

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
UNIVERSITE MOHAMED KHIDER – BISKRA –  
Faculté des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur

N° d'ordre : .....

Série : .....

Département d'Hydraulique

Laboratoire LARHYSS

## MEMOIRE DE MAGISTER EN HYDRAULIQUE

*Option : Sciences Hydrauliques*

Présenté par :

**Mr BADRI Toufik**

*Ingénieur d'Etat en Hydraulique*

THEME

*Contribution à l'étude de l'écoulement uniforme  
dans une conduite fermé de forme ovoïdale*

Soutenu le : ...../...../ 2010

Devant le jury :

Président : B.REMINI

Professeur

Univ. Blida

Examineur : M.KHATAOUI

Maître de conférences

Univ.Tizi Ouzou

Examineur : N.MOUMMI

Maître de conférences

Univ. Biskra

Rapporteur B.ACHOUR

Professeur

Univ. Biskra

## ملخص

يركز عملنا على دراسة الجريان المنتظم في قناة بيضوية الشكل. واستندت الدراسة إلى علاقات شيزي ومانينغ. اعتمدنا في دراستنا على حالتين الأولى يكون فيها معامل المقاومة ثابت و الأخرى متغير. بالاعتماد على العلاقة العامة للتدفق، قمنا باستنتاج معامل مقاومة التدفق شيزي و معامل الخشونة مانينغ. التمثيل البياني لكل من المعاملين أظهر أن كلاهما يمر عبر قيمة حدية قصوى في حالة عدم معرفة قطر القناة، طريقة النموذج الخشن (MMR) تسمح بحساب هذين المعاملين عن طريق علاقات صريحة قابلة للتطبيق من أجل كل مجال الجريان المضطرب. كما قمنا بدراسة خاصة عن الجريان الحرج تسمح بطرح علاقة ممتازة حسابية تقريبية للعمق الحرج في القناة.

## Résumé

Notre travail s'est intéressé à l'écoulement uniforme dans une conduite de forme ovoïdale. L'étude s'est basée sur les relations de *Chezy* et de *Manning*. L'analyse de l'écoulement a été menée d'une part à coefficient de résistance constant et à coefficient de résistance variable. En se basant sur la relation générale du débit volume, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chezy* et le coefficient de rugosité de *Manning* ont été exprimés. Leur représentation graphique a montré qu'ils passent tous deux par un maximum. En absence du diamètre de la conduite, la méthode du modèle rugueux a permis de calculer ces coefficients par des relations explicites applicables dans tout le domaine de l'écoulement turbulent. Une étude particulière de l'écoulement critique a permis notamment de proposer une excellente relation approchée au calcul de la profondeur critique.

## Abstract

Our work takes an interest in uniform flow in an edge shaped conduct. The study is based on *Chezy's* and *Manning's* relationship. The flow is analyzed firstly under a constant resistance coefficient and secondly with a variable resistance coefficient. Considering the consistent uniform flow relationship, *Chezy's* and *Manning's* coefficients are expressed and their graphical representation shows a maximum. Despite the fact that the diameter of the conduct is unknown, the rough model method allows the determination of these coefficients from explicit relations applied in the fully turbulent flow domain. A particular study of the critical flow allows notably to deduce a good approximate relation for calculation of the critical depth.

# SOMMAIRE

	<b>Page</b>
<b>Introduction générale</b> .....	1
I. Ecoulement uniforme.....	3
I.1. Introduction.....	3
I.2. Equations hydrodynamiques.....	3
I.2.1. Concept de l'uniformité.....	3
I.2.2. Equation de continuité.....	4
I.2.3. Equation du mouvement.....	4
I.3. Calcul du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> .....	7
I.4. Formule de <i>Manning</i> .....	7
I.5. Coefficient de frottement et vitesse moyenne de l'écoulement.....	8
I.5.1. Exemple d'application 1.1.....	11
I.5.2. Exemple d'application 1.2.....	12
I.6. Calcul de l'écoulement uniforme.....	14
I.6.1. Relation générale du débit volume.....	14
I.6.2. Expression générale du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> et <i>n</i> de <i>Manning</i> .....	17
I.6.3. Application au canal de forme rectangulaire.....	18
I.7. Conclusion.....	22
II. Ecoulement uniforme dans une conduite de forme ovoïdale.....	23
II.1. Introduction.....	23
II.2. Caractéristiques géométriques.....	23
II.3. Caractéristiques de l'écoulement.....	25
II.4. Variation des caractéristiques de l'écoulement.....	38
II.5. Etude de l'écoulement à coefficient de résistance constant.....	40
II.5.1. Formule de <i>Chézy</i> .....	40
II.5.1.1. Conductivité relative.....	40
II.5.1.2. Variation de la conductivité relative.....	42
II.5.1.3. Exemple d'application 2.1.....	44
II.5.1.4. Exemple d'application 2.2.....	45
II.5.1.5. Transformation de la relation $\eta(Q^*)$ .....	47
II.5.1.6. Exemple d'application 2.3.....	49
II.5.1.7. Exemple d'application 2.4.....	50
II.5.1.8. Courbe de remplissage de la conduite pour <i>C</i> = <b>constante</b> .....	52
II.5.1.9. Exemple d'application 2.5.....	54
II.5.1.10. Relation $\eta(Q/Q_{\max.})$ pour <i>C</i> = <b>constante</b> .....	55
II.5.1.11. Exemple d'application 2.6.....	56
II.5.2. Formule de <i>Manning-Strickler</i> .....	58
II.5.2.1. Conductivité relative.....	58
II.5.2.2. Variation de la conductivité relative.....	59
II.5.2.3. Relation approchée $\eta(Q^*)$ .....	60
II.5.2.4. Exemple d'application 2.7.....	61
II.5.2.5. Exemple d'application 2.8.....	62
II.5.2.6. Exemple d'application 2.9.....	63
II.5.2.7. Conductivité relative rapportée à la profondeur normale.....	65
II.5.2.8. Exemple d'application 2.10.....	67
II.5.2.9. Exemple d'application 2.11.....	68
II.5.2.10. Courbe de remplissage de la conduite pour <i>n</i> = <b>constante</b> .....	69
II.5.2.11. Exemple d'application 2.12.....	72

II.5.2.12	Relation $\eta(Q / Q_{\max.})$ pour $n = \text{constante}$ .....	73
II.5.2.13.	Exemple d'application 2.13 .....	75
II.6.	Etude de l'écoulement à coefficient de résistance variable.....	77
II.6.1.	Coefficient de résistance à l'écoulement de <i>Chézy</i> .....	77
II.6.1.1.	Relation générale et variation du coefficient de résistance $C$ de <i>Chézy</i> .....	77
II.6.1.2.	Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement $C$ de <i>Chézy</i> par la MMR.....	83
II.6.1.3.	Exemple d'application 2.14.....	88
II.6.1.4.	Exemple d'application 2.15.....	91
II.6.1.5.	Exemple d'application 2.16.....	94
II.6.2.	Expression du débit volume maximal $Q_{\max.}$ .....	97
II.6.2.1.	Exemple d'application 2.17.....	102
II.6.3.	Relation approchée de la profondeur normale.....	102
II.6.3.1.	Exemple d'application 2.18.....	103
II.6.3.2.	Exemple d'application 2.19.....	105
II.6.3.3.	Exemple d'application 2.20.....	108
II.6.3.4.	Exemple d'application 2.21.....	111
II.6.4.	Expression de la vitesse moyenne maximale $V_{\max.}$ .....	113
II.6.4.1.	Exemple d'application 2.22.....	116
II.6.4.2.	Exemple d'application 2.23.....	120
II.6.4.3.	Exemple d'application 2.24.....	123
II.6.5.	Coefficient $n$ de <i>Manning</i> .....	126
II.6.5.1.	Relation générale du coefficient $n$ de <i>Manning</i> .....	126
II.6.5.2.	Calcul du coefficient $n$ de <i>Manning</i> par la MMR.....	130
II.6.5.3.	Exemple d'application 2.25.....	133
II.6.5.4.	Exemple d'application 2.26.....	136
II.6.5.5.	Exemple d'application 2.27.....	139
II.6.5.6.	Exemple d'application 2.28.....	142
II.7.	Écoulement critique.....	145
II.7.1.	Exemple d'application 2.29.....	149
II.7.2.	Exemple d'application 2.30.....	153
II.8.	Conclusion.....	157
	<b>Conclusion générale</b> .....	161
	<b>Références bibliographiques</b> .....	164

## INTRODUCTION GENERALE

L'écoulement uniforme dans un canal est caractérisé par la constance de sa profondeur, de sa section transversale et de sa pente longitudinale. Il est en outre permanent lorsque le débit volume qu'il écoule demeure constant ou est indépendant du temps. On admet que la vitesse moyenne est constante ou que sa répartition est uniforme dans toute section du canal.

Dans la pratique, l'écoulement uniforme est très rare. Il se produit, d'un point de vue théorique, lorsque le canal a une longueur infinie ou très grande. Cependant, le calcul de l'écoulement dans les canaux et rivières est effectué sous l'hypothèse de l'uniformité. Ce calcul se base, en règle générale, sur les formules usuelles de type *Chézy* ou *Manning*, en admettant que le coefficient de résistance à l'écoulement est aussi constant. Cette constance du coefficient de résistance n'est pourtant pas souvent justifiée, à moins que l'écoulement ne soit dans le domaine turbulent rugueux. Lorsque l'écoulement est dans le domaine de transition, le coefficient de résistance à l'écoulement ne peut être considéré comme étant constant, mais il varie en fonction de la profondeur. A l'heure actuelle, il n'existe aucune relation explicite permettant d'évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* ou de *Manning* lorsque l'écoulement est dans le domaine de transition ou lisse. Pour le cas du régime d'écoulement turbulent rugueux, ces coefficients sont tabulés et dépendent de la nature du matériau constituant le canal, ainsi que de nombreux d'autres facteurs. Des relations simplifiées ont été proposées par le passé pour évaluer ces coefficients. Ces relations sont de type *Bazin* ou *Kutter* dans lesquelles le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* dépend de la nature du matériau et du rayon hydraulique.

Le présent mémoire est subdivisé en deux grandes parties. La première partie est entièrement dédiée à un état des connaissances sur l'écoulement uniforme. Le concept d'uniformité est expliqué à travers un schéma simplifié et l'équation de continuité est présentée. Ceci est suivi par les équations du mouvement qui mènent aux relations universellement connues de *Darcy* et de *Chézy* ainsi qu'à la relation liant le coefficient  $C$  de *Chézy* au coefficient de frottement  $f$ . Les relations de *Bazin* et de *Kutter*, souvent citées dans la littérature et permettant d'estimer le coefficient  $C$  de *Chézy* sont présentées et discutées. Le coefficient de frottement, au sens de *Colebrook-White* est exprimé en particulier en fonction du coefficient de forme de la section du canal. L'expression générale de la vitesse moyenne  $V$  est aussi présentée en fonction de ce coefficient et des autres paramètres régissant l'écoulement.

Dans cette partie de l'étude, l'expression générale du débit volume ainsi que celle du nombre de *Reynolds*, applicable à tout profil de canal et dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, est indiquée. L'expression générale du débit volume permet de déduire la relation du coefficient  $C$  de *Chézy* et celle du coefficient  $n$  de *Manning*. Le calcul de l'écoulement uniforme est

présenté à travers un exemple d'application sur le canal de forme rectangulaire.

La seconde partie du mémoire constitue notre propre contribution à l'étude de l'écoulement uniforme dans une conduite de forme ovoïdale. Pour mieux appréhender le problème, deux aspects sont examinés. Le premier aspect concerne l'étude de l'écoulement uniforme lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement demeure constant et le second aspect est lié à l'étude de l'écoulement uniforme lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement est variable ou est fonction de la variation de la profondeur de l'écoulement.

Après avoir présenté les caractéristiques géométriques de la conduite, celles de l'écoulement, telles que la largeur du plan d'eau, le périmètre mouillé et l'aire de la section mouillée, sont indiquées selon la gamme de valeurs du taux de remplissage. Les variations de ces caractéristiques sont graphiquement représentées et comparées à celle de la conduite de forme circulaire.

L'étude de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance constant est basée à la fois sur les relations de *Chézy* et de *Manning*. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage, l'expression de la conductivité relative est établie et sa variation est graphiquement indiquée et commentée. Des relations approchées explicites sont proposées pour le calcul de la profondeur normale, calcul étayé par des exemples d'application. Cette partie de l'étude est suivie par l'établissement et la représentation graphique de la courbe de remplissage de la conduite.

L'étude de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance variable a recours à la relation générale du débit volume qui dépend à la fois de l'aire de la section mouillée, du rayon hydraulique, de la pente longitudinale de la conduite, de la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite et de la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Tous les paramètres qui régissent l'écoulement turbulent sont ainsi pris en considération. La relation générale du débit volume permet de déduire l'expression du coefficient de résistance de *Chézy* ainsi que le coefficient de rugosité de *Manning*. La représentation graphique adimensionnelle de ces coefficients est présentée et les courbes de variation obtenues sont commentées. En outre, la théorie du modèle rugueux de référence permet le calcul aisé de ces coefficients à travers des relations dépendant de la gamme de variation du taux de remplissage. De nombreux exemples d'application sont présentés dans le but d'expliquer la démarche à suivre. L'étude de l'écoulement à coefficient de résistance variable se poursuit par la détermination de relations approchées, fiables et explicites, destinées au calcul de la profondeur normale de l'écoulement, calcul ponctué par des exemples d'application.

