,53 \times 0,89546663^{-1,18}) = 0,60107778 \cong 0,6$$

iii. Ainsi, le diamètre D recherché est :

$$D = \frac{y_n}{\eta} = \frac{1,2}{0,60107778} = 1,99641386 \cong 2 \text{ m}$$

L'écart relatif entre cette valeur et celle de l'énoncé de l'exemple 3 est insignifiante.

3.4. Ecoulement à coefficient de résistance variable

6.4.1. Expression générale du diamètre :

Pour calculer le diamètre D (ou la hauteur h) dans le cas d'une conduite en forme de fer à cheval partiellement remplie pour les valeurs données de Q, J, ε, ν et η , nous allons nous baser sur la formule (1.173) trouvée dans le chapitre 1 et qui est valable pour n'importe quelle dimension linéaire :

$$D \cong 0,512 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5}$$

Où \overline{D}_h est donnée par la relation (1.167) et \overline{R} est donné par la relation (1.158).

On peut aussi faire appel aux relations (1.160), (1.154) et (1.168) ou (1.174) et (1.168)

Exemple d'application 5.

Déterminer le diamètre d'une conduite en forme de fer à cheval véhiculant sachant que

$$Q = 1,354 \text{ m}^3/\text{s}, \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, J = 0,0005, \varepsilon = 0,0002 \text{ m} \text{ et } \eta = 0,6.$$

a) Pour un taux de remplissage $\eta = 0,6$, le tableau des paramètres adimensionnels donne :

$$A_1(\eta = 0,6) = 0,53595352 \quad P_1(\eta = 0,6) = 1,89748208$$

b) On détermine le diamètre hydraulique \overline{D}_h en utilisant la relation (1.165) :

$$\overline{D}_h = 1,516 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{A_1}{P_1^2} \right)^{2/5} = 1,516 \left(\frac{1,354^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{0,53595352}{1,89748208^2} \right)^{2/5} = 2,31380934 \text{ m}$$

Le nombre de Reynolds \overline{R} est déterminé par la relation (1.158) :

$$\overline{R} = 10,556 \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu} \left(\frac{A_1}{P_1^2} \right)^{3/5} = 10,556 \times \frac{(9,81 \times 0,0005 \times 1,354^3)^{1/5}}{10^{-6}} \times \left(\frac{0,53595352}{1,89748208^2} \right)^{3/5} = 1393996$$

c) On déduit la dimension linéaire recherchée D en appliquant la relation (2.57):

$$\begin{aligned}
 D &\cong 0,512 \times \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \\
 &= 0,512 \left[-\log \left(\frac{0,0002/2,31380934}{4,75} + \frac{8,5}{1393996} \right) \right]^{-2/5} \times \left(\frac{1,354^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{1,89748208}{0,53595352^3} \right)^{1/5} \\
 &= 1,50071986 m \cong 1,5 m
 \end{aligned}$$

6.4.2. Variation de la conductivité relative du modèle rugueux de référence : Calcul de la profondeur normale.

Comme pour le cas de la conduite circulaire. Soit les données du problème : Q , D , J , ε et ν . Quel serait alors la profondeur dans la conduite y_n . Assumons $J = \overline{J}$ et $Q = \overline{Q}$ par contre $a \neq \overline{a}$ ou $D \neq \overline{D}$ $A \neq \overline{A}$, et $P \neq \overline{P}$.

La relation régissant l'écoulement pour le modèle rugueux de référence a été donnée par la relation (2.58) et la conductivité relative est donnée par la relation (2.59). Cette conductivité relative a la même expression que la relation (2.25). D'autre part on a aussi :

$$\overline{Q}_p^* = (A_{1p}^{3/2} / P_{1p}^{1/2}) = 0,41784628 = \text{constante} \quad (3.73.II)$$

$$Q_{\max}^* = 0,43817154 \quad (3.74.II)$$

Pour la valeur à l'état plein $\overline{Q}_p^* = 0,41784628$ correspond $\overline{\eta} = 1$ et $\overline{\eta} = 0,85051846$.

La variation $\overline{\eta}(\overline{Q}^*)$ explicite vis-à-vis de $\overline{\eta}$, dans la gamme pratique du taux de remplissage $0,17 \leq \eta \leq 0,86$, correspondant à $0,0405 \leq Q^* \leq 0,4211$, s'exprime par la relation :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3} \overline{\eta}\right) = 1,539 \overline{Q}^{*0,594} \quad (3.75.II)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (3.75.II) est inférieur à 0,48%.

Le diamètre à l'état plein \overline{D}_p du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.59) après avoir remplacé $A_1 = A_{1p} = 0,82932333$ et $P_1 = P_{1p} = 3,26692049$:

$$\overline{D}_p = 0,583 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \quad (3.76.II)$$

Ce modèle rugueux de diamètre \overline{D}_p a la même conductivité relative que celui de même diamètre mais un taux de remplissage $\overline{\eta} = 0,85051846$. Avec cette valeur $\overline{\eta}$ et le diamètre \overline{D}_p déterminé par (3.76.II), on détermine \overline{P} , \overline{R}_h et \overline{R} , en utilisant les relations (2.15), (2.18) et (1.48) et le tableau des paramètres adimensionnels :

$$A_1(\overline{\eta} = 0,85051846) = 0,75581861 \quad P_1(\overline{\eta} = 0,85051846) = 2,47297467$$

$$\overline{P} = \overline{D}_p P_1(\overline{\eta} = 0,85051846) = 2,47297467 \overline{D}_p \quad (3.77.II)$$

$$\overline{R}_h = \overline{D}_p \frac{A_1(\overline{\eta} = 0,85051846)}{P_1(\overline{\eta} = 0,85051846)} = 0,30563136 \overline{D}_p \quad (3.78.II)$$

$$R = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4Q}{vP(\overline{\eta} = 0,85051846)} = 1,61748523 \frac{Q}{vD_p} \quad (3.79.II)$$

Introduisant ces expressions dans la relation (1.168) pour déterminer le facteur ψ on a :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_p}{5,81} + 5,26 \frac{v\overline{D}_p}{Q} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.80.II)$$

Procédons maintenant comme dans le cas de la conduite circulaire :

- Avec Q et J , déterminons \overline{D}_p et calculons ψ . D est une donnée, affectons $\overline{D} = D/\psi$.
- Avec \overline{D} , calculons à l'aide de (2.59) la conductivité relative \overline{Q}^* et déterminons avec (3.75.II) le taux η et $y_n = \eta D$.

Exemple d'application 6 :

Reprenons l'exercice précédent, soit : $Q = 1,354 \text{ m}^3/\text{s}$, $v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $J = 0,0005$, $\varepsilon = 0,0002 \text{ m}$ et $D = 1,5 \text{ m}$. Quelle est la profondeur normale y_n ?

Le diamètre \overline{D}_p à l'état plein du modèle rugueux de référence est donné par la relation (3.76.II) :

$$\overline{D}_p = 0,583 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = 0,583 \times \left(\frac{1,354^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} = 1,9062867 \text{ m}$$

- A l'aide de la relation (3.80.II) calculons le facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

$$\begin{aligned} \psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_p}{5,81} + 5,26 \frac{v\overline{D}_p}{Q} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{0,0002/1,9062867}{5,81} + 5,26 \times \frac{10^{-6} \times 1,9062867}{1,354} \right) \right]^{-2/5} = 0,73359131 \end{aligned}$$

- Affectons à ce modèle rugueux le diamètre $\overline{D} = D/\psi = 1,5/0,73359131 = 2,04473524 \text{ m}$.

- Ce nouveau diamètre \overline{D} donne la conductivité relative avec la relation (2.59) :

$$\overline{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gJ\overline{D}^5}} = \frac{1,354}{\sqrt{128 \times 9,81 \times 0,0005 \times 2,04473524^5}} = 0,28582583$$

- Avec \overline{Q}^* obtenue déterminons à l'aide de la relation (3.75.II), le taux η et la profondeur normale.

$$\overline{\eta} = \frac{2,3}{\pi} \sin^{-1} \left(1,539 \overline{Q}^{*0,594} \right) = \frac{2,3}{\pi} \sin^{-1} \left(1,539 \times 0,28582583^{0,594} \right) = 0,60061961$$

Ce résultat correspond à celui de l'énoncé de l'exemple précédent.

$$y_n = \eta D = 0,60061961 \times 1,5 \cong 0,9 \text{ m}$$

6.4.3. Expression du débit volume maximal Q_{\max}

L'expression du débit Q_{\max} , est déduite de la formule (1.186) dans laquelle R est donné par (1.188).

A l'état plein, ce nombre de *Reynolds* prend la valeur particulière R_p en remplaçant dans la relation (1.188), les paramètres adimensionnels A_1 et P_1 , selon le tableau 1, par A_{1p} et P_{1p} :

$$R = 32\sqrt{2} \left(\frac{A_{1p}}{P_{1p}} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \left(\frac{0,82932333}{3,26692049} \right)^{3/2} \times \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu}$$

Soit :

$$R_p \cong 5,79 \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} \tag{3.81.II}$$

Tenant compte de (3.81.II), la relation (1.188) s'écrit :

$$R = 7,816 \left(\frac{A_1}{P_1} \right)^{3/2} R_p \tag{3.82.II}$$

Remplaçant dans (1.186), A , R_h et R respectivement par les relations (1.42), (1.44) et (3.82.II) :

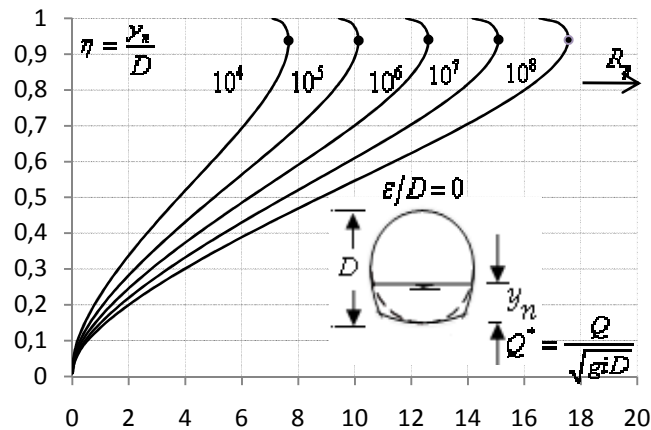
$$Q = -4\sqrt{2} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(A_1/P_1)} + \frac{1,2845}{(A_1/P_1)^{3/2} R_p} \right) \tag{3.83.II}$$

En introduisant Q^* donnée par (2.72), la relation (3.83.II) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

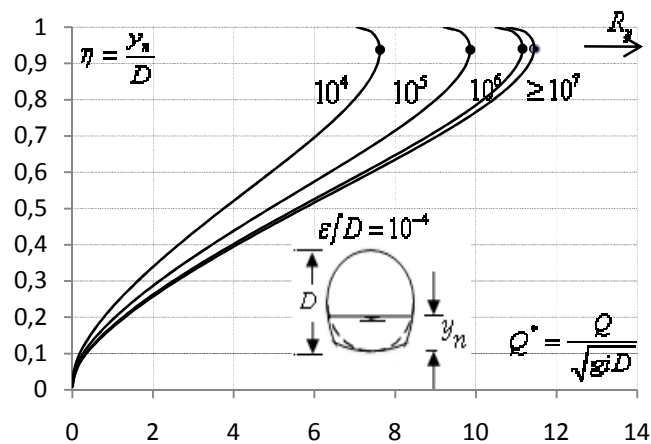
$$Q^* = -4\sqrt{2} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(A_1/P_1)} + \frac{1,2845}{(A_1/P_1)^{3/2} R_p} \right) \tag{3.84.II}$$

Rappelons que dans cette relation, R_p est donné par la relation (3.81.II). La relation (3.84.II) montre que Q^* est fonction à la fois de η , de ε/D et du nombre de *Reynolds* R_p à l'état plein.

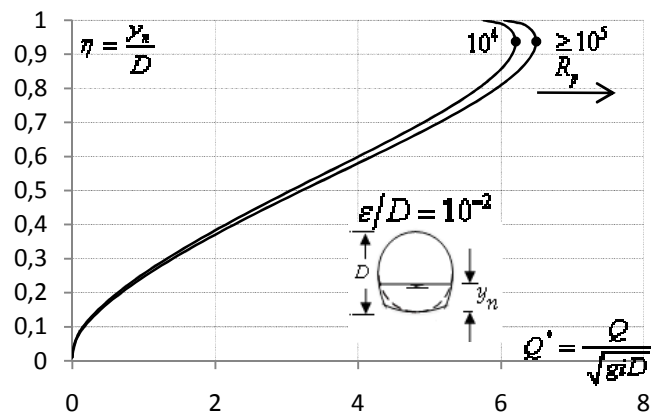
La variation du taux de remplissage η en fonction de la conductivité relative Q^* a été représentée sur la figure 3.12.II (a à c), conformément a la relation (3.84.II).



-a-



-b-



-c-

Figure 3.12.II : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p conformément à la relation (3.84.II).

Nos remarques sont, au vu de la figure 3.12.II (a à c), les mêmes que celles concernant la variation de la conductivité relative Q^* de la conduite circulaire étudiée au chapitre 2.

Le tableau 2 regroupe les valeurs particulières η_0 du taux de remplissage η correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$, calculées selon la relation (3.84.II), pour diverses valeurs de ε/D et de R_p . L'espace grisâtre du tableau 2 correspond au domaine pratique d'utilisation de la rugosité ε/D et du nombre R_p .

Nous pouvons constater que dans la large gamme pratique $10^{-5} \leq \varepsilon/D \leq 5 \cdot 10^{-3}$ et $5 \cdot 10^4 \leq R_p \leq 5 \cdot 10^7$, le taux $\eta_0 = 0,9401$ correspondant à la valeur la plus appropriée pour le calcul de Q_{\max} .

Tableau 2 : Valeurs du taux de remplissage η_0 correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$ pour diverses valeurs de la rugosité ε/D et du nombre de Reynolds R_p

| $\varepsilon/D \rightarrow$ | 0 | 10^{-5} | 5.10^{-5} | 10^{-4} | 5.10^{-4} | 10^{-3} | 5.10^{-3} | 10^{-2} | |
|-----------------------------|----------|-----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----------|--------|
| R_p | 10^4 | 0,9347 | 0,9348 | 0,9348 | 0,9348 | 0,9350 | 0,9353 | 0,9358 | 0,9357 |
| | 5.10^4 | 0,9372 | 0,9372 | 0,9373 | 0,9375 | 0,9381 | 0,9383 | 0,9379 | 0,9372 |
| | 10^5 | 0,9380 | 0,9381 | 0,9383 | 0,9385 | 0,9392 | 0,9392 | 0,9383 | 0,9374 |
| | 5.10^5 | 0,9395 | 0,9398 | 0,9404 | 0,9407 | 0,9406 | 0,9402 | 0,9386 | 0,9376 |
| | 10^6 | 0,9400 | 0,9405 | 0,9412 | 0,9413 | 0,9409 | 0,9405 | 0,9387 | 0,9376 |
| | 5.10^6 | 0,9411 | 0,9422 | 0,9423 | 0,9421 | 0,9412 | 0,9406 | 0,9387 | 0,9376 |
| | 10^7 | 0,9415 | 0,9427 | 0,9425 | 0,9422 | 0,9412 | 0,9406 | 0,9387 | 0,9376 |
| | 5.10^7 | 0,9422 | 0,9433 | 0,9427 | 0,9423 | 0,9412 | 0,9406 | 0,9387 | 0,7396 |
| | 10^8 | 0,9425 | 0,9434 | 0,9427 | 0,9423 | 0,9412 | 0,9406 | 0,9387 | 0,9376 |

On détermine pour cette valeur moyenne, l'expression de Q_{\max} d'une conduite en forme de fer à cheval à écoulement uniforme, lorsque les paramètres tel que ε , D , J et ν du liquide sont connus. Il suffit d'introduire $\eta_0 = 0,9401$ dans (3.52.II) et (3.45.II) pour trouver A_1 et P_1 et de calculer Q_{\max} par (3.83.II).

Pour $0,5 \leq \eta_0 = 0,9401 \leq 1$, les paramètres adimensionnels A_1 et P_1 prennent les valeurs :

$$A_1 = \lambda(\eta = 0,9401) = 0,81013149 \qquad P_1 = \tau(\eta = 0,9401) = 2,77240760$$

En introduisant ces deux valeurs dans la relation (3.83.II) on a alors l'expression de Q_{\max} :

$$Q_{\max} = -2,477 \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{4,325} + \frac{8,1321}{R_p} \right) \qquad (3.85.II)$$

La conductivité relative maximale est alors :

$$Q_{\max}^* = -2,477 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{4,325} + \frac{8,1321}{R_p} \right) \qquad (3.86.II)$$

Nous obtenons ainsi l'expression Q_{\max} en fonction de ε/D et de R_p à l'état plein.

6.4.4. Relation approchée de la profondeur normale :

Comme dans le cas de la conduite circulaire, cette partie de l'étude vise à établir une relation approchée susceptible d'évaluer y_n de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance variable. Pour cela, on a eu recours aux relations (3.83.II) et (3.85.II). Afin de déterminer la loi $\eta(Q/Q_{\max})$, il a été nécessaire d'étudier la variation de $\eta(Q/Q_{\max})$ pour diverses valeurs de ε/D et R_p , en s'appuyant sur les relations (3.83.II) et (3.85.II). Après un travail assez laborieux, nos calculs ont pu montrer que, le taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max})$ de la conduite pouvait s'exprimer par la relation :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 0,934\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,563} \quad (3.87.II)$$

La profondeur normale s'exprime alors par : $y_n = \eta D$

La relation (3.87.II) valable dans une gamme pratique du taux compris $0,14 \leq \eta \leq 0,80$ avec une erreur relative de 0,50%. Elle est applicable pour $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,01$ et $5.10^4 \leq R_p \leq 10^8$.

L'exemple 7 montre les étapes pour la détermination de y_n par application de la relation (3.87.II).

3.5. Ecoulement critique

La conductivité relative correspond à l'état critique est donnée par la relation (2.83) $Q_c^* = \sqrt{A_{1c}^3/e_{1c}}$.

A_{1c} et e_{1c} (l'indice "c" se réfère l'état critique) sont définis selon le taux η dans le tableau 1 de la conduite ovoïdale normale. La relation (2.83) montre clairement que η_c est implicite vis-à-vis de Q_c^* .

Proposons une relation approchée fiable au calcul explicitement de η_c et donc de la profondeur critique y_c , pour cela étudions la variation $\eta_c(Q_c^*)$ en représentons la relation (2.83) sur le graphe ci-dessous :

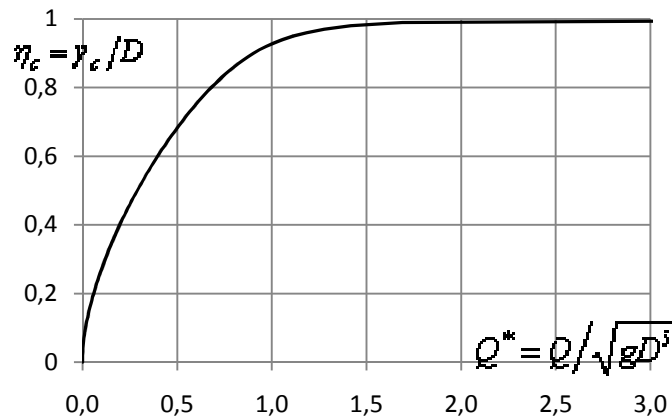


Figure 3.13.II : Variation du taux critique η_c en fonction de Q^* . Courbe tracée selon la relation (2.83).

Ce graphe montre que η_c augmente avec Q_c^* . En outre, lorsque $Q_c^* \rightarrow \infty$, $\eta_c \rightarrow 1$.

Les calculs menés dans une large gamme pratique $0,19 \leq \eta \leq 0,78$, ont permis de trouver une relation fiable explicite qui approche le mieux la relation implicite (2.83) à savoir :

$$\sinh\left(\frac{2\pi}{13}\eta_c\right) = 0,50Q_c^{*0,579} \quad (3.88.II)$$

L'écart relatif maximal du à la relation approchée (3.88.II) est inférieure à 0,48% :

Exemple d'application 7

Reprenons les données de l'exercice du collecteur circulaire étudié au chapitre 2 pour le cas de la conduite en fer à cheval : $D = 1,5 \text{ m}$, $J = 0,0005$ et $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ $\nu = 10^{-6}$.

iii. A quelle hauteur de la génératrice inférieure, le déversoir doit être arasé pour limiter le débit vers la station d'épuration à la valeur donnée de $Q = 1,2 \text{ m}^3/\text{s}$.

iv. Quelle est la nature de l'écoulement en comparant la profondeur normale et a la hauteur

Solution :

2. Déterminons la capacité maximale du collecteur et cherchons la cote laquelle doit être arasé le déversoir d'orage pour ne laisser passer que le débit donné.

- Le nombre de Reynolds R_p est selon la relation (3.81.II):

$$R_p \cong 5,79 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 5,79 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 744963$$

- Le débit maximal est selon la relation (3.85.II)

$$Q_{\max} = -2,477 \sqrt{g J D^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{4,325} + \frac{8,1321}{R_p} \right)$$

$$= -2,477 \sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,5^5} \times \log \left(\frac{2 \cdot 10^{-5}/1,5}{4,325} + \frac{8,1321}{744963} \right) = 2,32041066 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Selon la relation (3.87.II), le taux de remplissage est égal :

$$\eta = \frac{2,3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,934 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,563} \right] = \frac{2,3}{\pi} \sin^{-1} \left[0,934 \times \left(\frac{1,2}{2,32041066} \right)^{0,563} \right]$$

$$= 0,5125929 \cong 0,51$$

La profondeur normale recherchée est $y_n = \eta D = 0,5125929 \times 1,5 = 0,76888935 \text{ m}$.

C'est à dire la cote du déversoir doit être à 0,77 m de la génératrice inférieure du collecteur.

Vérifions nos calculs, en déterminons le débit volume par la formule générale (1.186):

Pour le taux obtenu $\eta = 0,512592$, les paramètres A_1 et P_1 prennent respectivement les valeurs :

$$A_1(\eta = 0,5125929) = 0,44921582 \qquad P_1(\eta = 0,512592) = 1,72131263$$

- l'aire de la section mouillée est selon (2.11) :

$$A = D^2 A_1 = 1,5^2 \times 0,44921582 = 1,01073559 \text{ m}^2$$

- le rayon hydraulique est en vertu de (2.18) :

$$R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 1,5 \times \frac{0,44921582}{1,72131263} = 0,39145924 \text{ m}$$

- le nombre de Reynolds est selon (1.187) :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g J R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 0,39145924^3}}{10^{-6}} = 776273$$

- le débit volume serait donc selon la relation (1.186) :

$$\begin{aligned}
 Q &= -4\sqrt{2g} A\sqrt{JR_h} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \\
 &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,01073559 \times \sqrt{0,39145924 \times 0,0005} \times \log\left(\frac{0,00002}{14,8 \times 0,39145924} + \frac{10,04}{776273}\right) \\
 &= 1,1989632 \cong 1,2 \text{ m}^3/\text{s}
 \end{aligned}$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui de l'énoncé est égal à 0,09% seulement.

4. la nature de l'écoulement peut être connue en déterminant y_c en application de (3.88.II) :

Selon la relation (2.82), le débit relatif Q_c^ est :*

$$Q_c^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} = \frac{1,2}{\sqrt{9,81 \times 1,5^5}} = 0,13903322$$

$$y_c = \frac{13}{2\pi} D \sinh^{-1}(0,5Q^{*0,579}) = \frac{13}{2 \times \pi} \times 1,5 \times \sinh^{-1}(0,5 \times 0,13903322^{0,579}) = 0,49302087 \text{ m}$$

CONDUITE OVOÏDALE A RADIER APLATI (III)

La conduite ovoïdale considérée dans la présente étude est celle dite ovoïdale à radier aplati représentée sur la figure 3.1.III. La conduite est caractérisée par sa hauteur $Y_m = 1,1339746D$ et celle du radier y .

Caractéristiques géométriques de la conduite.

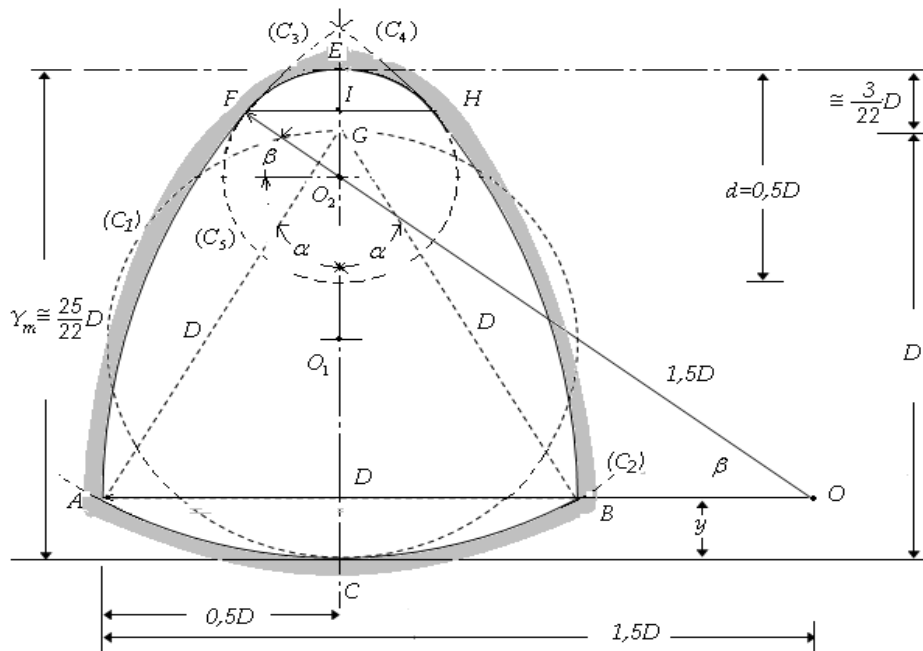


Figure 3.1.III. Schéma de définition de la conduite ovoïdale à radier aplati.

Les étapes constructives de la section droite d'une telle conduite sont les suivantes :

- x. Sur un axe vertical, on trace le cercle (C_1) de centre O_1 et de diamètre D .
- xi. A partir du point G , génératrice supérieure du cercle (C_1) , traçons deux segments $\overline{GA} = D$ et $\overline{GB} = D$ écartés par rapport à l'axe vertical d'un angle de 30° . Ces deux segments correspondent au rayon du cercle (C_2) de diamètre $2D$ et de centre G . Traçons enfin l'arc \widehat{AB} de corde \overline{AB} .
- xii. Dans l'alignement \overline{AB} tracer le point O tel que $\overline{AO} = 1,5D$. Et du point O tracer l'arc de cercle (C_3) de diamètre $3D$ du point A jusqu'à l'intersection avec l'axe vertical.
- xiii. On répète la même opération, dans l'alignement \overline{BA} on trace le point O' tel que $\overline{BO'} = 1,5D$, on trace l'arc de cercle (C_4) symétrique à l'arc (C_3) .
- xiv. Tracer sur l'axe vertical passant par O_1 le cercle (C_5) de diamètre $d = D/2$ et de centre quelconque.
 - Déplacer le centre de ce cercle (C_5) le long de la verticale jusqu'à ce que le cercle (C_5) devienne tangent aux arcs des cercles (C_3) et (C_4) aux points F et H . Le centre du cercle est alors O_2
- xv. Ainsi les arcs \widehat{FEH} du cercle (C_5) , \widehat{AF} du cercle (C_3) , \widehat{HB} du cercle (C_4) et \widehat{AB} du cercle (C_1) forment le contour $ACBHEFA$ de la section droite considérée. Cette section droite a une hauteur \overline{CE} et une largeur maximale D .

La figure 3.1.III de la section obtenue suggère les remarques suivantes :

a) Le triangle $\triangle ABG$ est un triangle équilatéral tel que :

1) $2\alpha = \pi/3$, soit $\alpha = \pi/3$

Nous pouvons écrire que :

$$\cos(\alpha) = \frac{D-y}{D} = 1 - y/D$$

On a alors :

2) $y = 0,13397460D$

La longueur de l'arc \widehat{AB} est égale à :

$$\widehat{AB} = D2\alpha = (\pi/3)D$$

Soit :

3) $\widehat{AB} = 1,04719756D$

b) L'angle β est tel que :

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{OD}}{\overline{OO_2}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OF} - \overline{O_2F}} = \frac{D}{1,5D - d/2} = \frac{D}{1,5D - 0,25D} = \frac{1}{1,25} = \frac{4}{5}$$

Il vient alors :

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

Ou bien

4) $\beta = 0,64350111 \text{radian}$ Ou $\beta = 36,86989765^\circ$

On peut déterminer la longueur de l'arc \widehat{FA} , qui est égale à :

$$\widehat{FA} = (1,5D)\beta = 1,5 \times 0,64350111D$$

Soit :

5) $\widehat{FA} = 0,96525166D$

c) La longueur de la corde \overline{FH} peut être également déterminée comme suit :

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{FI}}{\overline{O_2F}} = \frac{\overline{FH}/2}{D/4} = \frac{2\overline{FH}}{D}$$

Il vient que :

$$\overline{FH} = \frac{1}{2}D \cos(\beta) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times D$$

Soit :

6) $\overline{FH} = 0,40D$

La longueur de l'arc \widehat{FH} de corde \overline{FH} peut être aussi déterminée comme suit :

$$\widehat{FH} = \left(\frac{D/2}{2}\right)(\pi - 2\beta) = \frac{1}{4} \times (\pi - 2 \times 0,64350111)D$$

Soit :

$$7) \widehat{FH} = 0,46364761D$$

Différentes hauteurs peuvent être déterminées, ainsi la hauteur \overline{EI} est égale :

$$\overline{EI} = \overline{EO_2} - \overline{IO_2}$$

La hauteur $\overline{IO_2}$ est calculée comme suit :

$$\overline{IO_2} = \frac{D/2}{2} \sin(\beta) = \frac{1}{4} \times D \times \sin(0,64350111) = 0,15D$$

Alors on a :

$$\overline{EI} = \overline{EO_2} - \overline{IO_2} = 0,25D - 0,15D$$

Soit :

$$8) \overline{EI} = 0,10D$$

La hauteur \overline{CI} peut être déterminée aussi :

$$\overline{CI} = \overline{CD} + \overline{DO_2} + \overline{O_2I} = y + D \tan(\beta) + 0,15D = 0,13397460D + D \tan(0,64350111) + 0,15D$$

Soit :

$$9) \overline{CI} = 1,0339746D$$

Aussi, la hauteur \overline{DI} est égale :

$$\overline{DI} = \overline{CI} - y = 1,0339746D - 0,1339746D$$

Soit :

$$10) \overline{DI} = 0,9D$$

d) Nous remarquons aussi que la hauteur totale \overline{CE} est égale à :

$$\overline{CE} = \overline{CI} + \overline{EI} = 1,0339746D + 0,10D$$

Soit :

$$11) \overline{CE} = Y_m = 1,1339746D$$

$$12) \text{ Nous avons aussi : } y = 0,13397460D = 0,11814603Y_m$$

La section a une hauteur $Y_m = 1,1339746D$ ou un rapport $Y_m/D \approx 25/22D$

3.1. Eléments hydrauliques de la section transversale.

Les caractéristiques de l'écoulement, telle que l'aire de la section mouillée A , le périmètre mouillé P , le rayon hydraulique R_h ou la largeur du plan d'eau e dépendent du taux de remplissage $\eta = y_n/Y_m$ ou y_n est la profondeur normale de l'écoulement et Y_m est la hauteur de la conduite. Ces caractéristiques s'expriment par différentes relations selon le lieu géométrique de l'écoulement.

La figure 3.2.III montre trois lieux géométriques que peut occuper l'écoulement, selon la valeur de η :

- Entre les points C et D de la partie circulaire basse c'est-à-dire $\eta \leq y/Y_m$ ou $\eta \leq 0,11814603$.
- Entre les points D et I de l'espace délimité par les arcs de cercle \widehat{AF} et \widehat{BH} , c'est-à-dire

$$y/Y_m \leq \eta \leq \overline{CI}/Y_m \text{ ou } 0,11814603 \leq \eta \leq 0,9118146.$$

- Entre les points *I* et *E* de la partie circulaire la plus haute de la conduite c'est-à-dire $\overline{CI}/Y_m \leq \eta \leq Y_m/Y_m$ ou $0,9118146 \leq \eta \leq 1$.

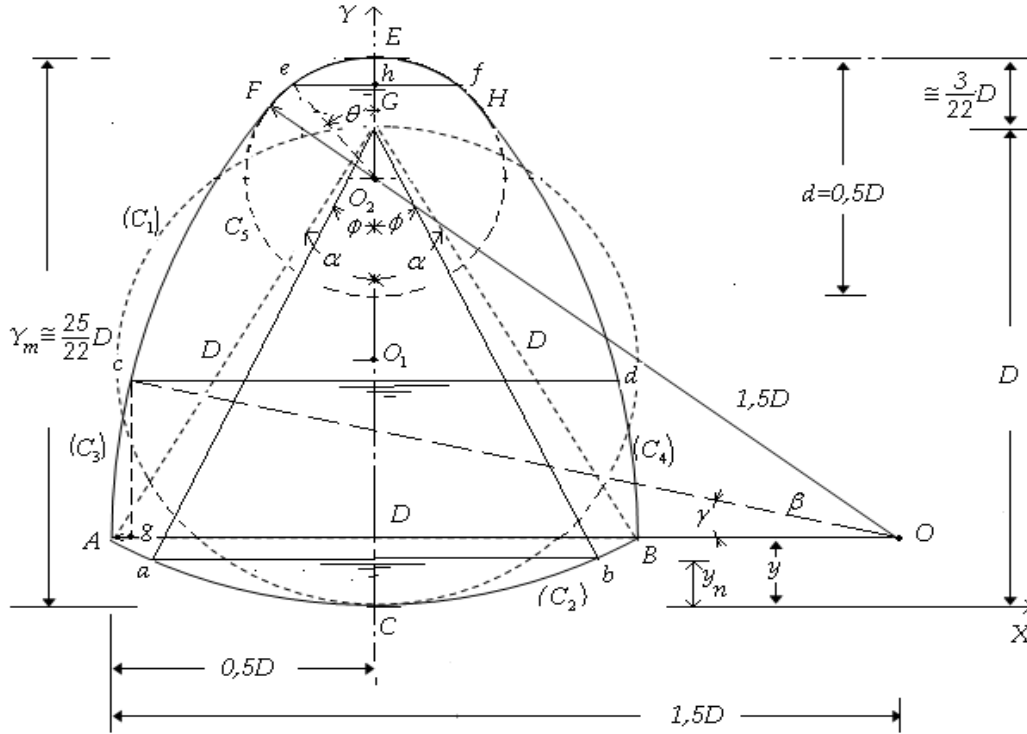


Figure 3.2.III. Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite ovoïdale à radier aplati.

$$1) \quad \eta \leq 0,11814603$$

a. Largeur du plan d'eau :

Lorsque $\eta \leq 0,11814603$, la largeur du plan d'eau e correspond à la corde \overline{ab} . Les points a et b appartiennent au cercle (C_2) , de centre G et de diamètre $2D$.

$$\text{Ainsi : } e = 2D \sin(\phi)$$

Ou bien

$$e = 2D \sqrt{1 - \cos^2(\phi)}$$

Où l'angle ϕ est le demi angle au centre, tel que :

$$\cos(\phi) = 1 - \frac{y_n}{D} = 1 - 1,1339746 \frac{y_n}{Y_m} = 1 - 1,1339746\eta$$

$$\phi = \cos^{-1}(1 - 1,1339746\eta)$$

$$\sin(\phi) = \sqrt{1 - \cos^2(\phi)} = 1,1339746 \sqrt{\eta(1,76370794 - \eta)}$$

$$e = 2,2679492D \sqrt{\eta(1,76370794 - \eta)} \quad (3.1.III)$$

La longueur de la corde \overline{AB} correspond à la valeur de e pour $\eta = 0,11814603$ soit :

$$\overline{AB} = 2,2679492D \sqrt{\eta(1,76370794 - \eta)} = 2,2679492D \sqrt{0,11814603 \times (1,76370794 - 0,11814603)} = D$$

b. Périmètre mouillé

Le périmètre mouillé P correspond à la longueur de l'arc \widehat{ab} , appartenant au cercle (C_2) , de centre G et de diamètre $2D$ est égal à $P = 2\phi D$. Ainsi :

$$P = 2D \cos^{-1}(1 - 1,1339746\eta) \quad (3.2.III)$$

Définissons la fonction :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 1,1339746\eta) \quad (3.3.III)$$

La relation (3.2.III) devient :

$$P = 2D\sigma(\eta) \quad (3.4.III)$$

La longueur de l'arc \widehat{AB} correspond à la valeur particulière de P pour $\eta = 0,11814603$ soit :

$$\widehat{AB} = 2D\sigma(\eta = 0,11814603) = 2 \times D \times \cos^{-1}(1 - 1,1339746 \times 0,11814603) = 1,04719756D$$

c. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspond à l'aire du segment circulaire $aCba$, appartenant au cercle (C_2) , de centre G et de diamètre $2D$ est égal à :

$$A = \frac{1}{2} D^2 [2\phi - \sin(2\phi)] = D^2 [\phi - \sin(\phi) \cos(\phi)]$$

Soit :

$$A = D^2 \left[\cos^{-1}(1 - 1,1339746\eta) - 1,1339746(1 - 1,1339746\eta) \sqrt{\eta(1,76370794 - \eta)} \right] \quad (3.5.III)$$

Définissons la fonction :

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{1,1339746(1 - 1,1339746\eta) \sqrt{\eta(1,76370794 - \eta)}}{\cos^{-1}(1 - 1,1339746\eta)} \quad (3.6.III)$$

La relation (3.5.III) permet d'écrire :

$$A = D^2 \sigma(\eta) \varphi(\eta) \quad (3.7.III)$$

d. Rayon hydraulique

Les relations (3.7.III) et (3.4.III) permettent de déduire que le rayon hydraulique $R_h = A/P$ est :

$$R_h = \frac{D}{2} \varphi(\eta) \quad (3.8.III)$$

2) $0,11814603 \leq \eta \leq 0,9118146$

a. Largeur du plan d'eau :

Lorsque $0,11814603 \leq \eta \leq 0,9118146$, la largeur du plan d'eau e correspond à \overline{cd} (fig. 3.2.III). Le point c appartient au cercle (C_3) de centre de centre O et de rayon $1,5D$. L'équation de ce cercle est :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (1,5D)^2 \quad (3.9.III)$$

Où x_0 et y_0 sont les coordonnées du point O . Dans le système d'axes XC_Y de la figure 3.2.III, le point O a pour coordonnées $x_0 = D$ et $y_0 = y = 0,13397460D$. Dans le même système d'axes, le point c a pour coordonnées $x = -e/2$ et $y = y_n$. La relation (3.9.III) s'écrit alors :

$$\left(\frac{e}{2} + D\right)^2 + (y_n - 0,13397460D)^2 = (1,5D)^2$$

En divisant les deux membres de cette équation par D^2 , il vient que :

$$\left(\frac{e}{2D} + 1\right)^2 + \left(\frac{y_n}{D} - 0,13397460\right)^2 = (1,5)^2$$

Soit :

$$\left(\frac{e}{2D} + 1\right)^2 = \left[1,5 - \left(\frac{y_n}{D} - 0,13397460\right)\right] \left[1,5 + \left(\frac{y_n}{D} - 0,13397460\right)\right]$$

La largeur du plan d'eau e est donc après calcul :

$$e = 2,2679492D \left[\sqrt{(1,44092698 - \eta)(1,20463492 + \eta)} - 0,88185397 \right] \quad (3.10.III)$$

b. Périmètre mouillé

Lorsque $0,11814603 \leq \eta \leq 0,9118146$, le périmètre mouillé P correspond à deux fois la longueur de l'arc \widehat{Ac} , à laquelle il faut rajouter la longueur de l'arc de cercle \widehat{AB} .