L'étude de l'écoulement uniforme concerne également le régime critique. Après avoir développé la condition de criticité selon la gamme de variation du taux de remplissage, une étude particulière de l'écoulement critique est présentée en mettant l'accent sur les relations permettant le calcul de la profondeur critique en particulier.

# I. ECOULEMENT UNIFORME

## I.1. Introduction

Au cours de cette partie de notre étude, un état de connaissances sur l'écoulement uniforme est présenté, sous les aspects théorique et pratique.

Dans un premier temps, les équations théoriques de l'écoulement uniforme sont démontrées et commentées. Dans un second temps, les méthodes de calcul de l'écoulement sont présentées et étayées par des exemples pratiques.

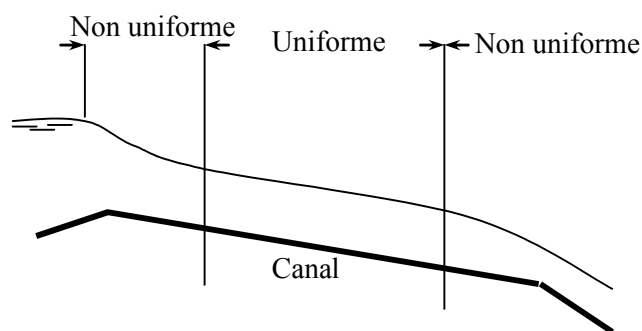
Notre attention est portée principalement sur les équations largement utilisées de *Chézy* et de *Manning*, en insistant sur la méthode de détermination des coefficients de résistance à l'écoulement.

## I.2. Equations hydrodynamiques

### I.2.1. Concept de l'uniformité

L'écoulement est uniforme permanent lorsque la profondeur  $y$  ou le rayon hydraulique  $R_h$ , la vitesse moyenne  $V$ , le débit volume  $Q$ , la rugosité  $\varepsilon$  et la pente longitudinale  $i$  demeurent inchangés dans toute section de la conduite ou du canal. Les lignes de courant sont parallèles et rectilignes et la pression verticale est de nature hydrostatique. La pente du fond, la ligne piézométrique et la pente de la ligne de charge totale sont identiques.

Dans les canaux naturels, l'écoulement uniforme est rare. Il est également assez rare dans les canaux et conduites artificielles. Il peut s'observer dans des canaux prismatiques de très grande longueur, loin des extrémités amont et aval (Figure 1.1.).



**Figure 1.1 :** Concept d'uniformité (*Chow, 1973 ; Graf et Altinakar, 1993*)

### 1.2.2. Equation de continuité

Lorsque l'écoulement est uniforme et permanent, l'aire de la section mouillée  $A$  reste inchangée dans la direction  $x$  le long de l'écoulement et dans le temps  $t$ . L'équation de continuité qui s'écrit :

$$\frac{\partial(VA)}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

devient :

$$\frac{\partial(VA)}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

avec  $VA=Q$ . Le débit volume  $Q$  est donc une constante, soit :

$$Q = \text{constante} \quad (1.3)$$

Entre deux sections transversales données 1 et 2, nous pouvons écrire :

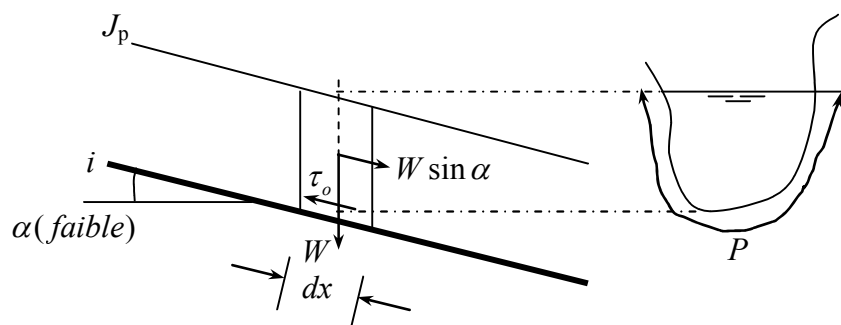
$$V_1 A_1 = V_2 A_2 = Q \quad (1.4)$$

### 1.2.3. Equation du mouvement

Considérons un canal prismatique de forme quelconque (Figure 1.2). Le liquide en écoulement occasionne une force de frottement sur les parois qui peut s'écrire :

$$F_f = \tau_o P dx \quad (1.5)$$

où  $\tau_o$  est la force par unité d'aire de surface mouillée,  $P$  est le périmètre mouillé et  $dx$  est la longueur élémentaire de la tranche de canal considéré (Figure 1.2).



**Figure 1.2** : Schéma de définition de l'écoulement uniforme



Sur la figure 1.2, la quantité  $W \sin \alpha$  représente la composante tangentielle du poids propre  $W$  de la tranche liquide élémentaire  $dx$ , soit :

$$W = \rho g \times \text{Volume} = \rho g A dx = \varpi A dx$$

La composante tangentielle du poids propre  $W$  s'écrit donc :

$$F_g = \varpi A dx \sin \alpha = W \sin \alpha \quad (1.6)$$

Lorsque l'écoulement uniforme est établi, les forces  $F_f$  et  $F_g$ , données par les relations (1.5) et (1.6) respectivement, s'équilibrent. Ainsi :

$$\tau_o P dx = \varpi A dx \sin \alpha \quad (1.7)$$

La relation (1.7) permet d'écrire :

$$\tau_o = \varpi \frac{A}{P} \sin \alpha \quad (1.8)$$

Le rapport  $A/P$  représente le rayon hydraulique  $R_h$ , tandis que  $\sin \alpha$  désigne la pente longitudinale  $i$ . La relation (1.8) s'écrit alors :

$$\tau_o = \varpi R_h i \quad (1.9)$$

On définit :

$$\frac{\tau_o}{\rho} = v_*^2 \quad (1.10)$$

où  $v_*$  désigne ce que l'on appelle la vitesse de frottement. Tenant compte de (1.10), la relation (1.9) permet d'écrire que :

$$v_* = \sqrt{g R_h i} \quad (1.11)$$

D'autre part, on définit le coefficient de frottement  $f$  (Graf et Altinakar, 1991) par :

$$f = \frac{8\tau_o}{\rho V^2} \quad (1.12)$$

La combinaison des relations (1.10) et (1.12) permet d'écrire que :

$$f = 8 \left( \frac{v_*}{V} \right) \quad (1.13)$$

En tenant compte des relations (1.9) et (1.12), nous pouvons déduire que :

$$f \frac{\rho V^2}{8} = \varpi R_h i$$

Cette dernière relation s'écrit plus simplement sous la forme :

$$i = f \frac{1}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (1.14)$$

La relation (1.14) est connue sous le nom de relation de *Darcy-Weisbach*. Elle est très utilisée pour les écoulements dans les conduites. Dans cette relation, le coefficient de frottement  $f$  dépend du nombre de *Reynolds*  $R$ , de la rugosité relative  $\varepsilon / R_h$ , mais aussi de la forme géométrique de la section de canal considéré. La relation (1.14) s'écrit souvent sous la forme :

$$V = \sqrt{8g / f} \sqrt{R_h i} \quad (1.15)$$

Ou bien :

$$V = C \sqrt{R_h i} \quad (1.16)$$

Avec :  $C = \sqrt{8g / f}$

La relation (1.16) est connue sous le nom de relation de *Chézy* et le coefficient  $C$  est appelé coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* dont la dimension est  $m^{1/2} s^{-1}$ . La relation (1.16) ne peut être utilisée que pour un écoulement turbulent rugueux.

### I.3. Calcul du coefficient $C$ de *Chézy*

Le coefficient  $C$  de *Chézy* est un paramètre dimensionnel ( $m^{1/2}/s$ ). Différentes formules, d'origine empirique, ont été proposées pour le calcul du coefficient  $C$  de *Chézy*. Les plus citées par la bibliographie sont celles de *Bazin* (1897) et de *Kutter*.

La formule de *Bazin* présente le coefficient  $C$  de *Chézy* comme une fonction du rayon hydraulique  $R_h$  et d'un coefficient  $m_B$ , dit coefficient de *Bazin*, dont l'unité est  $m^{1/2}$ . Selon *Bazin*, le coefficient  $C$  de *Chézy* est :

$$C = \frac{87}{1 + \left(m_B / \sqrt{R_h}\right)} \quad (1.17)$$

Le coefficient  $m_B$  de *Bazin* varie de  $m_B = 0,06 m^{1/2}$  pour un fond de canal lisse, à  $m_B = 1,75 m^{1/2}$  pour un lit de galets ou encombré d'herbe.

La formule de *Kutter* a la même forme que celle de *Bazin*. Elle exprime le coefficient  $C$  de *Chézy* par :

$$C = \frac{100}{1 + \left(m_K / \sqrt{R_h}\right)} \quad (1.18)$$

Où  $m_K$  est le coefficient de *Kutter* dont l'unité est  $m^{1/2}$ .

### I.4. Formule de *Manning*

La formule la plus utilisée en pratique est la formule de *Manning* (1891). Elle exprime la vitesse  $V$  de l'écoulement comme étant :

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (1.19)$$

Le coefficient  $n$  est appelé coefficient de *Manning* et son unité est  $m^{-1/3}s$ . La formule de *Manning* est simple mais elle ne doit être utilisée que pour les écoulements turbulents rugueux, correspond aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds* (*Graf et Altinakar, 1993*). Sous ces conditions, le coefficient  $n$  de *Manning* reste constant pour une rugosité donnée. Des tables de valeurs du coefficient  $n$  de *Manning* ont été établies par *Crausse* (1951). En règle générale  $n$  varie entre 0,012 et 0,15.

## I.5. Coefficient de frottement et vitesse moyenne de l'écoulement

Il est d'un grand intérêt pratique d'exprimer le coefficient de frottement de la relation (1.14) de *Darcy-Weisbach*, pour les écoulements turbulents dans les conduites et canaux. Pour les conduites circulaires de diamètre  $D$ , *Colebrook* (1937) a proposé de calculer le coefficient de frottement  $f$  par la relation :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{k_s / D}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.20)$$

Où  $k_s$  désigne le diamètre des grains de sable utilisés lors de l'expérimentation, que l'on note également par  $\varepsilon$  ou rugosité absolue, et  $R$  est le nombre de *Reynolds*. La relation (1.20) est applicable dans l'ensemble du domaine turbulent (lisse, transition et turbulent rugueux) et pour  $R > 2300$ . Compte tenu de son caractère implicite vis-à-vis de  $f$ , la relation (1.20) nécessite un procédé itératif.

L'application de la relation (1.20) a été généralisée aux canaux ouverts (*Silberman* et al., 1963) de diverses formes géométriques et de divers types de rugosité. Elle s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{k_s}{a R_h} + \frac{b}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.21)$$

où  $12 < a < 15$  et  $0 < b < 6$ .

Dans la relation (1.20) et lorsque le nombre de *Reynolds*  $R$  prend des valeurs élevées ( $R \rightarrow \infty$ ), le coefficient de frottement de frottement  $f$  ne dépend que de la rugosité relative  $k_s / D$ . L'écoulement est alors hydrauliquement rugueux. Lorsque  $k_s / D \rightarrow 0$ , le coefficient de frottement  $f$  ne dépend que du nombre de *Reynolds*  $R$  et l'écoulement est alors hydrauliquement lisse. Lorsque le coefficient de frottement  $f$  dépend à la fois de  $k_s / D$  et de  $R$ , l'écoulement est dans la zone d'écoulement de transition, zone intermédiaire entre l'écoulement hydrauliquement lisse et hydrauliquement rugueux.

En introduisant le rayon hydraulique  $R_h = D / 4$ , le nombre de *Reynolds*  $R$  s'écrit :

$$R = \frac{V(4R_h)}{\nu} \quad (1.22)$$

où  $V$  est la vitesse moyenne de l'écoulement et  $\nu$  est la viscosité cinématique du liquide en

écoulement. En tenant compte de (1.22), la relation (1.20) s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{k_s}{3,7(4R_h)} + \frac{2,51\nu}{V(4R_h)\sqrt{f}} \right) \quad (1.23)$$

La relation (1.23) est applicable aux conduites en charge de profil quelconque. Plusieurs auteurs ont tenté de généraliser la relation (1.23) aux canaux ouverts (*Bock*, 1966 ; *Marchi et Rubatta*, 1981). Le rayon hydraulique  $R_h$  peut représenter une infinité de canaux de profils géométriques différents. A titre d'exemple, si  $b_o$  et  $h_o$  sont respectivement la largeur et la hauteur d'un profil rectangulaire, le rayon hydraulique  $R_{ho}$  s'écrit :

$$R_{ho} = \frac{b_o h_o}{b_o + 2h_o} \quad (1.24)$$

Pour une hauteur donnée  $h$  et une largeur  $b$ , le rayon hydraulique  $R_h$  s'écrit :

$$R_h = \frac{bh}{b + 2h} \quad (1.25)$$

En égalant les relations (1.24) et (1.25), il vient :

$$\frac{bh}{b_o h_o} = \frac{b + 2h}{b_o + 2h_o} \quad (1.26)$$

La relation (1.26) peut également s'écrire :

$$\frac{bh}{b_o h_o} = \frac{b/b_o + 2h/b_o}{1 + 2h_o/b_o} \quad (1.27)$$

En introduisant la fonction  $\Phi = h_o / b_o$ , la relation (1.27) devient :

$$\frac{bh}{b_o h_o} = \frac{b/b_o + 2\Phi h/h_o}{1 + 2\Phi} \quad (1.28)$$

Ainsi, toute combinaison de  $h$  et de  $b$  satisfaisant la relation (1.28) conduit au même rayon hydraulique  $R_h$  (*Sinniger et Hager*, 1989).

*Bock* (1966) introduit le coefficient de forme  $\phi$  de la section qui dépend uniquement de la géométrie du profil du canal considéré :

$$\phi = R_{he} / R_h \quad (1.29)$$

où  $R_{he}$  est le rayon hydraulique effectif. Tenant compte de (1.29), la relation (1.23) s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{k_s}{3,7(4\phi R_h)} + \frac{2,51\nu}{V(4\phi R_h)\sqrt{f}} \right) \quad (1.30)$$

En régime d'écoulement turbulent lisse, *Bock* (1966) a proposé les relations suivantes pour le calcul du coefficient de forme  $\phi$  :

- Profil rectangulaire

$$\phi = \left[ \frac{1,629(h/b)}{1+2(h/b)} \right]^{1/4} \quad (1.31)$$

- Profil trapézoïdal pour une pente de talus  $m = \cotg\alpha \simeq 1$

$$\phi = \left[ 1,629(h/b) \frac{1+(h/mb)}{1+2\sqrt{1+m^2}(h/mb)} \right]^{1/4} \quad (1.32)$$

- Profil triangulaire dont la pente du talus est  $m$

$$\phi = (2,539m)^{0,15} \quad (1.33)$$

- Profil circulaire de diamètre  $D$

$$\phi = (h/D)^{1/4} \quad (1.34)$$

En tenant compte de la relation (1.14), la relation (1.30) permet alors d'exprimer la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement sous la forme :

$$V = -4\sqrt{2giR_h} \log \left( \frac{k_s}{14,8\phi R_h} + \frac{2,51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}} \right) \quad (1.35)$$

La relation (1.35) exprime la vitesse uniforme de l'écoulement dans les conduites et canaux.

### 1.5.1. Exemple d'application 1.1

Soit un canal rectangulaire de largeur  $b = 2m$ , siège d'un écoulement de profondeur  $h = 1,5m$ . Il est caractérisé par une pente longitudinale  $i = 0,001$  et une rugosité équivalente de sable  $k_s = 0,0005m$ . Le liquide en écoulement a une viscosité cinématique  $\nu = 0,000001m^2/s$ . Calculer la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement uniforme ainsi que le débit volume  $Q$ .

#### Solution

Le rayon hydraulique  $R_h = A/P$  est :

$$R_h = \frac{bh}{b+2h} = \frac{2 \times 1,5}{2 + 2 \times 1,5} = 0,6$$

Le paramètre  $h/b$  est :

$$h/b = 1,5/2 = 0,75$$

Selon la relation (1.31), le paramètre  $\phi$  est :

$$\phi = \left[ \frac{1,629(h/b)}{1+2(h/b)} \right]^{1/4} = \left( \frac{1,629 \times 0,75}{1+2 \times 0,75} \right)^{1/4} = 0,83610455$$

Ainsi, la relation (1.35) donne :

$$\begin{aligned} V &= -4\sqrt{2giR_h} \log \left( \frac{k_s}{14,8\phi R_h} + \frac{2,51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}} \right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,6} \times \\ &\quad \log \left( \frac{0,0005}{14,8 \times 0,83610455 \times 0,6} + \frac{2,51 \times 0,00001}{8 \times 0,83610455 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,6^3}} \right) \approx 1,795m/s \end{aligned}$$

Le débit volume  $Q$  est alors :

$$Q = VA = Vbh = 1,795 \times 2 \times 1,5 = 5,385m^3/s$$

En admettant  $\phi = 1$ , la vitesse moyenne  $V$  serait en vertu de la relation (1.35) :

$$\begin{aligned}
V &= -4\sqrt{2giR_h} \log\left(\frac{k_s}{14,8\phi R_h} + \frac{2,51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}}\right) \\
&= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,6} \times \\
&\quad \log\left(\frac{0,0005}{14,8 \times 1 \times 0,6} + \frac{2,51 \times 0,000001}{8 \times 1 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,6^3}}\right) \approx 1,828 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

L'écart relatif entre les deux valeurs ainsi calculées de la vitesse moyenne  $V$  n'est que de 1,84%. Nous pouvons donc conclure que l'effet de la forme du profil sur la vitesse moyenne  $V$  n'est que du second ordre.

### 1.5.2. Exemple d'application 1.2

Soit une conduite circulaire de diamètre  $D = 2\text{m}$ , siège d'un écoulement uniforme de profondeur  $h = 1\text{m}$ . Elle est caractérisée par une pente longitudinale  $i = 0,001$  et par une rugosité équivalente de sable  $k_s = 0,0005\text{m}$ . Le liquide en écoulement a une viscosité cinématique  $\nu = 0,000001\text{m}^2/\text{s}$ . Calculer la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement uniforme ainsi que le débit volume  $Q$ .

#### **Solution**

L'aire de la section mouillée  $A$  est :

$$A = \frac{D^2}{4} \left[ \cos^{-1}(1 - 2h/D) - 2(1 - 2h/D) \sqrt{h(1 - h/D)/D} \right]$$

avec  $h/D = 1/2 = 0,5$

soit :

$$A = \frac{2^2}{4} \times \left[ \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,5) - 2 \times (1 - 2 \times 0,5) \times \sqrt{0,5 \times (1 - 0,5)} \right] = 1,57079633\text{m}^2$$

Le périmètre mouillé  $P$  est :

$$P = D \cos^{-1}(1 - 2h/D) = 2 \times \cos^{-1}(1 - 2 \times 1/2) = 3,14159265\text{m}$$

Le rayon hydraulique  $R_h$  est :

$$R_h = A/P = 1,57079633 / 3,14159265 = 0,5$$



Selon la relation (1.34), le paramètre  $\phi$  est :

$$\phi = (h/D)^{1/4} = 0,5^{1/4} = 0,84089642$$

En application de la relation (1.35), la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement uniforme est :

$$\begin{aligned} V &= -4\sqrt{2giR_h} \log \left( \frac{k_s}{14,8\phi R_h} + \frac{2,51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}} \right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,5} \times \\ &\quad \log \left( \frac{0,0005}{14,8 \times 0,84089642 \times 0,5} + \frac{2,51 \times 0,000001}{8 \times 0,84089642 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,5^3}} \right) \approx 1,607 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Par suite, le débit volume  $Q$  est :

$$Q = VA = 1,607 \times 1,57079633 = 2,524 \text{ m}^3 / \text{s}$$

En admettant  $\phi = 1$ , la vitesse moyenne  $V$  serait en vertu de la relation (1.35) :

$$\begin{aligned} V &= -4\sqrt{2giR_h} \log \left( \frac{k_s}{14,8\phi R_h} + \frac{2,51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}} \right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,5} \times \\ &\quad \log \left( \frac{0,0005}{14,8 \times 1 \times 0,5} + \frac{2,51 \times 0,000001}{8 \times 1 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,5^3}} \right) \approx 1,637 \text{ m/s} \end{aligned}$$

L'écart relatif entre les deux valeurs ainsi calculées de la vitesse moyenne  $V$  n'est que de 1,82%. Nous pouvons encore conclure que l'effet de la forme du profil sur la vitesse moyenne  $V$  n'est que du second ordre.

Les exemples d'application que nous venons de considérer montrent clairement que l'effet du paramètre  $\phi$  sur la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme n'est pas significatif. Par conséquent, l'application de la relation (1.20) de *Colebrook* peut être étendue aux canaux ouverts, sans générer d'erreur relative significative. Dans cette relation, le diamètre  $D$  doit être remplacé par le diamètre hydraulique  $D_h$ , soit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{k_s / D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.36)$$

## I.6. Calcul de l'écoulement uniforme

### I.6.1. Relation générale du débit volume

La relation dimensionnelle du débit volume  $Q$  peut être écrite sous la forme (Achour et Bedjaoui, 2006) :

$$Q = \varphi(i, \varepsilon, A, R_h, \nu) \quad (1.37)$$

où  $i$  est la pente du canal considéré,  $\varepsilon$  est la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne du canal,  $A$  est l'aire de la section mouillée,  $R_h$  est le rayon hydraulique et  $\nu$  est la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Le système d'équations de base de l'écoulement turbulent en conduites ou canaux ouverts est composé de trois relations. La première relation est la relation (1.14) de *Darcy-Weisbach*, la seconde relation est la relation (1.36) de *Colebrook* dans laquelle  $k_s = \varepsilon$  et la troisième relation est celle de *Reynolds*  $R = 4Q / (P\nu)$ . La relation (1.14) de *Darcy-Weisbach* peut se mettre sous la forme :

$$i = \frac{f}{8g} \frac{P}{A^3} Q^2 \quad (1.38)$$

Pour toute forme de section de canal, l'aire de la section mouillée  $A$  ainsi que le périmètre mouillé  $P$  peuvent s'écrire respectivement :

$$A = L^2 A^* \quad (1.39)$$

$$P = LP^* \quad (1.40)$$

Dans les relations (1.39) et (1.40),  $L$  est une dimension linéaire quelconque telle que la largeur  $b$  d'un canal rectangulaire ou le diamètre  $D$  d'une conduite de forme circulaire. Les paramètres  $A^*$  et  $P^*$  sont des paramètres adimensionnels qui dépendent exclusivement du paramètre de forme de la section considérée. A titre d'exemple, l'aire de la section mouillée  $A$  d'une section rectangulaire de largeur  $b$  et dont la profondeur de l'écoulement est  $h$  s'écrit  $A = bh = b^2 (h/b)$  et par suite  $L = b$  et  $A^* = h/b$ . Le périmètre mouillé  $P$  est  $P = b + 2h = b(1 + 2h/b)$ , par suite  $P^* = 1 + 2h/b$ .

En tenant compte des relations (1.39) et (1.40), la relation (1.38) permet d'écrire que :

$$L = (f/8)^{1/5} \left( Q / \sqrt{gi} \right)^{2/5} \left( P^* / A^{*3} \right)^{1/5} \quad (1.41)$$

La relation (1.40) permet d'écrire que le nombre de *Reynolds*  $R$  est :

$$R = \frac{4Q}{LP^*v} \quad (1.42)$$

Avec l'indice «  $r$  », on se réfère à un canal de référence rugueux caractérisé par une rugosité relative  $\varepsilon_r / R_{hr} = 0,148$  arbitrairement choisie. En outre, en admettant que l'écoulement est dans le domaine turbulent rugueux, le coefficient de frottement  $f_r$  est donné par la relation (1.34) de *Colebrook* pour  $R \rightarrow \infty$ , impliquant que  $f_r = 1/16$ . Ainsi, avec l'aide des relations (1.39) et (1.40), la relation (1.38) permet de déduire que la dimension linéaire  $L_r$  du modèle rugueux est :

$$L_r = 128^{-1/5} \left( Q_r / \sqrt{g i_r} \right)^{2/5} \left( P_r^* / A_r^{*3} \right)^{1/5} \quad (1.43)$$

En se basant sur la relation (1.42), le nombre de *Reynolds*  $R_r$  de l'écoulement dans le canal rugueux s'écrit :

$$R_r = \frac{4Q_r}{L_r P_r^* v} \quad (1.44)$$

En éliminant le débit volume  $Q_r$  entre les relations (1.43) et (1.44), il vient que :

$$R_r = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i_r} L_r^3}{v} \left( A_r^* / P_r^* \right)^{3/2} \quad (1.45)$$

La relation (1.45) peut également s'écrire, en ayant recours aux relations (1.39) et (1.40) :

$$R_r = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i_r} R_{hr}^3}{v} \quad (1.46)$$

Admettons que  $i_r = i$ ,  $L_r = L$ ,  $Q_r \neq Q$ , impliquant que  $R_r \neq R$ , et que le paramètre de forme de la section mouillée du canal rugueux soit le même que celui du canal considéré. Alors, nous pouvons écrire  $A_r^* = A^*$ ,  $P_r^* = P^*$  et  $R_{hr} = R_h$ . En comparant les relations (1.41) et (1.43), il vient que :

$$Q = \psi_Q Q_r \quad (1.47)$$

Avec :

$$\psi_Q = \frac{1}{4\sqrt{f}} \quad (1.48)$$

$$Q_r = 8\sqrt{2g}\sqrt{iL^5} \left( A_r^{*3} / P_r^* \right)^{1/2} \quad (1.49)$$

Au regard de la relation (1.47), il apparaît que le débit volume  $Q$  est égal au débit volume  $Q_r$  corrigé par les effets du facteur  $\psi_Q$ . Celui-ci peut donc être considéré comme le facteur adimensionnel de correction du débit. La relation (1.49) peut s'écrire plus simplement :

$$Q_r = 8\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \quad (1.50)$$

La relation (1.50) se présente sous la forme de la relation de *Chézy*, avec un coefficient de *Chézy* tel que  $C_r = 8\sqrt{2g}$ .

La combinaison des relations (1.42), (1.44) et (1.47) permet de déduire que :

$$R = \psi_Q R_r \quad (1.51)$$

En insérant les relations (1.48) et (1.51) dans la relation (1.36) pour  $k_s = \varepsilon$ , il vient que :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R_r} \right) \quad (1.52)$$

En ayant recours aux relations (1.51) et (1.52), nous obtenons :

$$R = -\frac{1}{2} R_r \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R_r} \right) \quad (1.53)$$

En combinant les relations (1.47), (1.50) et (1.52), le débit volume  $Q$  s'exprime alors par :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R_r} \right) \quad (1.54)$$

Le nombre de *Reynolds*  $R_r$  est donné soit par la relation (1.44) pour  $Q_r = Q$ ,  $L_r = L$  et  $P_r^* = P^*$ , ou par la relation (1.46) pour  $i_r = i$  et  $R_{hr} = R_h$ , soit :

$$R_r = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (1.55)$$

La relation (1.54) permet de calculer le débit volume  $Q$  écoulé par une conduite ou un canal

de forme quelconque. Elle est application dans l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent, correspondant à  $R > 2300$ .