- La longueur de l'arc \widehat{Ac} est égale :

$$\widehat{Ac} = (1,5D)\gamma = \frac{3}{2}D\gamma$$

γ Peut être déterminé par :

$$\sin(\gamma) = \frac{\overline{cg}}{1,5D} = \frac{2}{3} \frac{(y_n - y)}{D} = \frac{2}{3} \left(\frac{y_n}{D} - \frac{y}{D} \right) = 0,75598307 \left(\frac{y_n}{Y_m} - \frac{y}{Y_m} \right)$$

Soit :

$$\sin(\gamma) = 0,75598307(\eta - 0,11814603) \quad (3.11.III)$$

Il vient alors :

$$\gamma = \sin^{-1} \left[0,75598307(\eta - 0,11814603) \right] \quad (3.12.III)$$

La longueur de l'arc \widehat{Ac} est tel que :

$$\widehat{Ac} = \frac{3}{2}D\gamma = \frac{3}{2}D \sin^{-1} \left[0,75598307(\eta - 0,11814603) \right] \quad (3.13.III)$$

- La longueur \widehat{AB} a été évaluée au point 3 des caractéristiques géométriques $\widehat{AB} = 1,04719757D$.

Le périmètre mouillé est donc égal :

$$P = 2\widehat{Ac} + \widehat{AB} = 2 \times \frac{3}{2} \times D \sin^{-1} \left[0,75598307(\eta - 0,11814603) \right] + 1,04719757D$$

Soit :

$$P = D \left[3 \sin^{-1} \left[0,75598307(\eta - 0,11814603) \right] + 1,04719757 \right] \quad (3.14.III)$$

Définissons la fonction :

$$\vartheta(\eta) = 3 \sin^{-1} \left[0,75598307(\eta - 0,11814603) \right] + 1,04719757 \quad (3.15.III)$$

Le périmètre est donc égal à :

$$P = D\vartheta(\eta) \tag{3.16.III}$$

c. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspondant à $0,1339746 \leq \eta \leq 1,0339746$ est définie par l'espace $Ac\overline{d}BCA$ de la figure 3.2.III. L'aire de la section A peut être décomposée en trois aires qui sont :

- 2 A_0 , où A_0 est l'aire de la section du segment circulaire de corde \overline{Ac} .
- A_1 , l'aire du trapèze $cdBA$ dont les caractéristiques sont :
 - Petite base = largeur du plan d'eau = e , définie par la relation (3.10.III)
 - Grande base $AB = D$, déterminée par la relation (3.1.III) lorsque $\eta = 0,11814603$.
 - Hauteur $h = (y_n - y) = y_n - 0,1339746D$
- A_2 , l'aire du segment circulaire $ACBA$.

L'aire de la section A recherchée est donc $A = 2A_0 + A_1 + A_2$.

L'aire A_0 est celle du segment circulaire de corde \overline{Ac} , appartenant au cercle (C_3) de centre O et de rayon $1,5D$, son angle au centre est γ . Nous pouvons ainsi écrire que, pour γ exprimé en radian :

$$A_0 = \frac{1}{2}(1,5D)^2[\gamma - \sin(\gamma)] \tag{3.17.III}$$

Ou bien :

$$2A_0 = \frac{9}{4}D^2[\gamma - \sin(\gamma)] \tag{3.18.III}$$

En tenant compte des relations (3.11.III) et (3.12.III), la relation (3.18.III) s'écrit après calcul :

$$2A_0 = D^2 \left\{ \frac{9}{4} \sin^{-1} [0,75598307(\eta - 0,11814603)] - [1,70096191(\eta - 0,11814603)] \right\} \tag{3.19.III}$$

L'aire de la section A_1 du trapèze $cdBA$ s'écrit :

$$A_1 = \frac{(e + D)}{2}(y_n - 0,1339746D) \tag{3.20.III}$$

En tenant compte de la relation (3.10.III), la relation (3.20.III) devient après calcul et réarrangement :

$$A_1 = 1,28589839D^2(\eta - 0,11814603) \left[\sqrt{(1,44092698 - \eta)(1,20463492 + \eta)} - 0,44092699 \right] \tag{24}$$

L'aire A_2 du segment circulaire $ACBA$ est donnée par la relation (3.7.III) pour $\eta = 0,11814603$, soit après calcul :

$$A_2 = 0,09058607D^2 \tag{3.21.III}$$

Finalement, l'aire recherchée $A = 2A_0 + A_1 + A_2$ est, compte tenu des relations (3.19.III), (24) et (3.21.III) s'écrit :

$$A = D^2 \left[\begin{array}{l} \frac{9}{4} \sin^{-1} [0,75598307(\eta - 0,11814603)] \\ +(\eta - 0,11814603) \left[1,28589839 \sqrt{(1,44092698 - \eta)(1,20463492 + \eta)} - 2,2679492 \right] \\ +0,09058607 \end{array} \right] \tag{3.22.III}$$

Définissons, par souci de simplification d'écriture, la fonction :

$$\zeta(\eta) = \frac{9}{4} \sin^{-1} \left[0,75598307(\eta - 0,11814603) \right] \\ + (\eta - 0,11814603) \left[1,28589839 \sqrt{(1,44092698 - \eta)(1,20463492 + \eta)} - 2,2679492 \right] \\ + 0,09058607 \quad (3.23.III)$$

La relation (3.22.III) s'écrit alors :

$$A = \zeta(\eta) D^2 \quad (3.24.III)$$

d. Rayon hydraulique

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$ s'écrit, en ayant recours aux relations (3.16.III) et (3.24.III) :

$$R_h = A/P = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \quad (3.25.III)$$

3) $0,9118146 \leq \eta \leq 1$

e. Largeur du plan d'eau

Lorsque $0,9118146 \leq \eta \leq 1$, la largeur du plan d'eau e correspond à la corde \overline{ef} . Les points e et f appartiennent au cercle (C_5) , de centre O_2 et de diamètre $D/2$. Ainsi :

$$e = \overline{ef} = 2 \frac{D/2}{2} \sin(\theta) = \frac{1}{2} D \sin(\theta)$$

Dans le triangle rectangle ΔeO_2h on peut écrire :

$$\overline{eh} = e/2 \quad (3.26.III)$$

$$\overline{O_2h} = y_n - \overline{O_2C} = y_n - (\overline{EC} - \overline{EO_2})$$

Soit :

$$\overline{O_2h} = y_n - (1,1339746D - 0,25D) = y_n - 0,8839746D \quad (3.27.III)$$

Par ailleurs on a :

$$\overline{eh}^2 + \overline{O_2h}^2 = (D/4)^2 \quad (3.28.III)$$

Les relations (3.26.III), (3.27.III) et (3.28.III) mènent à écrire que :

$$(e/2)^2 + (y_n - 0,8839746D)^2 = (D/4)^2 \quad (3.29.III)$$

Ou bien :

$$(e/2)^2 = (0,25D)^2 - (1,1339746\eta D - 0,8839746D)^2 \quad (3.30.III)$$

On tire de cette dernière relation, après calcul l'expression de la largeur du plan d'eau e :

$$e = 2,2679492D \sqrt{(\eta - 0,55907302)(1 - \eta)} \quad (3.31.III)$$

f. Périmètre mouillé

Pour $0,9118146 \leq \eta \leq 1$, le périmètre mouillé correspond à la somme des périmètres :

- $P_0 =$ Deux fois la longueur de l'arc \widehat{Fe}
- $P_1 =$ Deux fois la longueur de l'arc \widehat{FA}

- $P_2 =$ La longueur de l'arc \widehat{AB} .

La longueur de l'arc \widehat{Fe} peut être déterminée par :

$$\widehat{Fe} = \widehat{FE} - \widehat{eE} = \frac{\widehat{FH}}{2} - \widehat{eE} \quad (3.32.III)$$

Par ailleurs la longueur de l'arc \widehat{eE} est égale :

$$\widehat{eE} = \left(\frac{D/2}{2}\right)\phi = \frac{1}{4}D\phi \quad (3.33.III)$$

Or dans le triangle ΔehO_2 , et en utilisant la relation (3.27.III), l'angle θ est tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{\overline{hO_2}}{O_2e} = \frac{y_n - 0,8839746D}{(0,5D/2)} = 4y_n - 3,5358984$$

$$\cos(\theta) = 4,5358984\eta - 3,5358984 \quad (3.34.III)$$

Soit :

$$\theta = \cos^{-1}(4,5358984\eta - 3,5358984) \quad (3.35.III)$$

Tenant compte de la valeur de l'arc \widehat{FH} déterminée au point 7 des caractéristiques géométriques, de (3.33.III) et de (3.35.III), la relation (3.32.III) devient :

$$\widehat{Fe} = \frac{\widehat{FEH}}{2} - \widehat{eE} = \frac{0,46364761D}{2} - \frac{1}{4}D \cos^{-1}(4,5358984\eta - 3,5358984) \quad (3.36.III)$$

Le périmètre P_0 est égal à $2 \times \widehat{Fe}$, alors on a :

$$P_0 = D \left[0,4636476 - 0,5 \cos^{-1}(4,5358984\eta - 3,5358984) \right] \quad (3.37.III)$$

Le périmètre P_1 est égal à deux fois la longueur \widehat{FA} (point 5 des caractéristiques géométriques) :

$$P_1 = 2\widehat{FA} = 2 \times 0,96525166D = 1,93050332D \quad (3.38.III)$$

Le périmètre P_2 est égal à la longueur de l'arc \widehat{AB} (point 3 des caractéristiques géométriques), soit :

$$P_2 = \widehat{AB} = 1,04719756D \quad (3.39.III)$$

Le périmètre $P = P_0 + P_1 + P$ ainsi recherché est obtenu en faisant la somme des périmètres obtenus par les relations (3.37.III), (3.38.III) et (3.39.III), on trouve :

$$P = D \left[3,44134848 - 0,5 \cos^{-1}(4,5358984\eta - 3,5358984) \right] \quad (3.40.III)$$

Définissons la fonction :

$$\tau(\eta) = 3,44134848 - 0,5 \cos^{-1}(4,5358984\eta - 3,5358984) \quad (3.41.III)$$

La relation (3.40.III) s'écrit alors :

$$P = D\tau(\eta) \quad (3.42.III)$$

g. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A, dans le cas où $0,9118146 \leq \eta \leq 1$, correspond à l'espace $AefBCA$ de la figure 3.2.III. Cette aire est la somme des aires $AFHBCA$ et $FefHF$.

Désignons par A_0 l'aire de la section $AFHBCA$. Cette aire est donnée par la relation (3.22.III) après avoir remplacé η par la valeur $\eta = 0,9118146$, soit après remplacement et calcul :

$$A_0 = 0,81846356D^2 \quad (3.43.III)$$

Désignons également par A_1 l'aire de la section mouillée du segment circulaire $FefHF$. Ce segment appartient au cercle (C_5) de centre O_2 et de rayon $D/4$, son aire peut être déduite en retranchant de la surface A_2 du segment circulaire $FEHF$ la surface A_3 du segment circulaire $eEfe$. Il vient donc que :

$$A_1 = A_2 - A_3.$$

L'aire A_2 du segment circulaire $FEHF$ est égale à :

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{(0,5D/2)^2}{2} [(\pi - 2\beta) - \sin(\pi - 2\beta)] \\ &= \frac{(0,5/2)^2}{2} [(\pi - 2 \times 0,64350111) - \sin(\pi - 2 \times 0,64350111)] D^2 = 0,02795595D^2 \end{aligned} \quad (3.44.III)$$

L'aire A_3 du segment $eEfe$, est déterminée, pour l'angle θ exprimé en radian, par l'expression :

$$A_3 = \frac{(D/4)^2}{2} [2\theta - \sin(2\theta)] \quad (3.45.III)$$

Soit :

$$A_3 = \frac{(D/4)^2}{2} [2\theta - 2\sin(\theta)\cos(\theta)] = \left(\frac{D}{4}\right)^2 [\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)] \quad (3.46.III)$$

Or dans le triangle ΔehO_2 , l'angle θ est tel que :

$$\sin(\theta) = \frac{\overline{eh}}{(0,5D/2)} = \frac{(e/2)}{(0,5D/2)} = 2 \frac{e}{D}$$

En utilisant la relation (3.31.III) il vient :

$$\sin(\theta) = 4,5358984\sqrt{(\eta - 0,55907302)(1 - \eta)} \quad (3.47.III)$$

En tenant compte des relations (3.47.III), (3.34.III) et (3.35.III), l'aire A_3 donnée par la relation (3.46.III) est donc égale :

$$A_3 = \frac{D^2}{16} \left[\cos^{-1}(4,5358984\eta - 3,5358984) - 20,5743743(\eta - 0,77953651)\sqrt{(\eta - 0,55907302)(1 - \eta)} \right] \quad (3.48.III)$$

L'aire ainsi recherchée, est égale à :

$$A = A_0 + A_1 = A_0 + (A_2 - A_3)$$

Il vient donc en utilisant les relations (3.43.III), (3.44.III) et (3.48.III), que l'aire A , ainsi recherchée est égale après calcul, simplification et réarrangement à :

$$A = D^2 \left[\begin{aligned} &0,84641951 - \frac{1}{16} \cos^{-1}(4,4358984\eta - 3,5358984) \\ &+ 1,28589839(\eta - 0,77953651)\sqrt{(\eta - 0,55907302)(1 - \eta)} \end{aligned} \right] \quad (3.49.III)$$

Définissons la fonction :

$$\lambda(\eta) = \left[\begin{array}{l} 0,84641951 - \frac{1}{16} \cos^{-1}(4,5358984\eta - 3,5358984) \\ +1,28589839(\eta - 0,77953651)\sqrt{(\eta - 0,55907302)(1 - \eta)} \end{array} \right] \quad (3.50.III)$$

La relation (3.49.III) s'écrit alors plus simplement :

$$A = D^2 \lambda(\eta) \quad (3.51.III)$$

Pour l'état plein, correspondant au taux de $\eta = 1$, la relation (3.49.III) mène à écrire que :

$$A_{p(ORA)} = 0,84641951D^2 \quad (3.52.III)$$

L'aire de la conduite circulaire pleine de diamètre D est égale à $A_{p(c)} = \pi D^2 / 4$.

Par suite, nous pouvons déduire que :

$$\frac{A_{p(ON)}}{A_{p(c)}} (\%) = \frac{0,84641951D^2}{\pi D^2 / 4} \times 100 \cong 107,8\% \quad (3.53.III)$$

La conduite en forme d'ovoïde à radier aplati occupe 107,8% de la surface de la conduite circulaire.

h. Rayon hydraulique

Lorsque $0 \leq \eta \leq 1,1339746$, le rayon $R_h = A/P$ s'exprime, compte tenu des relations (3.42.III) et (3.51.III), par :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \quad (3.54.III)$$

Variation des caractéristiques de l'écoulement

La caractéristique adimensionnelle de l'écoulement, en particulier le rayon hydraulique relatif $R_h/D = R_{h1}$ est représenté sur les figures 3 dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$. le paramètre R_h/D passe par un maximum pour le taux $\eta = 0,742$. En application de la relation (3.22.III) et on introduisant les valeurs $A_1 = \zeta(\eta = 0,742)$ et $P_1 = \vartheta(\eta = 0,742)$, on a : $R_{h,max} = 0,2842528D$

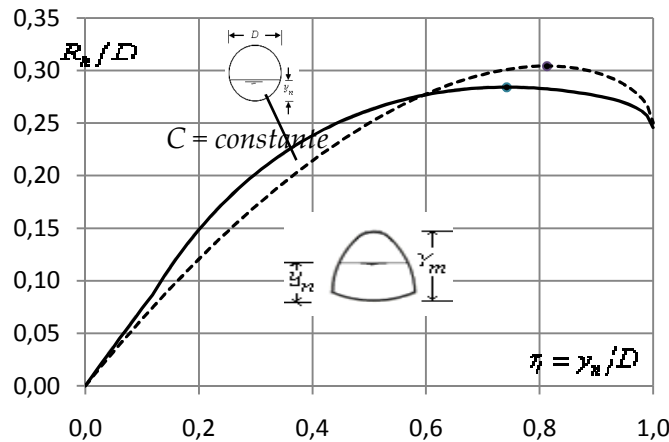


Figure 3.3.III : Variation du rayon hydraulique relatif R_h/D en fonction du taux η .

(●) Taux de remplissage correspondant à $R_{h,max} / D$.

Ainsi, nous avons exprimé dans le tableau suivant les paramètres adimensionnels A_1, P_1, R_{h1} et e_1 selon le taux de remplissage $\eta = y_n/Y_m = 1,1339746 y_n/D$.

Tableau 1 des paramètres adimensionnels

| | Expressions des fonctions de η | | | A l'état plein $\eta = 1$ |
|---------------------|---|--|-------------------------------------|------------------------------|
| $\sigma(\eta) =$ | $\cos^{-1}(1-1,1339746\eta)$ | | | |
| $\varphi(\eta) =$ | $1 - \frac{1,1339746(1-1,1339746\eta)\sqrt{\eta(1,76370794-\eta)}}{\cos^{-1}(1-1,1339746\eta)}$ | | | |
| $\vartheta(\eta) =$ | $3 \sin^{-1} [0,75598307(\eta - 0,11814603)] + 1,04719757$ | | | |
| $\zeta(\eta) =$ | $\frac{9}{4} \sin^{-1} [0,75598307(\eta - 0,11814603)]$ $+ (\eta - 0,11814603) [1,28589839\sqrt{(1,44092698 - \eta)(1,20463492 + \eta)} - 2,2679492]$ $+ 0,09058607$ | | | |
| $\tau(\eta) =$ | $3,44134848 - 0,5 \cos^{-1}(4,5358984\eta - 3,5358984)$ | | | 3,44134847 |
| $\lambda(\eta) =$ | $\left[0,84641951 - \frac{1}{16} \cos^{-1}(4,5358984\eta - 3,5358984) \right]$ $+ 1,28589839(\eta - 0,77953651)\sqrt{(\eta - 0,55907302)(1 - \eta)}$ | | | 0,84641951 |
| e_1 | $e_1 = 2,2679492\sqrt{\eta(1,76370794 - \eta)}$ pour $\eta \leq 0,11814603$ $e_1 = 2,2679492 \left[\sqrt{(1,44092698 - \eta)(1,20463492 + \eta)} - 0,88185397 \right]$ $e_1 = 2,2679492\sqrt{(\eta - 0,55907302)(1 - \eta)}$ pour $0,9118146 \leq \eta \leq 1$ | | | |
| Par.dim | $\eta \leq 0,11814603$ | $0,11814603 \leq \eta \leq 0,9118146$ | $0,9118146 \leq \eta \leq 1$ | |
| A_1 | $A_1 = \sigma(\eta)\varphi(\eta)$ | $A_1 = \zeta(\eta)$ | $A_1 = \lambda(\eta)$ | $A_{1p} = 0,84641951$ |
| P_1 | $P_1 = 2\sigma(\eta)$ | $P_1 = \vartheta(\eta)$ | $P_1 = \tau(\eta)$ | $P_{1p} = 3,44134847$ |
| R_{h1} | $R_{h1} = \varphi(\eta)/2$ | $R_{h1} = \zeta(\eta)/\vartheta(\eta)$ | $R_{h1} = \lambda(\eta)/\tau(\eta)$ | $R_{h1p} = 0,24595577$ |

On choisira dans l'étude de la conduite ovoïdale à radier aplati, la dimension linéaire a figurant dans les relations (1.41), (1.42), (1.43) et (1.44) le diamètre caractéristique de la conduite D .

3.2. Ecoulement à coefficient de résistance de Chézy invariable.

3.2.1. Variation de la conductivité relative $\eta(Q^*)$ pour C constant.

Rappelons que selon Chézy la conductivité relative s'exprime par la relation (2.25). En faisant varier A_1 et P_1 , selon le taux η , La conductivité Q^* a été représentée sur la figure 3.4.III, dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$.

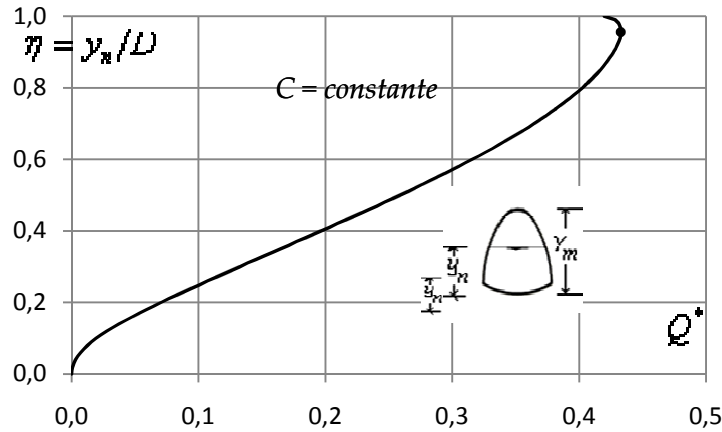


Figure 3.4.II : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction du taux de remplissage η

Courbe tracée selon la relation (2.25). (●) - $Q_{\max}^* = 0,2338$ pour $\eta = 0,9617$.

La conductivité Q^* augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η , jusqu'à un maximum correspondant à $\eta = 0,9563$, puis diminue au-delà de ce maximum.

A l'état plein, on a, en introduisant $A_{1p} = 0,84641951$ et $P_{1p} = 3,44134847$ dans la relation (2.25) :

$$Q_p^* = 0,41977268 = \text{constante} \quad (3.55.III)$$

En outre la conductivité Q_{\max}^* correspondant $\eta = 0,9563$ est déterminée par application de la relation (2.25) en introduisant les valeurs $A_1(\eta = 0,9563) = 0,83633402$ et $P_1(\eta = 0,9563) = 3,12108524$:

$$Q_{\max}^* = 0,43292915 \quad (3.56.III)$$

On peut tirer des relations (3.55.III) et (3.56.III) que $Q_{\max}^* = 1,0313419Q_p$

En remplaçant A_1 et P_1 par selon l'intervalle de η , La conductivité relative Q^* est telle que :

- $0 \leq Q^* \leq 0,02664268$, correspondant à $\eta \leq 0,11814603$
- $0,02664268 \leq Q^* \leq 0,42909998$, correspondant à $0,11814603 \leq \eta \leq 0,9118146$
- $0,42909998 \leq Q^* \leq 0,43292915$, correspondant à $0,9118146 \leq \eta \leq 1$.

Afin d'évaluer explicitement la valeur du taux $\eta(Q^*)$ à partir des données du problème C, Q, D , et J , nos calculs ont montré que dans la gamme pratique $0,20 \leq \eta \leq 0,83$ correspondant à

$0,07063 \leq Q^* \leq 0,41146$ la relation (2.25) peut être remplacée par la relation approchée suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,876}\eta\right) = -1,81Q^{*2} + 2,793Q^* + 0,142 \quad (3.57.III)$$

L'écart relatif maximal $\Delta\eta/\eta$ occasionné par le calcul à de (3.57.III) est inférieur à 0,49%.

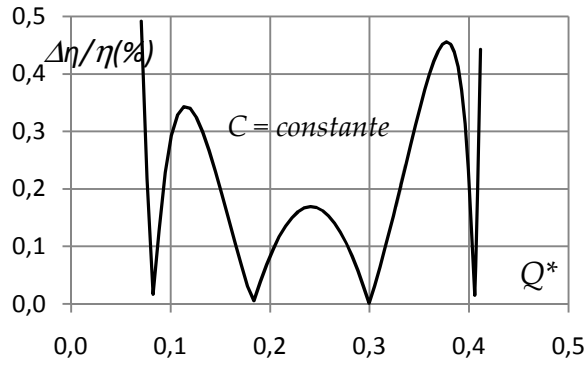


Figure 3.5.III : Ecarts $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par la relation approchée (3.57.III) sur le calcul du taux η , dans la gamme $0,20 \leq \eta \leq 0,83$ correspondant à $0,07063 \leq Q^* \leq 0,41146$.

3.2.2. Courbe de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ pour C constant.

La courbe de remplissage pour C constant, se traduit par la variation du paramètre de forme $\eta(Q/Q_p)$.

Tenant des relations (2.25), (2.29) et (3.55.III), nous pouvons écrire :

$$\frac{Q}{Q_p} = 2,382 \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \quad (3.58.III)$$

On peut déduire de la relation approchée (3.57.III) obtenue précédemment qui suit :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,876}\eta\right) = -1,81Q^{*2} + 2,793Q^* + 0,142 = -1,81\left[Q_p^*\left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)\right]^2 + 2,793Q_p^*\left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right) + 0,142$$

Par ailleurs la relation (3.55.III) donne $Q_p^* = 0,41977268$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,876}\eta\right) = -1,81 \times 0,41977268^2 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^2 + 2,793 \times 0,41977268 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right) + 0,142$$

Après calcul et en utilisant (2.29) on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,876}\eta\right) = -0,319 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^2 + 1,1724 \left(\frac{Q}{Q_p}\right) + 0,142 \quad (3.59.III)$$

La relation (3.59.III) est valable pour $0,20 \leq \eta \leq 0,83$ correspondant à $0,1683 \leq Q/Q_p \leq 0,982$

L'écart relatif maximal occasionné par cette relation approchée est inférieur à 0,49%.

3.2.3. Relation $\eta(Q/Q_{\max})$ pour C constant

En tenant compte des relations (2.25), (2.32) et (3.56.III) nous pouvons alors écrire que pour :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 2,31 \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \quad (3.60.III)$$

On peut déduire de la relation approchée (3.57.III) obtenue précédemment qui suit :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,876}\eta\right) = -1,81Q^{*2} + 2,793Q^* + 0,142 = -1,81\left[Q_{\max}^* \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)\right]^2 + 2,793Q_{\max}^* \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right) + 0,142$$

Par ailleurs on sait que selon la relation (3.56.III) : $Q_{\max}^* = 0,43292915$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,876}\eta\right) = -1,81 \times 0,43292915^2 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^2 + 2,793 \times 0,43292915 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right) + 0,142$$

Après calcul et en utilisant (2.32) on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,876}\eta\right) = -0,339 \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^2 + 1,209 \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right) + 0,142 \quad (3.61.III)$$

La relation (3.61.III) est valable pour $0,20 \leq \eta \leq 0,83$ correspondant à $0,1631 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,9504$

L'écart relatif maximal occasionné par cette relation est inférieur à 0,48%.

Exemple d'application 1

Soit à déterminer la profondeur normale dans une conduite ovoïdale à radier aplati de diamètre

$D = 2\text{ m}$, écoulant un débit $Q = 3,04\text{ m}^3/\text{s}$ sous une pente $J = 0,0004$. Le coefficient $C = 85\text{ m}^{0,5}/\text{s}$.

Solution :

On peut déterminer le problème de trois manières suivantes :

8. Avec la conductivité relative Q^* :

i. Déterminons la conductivité relative par la relation de définition (2.25) :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 J}} = \frac{3,04}{\sqrt{85^2 \times 2^5 \times 0,0004}} = 0,31611832 < Q_{\max}^*$$

ii. Q^* est tel que $0,07063 \leq Q^* \leq 0,41146$, l'application de (3.57.III) permet de trouver le taux η :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1,876}{\pi} \sin^{-1} \left[-1,81Q^{*2} + 2,793Q^* + 0,142 \right] \\ &= \frac{1,876}{\pi} \sin^{-1} \left[-1,81 \times 0,31611832^2 + 2,793 \times 0,31611832 + 0,142 \right] = 0,60000342 \cong 0,6 \end{aligned}$$

iii. La profondeur moyenne est déduite :

$$y_n = \eta Y_m = 1,1339746 \eta D = 0,6 \times 1,1339746 \times 2 = 1,36076952\text{ m} \cong 1,36\text{ m}.$$

9. Avec la relation $\eta(Q/Q_p)$:

v. Le rapport $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$ ou $Q_p^* = 0,41977268$ et selon la relation (2.29) on a :

$$Q/Q_p = Q^*/Q_p^* = 0,31611832 / 0,41977268 = 0,75307026$$

iv. Q/Q_p est tel que $0,1683 \leq Q/Q_p \leq 0,982$ et le η est régi par la relation (3.59.III) :

$$\eta = \frac{1,876}{\pi} \sin^{-1} \left(-0,319 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^2 + 1,1724 \left(\frac{Q}{Q_p} \right) + 0,142 \right)$$

$$= \frac{1,876}{\pi} \times \sin^{-1} \left(-0,319 \times 0,75307026^2 + 1,1724 \times 0,75307026 + 0,142 \right) = 0,59994353 \cong 0,6$$

Il s'agit bien de la valeur de η obtenue au point 1-ii

10. Avec la relation $\eta(Q/Q_{\max})$

vii. Le rapport $Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^*$ et $Q_{\max}^* = 0,43292915$. Ainsi :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{Q^*}{Q_{\max}^*} = \frac{0,31611832}{0,43292915} = 0,73018488$$

viii. On obtient alors par application de la relation approchée (3.61.III) :

$$\eta = \frac{1,876}{\pi} \sin^{-1} \left(-0,339 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^2 + 1,209 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right) + 0,142 \right)$$

$$= \frac{1,876}{\pi} \times \sin^{-1} \left(-0,339 \times 0,73018488^2 + 1,209 \times 0,73018488 + 0,142 \right) = 0,60000917 \cong 0,6$$

La aussi, la valeur η est bien celle déterminé au point 1-ii et au point 2-ii.

Vérification : Pour le résultat obtenu déterminons le débit volume Q par la formule de Chézy. Pour cela recherchons A et R_h pour un taux de remplissage $\eta = 0,6$. On doit d'abord déterminer A_1 et P_1 , comme $2/3 \leq \eta \leq 1$ on a selon le tableau des par.dim. :

$$A_1 = \zeta(\eta = 0,6) = 0,59998507 \quad P_1 = \vartheta(\eta = 0,6) = 2,16575514$$

- La surface mouillée est selon (2.11) : $A = A_1 D^2 = 0,59998507 \times 2^2 = 2,39994028 m^2$

- le rayon hydraulique est selon (2.18): $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 2 \times \frac{0,59998507}{2,16575514} = 0,55406547 m$

- le débit volume serait donc :

$$Q = CA \sqrt{R_h J} = 85 \times 2,39994028 \sqrt{0,55406547 \times 0,0004} = 3,03689587 m^3/s$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est égal à 0,1 % seulement.

3.2.4. Conductivité relative Q_y^* rapportée à la profondeur normale.

La conductivité relative rapportée à la profondeur normale a été trouvée au chapitre 2 et elle s'exprime par la relation (2.38) lorsque $y_n = \eta D$, mais dans le cas d'une conduite ovoïdale à radier aplati y_n a été définie comme suit $y_n = \eta Y_m$ ou $y_n = 1,1339746 \eta D$. La relation (2.38) devient alors :

$$Q_y^* = 0,73 \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \eta^{-5/2} \tag{3.62.III}$$

Pour $0 \leq \eta \leq 1$, impliquant la relations (3.62.III) la variation de Q_y^* a été représentée sur la figure 3.6.III. Le calcul a montré que pour $\eta \leq 1$, $Q_y^* \geq 0,3064$ tandis que pour la conduite circulaire $Q_y^* \geq 0,3927$.

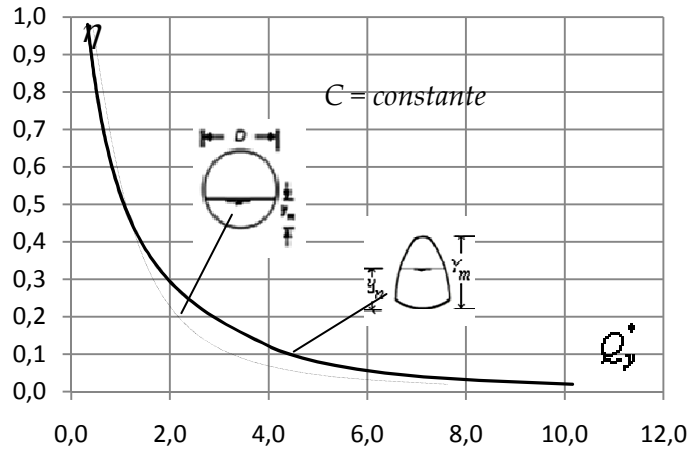


Figure 3.6.III : Variation de la conductivité relative Q_y^* en fonction du taux de remplissage η .

(---) Conduite circulaire. (—) Conduite ovoïdale à radier aplati.

La relation (2.38) a fait l'objet d'une étude particulière qui a consisté à déterminer une relation explicite qui lui est approchée. Le calcul a montré que pour $0,22 \leq \eta \leq 0,98$, correspondant à $0,3398 \leq Q_y^* \leq 2,6541$, le taux η est tel que :

$$\sinh\left(\frac{\pi}{1,196} \eta\right) = 1,87 Q_y^{*-1,141} \quad (3.63.III)$$

L'écart relatif maximal $\Delta\eta/\eta$ occasionné par la relation approchée (3.63.III) est inférieur à 0,50%.

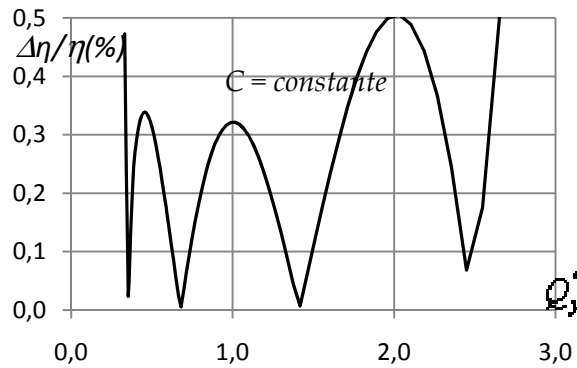


Figure 3.7.III : Ecart relatif occasionnés par (3.63.III) sur le calcul du taux de remplissage η .

Exemple d'application 2

Reprenons les données de l'exemple 1 et évaluons cette fois-ci le diamètre D de la conduite.

Les données sont donc : $Q=3,04 \text{ m}^3/\text{s}$ $C=85 \text{ m}^{0.5}/\text{s}$ $J=0,0004$ $y_n=1,36 \text{ m}$

Solution :

Pour les données du problème, la conductivité relative rapportée à y_n est selon la relation (2.36) :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 J y_n^5}} = \frac{3,04}{\sqrt{85^2 \times 0,0004 \times 1,36^5}} = 0,82904364$$

La conductivité est $0,3398 \leq Q_y^* \leq 2,6541$ et le taux η est donc régi par la relation (3.63.III) :

$$\eta = \frac{1,196}{\pi} \sinh^{-1} \left(2,678 Q_y^{*-1,141} \right) = \frac{1,196}{\pi} \times \sinh^{-1} \left(1,87 \times 0,82904364^{-1,141} \right) = 0,60022954 \cong 0,6$$

Il s'agit bien de la valeur proche de η , calculée au cours des étapes 1-ii, 2-ii et 3-ii de l'exemple 1. Par suite, le diamètre D recherché est :

$$D = y_n / 1,1339746 \eta = 1,36 / 1,1339746 \times 0,6 = 1,99886899 m \cong 2 m$$

3.3. Ecoulement à coefficient de résistance de Manning invariable;

Selon Manning Strickler, la conductivité relative s'exprime par la relation (2.42) $Q^* = A_1^{5/3} / P_1^{2/3}$.

3.3.1. Variation de la conductivité relative $\eta(Q^*)$ pour n constant.

La variation $\eta(Q^*)$, pour n constant, de la relation (2.42), a été représentée sur la figure 3.8.III :

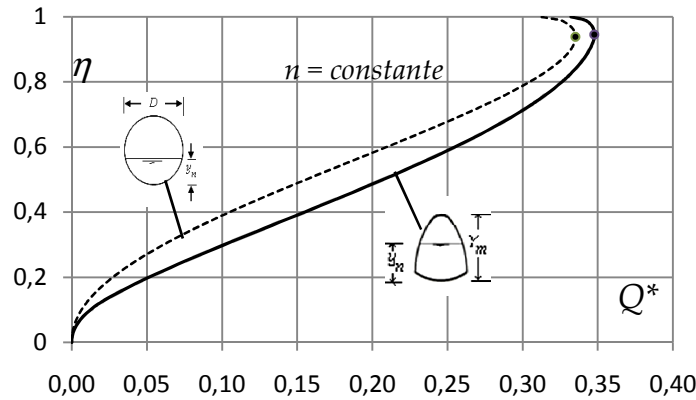


Figure 3.8.III : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction du taux η selon la formule de Manning Strickler. (●) $Q_{\max}^* = 0,347853$ pour $\eta = 0,9457$.

A l'état plein ($\eta = 1$), $A_{1p} = 0,84641951$ et $P_{1p} = 3,44134847$ la conductivité relative Q_p^* est égale :

$$Q_p^* = 0,3322694 = \text{constante} \quad (3.64.III)$$

Q^* augmente avec l'accroissement de η jusqu'à un maximum, puis diminue au-delà de ce maximum.

Pour le cas de la conduite ovoïdale à radier aplati, le taux de remplissage $\eta = 0,9457$, correspondant à

Q_{\max}^* . En utilisant les valeurs de $A_1 = \lambda(\eta = 0,9457) = 0,83255852$ et $P_1 = \tau(\eta = 0,9457) = 3,08278778$.

$$Q_{\max}^* = 0,34785282 \quad (3.65.III)$$

En remplaçant A_1 et P_1 par selon l'intervalle de η , La conductivité relative Q^* est telle que :

- $\eta \leq 0,11814603$ $0 \leq Q^* \leq 0,0177$
- $0,11814603 \leq \eta \leq 0,9118146$ $0,0177 \leq Q^* \leq 0,3460$
- $0,9118146 \leq \eta \leq 1$ $0,3460 \leq Q^* \leq 0,3479$

Afin d'évaluer de manière explicite la valeur du taux η , à partir de Q^* , nos calculs ont montré que dans la gamme $0,21 \leq \eta \leq 0,80$, correspondant à $0,0561 \leq Q^* \leq 0,3262$, la relation (2.42) pouvait être remplacée par la relation approchée suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,8}\eta\right) = -3,227Q^{*2} + 3,55Q^* + 0,171 \quad (3.66.III)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation (3.66.III) est inférieur à 0,49% (figure 3.9.III).