### I.6.2. Expression générale du coefficient $C$ de *Chézy* et $n$ de *Manning*

En éliminant le facteur  $\psi_Q$  entre les relations (1.48) et (1.52), le coefficient de frottement  $f$  s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R_r} \right) \quad (1.56)$$

Lorsque  $i, \varepsilon, \nu$  et  $R_h$  sont donnés, la relation (1.56) permet de calculer la valeur exacte du coefficient de frottement  $f$  pour  $R > 2300$ . Tenant compte de la relation (1.56), le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*  $C = \sqrt{8g/f}$  s'écrit :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R_r} \right) \quad (1.57)$$

Tenant compte de la relation (1.52), la relation (1.57) peut s'écrire :

$$C = C_r \psi_Q \quad (1.58)$$

D'autre part, en comparant la relation (1.54) avec la relation de *Manning*, nous pouvons aisément déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{1/6} \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R_r} \right) \quad (1.59)$$

Tenant compte de la relation (1.52), la relation (1.59) s'écrit sous la forme :

$$n = n_r \psi_Q^{-1} \quad (1.60)$$

où :

$$n_r = \frac{R_h}{8\sqrt{2g}} \quad (1.61)$$

### I.6.3. Application au canal de forme rectangulaire

L'aire de la section mouillée  $A$  dans un canal rectangulaire de largeur  $b$  et dont l'écoulement est de profondeur normale  $y_n$  s'écrit :

$$A = by_n \quad (1.62)$$

La relation (1.62) peut également s'écrire, en considérant le paramètre de forme  $\eta = b / y_n$  :

$$A = \eta b^2 \quad (1.63)$$

Le périmètre mouillé  $P$  s'écrit :

$$P = b + 2y_n$$

ou bien :

$$P = b(1 + 2\eta) \quad (1.64)$$

En combinant les relations (1.63) et (1.64), le rayon hydraulique  $R_h = A / P$  s'écrit :

$$R_h = b \frac{\eta}{1 + 2\eta} \quad (1.65)$$

En tenant compte des relations (1.64) et (1.65), la relation de *Chézy* devient :

$$Q = CA\sqrt{R_h i} = C\eta b^2 \sqrt{b \frac{\eta}{1 + 2\eta} i}$$

Soit :

$$Q = C\eta b^{5/2} \sqrt{\frac{\eta}{1 + 2\eta}} \sqrt{i} \quad (1.66)$$

Introduisons le paramètre adimensionnel :

$$\bar{C} = \frac{Q}{Cb^{5/2}\sqrt{i}} \quad (1.67)$$

La relation (1.66) s'écrit alors :

$$\bar{C} = \frac{\eta^{3/2}}{1+2\eta} \quad (1.68)$$

En élevant au carré les deux membres de la relation (1.68), nous obtenons l'équation de troisième degré suivante :

$$\eta^3 - 2\eta\bar{C}^2 - \bar{C}^2 = 0 \quad (1.69)$$

L'équation (1.69) ne possède pas de terme du second ordre. Son discriminant est alors :

$$\Delta = \frac{\bar{C}^4}{4} \left( 1 - \frac{27}{32} \bar{C}^2 \right)$$

L'étude du discriminant  $\Delta$ , en particulier son signe, montre que deux racines de l'équation (1.69) ont une signification physique. En effet :

- i. Lorsque  $\bar{C} \geq \sqrt{27/32}$ , alors  $\Delta \leq 0$ . Dans ce cas, la racine réelle de l'équation (1.69) est :

$$\eta = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \bar{C} \cos \frac{\beta}{3} \quad (1.70)$$

où l'angle  $\beta$  est tel que :

$$\cos \beta = \frac{1}{\bar{C}} \sqrt{\frac{27}{32}} \quad (1.71)$$

- ii. Lorsque  $\bar{C} \leq \sqrt{27/32}$ , alors  $\Delta \geq 0$ . Dans ce cas, la racine réelle de l'équation (1.69) est :

$$\eta = \left( \frac{\bar{C}^2}{2} \right)^{1/3} \left[ \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{C}^2} \right)^{1/3} + \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{C}^2} \right)^{1/3} \right] \quad (1.72)$$

Ainsi, à partir des valeurs connues des variables  $Q$ ,  $C$ ,  $b$  et  $i$ , les relations (1.70), (1.71) et (1.72) permettent, de manière explicite, le calcul de la profondeur relative normale  $\eta = y_n / b$  et donc de la profondeur normale  $y_n$ .

Pour calculer la profondeur relative normale à partir des équations (1.70), (1.71) et (1.72), il est nécessaire d'évaluer le paramètre  $\bar{C}$  et donc le coefficient  $C$  de Chézy. Les étapes suivantes sont recommandées pour une démarche correcte du calcul, à partir des valeurs connues des paramètres  $Q$ ,  $i$ ,  $b$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$  :

- a) Connaissant la valeur des paramètres  $Q$ ,  $i$ ,  $b$  et sachant que  $C_r = 8\sqrt{2g}$ , la variable adimensionnelle  $\bar{C}_r = Q / (C_r b^{5/2} \sqrt{i})$  est alors calculée.
- b) Pour  $\bar{C} = \bar{C}_r$ , les relations (1.70), (1.71) et (1.72) donnent la valeur de la profondeur relative normale  $\eta_r$  dans le modèle rugueux, sous l'hypothèse d'un régime d'écoulement turbulent rugueux.
- c) A partir des valeurs ainsi connues de  $b$  et de  $\eta_r$ , les relations (1.64) et (1.65) permettent de calculer le périmètre mouillé  $P_r$  et le rayon hydraulique  $R_{hr}$  respectivement.
- d) Les valeurs connues de  $Q$ ,  $P_r$  et  $\nu$  permettent le calcul aisé du nombre de Reynolds  $R_r$  en application de la relation  $R_r = 4Q / (P_r \nu)$ .
- e) Avec les valeurs connues des paramètres  $R_{hr}$ ,  $R_r$  et  $\varepsilon$ , le paramètre adimensionnel  $\psi$  est calculé selon la relation suivante (Achour et Bedjaoui, 2006) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / R_{hr}}{19} + \frac{8,5}{R_r} \right) \right]^{-2/5} \quad (1.73)$$

- f) Compte tenu des valeurs connues de  $R_{hr}$ ,  $R_r$ ,  $\varepsilon$  et  $\psi$ , le coefficient  $C$  de Chézy est alors déduit de la relation :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left( \frac{\varepsilon / R_{hr}}{14,8\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} R_r} \right) \quad (1.74)$$

- g) Les relations (1.70), (1.71) et (1.72) donnent la valeur recherchée de la profondeur relative normale  $\eta$ , après avoir évalué le paramètre adimensionnel  $\bar{C} = Q / (C b^{5/2} \sqrt{S_o})$ .

### Exemple d'application

Soit un canal rectangulaire de largeur  $b = 1,5m$  écoule un débit volume  $Q = 0,79m^3 / s$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} m^2 / s$ , sous une pente  $i = 0,0001$ . La paroi interne du canal est caractérisée par une rugosité absolue  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Déterminer la valeur de la profondeur normale  $y_n$ .

#### I.7. Solution

- i. Calculons la valeur du paramètre adimensionnel  $\bar{C}_r = Q / (C_r b^{5/2} \sqrt{i})$  où  $C_r = 8\sqrt{2g}$  :

$$C_r = 8\sqrt{2g} = 35,43557534m^{1/2} / s$$

$$\bar{C}_r = Q / (C_r b^{5/2} \sqrt{i}) = 0,79 / (35,43557534 \times 1,5^{5/2} \times \sqrt{0,0001}) = 0,809020367m^{1/2} / s$$

- ii. Nous pouvons constater que  $\bar{C}_r \leq \sqrt{27/32}$ . La profondeur relative normale  $\eta_r$  est alors



donnée par la relation (1.72), soit :

$$\begin{aligned} \eta_r &= \left( \frac{\bar{C}^2}{2} \right)^{1/3} \left[ \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{C}^2} \right)^{1/3} + \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{C}^2} \right)^{1/3} \right] \\ &= \left( \frac{0,809020367^2}{2} \right)^{1/3} \times \left[ \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,809020367^2} \right)^{1/3} + \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,809020367^2} \right)^{1/3} \right] = 1,340614511 \end{aligned}$$

iii. Le périmètre mouillé  $P_r$  dans le modèle rugueux est :

$$P_r = b(1 + 2\eta_r) = 1,5 \times (1 + 2 \times 1,340614511) = 5,521843532m$$

iv. Le nombre de Reynolds  $R_r$  de l'écoulement dans le modèle rugueux est :

$$R_r = 4Q / (P_r \nu) = 4 \times 0,79 / (5,521843532 \times 10^{-6}) = 572272,6444$$

v. Le paramètre adimensionnel  $\psi$  est, selon la relation (1.73) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / R_{hr}}{19} + \frac{8,5}{R_r} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{8,5}{572272,6444} \right) \right]^{-2/5} = 0,719151253$$

vi. Le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy est, selon la relation (1.74) :

$$\begin{aligned} C &= -4\sqrt{2g} \log \left( \frac{\varepsilon / R_{hr}}{14,8\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} R_r} \right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left( \frac{10,04}{0,719151253^{3/2} \times 572272,6444} \right) = 80,45823914m^{1/2} / s \end{aligned}$$

vii. Le paramètre adimensionnel  $\bar{C}$  est, selon la relation (1.67) :

$$\bar{C} = \frac{Q}{Cb^{5/2}\sqrt{i}} = \frac{0,79}{80,45823914 \times 1,5^{5/2} \times \sqrt{0,0001}} = 0,356310335$$

viii. Nous constatons que  $\bar{C} \leq \sqrt{27/32}$  et la profondeur relative normale  $\eta_r$  est donnée par la relation (1.72) :

$$\eta = \left( \frac{\bar{C}^2}{2} \right)^{1/3} \left[ \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{C}^2} \right)^{1/3} + \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{C}^2} \right)^{1/3} \right]$$

$$= \left( \frac{0,356310335^2}{2} \right)^{1/3} \times \left[ \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,356310335^2} \right)^{1/3} + \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,356310335^2} \right)^{1/3} \right] = 0,66660814025$$

La profondeur normale  $y_n$  recherchée est par suite :

$$y_n = b\eta = 1,5 \times 0,66660814025 = 0,99991221m \approx 1m$$

## I.7. Conclusion

Le présent chapitre a eu pour objectif principal de donner un aperçu sur l'écoulement uniforme, tant sur le plan théorique que pratique. A travers un schéma simplifié, nous avons expliqué le concept d'uniformité. Les équations du mouvement ont pu mener à la relation de *Darcy-Weisbach* et à celle de *Chézy* dont le coefficient de résistance à l'écoulement est déterminé selon les approches de *Bazin* et de *Kutter*. La relation de *Manning* a été présentée et nous avons indiqué qu'elle ne s'appliquait que pour les écoulements turbulents rugueux. Le coefficient de frottement  $f$  de l'écoulement a été exprimé sous la forme d'une relation générale, applicable aux conduites et canaux. Pour les conduites et canaux fermés en charge, la formule de *Colebrook* demeure valable. L'influence du facteur de forme sur le coefficient de frottement et la vitesse moyenne de l'écoulement n'est que du second ordre, de telle sorte que la formule de *Colebrook* est généralisable aux canaux et conduites à surface libre. Un exemple d'application numérique a pu confirmer le second ordre de l'influence de ce facteur de forme. La relation générale du débit volume, valable pour toutes les formes de conduites et de canaux, a été déduite du modèle rugueux de référence. Elle exprime le débit volume sous la forme dimensionnelle  $Q = \varphi(i, \varepsilon, A, R_h, \nu)$ . Grace au modèle rugueux de référence, le nombre de *Reynolds* a pu être présenté en fonction de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement dans ce modèle. De la même manière, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* et le coefficient de rugosité de *Manning* ont été exprimés suivant une relation de validité générale. Elle s'applique à toutes les formes de conduites et de canaux, dans l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent. Les relations obtenues ont été appliquées au cas du canal de forme rectangulaire et ont eu pour objectif principal la détermination de la profondeur normale de l'écoulement.

## II. ECOULEMENT UNIFORME DANS UNE CONDUITE DE FORME OVOIDALE

### II.1. Introduction

Au cours de ce chapitre de notre mémoire, l'étude de l'écoulement uniforme dans la conduite de forme ovoïdale est présentée. Après avoir donné les caractéristiques géométriques de la conduite et hydrauliques de l'écoulement, tels que le rayon hydraulique, le périmètre mouillé et l'aire de la section mouillée, leur variation est représentée graphiquement et comparée à celle de la conduite circulaire.

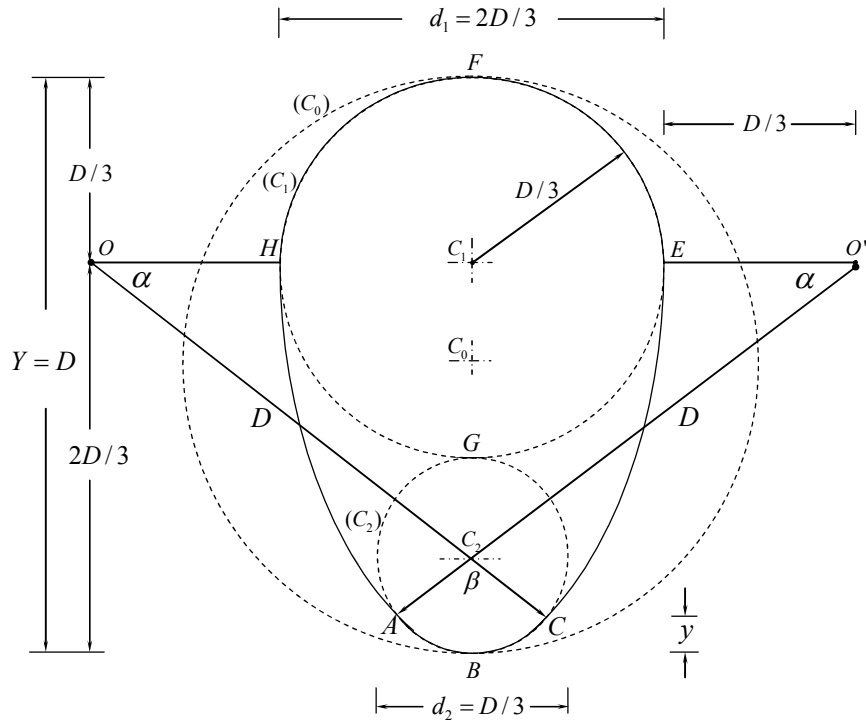
Dans un premier temps, l'écoulement uniforme dans la conduite de forme ovoïdale est étudié à coefficients de résistance de *Chézy* et de *Manning* constants, puis à coefficients de résistance variables dans un second temps. A coefficients de résistances constants, la conductivité relative est déduite des relations de *Chézy* et de *Manning* et sa représentation graphique montre une courbe unique passant par un maximum. A coefficients de résistance variables, la conductivité relative est déduite de la formule d'Achour et de *Bedjaoui* (2006) et dont la représentation graphique se traduit par une série de courbes passant chacune par un maximum. Les courbes obtenus sont discutées et commentées et leurs principales caractéristiques sont déterminées.

Les courbes de remplissage de la conduite à coefficients de résistance constants et variables font l'objet d'une étude particulière et des relations approchées sont proposées pour le calcul de la profondeur normale.

Les coefficients de *Chézy* et de *Manning* sont déterminés en ayant recours à la méthode du modèle rugueux de référence (*Achour*, 2007). Leur représentation graphique est analysée et des conclusions intéressantes sont tirées. Des exemples d'application pratiques sont proposés pour mieux illustrer la méthode préconisée.

### II.2. Caractéristiques géométriques

L'une des formes de la conduite ovoïdale considérées dans la présente étude est celle représentée par la figure 2.1. La conduite est caractérisée par une hauteur  $D$  correspondant au diamètre du cercle ( $C_0$ ) et de centre  $C_0$ .



**Figure 2.1** : Schéma de définition de la conduite ovoïdale

i. En considérant le triangle  $(\triangle O'C_2C_1)$ , nous pouvons écrire que :

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\overrightarrow{C_1C_2}}{\overrightarrow{C_1O'}} = \frac{\overrightarrow{C_1G} + \overrightarrow{GC_2}}{\overrightarrow{C_1E} + \overrightarrow{EO'}} = \frac{D/3 + D/6}{D/3 + D/3} = \frac{3}{4} = 0,75$$

soit :

$$\alpha = 36,8698976^\circ, \text{ ou bien } \alpha = 0,64350111 \text{ radian}$$

Par suite, le triangle  $(\triangle OC_2O')$  permet d'écrire que :

$$\beta = 180 - 2\alpha = 180 - 2 \times 36,8698976 = 106,260205^\circ, \text{ ou bien } \beta = 1,85459044 \text{ radian}$$

ii.  $\overrightarrow{C_2A} = \overrightarrow{C_2C} = D/6$

iii. Le triangle  $(\triangle AC_2C)$  permet d'écrire que :

$$\cos(\beta/2) = \frac{\overrightarrow{C_2B} - y}{\overrightarrow{C_2C}} = \frac{D/6 - y}{D/6} = 1 - 6y/D$$

soit :

$$\frac{y}{D} = \frac{1 - \cos(\beta/2)}{6} = \frac{1 - \cos(1,85459044/2)}{6} = \frac{1 - 0,6}{6} = \frac{1}{15}$$

En outre, il est possible d'écrire que :

$$\sin(\beta/2) = \frac{\overline{AC}/2}{\overline{C_2C}} = \frac{\overline{AC}/2}{D/6}$$

soit :

$$\overline{AC} = \frac{D}{3} \sin(\beta/2) = \frac{D}{3} \times \sin(1,85459044/2) = \frac{D}{3} \times 0,8 = \frac{4}{15} D$$

iv. La longueur de l'arc  $\widehat{ABC}$  est :

$$\widehat{ABC} = \frac{D}{3} \times \frac{\beta}{2} = \frac{D}{6} \beta = \frac{D}{6} \times 1,85459044 = 0,30909841 D$$

v. La longueur de l'arc  $\widehat{HA}$ , égale à celle de l'arc  $\widehat{EC}$ , est :

$$\widehat{HA} = 2D \times \frac{\alpha}{2} = \alpha D = 0,64350111 D$$

vi. La longueur de l'arc  $\widehat{EFH}$ , moitié du périmètre du cercle ( $C_1$ ) est :

$$\widehat{EFH} = \pi \frac{2D/3}{2} = \frac{\pi D}{3} = 1,04719755 D$$

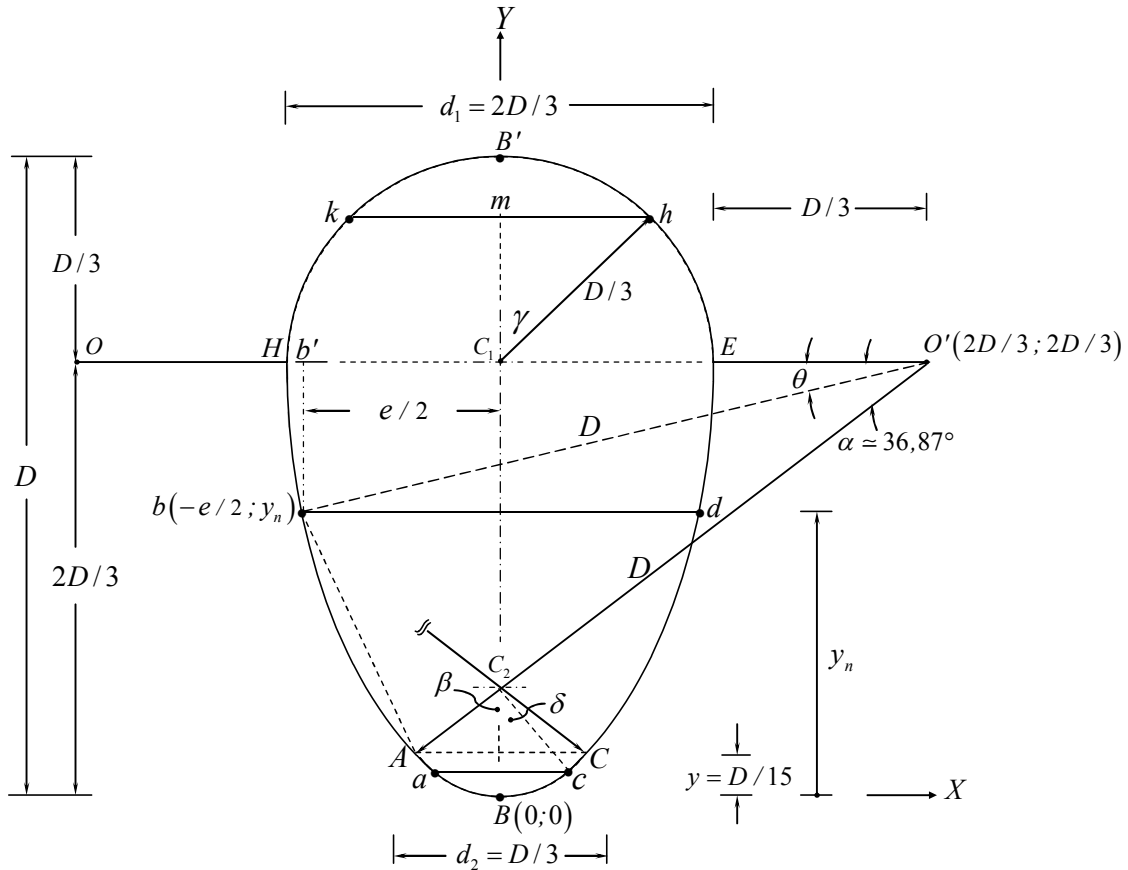
### II.3. Caractéristiques de l'écoulement

Les caractéristiques de l'écoulement, telle que l'aire de la section mouillée  $A$ , le périmètre mouillé  $P$ , la largeur du plan d'eau  $e$  ou le rayon hydraulique  $R_h$  dépendent du taux de remplissage  $\eta = y_n / D$  où  $y_n$  est la profondeur normale de l'écoulement. En outre, ces caractéristiques s'expriment par différentes relations selon le lieu géométrique de l'écoulement. Il n'existe de nos jours aucune relation unique permettant d'évaluer l'aire de la section mouillée  $A$  pour un taux de remplissage  $0 \leq \eta \leq 1$  (Figure 2.2). C'est le cas également de toutes les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement. La figure 2.2 montre les trois espaces géométriques que peut occuper l'écoulement, selon la valeur du taux de remplissage  $\eta = y_n / D$ . C'est ainsi que si :

- $\eta \leq 1/15$ , l'écoulement, de plan d'eau  $\overline{ac}$ , se situe dans la partie circulaire la plus basse de la conduite.
- $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ , l'écoulement, de plan d'eau  $\overline{bd}$ , se situe dans l'espace délimité par les arcs de cercle  $\widehat{HA}$  et  $\widehat{EC}$ .

- $2/3 \leq \eta \leq 1$ , l'écoulement, de plan d'eau  $\overline{kh}$ , se situe dans la partie circulaire la plus haute de la conduite.

Les caractéristiques de l'écoulement doivent donc être déterminées pour chacun des trois cas ci-dessus indiqués.



**Figure 2.2 :** Schéma de définition de l'état de l'écoulement dans la conduite de forme ovoïdale.

i.  $\eta \leq 1/15$

**a) Largeur du plan d'eau**

Lorsque  $\eta \leq 1/15$ , la largeur du plan d'eau  $e$  correspond à la corde  $\overline{ac}$ . Les points  $a$  et  $b$  appartiennent au cercle  $(C_2)$ , de centre  $C_2$  et de diamètre  $d_2 = D/3$ . Ainsi :

$$e = \frac{D}{3} \sin(\delta)$$

ou bien :

$$e = \frac{D}{3} \sqrt{1 - \cos^2(\delta)}$$

où l'angle  $\delta$  est le demi angle au centre, tel que :

$$\cos(\delta) = 1 - 2 \frac{y_n}{D/3} = 1 - 6\eta$$

ou tel que :

$$\sin(\delta) = \sqrt{1 - \cos^2(\delta)} = 2\sqrt{3\eta(1-3\eta)}$$

Finalement, la largeur du plan d'eau  $e$  est :

$$e = \frac{2D}{3} \sqrt{3\eta(1-3\eta)} \quad (2.1)$$

### **b) Périmètre mouillé**

Le périmètre mouillé  $P$  correspond à la longueur de l'arc  $\widehat{aBc}$ , appartenant au cercle  $(C_2)$ , de centre  $C_2$  et de diamètre  $d_2 = D/3$ . Ainsi :

$$P = \frac{D}{3} \delta$$

Soit :

$$P = \frac{D}{3} \cos^{-1}(1 - 6\eta) \quad (2.2)$$

Définissons la fonction :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 6\eta) \quad (2.3)$$

La relation (2.2) devient alors :

$$P = \frac{D}{3} \sigma(\eta) \quad (2.4)$$

### **c) Aire de la section mouillée**

L'aire de la section mouillée  $A$  correspond à l'aire du segment circulaire  $aBca$ , appartenant au cercle  $(C_2)$ , de centre  $C_2$  et de diamètre  $d_2 = D/3$ . Ainsi :

$$A = \frac{(D/3)^2}{4} [\delta - \sin(\delta) \cos(\delta)]$$

Soit :

$$A = \frac{D^2}{36} \left[ \cos^{-1}(1-6\eta) - 2(1-6\eta)\sqrt{3\eta(1-3\eta)} \right] \quad (2.5)$$

Définissons la fonction :

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{2(1-6\eta)\sqrt{3\eta(1-3\eta)}}{\cos^{-1}(1-6\eta)} \quad (2.6)$$

La relation (2.5) permet alors d'écrire que :

$$A = \frac{D^2}{36} \sigma(\eta) \varphi(\eta) \quad (2.7)$$

#### **d) Rayon hydraulique**

Les relations (2.4) et (2.7) permettent de déduire que le rayon hydraulique  $R_h = A/P$  est :

$$R_h = \frac{D}{12} \varphi(\eta) \quad (2.8)$$

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

#### **a) Largeur du plan d'eau**

Lorsque  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ , la largeur du plan d'eau  $e$  correspond à  $\overline{bd}$  (Figure 2.2). Le point  $b$  appartient au cercle de centre  $O'$  et de rayon  $D$ . L'équation de ce cercle est :

$$(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 = D^2 \quad (2.9)$$

où  $x_o$  et  $y_o$  sont les coordonnées du point  $O'$ . Dans le système d'axes  $XY$  de la figure 2.2, le point  $O'$  a pour coordonnées  $x_o = 2D/3$  et  $y_o = 2D/3$ . Dans le même système d'axes, le point  $b$  a pour coordonnées  $x = -e/2$  et  $y = y_n$ . La relation (2.9) s'écrit alors :

$$\left( \frac{e}{2} + \frac{2D}{3} \right)^2 + \left( y_n - \frac{2D}{3} \right)^2 = D^2$$

En divisant les deux membres de cette équation par  $D^2$ , il vient que :



$$\left(\frac{e}{2D} + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{y_n}{D}\right)^2 = 1$$

ou bien :

$$\left(\frac{e}{2D} + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2 = 1$$

La largeur du plan d'eau  $e$  est donc :

$$e = 2D \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{2}{3} \right] \quad (2.10)$$

### **b) Périmètre mouillé**

Lorsque  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ , le périmètre mouillé  $P$  correspond à deux fois la longueur de l'arc  $\widehat{bA}$ , à laquelle il faut ajouter la longueur de l'arc de cercle  $\widehat{ABC}$ . La longueur de l'arc  $\widehat{bA}$  est égale à la différence des longueurs des arcs  $\widehat{HA}$  et  $\widehat{Hb}$ . La longueur de l'arc  $\widehat{ABC}$  a été évaluée à l'étape *iv* du paragraphe précédent, soit  $\widehat{ABC} = 0,30909841D$ . La longueur de l'arc  $\widehat{HA}$  a été quant à elle évaluée à l'étape *v*, soit  $\widehat{HA} = 0,64350111D$ .