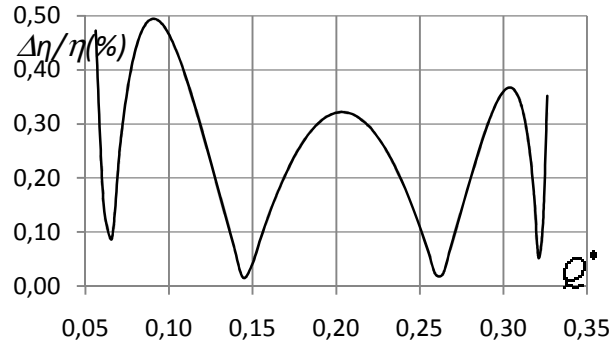


Figure 3.9.III : Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation (3.66.III) sur le calcul de η de la conduite à radier aplati dans gamme $0,21 \leq \eta \leq 0,8$ correspondant à $0,0561 \leq Q^* \leq 0,3262$.

3.3.2. Courbe de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ pour n constant.

La variation $\eta(Q/Q_p)$, pour n constant, s'écrit en tenant compte de (2.46), (2.42) et (3.64.III).

$$\frac{Q}{Q_p} = 3,01 \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \quad (3.67.III)$$

Le rapport Q/Q_p ne dépend que du taux η . Il apparaît que le taux η est implicite vis-à-vis de Q/Q_p .

On peut déduire de la relation approchée (3.67.III) obtenue précédemment ce qui suit :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,8}\eta\right) = -3,227Q^{*2} + 3,55Q^* + 0,171 = -3,227 \left[Q_p^* \left(\frac{Q^*}{Q_p^*} \right) \right]^2 + 3,55Q_p^* \left(\frac{Q^*}{Q_p^*} \right) + 0,171$$

Par ailleurs la relation (3.55.III) donne $Q_p^* = 0,3322694$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,8}\eta\right) = -3,227 \times 0,3322694^2 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*} \right)^2 + 3,55 \times 0,3322694 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*} \right) + 0,171$$

Après calcul et en utilisant (2.46), on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,8}\eta\right) = -0,356 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^2 + 1,18 \left(\frac{Q}{Q_p} \right) + 0,171 \quad (3.68.III)$$

La relation (3.68.III) est valable pour $0,21 \leq \eta \leq 0,80$ correspondant à $0,1688 \leq Q/Q_p \leq 0,9818$

Nos vérifications ont montré que l'écart maximal occasionné par cette relation est inférieur à 0,50%.

3.3.3. Relation $\eta(Q/Q_{\max})$ pour n constant

La variation $\eta(Q/Q_{\max})$, s'écrit en tenant compte de (2.49), (2.42) et de $Q_{\max}^* = 0,34785282$:

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 2,875 \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \quad (3.69.III)$$

Le rapport Q/Q_{\max} ne dépend que du taux η . On peut déduire de la relation de (3.70) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,8}\eta\right) = -3,227Q^{*2} + 3,55Q^* + 0,171 = -3,227 \left[Q_{\max}^* \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \right) \right]^2 + 3,55Q_{\max}^* \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \right) + 0,171$$

Par ailleurs on a déterminé précédemment que $Q_{\max}^* = 0,34785282$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,8}\eta\right) = -3,227 \times 0,34785282^2 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \right)^2 + 3,55 \times 0,34785282 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \right) + 0,171$$

Après calcul et en utilisant (2.49), on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,8}\eta\right) = -0,39 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^2 + 1,235 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right) + 0,171 \quad (3.70.III)$$

La relation (3.70.III) est valable pour $0,21 \leq \eta \leq 0,80$ ou $0,1613 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,9378$ et l'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (3.70.III) est inférieur à 0,50%.

Exemple d'application 3.

On souhaite déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans une conduite ovoïdale à radier aplati de diamètre $D = 2\text{ m}$, $Q = 2,84\text{ m}^3/\text{s}$, $J = 0,0005$, le coefficient de Manning est $n = 0,0148\text{ m}^{1/3}\text{ s}$.

Solution :

On peut déterminer le problème de trois manières suivantes :

10. Avec la conductivité relative $\eta(Q^*)$

i. Calculons la conductivité relative Q^* par application de la relation (2.42) :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3}\sqrt{J}} = \frac{0,0148 \times 2,84}{2^{8/3}\sqrt{5.10^{-4}}} = 0,29603864$$

ii. La conductivité est telle que $0,0561 \leq Q^* \leq 0,3262$, le taux η est, en vertu de (3.66.III) :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1,8}{\pi} \sin^{-1}(-3,227Q^{*2} + 3,55Q^* + 0,171) \\ &= \frac{1,8}{\pi} \times \sin^{-1}(-3,227 \times 0,29603864^2 + 3,55 \times 0,29603864 + 0,171) = 0,6990538 \cong 0,7 \end{aligned}$$

iii. La profondeur normale y_n recherchée est, par suite :

$$y_n = \eta Y_m = 1,1339746 \eta D = 1,1339746 \times 2 \times 0,7 = 1,58756444\text{ m} \cong 1,59\text{ m}$$

11. Avec le taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$

v. Compte tenu du fait que $Q_p^* = 0,3322694$ et que $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$, alors :

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{0,29603864}{0,3322694} = 0,89095968$$

vi. Le rapport Q/Q_p est $0,1688 \leq Q/Q_p \leq 0,9818$. le taux η peut alors être évalué par (3.68.III),

soit :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1,8}{\pi} \sin^{-1} \left(-0,356 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^2 + 1,18 \left(\frac{Q}{Q_p} \right) + 0,171 \right) \\ &= \frac{1,8}{\pi} \sin^{-1} \left(-0,356 \times 0,89095968^2 + 1,18 \times 0,89095968 + 0,171 \right) = 0,700073293 \cong 0,7 \end{aligned}$$

Il s'agit bien de la valeur obtenue au point 2-ii

12. Avec la conductivité maximale $\eta(Q/Q_{\max})$:

v. Compte tenu du fait que $Q_{\max}^* = 0,34785282$ et que $Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^*$, on a :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{0,29603864}{0,34785282} = 0,85104568$$

vi. Le taux η de la conduite peut alors être évalué par la relation approchée (3.70.III), soit :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1,8}{\pi} \sin^{-1} \left(-0,39 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^2 + 1,235 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right) + 0,171 \right) \\ &= \frac{1,8}{\pi} \sin^{-1} \left(-0,39 \times 0,85104568^2 + 1,235 \times 0,85104568 + 0,171 \right) = 0,69979921 \cong 0,7 \end{aligned}$$

La aussi, la valeur du taux est bien celle déterminé au point 2-ii et au point 1-ii.

Vérification : Pour le résultat obtenu déterminons le débit volume Q par la formule de Manning. Pour cela recherchons A et R_h pour un taux de remplissage $\eta = 0,7$. On doit d'abord déterminer A_1 et P_1 , comme $2/3 \leq \eta \leq 1$ on a selon le tableau des par.dim. :

$$A_1(\eta=0,7) = \zeta(\eta=0,7) = 0,68456736 \quad P_1(\eta=0,7) = \vartheta(\eta=0,7) = 2,41356515$$

- La surface mouillée est selon (2.11) : $A = A_1 D^2 = 0,68456736 \times 2^2 = 2,73826944 \text{ m}^2$

- le rayon hydraulique est selon (2.18): $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 2 \times \frac{0,68456736}{2,41356515} = 0,56726653 \text{ m}$

- le débit volume est donc :

$$Q = \frac{1}{n} R_h^{2/3} A \sqrt{J} = \frac{1}{0,0148} \times 0,56726653^{2/3} \times 2,73826944 \times \sqrt{0,0005} = 2,83502943 \text{ m}^3/\text{s}$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est égal à 0,18% seulement.

3.3.4. Conductivité relative Q_y^* rapportée à la profondeur normale.

La conductivité relative rapportée à la profondeur normale est définie par la relation (2.55) lorsque $y_n = \eta D$ mais dans le cas d'une conduite ovoïdale à radier aplati y_n a été définie comme suit $y_n = \eta Y_m$ ou $y_n = 1,1339746\eta D$ alors la relation (2.55) devient :

$$Q_y^* = 0,715\eta^{-8/3} \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \quad (3.71.III)$$

Cette relation a été représentée sur la graphe ci-dessous :

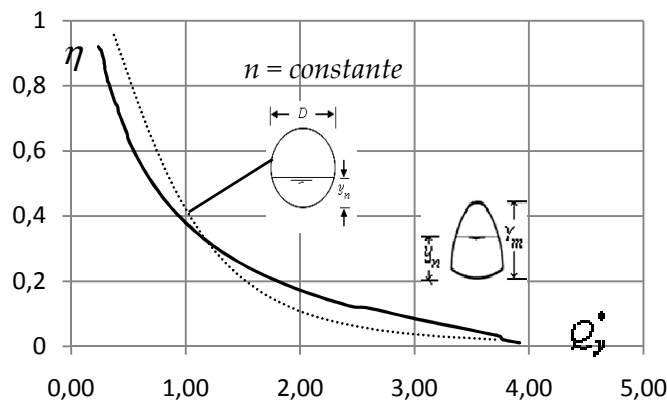


Figure 3.10.III : Courbes de variation $\eta(Q_y^*)$ dans les conduites ovoïdale à radier aplati et circulaire.

L'étude de la relation (2.55) a montré que η peut s'exprimer explicitement, en fonction de Q_y^* par :

d) $0,24 \leq \eta \leq 0,95$ correspondant $0,2886 \leq Q_y^* \leq 2,2714$.

$$\sinh\left(\frac{\pi}{1,18}\eta\right) = 1,651Q_y^{*-1,069} \quad (3.72.III-a)$$

b) pour les faibles valeurs de η tel que $0,15 \leq \eta \leq 0,31$, correspondant à $1,7335 \leq Q_y^* \leq 3,3369$

$$\sin\left(\frac{\pi}{0,793}\eta\right) = 1,359 - 0,24Q_y^* \quad (3.72.III-b)$$

Les écarts relatifs maximaux, issus des relations (3.72.III-a) et (3.72.III-b), sont inférieures 0,48%.

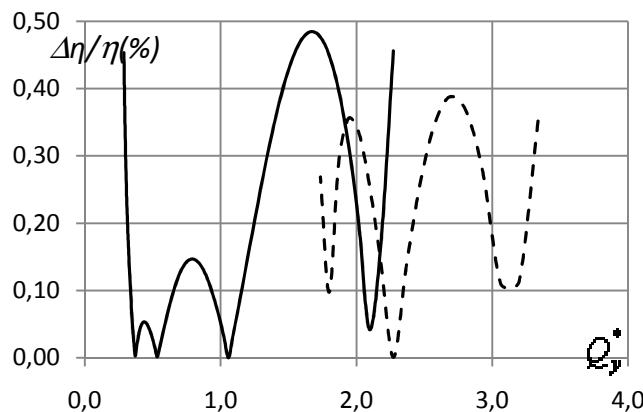


Figure 3.11.III : Ecart relatif en (%) occasionnées par les relations approchées (3.72.III-a) et (3.72.III-b).

Ecart (-----) pour $0,15 \leq \eta \leq 0,31$ (—) pour $0,24 \leq \eta \leq 0,95$

Exemple d'application 4

Reprenons les données de l'exemple d'application 3 et déterminons le diamètre D de la conduite. Les données sont alors : $Q=2,84\text{m}^3/s$, $J=0,0005$, $n=0,0148\text{m}^{1/3}/s$, $y_n=1,59\text{m}$

Solution :

i. Calculons la conductivité Q_y^* , rapportée à la profondeur y_n , par application de (2.53), soit :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3}\sqrt{J}} = \frac{0,0148 \times 2,84}{1,59^{8/3} \times \sqrt{0,0005}} = 0,54580317$$

La conductivité est $0,2886 \leq Q_y^* \leq 2,2714$, η est donc régi par la relation (3.72.III-a), soit :

$$\eta = \frac{1,18}{\pi} \sinh^{-1} \left(2,364 Q_y^{*-1,069} \right) = \frac{1,18}{\pi} \sinh^{-1} \left(1,651 \times 0,54580317^{-1,069} \right) = 0,70089475 \cong 0,7$$

iv. Ainsi, le diamètre D recherché est :

$$D = \frac{y_n}{1,1339746\eta} = \frac{1,59}{1,1339746 \times 0,7} = 2,0030683 \cong 2\text{m}$$

L'écart entre la valeur du diamètre calculée et celle de l'énoncé de l'exemple 3 est insignifiant.

3.4. Ecoulement à coefficient de résistance variable

5.4.1. Expression générale du diamètre

Pour calculer le diamètre D (ou la hauteur h) dans le cas d'une conduite ovoïdale à radier aplati partiellement remplie pour les valeurs données de Q, J, ε, ν et η , nous allons nous baser sur la formule (1.173) trouvée dans le chapitre 1 et qui est valable pour n'importe quelle dimension linéaire :

$$D \cong 0,512 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5}$$

Où \overline{D}_h est donnée par la relation (1.167) et \overline{R} est donné par la relation (1.158).

On peut aussi faire appel aux relations (1.160), (1.154) et (1.168) ou (1.174) et (1.168)

Exemple d'application 5.

Déterminer le diamètre d'une conduite ovoïdale à radier aplati sachant que $Q=1,62\text{m}^3/s$, $\nu=10^{-6}\text{m}^2/s$, $J=0,0005$, $\varepsilon=0,0002\text{m}$ et $\eta=0,65$.

a) Pour un taux de remplissage $\eta=0,6$, le tableau des paramètres adimensionnels donne :

$$A_1(\eta=0,65) = 0,64368863 \qquad P_1(\eta=0,65) = 2,28853563$$

b) On détermine le diamètre hydraulique \overline{D}_h en utilisant la relation (1.165) :

$$\overline{D}_h = 1,516 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{A_1}{P_1^2} \right)^{2/5} = 1,516 \left(\frac{1,62^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{0,64368863}{2,28853563^2} \right)^{2/5} = 2,30251038\text{m}$$

Le nombre de Reynolds \overline{R} est déterminé par la relation (1.158) :

$$\bar{R} = 10,556 \frac{(gJQ^3)^{1/5} \left(\frac{A_1}{P_1^2}\right)^{3/5}}{\nu} = 10,556 \times \frac{(9,81 \times 0,0005 \times 1,62^3)^{1/5}}{10^{-6}} \times \left(\frac{0,64368863}{2,28853563^2}\right)^{3/5} = 1383797$$

c) On déduit la dimension linéaire recherchée D en appliquant la relation (2.57):

$$\begin{aligned} D &\cong 0,512 \times \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h + 8,5}{4,75 + \bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \\ &= 0,512 \left[-\log \left(\frac{0,0002/2,30251038}{4,75} + \frac{8,5}{1383797} \right) \right]^{-2/5} \times \left(\frac{1,62^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{2,28853563}{0,64368863^3} \right)^{1/5} \\ &= 1,50001312 m \cong 1,5 m \end{aligned}$$

5.4.2. Variation de la conductivité relative du modèle rugueux de référence : Calcul de la profondeur normale.

Soit les données du problème : Q , D , J , ε et ν . Quel serait alors la profondeur y_n dans la conduite.

Assumons $J = \bar{J}$ et $Q = \bar{Q}$ par contre $a \neq \bar{a}$ ou $D \neq \bar{D}$ $A \neq \bar{A}$, et $P \neq \bar{P}$.

La relation régissant l'écoulement pour le modèle rugueux de référence a été donnée par la relation (2.58) et la conductivité relative est donnée par la relation (2.59). Cette conductivité relative a la même expression que la relation (2.25). D'autre part on a aussi :

$$\bar{Q}_p^* = (A_{1p}^{3/2} / P_{1p}^{1/2}) = 0,41977268 = \text{constante} \quad (3.73.III)$$

$$\bar{Q}_{\max}^* = 0,43292915 \quad (3.74.III)$$

Pour la valeur à l'état plein $\bar{Q}_p^* = 0,41977268$ correspond $\bar{\eta} = 1$ et $\bar{\eta} = 0,8629378$.

La variation $\bar{\eta}(\bar{Q}^*)$ explicite vis-à-vis de $\bar{\eta}$, dans la gamme du taux $0,20 \leq \bar{\eta} \leq 0,83$, correspondant à $0,07063 \leq \bar{Q}^* \leq 0,41146$, s'exprime par une relation identique à (3.57.III) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,876} \bar{\eta}\right) = -1,81 \bar{Q}^{*2} + 2,793 \bar{Q}^* + 0,142 \quad (3.75.III)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (3.75.III) est inférieur à 0,49%.

Le diamètre à l'état plein \bar{D}_p du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.59) après avoir remplacé $A_1 = A_{1p} = 0,84641951$ et $P_1 = P_{1p} = 3,44134847$:

$$\bar{D}_p = 0,536 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \quad (3.76.III)$$

Ce modèle rugueux de diamètre \bar{D}_p a la même conductivité relative que celui de même diamètre mais avec taux de remplissage $\bar{\eta} = 0,8629378$. Avec cette valeur $\bar{\eta}$ et le diamètre \bar{D}_p déterminé par (3.76.III), on détermine \bar{P} , \bar{R}_h et \bar{R} , en utilisant les relations (2.15), (2.18) et (1.48) et le tableau des paramètres adimensionnels :

$$A_1(\bar{\eta} = 0,8629378) = 0,79406166$$

$$P_1(\bar{\eta} = 0,8629378) = 2,84141281$$

$$\bar{P} = \bar{D}_p P_1(\bar{\eta} = 0,8629378) = 2,84141281 \bar{D}_p \quad (3.77.III)$$

$$\bar{R}_h = \bar{D}_p \frac{A_1(\bar{\eta} = 0,8629378)}{P_1(\bar{\eta} = 0,8629378)} = 0,27946015 \bar{D}_p \quad (3.78.III)$$

$$R = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4Q}{v \bar{P}(\bar{\eta} = 0,8629378)} = 1,40775039 \frac{Q}{v \bar{D}_p} \quad (3.79.III)$$

Introduisant ces expressions dans la relation (1.168) pour déterminer le facteur ψ on a :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_p}{5,31} + 6,04 \frac{v \bar{D}_p}{Q} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.80.III)$$

Procédons maintenant comme dans le cas de la conduite circulaire :

- Avec Q et J , déterminons \bar{D}_p et calculons ψ . D est une donnée, affectons $\bar{D} = D/\psi$.
- Avec \bar{D} , calculons à l'aide de (2.59) la conductivité relative \bar{Q}^* et déterminons avec (3.75.III) le taux η et déduisons $y_n = 1,1339746\eta D$.

Exemple d'application 6 :

Reprenons l'exercice précédent, soit : $Q = 1,62 \text{ m}^3/\text{s}$, $v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $J = 0,0005$, $\varepsilon = 0,0002 \text{ m}$ et $D = 1,5 \text{ m}$. Quelle est la profondeur normale y_n ?

Le diamètre \bar{D}_p à l'état plein du modèle rugueux de référence est donné par la relation (3.76.III) :

$$\bar{D}_p = 0,536 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = 0,536 \times \left(\frac{1,62^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} = 1,88296823 \text{ m}$$

- A l'aide de la relation (3.80.III) calculons le facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

$$\begin{aligned} \psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_p}{5,31} + 6,04 \frac{v \bar{D}_p}{Q} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \left[-\log \left(\frac{0,0002/1,88296823}{5,31} + 6,04 \times \frac{10^{-6} \times 1,88296823}{1,62} \right) \right]^{-2/5} = 0,73524723 \end{aligned}$$

- Affectons à ce modèle rugueux le diamètre $\bar{D} = D/\psi = 1,5/0,73524723 = 2,04013009 \text{ m}$.

- Ce nouveau diamètre \bar{D} donne la conductivité relative avec la relation (2.59) :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gJ\bar{D}^5}} = \frac{1,62}{\sqrt{128 \times 9,81 \times 0,0005 \times 2,04013009^5}} = 0,34391085$$

- Avec \bar{Q}^* obtenue déterminons à l'aide de la relation (3.75.III), le taux η et la profondeur normale.

$$\begin{aligned}\bar{\eta} &= \frac{1,876}{\pi} \sin^{-1} \left(-1,81\bar{Q}^{*2} + 2,793\bar{Q}^* + 0,142 \right) \\ &= \frac{1,876}{\pi} \sin^{-1} \left(-1,81 \times 0,34391085^2 + 2,793 \times 0,34391085 + 0,142 \right) = 0,65327629\end{aligned}$$

Ce résultat correspond à celui de l'énoncé de l'exemple précédent ; la profondeur y_n est alors :

$$y_n = \eta Y_m = 1,1339746 \eta D = 0,65327629 \times 1,1339746 \times 1,5 \cong 1,11 \text{ m}$$

5.4.3. Expression du débit volume maximal Q_{\max}

L'expression du débit Q_{\max} , est déduite de la formule (1.186) dans laquelle R est donné par (1.188).

A l'état plein, ce nombre de *Reynolds* prend la valeur particulière R_p en remplaçant dans la relation (1.188), les paramètres adimensionnels A_1 et P_1 , selon le tableau 1, par A_{1p} et P_{1p} :

$$R = 32\sqrt{2} \left(\frac{A_{1p}}{P_{1p}} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \left(\frac{0,84641951}{3,44134847} \right)^{3/2} \times \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu}$$

Soit :

$$R_p \cong 5,52 \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} \tag{3.81.III}$$

Tenant compte de (3.81.III), la relation (1.188) s'écrit :

$$R = 8,198 \left(\frac{A_1}{P_1} \right)^{3/2} R_p \tag{3.82.III}$$

Remplaçant maintenant dans la relation (1.186), A , R_h et R par les relations (1.42), (1.44) et (3.82.III) :

$$Q = -4\sqrt{2} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(A_1/P_1)} + \frac{1,2246}{(A_1/P_1)^{3/2} R_p} \right) \tag{3.83.III}$$

En introduisant Q^* donnée par (2.62), la relation (3.83.III) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = -4\sqrt{2} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(A_1/P_1)} + \frac{1,2246}{(A_1/P_1)^{3/2} R_p} \right) \tag{3.84.III}$$

Rappelons que dans cette relation R_p est donné par la relation (3.81.III). La relation (3.84.III) montre que la conductivité relative Q^* de la conduite est fonction à la fois du taux η , de ε/D et du nombre R_p à l'état plein. La variation du taux de remplissage η en fonction de la conductivité relative Q^* a été représentée sur la figure 3.12.III (a à c), conformément à la relation (3.84.III).

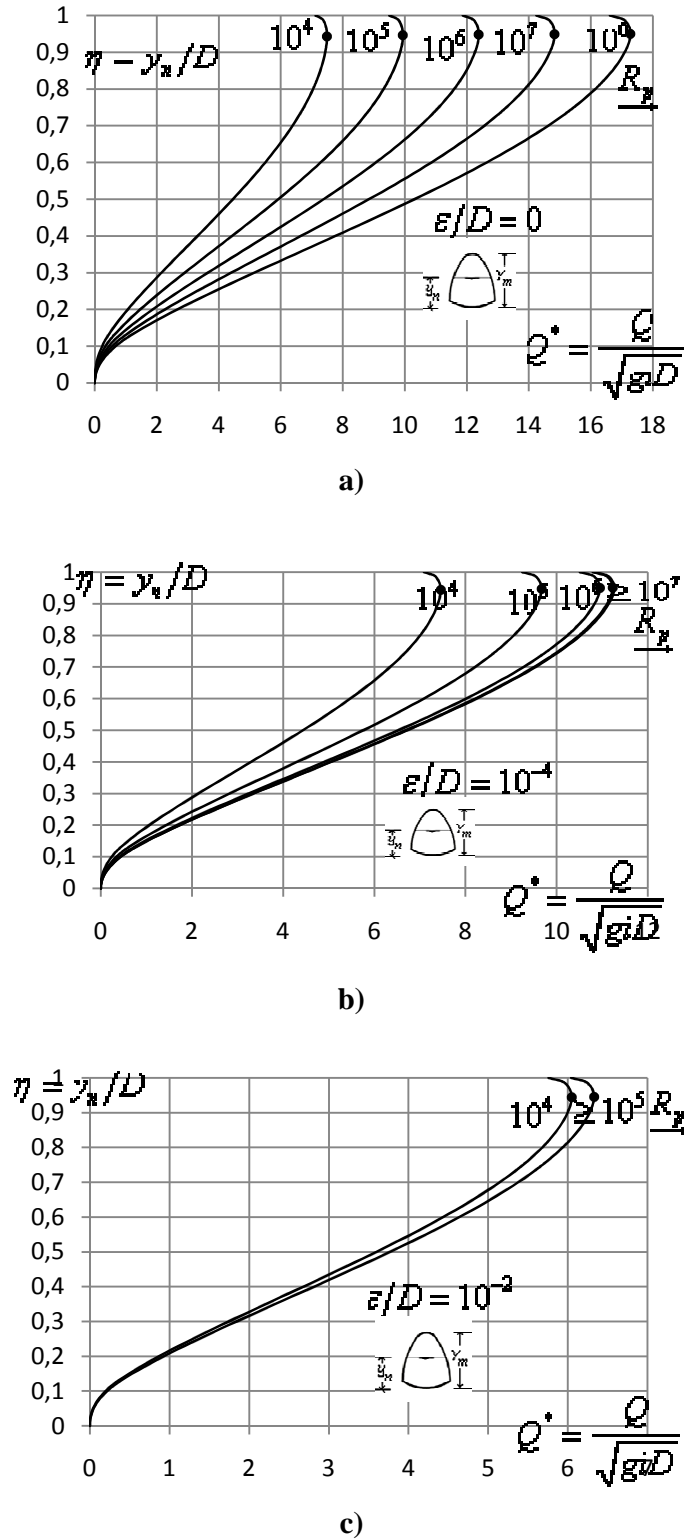


Figure 3.12.III : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p conformément à la relation (3.84.III).

Nos remarques sont, au vu de la figure 3.12.III (a à c), les mêmes que celles concernant la variation de la conductivité relative Q^* de la conduite circulaire étudiée au chapitre 2.

Le tableau 2 regroupe les valeurs particulières η_0 du taux de remplissage η correspondant à $Q^* = Q^*_{\max}$, calculées selon la relation (3.84.III), pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de

Reynolds R_p . L'espace grisâtre du tableau 2 correspond au domaine pratique d'utilisation de la rugosité ε/D et du nombre de Reynolds R_p .

Tableau 2 : Valeurs du taux de remplissage η_0 correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$ pour diverses valeurs de la rugosité ε/D et du nombre de Reynolds R_p

| $\varepsilon/D \rightarrow$ | | 0 | 10^{-5} | 5.10^{-5} | 10^{-4} | 5.10^{-4} | 10^{-3} | 5.10^{-3} | 10^{-2} |
|-----------------------------|----------|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------|-----------|
| R_p | 10^4 | 0,9430 | 0,9430 | 0,9430 | 0,9430 | 0,9430 | 0,9435 | 0,9439 | 0,9438 |
| | 5.10^4 | 0,9453 | 0,9453 | 0,9454 | 0,9456 | 0,9461 | 0,9464 | 0,9460 | 0,9452 |
| | 10^5 | 0,9460 | 0,9461 | 0,9463 | 0,9465 | 0,9471 | 0,9472 | 0,9463 | 0,9454 |
| | 5.10^5 | 0,9475 | 0,9477 | 0,9482 | 0,9485 | 0,9485 | 0,9482 | 0,9466 | 0,9456 |
| | 10^6 | 0,9480 | 0,9484 | 0,9490 | 0,9491 | 0,9488 | 0,9483 | 0,9467 | 0,9456 |
| | 5.10^6 | 0,9489 | 0,9499 | 0,9500 | 0,9499 | 0,9490 | 0,9484 | 0,9467 | 0,9457 |
| | 10^7 | 0,9493 | 0,9504 | 0,9502 | 0,9500 | 0,9490 | 0,9484 | 0,9467 | 0,9456 |
| | 5.10^7 | 0,9500 | 0,9510 | 0,9504 | 0,9501 | 0,9491 | 0,9485 | 0,9467 | 0,9457 |
| | 10^8 | 0,9502 | 0,9511 | 0,9505 | 0,9501 | 0,9491 | 0,9485 | 0,9467 | 0,9457 |

Nous pouvons ainsi constater que dans la large gamme pratique $10^{-5} \leq \varepsilon/D \leq 5.10^{-3}$ et $5.10^4 \leq R_p \leq 5.10^7$, le taux de remplissage η_0 correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$ varie dans l'intervalle [0,9453; 0,9510]. La valeur moyenne $\eta_0 = 0,948$ peut être considérée comme la valeur la plus appropriée pour le calcul du débit volume maximal.

On peut déterminer pour cette valeur moyenne, l'expression du débit maximal Q_{\max} d'une conduite ovoïdale à radier aplati à écoulement uniforme, lorsque les paramètres ε , D , J et ν du liquide sont connus. Il suffit pour cela d'introduire $\eta_0 = 0,948$ dans les relations (3.50.III) et (3.41.III) pour trouver les paramètres adimensionnels A_1 et P_1 et de calculer Q_{\max} par la relation (3.83.III).

Pour $0,9118146 \leq \eta_0 = 0,948 \leq 1$, les paramètres A_1 et P_1 figurant au tableau1 prennent les valeurs :

$$A_1 = \lambda(\eta = 0,948) = 0,8334077 \qquad P_1 = \tau(\eta = 0,948) = 3,0907986$$

La relation (3.83.III) donne alors :

$$Q_{\max} = -2,448\sqrt{gJD^5} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,991} + \frac{8,746}{R_p}\right) \qquad (3.85.III)$$

La conductivité relative maximale est alors :

$$Q_{\max}^* = -2,448 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,991} + \frac{8,746}{R_p}\right) \qquad (3.86.III)$$

Nous obtenons ainsi l'expression du débit volume maximal en fonction de ε/D et R_p à l'état plein.

5.4.4. Relation approchée de la profondeur normale :

Comme dans le cas de la conduite circulaire, cette partie de l'étude vise à établir une relation approchée susceptible d'évaluer y_n de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance variable. Pour cela, on a eu recours aux relations (3.83.III) et (3.85.III). Afin de déterminer la loi $\eta(Q/Q_{\max})$, il a été nécessaire d'étudier la variation de $\eta(Q/Q_{\max})$ pour diverses valeurs de ε/D et R_p , en s'appuyant sur les relations (3.83.III) et (3.85.III). Après un travail assez laborieux, nos calculs ont pu montrer que, le taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max})$ de la conduite pouvait s'exprimer par la relation :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,808}\eta\right) = -0,363\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^2 + 1,21\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right) + 0,171 \quad (3.87.III)$$

La profondeur normale s'exprime alors par : $y_n = \eta D$

La relation (3.87.III) valable dans une large gamme pratique du taux compris $0,23 \leq \eta \leq 0,80$ avec une erreur relative de 0,50%. Elle est applicable pour $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,01$ et $5 \cdot 10^4 \leq R_p \leq 10^8$.

L'exemple n° 7 montre un exemple de la détermination de y_n par application de (3.87.III).

3.5. Ecoulement critique

La conductivité relative correspond à l'état critique est donnée par la relation (2.83). A_{1c} et e_{1c} (l'indice "c" se réfère l'état critique) sont définis selon le taux de remplissage sur le tableau 1 des paramètres adimensionnels de la conduite ovoïdale à radier aplati. La relation (2.83) montre clairement que η_c est implicite vis-à-vis de Q_c^* .

Proposons une relation approchée fiable au calcul explicite de η_c et donc de la profondeur critique y_c , pour cela étudions la variation $\eta_c(Q_c^*)$ en représentons la relation (2.83) sur le graphe ci-dessous :

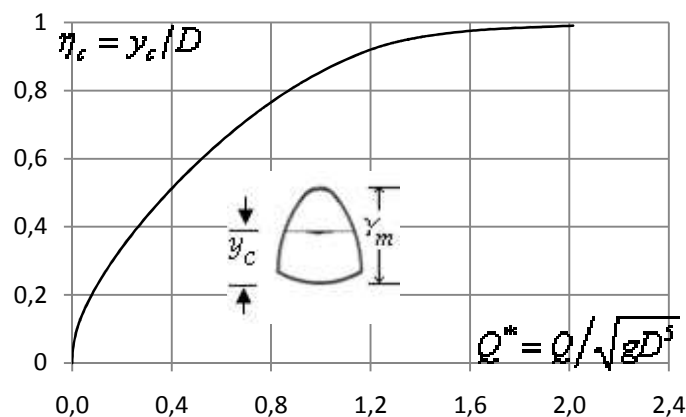


Figure 3.13.III : Variation du taux de remplissage critique η_c en fonction du débit relatif Q^* . Courbe tracée selon les relations (2.83).

Ce graphe montre que η_c augmente avec Q_c^* . En outre, lorsque $Q^* \rightarrow \infty$, $\eta_c \rightarrow 1$.

Les calculs menés dans une large gamme pratique $0,25 \leq \eta_c \leq 0,87$, ont permis de trouver une relation fiable explicite qui approche le mieux la relation implicite (2.83) a savoir :

$$\sinh\left(\frac{\pi}{1,543}\eta_c\right) = 2,538Q^* + 0,234 \quad (3.88.III)$$

L'intervalle du taux $0,25 \leq \eta_c \leq 0,87$ est acceptable dans le dimensionnement. L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (3.88.III) est inférieur à 0,49%.

Exemple d'application 7 :

Un collecteur d'assainissement ovoïdale à radier aplati de diamètre $D = 1,8\text{ m}$ est soulagé à la sortie de la commune par un déversoir d'orage dont la cote doit être déterminé. Le débit qui doit arriver à la STEP ne doit pas dépasser $Q = 3\text{ m}^3/\text{s}$. $J = 0,0005$, $\varepsilon = 2.10^{-5}\text{ m}$ et $\nu = 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$.

3. *A quelle hauteur de la génératrice inférieure, le déversoir doit être arasé pour limiter le débit vers la station d'épuration à la valeur donnée.*

4. *Quelle est la nature de l'écoulement en comparant y_c et la hauteur critique.*

Solution :

3. Déterminons la capacité maximale du collecteur et cherchons la cote laquelle doit être arasé le déversoir d'orage pour ne laisser passer que le débit donné.

- *Le nombre de Reynolds R_p est selon la relation (3.81.III):*

$$R_p \cong 5,52 \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 5,52 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,8^3}}{10^{-6}} = 933614$$

- *Le débit maximal est selon la relation (3.85.III)*

$$Q_{\max} = -2,448 \sqrt{gJD^5} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,991} + \frac{8,746}{R_p}\right)$$

$$= -2,448 \times \sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,8^5} \times \log\left(\frac{2.10^{-5}/1,8}{3,991} + \frac{8,746}{933614}\right) = 3,66325389\text{ m}^3/\text{s}$$

- *Selon la relation (3.87.III), la profondeur normale est égale à :*

$$y_n = \frac{1,808}{\pi} Y_m \sin^{-1} \left[-0,363 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^2 + 1,21 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right) + 0,171 \right]$$

$$= \frac{1,808}{\pi} \times (1,1339746 \times 1,8) \times \sin^{-1} \left[-0,363 \times \left(\frac{3}{3,66325389} \right)^2 + 1,21 \times \left(\frac{3}{3,66325389} \right) + 0,171 \right]$$

$$= 1,36756895 \cong 1,37\text{ m}$$

C'est à dire la cote du déversoir doit être à 1,37 m de la génératrice inférieure du collecteur.

Vérifions nos calculs, en déterminons le débit volume par la formule générale (1.186):

Pour un taux de remplissage obtenu $\eta = 1,36756895 / (1.1339746 \times 1,8 = 0,669997833$ on a :

$$A_1(\eta=0,669997833)=0,66037909$$

$$P_1(\eta=0,669997833)=2,33820453$$

- l'aire de la section mouillée est selon (2.11) :

$$A = D^2 A_1 = 1,8^2 \times 0,66037909 = 2,13962825 \text{ m}^2$$

- le rayon hydraulique est en vertu de (2.18) :

$$R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 1,8 \times \frac{0,66037909}{2,33820453} = 0,50837399 \text{ m}$$

- le nombre de Reynolds est selon (1.187) :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 0,50837399^3}}{10^{-6}} = 1148840$$

- le débit volume serait donc selon la relation (1.186) :

$$\begin{aligned} Q &= -4\sqrt{2g} A \sqrt{JR_h} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,13962825 \times \sqrt{0,50837399 \times 0,0005} \times \log \left(\frac{0,00002}{14,8 \times 0,50837399} + \frac{10,04}{1148840} \right) \\ &= 2,98766597 \cong 2,99 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

L'écart relatif entre le débit volume déterminé et celui donné à l'énoncé de l'exemple considéré est égal à 0,41% seulement.

4. la nature de l'écoulement peut être connue en déterminant la profondeur critique, en application de la relation (3.88.III) :

Il faut au préalable déterminer le débit relatif Q_c^* selon la relation (2.82), qui est:

$$Q_c^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} = \frac{3}{\sqrt{9,81 \times 1,8^5}} = 0,22034616$$

$$\begin{aligned} y_c &= Y_m \frac{1,543}{\pi} \sinh^{-1} (2,538Q^* + 0,234) = (1,1339746 \times 1,8) \times \frac{1,543}{\pi} \sinh^{-1} (2,538 \times 0,22034616 + 0,234) \\ &= 0,72921079 \cong 0,73 \text{ m} \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi déduire que l'écoulement est de nature fluviale puisque $y_n = 1,37 > y_c$.

CONDUITE CIRCULAIRE AVEC BANQUETTES (IV)

La conduite circulaire avec banquettes est schématiquement représentée par la figure 3.1.IV. Elle est caractérisée par la dimension linéaire D qui correspond à sa hauteur Y_m et une cunette circulaire d'un diamètre $D/2$ formant sa partie basse.

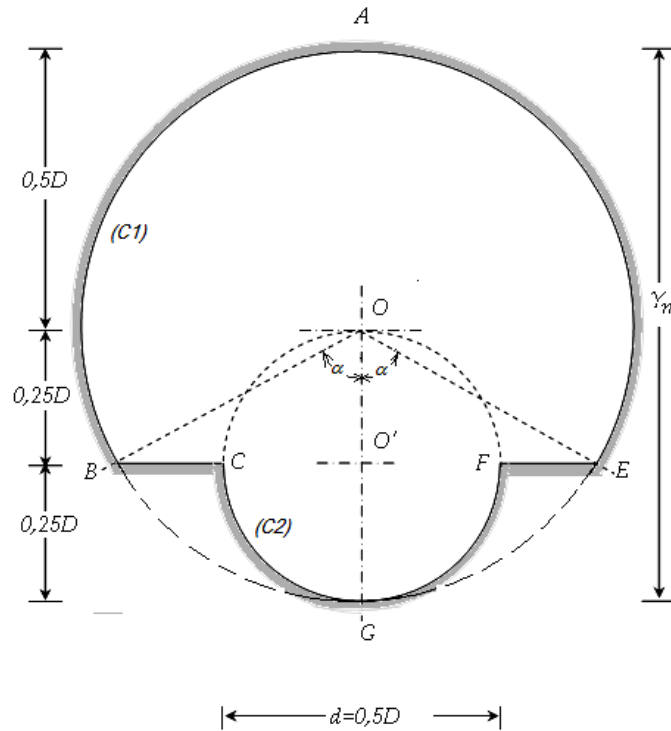


Figure 3.1.IV. Schéma de définition de la conduite circulaire avec banquettes.

Caractéristiques géométriques de la conduite.

Les étapes constructives du profil de la section droite d'une telle conduite sont les suivantes :

- xvi. Tracer sur un axe vertical le cercle (C_1) de centre O et de diamètre D .
- xvii. Sur cet axe vertical, plaçons le point O' de telle sorte que $\overline{OO'} = D/4$. Du point O' traçons, le cercle (C_2) de diamètre $0,5D$ tangent au cercle (C_1) au point de sa génératrice inférieure.
- xviii. Sur l'horizontale passant par O' , on trace les segments de droite \overline{BC} et \overline{FE} .
- xix. Nous obtenons alors le profil $ABCGFEA$ de la section droite de la conduite circulaire avec banquettes.

Nous pouvons écrire pour une telle section :

1. $\overline{OB} = \overline{OE} = D/2$
2. $\overline{OO'} = D/4$
3. $\cos(\alpha) = \frac{D/4}{D/2} = \frac{1}{2}$. Alors : $\alpha = \pi/3$ radian

$$4. \quad \tan(\alpha) = \frac{\overline{BO'}}{\overline{OO'}} = \frac{\overline{BC} + \overline{CO'}}{d/2} = \frac{\overline{BC} + D/4}{D/4} = 1 + 4 \frac{\overline{BC}}{D}$$

Ainsi la longueur des banquettes BC et FE est déduite de cette dernière expression (3.4.IV) :

$$\overline{BC} = \overline{FE} = \frac{1}{4} [\tan(\alpha) - 1] D = \frac{1}{4} \left[\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1 \right] D = 0,1830127D$$

Soit :

$$5. \quad \overline{BC} = \overline{FE} = 0,1830127D$$

6. La surface du segment circulaire \widehat{BEG} est telle que :

$$A(\widehat{BEG}) = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2} \right)^2 [2\alpha - \sin(2\alpha)] = \frac{D^2}{4} [\alpha - \sin \alpha \cos \alpha] = \frac{D^2}{4} \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \right]$$

$$A(\widehat{BEG}) = 0,15354621D^2$$

3.1. Eléments hydrauliques de la section transversale.

Les caractéristiques de l'écoulement, telle que l'aire de la section mouillée A , le périmètre mouillé P , le rayon hydraulique R_h ou la largeur du plan d'eau e dépendent du taux de remplissage $\eta = y_n/D$ ou y_n est la profondeur normale de l'écoulement. Ces caractéristiques s'expriment par différentes relations selon le lieu géométrique de l'écoulement. La figure 3.2.IV montre deux lieux géométriques que peut occuper l'écoulement, selon la valeur du taux de remplissage :

- Entre les points G et O' de la partie circulaire basse c'est-à-dire $\eta \leq 0,25$.
- Entre les points O' et A de la partie circulaire haute, c'est-à-dire $0,25 \leq \eta \leq 1$.

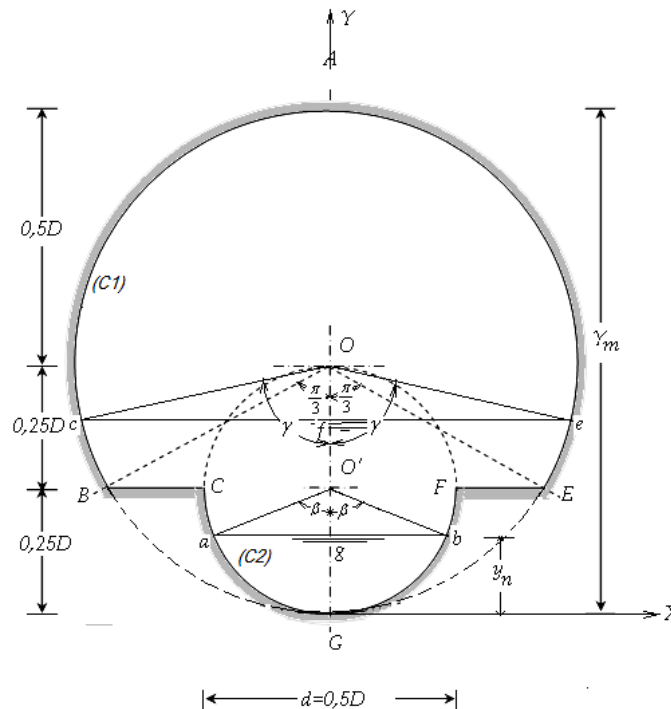


Figure 3.2.IV. Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite circulaire avec banquettes.

4) $\eta \leq 0,25$

Lorsque $\eta \leq 0,25$, les caractéristiques telles que l'aire de la section mouillée A , le périmètre mouillé P , le rayon hydraulique R_h ou la largeur du plan d'eau e sont celles d'une conduite circulaire de diamètre $D/2$. Nous avons établie au chapitre 2, les expressions de ces caractéristiques pour une conduite circulaire de diamètre D et un taux de remplissage $\eta = y_n/D$. Pour une conduite circulaire de diamètre $D/2$ le taux de remplissage devient : $\eta = 2y_n/D$.

Les expressions déjà établies deviennent :

La fonction $\sigma(\eta)$ définie par la relation (2.9) devient :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1-4\eta) \quad (3.1.IV)$$

La fonction $\varphi(\eta)$ définie par la relation (2.10) devient :

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-4\eta)\sqrt{2\eta(1-2\eta)}}{\cos^{-1}(1-4\eta)} \quad (3.2.IV)$$

k. Largeur du plan d'eau :

La largeur du plan d'eau donné par la relation (2.20) devient :

$$e = D\sqrt{2\eta(1-2\eta)} \quad (3.3.IV)$$

l. Périmètre mouillée :

Le périmètre mouillée donnée par la relation (2.14) devient :

$$P = \frac{D}{2} \sigma(\eta) \quad (3.4.IV)$$

i. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A donnée par la relation (2.8) devient :

$$A = \frac{D^2}{16} \sigma(\eta)\varphi(\eta) \quad (3.5.IV)$$

j. Rayon hydraulique

Le rayon hydraulique est donné par la relation (2.17), qui devient pour une conduite de diamètre $D/2$:

$$R_h = \frac{D}{8} \varphi(\eta) \quad (3.6.IV)$$

5) $0,25 \leq \eta \leq 1$

a. Largeur du plan d'eau :

Lorsque $0,25 \leq \eta \leq 1$, la largeur du plan d'eau e correspond à \overline{ce} (figure 3.2.IV). Les points c et e appartient au cercle (C_I) de centre de centre O et de diamètre D .

Dans ce cercle on peut écrire :

$$\sin(\gamma) = \frac{e/2}{D/2}$$

Ainsi :

$$e = D \sin(\gamma) \quad (3.7.IV)$$

L'angle γ est le demi angle au centre, tel que :

$$\cos(\gamma) = \frac{\overline{Of}}{\overline{Oc}} = \frac{D/2 - \overline{Gf}}{D/2} = 1 - 2 \frac{y_n}{D}$$

Soit :

$$\cos(\gamma) = 1 - 2\eta \quad (3.8.IV)$$

$$\gamma = \cos^{-1}(1 - 2\eta) \quad (3.9.IV)$$

Il vient alors :

$$\sin(\gamma) = \sqrt{1 - \cos^2(\gamma)} = \sqrt{1 - (1 - 2\eta)^2} = \sqrt{4\eta(1 - \eta)} = 2\sqrt{\eta(1 - \eta)}$$

On tire :

$$\sin(\gamma) = 2\sqrt{\eta(1 - \eta)} \quad (3.10.IV)$$

La relation (3.7.IV) devient alors :

$$e = 2D\sqrt{\eta(1 - \eta)} \quad (3.11.IV)$$

b. Périmètre mouillée :

Lorsque $0,25 \leq \eta \leq 1$, le périmètre mouillé P correspond à la longueur du parcours $cBCGFEE$ est composé de deux fois la longueur de l'arc \widehat{cB} , à laquelle il faut rajouter deux fois la longueur du segment \overline{BC} et la longueur du demi cercle \widehat{CGF} . Le périmètre P sera égal à :

$$P = 2 \times \widehat{cB} + 2 \times \overline{BC} + \widehat{CGF}$$

- La longueur de l'arc \widehat{cB} est égale :

$$2 \times \widehat{cB} = \widehat{BAE} - \widehat{cAe} = (2\pi - 2 \frac{\pi}{3}) \frac{D}{2} - (2\pi - 2\gamma) \frac{D}{2} = (\gamma - \pi/3) D$$

On utilisant la relation (3.9.IV) on a :

$$2 \times \widehat{cB} = D \left[\cos^{-1}(1 - 2\eta) - \pi/3 \right] \quad (3.12.IV)$$

La longueur du segment \overline{BC} a été déterminée au point 5 des caractéristiques géométriques :

$$\overline{BC} = \overline{FE} = 0,1830127D$$

La longueur du demi cercle (C_2) est égale à :

$$\widehat{CGF} = \pi \frac{D/2}{2} = \pi D/4$$

Le périmètre mouillé est donc égal :

$$P = 2 \times \widehat{cB} + 2 \times \overline{BC} + \widehat{CGF} = D \left[\cos^{-1}(1 - 2\eta) - \pi/3 \right] + 2 \times 0,1830127D + \pi D/4$$

Il vient alors :

$$P = D \left[\cos^{-1}(1 - 2\eta) + 0,10422601 \right] \quad (3.13.IV)$$

Définissons la fonction :

$$\vartheta(\eta) = \cos^{-1}(1-2\eta) + 0,10422601 \quad (3.14.IV)$$

Le périmètre sera égal à :

$$P = D\vartheta(\eta) \quad (3.15.IV)$$

k. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspondant à $0,25 \leq \eta \leq 1$ est définie par l'espace $cBCGFEE$ de la figure 3.2.IV. L'aire de cette section mouillée A peut être décomposée en deux aires qui sont :

- A_0 , l'aire de la section mouillée du secteur circulaire $cBCO'FEec$ appartenant au cercle (C_I) de diamètre D et de centre O .
- A_1 , l'aire du demi-cercle $CO'FGC$ de diamètre $D/2$.

L'aire A_0 , est déterminée en retranchant de la surface A_2 du segment circulaire cGe , l'aire A_3 du segment circulaire BEG .

Il vient alors que :

$$A = A_0 + A_1 = A_2 - A_3 + A_1$$

Le segment circulaire cGe , de corde \overline{ce} appartient au cercle (C_I) de diamètre D et de centre O , son aire A_2 peut être déterminée ainsi :

$$A_2 = \frac{(D/2)^2}{2} [2\gamma - \sin(2\gamma)] = \frac{D^2}{4} [\gamma - \sin(\gamma) \cos(\gamma)] \quad (3.16.IV)$$

En introduisant les relations (3.8.IV), (3.9.IV) et (3.10.IV) dans cette dernière relation on a :

$$A_2 = \frac{D^2}{4} \left[\cos^{-1}(1-2\eta) - 2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)} \right] \quad (3.17.IV)$$

L'aire A_3 du segment circulaire BEG a été déterminée au point 6 des caractéristiques géométriques :

$$A_3 = A(\widehat{BEG}) = 0,15354621D^2 \quad (3.18.IV)$$

L'aire A_1 du demi-cercle $CO'FGC$ de diamètre $D/2$, est égale :

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{\pi (D/2)^2}{4} = \frac{\pi}{32} D^2 \quad (3.19.IV)$$

L'aire A recherchée est obtenue en utilisant les relations (3.17.IV), (3.18.IV) et (3.19.IV), soit :

$$A = A_2 - A_3 + A_1 = \frac{D^2}{4} \left[\cos^{-1}(1-2\eta) - 2(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)} \right] - 0,15354621D^2 + \frac{\pi}{32} D^2$$

Ou bien :

$$A = D^2 \left[\frac{1}{4} \cos^{-1}(1-2\eta) - \frac{1}{2} (1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)} - 0,05537144 \right] \quad (3.20.IV)$$

Définissons, par souci de simplification d'écriture, la fonction :

$$\zeta(\eta) = \frac{1}{4} \cos^{-1}(1-2\eta) - \frac{1}{2} (1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)} - 0,05537144 \quad (3.21.IV)$$

La relation (3.20.IV) s'écrit alors :

$$A = \zeta(\eta)D^2 \quad (3.22.IV)$$

Pour l'état plein, correspondant au taux de $\eta = 1$, la relation (3.20.I) mène à écrire que :

$$A_{p(CAB)} = 0,73D^2 \quad (3.23.IV)$$

Alors que l'aire de la conduite circulaire pleine de diamètre D est égale à $A_{p(c)} = \pi D^2/4$.

$$\frac{A_{p(CAB)}}{A_{p(c)}} (\%) = \frac{0,73D^2}{\pi D^2/4} \times 100 \cong 93\% \quad (3.24.IV)$$

La conduite circulaire avec banquettes occupe 93% de la surface d'une conduite circulaire de même diamètre.

l. Rayon hydraulique

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$ s'écrit, en ayant recours aux relations (3.15.IV) et (3.22.IV) :

$$R_h = A/P = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \quad (3.25.IV)$$

On choisira dans cette étude la dimension linéaire a , figurant dans les relations (1.41), (1.42), (1.43) et (1.44) pour une conduite circulaire avec banquettes fermée, le diamètre caractéristique D . Ainsi, nous avons exprimé dans le tableau ci-dessous les fonctions $f(\eta)$ et les paramètres adimensionnels A_1, P_1, R_{h1} et e_1 selon le taux de remplissage $\eta = y_n/D$:

Tableau n°1 des paramètres adimensionnels

| | Expressions des fonctions de $\eta = y_n/D$ | | A l'état plein $\eta = 1$ |
|---------------------|---|-------------------------------|------------------------------|
| $\sigma(\eta) =$ | $\cos^{-1}(1-4\eta)$ | | |
| $\varphi(\eta) =$ | $1 - \frac{2(1-4\eta)\sqrt{2\eta(1-2\eta)}}{\cos^{-1}(1-4\eta)}$ | | |
| $\vartheta(\eta) =$ | $\cos^{-1}(1-2\eta) + 0,10422601$ | | 3,24581866 |
| $\zeta(\eta) =$ | $\frac{1}{4} \cos^{-1}(1-2\eta) - \frac{1}{2}(1-2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)} - 0,05537144$ | | 0,73002672 |
| Par.dim | $\eta \leq 0,25$ | $0,25 \leq \eta \leq 1$ | |
| $e_1 =$ | $\sqrt{2\eta(1-2\eta)}$ | $2\sqrt{\eta(1-\eta)}$ | 0 |
| $A_1 =$ | $\sigma(\eta)\varphi(\eta)/16$ | $\zeta(\eta)$ | $A_p = 0,73002672$ |
| $P_1 =$ | $\sigma(\eta)/2$ | $\vartheta(\eta)$ | $P_p = 3,24581866$ |
| $R_{h1} =$ | $\varphi(\eta)/8$ | $\zeta(\eta)/\vartheta(\eta)$ | $R_{h1p} = 0,22491297$ |

Variation des caractéristiques de l'écoulement

La caractéristique adimensionnelle de l'écoulement, en particulier le rayon hydraulique relatif $R_h/D = R_{h1}$ est représenté sur les figures 3 dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$. R_h/D passe par un maximum pour le taux $\eta = 0,841$. En application (3.25.IV) et les valeurs $A_1 = \zeta(\eta = 0,841)$ et $P_1 = \vartheta(\eta = 0,841)$ on a : $R_{h,max} = 0,26783851D$

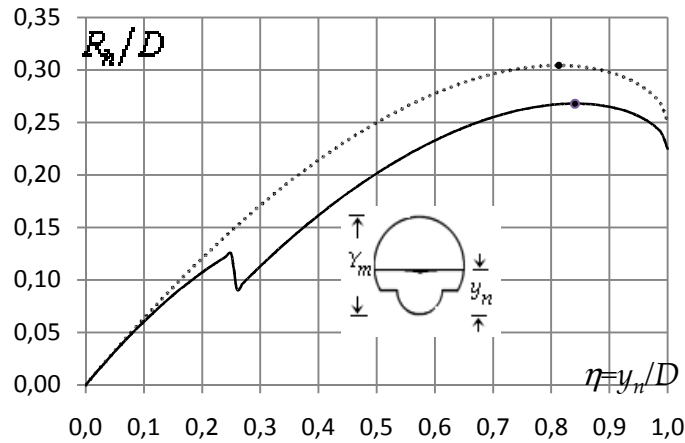


Figure 3.3.IV : Variation du rayon hydraulique relatif R_h/D en fonction du taux η .
 (•) Taux de remplissage correspondant à $R_{h,max} / D$.

3.2. Ecoulement à coefficient de résistance de Chézy invariable.

8.2.1. Variation de la conductivité relative $\eta(Q^*)$ pour C constant.

Rappelons que selon Chézy la conductivité relative s'exprime par la relation (2.25). En faisant varier A_1 et P_1 , selon le taux η , La conductivité Q^* a été dessinée sur la fig. 3.4.IV, dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$.

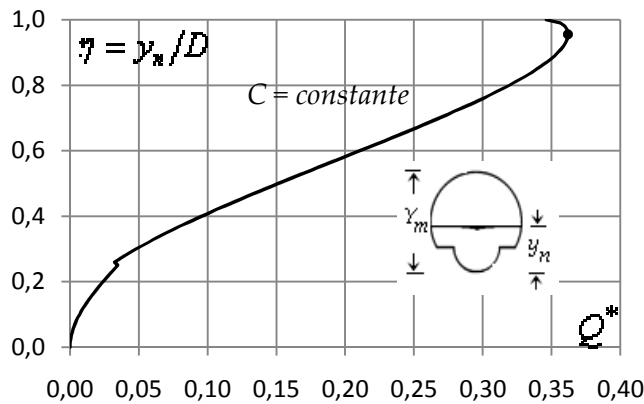


Figure 3.4.IV : Variation de la conductivité Q^* en fonction du taux η tracée selon la relation (2.25).
 (•). $Q_{max}^* = 0,362$ Correspondant à $\eta = 0,9556$.

La conductivité Q^* augmente avec l'accroissement du taux η , jusqu'à un maximum correspondant à $\eta = 0,9556$, puis diminue au-delà de ce maximum.

En introduisant les valeurs $A_{1p} = 0,73002672$ et $P_{1p} = 3,24581866$ dans la relation (2.25) on a :

$$Q_p^* = 0,3462151 = \text{constante} \quad (3.26.IV)$$

En outre la conductivité maximale Q_{max}^* correspondant à la valeur $\eta = 0,9556$. Elle est égale selon la relation (2.25) en introduisant $A_1(\eta = 0,9556) = 0,71772001$ et $P_1(\eta = 0,9556) = 2,82120995$ à :

$$Q_{\max}^* = 0,36200526 \quad (3.27.IV)$$

On peut tirer des relations (3.26.IV) et (3.27.IV) que $Q_{\max} = 1,04560794Q_p$

La conductivité relative Q^* déterminée par la relation (2.25) est telle que :

- $0 \leq Q^* \leq 0,03471$, correspondant à $\eta \leq 0,25$
- $0,03471 \leq Q^* \leq 0,34622$, correspondant à $0,25 \leq \eta \leq 1$

Afin d'évaluer de manière explicite la valeur du taux de remplissage $\eta(Q^*)$ à partir des paramètres connus C , Q , D , et J , nos calculs ont montré que la relation (2.25) peut être remplacée par :

- $0,09 \leq \eta \leq 0,25$ et correspondant à $0,00563 \leq Q^* \leq 0,03471$:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\eta\right) = 3,637 Q^{*0,531} \quad (3.28.IV-a)$$

- $0,32 \leq \eta \leq 0,79$ et correspondant à $0,05667 \leq Q^* \leq 0,31467$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,98}\eta\right) = 1,501 Q^{*0,394} \quad (3.28.IV-b)$$

L'écart relatif maximal occasionné par les relations (3.28.IV-a) et (3.28.IV-b) est inférieur à 0,48%.

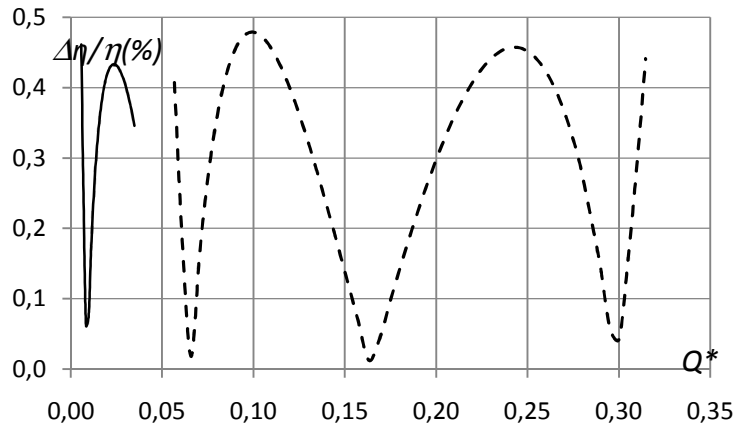


Figure 3.5.IV : Ecarts relatifs $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par (3.28.IV-a) et (3.28.IV-b) sur le calcul de η
Ecart (---) pour la gamme $0,09 \leq \eta \leq 0,25$ (—) pour la gamme $0,32 \leq \eta \leq 0,79$

8.2.2. Courbe de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ pour C constant.

La courbe de remplissage de la conduite, pour un coefficient C de Chézy, se traduit par la variation de $\eta(Q/Q_p)$. Tenant compte des relations (2.25), (2.29) et (3.26.IV), nous pouvons écrire que pour :

$$\frac{Q}{Q_p} = 2,888 \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \quad (3.29.IV)$$

On peut déduire des relations (3.28.IV-a) et (3.28.IV-b) obtenues précédemment ce qui suit :

De la relation (3.28.IV-a) et pour $0,09 \leq \eta \leq 0,25$, correspondant à $0,00563 \leq Q^* \leq 0,03471$ on a :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\eta\right) = 3,637 Q^*{}^{0,531} = 3,637 Q_p^{*0,531} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,531}$$

Par ailleurs la relation (3.26.IV) donne $Q_p^* = 0,3462151$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\eta\right) = 3,637 Q_p^{*0,531} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,531} = 3,637 \times 0,3462151^{0,531} \times \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,531} = 2,071 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,531}$$

Ou bien en utilisant (2.29) on obtient :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\eta\right) = 2,071 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,531} \tag{3.30.IV-a}$$

La relation (3.30.IV-a) est valable pour $0,09 \leq \eta \leq 0,25$ correspondant à $0,0163 \leq Q/Q_p \leq 0,1003$

De la relation (3.28.IV-b) et pour $0,32 \leq \eta \leq 0,79$, correspondant à $0,05667 \leq Q^* \leq 0,31467$ on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,98}\eta\right) = 1,501 Q^*{}^{0,394} = 1,501 Q_p^{*0,394} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,394}$$

Par ailleurs la relation (3.26.IV) donne $Q_p^* = 0,3462151$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,98}\eta\right) = 1,501 Q_p^{*0,394} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,394} = 1,501 \times 0,3462151^{0,394} \times \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,394} = 0,988 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,394}$$

Ou bien en utilisant (2.29) on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,98}\eta\right) = 0,988 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,394} \tag{3.30.IV-b}$$

La relation (3.30.IV-b) est valable pour $0,32 \leq \eta \leq 0,79$ correspondant à $0,1637 \leq Q/Q_p \leq 0,8693$

L'écart relatif maximal occasionné par les relations approchées (3.30.IV-a) et (3.30.IV-b) est inférieur à 0,50%.

8.2.3. Relation $\eta(Q/Q_{\max})$ pour C constant

En tenant compte des relations (2.25), (2.32) et (3.27.IV) nous pouvons alors écrire :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 2,762 \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \tag{3.31.IV}$$

Les relations (3.28.IV-a) et (3.28.IV-b) permettent la détermination explicitement du taux η en fonction de Q^* .

On peut déduire de ces relations ce qui suit, de la relation (3.28.IV-a) et pour $0,09 \leq \eta \leq 0,25$ on a :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\eta\right) = 3,637 Q^*{}^{0,531} = 3,637 Q_{\max}^{*0,531} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,531}$$

Par ailleurs la relation (3.27.IV) donne $Q_{\max}^* = 0,36200526$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\eta\right) = 3,637 Q_{\max}^{*0,531} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,531} = 3,637 \times 0,36200526^{0,531} \times \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,531} = 2,12 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,531}$$

Ou bien en utilisant (2.32) on obtient :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\eta\right) = 2,12 \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,531} \quad (3.32.IV-a)$$

La relation (3.32.IV-a) est valable pour $0,09 \leq \eta \leq 0,25$ correspondant à $0,0155 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,8692$

De la relation (3.28.IV-b) et pour $0,32 \leq \eta \leq 0,79$, correspondant à $0,05667 \leq Q^* \leq 0,31467$ on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,98}\eta\right) = 1,501 Q^*{}^{0,394} = 1,501 Q_{\max}^{*0,394} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,394}$$

Par ailleurs la relation (3.27.IV) donne $Q_{\max}^* = 0,36200526$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,98}\eta\right) = 1,501 Q_{\max}^{*0,394} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,394} = 1,501 \times 0,36200526^{0,394} \times \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,394} = 1,006 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,394}$$

Ou bien en utilisant (2.32) on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,98}\eta\right) = 1,006 \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,394} \quad (3.32.IV-b)$$

La relation (3.32.IV-b) est valable pour $0,32 \leq \eta \leq 0,79$ correspondant à $0,1564 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,8692$

L'écart maximal $\Delta\eta/\eta$ occasionné par l'application des relations (3.32.IV-a) et (3.32.IV-b) est inférieur à 0,50%.

Exemple d'application 1.

Soit à déterminer la profondeur normale dans une conduite circulaire avec banquettes de diamètre $D = 2,5 \text{ m}$, écoulant un débit $Q = 3,56 \text{ m}^3/\text{s}$ sous une pente $J = 0,0004$. Le coefficient $C = 85 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$

Solution :

On peut déterminer le problème de trois manières suivantes :

11. Avec la conductivité relative Q^* :

i. Déterminons la conductivité relative par la relation de définition (2.24) :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 J}} = \frac{3,56}{\sqrt{85^2 \times 2,5^5 \times 0,0004}} = 0,21190981 < Q_{\max}^*$$

ii. Q^* se situe dans $0,05667 \leq Q^* \leq 0,31467$, appliquons la relation (3.28.IV-b) pour trouver η :

$$\eta = \frac{1,98}{\pi} \sin^{-1}(1,501Q^{*0,394}) = \frac{1,98}{\pi} \times \sin^{-1}(1,501 \times 0,21190981^{0,394}) = 0,59990346 \cong 0,6$$

iii. La profondeur moyenne est déduite :

$$y_n = \eta D = 0,6 \times 2,5 = 1,5 \text{ m.}$$

12. Avec l'une des relations (3.30.IV) $\eta(Q/Q_p)$:

vi. Le rapport $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$ ou $Q_p^* = 0,3462151$ et selon la relation (2.29) on a :

$$Q/Q_p = Q^*/Q_p^* = 0,21190981 / 0,3462151 = 0,61207558$$

v. Q/Q_p appartient $0,1637 \leq Q/Q_p \leq 0,8693$ et le taux η est régi par (3.30.IV-b) :

$$\eta = \frac{1,98}{\pi} \sin^{-1} \left[0,788 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,535} \right] = \frac{1,98}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,988 \times 0,61207558^{0,394} \right] = 0,59964673 \cong 0,6$$

Il s'agit bien de la valeur de η obtenue au point 1-ii

13. Avec l'une des relations (3.32.IV) $\eta(Q/Q_{\max})$:

ix. Le rapport $Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^*$ et $Q_{\max}^* = 0,36200526$. Ainsi :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{Q^*}{Q_{\max}^*} = \frac{0,21190981}{0,36200526} = 0,58537771$$

x. On obtient alors par application de la relation approchée (3.32.IV-b) :

$$\eta = \frac{1,98}{\pi} \sin^{-1} \left[1,006 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,394} \right] = \frac{1,98}{\pi} \times \sin^{-1} \left[1,006 \times 0,58537771^{0,394} \right] = 0,60007389 \cong 0,6$$

La aussi, la valeur η est bien celle déterminée au point 1-ii et au point 2-ii.

Vérification : Pour le résultat obtenu déterminons le débit Q par la formule de Chézy. Pour cela recherchons A et R_h pour un taux $\eta = 0,6$. On détermine A_1 et P_1 selon le tableau des par.dim. :

- $A_1 = \zeta(\eta = 0,6) = 0,43665692$
- $P_1 = \vartheta(\eta = 0,6) = 1,87638026$

- La surface mouillée est selon (2.11) : $A = A_1 D^2 = 0,43665692 \times 2,5^2 = 2,72910575 \text{ m}^2$
- le rayon hydraulique est selon (2.18) : $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 2,5 \times \frac{0,43665692}{1,87638026} = 0,58178095 \text{ m}$
- le débit volume serait donc :

$$Q = CA \sqrt{R_h J} = 85 \times 2,72910575 \sqrt{0,58178095 \times 0,0004} = 3,53874309 \text{ m}^3/\text{s}$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est égal à 0,59 % seulement.

8.2.4. Conductivité relative Q_y^* rapportée à la profondeur normale.

La conductivité relative rapportée à la profondeur normale s'exprime en fonction de η par la relation (2.38). Pour $0 \leq \eta \leq 1$, la variation $\eta(Q_y^*)$ a été représentée sur la figure 3.6.IV. Q_y^* diminue avec la diminution de η . Pour $\eta \leq 1$, $Q_y^* \geq 0,3462$, tandis que Q_y^* (circulaire) $\geq 0,3927$ pour $\eta \leq 1$.

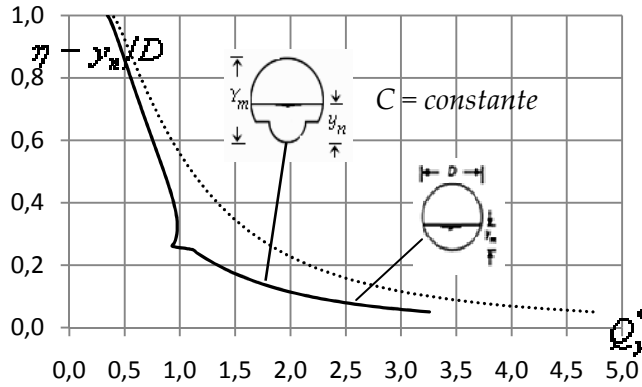


Figure 3.6.IV : Variation de la conductivité relative Q_y^* en fonction du taux de remplissage η pour les cas des conduites circulaire (---) et circulaires avec banquettes (—).

La relation (2.38) a fait l'objet d'une étude particulière qui a consisté à déterminer une relation explicite qui lui est approchée. Le calcul a montré que pour :

- a) $0,06 \leq \eta \leq 0,25$, correspondant à $1,8815 \leq Q_y^* \leq 4,3016$, le taux η est exprimé par :

$$\sinh\left(\frac{\pi}{0,55} \eta\right) = 2,356 Q_y^{*-1,756} \quad (3.33.IV-a)$$

- b) $0,35 \leq \eta \leq 0,44$ correspondant à $0,9128 \leq Q_y^* \leq 0,9732$, le taux de remplissage η est tel que :

$$\sinh(9\eta) = 240 - 234,5 Q_y^* \quad (3.33.IV-b)$$

- c) $0,43 \leq \eta \leq 0,81$, correspondant à $0,5481 \leq Q_y^* \leq 0,9214$, le taux η est tel que :

$$\sinh\left(\frac{\pi}{1,68} \eta\right) = \ln(2,018 Q_y^{*-2,401}) \quad (3.33.IV-c)$$

L'écart relatif maximal occasionné par (3.33.IV-a), (3.33.IV-b) et (3.33.IV-c) est inférieur à 0,50%.

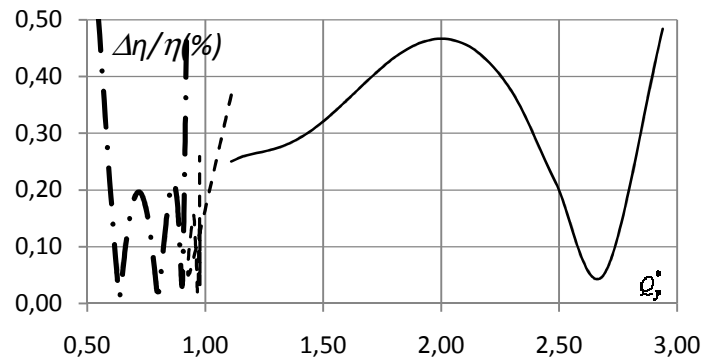


Figure 3.7.IV : Ecart $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par (3.33.IV-a), (3.33.IV-b) et (3.33.IV-c) sur le calcul de η . Ecart (---) pour $0,06 \leq \eta \leq 0,25$ (-.-) pour $0,35 \leq \eta \leq 0,44$ (—) pour $0,43 \leq \eta \leq 0,81$

Exemple d'application 2

Reprenons les données de l'exemple 1 et évaluons cette fois-ci le diamètre D de la conduite.

Les données sont donc : $Q=3,56 \text{ m}^3/\text{s}$ $C=85 \text{ m}^{0,5}/\text{s}$ $J=0,0004$ $y_n=1,5 \text{ m}$

Solution :

Pour les données du problème, la conductivité relative est selon la relation (2.36) :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 J y_n^5}} = \frac{3,56}{\sqrt{85^2 \times 0,0004 \times 1,5^5}} = 0,75992884$$

Q_y^* appartient à $0,5481 \leq Q_y^* \leq 0,9214$ le taux η est donc régi par la relation (3.33.IV-c) :

$$\eta = \frac{1,68}{\pi} \sinh^{-1} \left[\ln(2,018 Q_y^{*-2,401}) \right] = \frac{1,68}{\pi} \times \sinh^{-1} \left[\ln(2,018 \times 0,75992884^{-2,401}) \right]$$

$$= 0,59639364 \cong 0,6$$

Il s'agit bien de la valeur proche de η , calculée au cours des étapes 1-ii, 2-ii et 3-ii de l'exemple1. Par suite, le diamètre D recherché est : $D = y_n / \eta = 1,5 / 0,6 = 2,5m$

3.3. Ecoulement à coefficient de résistance de Manning invariable;

La conductivité relative s'exprime, pour n constant, par la relation (2.42) : $Q^* = A_1^{5/3} / P_1^{2/3}$

A l'état plein ($\eta = 1$), $A_{1p} = 0,73002672$ et $P_{1p} = 3,24581866$ la conductivité relative Q_p^* est égale :

$$Q_p^* = 0,26999046 = \text{constante} \quad (3.34.IV)$$

8.3.1. Variation de la conductivité relative $\eta(Q^*)$ pour n constant.

En faisant varier A_1 et P_1 de la relation (2.42), selon le taux de remplissage, La conductivité relative Q^* a été représentée graphiquement sur la figure 3.8.IV, dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$.

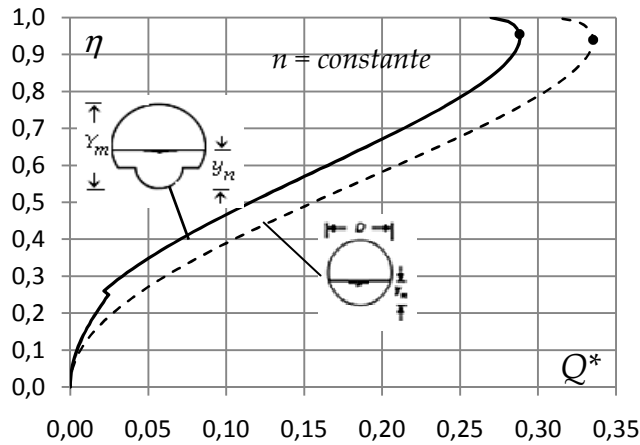


Figure 3.8.IV : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction du taux η selon la formule de Manning Strickler, pour le cas des conduites circulaire avec banquettes et circulaire.

(●) $Q_{\max}^* = 0,288426$ pour $\eta = 0,9456$ pour la conduite circulaire avec banquettes.

La conductivité relative Q^* augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η jusqu'à un maximum $\eta = 0,9456$, puis diminue au-delà de ce maximum.

En utilisant les valeurs de $A_1 = \zeta(\eta = 0,9456) = 0,71338802$ et $P_1 = \vartheta(\eta = 0,9456) = 2,77500611$ on a :

$$Q_{\max}^* = 0,28842555 \quad (3.35.IV)$$

Par contre pour la conduite circulaire : $Q_{\max}^* = 0,3353$, pour le taux de remplissage $\eta = 0,9382$.

Les calculs ont également montré que pour :

- $0 \leq \eta \leq 0,25$ $0 \leq Q^* \leq 0,0245$
- $0,25 \leq \eta \leq 1$ $0,0245 \leq Q^* \leq 0,27$

Afin d'évaluer de manière explicite la valeur du taux de remplissage η , à partir de la valeur connue de la conductivité relative Q^* , nos calculs ont montré que la relation (2.42) pouvait être remplacée par deux relations approchées suivantes, applicables comme suit :

- $0,03 \leq \eta \leq 0,25$ et correspondant à $0,000348 \leq Q^* \leq 0,024544$

$$\sin(\pi\eta) = 4,122 Q^{*0,475} \quad (3.36.IV-a)$$

- $0,34 \leq \eta \leq 0,84$ et correspondant à $0,047039 \leq Q^* \leq 0,269631$

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,99}\eta\right) = 1,578 Q^{*0,37} \quad (3.36.IV-b)$$

L'écart relatif maximal occasionné par les relations (3.36.IV-a) et (3.36.IV-b) est inférieur à 0,46%.

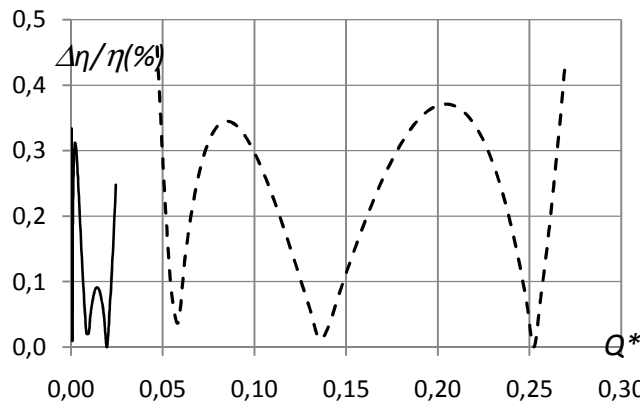


Figure 3.9.IV : Ecarts relatifs en (%) occasionnés par les relations approchées (3.36.IV-a) et (3.36.IV-b) sur le calcul du taux de remplissage de la conduite circulaire avec banquettes
 Ecart (—) pour $0,03 \leq \eta \leq 0,25$ (---) pour $0,34 \leq \eta \leq 0,82$

8.3.2. Courbe de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ pour n constant.

La variation $\eta(Q/Q_p)$, pour n constant, s'écrit en tenant compte de (2.46), (2.42) et (3.34.IV).

$$\frac{Q}{Q_p} = 3,704 \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \quad (3.37.IV)$$

Rappelons que A_1 et P_1 sont données en fonction de η conformément aux intervalles définis dans le tableau des paramètres adimensionnels.