Pour évaluer la longueur de l'arc  $\widehat{bA}$ , écrivons d'abord que dans le triangle droit  $\triangle O'bb'$  :

$$\sin(\theta) = \frac{2D/3 - y_n}{D}$$

Soit :

$$\sin(\theta) = \frac{2}{3} - \eta \quad (2.11)$$

Ou bien :

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) \quad (2.12)$$

L'angle  $\theta$  ainsi défini varie entre  $0^\circ$  et  $36,8698976^\circ$ , valeur correspondant à celle de l'angle  $\alpha$ .

Notons également que dans le triangle droit  $\triangle O'bb'$  :

$$\cos(\theta) = \frac{e/2 + 2D/3}{D} = \frac{e}{2D} + \frac{2}{3}$$

Soit, en tenant compte de la relation (2.10) :

$$\cos(\theta) = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} \quad (2.13)$$

La longueur de l'arc  $\widehat{Hb}$  est par suite :

$$\widehat{Hb} = 2D \frac{\theta}{2} = D\theta$$

ou bien :

$$\widehat{Hb} = D \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right)$$

La longueur de l'arc  $\widehat{bA}$  est par suite :

$$\widehat{bA} = \widehat{HA} - \widehat{Hb} = 0,64350111D - D \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = D \left[ 0,64350111 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \right]$$

Le périmètre mouillé  $P$  est donc tel que :

$$P = 2\widehat{bA} + \widehat{ABC}$$

Soit :

$$P = 2D \left[ 0,64350111 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \right] + 0,30909841D$$

Ou bien :

$$P = D \left[ 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \right] \quad (2.14)$$

Définissons la fonction :

$$\mathcal{G}(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \quad (2.15)$$

La relation (2.14) s'écrit alors plus simplement :

$$P = D \vartheta(\eta) \quad (2.16)$$

**c) Aire de la section mouillée**

L'aire de la section mouillée  $A$  correspondant à  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$  est définie par l'espace  $bdBb$  de la figure 2.2. L'aire de la section mouillée  $A$  peut être décomposée en trois aires qui sont :

- $2A_o$ , où  $A_o$  est l'aire de la section du segment circulaire  $bAb$ .
- $A_1$ , l'aire du trapèze  $bdCA$  dont les caractéristiques sont :
  - Grande base = largeur du plan d'eau =  $e$ , définie par la relation (2.10)
  - Petite base =  $\overline{AC} = \frac{4}{15}D$ , déterminée à l'étape *iii* du paragraphe précédent.
  - Hauteur =  $y_n - \frac{D}{15}$ .
- $A_2$ , l'aire du segment circulaire  $ACBA$  qui s'exprime par la relation (2.5) pour  $\eta = 1/15$ .

L'aire de la section  $A$  recherchée est donc :

$$A = 2A_o + A_1 + A_2$$

L'aire du segment circulaire  $bAb$  appartient au cercle de centre  $O'$ , de rayon  $D$  et d'angle au centre  $(\alpha - \theta)$ . Nous pouvons ainsi écrire que, pour  $\alpha$  et  $\theta$  exprimés en radian :

$$A_o = \frac{D^2}{2} [(\alpha - \theta) - \sin(\alpha - \theta)]$$

ou bien :

$$2A_o = D^2 [(\alpha - \theta) - \sin(\alpha - \theta)] \quad (2.17)$$

La quantité  $\sin(\alpha - \theta)$  peut s'écrire :

$$\sin(\alpha - \theta) = \sin(\alpha)\cos(\theta) - \cos(\alpha)\sin(\theta) \quad (2.18)$$

L'angle  $\alpha$  a été évalué au cours de l'étape  $i$  du paragraphe précédent, soit  $\alpha = 0,64350111$  radian. Ceci permet d'écrire que :

$$\sin(\alpha) = \sin(0,64350111) = 3 / 5$$

$$\cos(\alpha) = \cos(0,64350111) = 4 / 5$$

En tenant compte des relations (2.11) et (2.13), la relation (2.18) s'écrit alors :

$$\sin(\alpha - \theta) = \frac{3}{5} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{5} \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \quad (2.19)$$

Avec la valeur de  $\alpha = 0,64350111$  radian et en ayant recours aux relations (2.12) et (2.19), la relation (2.17) devient :

$$2A_o = D^2 \left[ 0,64350111 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \frac{3}{5} \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{5} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \right]$$

Ou bien :

$$2A_o = D^2 \left[ 1,17683444 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \frac{3}{5} \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{5} \eta \right] \quad (2.20)$$

L'aire de la section mouillée  $A_1$  du trapèze  $bdCA$  s'écrit :

$$A_1 = \frac{(e + 4D/15)}{2} (y_n - D/15) \quad (2.21)$$

ou bien :

$$A_1 = \left( \frac{e}{2D} + \frac{2}{15} \right) \left( \eta - \frac{1}{15} \right) D^2 \quad (2.22)$$

En tenant compte de la relation (2.10), la relation (2.22) devient :

$$A_1 = \left( \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{8}{15} \right) \left( \eta - \frac{1}{15} \right) D^2 \quad (2.23)$$

Après réarrangements, la relation (2.23) mène à :

$$A_1 = \left[ 0,03555556 + \eta \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{1}{15} \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{8}{15} \eta \right] D^2 \quad (2.24)$$

L'aire  $A_2$  du segment circulaire  $ACBA$  est donnée par la relation (2.5) pour  $\eta = 1/15$ , soit :

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{D^2}{36} \left[ \cos^{-1}(1 - 6\eta) - 2(1 - 6\eta) \sqrt{3\eta(1 - 3\eta)} \right] \\ &= \frac{D^2}{36} \times \left[ \cos^{-1}(1 - 2/5) - 2 \times (1 - 2/5) \times \sqrt{1 \times (1 - 1/5) / 5} \right] \end{aligned}$$

Le calcul mène à :

$$A_2 = 0,0124248867 D^2 \quad (2.25)$$

Finalement, l'aire recherchée  $A = 2A_o + A_1 + A_2$  est, compte tenu des relations (2.20), (2.24) et (2.25) :

$$A = \left[ 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3} \eta \right] D^2 \quad (2.26)$$

Définissons, par souci de simplification d'écriture, la fonction :

$$\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3} \eta \quad (2.27)$$

La relation (26) s'écrit alors :

$$A = D^2 \zeta(\eta) \quad (2.28)$$

#### **d) Rayon hydraulique**

Le rayon hydraulique  $R_h = A / P$  s'écrit, en ayant recours aux relations (2.16) et (2.28) :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \quad (2.29)$$

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

#### **a) Largeur du plan d'eau**

Lorsque  $2/3 \leq \eta \leq 1$ , la largeur du plan d'eau  $e$  correspond à la longueur du segment  $\overline{kh}$ .

Dans le triangle droit  $\triangle C_1mh$ , nous pouvons écrire que :

$$\overline{mh} = e/2 \quad (2.30)$$

$$\overline{mC_1} = y_n - 2D/3 \quad (2.31)$$

$$\overline{mh}^2 + \overline{mC_1}^2 = (D/3)^2 \quad (2.32)$$

Les relations (2.30), (2.31) et (2.32) mènent à écrire que :

$$(e/2)^2 + (y_n - 2D/3)^2 = (D/3)^2 \quad (2.33)$$

ou bien :

$$(e/2)^2 = (D/3)^2 - (y_n - 2D/3)^2 \quad (2.34)$$

Or :

$$(D/3)^2 - (y_n - 2D/3)^2 = (D - y_n)(y_n - D/3) \quad (2.35)$$

soit :

$$(D/3)^2 - (y_n - 2D/3)^2 = D^2 (1 - \eta)(\eta - 1/3) \quad (2.36)$$

Par suite, la relation (2.34) s'écrit :

$$(e/2)^2 = D^2 (1 - \eta)(\eta - 1/3)$$

Ainsi, la largeur du plan d'eau est :

$$e = 2D \sqrt{(1 - \eta)(\eta - 1/3)} \quad (2.37)$$

### **b) Périmètre mouillé**

Pour  $2/3 \leq \eta \leq 1$ , le périmètre mouillé correspond à deux fois la longueur de l'arc  $\widehat{Hk}$  à laquelle il faut ajouter la longueur  $HBE$ . Celle-ci s'obtient par la relation (2.14) pour  $\eta = 2/3$ . La longueur  $2\widehat{Hk}$  est quant à elle égale à la différence des longueurs des arcs  $\widehat{HE}$  et  $\widehat{hk}$ .

Désignons par  $P_o$  la longueur  $HBE$ . Pour  $\eta = 2/3$ , la relation (2.14) donne :

$$P_o = D \left[ 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \right] = D \times \left[ 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \right]$$

Soit :

$$P_o = 1,59610062 D \quad (2.38)$$

Désignons par  $P_1$  la longueur de l'arc  $\widehat{HE}$ . Celle-ci correspond au demi-périmètre du cercle ( $C_1$ ) de centre  $C_1$  et de rayon  $D/3$ . Ainsi :

$$P_1 = \pi D / 3 \quad (2.39)$$

Désignons également par  $P_2$  la longueur de l'arc  $\widehat{hk}$ . Nous pouvons alors écrire que :

$$P_2 = \frac{2D}{3} \gamma \quad (2.40)$$

Or, dans le triangle  $\triangle C_1mh$ , nous pouvons écrire que :

$$\cos(\gamma) = \frac{y_n - 2D/3}{D/3}$$

Soit :

$$\cos(\gamma) = 3\eta - 2 \quad (2.41)$$

Notons également que le triangle  $\triangle C_1mh$  permet d'écrire :

$$\sin(\gamma) = \frac{\overrightarrow{mh}}{D/3} = \frac{e/2}{D/3} = \frac{3e}{2D} \quad (2.42)$$

Tenant compte de la relation (2.37), la relation (2.42) devient :

$$\sin(\gamma) = 3\sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} \quad (2.43)$$

Soit :

$$\gamma = \sin^{-1} \left[ 3\sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} \right] \quad (2.44)$$

Tenant compte de (2.41), la relation (2.40) s'écrit :

$$P_2 = \frac{2D}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) \quad (2.45)$$

Le périmètre  $P = P_o + (P_1 - P_2)$  recherché est, en ayant recours aux relations (2.38), (2.39) et (2.45) :

$$P = 1,59610062 D + \frac{\pi D}{3} - \frac{2D}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2)$$

ou bien, plus simplement :

$$P = D \left[ 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) \right] \quad (2.46)$$

Définissons la fonction :

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) \quad (2.47)$$

La relation (46) s'écrit alors :

$$P = D \tau(\eta) \quad (2.48)$$

### c) Aire de la section mouillée

L'aire de la section mouillée  $A$ , dans le cas où  $2/3 \leq \eta \leq 1$ , correspond à l'espace  $HkhEBH$  de la figure 2.2. L'aire de la section mouillée  $A$  est la somme des aires  $HEBH$  et  $khEH$ .