Q/Q_p ne dépend que du taux η . Le taux η est implicite vis-à-vis de Q/Q_p . Pour déterminer η explicitement, On peut déduire des relations approchées (3.36.IV) obtenues précédemment ce qui suit :

De la relation (3.36.IV-a) et pour $0,03 \leq \eta \leq 0,25$ correspondant à $0,000348 \leq Q^* \leq 0,024544$ on a :

$$\sin(\pi\eta) = 4,122 Q^*{}^{0,475} = 4,122 Q_p^*{}^{0,475} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*} \right)^{0,475}$$

Par ailleurs la relation (3.34.IV) donne $Q_p^* = 0,26999046$

Alors il vient :

$$\sin(\pi\eta) = 4,122 Q_p^*{}^{0,475} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*} \right)^{0,475} = 4,122 \times 0,26999046^{0,475} \times \left(\frac{Q^*}{Q_p^*} \right)^{0,475} = 2,213 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*} \right)^{0,475}$$

Ou bien en utilisant (2.46) on obtient :

$$\sin(\pi\eta) = 2,213 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,475} \tag{3.38.IV-a}$$

La relation (3.38.IV-a) est valable pour $0,09 \leq \eta \leq 0,25$ correspondant à $0,0013 \leq Q/Q_p \leq 0,0909$.

L'écart relatif maximal occasionné par cette relation approchée est inférieur à 0,34%.

De la relation (3.36.IV-b) et pour $0,34 \leq \eta \leq 0,84$ correspondant à $0,047 \leq Q^* \leq 0,2696$ on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,99}\eta\right) = 1,578 Q^*{}^{0,37} = 1,578 Q_p^*{}^{0,37} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*} \right)^{0,37}$$

Par ailleurs la relation (3.34.IV) donne $Q_p^* = 0,26999046$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,99}\eta\right) = 1,578 Q_p^*{}^{0,37} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*} \right)^{0,37} = 1,578 \times 0,26999046^{0,37} \times \left(\frac{Q^*}{Q_p^*} \right)^{0,37} = 0,972 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*} \right)^{0,37}$$

Ou bien en utilisant (2.46) on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,99}\eta\right) = 0,972 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,37} \tag{3.38.IV-b}$$

La relation (3.38.IV-b) est valable pour $0,34 \leq \eta \leq 0,84$ correspondant à $0,1742 \leq Q/Q_p \leq 0,9987$.

L'écart relatif maximal occasionné par cette relation approchée est inférieur à 0,47%.

8.3.3. Relation $\eta(Q/Q_{\max})$ pour n constant

La variation $\eta(Q/Q_{\max})$, s'écrit en tenant compte de (2.49), (2.42) et de $Q_{\max}^* = 0,28842555$:

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 3,467 \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \tag{3.39.IV}$$

$\eta(Q/Q_{\max})$ est implicite du taux η . Les relations approchées $\eta(Q^*)$ (3.36.IV-a) et (3.36.IV-b) obtenues, permettent la détermination d'une manière explicite du taux η en fonction de Q^* . On peut déduire de ces relations :

De la relation (3.36.IV-a) et pour $0,03 \leq \eta \leq 0,25$, correspondant à $0,0003 \leq Q^* \leq 0,0245$ on a :

$$\sin(\pi\eta) = 4,122 Q^*{}^{0,475} = 4,122 Q_{\max}^{*0,475} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \right)^{0,475}$$

Par ailleurs la relation (3.35.IV) donne $Q_{\max}^* = 0,28842555$

Alors il vient :

$$\sin(\pi\eta) = 4,122 Q_{\max}^{*0,475} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \right)^{0,475} = 4,122 \times 0,28842555^{0,475} \times \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \right)^{0,475} = 2,284 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \right)^{0,475}$$

Ou bien en utilisant (2.49) on obtient :

$$\sin(\pi\eta) = 2,284 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,475} \quad (3.40.IV-a)$$

La relation (3.40.IV-a) est valable pour $0,09 \leq \eta \leq 0,25$ correspondant à $0,0012 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,0851$.

De la relation (3.36.IV-b) et pour $0,34 \leq \eta \leq 0,84$, correspondant à $0,047 \leq Q^* \leq 0,2696$ on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,99}\eta\right) = 1,578 Q^*{}^{0,37} = 1,578 Q_{\max}^{*0,37} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \right)^{0,37}$$

Par ailleurs la relation (3.35.IV) donne $Q_{\max}^* = 0,28842555$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,99}\eta\right) = 1,578 Q_{\max}^{*0,37} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \right)^{0,37} = 1,578 \times 0,28842555^{0,37} \times \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \right)^{0,37} = 0,996 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} \right)^{0,37}$$

Ou bien en utilisant (2.49) on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,99}\eta\right) = 0,996 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,37} \quad (3.40.IV-b)$$

La relation (3.40.IV-b) est valable pour $0,34 \leq \eta \leq 0,84$ correspondant à $0,1631 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,9451$

L'écart relatif maximal occasionné par ces relations approchées est inférieur à 0,50%.

Exemple d'application 3.

On souhaite déterminer la profondeur y_n dans une conduite circulaire avec banquettes de diamètre

$D = 2\text{ m}$, écoulant un débit $Q = 1,12\text{ m}^3/\text{s}$ sous une pente $J = 0,0005$. Le coefficient $n = 0,0147\text{ m}^{1/3}\text{ s}$.

Solution :

On peut déterminer le problème de trois manières suivantes :

13. Avec la conductivité relative $\eta(Q^*)$

i. Calculons la conductivité relative Q^ par application de la relation (2.41) :*

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3}\sqrt{J}} = \frac{0,0147 \times 1,12}{2^{8/3}\sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} = 0,1159588$$

ii. La conductivité Q^ est telle que $0,047 \leq Q^* \leq 0,2696$, le taux η est, en vertu de (3.36.IV-b) :*

$$\eta = \frac{1,99}{\pi} \times \sin^{-1}(1,578 \times 0,1159588^{0,37}) = 0,50104118 \cong 0,5$$

iii. La profondeur normale y_n recherchée est, par suite :

$$y_n = D\eta = 2 \times 0,5 = 1m$$

14. Avec le taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$

vii. Compte tenu du fait que $Q_p^* = 0,26999046$ et que $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$, alors :

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{0,1159588}{0,26999046} = 0,42949221$$

viii. Q/Q_p appartient à $0,1742 \leq Q/Q_p \leq 0,9987$. Le taux η peut être évalué par (3.38.IV-b) :

$$\eta = \frac{1,99}{\pi} \sin^{-1} \left[0,972 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,37} \right] = \frac{1,99}{\pi} \sin^{-1} [0,972 \times 0,42949221^{0,37}]$$

$$= 0,50098271 \cong 0,5$$

Il s'agit bien de la valeur obtenue au point 2-ii

15. Avec la conductivité maximale $\eta(Q/Q_{\max})$:

vii. Compte tenu du fait que $Q_{\max}^* = 0,28842555$ et que $Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^*$, on a :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{0,1159588}{0,28842555} = 0,40204066$$

ii. Q/Q_{\max} appartient à $0,1631 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,9451$. Le taux η peut être évalué par (3.40.IV-b):

$$\eta = \frac{1,99}{\pi} \sin^{-1} \left[0,996 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,37} \right] = \frac{1,99}{\pi} \sin^{-1} [0,996 \times 0,40204066^{0,37}]$$

$$= 0,50095249 \cong 0,5$$

La aussi, la valeur du taux est bien celle déterminé au point 2-ii et au point 1-ii.

Vérification : Pour le résultat obtenu déterminons le débit volume Q par la formule de Manning. Pour cela recherchons A et R_h pour un taux de remplissage $\eta = 0,5$.

- $A_1(\eta=0,5) = \zeta(\eta=0,5) = 0,33732764$
- $P_1(\eta = 0,5) = \vartheta(\eta = 0,5) = 1,67502234$

- La surface mouillée est selon (2.11) : $A = A_1 D^2 = 0,33732764 \times 2^2 = 1,34931056 m^2$

- le rayon hydraulique est selon (2.18): $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 2 \times \frac{0,33732764}{1,67502234} = 0,4027739 m$

- le débit volume est donc :

$$Q = \frac{1}{n} R_h^{2/3} A \sqrt{J} = \frac{1}{0,0147} \times 0,4027739^{2/3} \times 1,34931056 \times \sqrt{0,0005} = 1,11940472 m^3/s$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est égal à 0,05% seulement.

8.3.4. Conductivité relative Q_y^* rapportée à la profondeur normale.

La conductivité Q_y^* est définie par la relation (2.55). Ainsi, dans $0 \leq \eta \leq 1$, la conductivité relative Q_y^* ne dépend que du taux η . La relation (2.55) a été représentée sur la figure 3.10.IV.

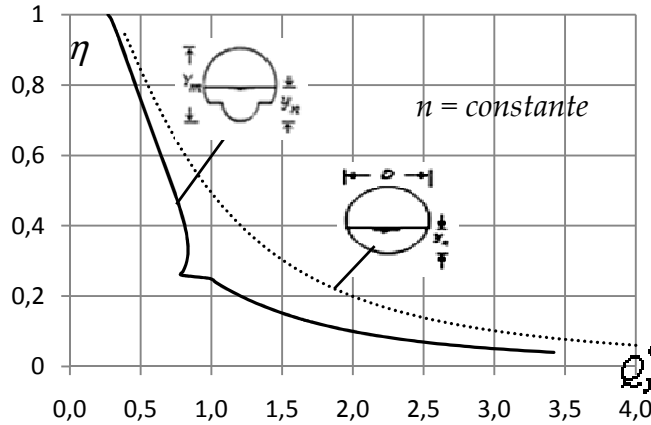


Figure 3.10.IV : Courbes de variation $\eta(Q_y^*)$ dans les conduites circulaire avec banquettes et circulaire.

L'étude de la relation (2.55) a montré que η peut s'exprimer explicitement, en fonction de Q_y^* par :

e) $0,04 \leq \eta \leq 0,25$ correspondant $0,9895 \leq Q_y^* \leq 3,4212$

$$\sinh\left(\frac{\pi}{0,47}\eta\right) = 2,507Q_y^{*-1,808} \quad (3.41.IV-a)$$

a) $0,35 \leq \eta \leq 0,46$, correspondant à $0,7697 \leq Q_y^* \leq 0,8337$

$$\sinh\left(\frac{\pi}{0,302}\eta\right) = 529,6 - 612Q_y^* \quad (3.41.IV-b)$$

b) $0,44 \leq \eta \leq 0,98$, correspondant à $0,3003 \leq Q_y^* \leq 0,7853$

$$\sinh\left(\frac{5\pi}{8}\eta\right) = \ln(1,458Q_y^{*-2,5}) \quad (3.41.IV-c)$$

Les relations (3.41.IV-a) (3.41.IV-b) et (3.41.IV-c) entraîne un écart relatif maximal de 0,49%.

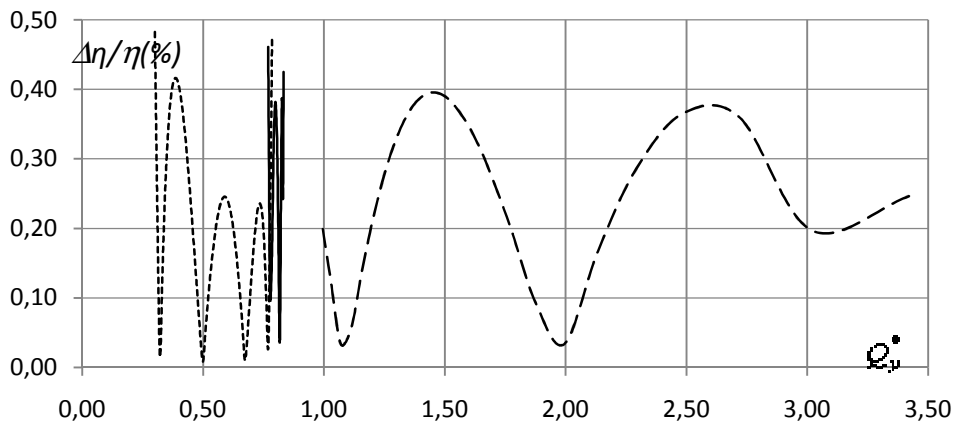


Figure 3.11.IV : Ecart relatif en (%) occasionnées par les relations (3.41.IV-a), (3.41.IV-b) et (3.41.IV-c).

Ecart (...) pour $0,04 \leq \eta \leq 0,25$ (—) pour $0,35 \leq \eta \leq 0,46$ (---) pour $0,44 \leq \eta \leq 0,98$.

Exemple d'application 4

Reprenons les données de l'exemple d'application 3 et déterminons le diamètre D de la conduite. Les données sont alors : $Q=1,12\text{ m}^3/\text{s}$ $J=0,0005$ $n=0,0147\text{ m}^{1/3}\text{ s}$ $y_n=1\text{ m}$

Solution :

i. Calculons la conductivité Q_y^* , rapportée à la profondeur y_n , par application de la relation (2.53) :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{J}} = \frac{0,0147 \times 1,12}{1^{8/3} \times \sqrt{0,0005}} = 0,73629246$$

La conductivité Q_y^* appartient à $0,3003 \leq Q_y^* \leq 0,7853$, le taux η est donc régi par (3.41.IV-c) :

$$\eta = \frac{8}{5\pi} \sinh^{-1} \left[\ln(1,458 Q_y^{*-2,5}) \right] = \frac{8}{5 \times \pi} \times \sinh^{-1} \left[\ln(1,458 \times 0,73629246^{-2,5}) \right] = 0,49837658 \cong 0,5$$

v. Ainsi, le diamètre D recherché est :

$$D = \frac{y_n}{\eta} = \frac{1}{0,49837658} = 2,00651484 \cong 2\text{ m}$$

L'écart relatif entre la valeur de D ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple 3 est 0,32%.

3.4. Ecoulement à coefficient de résistance variable

8.4.1. Expression générale du diamètre

Pour calculer le diamètre D (ou la hauteur h) dans le cas d'une conduite circulaire avec banquettes partiellement remplies pour les valeurs données de Q, J, ε, ν et η , nous allons nous baser sur la formule (1.173) trouvée dans le chapitre 1 et qui est valable pour n'importe quelle dimension linéaire :

$$D \cong 0,512 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5}$$

Où \overline{D}_h est donnée par la relation (1.167) et \overline{R} est donné par la relation (1.158).

On peut aussi faire appel aux relations (1.160), (1.154) et (1.168) ou (1.174) et (1.168)

Exemple d'application 5.

Déterminer le diamètre d'une conduite circulaire avec banquettes véhiculant un débit $Q=1,12\text{ m}^3/\text{s}$ sachant que : $\nu=10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$, $J=0,0005$, $\varepsilon=0,0002\text{ m}$ et $\eta=0,65$.

a) Pour un taux de remplissage $\eta=0,65$, le tableau des paramètres adimensionnels donne :

$$A_1(\eta=0,65)=0,485046245 \quad P_1(\eta=0,65)=1,97971499$$

b) On détermine le diamètre hydraulique \overline{D}_h en utilisant la relation (1.167) :

$$\overline{D}_h = 1,516 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{A_1}{P_1^2} \right)^{2/5} = 1,516 \left(\frac{1,12^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{0,48504625}{1,97971499^2} \right)^{2/5} = 1,99200182\text{ m}$$

Le nombre de Reynolds \overline{R} est déterminé par la relation (1.158) :

$$\bar{R} = 10,556 \frac{(gJQ^3)^{1/5} \left(\frac{A_1}{P_1^2}\right)^{3/5}}{\nu} = 10,556 \times \frac{(9,81 \times 0,0005 \times 1,12^3)^{1/5}}{10^{-6}} \times \left(\frac{0,48504625}{1,97971499^2}\right)^{3/5} = 1113537$$

c) On déduit la dimension linéaire recherchée D en appliquant la relation (1.173):

$$\begin{aligned} D &\cong 0,512 \times \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h + 8,5}{4,75 + \frac{8,5}{\bar{R}}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \\ &= 0,512 \left[-\log \left(\frac{0,0002/1,99200182 + \frac{8,5}{1113537}}{4,75} \right) \right]^{-2/5} \times \left(\frac{1,12^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{1,97971499}{0,48504625^3} \right)^{1/5} \\ &= 1,49905441 m \cong 1,5 m \end{aligned}$$

8.4.2. Variation de la conductivité relative du modèle rugueux de référence : Calcul de la profondeur normale.

Soit les données du problème : Q , D , J , ε et ν . Quel serait alors la profondeur dans la conduite y_n .

Assumons $J = \bar{J}$ et $Q = \bar{Q}$ par contre $a \neq \bar{a}$ ou $D \neq \bar{D}$ $A \neq \bar{A}$, et $P \neq \bar{P}$.

La relation régissant l'écoulement pour le modèle rugueux de référence a été donnée par la relation (2.58) et la conductivité relative est donnée par la relation (2.59). Cette conductivité relative a la même expression que la relation (2.25). D'autre part on a aussi :

$$\bar{Q}_p^* = (A_{1p}^{3/2} / P_{1p}^{1/2}) = 0,3462151 = \text{constante} \quad (3.42.IV)$$

$$Q_{\max}^* = 0,36200526 \quad (3.43.IV)$$

Pour la valeur à l'état plein $\bar{Q}_p^* = 0,3462151$ correspond $\bar{\eta} = 1$ et $\bar{\eta} = 0,86969487$.

La variation $\bar{\eta}(\bar{Q}^*)$ s'exprime par les mêmes relations explicites (3.28.IV-a) et (3.28.IV-b) vis-à-vis de $\bar{\eta}$:

- Dans $0,09 \leq \eta \leq 0,25$ et correspondant à $0,00563 \leq Q^* \leq 0,03471$, on a :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\bar{\eta}\right) = 3,637 \bar{Q}^{*0,531} \quad (3.44.IV-a)$$

- Dans $0,32 \leq \eta \leq 0,79$ et correspondant à $0,05667 \leq Q^* \leq 0,31467$, on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,98}\bar{\eta}\right) = 1,501 \bar{Q}^{*0,394} \quad (3.44.IV-b)$$

L'écart relatif maximal occasionné par les relations approchées (3.44.IV) est inférieur à 0,48%.

Le diamètre à l'état plein \bar{D}_p du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.59) après avoir remplacé $A_1 = A_{1p} = 0,73002672$ et $P_1 = P_{1p} = 3,24581866$:

$$\bar{D}_p = 0,579 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \quad (3.45.IV)$$

Ce modèle rugueux de diamètre \overline{D}_p a la même conductivité relative que celui de même diamètre mais un taux de remplissage $\overline{\eta} = 0,86969487$. Avec cette valeur $\overline{\eta}$ et le diamètre \overline{D}_p déterminé par (3.45.IV), on détermine \overline{P} , \overline{R}_h et \overline{R} , en utilisant les relations (2.15), (2.18) et (1.48) et le tableau des paramètres adimensionnels :

$$A_1(\overline{\eta} = 0,86969487) = 0,66982217 \qquad P_1(\overline{\eta} = 0,86969487) = 2,50718584$$

$$\overline{P} = \overline{D}_p P_1(\overline{\eta} = 0,86969487) = 2,50718584 \overline{D}_p \qquad (3.46.IV)$$

$$\overline{R}_h = \overline{D}_p \frac{A_1(\overline{\eta} = 0,86969487)}{P_1(\overline{\eta} = 0,86969487)} = 0,26716096 \overline{D}_p \qquad (3.47.IV)$$

$$R = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4Q}{\nu \overline{P}(\overline{\eta} = 0,86969487)} = 1,59541424 \frac{Q}{\nu \overline{D}_p} \qquad (3.48.IV)$$

Introduisant ces expressions dans la relation (1.168) pour déterminer le facteur ψ on a :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_p}{5,08} + 5,33 \frac{\nu \overline{D}_p}{Q} \right) \right]^{-2/5} \qquad (3.49.IV)$$

Procédons maintenant comme dans le cas de la conduite circulaire :

- Avec Q et J , déterminons \overline{D}_p et calculons ψ . D est une donnée, affectons $\overline{D} = D/\psi$.
- Avec \overline{D} , calculons à l'aide de (2.59) la conductivité relative \overline{Q}^* et déterminons avec l'une des relations (3.44.IV) le taux η et $y_n = \eta D$.

Exemple d'application 6 :

Reprenons l'exercice précédent, soit : $Q = 1,12 \text{ m}^3/\text{s}$, $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $J = 0,0005$, $\varepsilon = 0,0002 \text{ m}$ et $D = 1,5 \text{ m}$. Quelle est la profondeur normale y_n ?

Le diamètre \overline{D}_p à l'état plein du modèle rugueux de référence est donné par la relation (3.45.IV) :

$$\overline{D}_p = 0,579 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = 0,579 \times \left(\frac{1,12^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} = 1,7548418 \text{ m}$$

- A l'aide de la relation (3.49.IV) calculons le facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_p}{5,08} + 5,33 \frac{\nu \overline{D}_p}{Q} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 1,35 \left[-\log \left(\frac{0,0002/1,7548418}{5,08} + 5,33 \times \frac{10^{-6} \times 1,7548418}{1,12} \right) \right]^{-2/5} = 0,7389242$$

- Affectons à ce modèle rugueux le diamètre $\overline{D} = D/\psi = 1,5/0,7389242 = 2,02997819 \text{ m}$

- Ce nouveau diamètre \overline{D} donne la conductivité relative avec la relation (2.59) :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gJ\bar{D}^5}} = \frac{1,12}{\sqrt{128 \times 9,81 \times 0,0005 \times 2,02997819^5}} = 0,24074934$$

- Avec \bar{Q}^* obtenue déterminons à l'aide de la relation (3.44.IV-b), le taux η et la profondeur normale.

$$\bar{\eta} = \frac{1,98}{\pi} \sin^{-1} \left(1,501 \bar{Q}^{*0,394} \right) = \frac{1,98}{\pi} \sin^{-1} \left(1,501 \times 0,24074934^{0,394} \right) = 0,64816016$$

Ce résultat correspond à celui de l'énoncé de l'exemple précédent.

$$y_n = \eta D = 0,64816016 \times 1,5 = 0,97224024 \text{ m}$$

8.4.3. Expression du débit volume maximal Q_{\max}

L'expression du débit Q_{\max} , est déduite de la formule (1.186) dans laquelle R est donné par (1.188).

A l'état plein, ce nombre de Reynolds prend la valeur particulière R_p en remplaçant dans la relation (1.188), les paramètres adimensionnels A_1 et P_1 , selon le tableau 1, par A_{1p} et P_{1p} :

$$R = 32\sqrt{2} \left(\frac{A_{1p}}{P_{1p}} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \left(\frac{0,73002672}{3,24581866} \right)^{3/2} \times \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu}$$

Soit :

$$R_p \cong 4,83 \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} \quad (3.50.IV)$$

Tenant compte de (3.50.IV), la relation (1.188) s'écrit :

$$R = 9,37 \left(\frac{A_1}{P_1} \right)^{3/2} R_p \quad (3.51.IV)$$

Remplaçant dans la relation (1.186), A , R_n et R par les relations (1.42), (1.44) et (3.51.IV) :

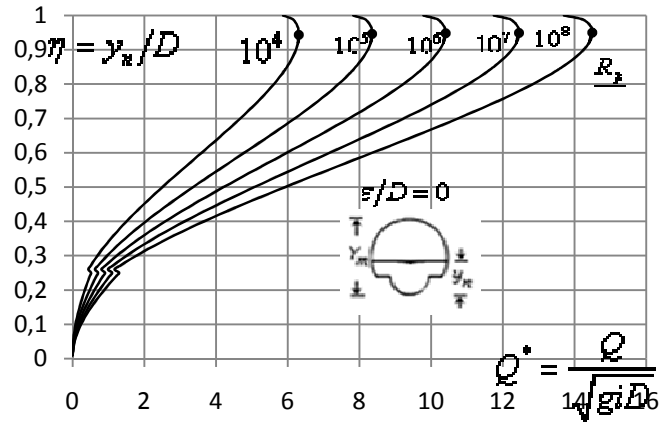
$$Q = -4\sqrt{2} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(A_1/P_1)} + \frac{1,0716}{(A_1/P_1)^{3/2} R_p} \right) \quad (3.52.IV)$$

En introduisant Q^* donnée par (2.72), la relation (3.52.IV) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

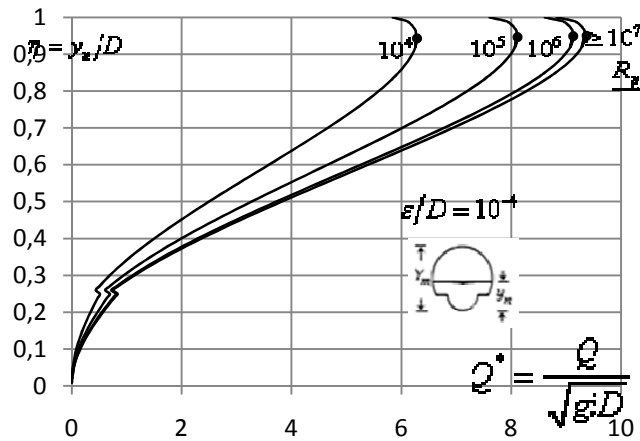
$$Q^* = -4\sqrt{2} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(A_1/P_1)} + \frac{1,0716}{(A_1/P_1)^{3/2} R_p} \right) \quad (3.53.IV)$$

Rappelons R_p est donné par la relation (3.50.IV). La relation (3.53.IV) montre que la conductivité relative Q^* est fonction à la fois de η , de la rugosité relative ε/D et du nombre R_p à l'état plein.

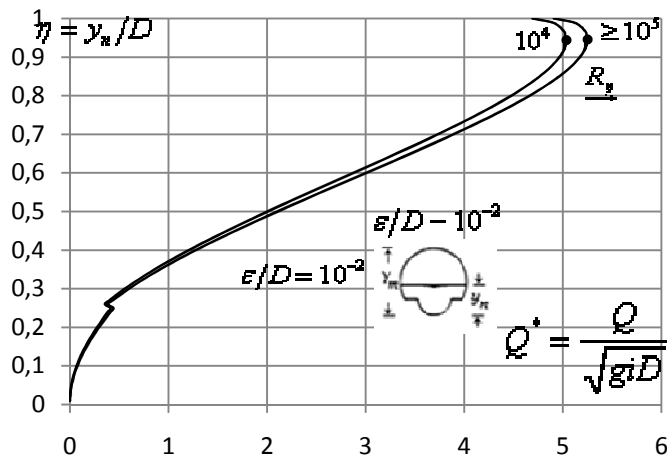
La variation du taux de remplissage η en fonction de la conductivité relative Q^* a été représentée sur la figure 3.12.IV (a à c), conformément à la relation (3.53.IV).



a)



b)



c)

Figure 3.12.IV : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p conformément à la relation (3.53.IV).

Nos remarques sont, au vu de la figure 3.12.IV (a à c), les mêmes que celles concernant la variation de la conductivité relative Q^* de la conduite circulaire étudiée au chapitre 2.

Le tableau 2 regroupe les valeurs particulières η_0 du taux de remplissage η correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$, calculées selon la relation (3.53.IV), pour diverses valeurs de ε/D et du nombre de Reynolds R_p . L'espace grisâtre du tableau 2 correspond au domaine pratique d'utilisation de ε/D et de R_p .

Tableau 2 : Valeurs du taux de remplissage η_0 correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$ pour diverses valeurs de la rugosité ε/D et du nombre de Reynolds R_p

| $\varepsilon/D \rightarrow$ | | 0 | 10^{-5} | $5 \cdot 10^{-5}$ | 10^{-4} | $5 \cdot 10^{-4}$ | 10^{-3} | $5 \cdot 10^{-3}$ | 10^{-2} |
|-----------------------------|----------------|--------|---------------|-------------------|---------------|-------------------|---------------|-------------------|-----------|
| R_p | 10^4 | 0,9432 | 0,9433 | 0,9433 | 0,9433 | 0,9437 | 0,9437 | 0,9440 | 0,9440 |
| | $5 \cdot 10^4$ | 0,9454 | 0,9454 | 0,9455 | 0,9455 | 0,9461 | 0,9465 | 0,9460 | 0,9454 |
| | 10^5 | 0,9460 | 0,9461 | 0,9461 | 0,9465 | 0,9471 | 0,9471 | 0,9461 | 0,9454 |
| | $5 \cdot 10^5$ | 0,9471 | 0,9478 | 0,9482 | 0,9482 | 0,9482 | 0,9480 | 0,9465 | 0,9455 |
| | 10^6 | 0,9478 | 0,9482 | 0,9489 | 0,9489 | 0,9482 | 0,9480 | 0,9465 | 0,9455 |
| | $5 \cdot 10^6$ | 0,9489 | 0,9496 | 0,9497 | 0,9496 | 0,9489 | 0,9482 | 0,9465 | 0,9455 |
| | 10^7 | 0,9490 | 0,9501 | 0,9499 | 0,9496 | 0,9489 | 0,9482 | 0,9465 | 0,9455 |
| | $5 \cdot 10^7$ | 0,9497 | 0,9501 | 0,9500 | 0,9497 | 0,9489 | 0,9482 | 0,9465 | 0,9455 |
| | 10^8 | 0,9499 | 0,9501 | 0,9501 | 0,9497 | 0,9489 | 0,9482 | 0,9465 | 0,9455 |

Nous pouvons ainsi constater que dans $10^{-5} \leq \varepsilon/D \leq 5 \cdot 10^{-3}$ et $5 \cdot 10^4 \leq R_p \leq 5 \cdot 10^7$, la valeur $\eta_0 = 0,9478$ peut être considérée comme la valeur la plus appropriée pour le calcul du débit Q_{\max} .

On détermine pour $\eta_0 = 0,9478$, l'expression de Q_{\max} d'une conduite circulaire avec banquettes à écoulement uniforme, lorsque les paramètres tel que ε , D , J et ν du liquide sont connus. Il suffit pour cela d'introduire cette valeur dans les relations (3.14.IV) et (3.21.IV) pour trouver les paramètres adimensionnels A_1 et P_1 et de calculer Q_{\max} par la relation (3.52.IV).

Pour $0,25 \leq \eta_0 = 0,9478 \leq 1$, les paramètres adimensionnels A_1 et P_1 figurant au tableau 1 sont :

$$A_1 = \zeta(\eta = 0,9478) = 0,71437638 \qquad P_1 = \vartheta(\eta = 0,9478) = 2,78480045$$

En introduisant ces valeurs dans la relation (3.52.IV), on trouve l'expression de Q_{\max} :

$$Q_{\max} = -2,047 \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,797} + \frac{8,248}{R_p} \right) \qquad (3.54.IV)$$

La conductivité relative maximale est alors :

$$Q_{\max}^* = -2,047 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,797} + \frac{8,248}{R_p} \right) \qquad (3.55.IV)$$

Nous obtenons ainsi l'expression du débit volume maximal en fonction de ε/D et de R_p à l'état plein.

8.4.4. Relation approchée de la profondeur normale :

Comme dans le cas de la conduite circulaire, cette partie de l'étude vise à établir une relation approchée susceptible d'évaluer la profondeur normale y_n de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance

variable. Pour établir cette relation, il a été nécessaire d'avoir recours aux relations (3.52.IV) et (3.54.IV). Cette démarche a donc consisté à déterminer la loi de variation du taux de remplissage η en fonction de Q/Q_{\max} . Pour cela, il a été nécessaire d'étudier la variation de $\eta(Q/Q_{\max})$ pour diverses valeurs de ε/D et de R_p , en s'appuyant sur les relations (3.52.IV) et (3.54.IV). Après un travail assez laborieux, nos calculs ont pu montrer que, le taux $\eta(Q/Q_{\max})$ de la conduite pouvait s'exprimer par la relation :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,906}\eta\right) = 1,016\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,361} \quad (3.56.IV)$$

La profondeur normale s'exprime alors par : $y_n = \eta D$

La relation (3.56.IV) est valable dans une large gamme pratique du taux de remplissage compris $0,3 \leq \eta \leq 0,78$ avec une erreur relative maximale de 0,70%. Elle est applicable pour $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,01$ et un nombre de Reynolds $5 \cdot 10^4 \leq R_p \leq 10^8$.

L'exemple 7 montre les étapes à suivre pour la détermination de y_n par application de (3.56.IV).

3.5. Ecoulement critique

La conductivité relative correspond à l'état critique est donnée par la relation (2.83) $Q_c^* = \sqrt{A_{1c}^3/e_{1c}} \cdot A_{1c}$ et e_{1c} (l'indice "c" se réfère l'état critique) sont définis selon le taux η dans le tableau 1 de la conduite circulaire avec banquettes. La relation (2.83) montre clairement que η_c est implicite vis-à-vis de Q_c^* .

Proposons une relation approchée fiable au calcul explicitement de η_c et donc de la profondeur critique y_c , pour cela étudions la variation $\eta_c(Q_c^*)$ en représentons la relation (2.83) sur le graphe ci-dessous :

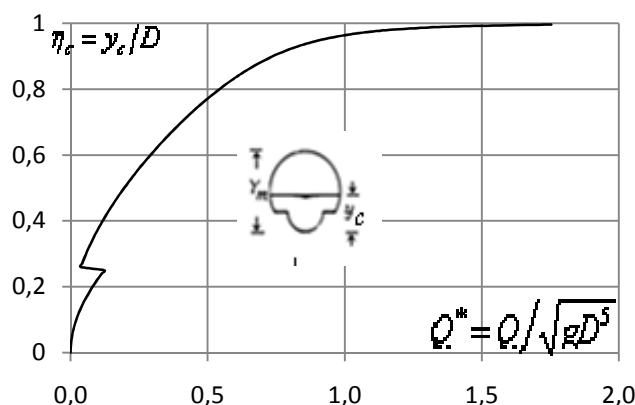


Figure 3.13.IV : Variation du taux critique η_c en fonction de Q^* . Courbe tracée selon la relation (2.83).

Ce graphe montre η_c augmente avec l'accroissement de Q_c^* . En outre, lorsque $Q_c^* \rightarrow \infty$, $\eta_c \rightarrow 1$.

Les calculs menés dans une large gamme pratique $0,32 \leq \eta_c \leq 0,81$, ont permis de trouver une relation fiable explicite qui approche le mieux la relation implicite (2.83) à savoir :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3,344}\eta_c\right) = 0,876Q^{*0,404} \quad (3.57.IV-a)$$

Pour la partie circulaire basse, c'est-à-dire $0,02 \leq \eta_c \leq 0,25$ la relation approchée est :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta_c\right) = Q^{*0,504} \quad (3.57.IV-b)$$

La valeur limite supérieure $\eta_c = 0,81$ représente un taux de 81% ce qui est largement acceptable.

Les écarts relatifs occasionné par les relations (3.57.IV-a) et (3.57.IV-b) est inférieur à 0,50%.

Exemple d'application 7

Reprenons l'exemple du collecteur circulaire étudié au chapitre 2 pour le cas de la conduite circulaire avec banquettes avec les données suivantes : $D = 1,5 \text{ m}$, $J = 0,0005$ et $\varepsilon = 2.10^{-5} \text{ m}$ $\nu = 10^{-6}$. Le débit qui doit arriver à la station d'épuration ne doit pas dépasser $Q = 1,08 \text{ m}^3/\text{s}$.

v. A quelle hauteur de la génératrice inférieure, le déversoir doit être arasé pour limiter le débit vers la station d'épuration à la valeur donnée de $Q = 1,08 \text{ m}^3/\text{s}$.

vi. Quelle est la nature de l'écoulement en comparant la profondeur normale et a la hauteur

Solution :

3. Déterminons la capacité maximale du collecteur et cherchons la cote laquelle doit être arasé le déversoir d'orage pour ne laisser passer que le débit donné.

- Le nombre de Reynolds R_p est selon la relation (3.84):

$$R_p \cong 4,83 \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 4,83 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 621446$$

- Le débit maximal est selon la relation (3.88)

$$Q_{\max}^* = -2,047 \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,797} + \frac{8,248}{R_p}\right)$$

$$= -2,047 \times \sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,5^5} \times \log\left(\frac{2.10^{-5}/1,5}{3,797} + \frac{8,248}{621446}\right) = 1,88646526 \text{ m}^3/\text{s}$$

- Selon la relation (3.90), le taux de remplissage est égal : $\sin\left(\frac{\pi}{1,906}\eta\right) = 1,016\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,361}$

$$\eta = \frac{1,906}{\pi} \sin^{-1}\left[1,016\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,361}\right] = \frac{1,906}{\pi} \times \sin^{-1}\left[1,016 \times \left(\frac{1,08}{1,88646526}\right)^{0,361}\right]$$

$$= 0,59479846 \cong 0,59$$

La profondeur normale recherchée est $y_n = \eta D = 0,59479846 \times 1,5 = 0,89219769 \text{ m}$.

C'est à dire la cote du déversoir doit être à 0,89 m de la génératrice inférieure du collecteur.

Vérifions nos calculs, en déterminons le débit volume par la formule générale (1.186):

Pour le taux obtenu $\eta = 0,59852941$, les paramètres A_1 et P_1 prennent respectivement les valeurs :

$$A_1(\eta = 0,59479846) = 0,43155504 \quad P_1(\eta = 0,59479846) = 1,86577393$$

- l'aire de la section mouillée est selon (2.11) :

$$A = D^2 A_1 = 1,5^2 \times 0,43155504 = 0,97099884 \text{ m}^2$$

- le rayon hydraulique est en vertu de (2.18) :

$$R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 1,5 \times \frac{0,43155504}{1,86577393} = 0,34695123 \text{ m}$$

- le nombre de Reynolds est selon (1.187) :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 0,34695123^3}}{10^{-6}} = 647720$$

- le débit volume serait donc selon la relation (1.186) :

$$\begin{aligned} Q &= -4\sqrt{2g} A \sqrt{JR_h} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,97099884 \times \sqrt{0,34695123 \times 0,0005} \times \log \left(\frac{0,00002}{14,8 \times 0,34695123} + \frac{10,04}{647720} \right) \\ &= 1,06777648 \cong 1,07 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui de l'énoncé est égal à 1,13% seulement.

5. la nature de l'écoulement peut être connue en déterminant y_c en application de la relation (3.93) :

Selon la relation (2.82), le débit relatif Q_c^* est :

$$Q_c^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} = \frac{1,08}{\sqrt{9,81 \times 1,5^5}} = 0,1251299$$

$$y_c = \frac{3,344}{\pi} D \sin^{-1}(0,876 Q_c^{*0,404}) = \frac{3,344}{\pi} \times 1,5 \times \sin^{-1}(0,876 \times 0,1251299^{0,404}) = 0,61943446 \text{ m}$$

Nous pouvons ainsi déduire que l'écoulement est de nature fluviale puisque $y_n = 0,9 > y_c$.

CONDUITE EN ARC DE CERCLE ECRASE (V)

La conduite fermée considérée dans la présente étude est celle communément appelée conduite en arc de cercle écrasé représentée par la figure 3.1.V. Elle est caractérisée par un demi-cercle de diamètre D formant sa partie haute et sa hauteur $Y_m = 0,6339746D$.

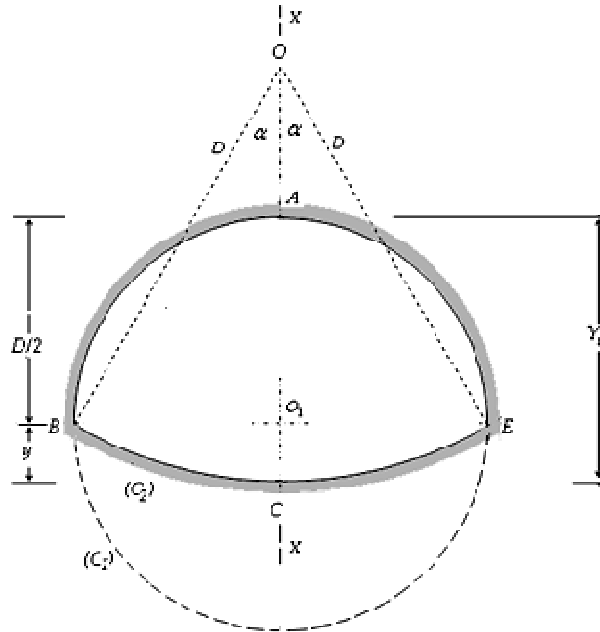


Figure 3.1.V. Schéma de définition de la conduite en arc de cercle écrasé.

Caractéristiques géométriques de la conduite :

La conduite est formée d'un arc de cercle \widehat{BCE} formant sa partie inférieure et du demi-cercle \widehat{BAE} de diamètre D constituant sa partie supérieure. L'arc de cercle \widehat{BCE} de demi-angle au centre α , se trace à partir du point O , centre du cercle (C_2) de diamètre $2D$.

Les étapes constructives de la section droite d'une telle conduite sont les suivantes :

- xx. Sur un axe vertical $\overline{XX'}$, on trace le cercle (C_1) de centre O_1 et de diamètre D .
- xxi. Du point B ou E , formant l'axe horizontale $\overline{BO_1E}$, on détermine le point O sur l'axe vertical $\overline{XX'}$ tel que $\overline{BO} = \overline{EO} = D$.
- xxii. On trace le cercle (C_2) de centre O et de diamètre $2D$.
- xxiii. La figure $ABCE$ obtenue représente la section droite d'une conduite en arc de cercle écrasé.

La figure obtenue suggère les remarques suivantes :

Dans le triangle $(\triangle OBO_1)$ on peut écrire :

$$1. \quad \sin(\alpha) = \frac{\overline{BO_1}}{\overline{OB}} = \frac{D/2}{D} = 0,5$$

$$\text{Soit :} \quad \alpha = \pi/6 \text{ radian}$$

Nous pouvons écrire par suite :

$$2. \quad \cos(\alpha) = \frac{D-y}{D} = 1 - y/D$$

Soit :

$$3. \quad y = D[1 - \cos(\pi/6)] = 0,1339746D \cong 0,134D$$

Donc la hauteur de la conduite Y_m est égale :

$$4. \quad Y_m = D/2 + y = D/2 + 0,1339746D = 0,6339746D \cong 0,634D$$

Avec cette dernière expression la dimension linéaire y peut s'écrire :

$$5. \quad y = 0,1339746D = \frac{0,1339746}{0,6339746} Y_m = 0,21132487 Y_m$$

Il est évident que la longueur de la corde $\overline{BE} = D$

3.1. Caractéristiques de l'écoulement

Les caractéristiques de l'écoulement, telle que l'aire de la section mouillée A , le périmètre mouillé P , le rayon hydraulique R_h ou la largeur du plan d'eau e dépendent du taux de remplissage $\eta = y_n/Y_m$ ou y_n est la profondeur normale de l'écoulement. Ces caractéristiques s'expriment par différentes relations selon le lieu géométrique de l'écoulement.

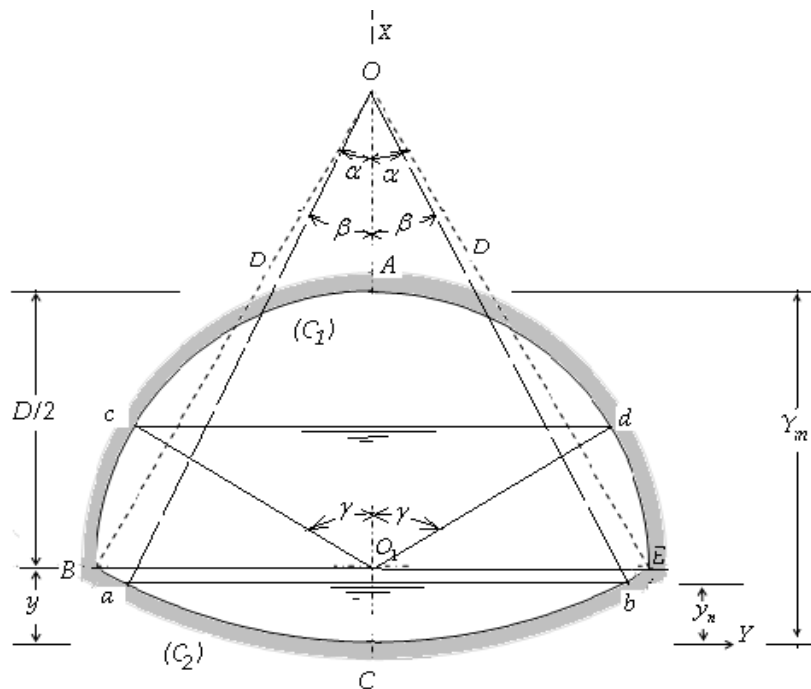


Figure 3.2.V. Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite en arc de cercle écrasé.

La figure 3.2.V montre deux lieux géométriques différents que peut occuper l'écoulement, selon la valeur du taux de remplissage :

- Entre les points C et O_1 de la partie circulaire basse c'est-à-dire : $y_n \leq y$ ou $\eta \leq 0,21132487$.
- Entre les points O_1 et A de la partie circulaire haute, c'est-à-dire $0,21132487 \leq \eta \leq 1$.

6) $\underline{\eta \leq 0,21132487}$

m. Largeur du plan d'eau :

Lorsque $\eta \leq 0,21132487$, la largeur du plan d'eau e correspond à la corde \overline{ab} . Les points a et b appartiennent au cercle (C_2) , de centre O et de diamètre $2D$.

Ainsi : $e = 2D \sin(\beta)$

Ou bien

$$e = 2D\sqrt{1 - \cos^2(\beta)}$$

Où l'angle β est le demi angle au centre, tel que :

$$\cos(\beta) = \frac{D - y_n}{D} = 1 - \frac{y_n}{D} = 1 - 0,6339746 \frac{y_n}{Y_m} = 1 - 0,6339746\eta$$

$$\beta = \cos^{-1}(1 - 0,6339746\eta)$$

$$\sin(\beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\beta)} = \sqrt{1 - (1 - 0,6339746\eta)^2} = \sqrt{\eta(1,2679492 - 0,40192379\eta)}$$

$$e = 2D\sqrt{\eta(1,2679492 - 0,40192379\eta)} \tag{3.1.V}$$

On vérifie bien que pour $\eta = 0,21132487$, la longueur de la corde $\overline{BE} = D$

n. Périmètre mouillée :

Le périmètre mouillé P correspond à la longueur de l'arc \widehat{ab} , appartenant au cercle (C_2) , de centre O et de diamètre $2D$. Alors $P = 2\beta D$ soit :

$$P = 2D\beta = 2D\cos^{-1}(1 - 0,6339746\eta) \tag{3.2.V}$$

Définissons la fonction :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 0,6339746\eta) \tag{3.3.V}$$

La relation (3.2.V) devient :

$$P = 2D\sigma(\eta) \tag{3.4.V}$$

La longueur de l'arc \widehat{BE} correspond à la valeur particulière de P pour $\eta = 0,21132487$ soit :

$$\widehat{BE} = 2D\sigma(\eta = 0,21132487) = 2 \times D \times \cos^{-1}(1 - 0,6339746 \times 0,21132487) = 1,04719757D$$

m. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspond à l'aire du segment circulaire $aCba$, appartenant au cercle (C_2) , de centre O et de diamètre $2D$. Ainsi :

$$A = \frac{1}{2} D^2 [2\beta - \sin(2\beta)] = D^2 [\beta - \sin(\beta) \cos(\beta)]$$

Soit :

$$A = D^2 \left[\cos^{-1}(1 - 0,6339746\eta) - (1 - 0,6339746\eta) \sqrt{\eta(1,2679492 - 0,40192379\eta)} \right] \tag{3.5.V}$$

Définissons la fonction :

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{(1 - 0,6339746\eta)\sqrt{\eta(1,2679492 - 0,40192379\eta)}}{\cos^{-1}(1 - 0,6339746\eta)} \quad (3.6.V)$$

La relation (3.5.V) permet d'écrire :

$$A = D^2 \sigma(\eta) \varphi(\eta) \quad (3.7.V)$$

n. Rayon hydraulique

Les relations (3.4.V) et (3.7.V) permettent de déduire que le rayon hydraulique $R_h = A/P$ est :

$$R_h = \frac{D}{2} \varphi(\eta) \quad (3.8.V)$$

7) $0,21132487 \leq \eta \leq 1$

c. Largeur du plan d'eau :

Lorsque $0,21132487 \leq \eta \leq 1$, la largeur du plan d'eau e correspond à \overline{cd} (figure 3.2.V). Les points c et d appartiennent au cercle (C_1) , de centre O_1 et de diamètre D .

Ainsi :

$$e = D \sin(\gamma) \quad (3.9.V)$$

Ou bien

$$e = D \sqrt{1 - \cos^2(\gamma)} \quad (3.10.V)$$

Où l'angle γ est le demi angle au centre, tel que :

$$\cos(\gamma) = \frac{y_n - \overline{Co}}{D/2} = 2 \frac{y_n - y}{D} = 2(0,6339746\eta - 0,1339746)$$

Soit :

$$\cos(\gamma) = 1,2679492(\eta - 0,21132487) \quad (3.11.V)$$

On tire de cette dernière relation l'expression $\sin(\gamma)$:

$$\sin(\gamma) = 1,2679492 \sqrt{(1 - \eta)(0,57735026 + \eta)} \quad (3.12.V)$$

Il vient alors :

$$e = 1,2679492 D \sqrt{(1 - \eta)(0,57735026 + \eta)} \quad (3.13.V)$$

d. Périmètre mouillée :

Lorsque $0,21132487 \leq \eta \leq 1$, le périmètre mouillé P correspond à deux fois la longueur de l'arc \widehat{Bc} , à laquelle il faut rajouter la longueur de l'arc de cercle \widehat{BE} . Deux fois la longueur de l'arc \widehat{Bc} est égale à la différence des longueurs des arcs \widehat{BAE} et \widehat{cAd} . Le périmètre mouillé sera donc égal :

$$P = 2 \times \widehat{Bc} + \widehat{BE} = (\widehat{BAE} - \widehat{cAd}) + \widehat{BE}$$

La longueur $\widehat{BE} = 1,04719757 D$, (Point b du périmètre mouillé lorsque $\eta \leq 0,21132487$).

D'autre part on a :

$$\widehat{BAE} = \pi D/2$$

La longueur de l'arc \widehat{cAd} est tel que :

$$\widehat{cAd} = 2\gamma \frac{D}{2} = \gamma D \quad (3.14.V)$$

L'angle γ est déduit de la formule (3.11.V) :

$$\gamma = \cos^{-1}[1,2679492(\eta - 0,21132487)] \quad (3.15.V)$$

Soit :

$$\widehat{cAd} = D \cos^{-1}[1,2679492(\eta - 0,21132487)]$$

Le périmètre mouillé sera alors :

$$P = (\widehat{BAE} - \widehat{cAd}) + \widehat{BE} = \pi D/2 - D \cos^{-1}[1,2679492(\eta - 0,21132487)] + 1,04719757D$$

Soit :

$$P = D [2,6179939 - \cos^{-1}[1,2679492(\eta - 0,21132487)]] \quad (3.16.V)$$

Définissons la fonction :

$$\vartheta(\eta) = 2,6179939 - \cos^{-1}[1,2679492(\eta - 0,21132487)] \quad (3.17.V)$$

Le périmètre sera égal à :

$$P = D\vartheta(\eta) \quad (3.18.V)$$

o. Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée A correspondant à $0,21132487 \leq \eta \leq 1$ est définie par l'espace $cdECBc$ de la figure 3.2.V. L'aire de la section mouillée A peut être décomposée en deux aires qui sont :

- A_0 , l'aire de la section mouillée du secteur circulaire $cdEBc$ appartenant au cercle (C_1) de diamètre D et de centre o .
- A_1 , l'aire du segment circulaire $BECE$ appartenant au cercle (C_2) de diamètre $2D$ et de centre O .

L'aire A_0 est déterminée en retranchant de la surface A_2 du demi-cercle $BAEB$, l'aire A_3 du segment circulaire $cdAc$.

IL vient alors que :

$$A = A_0 + A_1 = A_2 - A_3 + A_1 \quad (3.19.V)$$

- L'aire du demi-cercle $BAEB$ de diamètre D , A_2 est égale :

$$A_2 = \pi D^2/8 \quad (3.20.V)$$

- Le segment circulaire $cdAc$, de corde \overline{cd} appartient au cercle de diamètre D et de centre O , son aire A_3 peut être déterminée ainsi :

$$A_3 = \frac{(D/2)^2}{2} [2\gamma - \sin(2\gamma)] = \frac{D^2}{4} [\gamma - \sin(\gamma) \cos(\gamma)]$$

En introduisant, dans cette dernière expression, les relations (3.11.V), (3.12.V) et (3.15.V) on a :

$$A_3 = \frac{D^2}{4} \left[\cos^{-1}[1,2679492(\eta - 0,21132487)] - \sqrt{(1-\eta)(0,57735026 + \eta)} \right] \quad (3.21.V)$$

- L'aire A_I du segment circulaire $BECE$ de corde \overline{BE} et d'angle au sommet ($2\alpha = \pi/3$) appartient au cercle de diamètre $2D$ et de centre O , son aire A_I est égale :

$$A_I = \frac{(D)^2}{2} \left[2 \times \frac{\pi}{6} - \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) \right] = 0,09058607D^2 \quad (3.22.V)$$

L'aire A recherchée est obtenue en utilisant les relations (3.20.V), (3.21.V) et (3.22.V), soit après calcul et simplification :

$$A = D^2 \left\{ \begin{array}{l} 0,48328516 - \frac{1}{4} \cos^{-1} [1,2679492(\eta - 0,21132487)] \\ + 1,2679492^2 (\eta - 0,21132487) \sqrt{(1-\eta)(0,57735026 + \eta)} \end{array} \right\} \quad (3.23.V)$$

Définissons, par souci de simplification d'écriture, la fonction :

$$\zeta(\eta) = 0,48328516 - \frac{1}{4} \cos^{-1} [1,2679492(\eta - 0,21132487)] \\ + 1,60769517(\eta - 0,21132487) \sqrt{(1-\eta)(0,57735026 + \eta)} \quad (3.24.V)$$

La relation (3.23.V) s'écrit alors :

$$A = \zeta(\eta)D^2 \quad (3.25.V)$$

A l'état plein ($\eta = 1$) :

$$A_{p(CACE)} = 0,4833D^2 \quad (3.26.V)$$

Alors que l'aire de la conduite circulaire pleine de diamètre D est égale à $A_{p(c)} = \pi D^2/4$.

$$\frac{A_{p(CACE)}}{A_{p(c)}} (\%) = \frac{0,4833D^2}{0,7854D^2} \times 100 \cong 62\% \quad (3.27.V)$$

La conduite en arc de cercle écrasé occupe 62% de la surface d'une conduite circulaire de même diamètre.

p. Rayon hydraulique

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$ s'écrit, en ayant recours aux relations (3.18.V) et (3.25.V) :

$$R_h = A/P = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \quad (3.28.V)$$

Variation des caractéristiques de l'écoulement

La caractéristique adimensionnelle de l'écoulement, en particulier le rayon hydraulique relatif $R_h/D = R_{h1}$ est représenté sur la figure 3.3.V dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$.

R_h/D passe par un maximum pour le taux $\eta = 0,715$. La figure 3.3.V montre que le rayon hydraulique relatif R_h/D subit une augmentation brusque lorsque ce taux dépasse immédiatement la valeur de 0,211, ceci est dû à l'augmentation rapide de la surface mouillée après le remplissage du segment circulaire bas de la section droite. En application de la relation (3.28.V) et on introduisant les valeurs $A_1 = \zeta(\eta = 0,715)$ et $P_1 = \vartheta(\eta = 0,715)$, on a : $R_{h,max} = 0,43404435D$

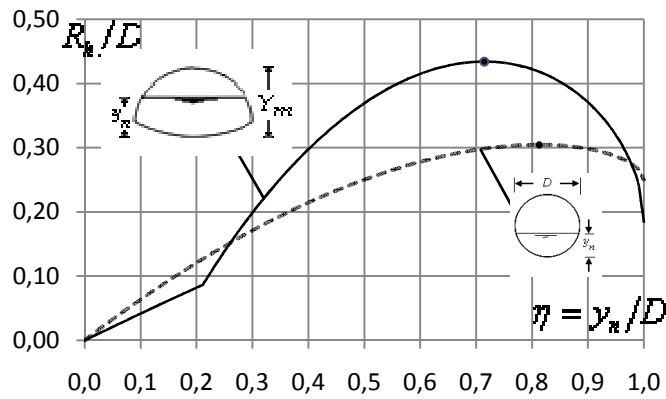


Figure 3.3.V : Variation du rayon hydraulique relatif R_h/D en fonction du taux η .

(●) Taux de remplissage correspondant à $R_{h,max}/D$.

Ainsi, nous avons exprimé dans le tableau suivant les paramètres adimensionnels A_1, P_1, R_{h1} et e_1 selon le taux de remplissage $\eta = y_n/Y_m$:

Tableau 1 : Paramètres adimensionnels

| | Expressions des fonctions de $\eta = y_n/Y_m$ | | A l'état plein $\eta = 1$ |
|---------------------|--|--|------------------------------|
| $\sigma(\eta) =$ | $\cos^{-1}(1 - 0,6339746\eta)$ | | |
| $\varphi(\eta) =$ | $1 - \frac{(1 - 0,6339746\eta)\sqrt{\eta(1,2679492 - 0,40192379\eta)}}{\cos^{-1}(1 - 0,6339746\eta)}$ | | |
| $\vartheta(\eta) =$ | $2,6179939 - \cos^{-1}[1,2679492(\eta - 0,21132487)]$ | | 2,6179939 |
| $\zeta(\eta) =$ | $0,48328516 - \frac{1}{4}\cos^{-1}[1,2679492(\eta - 0,21132487)]$ $+ 1,60769517(\eta - 0,21132487)\sqrt{(1-\eta)(0,57735026+\eta)}$ | | 0,48328516 |
| Par.dim | $\eta \leq 0,21132487$ | $0,21132487 \leq \eta \leq 1$ | |
| $e_1 =$ | $2\sqrt{\eta(1,2679 - 0,4019\eta)}$ | $1,2679\sqrt{(1-\eta)(0,5773+\eta)}$ | 0 |
| $A_1 =$ | $A_1 = \sigma(\eta)\varphi(\eta)$ | $A_1 = \zeta(\eta)$ | $A_{1p} = 0,48328516$ |
| $P_1 =$ | $P_1 = 2\sigma(\eta)$ | $P_1 = \vartheta(\eta)$ | $P_{1p} = 2,6179939$ |
| $R_{h1} =$ | $R_{h1} = 2\varphi(\eta)$ | $R_{h1} = \zeta(\eta)/\vartheta(\eta)$ | $R_{h1p} = 0,18460131$ |

Nous avons choisi dans cette étude la dimension linéaire a , figurant dans les relations (1.41), (1.42), (1.43) et (1.44) pour une conduite circulaire avec banquettes fermée, le diamètre caractéristique D .

6.2. Ecoulement à coefficient de résistance de Chézy invariable.

11.2.1. Variation de la conductivité relative $\eta(Q^*)$ pour C constant.

Rappelons que selon Chézy la conductivité relative s'exprime par la relation (2.25). En faisant varier A_1 et P_1 , selon le taux η , La conductivité Q^* a été représentée sur la figure 3.4.V, dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$.

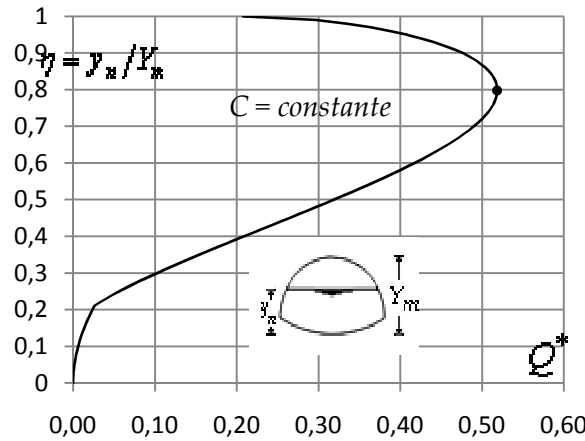


Figure 3.4.V : Variation de la conductivité Q^* en fonction du taux η tracée selon la relation (2.25).

(●). $Q_{\max}^* = 0,2338$ Correspondant à $\eta = 0,7986$.

La conductivité relative Q^* augmente avec l'accroissement du taux η , jusqu'à un maximum correspondant à $\eta = 0,7986$, puis diminue au-delà de ce maximum.

En introduisant $A_{1p} = 0,48328516$ et $P_{1p} = 2,6179939$ dans la relation (2.25), on a :

$$Q_p^* = 0,20764471 = \text{constante} \tag{3.29.V}$$

En outre la conductivité maximale Q_{\max}^* correspondant à $\eta = 0,7986$ est déterminée par application de la (2.25) en remplaçant $A_1 = \zeta(\eta = 0,7986) = 0,79760596$ et $P_1 = \vartheta(\eta = 0,7986) = 1,88718545$:

$$Q_{\max}^* = 0,51853168 \tag{3.30.V}$$

On peut tirer des relations (3.29.V) et (3.30.V) que $Q_{\max} = 2,49720632Q_p$

La conductivité relative Q^* déterminée par la relation (2.25), selon l'intervalle de η , est telle que :

- $0 \leq Q^* \leq 0,02664$, correspondant à $\eta \leq 0,21132487$
- $0,02664 \leq Q^* \leq 0,51853$, correspondant à $0,21132487 \leq \eta \leq 1$

Afin d'évaluer de manière explicite la valeur du taux de remplissage $\eta(Q^*)$ à partir des paramètres connus C , Q , D , et J , nos calculs ont montré que la relation (2.25) peut être remplacée par :

Pour $0,22 \leq \eta \leq 0,35$, correspondant à $0,03276 \leq Q^* \leq 0,15441$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{0,86}\eta\right) = 1,359 Q^{*0,187} \quad (3.31.V-a)$$

Pour $0,36 \leq \eta \leq 0,79$, correspondant à $0,16516 \leq Q^* \leq 0,51828$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,607}\eta\right) = 1,286 Q^{*0,383} \quad (3.31.V-b)$$

L'écart maximal $\Delta\eta/\eta$ occasionné par les relations (3.31.V-a) et (3.31.V-b) est inférieur à 0,50%.

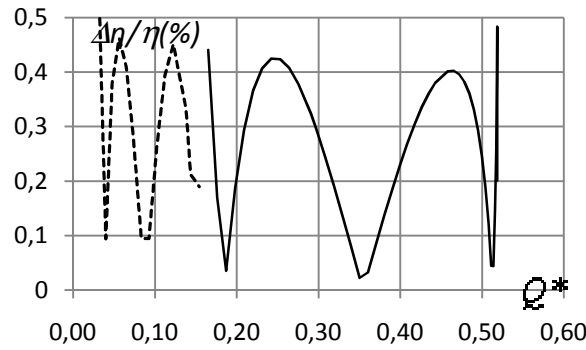


Figure 3.5.V : Ecarts $\Delta\eta/\eta(\%)$ occasionnés par les relations (3.31.V-a) et (3.31.V-b) sur le calcul de η
 Ecart : (---) pour la gamme $0,22 \leq \eta \leq 0,35$ (—) pour la gamme $0,36 \leq \eta \leq 0,79$

11.2.2. Courbe de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ pour C constant.

La courbe de remplissage de la conduite se traduit par la variation du paramètre de forme $\eta(Q/Q_p)$.

Tenant compte des (2.25), (2.29) et la valeur $Q_p^* = 0,20764471$, nous pouvons écrire que pour :

$$\frac{Q}{Q_p} = 4,816 \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \quad (3.32.V)$$

Les relations approchées $\eta(Q^*)$ (3.31.V-a) et (3.31.V-b) permettent la détermination d'une manière explicite du taux η en fonction de la conductivité Q^* . On peut déduire de ces relations ce qui suit :

De la relation (3.31.V-a) et pour $0,22 \leq \eta \leq 0,35$, correspondant à $0,03276 \leq Q^* \leq 0,15441$ on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{0,86}\eta\right) = 1,359 Q^{*0,187} = 1,359 Q_p^{*0,187} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,187}$$

Par ailleurs $Q_p^* = 0,20764471$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{0,86}\eta\right) = 1,359 Q_p^{*0,187} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,187} = 1,359 \times 0,20764471^{0,187} \times \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,187} = 1,013 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,187}$$

Ou bien en utilisant (2.29) on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{0,86}\eta\right) = 1,013 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,187} \quad (3.33.V-a)$$

La relation (3.33.V-a) est valable pour $0,22 \leq \eta \leq 0,35$ correspondant à $0,1578 \leq Q/Q_p \leq 0,7436$.

De la relation (3.31.V-b) et pour $0,36 \leq \eta \leq 0,79$ correspondant à $0,16516 \leq Q^* \leq 0,51828$, on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,607}\eta\right) = 1,286 Q^*{}^{0,383} = 1,286 Q_p^{*0,383} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,383}$$

Par ailleurs la relation (3.29.V) donne $Q_p^* = 0,20764471$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,607}\eta\right) = 1,286 Q_p^{*0,383} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,383} = 1,286 \times 0,20764471^{0,383} \times \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,383} = 0,704 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,383}$$

Ou bien en utilisant (2.29) on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,607}\eta\right) = 0,704 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,383} \quad (3.33.V-b)$$

La relation (3.33.V-b) est valable pour $0,36 \leq \eta \leq 0,79$ correspondant à $0,7954 \leq Q/Q_p \leq 2,496$.

L'écart relatif maximal occasionné par les relations approchées (3.33.V-a) et (3.33.V-b) est inférieur à 0,48%.

11.2.3. Relation $\eta(Q/Q_{\max})$ pour C constant

En tenant compte des relations (2.25), (2.32) et (3.30.V) nous pouvons alors écrire que pour :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 1,9285 \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \quad (3.34.V)$$

Les relations $\eta(Q^*)$ (3.31.V-a) et (3.31.V-b) obtenues précédemment permettent la détermination d'une manière explicite du taux η en fonction de la conductivité Q^* . On peut déduire de ces relations :

De la relation (3.31.V-a) et pour $0,22 \leq \eta \leq 0,35$, correspondant à $0,03276 \leq Q^* \leq 0,15441$ on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{0,86}\eta\right) = 1,359 Q^*{}^{0,187} = 1,359 Q_{\max}^{*0,187} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,187}$$

Par ailleurs $Q_{\max}^* = 0,51853168$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{0,86}\eta\right) = 1,359 Q_{\max}^{*0,187} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,187} = 1,359 \times 0,51853168^{0,187} \times \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,187} = 1,202 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,187}$$

Ou bien en utilisant (2.32) on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{0,86}\eta\right) = 1,202 \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,187} \quad (3.35.V-a)$$

La relation (3.35.V-a) est valable pour $0,22 \leq \eta \leq 0,35$ correspondant à $0,0632 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,2978$.

De la relation (3.31.V-b) et pour $0,36 \leq \eta \leq 0,79$, correspondant à $0,16516 \leq Q^* \leq 0,51828$ on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,607}\eta\right) = 1,286 Q^*{}^{0,383} = 1,286 Q_{\max}^{*0,383} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}}\right)^{0,383}$$

Par ailleurs la relation (3.30.V) donne $Q_{\max}^* = 0,51853168$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,607}\eta\right) = 1,286 Q_{\max}^{*0,383} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}}\right)^{0,383} = 1,286 \times 0,51853168^{0,383} \times \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}}\right)^{0,383} = \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}}\right)^{0,383}$$

Ou bien en utilisant (2.32) on obtient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,607}\eta\right) = \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,383} \quad (3.35.V-b)$$

La relation (3.35.V-b) est valable pour $0,36 \leq \eta \leq 0,79$ correspondant à $0,3185 \leq Q/Q_{\max} \leq 1$.

L'écart relatif maximal occasionné par les relations (3.35.V-a) et (3.35.V-b) est inférieur à 0,48%.

Exemple d'application 1

Soit à déterminer la profondeur normale dans une conduite en arc de cercle écrasé de diamètre $D = 2\text{ m}$, écoulant un débit $Q = 4,03\text{ m}^3/\text{s}$ sous une pente $J = 0,0004$. Le coefficient $C = 85\text{ m}^{0,5}/\text{s}$.

Solution :

On peut déterminer le problème de trois manières suivantes :

1. Avec la conductivité relative Q^* :

ii. Déterminons la conductivité relative par la relation de définition (2.24) :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 J}} = \frac{4,03}{\sqrt{85^2 \times 2^5 \times 0,0004}} = 0,41906475 < Q_{\max}^*$$

iii. Q^* se situe dans $0,16516 \leq Q^* \leq 0,51828$, l'application de (3.31.V-b) permet de trouver η :

$$\eta = \frac{1,607}{\pi} \sin^{-1}\left(1,286 Q^*{}^{0,383}\right) = \frac{1,607}{\pi} \sin^{-1}\left(1,286 \times 0,41906475^{0,383}\right) = 0,59968959 \cong 0,6$$

iv. La profondeur moyenne est déduite :

$$y_n = \eta Y_m = 0,6 \times 0,6339746 \times 2 = 0,76076952 \cong 0,76\text{ m}.$$

2. Avec le taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$

i. Le rapport $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$ ou $Q_p^* = 0,20764471$ et selon la relation (2.29) on a :

$$Q/Q_p = Q^*/Q_p^* = 0,41906475 / 0,20764471 = 2,01818168$$

ii. Par suite, Q/Q_p appartient $0,7954 \leq Q/Q_p \leq 2,496$ et le taux η est régi par (3.33.V-b) :

$$\eta = \frac{1,607}{\pi} \sin^{-1}\left[0,704\left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,383}\right] = \frac{1,607}{\pi} \sin^{-1}\left[0,704 \times 2,01818168^{0,383}\right] = 0,5991247 \cong 0,6$$

Il s'agit bien de la valeur de η obtenue au point 1-ii

3. Avec la relation $\eta(Q/Q_{\max})$

i. Le rapport $Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^*$ et $Q_{\max}^* = 0,51853168$. Ainsi :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{Q^*}{Q_{\max}^*} = \frac{0,41906475}{0,51853168} = 0,80817579$$

ii. Q/Q_{\max} appartient à $0,3185 \leq Q/Q_{\max} \leq 1$ et le taux η est régi par la relation (3.35.V-b) :

$$\eta = \frac{1,607}{\pi} \sin^{-1} \left[\left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,383} \right] = \frac{1,607}{\pi} \sin^{-1} [0,80817579^{0,383}] = 0,59968985 \cong 0,6$$

La aussi, la valeur η est bien celle déterminé au point 1-ii et au point 2-ii.

Vérification : Pour le résultat obtenu déterminons le débit volume Q par la formule de Chézy. Pour cela recherchons A et R_h pour un taux de remplissage $\eta = 0,6$. On doit d'abord déterminer A_1 et P_1 , comme $2/3 \leq \eta \leq 1$ on a selon le tableau des par.dim. :

$$A_1 = \zeta(\eta = 0,6) = 0,64823637 \qquad P_1 = \vartheta(\eta = 0,6) = 1,56252562$$

- La surface mouillée est selon (2.11) : $A = A_1 D^2 = 0,64823637 \times 2^2 = 2,59294548 m^2$

- le rayon hydraulique est selon (2.18): $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 2 \times \frac{0,64823637}{1,56252562} = 0,82972895 m$

- le débit volume serait donc :

$$Q = CA \sqrt{R_h J} = 85 \times 2,59294548 \sqrt{0,82972895 \times 0,0004} = 4,01523001 m^3/s$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est égal à 0,37 % seulement.

11.2.4. Conductivité relative Q_y^* rapportée à la profondeur normale.

La conductivité relative rapportée à la profondeur normale s'exprime en fonction de A_1 et P_1 par la relation (2.38) lorsque $y_n = \eta D$. Mais dans le cas d'une conduite en arc de cercle écrasé y_n a été définie comme suit $y_n = \eta Y_m$ ou $y_n = 0,6339746 \eta D$. La relation (2.38) devient alors :

$$Q_y^* = 3,1248 \frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \eta^{-5/2} \qquad (3.36.V)$$

Pour $0 \leq \eta \leq 1$, impliquant la relations (3.36.V) la variation de Q_y^* a été représentée sur la figure 6.6.V.

Le calcul a montré que pour $\eta \leq 1$, $Q_y^* \geq 0,6488$, tandis que pour la conduite circulaire $Q_y^* \geq 0,3927$.

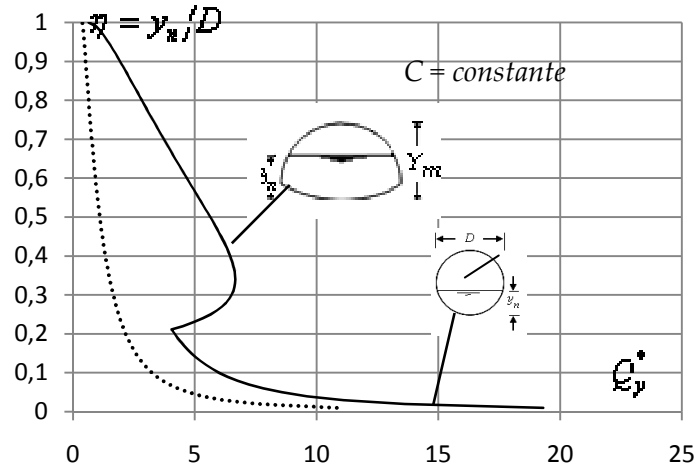


Figure 3.6.V : Variation de la conductivité relative Q_y^* en fonction du taux de remplissage η pour les cas des conduites circulaire (---) et circulaires avec banquettes (—).

On remarque que $\eta(Q_y^*)$ est formée par deux tronçons de courbes avec une discontinuité, lorsque la valeur du taux dépasse légèrement la valeur $\eta = 0,21132487$. Ceci est dû au changement brusque du rayon hydraulique lorsque le taux de remplissage dépasse immédiatement la valeur 0,211.

La relation (3.36.V) a fait l'objet d'une étude particulière qui a consisté à déterminer une relation explicite qui lui est approchée. Le calcul a montré que pour :

a) $0,01 \leq \eta \leq 0,21132487$, correspondant à $4,0553 \leq Q_y^* \leq 19,3036$, le taux η est tel que :

$$\sinh\left(\frac{\pi}{1,2}\eta\right) = 9,309Q_y^{*-1,983} \quad (3.37.V-a)$$

b) $0,43 \leq \eta \leq 0,96$ correspondant à $1,3421 \leq Q_y^* \leq 6,2446$, le taux de remplissage η est tel que :

$$\eta = 1,1088 - 0,1084Q_y^* \quad (3.37.V-b)$$

L'écart relatif maximal occasionné par les relations (3.37.V-a) et (3.37.V-b) est inférieur à 0,54%.

Une attention particulière devra être prise pour les cas où $4,5095 \leq Q_y^* \leq 6,3194$, où le taux de remplissage est tel que $0,22 \leq \eta \leq 0,42$, ces valeurs ne sont pas prises en compte par les relations (3.37.V-a) et (3.37.V-b).

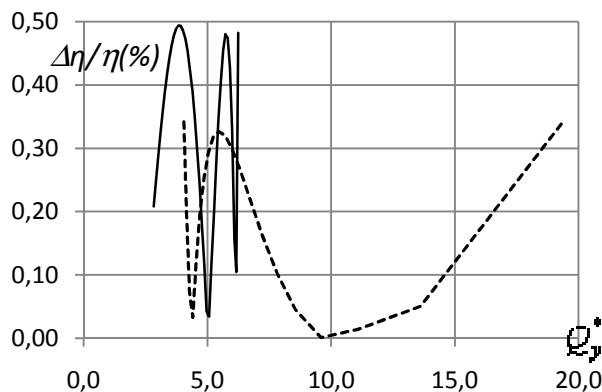


Figure 3.7.V : Ecart relatif sur le calcul du taux de remplissage η par (3.37.V-a) et (3.37.V-b) (---) dans la gamme $0,01 \leq \eta \leq 0,211$ (—) dans la gamme $0,43 \leq \eta \leq 0,96$

Exemple d'application 2

Reprenons les données de l'exemple 1 et évaluons cette fois-ci le diamètre D de la conduite.

Les données sont donc : $Q=4,03\text{m}^3/\text{s}$ $C=85\text{m}^{0,5}/\text{s}$ $J=0,0004$ $y_n=0,76\text{m}$

Solution :

Pour les données du problème, la conductivité relative est selon la relation (2.36) :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 J y_n^5}} = \frac{4,03}{\sqrt{85^2 \times 0,0004 \times 0,76^5}} = 4,70784487$$

$1,3421 \leq Q_y^* \leq 6,2446$ et le taux η est régi par la relation (3.37.V-b) :

$$\eta = 1,1088 - 0,1084 Q_y^* = 1,1088 - 0,1084 \times 4,70784487 = 0,59846962 \cong 0,6$$

Il s'agit bien de la valeur proche de η , calculée au cours des étapes 1- ii, 2-ii et 3-ii de l'exemple 1. Par suite, le diamètre D recherché est :

$$D = y_n / 0,6339746 \eta = 0,76 / 0,6339746 \times 0,59846962 = 2,00308613\text{m} \cong 2\text{m}$$

6.3. Ecoulement à coefficient de résistance de Manning invariable;

La conductivité relative s'exprime, pour n constant, par la relation (2.42) : $Q^* = A_1^{5/3} / P_1^{2/3}$

A l'état plein on a $A_{1p} = 0,5104589$ et $P_{1p} = 2,64329818$, la conductivité relative Q_p^* est égale :

$$Q_p^* = 0,15668473 = \text{constante} \tag{3.38.V}$$

11.3.1. Variation de la conductivité relative $\eta(Q^*)$ pour n constant.

En faisant varier A_1 et P_1 de la relation (2.42), selon le taux de remplissage, La conductivité relative Q^* a été représentée graphiquement sur la figure 3.8.V, dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$.