Désignons par  $A_o$  l'aire de la section  $HEBH$ . Cette aire est donnée par la relation (2.26) pour  $\eta = 2/3$ , soit :

$$\begin{aligned} A_o &= \left[ 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3} \eta \right] D^2 \\ &= \left[ 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)^2} - \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \right] D^2 \end{aligned}$$

Le calcul mène à :

$$A_o = 0,33592598 D^2 \quad (2.49)$$



Désignons également par  $A_1$  l'aire de la section mouillée du segment circulaire  $kB'h$ . Ce segment circulaire appartient au cercle  $(C_1)$  de centre  $C_1$  et de rayon  $D/3$ . Nous pouvons alors écrire que, pour l'angle  $\gamma$  exprimé en radian :

$$A_1 = \frac{(2D/3)^2}{4} [\gamma - \sin(\gamma)\cos(\gamma)] \quad (2.50)$$

Soit :

$$A_1 = \frac{D^2}{9} [\gamma - \sin(\gamma)\cos(\gamma)] \quad (2.51)$$

Tenant compte des relations (2.41) et (2.43), la relation (2.51) s'écrit :

$$A_1 = \left[ \frac{1}{9} \cos^{-1}(3\eta - 2) - (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} \right] D^2 \quad (2.52)$$

Désignons aussi par  $A_2$  l'aire du demi-cercle  $HB'EH$ , de rayon  $D/3$ . Il vient que :

$$A_2 = \frac{\pi}{18} D^2 \quad (2.53)$$

L'aire  $A = A_o + (A_2 - A_1)$  recherchée est, en ayant recours aux relations (2.49), (2.52) et (2.53) :

$$A = \left[ 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2) \right] D^2 \quad (2.54)$$

Définissons la fonction :

$$\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2) \quad (2.55)$$

La relation (54) s'écrit alors plus simplement :

$$A = D^2 \lambda(\eta) \quad (2.56)$$

Pour l'état plein de la conduite ovoïdale considérée, correspondant au taux de remplissage  $\eta = 1$ , la relation (2.54) mène à écrire que :

$$A_p = 0,5104589 D^2 \quad (2.57)$$

L'aire de la conduite circulaire pleine de même diamètre (Figure 2.1) est :

$$A(\text{circulaire}) = \frac{\pi D^2}{4} \quad (2.58)$$

Par suite, nous pouvons déduire des relations (2.57) et (2.58) que la conduite ovoïdale occupe  $100 \times 0,5104589 / (\pi / 4) = 64,9936459\% \approx 65\%$  de la surface de la conduite circulaire.

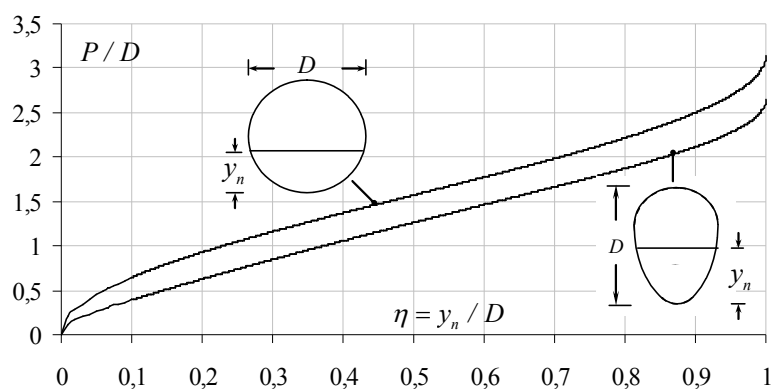
#### d) Rayon hydraulique

Lorsque  $2/3 \leq \eta \leq 1$ , le rayon hydraulique  $R_h = A / P$  s'exprime, compte tenu des relations (2.48) et (2.56), par :

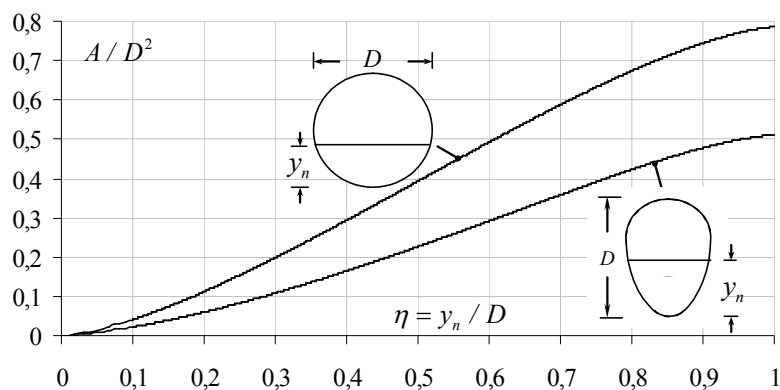
$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \quad (2.59)$$

### II.4. Variation des caractéristiques de l'écoulement

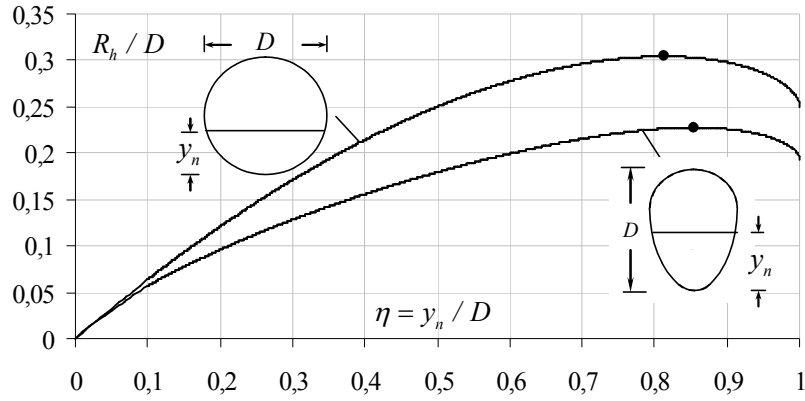
Les caractéristiques adimensionnelles de l'écoulement, en particulier le périmètre mouillé relatif  $P / D$ , l'aire de la section mouillée relative  $A / D^2$  et le rayon hydraulique relatif  $R_h / D$  sont représentées graphiquement sur les figures 2.3, 2.4 et 2.5 respectivement, dans la gamme  $0 \leq \eta \leq 1$ . Ces caractéristiques sont comparées à leurs homologues dans la conduite circulaire.



**Figure 2.3 :** Variation du périmètre mouillé relatif  $P / D$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ .



**Figure 2.4 :** Variation de la section relative  $A / D^2$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ .



**Figure 2.5 :** Variation du rayon hydraulique relatif  $R_h / D$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  .  
 (●) Taux de remplissage correspondant à  $R_{h,max}$  .

La figure 2.5 montre que le rayon hydraulique relatif  $R_h / D$  passe par un maximum, aussi bien pour le cas de la conduite circulaire que pour celui de conduite de forme ovoïdale considérée. Le calcul a révélé que le taux de remplissage, correspondant au maximum de  $R_h / D$ , est  $\eta = 0,813$  pour la conduite de forme circulaire et  $\eta = 0,85438$  pour la conduite de forme ovoïdale. Pour celle-ci, le taux de remplissage  $\eta$  correspondant au maximum de  $R_h / D$  appartient à la gamme  $2/3 \leq \eta \leq 1$ . Ainsi,  $R_{h,max}$  doit être calculé par application de la relation (2.59). La valeur de chacune des fonctions  $\tau(\eta = 0,85438)$  et  $\lambda(\eta = 0,85438)$  sont respectivement, selon les relations (2.47) et (2.55):

- $\tau(\eta = 0,85438) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3 \times 0,85438 - 2) = 1,99488775 \cong 1,995$
- $\lambda(\eta = 0,85438) =$   
 $0,5104589 + (0,85438 - 2/3) \times \sqrt{(1 - 0,85438)(0,85438 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,85438 - 2)$   
 $= 0,45409685 \cong 0,4541$

Ainsi :

$$R_{h,max} = D \times \frac{0,45409685}{1,99488775}$$

Soit :

$$R_{h,max} = 0,22763028 D \tag{2.60}$$

## II.5. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A COEFFICIENT DE RESISTANCE CONSTANT

### II.5.1. Formule de Chézy

#### II.5.1.1. Conductivité relative

On entend par coefficient de résistance constant, un coefficient de résistance à l'écoulement qui reste inchangé même si le taux de remplissage de la conduite varie. Autrement dit, pour une conduite de diamètre donné, le coefficient de résistance à l'écoulement reste invariable avec la variation de la profondeur de l'écoulement.

Selon Chézy, le débit volume  $Q$  s'exprime par la relation :

$$Q = CA\sqrt{R_h i} \quad (2.61)$$

où  $C$  et  $i$  désignent respectivement le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy et la pente longitudinale de la conduite.

L'aire de la section mouillée  $A$  ainsi que le rayon hydraulique  $R_h$  s'exprime par les relations que nous avons établies précédemment, selon la gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta$ . C'est ainsi que pour :

$$i. \quad \eta \leq 1/15$$

L'aire de la section mouillée  $A$  est donnée par la relation par la relation (2.7), tandis que le rayon hydraulique  $R_h$  s'exprime par la relation (2.8). Les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  sont définies par les relations (2.3) et (2.6) respectivement.

En tenant compte de toutes ces relations, la relation (2.61) devient :

$$Q = \frac{C}{72\sqrt{3}} D^{5/2} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \sqrt{i} \quad (2.62)$$

Définissons la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} \quad (2.63)$$

La relation (2.62) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{\sigma(\eta)[\varphi(\eta)]^{3/2}}{72\sqrt{3}} \quad (2.64)$$

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

Dans cet intervalle du taux de remplissage  $\eta$ , l'aire de la section mouillée  $A$  ainsi que le rayon hydraulique  $R_h$  sont respectivement donnés par les relations (2.28) et (2.29). Dans ces relations, les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  sont définies par les relations (2.15) et (2.27) respectivement.

En ayant recours à ces relations, la relation (2.61) devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.65)$$

En faisant appel à la relation (2.63), la relation (2.65) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \quad (2.66)$$

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

Dans cet intervalle de  $\eta$ , l'aire de la section mouillée  $A$  et le rayon hydraulique  $R_h$  sont donnés par les relations (2.56) et (2.59) respectivement. Dans ces relations, la fonction  $\tau(\eta)$  est définie par la relation (2.47), tandis que la fonction  $\lambda(\eta)$  est donnée par la relation (2.55). Ainsi, en tenant compte de ces relations, la relation (2.61) devient :

$$Q = CD^{5/2} \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.67)$$

En ayant recours à la relation (2.63), la relation (2.67) s'écrit, en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \quad (2.68)$$

Pour le cas particulier correspondant à l'état plein de la conduite ovoïdale, le taux de remplissage est  $\eta = 1$ . Les fonctions  $\lambda(\eta)$  et  $\tau(\eta)$  sont respectivement égales à :

- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3)\sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9)\cos^{-1}(3\eta-2)$

$$= 0,5104589 + (1 - 2/3) \times \sqrt{(1-1) \times (1-1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 1 - 2) = 0,5104589$$

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 1 - 2) = 2,64329817$

Ainsi, selon la relation (2.68), la conductivité relative  $Q_p^*$  à l'état plein est :

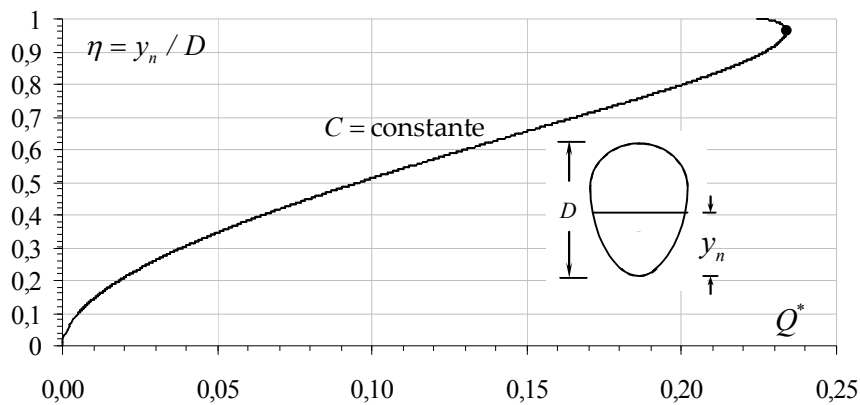
$$Q_p^* = \frac{0,5104589^{3/2}}{2,64329817^{1/2}}$$

Soit :

$$Q_p^* = 0,22432005 = \text{constante} \quad (2.69)$$

### II.5.1.2. Variation de la conductivité relative

En considérant les relations (2.64), (2.66) et (2.68) la conductivité relative  $Q^*$  a été représentée graphiquement sur la figure 2.6, dans la gamme  $0 \leq \eta \leq 1$ .



**Figure 2.6 :** Variation de la conductivité relative  $Q^*$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ .

Courbe tracée selon les relations (2.64), (2.66) et (2.68). (•)  $Q_{\max}^*$  correspondant à  $\eta = 0,9617$ .