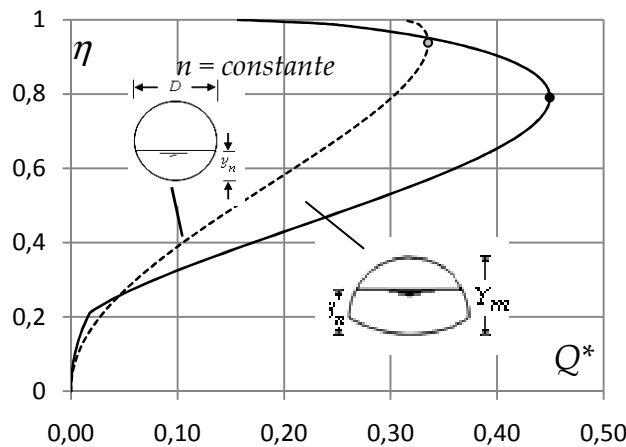


Figure 3.8.V : Variation de la conductivité relative Q^* en fonction du taux η selon la formule de Manning Strickler, pour le cas des conduites en arc de cercle écrasé et circulaire.

Pour une conduite en arc de cercle écrasé (●) $Q_{\max}^* = 0,4494$ pour $\eta = 0,7909$.

La conductivité Q^* augmente avec l'accroissement du taux η jusqu'à un maximum, puis diminue au-delà de ce maximum. Pour le cas de la conduite en arc de cercle écrasé, $\eta(Q_{\max}^*) = 0,7909$. En remplaçant dans (2.42) $A_1(\eta = 0,7909) = 0,79534998$ et $P_1(\eta = 0,7909) = 1,87267523$ on a :

$$Q_{\max}^* = 0,4493887 \quad (3.39.V)$$

Les calculs ont également montré que pour :

- $\eta \leq 0,21132487$ $0 \leq Q^* \leq 0,0177$
- $0,21132487 \leq \eta \leq 1$ $0,0177 \leq Q^* \leq 0,4494$

Afin d'évaluer de manière explicite la valeur du taux η , à partir de la valeur connue de Q^* , nos calculs ont montré que la relation (2.42) peut être remplacée comme suit :

- $0,23 \leq \eta \leq 0,42$ et correspondant à $0,027961 \leq Q^* \leq 0,190588$

$$\sinh\left(\frac{\pi}{0,95}\eta\right) = 6,327Q^* + 0,664 \quad (3.40.V-a)$$

- $0,40 \leq \eta \leq 0,78$ et correspondant à $0,170757 \leq Q^* \leq 0,449015$

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,605}\eta\right) = 1,336Q^{*0,363} \quad (3.40.V-b)$$

L'écart relatif maximal occasionné par les relations (3.40.V-a) et (3.40.V-b) est inférieur à 0,49%.

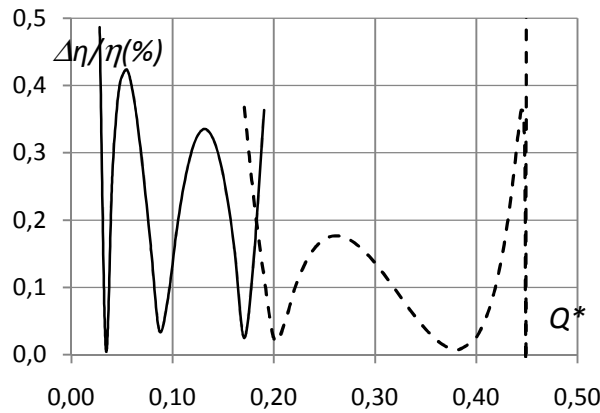


Figure 3.9.V : Ecarts relatifs en (%) occasionnés par (3.40.V-a) et (3.40.V-b) sur le calcul du taux η .

Ecart (—) pour $0,23 \leq \eta \leq 0,42$ (---) pour la gamme $0,40 \leq \eta \leq 0,78$

11.3.2. Courbe de remplissage $\eta(Q/Q_p)$ pour n constant.

La variation $\eta(Q/Q_p)$, pour n constant, s'écrit en tenant compte de (2.46), (2.42) et (3.38.V).

$$\frac{Q}{Q_p} = 6,382 \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \quad (3.41.V)$$

Le rapport Q/Q_p ne dépend que du taux η . Le taux η est implicite vis-à-vis de Q/Q_p . Pour déterminer η explicitement, On peut déduire des relations (3.40.V) ce qui suit :

De la relation (3.40.V-a) et pour $0,23 \leq \eta \leq 0,42$, correspondant à $0,027961 \leq Q^* \leq 0,190588$ on a :

$$\sinh\left(\frac{\pi}{0,95}\eta\right) = 6,327Q^* + 0,664 = 6,327Q_p^* \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right) + 0,664$$

Par ailleurs on sait que $Q_p^* = 0,15668473$

Alors il vient :

$$\sinh\left(\frac{\pi}{0,95}\eta\right) = 6,327Q_p^* \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right) + 0,664 = 6,327 \times 0,15668473 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right) + 0,664 = 0,991 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right) + 0,664$$

Ou bien en utilisant (2.46) :

$$\sinh\left(\frac{\pi}{0,95}\eta\right) = 0,991 \left(\frac{Q}{Q_p}\right) + 0,664 \quad (3.42.V-a)$$

La relation (3.42.V-a) est valable pour $0,23 \leq \eta \leq 0,42$ ou $0,1785 \leq Q/Q_p \leq 1,2165$

De la relation (3.40.V-b) et pour $0,40 \leq \eta \leq 0,78$, correspondant à $0,170757 \leq Q^* \leq 0,449015$ on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,605}\eta\right) = 1,336Q^{*0,363} = 1,336Q_p^{*0,363} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,363}$$

Par ailleurs on sait que $Q_p^* = 0,15668473$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,605}\eta\right) = 1,336Q_p^{*0,363} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,363} = 1,336 \times 0,15668473^{0,363} \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,363} = 0,682 \left(\frac{Q^*}{Q_p^*}\right)^{0,363}$$

Ou bien en utilisant (2.46) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,605}\eta\right) = 0,682 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,363} \quad (3.42.V-b)$$

La relation (3.42.V-b) est valable pour $0,40 \leq \eta \leq 0,78$ ou $1,0899 \leq Q/Q_p \leq 2,8659$ et l'écart relatif maximal occasionné par les relations approchées (3.42.V-a) et (3.42.V-b) est inférieur à 0,49%.

11.3.3. Relation $\eta(Q/Q_{\max})$ pour n constant

La courbe $\eta(Q/Q_{\max})$, pour une conduite en arc de cercle écrasé donnée, s'écrit en tenant compte des relations (2.49), (2.42) et de la valeur de la conductivité relative $Q_{\max}^* = 0,4493887$ par :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = 2,225 \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \quad (3.43.V)$$

Le rapport Q/Q_{\max} est implicite vis-à-vis du taux η . On peut déduire des relations de (3.40.V) :

De la relation (3.40.V-a) et pour $0,23 \leq \eta \leq 0,42$, correspondant à $0,027961 \leq Q^* \leq 0,190588$ on a :

$$\sinh\left(\frac{\pi}{0,95}\eta\right) = 6,327Q^* + 0,664 = 6,327Q_{\max}^* \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right) + 0,664$$

Par ailleurs on sait que $Q_{\max}^* = 0,4493887$

Alors il vient :

$$\sinh\left(\frac{\pi}{0,95}\eta\right) = 6,327Q_{\max}^* \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right) + 0,664 = 6,327 \times 0,4493887 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right) + 0,664 = 2,843 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right) + 0,664$$

Ou bien en utilisant (2.49) :

$$\sinh\left(\frac{\pi}{0,95}\eta\right) = 2,843 \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right) + 0,664 \quad (3.44.V-a)$$

La relation (3.44.V-a) est valable pour $0,23 \leq \eta \leq 0,42$ ou $0,0622 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,4241$

De la relation (3.40.V-b) et pour $0,40 \leq \eta \leq 0,78$, correspondant à $0,170757 \leq Q^* \leq 0,449015$ on a :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,605}\eta\right) = 1,336Q^{*0,363} = 1,336Q_{\max}^{*0,363} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,363}$$

Par ailleurs on sait que $Q_{\max}^* = 0,4493887$

Alors il vient :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,605}\eta\right) = 1,336Q_{\max}^{*0,363} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,363} = 1,336 \times 0,4493887^{0,363} \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,363} = 0,999 \left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0,363}$$

Ou bien en utilisant (2.49) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,605}\eta\right) = 0,999 \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,363} \quad (3.44.V-b)$$

La relation (3.44.V-b) est valable pour $0,40 \leq \eta \leq 0,78$ ou $0,38 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,9992$ et l'écart relatif maximal occasionné par les relations approchées (3.44.V-a) et (3.44.V-b) est inférieur à 0,48%.

Exemple d'application 3.

On souhaite déterminer la profondeur normale dans une conduite en arc de cercle écrasé de diamètre

$D = 2\text{ m}$, écoulant un débit $Q = 4,09\text{ m}^3/\text{s}$ sous une pente $J = 0,0005$. $n = 0,0148\text{ m}^{1/3}\text{ s}$.

Solution :

On peut déterminer le problème de trois manières suivantes :

16. Avec la conductivité relative $\eta(Q^*)$

i. Calculons la conductivité relative Q^* par application de la relation (2.41) :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3}\sqrt{J}} = \frac{0,0148 \times 4,09}{2^{8/3}\sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} = 0,42633734$$

ii. La conductivité $0,170757 \leq Q^* \leq 0,449015$, le taux η est, en vertu de la relation (3.40.V-b) :

$$\eta = \frac{1,605}{\pi} \times \sin^{-1}(1,336 \times 0,42633734^{0,363}) = 0,70120475 \cong 0,7$$

iii. La profondeur normale y_n recherchée est, par suite :

$$y_n = \eta Y_m = 0,6339746 \eta D = 0,6339746 \times 0,7 \times 2 = 0,88756444 \cong 0,89 \text{ m}$$

2. Avec le taux de remplissage $\eta(Q/Q_p)$

i. Compte tenu du fait que $Q_p^* = 0,15668473$ et que $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$, alors :

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{0,42633734}{0,15668473} = 2,72098845$$

ii. Q/Q_p appartient $1,0899 \leq Q/Q_p \leq 2,8659$; η peut être évalué par la relation (3.42.V-b), soit :

$$\eta = \frac{1,605}{\pi} \sin^{-1} \left[0,682 \left(\frac{Q}{Q_p} \right)^{0,363} \right] = \frac{1,605}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,682 \times 2,72098845^{0,363} \right] = 0,70228351 \cong 0,7$$

Il s'agit bien de la valeur obtenue au point 2-ii

3. Avec la conductivité maximale $\eta(Q/Q_{\max})$:

viii. Compte tenu du fait que $Q_{\max}^* = 0,4493887$ et que $Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^*$, on a :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{0,42633734}{0,4493887} = 0,94870507$$

ii. Q/Q_{\max} appartient à $0,38 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,9992$; η duite peut alors être évalué par (3.44.V-b):

$$\eta = \frac{1,605}{\pi} \sin^{-1} \left[0,999 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,363} \right] = \frac{1,605}{\pi} \times \sin^{-1} \left[0,999 \times 0,94870507^{0,363} \right] = 0,70037212 \cong 0,7$$

La aussi, la valeur du taux est bien celle déterminer au point 2-ii et au point 1-ii.

Vérification : Pour le résultat obtenu déterminons le débit volume Q par la formule de Manning. Pour cela recherchons A et R_h pour un taux de remplissage $\eta = 0,7$. Les par.dim. A_1 et P_1 sont :

$$A_1(\eta=0,7) = \zeta(\eta=0,7) = 0,74398870 \text{ et } P_1(\eta=0,7) = \vartheta(\eta=0,7) = 1,71544998$$

- La surface mouillée est selon (2.11) : $A = A_1 D^2 = 0,74398870 \times 2^2 = 2,975948 \text{ m}^2$
- le rayon hydraulique est selon (2.18): $R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 2 \times \frac{0,74398870}{1,71544998} = 0,86739574 \text{ m}$
- le débit volume est donc :

$$Q = \frac{1}{n} R_h^{2/3} A \sqrt{J} = \frac{1}{0,0148} \times 0,86739574^{2/3} \times 2,975948 \times \sqrt{0,0005} = 4,08940523 \text{ m}^3/\text{s}$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui donné à l'énoncé est insignifiant.

11.3.4. Conductivité relative Q_y^* rapportée à la profondeur normale.

La conductivité Q_y^* est définie par la relation (2.55) lorsque $y_n = \eta D$ mais dans le cas d'une conduite en arc de cercle écrasé y_n a été définie par $y_n = \eta Y_m$ ou $y_n = 0,6339746 \eta D$, alors (2.55) devient :

$$Q_y^* = 3,3714\eta^{-8/3} \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} \quad (3.45.V)$$

La conductivité Q_y^* ne dépend que du taux η . La relation (3.45.V) a été dessinée sur la figure 3.10.V.

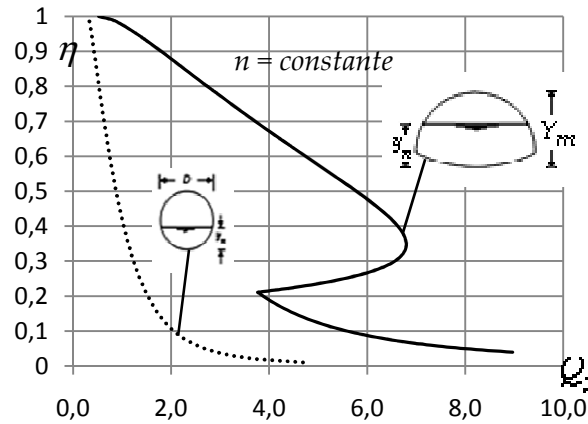


Figure 3.10.V : Courbes de variation $\eta(Q_y^*)$ dans les conduites en arc de cercle écrasé et circulaire.

L'étude de la relation (3.45.V) a montré que η peut s'exprimer explicitement, en fonction de Q_y^* par :

f) $0,22 \leq \eta \leq 0,32$, correspondant à $4,2562 \leq Q_y^* \leq 6,7239$

$$\sin\left(\frac{\pi}{0,672}\eta\right) = 0,0053Q_y^{*2} - 0,0018Q_y^* + 0,77 \quad (3.46.V-a)$$

g) $0,45 \leq \eta \leq 0,96$, correspondant à $1,1964 \leq Q_y^* \leq 6,2534$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6,507}\eta\right) = 0,504 - 0,046Q_y^* \quad (3.46.V-b)$$

Les écarts relatifs, issus des relations (3.46.V-a) et (3.46.V-b) ne dépassent pas 0,50%.

On remarque que les intervalles des conductivités relatives rapportées à la profondeur déterminées par les trois formules se superposent sur un certain nombre de valeurs, il devient donc nécessaire lors des applications pratiques de vérifier chaque fois la valeur de Q_y^* par la détermination de cette valeur par la formule (3.45.V).

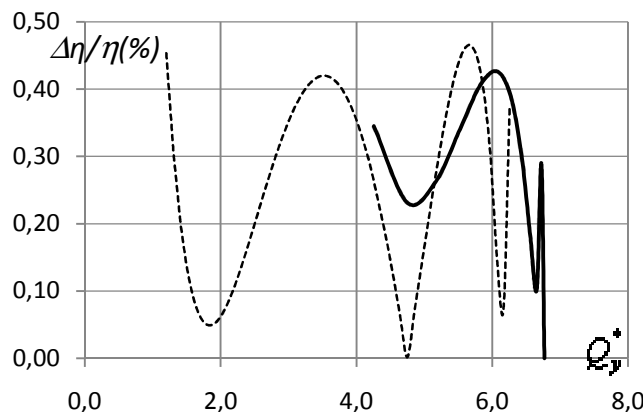


Figure 3.11.V : Ecart relatif en (%) occasionnées par les relations (3.46.V-a) et (3.46.V-b).
Ecart : (—) pour $0,22 \leq \eta \leq 0,32$ (.....) pour $0,45 \leq \eta \leq 0,96$

Exemple d'application 4

Reprenons les données de l'exemple d'application 3 et déterminons le diamètre D de la conduite. Les données sont alors : $Q=4,09\text{m}^3/\text{s}$; $J=0,0005$; $n=0,0148\text{m}^{1/3}\text{s}$; $y_n=0,88756444\text{ m}$

Solution :

i. Calculons la conductivité relative Q_y^* , par application de la relation (2.53), soit :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{J}} = \frac{0,0148 \times 4,09}{0,88756444^{8/3} \times \sqrt{0,0005}} = 3,72077696$$

La conductivité $1,1964 \leq Q_y^* \leq 6,2534$; Alors η est donc régi par (3.46.V-b), soit :

$$\eta = \frac{6,507}{\pi} \sin^{-1}(0,504 - 0,046Q_y^*) = \frac{6,507}{\pi} \sin^{-1}(0,504 - 0,046 \times 3,72077696) = 0,70281029 \cong 0,7$$

ii. Ainsi, le diamètre D recherché est :

$$D = y_n / 0,6339746\eta = 0,88756444 / 0,6339746 \times 0,70281029 = 1,99200272\text{m} \cong 2\text{m}$$

Vérification pour $\eta=0,7$ on a : $A_1(\eta=0,7) = 0,74398870$ et $P_1(\eta=0,7) = 1,71544998$

$$\text{Alors } Q_y^* = 3,3714\eta^{-8/3} \frac{A_1^{5/3}}{P_1^{2/3}} = 3,3714 \times 0,7^{-8/3} \times \frac{0,7439887^{5/3}}{1,71544998^{2/3}} = 3,72$$

Cette valeur est bien la valeur déterminée par (2.53). L'écart relatif entre la valeur du diamètre calculée et celle de l'énoncé de l'exemple 3 est de 0,40%.

6.4. Ecoulement à coefficient de résistance variable

11.4.1. Expression générale du diamètre

Pour calculer le diamètre D (ou la hauteur h) dans le cas d'une conduite en arc de cercle écrasé partiellement remplie pour les valeurs données de Q, J, ε, ν et η , nous allons nous baser sur la formule (1.173) trouvée dans le chapitre 1 et qui est valable pour n'importe quelle dimension linéaire :

$$D \cong 0,512 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5}$$

Où \overline{D}_h est donnée par la relation (1.167) et \overline{R} est donné par la relation (1.158).

On peut aussi faire appel aux relations (1.160), (1.154) et (1.168) ou (1.174) et (1.168)

Exemple d'application 5.

Déterminer le diamètre d'une conduite en arc de cercle écrasé véhiculant un débit $Q = 2,06\text{ m}^3/\text{s}$ sachant que : $\nu = 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$, $J = 0,0005$, $\varepsilon = 0,0002\text{ m}$ et $\eta = 0,6$.

a) Pour un taux de remplissage $\eta = 0,65$, le tableau des paramètres adimensionnels donne :

$$A_1(\eta=0,6) = 0,64823637 \qquad P_1(\eta=0,6) = 1,562525617$$

b) On détermine le diamètre hydraulique \overline{D}_h en utilisant la relation (1.165) :

$$\bar{D}_h = 1,516 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{A_1}{P_1^2} \right)^{2/5} = 1,516 \left(\frac{2,06^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{0,64823637}{1,56252562^2} \right)^{2/5} = 3,44945058 m$$

Le nombre de Reynolds \bar{R} est déterminé par la relation (1.158) :

$$\bar{R} = 10,556 \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu} \left(\frac{A_1}{P_1^2} \right)^{3/5} = 10,556 \times \frac{(9,81 \times 0,0005 \times 2,06^3)^{1/5}}{10^{-6}} \times \left(\frac{0,64823637}{1,56252562^2} \right)^{3/5} = 2537435$$

c) On déduit la dimension linéaire recherchée D en appliquant la relation (1.173):

$$\begin{aligned} D &\cong 0,512 \times \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h + 8,5}{4,75 + \frac{8,5}{\bar{R}}} \right) \right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3} \right)^{1/5} \\ &= 0,512 \left[-\log \left(\frac{0,0002/3,44945058 + \frac{8,5}{2537435}}{4,75 + \frac{8,5}{2537435}} \right) \right]^{-2/5} \times \left(\frac{2,06^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} \times \left(\frac{1,56252562}{0,64823637^3} \right)^{1/5} \\ &= 1,49839108 m \cong 1,5 m \end{aligned}$$

11.4.2. Variation de la conductivité relative du modèle rugueux de référence : Calcul de la profondeur normale.

Soit les données du problème : Q , D , J , ε et ν . Quel serait alors la profondeur dans la conduite y_n .

Assumons $J = \bar{J}$ et $Q = \bar{Q}$ par contre $a \neq \bar{a}$ ou $D \neq \bar{D}$ $A \neq \bar{A}$, et $P \neq \bar{P}$.

La relation régissant l'écoulement pour le modèle rugueux de référence a été donnée par la relation (2.58) et la conductivité relative est donnée par la relation (2.59). Cette conductivité relative a la même expression que la relation (2.25). D'autre part on a aussi :

$$\bar{Q}_p^* = \left(A_{1p}^{3/2} / P_{1p}^{1/2} \right) = 0,20764471 = \text{constante} \quad (3.47.V)$$

$$Q_{\max}^* = 0,51853168 \quad (3.48.V)$$

Pour la valeur à l'état plein $\bar{Q}_p^* = 0,20764471$ correspond $\bar{\eta} = 1$ et $\bar{\eta} = 0,39877049$.

La variation $\bar{\eta}(\bar{Q}^*)$ s'exprime par les mêmes relations explicites (3.31.V-a) et (3.31.V-b) vis-à-vis de $\bar{\eta}$:

Pour $0,22 \leq \eta \leq 0,35$, correspondant à $0,03276 \leq Q^* \leq 0,15441$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{0,86} \eta\right) = 1,359 Q^{*0,187} \quad (3.49.V-a)$$

Pour $0,36 \leq \eta \leq 0,79$, correspondant à $0,16516 \leq Q^* \leq 0,51828$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,607} \eta\right) = 1,286 Q^{*0,383} \quad (3.49.V-b)$$

L'écart relatif maximal occasionné par les relations approchées (3.49.V) est inférieur à 0,50%.

Le diamètre à l'état plein \bar{D}_p du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.59) après avoir remplacé $A_1 = A_{1p} = 0,48328516$ et $P_1 = P_{1p} = 2,6179939$:

$$\overline{D}_p = 0,771 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \quad (3.50.V)$$

Ce modèle rugueux de diamètre \overline{D}_p a la même conductivité relative que celui de même diamètre mais un taux de remplissage $\overline{\eta} = 0,39875683$. Avec cette valeur $\overline{\eta}$ et le diamètre \overline{D}_p déterminé par (3.50.V), on détermine \overline{P} , \overline{R}_h et \overline{R} , en utilisant les relations (3.48), (3.59) et (1.48) et le tableau des paramètres adimensionnels :

$$A_1(\overline{\eta} = 0,39877049) = 0,381439255 \quad P_1(\overline{\eta} = 0,39877049) = 1,28716555$$

$$\overline{P} = \overline{D}_p P_1(\overline{\eta} = 0,39877049) = 1,28716555 \overline{D}_p \quad (3.51.V)$$

$$\overline{R}_h = \overline{D}_p \frac{A_1(\overline{\eta} = 0,39877049)}{P_1(\overline{\eta} = 0,39877049)} = 0,29634047 \overline{D}_p \quad (3.52.V)$$

$$R = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4Q}{vP(\overline{\eta} = 0,39877049)} = 3,10760337 \frac{Q}{v\overline{D}_p} \quad (3.53.V)$$

Introduisant ces expressions dans la relation (1.168) pour déterminer le facteur ψ on a :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_p}{5,63} + 2,74 \frac{v\overline{D}_p}{Q} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.54.V)$$

Procédons maintenant comme dans le cas de la conduite circulaire :

- Avec Q et J , déterminons \overline{D}_p et calculons ψ . D est une donnée, affectons $\overline{D} = D/\psi$.
- Avec \overline{D} , calculons à l'aide de (2.59) la conductivité relative \overline{Q}^* et déterminons avec l'une des relations (3.49.V-a) ou (3.49.V-b) le taux η et $y_n = 0,6339746\eta D$.

Exemple d'application 6 :

Reprenons l'exercice précédent, soit : $Q = 2,06 \text{ m}^3/\text{s}$, $v = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $J = 0,0005$, $\varepsilon = 0,0002 \text{ m}$ et $D = 1,5 \text{ m}$. Quelle est la profondeur normale y_n ?

Le diamètre \overline{D}_p à l'état plein du modèle rugueux de référence est donné par la relation (3.50.V) :

$$\overline{D}_p = 0,771 \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} = 0,771 \times \left(\frac{2,06^2}{9,81 \times 0,0005} \right)^{1/5} = 2,98176535 \text{ m}$$

- A l'aide de la relation (3.54.V) calculons le facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon/\overline{D}_p}{5,63} + 2,74 \frac{v\overline{D}_p}{Q} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 1,35 \left[-\log \left(\frac{0,0002/2,98176535}{5,63} + 2,74 \times \frac{10^{-6} \times 2,98176535}{2,06} \right) \right]^{-2/5} = 0,72088807$$

- Affectons à ce modèle rugueux le diamètre $\bar{D} = D/\psi = 1,5/0,72088807 = 2,08076686\text{ m}$.
- Ce nouveau diamètre \bar{D} donne la conductivité relative avec la relation (2.59) :

$$\bar{Q} = \frac{Q}{\sqrt{128gJ\bar{D}^5}} = \frac{2,06}{\sqrt{128 \times 9,81 \times 0,0005 \times 2,08076686^5}} = 0,41627868$$

- Avec \bar{Q}^* obtenue déterminons à l'aide de (3.49.V-b), le taux η et la profondeur normale.

$$\bar{\eta} = \frac{1,607}{\pi} \sin^{-1} \left(1,286 \bar{Q}^{0,383} \right) = \frac{1,607}{\pi} \sin^{-1} \left(1,286 \times 0,41627868^{0,383} \right) = 0,59661105$$

Ce résultat correspond à celui de l'énoncé de l'exemple précédent.

$$y_n = 0,6339746\eta D = 0,6339746 \times 0,59661105 \times 1,5 = 0,56735438\text{ m}$$

11.4.3. Expression du débit volume maximal Q_{\max}

L'expression du débit Q_{\max} , est déduite de la formule (1.186) dans laquelle R est donné par (1.188).

A l'état plein, ce nombre de Reynolds prend la valeur particulière R_p en remplaçant dans la relation (1.188), les paramètres adimensionnels A_1 et P_1 , selon le tableau 1, par A_{1p} et P_{1p} :

$$R = 32\sqrt{2} \left(\frac{A_{1p}}{P_{1p}} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \left(\frac{0,48328516}{2,6179939} \right)^{3/2} \times \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu}$$

Soit :

$$R_p \cong 3,59 \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu} \quad (3.55.V)$$

Tenant compte de (3.55.V), la relation (1.188) s'écrit :

$$R = 12,608 \left(\frac{A_1}{P_1} \right)^{3/2} R_p \quad (3.56.V)$$

Remplaçant maintenant dans la relation (1.186), A , R_h et R par (1.42), (1.44) et (3.56.V) on obtient :

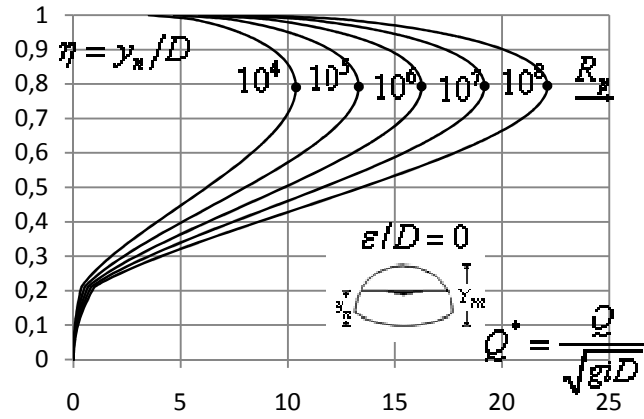
$$Q = -4\sqrt{2} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(A_1/P_1)} + \frac{0,7963}{(A_1/P_1)^{3/2} R_p} \right) \quad (3.57.V)$$

En introduisant Q^* donnée par la relation (2.72), la relation (3.57.V) s'écrit, en termes adimensionnels :

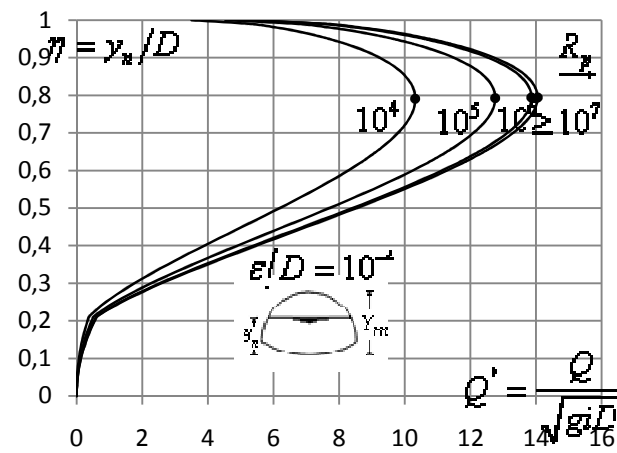
$$Q^* = -4\sqrt{2} \left(\frac{A_1^{3/2}}{P_1^{1/2}} \right) \log \left(\frac{\varepsilon/D}{14,8(A_1/P_1)} + \frac{0,7963}{(A_1/P_1)^{3/2} R_p} \right) \quad (3.58.V)$$

Rappelons que dans cette relation, R_p à l'état plein est donné par la relation (3.55.V). La relation (3.58.V) montre que Q^* de la conduite est fonction à la fois du taux η , de ε/D et de R_p à l'état plein.

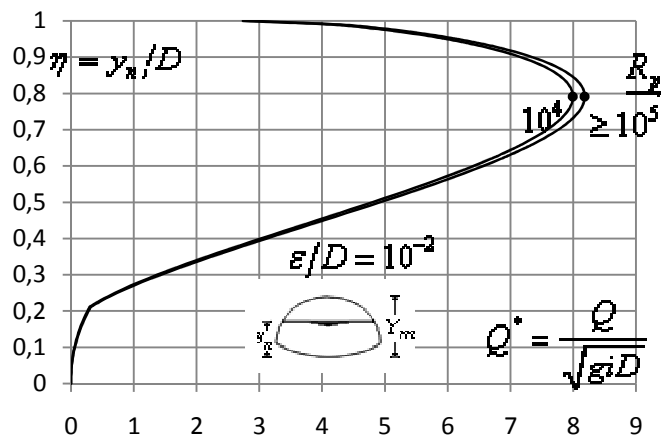
La variation $\eta(Q^*)$ a été représentée sur la figure 3.12.V (a à c), conformément à la relation (3.58.V).



a)



b)



c)

Figure 3.12.V : Variation de $\eta(Q^*)$ pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D et du nombre de Reynolds R_p conformément à la relation (3.58.V).

Nos remarques sont, au vu de la figure 3.12.V (a à c), les mêmes que celles concernant la variation de la conductivité relative Q^* de la conduite circulaire étudiée au chapitre 2.

Le tableau 2 regroupe les valeurs particulières η_0 du taux de remplissage η correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$, calculées selon la relation (3.58.V), pour diverses valeurs de ε/D et de R_p . L'espace grisâtre du tableau 2 correspond au domaine pratique d'utilisation de la rugosité ε/D et de R_p .

Tableau 2 : Valeurs du taux de remplissage η_0 correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$ pour diverses valeurs de la rugosité ε/D et du nombre de Reynolds R_p

| $\varepsilon/D \rightarrow$ | | 0 | 10^{-5} | 5.10^{-5} | 10^{-4} | 5.10^{-4} | 10^{-3} | 5.10^{-3} | 10^{-2} |
|-----------------------------|----------|--------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------|-----------|
| R_p | 10^4 | 0,7902 | 0,7902 | 0,7902 | 0,7903 | 0,7905 | 0,7907 | 0,7909 | 0,7907 |
| | 5.10^4 | 0,7915 | 0,7915 | 0,7916 | 0,7918 | 0,7922 | 0,7923 | 0,7918 | 0,7912 |
| | 10^5 | 0,7919 | 0,7920 | 0,7922 | 0,7924 | 0,7927 | 0,7927 | 0,7919 | 0,7913 |
| | 5.10^5 | 0,7927 | 0,7930 | 0,7935 | 0,7936 | 0,7934 | 0,7931 | 0,7920 | 0,7914 |
| | 10^6 | 0,7930 | 0,7935 | 0,7939 | 0,7939 | 0,7935 | 0,7931 | 0,7920 | 0,7914 |
| | 5.10^6 | 0,7936 | 0,7944 | 0,7944 | 0,7942 | 0,7935 | 0,7932 | 0,7920 | 0,7914 |
| | 10^7 | 0,7938 | 0,7947 | 0,7944 | 0,7942 | 0,7935 | 0,7932 | 0,7920 | 0,7914 |
| | 5.10^7 | 0,7943 | 0,7949 | 0,7945 | 0,7943 | 0,7936 | 0,7932 | 0,7920 | 0,7914 |
| | 10^8 | 0,7945 | 0,7949 | 0,7945 | 0,7943 | 0,7936 | 0,7932 | 0,7920 | 0,7914 |

Nous pouvons ainsi constater que dans $10^{-5} \leq \varepsilon/D \leq 5.10^{-3}$ et $5.10^4 \leq R_p \leq 5.10^7$, le taux η_0 correspondant à $Q^* = Q_{\max}^*$ varie dans l'intervalle [0,7949; 0,7923]. La valeur moyenne $\eta_0 = 0,7931$ peut donc être considérée comme la valeur la plus appropriée pour le calcul de Q_{\max} . On peut déterminer pour cette valeur moyenne, l'expression de Q_{\max} d'une conduite en arc de cercle écrasé, lorsque les paramètres tel que ε , D , J et ν du liquide sont connus. Il suffit pour cela d'introduire $\eta_0 = 0,7931$ dans (3.17.V) et (3.24.V) pour trouver A_1 et P_1 et de calculer Q_{\max} par (3.57.V).

Pour $0,211 \leq \eta_0 = 0,7931 \leq 1$, les paramètres A_1 et P_1 figurant au tableau 1 sont :

$$A_1 = \zeta(\eta = 0,7931) = 0,79603353 \quad P_1 = \vartheta(\eta = 0,7931) = 1,87679749$$

La relation (3.57.V) donne alors après calcul :

$$Q_{\max} = -2,933 \sqrt{gJD^5} \log \left(\frac{\varepsilon/D}{6,277} + \frac{2,883}{R_p} \right) \quad (3.59.V)$$

La conductivité relative maximale est alors :

$$Q_{\max}^* = -2,933 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{6,277} + \frac{2,883}{R_p} \right) \quad (3.60.V)$$

Nous obtenons ainsi l'expression du débit Q_{\max} en fonction de ε/D et de R_p à l'état plein.

11.4.4. Relation approchée de la profondeur normale :

Comme dans le cas de la conduite circulaire, cette partie de l'étude vise à établir une relation approchée susceptible d'évaluer y_n de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance variable. Pour cela, on a

eu recours aux relations (3.57.V) et (3.59.V). Afin de déterminer la loi $\eta(Q/Q_{\max})$, il a été nécessaire d'étudier la variation de $\eta(Q/Q_{\max})$ pour diverses valeurs de ε/D et R_p , en s'appuyant sur les relations (3.57.V) et (3.59.V). Après un travail assez laborieux, nos calculs ont pu montrer que, le taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max})$ de la conduite pouvait s'exprimer par la relation :

$$\sin\left(\frac{\pi}{0,888}\eta\right) = 1,203\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,188} \quad (3.61.V-a)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,53}\eta\right) = -0,328\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^2 + 0,901\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right) + 0,431 \quad (3.61.V-b)$$

Ces deux relations sont valables respectivement dans les gammes du taux $0,25 \leq \eta \leq 0,34$ et $0,33 \leq \eta \leq 0,73$. Elles sont applicables dans le domaine $0 \leq \varepsilon/D \leq 0,01$ et un nombre de Reynolds $5.10^4 \leq R_p \leq 10^8$.

Les erreurs sont de l'ordre de 0,50% au maximum dans les cas les plus pratique, elles peuvent atteindre par contre des valeurs de 1,5% pour les valeurs très faibles ou très fortes du nombre de Reynolds ($R_p \leq 5.10^4$ ou $R_p \geq 5.10^7$). Elles le sont beaucoup plus lorsque $\eta \leq 0,35$.

L'exemple d'application 7 montre les étapes à suivre pour la détermination de y_n .

6.5. Ecoulement critique

La conductivité relative correspond à l'état critique est donnée par la relation (2.83) $Q_c^* = \sqrt{A_{1c}^3/e_{1c}}$. A_{1c} et e_{1c} (l'indice "c" se réfère l'état critique) sont définis selon le taux η dans le tableau 1 de la conduite circulaire en arc de cercle écrasé. La relation (2.83) montre clairement que η_c est implicite vis-à-vis de Q_c^* .

Proposons une relation approchée fiable au calcul explicitement de η_c et donc de la profondeur critique y_c , pour cela étudions la variation $\eta_c(Q_c^*)$ en représentons la relation (2.83) sur le graphe ci-dessous :

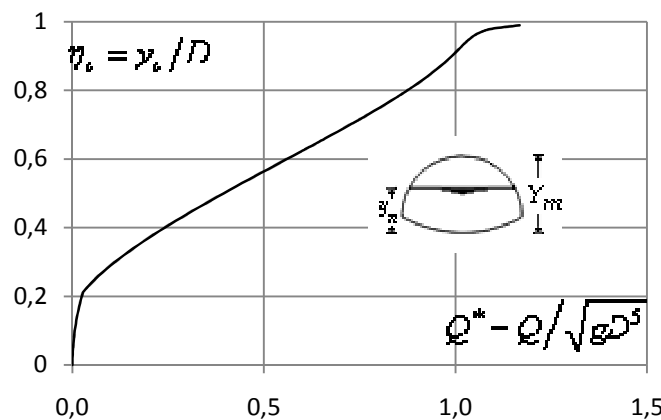


Figure 3.13.V : Variation du taux critique η_c en fonction de Q_c^* . Courbe tracée selon la relation (2.83).

Ce graphe montre que η_c augmente avec l'accroissement de Q_c^* . En outre, lorsque $Q_c^* \rightarrow \infty$, $\eta_c \rightarrow 1$.

Les calculs menés ont montré que la relation (2.83) peut être remplacée par :

Pour $0,24 \leq \eta \leq 0,36$, correspondant à $0,0501 \leq Q_c^* \leq 0,1854$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{0,92}\eta_c\right) = 1,318 Q_c^{*0,198} \quad (3.62.V-a)$$

Pour $0,36 \leq \eta \leq 0,79$, correspondant à $0,1854 \leq Q_c^* \leq 0,8644$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{1,998}\eta_c\right) = 1,003 Q_c^{*0,373} \quad (3.62.V-b)$$

L'écart relatif maximal occasionné par les relations approchées (3.62.V-a) et (3.62.V-b) est inférieur à 0,49%.

Exemple d'application 7

Un collecteur d'assainissement en forme d' arc de cercle écrasé de diamètre $D=1,5m$ doit être soulagé à la sortie de la commune par un déversoir d'orage dont la cote doit être déterminé. Le débit qui doit arriver à la station d'épuration ne doit pas dépasser $Q=2,06m^3/s$. La pente est $J=0,0005$ et la rugosité est $\varepsilon=2.10^{-5}m$. La viscosité cinématique est de $\nu=10^{-6}m^2/s$

- i. *A quelle hauteur de la génératrice inférieure, le déversoir doit être arasé pour limiter le débit vers la station d'épuration à la valeur donnée de $Q=2,06m^3/s$.*
- ii. *Quelle est la nature de l'écoulement en comparant la profondeur normale et a la hauteur*

Solution :

1. Déterminons la capacité maximale du collecteur et cherchons la cote laquelle doit être arasé le déversoir d'orage pour ne laisser passer que le débit donné.

- *Le nombre de Reynolds R_p est selon la relation (3.55.V):*

$$R_p \cong 3,59 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,59 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,5^3}}{10^{-6}} = 461903$$

- *Le débit maximal est selon la relation (3.59.V)*

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= -2,933 \sqrt{g J D^5} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{6,277} + \frac{2,883}{R_p}\right) \\ &= -2,933 \sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,5^5} \times \log\left(\frac{2.10^{-5}/1,5}{6,277} + \frac{2,883}{461903}\right) = 2,87414935 m^3/s \end{aligned}$$

- *Selon la relation (3.61.V-b), le taux de remplissage est égal :*

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1,53}{\pi} \sin^{-1} \left[-0,328 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^2 + 0,901 \left(\frac{Q}{Q_{\max.}} \right) + 0,431 \right] \\ &= \frac{1,53}{\pi} \times \sin^{-1} \left[-0,328 \left(\frac{2,06}{2,87414935} \right)^2 + 0,901 \left(\frac{2,06}{2,87414935} \right) + 0,431 \right] = 0,55478556 \cong 0,55 \end{aligned}$$

La profondeur normale recherchée est :

$$y_n = 0,6339746\eta D = 0,6339746 \times 0,55478556 \times 1,5 = 0,52757993 \text{ m.}$$

C'est à dire la cote du déversoir doit être à 0,53 m de la génératrice inférieure du collecteur.

Vérifions nos calculs, en déterminons le débit volume par la formule générale (1.186):

Pour le taux obtenu $\eta = 0,55478556$, les paramètres A_1 et P_1 prennent respectivement les valeurs :

$$A_1(\eta=0,55478556) = 0,59525769 \qquad P_1(\eta=0,55478556) = 1,49778089$$

- *l'aire de la section mouillée est selon (2.11) :*

$$A = D^2 A_1 = 1,5^2 \times 0,59525769 = 1,3393298 \text{ m}^2$$

- *le rayon hydraulique est en vertu de (2.18) :*

$$R_h = D \frac{A_1}{P_1} = 1,5 \times \frac{0,59525769}{1,49778089} = 0,59613962 \text{ m}$$

- *le nombre de Reynolds est selon (1.187) :*

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 0,59613962^3}}{10^{-6}} = 1458836$$

- *le débit volume serait donc selon la relation (1.186) :*

$$\begin{aligned} Q &= -4\sqrt{2g} A \sqrt{JR_h} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,3393298 \times \sqrt{0,59613962 \times 0,0005} \times \log\left(\frac{0,00002}{14,8 \times 0,59613962} + \frac{10,04}{1458836}\right) \\ &= 2,06427726 \cong 2,06 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

L'écart relatif entre le débit déterminé et celui de l'énoncé est égal à 0,21% seulement.

3. la nature de l'écoulement peut être connue en déterminant y_c en application de l'une des relations (3.62.V) :

Selon la relation (2.82), le débit relatif Q_c^ est :*

$$Q_c^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} = \frac{2,06}{\sqrt{9,81 \times 1,5^5}} = 0,2386737$$

La profondeur critique est à partir de la relation (3.62.V-b) :

$$\begin{aligned} y_c &= 0,6339746\eta_c D = (0,6339746D) \frac{1,998}{\pi} \sin^{-1}(1,003Q_c^{*0,373}) \\ &= \frac{1,998}{\pi} \times 0,6339746 \times 1,5 \times \sin^{-1}(1,003 \times 0,2386737^{0,373}) = 0,38000777 \text{ m} \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi déduire que l'écoulement est de nature fluviale puisque $y_n = 0,83 > y_c$.

Conclusion :

Les calculs menés pour les cinq profils de conduites conduisent aux conclusions suivantes :

Le calcul de la profondeur normale ou du diamètre caractéristique de la conduite dans le cas de l'écoulement à coefficient de résistance constant est devenu facile et rapide. Les relations approchées trouvées sont fiables. Elles offrent de très grande possibilité de calcul pour le projeteur hydraulicien.

Dans le cas des écoulements à coefficient de résistance variable, l'utilisation de la méthode du modèle rugueux de référence a été d'un grand apport pour la détermination facile et rapide du taux de remplissage. Cela conforte le projeteur hydraulicien à l'utilisation de la méthode.

Seul le facteur de correction des dimensions linéaires ψ apparait dans les relations. Il forme le paramètre le plus important dans la méthode du modèle rugueux de référence. Aucun coefficient de résistance à l'écoulement n'est déterminé préalablement pour le calcul de la dimension linéaire.

Les différentes formes de profil des conduites et les nombreux exemples d'application apportent la preuve de la fiabilité de la méthode et des résultats, car les erreurs occasionnées dans tous les cas ne sont que de l'ordre de 0,50% ce qui est largement acceptables pour le dimensionnement des conduites de transport d'eau.

Tableau récapitulatif des formules approchées pour les six profils étudiés

| CIRCULAIRE | | | OVOÏDE NORMALE (I) | | | |
|--|--|----------------------------|--|---|----------------------------|---------------------------|
| Détermination du taux de remplissage η Coefficient de Chézy invariable | | | | | | |
| | $Q_p^* = \pi/8$ | $Q_{max}^* = 0,4125$ | | $Q_p^* = 0,2243$ | $Q_{max}^* = 0,2338$ | |
| | Formule approchée | intervalle | | Formule approchée | intervalle | |
| $\eta(Q^*)$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2,178}\eta\right) = 1,527Q^{*0,516}$ | $0,06 \leq \eta \leq 0,8$ | $0,04 \leq Q^* \leq 0,401$ | $\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 1,753Q^{*0,535}$ | $0,09 \leq \eta \leq 0,78$ | $Q^* \leq 0,207$ |
| $\eta(Q_y^*)$ | $\sinh(3\eta) = 2,56Q_y^{*-1,797}$ | $0,01 \leq \eta \leq 0,90$ | $0,67 \leq Q_y \leq 3,09$ | $\sinh(1,62\eta) = 0,349Q_y^{*-1,542}$ | $0,16 \leq \eta \leq 0,69$ | $0,41 \leq Q_y \leq 1,21$ |
| | | | | $\eta = 1,435 - 1,818Q_y^*$ | $0,68 \leq \eta \leq 0,97$ | $0,26 \leq Q_y \leq 0,42$ |
| Détermination du taux de remplissage η Coefficient de Manning invariable | | | | | | |
| | $Q_p^* = 0,3117$ | $Q_{max}^* = 0,3353$ | | $Q_p^* = 0,1705$ | $Q_{max}^* = 0,3479$ | |
| $\eta(Q^*)$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2,112}\eta\right) = 1,64Q^{*0,477}$ | $0,06 \leq \eta \leq 0,88$ | $Q^* \leq 0,323$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2,891}\eta\right) = 1,932Q^{*0,501}$ | $0,14 \leq \eta \leq 0,82$ | $Q^* \leq 0,162$ |
| $\eta(Q_y^*)$ | $\sinh(3,3\eta) = 2,45Q_y^{*-1,797}$ | $0,09 \leq \eta \leq 0,78$ | $0,58 \leq Q_y \leq 3,2$ | $\sinh\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) = 0,283Q_y^{*-1,422}$ | $0,08 \leq \eta \leq 0,34$ | $0,62 \leq Q_y \leq 1,77$ |
| | | | | $\sinh\left(\frac{\pi}{1,27}\eta\right) = 0,417Q_y^{*-1,703}$ | $0,34 \leq \eta \leq 0,82$ | $0,27 \leq Q_y \leq 0,62$ |
| Coefficient de résistance variable | | | | | | |
| Détermination de D | | | Données : Q, J, ε, ν et η | | | |
| $1^\circ) - \bar{D}_h = 1,516 \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5} \left(\frac{A_1}{P_1^2}\right)^{2/5}$ $2^\circ) - \bar{R} = 10,556 \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu} \left(\frac{A_1}{P_1^2}\right)^{3/5}$ $3^\circ) - D \equiv 0,512 \left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}}\right)\right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3}\right)^{1/5}$ | | | | | | |
| Détermination de y_n avec \bar{Q}^* | | | Données : Q, D, J, ε et ν | | | |
| $1) - \bar{D}_p = 0,551 \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5}$ $2) - \psi \equiv 1,35 \left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_p}{5,76} + 6,44 \frac{\nu \bar{D}_p}{Q}\right)\right]^{-2/5}$ $3) - \bar{D} = D/\psi$ $4) - \bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gJ\bar{D}^5}}$ $5) - y_n = \frac{2,178}{\pi} D \sin^{-1}\left(1,527\bar{Q}^{*0,516}\right)$ $\bar{Q}^* \leq 0,401$ ou $\eta \leq 0,88$ | | | | | | |
| $1) - \bar{D}_p = 0,689 \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5}$ $2) - \psi \equiv 1,35 \left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\bar{D}_p}{4,31} + 4,41 \frac{\nu \bar{D}_p}{Q}\right)\right]^{-2/5}$ $3) - \bar{D} = D/\psi$ $4) - \bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gJ\bar{D}^5}}$ $5) - y_n = \frac{3}{\pi} D \sin^{-1}\left(1,753\bar{Q}^{*0,535}\right)$ $\bar{Q}^* \leq 0,207$ ou $\eta \leq 0,78$ | | | | | | |
| Détermination de la profondeur normale y_n avec $\eta(Q/Q_{max})$ | | | Données : Q, D, J, ε et ν | | | |
| $1) \bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu}$ $2) Q_{max} = -2,332\sqrt{gJD^5} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{4,285} + \frac{8,055}{R_p}\right)$ $3) y_n = \frac{2,195}{\pi} D \sin^{-1}\left[0,956\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)^{0,495}\right]$ pour $0,20 \leq \eta \leq 0,82$ | | | | | | |
| $1) R_p \equiv 3,84 \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu}$ $2) Q_{max} = -1,322\sqrt{gJD^5} \log\left(\frac{\varepsilon/D}{3,23} + \frac{8,356}{R_p}\right)$ $3) y_n = \frac{2,947}{\pi} D \sin^{-1}\left[0,81\left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)^{0,509}\right]$ pour $0,14 \leq \eta \leq 0,80$ | | | | | | |
| Détermination de la profondeur critique y_c avec $\eta(Q_c^*)$ | | | Données : Q et D $Q_c^* = Q/\sqrt{gD^5}$ | | | |
| $1) - Q_c^* = Q/\sqrt{gD^5}$ $2) - y_c = \frac{11}{\pi} D \sin^{-1}\left(0,292Q_c^{*0,513}\right)$ Valable pour $0,10 \leq \eta_c \leq 0,78$ | | | | | | |
| $1) - Q_c^* = Q/\sqrt{gD^5}$ $2) - y_c = \frac{4,5}{\pi} \sinh^{-1}\left(1,014Q_c^{*0,521}\right)$ Valable pour $0,07 \leq \eta_c \leq 0,83$ | | | | | | |

| FER A CHEVAL (II) | | | | OVOIDE A RADIUS APLATI (III) | | | | |
|--|--|--|----------------------------|---|---|--|----------------------------|----------------------------|
| Détermination du taux de remplissage η Coefficient de Chézy invariable | | | | | | | | |
| | $Q_p^* = 0,4178$ | | $Q_{max}^* = 0,4382$ | | $Q_p^* = 0,4198$ | | $Q_{max}^* = 0,4329$ | |
| | Formule approchée | | intervalle | | Formule approchée | | intervalle | |
| $\eta(Q^*)$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 1,539Q^{*0,594}$ | | $0,17 \leq \eta \leq 0,84$ | $0,04 \leq Q^* \leq 0,421$ | $\sin\left(\frac{\pi}{1,876}\eta\right) = -1,81Q^{*2} + 2,793Q^* + 0,142$ | | $0,20 \leq \eta \leq 0,83$ | $0,07 \leq Q^* \leq 0,411$ |
| $\eta(Q_y^*)$ | $\sinh(2\eta) = 1,54Q_y^{*-1,205}$ | | $0,20 \leq \eta \leq 0,81$ | $0,68 \leq Q_y \leq 2,98$ | $\sinh\left(\frac{\pi}{1,196}\eta\right) = 1,87Q_y^{*-1,141}$ | | $0,22 \leq \eta \leq 0,98$ | $0,34 \leq Q_y \leq 2,65$ |
| | $\eta = 1,311 - 0,733Q_y^*$ | | $0,80 \leq \eta \leq 1$ | $0,42 \leq Q_y \leq 0,69$ | | | | |
| Détermination du taux de remplissage η Coefficient de Manning invariable | | | | | | | | |
| | $Q_p^* = 0,3325$ | | $Q_{max}^* = 0,3568$ | | $Q_p^* = 0,3323$ | | $Q_{max}^* = 0,3479$ | |
| | Formule approchée | | intervalle | | Formule approchée | | intervalle | |
| $\eta(Q^*)$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2,3}\eta\right) = 1,655Q^{*0,556}$ | | $0,19 \leq \eta \leq 0,83$ | $0,03 \leq Q^* \leq 0,337$ | $\sin\left(\frac{\pi}{1,8}\eta\right) = -3,227Q^{*2} + 3,55Q^* + 0,171$ | | $0,21 \leq \eta \leq 0,80$ | $0,06 \leq Q^* \leq 0,326$ |
| $\eta(Q_y^*)$ | $\sinh(2,2\eta) = 1,53Q_y^{*-1,18}$ | | $0,20 \leq \eta \leq 0,80$ | $0,59 \leq Q_y \leq 2,79$ | $\sinh\left(\frac{\pi}{1,18}\eta\right) = 1,651Q_y^{*-1,069}$ | | $0,24 \leq \eta \leq 0,95$ | $0,29 \leq Q_y \leq 2,27$ |
| | $\eta = 1,264 - 0,779Q_y^*$ | | $0,72 \leq \eta \leq 1$ | $0,33 \leq Q_y \leq 0,70$ | $\sin\left(\frac{\pi}{0,793}\eta\right) = 1,359 - 0,24Q_y^*$ | | $0,15 \leq \eta \leq 0,31$ | $1,73 \leq Q_y \leq 3,34$ |
| • Coefficient de résistance variable | | | | | | | | |
| Détermination de D | | | | Données : Q, J, ϵ, ν et η | | | | |
| 1°)- $\bar{D}_h = 1,516 \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5} \left(\frac{A_1}{P_1^2}\right)^{2/5}$ | | 2°)- $\bar{R} = 10,556 \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu} \left(\frac{A_1}{P_1^2}\right)^{3/5}$ | | 3°)- $D \cong 0,512 \left[-\log\left(\frac{\epsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{R}\right)\right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3}\right)^{1/5}$ | | | | |
| Détermination de y_n avec \bar{Q}^* | | | | Données : Q, D, J, ϵ et ν | | | | |
| 1)- $\bar{D}_p = 0,583 \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5}$ | | 2)- $\psi \cong 1,35 \left[-\log\left(\frac{\epsilon/\bar{D}_p}{5,81} + 5,26 \frac{\nu \bar{D}_p}{Q}\right)\right]^{-2/5}$ | | 1)- $\bar{D}_p = 0,536 \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5}$ | | 2)- $\psi \cong 1,35 \left[-\log\left(\frac{\epsilon/\bar{D}_p}{5,31} + 6,04 \frac{\nu \bar{D}_p}{Q}\right)\right]^{-2/5}$ | | |
| 3)- $\bar{D} = D/\psi$ | | 4)- $\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gJ\bar{D}^5}}$ | | 3)- $\bar{D} = D/\psi$ | | 4)- $\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gJ\bar{D}^5}}$ | | |
| 5)- $y_n = \frac{2,3}{\pi} D \sin^{-1}\left(1,539\bar{Q}^{*0,594}\right)$ | | $\bar{Q}^* \leq 0,421$ ou $0,17 \leq \eta \leq 0,88$ | | 5)- $y_n = \frac{1,876}{\pi} D \sin^{-1}\left(-1,81\bar{Q}^{*2} + 2,793\bar{Q}^* + 0,142\right)$ | | $\bar{Q}^* \leq 0,411$ ou $0,2 \leq \eta \leq 0,83$ | | |
| Détermination de la profondeur normale y_n avec $\eta(Q/Q_{max})$ | | | | Données : Q, D, J, ϵ et ν | | | | |
| 1) $R_p \cong 5,79 \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu}$ | | 2) $Q_{max} = -2,477 \sqrt{gJD^5} \log\left(\frac{\epsilon/D}{4,325} + \frac{8,1321}{R_p}\right)$ | | 1) $R_p \cong 5,52 \frac{\sqrt{gJD^3}}{\nu}$ | | 2) $Q_{max} = -2,448 \sqrt{gJD^5} \log\left(\frac{\epsilon/D}{3,991} + \frac{8,746}{R_p}\right)$ | | |
| 3) $y_n = \frac{2,3}{\pi} D \sin^{-1}\left[0,934 \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)^{0,563}\right]$ | | pour $0,14 \leq \eta \leq 0,80$ | | 3) $y_n = \frac{1,808}{\pi} D \sin^{-1}\left[-0,363 \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)^2 + 1,21 \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) + 0,171\right]$ | | pour | | |
| Détermination de la profondeur critique y_c avec $\eta(Q_c^*)$ | | | | Données : Q et D $Q_c^* = Q/\sqrt{gD^5}$ | | | | |
| 1)- $Q_c^* = Q/\sqrt{gD^5}$ | | 2)- $y_c = \frac{13}{2\pi} D \sin^{-1}\left(0,5Q^{*0,579}\right)$ | | 1)- $Q_c^* = Q/\sqrt{gD^5}$ | | 2) $y_c = \frac{1,543}{\pi} D \sinh^{-1}\left(2,538Q_c^* + 0,234\right)$ | | |
| Valable pour $0,19 \leq \eta_c \leq 0,78$ | | | | Valable pour $0,25 \leq \eta_c \leq 0,87$ | | | | |

| CIRCULAIRE AVEC BANQUETTES (IV) | | EN ARC DE CERCLE ECRASE (V) | | | | |
|--|--|------------------------------------|--|---|----------------------------|-----------------------------|
| Détermination du taux de remplissage η Coefficient de Chézy invariable | | | | | | |
| | $Q_p^* = 0,3462$ | $Q_{max}^* = 0,362$ | $Q_p^* = 0,2076$ | $Q_{max}^* = 0,5185$ | | |
| | Formule approchée | intervalle | | Formule approchée | intervalle | |
| $\eta(Q^*)$ | $\sin\left(\frac{\pi}{1,98}\eta\right) = 1,501Q^{*0,394}$ | $0,32 \leq \eta \leq 0,79$ | $0,06 \leq Q^* \leq 0,315$ | $\sin\left(\frac{\pi}{0,86}\eta\right) = 1,359Q^{*0,187}$ | $0,22 \leq \eta \leq 0,35$ | $0,033 \leq Q^* \leq 0,154$ |
| | | | | $\sin\left(\frac{\pi}{1,607}\eta\right) = 1,286Q^{*0,383}$ | $0,36 \leq \eta \leq 0,79$ | $0,165 \leq Q^* \leq 0,518$ |
| $\eta(Q_y^*)$ | $\sin(9\eta) = 240 - 234,5Q^*$ | $0,35 \leq \eta \leq 0,44$ | $0,91 \leq Q_y \leq 0,97$ | $\eta = 1,1088 - 0,1084Q_y^*$ | $0,43 \leq \eta \leq 0,96$ | $1,34 \leq Q_y \leq 6,24$ |
| | $\sin\left(\frac{\pi}{1,68}\eta\right) = \ln(2,018Q^{*-2,40})$ | $0,43 \leq \eta \leq 0,81$ | $0,55 \leq Q_y \leq 0,92$ | | | |
| Détermination du taux de remplissage η Coefficient de Manning invariable | | | | | | |
| | $Q_p^* = 0,27$ | $Q_{max}^* = 0,2884$ | $Q_p^* = 0,1567$ | $Q_{max}^* = 0,4494$ | | |
| | Formule approchée | intervalle | | Formule approchée | intervalle | |
| $\eta(Q^*)$ | $\sin\left(\frac{\pi}{1,99}\eta\right) = 1,578Q^{*0,37}$ | $0,34 \leq \eta \leq 0,84$ | $0,05 \leq Q^* \leq 0,27$ | $\sin\left(\frac{\pi}{0,95}\eta\right) = 6,327Q^* + 0,664$ | $0,23 \leq \eta \leq 0,42$ | $0,028 \leq Q^* \leq 0,19$ |
| | | | | $\sin\left(\frac{\pi}{1,605}\eta\right) = 1,336Q^{*0,363}$ | $0,4 \leq \eta \leq 0,78$ | $0,171 \leq Q^* \leq 0,449$ |
| $\eta(Q_y^*)$ | $\sin\left(\frac{\pi}{0,302}\eta\right) = 529,6 - 612Q_y^*$ | $0,35 \leq \eta \leq 0,46$ | $0,77 \leq Q_y \leq 0,83$ | $\sin\left(\frac{\pi}{6,507}\eta\right) = 0,504 - 0,046Q_y^*$ | $0,45 \leq \eta \leq 0,96$ | $1,2 \leq Q_y \leq 6,25$ |
| | $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\eta\right) = \ln(1,458Q^{*-2,5})$ | $0,44 \leq \eta \leq 0,98$ | $0,3 \leq Q_y \leq 0,79$ | | | |
| • Coefficient de résistance variable | | | | | | |
| Détermination de D | | | Données : Q, J, ϵ, v et η | | | |
| $1^\circ) - \bar{D}_h = 1,516 \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5} \left(\frac{A_1}{P_1^2}\right)^{2/5}$ $2^\circ) - \bar{R} = 10,556 \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{v} \left(\frac{A_1}{P_1^2}\right)^{3/5}$ $3^\circ) - D \equiv 0,512 \left[-\log\left(\frac{\epsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{R}\right)\right]^{-2/5} \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5} \left(\frac{P_1}{A_1^3}\right)^{1/5}$ | | | | | | |
| Détermination de y_n avec \bar{Q}^* | | | Données : Q, D, J, ϵ et v | | | |
| $1) - \bar{D}_p = 0,579 \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5}$ $2) - \psi \equiv 1,35 \left[-\log\left(\frac{\epsilon/\bar{D}_p}{5,08} + 5,33 \frac{v\bar{D}_p}{Q}\right)\right]^{-2/5}$ $3) - \bar{D} = D/\psi$ $4) - \bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gJ\bar{D}^5}}$ $5) - y_n = \frac{1,98}{\pi} D \sin^{-1}\left(1,501\bar{Q}^{*0,394}\right)$ $\bar{Q}^* \leq 0,315$ ou $0,32 \leq \eta \leq 0,79$ | | | | | | |
| $1) - \bar{D}_p = 0,771 \left(\frac{Q^2}{gJ}\right)^{1/5}$ $2) - \psi \equiv 1,35 \left[-\log\left(\frac{\epsilon/\bar{D}_p}{5,63} + 2,74 \frac{v\bar{D}_p}{Q}\right)\right]^{-2/5}$ $3) - \bar{D} = D/\psi$ $4) - \bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gJ\bar{D}^5}}$ $5) - y_n = \frac{1,607}{\pi} D \sin^{-1}\left(1,286\bar{Q}^{*0,383}\right)$ $0,165 \leq \bar{Q}^* \leq 0,518$ ou $0,36 \leq \eta \leq 0,79$ | | | | | | |
| Détermination de la profondeur normale y_n avec $\eta(Q/Q_{max})$ | | | Données : Q, D, J, ϵ et v | | | |
| $1) R_p \equiv 4,83 \frac{\sqrt{gJD^3}}{v}$ $2) Q_{max} = -2,047 \sqrt{gJD^5} \log\left(\frac{\epsilon/D}{3,797} + \frac{8,248}{R_p}\right)$ $3) y_n = \frac{1,906}{\pi} D \sin^{-1}\left[1,016 \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)^{0,361}\right]$ pour $0,3 \leq \eta \leq 0,78$ | | | | | | |
| $1) R_p \equiv 3,59 \frac{\sqrt{gJD^3}}{v}$ $2) Q_{max} = -2,933 \sqrt{gJD^5} \log\left(\frac{\epsilon/D}{6,277} + \frac{2,883}{R_p}\right)$ $3) y_n = \frac{1,53}{\pi} D \sin^{-1}\left[-0,328 \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right)^2 + 0,901 \left(\frac{Q}{Q_{max}}\right) + 0,431\right]$ pour $0,33 \leq \eta \leq 0,73$ | | | | | | |
| Détermination de la profondeur critique y_c avec $\eta(Q_c^*)$ | | | Données : Q et D $Q_c^* = Q/\sqrt{gD^5}$ | | | |
| $1) - Q_c^* = Q/\sqrt{gD^5}$ $2) - y_c = \frac{3,344}{\pi} D \sin^{-1}\left(0,876Q_c^{*0,404}\right)$ Valable pour $0,32 \leq \eta_c \leq 0,81$ | | | | | | |
| $1) - Q_c^* = Q/\sqrt{gD^5}$ $2) y_c = \frac{0,92}{\pi} \sin^{-1}\left(1,318Q_c^{*0,198}\right)$ $0,24 \leq \eta_c \leq 0,36$ $y_c = \frac{1,998}{\pi} D \sin^{-1}\left(1,003Q_c^{*0,373}\right)$ pour $0,36 \leq \eta_c \leq 0,79$ | | | | | | |

Conclusion générale :

Le dimensionnement des conduites constitue une préoccupation majeure des projeteurs hydrauliciens. L'étude bibliographique menée dans la présente thèse révèle l'insuffisance des études antérieures, surtout dans le cas du dimensionnement des conduites.

Les calculs sont basés essentiellement sur des formules empiriques donnant les expressions du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* ou de *Manning*. Ces coefficients considérés constants mènent à des erreurs déplorables, car on y néglige l'effet de la viscosité cinématique ν et la rugosité y est exprimée grossièrement selon la nature des matériaux constituant la frontière solide.

Accordant la fiabilité aux résultats scientifiques concernant les conduites circulaires, nous avons utilisé tout d'abord, pour les dissipations hydrauliques linéaires de frottement, la formule de *Colebrook-White* pour la résistivité f . Cette formule couvre tout le domaine utile de l'écoulement, en effet pour une rugosité ε nulle, elle admet comme cas particulier la formule de *Prandtl* pour les conduites théoriquement lisses, alors que pour un nombre de *Reynolds* très grands $R \rightarrow \infty$, on utilise la formule de *Nikuradsé*. Les éclaircissements apportés par *Moody*, concernant la rugosité naturelles, a rendu ces formules applicables avec une précision très appréciable.

Les nombreuses grandeurs physiques, à savoir le débit volume Q , le gradient J de perte de charge la rugosité absolue ε , l'une des caractéristique de la section arbitrairement choisie désignée par a , les paramètres de forme tel que η déterminant la forme du profil, ainsi que la viscosité cinématique ν du fluides, reliées entre elles par des relations compliquées, transcendantes voire implicites, rendent le calcul péniblement laborieux par l'emploi d'itération ou de graphes.

Afin de rendre les calculs simples *M G. Lapray* introduit le concept de la longueur fluidodynamique Λ qui dépend d'un nombre réduit de variables. Ainsi cette longueur Λ qui forme le premier facteur du concept est fonction du rapport Q/\sqrt{J} et de la rugosité absolue ε mais indépendante de la nature du fluide et de la forme géométrique de la section. La forme du profil fluide est cernée par autre facteur a_0 appelé paramètre de dimension. Un troisième facteur de correction Y des dimensions est fonction de ε/D_h et du nombre de *Reynolds* R . Grâce à ce modèle physique l'auteur arrive à grouper toutes les grandeurs physiques en trois équations seulement :

$$\Lambda = f(Q/\sqrt{J}, \varepsilon); \quad a_0 = f(\text{forme}); \quad \text{et} \quad Y = f(\varepsilon/D_h, R)$$

Ceci a permis des représentations graphiques et l'auteur a dressé tous les abaques nécessaires. La longueur caractéristiques a de la section, quelque soit sa forme s'exprime par le produit : $a = \Lambda a_0 Y$, les éléments de cette expression sont tirés des graphes déjà dressées.

Une deuxième approche dite méthode LARHYSS ou longueur fluidodynamique modifiée est basée sur la combinaison des formule de *Manning-Strickler* et *Darcy-Weisbach*. La formule donne la dimension linéaire par l'expression suivante :

$$\tilde{a} = (f/f_r)^{1/5} \cdot (Q\varepsilon^{1/6}/8, 2\sqrt{gJ})^{3/8} \cdot (P_1^{1/4}/A_1^{5/8})$$

Dans cette formule le premier élément entre parenthèses exprime le rapport entre le coefficient de frottement réel dans la conduite et celui d'un écoulement turbulent rugueux. Le second exprime la longueur fluidodynamique modifiée et le dernier exprime la forme de la section droite en fonction des paramètres adimensionnels du périmètre mouille et la section mouillée.

L'avantage de cette méthode est que la dimension linéaire est directement donnée par le calcul.

Enfin une nouvelle approche basée sur un modèle rugueux de référence est présentée dans le but de répondre aux problèmes courants de l'écoulement à ciel ouvert en conduite. Ce modèle écoulant, un débit \bar{Q} sous un gradient de perte de charge \bar{J} , à une rugosité relative arbitrairement choisie égale $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 0,037$ et le régime qui s'y installe est turbulent rugueux. Le calcul de la dimension linéaire est mené en assumant que $Q = \bar{Q}$, $a \neq \bar{a}$ et $J = \bar{J}$.

L'application simultanée de la formule de *Darcy-Weisbach* au canal réel et à son modèle rugueux a montrée que les dimensions linéaires du canal et de son modèle sont étroitement liés. Cette dimension linéaire a est alors calculée à partir de la dimension du modèle rugueux corrigé par un facteur de correction $\psi(\varepsilon/\bar{D}_h, \bar{R})$. Nous avons trouvée la relation généralisée (1.173) qui permet de trouver directement la dimension linéaire a . Cette formule occasionne une erreur relative maximale de 0,5%. Une valeur plus exacte de cette dimension peut être donnée par la relation (1.174) après avoir évalué le coefficient de correction des dimensions linéaires $\psi(\varepsilon/\bar{D}_h, \bar{R})$ par l'expression (1.168).

Nous avons montré tout au long du chapitre 1 à travers un exemple d'application concret la fiabilité et la simplicité de la méthode du modèle rugueux de référence. La dimension linéaire peut être obtenue par un seul calcul, sans se soucier de la nature du régime d'écoulement. Les erreurs occasionnées sont largement acceptables comparativement aux autres méthodes.

Le dimensionnement des conduites circulaires et non circulaire en écoulement à ciel ouvert permanent uniforme à coefficient de résistance constant ou variable a fait l'objet d'une étude très particulière dans les chapitres 2 et 3.

En premier lieu nous avons considéré le coefficient de résistance à l'écoulement (C de *Chézy* ou n de *Manning*) constant, ceci est erroné mais ces considérations trouvent énormément d'application dans la pratique car les régimes d'écoulement qui s'y installent sont souvent turbulent rugueux.

Le premier problème est la détermination de la profondeur normale y_n (ou bien du taux de remplissage η) à partir des valeurs connues des paramètres tel que le débit Q , le gradient de perte charge J , le diamètre D , le coefficient de résistance à l'écoulement constant C ou n . La solution réside

dans la résolution de l'une des relations $\eta(Q^*)$ (2.25) ou (2.42) de la conductivité relative Q^* . Mais au regard des relations $\eta(Q^*)$ ce taux η , est implicite vis-à-vis de Q^* .

Afin d'éviter les solutions graphiques entachées d'erreurs grossières et les calculs itératifs souvent laborieux, Nous avons proposé des relations approchées pour le calcul du taux η et par conséquent la profondeur normale. Nous avons proposé trois types de relations $\eta(Q^*)$, $\eta(Q/Q_p)$ et $\eta(Q/Q_{\max})$ pour les deux cas du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy ou n de Manning

Le deuxième problème est le calcul du diamètre D à partir des valeurs connues des paramètres tel que le débit Q , le gradient de perte charge J , la profondeur normale y_n , le coefficient C ou n , ce problème trouve sa solution dans la transformation de la relation donnant la conductivité relative. Nous avons défini à cette fin la conductivité relative Q_y^* rapportée à la profondeur normale y_n qui est donnée par l'une des relations (2.38) ou (2.55). La aussi et après de longs calculs nous avons proposé des relations approchées $\eta(Q_y^*)$ permettant le calcul du taux de remplissage et par voie de conséquence le diamètre de la conduite $D = y_n/\eta$.

Les relations proposées sont très fiables. Elles ont été trouvées après de longs calculs, elles sont applicables dans de large gamme pratique du taux de remplissage η et occasionnent des erreurs relatives maximales $\Delta\eta/\eta$ ne dépassant guère 0,50%.

En deuxième lieu nous avons considéré le cas réel des écoulements permanent uniforme à coefficient de résistance variable. Nous avons utilisé la méthode du modèle rugueux de référence (MMR) qui a fait l'objet d'une large application pour les conduites circulaires et non circulaires en charge. Le dimensionnement dans ce cas ne nécessite ni la connaissance du coefficient de résistance de Colebrook-White, ni celle de Chézy ou Manning-Strickler.

La formule (1.173) permettant le calcul simple du diamètre caractéristiques de n'importe qu'elle conduite fermée a été appliquée aux six profils de conduites étudiées. Les calculs sont très simples et les résultats obtenus sont très satisfaisant, l'erreur relative maximale ne dépasse pas 0,6%

La détermination de la profondeur normale y_n a été possible par l'étude très particulière de la conductivité relative du modèle rugueux de référence $\bar{\eta}(Q^*)$. Nous avons constaté que la conductivité à l'état plein \bar{Q}_p^* de chaque profil étudié, correspond deux valeurs différentes du taux de remplissage $\bar{\eta} = 1$ et $\bar{\eta} \neq 1$. C'est-à-dire que pour profil rugueux de référence plein de diamètre \bar{D}_p correspond un autre profil de même diamètre mais avec un taux de remplissage $\bar{\eta} \neq 1$.

A partir de la et des valeurs imposées du débit volume Q , du diamètre de la conduite D , du gradient de perte de charge J , de la rugosité absolue de la conduite ε et de la viscosité du liquide, on détermine le diamètre du modèle rugueux à l'état plein \bar{D}_p et le facteur de correction des dimensions

linéaires ψ . Au diamètre D de la conduite correspond $\bar{D} = D/\psi$. Ce diamètre \bar{D} permet le calcul de la nouvelle conductivité \bar{Q}^* . Le taux de remplissage η recherché est donné par une relation approchée $\eta(\bar{Q}^*)$, similaire à la relation $\eta(Q^*)$ déjà trouvée pour chaque profil. Les erreurs relatives occasionnées par cette démarche ne dépassent guère 0,8%.

Une deuxième démarche permettant la détermination du taux de remplissage η est basée sur une relation approchée $\eta(Q/Q_{\max})$. Nous avons trouvé, après des calculs assez laborieux, une formule du débit maximum d'un profil quelconque en fonction du gradient de perte de charge J , du diamètre caractéristique D , de la rugosité relative ε et de la viscosité cinématique ν .

Les relations approchées $\eta(Q/Q_{\max})$ obtenues, après les nombreuses tentatives de corrélation, occasionnées des erreurs relatives sur le taux de remplissage ne dépassant pas 0,5%. Pour les faibles valeurs de la rugosité relatives ε/D et du nombre de Reynolds R_p , ces erreurs peuvent atteindre 1,5%.

Les résultats et les vérifications obtenus pour les nombreux exemples d'application de dimensionnement ont montré la fiabilité et la simplicité de la méthode du modèle rugueux de référence. Elle devient ainsi un outil très performant pour le dimensionnement.

Les résultats encourageant obtenus dans cette contribution confirment l'applicabilité de la méthode du modèle rugueux de référence déjà prouvée pour les écoulements dans les conduites et canaux en charge.

Bibliographie:

ACHOUR B., BEDJAOUI, A., KHATTAOUI, M.DABABECHE, M. (2002), *Contribution au calcul des écoulements uniformes à surface libre et en charge*, Larhyss/Journal n°1, 7-36.

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A. (2006). Discussion "Exact Solutions for Normal Depth Problem" by Prabatha, K. Swamee and Pushpa N. Rathie, J. Hydraulic. Research, Vol.44, n°5, 715-717.

ACHOUR B., BEDJAOUI, A. (2006). *Contribution au calcul de la profondeur normale dans un canal rectangulaire*. Larhyss/Journal n°5, 139-147

ACHOUR B., BEDJAOUI, A. (2006). *Calcul du coefficient de frottement en conduite circulaire sous pression*. Larhyss/Journal n°5, 197-200

ACHOUR, B. (2007). *Calcul des conduits et canaux par la MMR* Tome 1. Larhyss Edition Capitale-Biskra

CARLIER, M. (1972) *Hydraulique générale et appliquée* (Ed. Eyrolles, Paris.

CHOW, V.T. (1973) *Open-Channel Hydraulics*, Ed.McGraw Hill, N.Y. USA. [page7 chap1]

GRAF, W.H, ALTINAKAR, M.S. (1993) *Hydraulique fluviale*, Tome1 Traité de Génie Civil de l'école polytechnique fédérale de Lausanne, Ed. Presses Polytechniques et universitaires Romandes, Vol. 16, Suisse.

HAGER, W.H. (1987). " Die Berechnung turbulenter Rohrströmungen", *3R-International*, Vol.26, 116-121.

Ir. P.NONCLERCQ, 1982, HYDRAULIQUE URBAINE APPLIQUEE, 1°Partie Principes fondamentaux et compléments d'hydraulique, Ed. CEBEDOC/liège.

LAPRAY, M.G. (1975). *Théorie de la longueur fluidodynamique*, Polycopié ECOLE NATIONALE POLYTECHNIQUE – Département hydraulique. Alger.

LENCASTRE, A. (1996). *Hydraulique générale*, Ed. Eyrolles, Paris.

N.KREMENETSKI, D.SCHTERENLIHT, V.ALYCHEV, L.YAKOVLEVA, 1984 *Hydraulique*, édition MIR. Moscou.

SINNIGER, R.O., HAGER, W.H. (1989). *Constructions hydrauliques*, Traité de Génie Civil, Ed. Presses Polytechniques Romandes, Vol.15, Suisse.

SWAMEE, P.K., JAIN, A.K. (1976). *Explicit equations for pipe-flow problems*. Procs. ASCE, *J.Hydraulics Division*, Vol.102, HY5.657-664.

SWAMEE, P.K., JAIN, A.K. (1977). *Explicit equations for pipe-flow problems*. Procs. ASCE, *J.Hydraulics Division*, Vol.103, HY4.460-463.

SWAMEE, P.K., JAIN, A.K. (1978). *Exact equations for pipe-flow problems*. Procs. ASCE, *J.Hydraulics Division*, Vol.104, HY2.300.