Nous pouvons ainsi observer que la conductivité relative  $Q^*$  augmente avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$ , jusqu'à un maximum correspondant à  $\eta = 0,9617 \approx 0,962$ , puis diminue au-delà de ce maximum. La valeur  $\eta = 0,962$ , correspondant à  $Q_{\max}^*$ , appartient à la gamme  $2/3 \leq \eta \leq 1$ . La valeur de la conductivité relative  $Q_{\max}^*$  doit donc être déterminée par application de la relation (2.68). Pour cela, évaluons d'abord la valeur des fonctions  $\tau(\eta = 0,9617)$  et  $\lambda(\eta = 0,9617)$  par les relations (2.47) et (2.55) respectivement. Ainsi :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,9617 - 2) = 2,32064366$
- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$   
 $= 0,5104589 + (0,9617 - 2/3) \times \sqrt{(1 - 0,9617) \times (0,9617 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,9617 - 2)$   
 $= 0,502446981$

Selon la relation (2.68), la conductivité relative  $Q^*_{\max}$  est :

$$Q^*_{\max} = \frac{0,502446981^{3/2}}{2,32064366^{1/2}} \cong 0,233792$$

En pratique, les paramètres connus sont le débit volume  $Q$ , le diamètre  $D$  de la conduite, la pente longitudinale  $i$  et le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy*. Le problème est alors de déterminer le taux de remplissage  $\eta = y_n / D$  et donc la profondeur normale  $y_n$ . Les paramètres connus du problème permettent, en ayant recours à la relation (2.63), d'évaluer la conductivité relative  $Q^*$ . Le taux de remplissage  $\eta$  peut alors être déterminé par lecture graphique sur la figure 2.6. Il peut être également évalué par un procédé itératif à partir de l'une des relations implicites (2.64), (2.66) ou (2.68), selon la valeur calculée de la conductivité relative  $Q^*$ . En effet,  $\eta$  sera déterminé par :

i. la relation (2.64) si :

$$0 < Q^* \leq 0,002491, \text{ correspondant à } \eta \leq 1/15.$$

ii. la relation (2.66) si :

$$0,002491 \leq Q^* \leq 0,1541, \text{ correspondant à } 1/15 \leq \eta \leq 2/3.$$

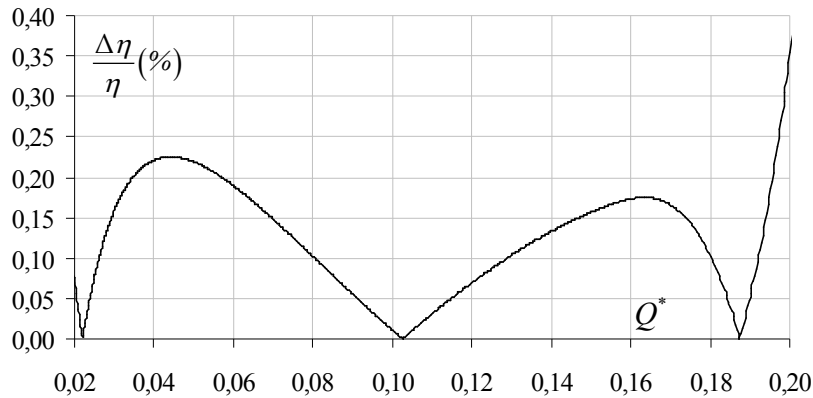
iii. la relation (2.68) si :

$$0,1541 \leq Q^* \leq 0,2243, \text{ correspondant à } 2/3 \leq \eta \leq 1.$$

Afin d'évaluer de manière explicite la valeur du taux de remplissage  $\eta(Q^*)$ , nos calculs ont montré que les relations (2.64), (2.66) et (2.68) pouvaient être remplacées par la relation approchée suivante, applicable dans la large gamme pratique  $0,20 \leq \eta \leq 0,80$  et correspondant à  $0,0185 \leq Q^* \leq 0,20$  :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 1,744 Q^*{}^{0,533} \quad (2.70)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (2.70) est inférieur à 0,4% comme le montre clairement la figure 2.7. Notons que le plus grand écart est obtenu pour la valeur extrême de la gamme considérée de  $Q^*$ .



**Figure 2.7 :** Ecarts relatifs  $\Delta\eta / \eta$  (%) occasionnés par la relation approchée (2.70) sur le calcul du taux de remplissage  $\eta$ , dans la gamme  $0,20 \leq \eta \leq 0,80$  correspondant à  $0,0185 \leq Q^* \leq 0,20$ .

### II.5.1.3. Exemple d'application 2.1

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1 écoule le débit volume  $Q = 2,78 \text{ m}^3 / \text{s}$  sous la pente longitudinale  $i = 4.10^{-4}$ . Le diamètre de la conduite est  $D = 2,5 \text{ m}$  et le coefficient de résistance à l'écoulement de Chézy, supposé constant, est  $C = 85 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$ . Déterminer la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement.

#### Solution

- i. Vérifions d'abord que la conductivité relative de la conduite est inférieure à la valeur maximale  $Q^*_{\text{max.}} = 0,233792$ , pour les données du problème.

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{2,78}{\sqrt{85^2 \times 2,5^5 \times 4.10^{-4}}} = 0,16548013 < Q^*_{\text{max.}}$$

En outre,  $Q^*$  se situe dans la gamme  $0,1541 \leq Q^* \leq 0,2243$ . Le taux de remplissage  $\eta$  appartient de ce fait à la gamme  $2/3 \leq \eta \leq 1$ .

- ii. Utilisons la relation approchée (2.70) pour évaluer le taux de remplissage  $\eta$  :



$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left( 1,744 Q^{*0,533} \right) = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left( 1,744 \times 0,16548013^{0,533} \right) = 0,69926235 \cong 0,7$$

iii. La profondeur normale  $y_n$  recherchée est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,69926235 \times 2,5 = 1,74815587 \text{ m} \cong 1,75 \text{ m}$$

iv. Vérifions les calculs en déterminant la valeur de la conductivité relative  $Q^*$  par application de la relation (2.68), pour le taux de remplissage  $\eta$  calculé. Pour cela, évaluons les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  par les relations (2.47) et (2.55) respectivement. Ainsi :

$$\bullet \quad \tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,69926235 - 2) = 1,66139633$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \lambda(\eta) &= 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2) \\ &= 0,5104589 + (0,69926235 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,69926235) \times (0,69926235 - 1/3)} \\ &\quad - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,69926235 - 2) = 0,35762175 \end{aligned}$$

Selon la relation (2.68), la conductivité relative est :

$$Q^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} = \frac{0,35762175^{3/2}}{1,66139633^{1/2}} = 0,1659202$$

Nous pouvons ainsi observer que l'écart relatif entre les conductivités relatives calculées aux étapes *i* et *iv* n'est que de 0,265%. La valeur calculée du taux de remplissage  $\eta$ , par application de la relation approchée (2.70), est donc acceptable.

#### II.5.1.4. Exemple d'application 2.2

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1 écoule le débit volume  $Q = 2,18 \text{ m}^3 / \text{s}$  sous la pente longitudinale  $i = 4.10^{-4}$ . Le diamètre de la conduite est  $D = 2,5 \text{ m}$  et le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*, supposé constant, est  $C = 85 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$ . Déterminer la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement.

#### Solution

i. Vérifions dans un premier temps que la conductivité relative de la conduite est inférieure à la

valeur maximale  $Q^*_{\max.} = 0,233792$ , pour les données du problème. Soit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{2,18}{\sqrt{85^2 \times 2,5^5 \times 4.10^{-4}}} = 0,12976499 < Q^*_{\max.}$$

De plus, nous pouvons constater que  $Q^*$  se trouve dans la gamme  $0,002491 \leq Q^* \leq 0,1541$ . Le taux de remplissage  $\eta$  appartient de ce fait à l'intervalle  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ .

ii. Utilisons la relation approchée (2.70) pour évaluer le taux de remplissage  $\eta$ , soit :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left( 1,744 Q^{*0,533} \right) = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left( 1,744 \times 0,12976499^{0,533} \right) = 0,59942648 \cong 0,6$$

iii. La profondeur normale  $y_n$  recherchée est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,59942648 \times 2,5 = 1,49856621 m \cong 1,5 m$$

iv. Vérifions les calculs en déterminant la valeur de la conductivité relative  $Q^*$  par application de la relation (2.66), pour le taux de remplissage  $\eta$  calculé. Pour cela, évaluons les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  par les relations (2.15) et (2.27) respectivement. Ainsi :

$$\bullet \quad \vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,59942648 \right) = 1,46151871$$

$$\bullet \quad \zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta$$

$$= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( 2/3 - 0,59942648 \right) - \left( 2/3 - 0,59942648 \right) \times$$

$$\sqrt{1 - \left( 2/3 - 0,59942648 \right)^2} - \left( 4/3 \right) \times 0,59942648 = 0,29120059$$

Selon la relation (2.66), la conductivité relative est :

$$Q^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} = \frac{0,29120059^{3/2}}{1,46151871^{1/2}} = 0,12998289 \cong 0,13$$

Nous pouvons ainsi observer que l'écart relatif entre les conductivités relatives calculées aux étapes *i* et *iv* n'est que de 0,167%. La valeur calculée du taux de remplissage  $\eta$ , par application de la relation approchée (2.70), est donc acceptable.

### II.5.1.5. Transformation de la relation $\eta(Q^*)$

La relation (2.63), exprimant la conductivité relative  $Q^*$  peut être transformée pour s'écrire :

$$Q^* = \frac{Q\eta^{5/2}}{\sqrt{C^2 i y_n^5}} \quad (2.71)$$

En introduisant la conductivité relative  $Q_y^*$  telle que :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i y_n^5}} \quad (2.72)$$

la relation (2.71) permet alors d'écrire que :

$$Q^* = \eta^{5/2} Q_y^* \quad (2.73)$$

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta$ , la conductivité relative  $Q^*$  s'exprime selon la relation (2.64), (2.66) ou (2.68). Nous pouvons alors déduire, tenant compte de la relation (2.73), que pour :

i.  $\eta \leq 1/15$

$$Q_y^* = \frac{\sigma(\eta)[\varphi(\eta)]^{3/2} \eta^{-5/2}}{72\sqrt{3}} \quad (2.74)$$

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$Q_y^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2} \eta^{-5/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \quad (2.75)$$

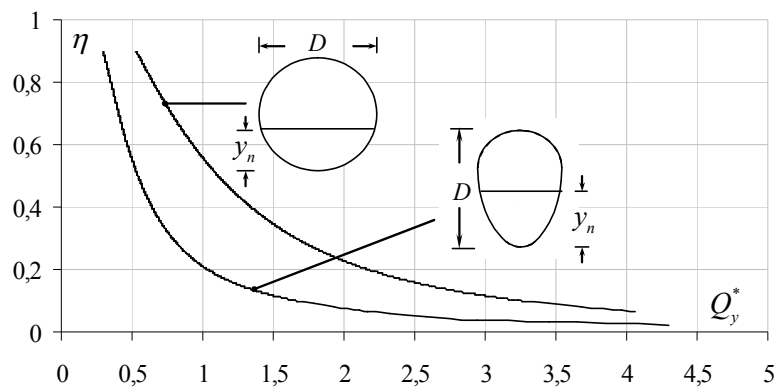
iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$Q_y^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2} \eta^{-5/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \quad (2.76)$$

Pour l'ensemble de la gamme du taux de remplissage  $0 \leq \eta \leq 1$ , impliquant les relations (2.74), (2.75) et (2.76), la variation de la conductivité relative  $Q_y^*$  a été représentée sur la figure 2.8 en

fonction de  $\eta$ . Sur la même figure a été également représentée la courbe  $\eta(Q_y^*)$  pour le cas de la conduite circulaire.

Nous pouvons ainsi observer que  $Q_y^*$  diminue avec la diminution du taux de remplissage  $\eta$ . En outre, pour la même valeur de la conductivité relative  $Q_y^*$ , le taux de remplissage de la conduite circulaire est plus élevé que celui de la conduite de forme ovoïdale. Le calcul a montré que pour  $\eta \leq 1$ , la conductivité relative de la conduite ovoïdale est telle que  $Q_y^* \geq 0,2243$ , tandis que pour la conduite de forme circulaire  $Q_y^* \geq 0,3927$ .



**Figure 2.8 :** Variation de la conductivité relative  $Q_y^*$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  pour les cas des conduites de forme ovoïdale et circulaire.

L'un des problèmes que l'on peut rencontrer en pratique est celui qui consiste à déterminer la valeur du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite de forme ovoïdale, et par conséquent celle du diamètre  $D$ , à partir des valeurs imposées du débit volume  $Q$ , du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy, de la profondeur normale  $y_n$  et de la pente longitudinale  $i$  de la conduite. Un tel problème trouve sa solution en résolvant l'une des équations (2.74), (2.75) ou (2.76), selon la valeur de la conductivité relative  $Q_y^*$ .

La détermination du taux de remplissage  $\eta$  nécessite alors soit un procédé itératif, ou bien la voie graphique en ayant recours à la figure 2.8. Afin de faciliter le calcul du taux de remplissage  $\eta$ , les relations (2.74), (2.75) et (2.76) ont fait l'objet d'une étude particulière qui a consisté à déterminer des relations explicites qui leurs sont approchées. Le calcul a montré que pour :

**a)**  $\eta \leq 0,11$ , correspondant à  $Q_y^* \geq 1,569$ , le taux de remplissage  $\eta(Q_y^*)$  peut être exprimé par la relation :

$$\eta = \left[ \frac{\sqrt{0,487(1 + 0,543Q_y^{*2})} - 0,262Q_y^*}{1 + 0,402Q_y^*} \right]^2 \quad (2.77)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (2.77) est inférieur à 0,4% seulement.

b)  $0,11 \leq \eta \leq 0,58$ , correspondant à  $0,48 \leq Q_y^* \leq 1,569$ , le taux de remplissage  $\eta(Q_y^*)$  est tel que :

$$[\sinh(1,34\eta)]^{-1} = 3,478 Q_y^{*3/2} \quad (2.78)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (78) est inférieur à 0,5% seulement.

c)  $0,58 \leq \eta \leq 1$ , correspondant à  $0,224 \leq Q_y^* \leq 0,48$ , le taux de remplissage  $\eta(Q_y^*)$  est donné par :

$$\eta = \left[ \frac{\sqrt{0,537(1 + 26,4Q_y^{*2})} + 2,593Q_y^*}{1 + 13,87Q_y^{*2}} \right]^2 \quad (2.79)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (2.79) est inférieur à 0,23% seulement.

Les exemples d'application suivants montrent les étapes à suivre pour la détermination du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite de forme ovoïdale, et par suite de son diamètre  $D$ , par application des relations approchées (2.78) et (2.79) qui régissent les cas pratiques.

#### II.5.1.6. Exemple d'application 2.3

Reprenons les données de l'exemple d'application 2 et évaluons cette fois-ci le diamètre  $D$  de la conduite. Les données sont donc :

$$Q = 2,18 \text{ m}^3 / \text{s} ; C = 85 \text{ m}^{0,5} / \text{s} ; i = 4.10^{-4} ; y_n = 1,49856621 \text{ m} .$$

#### **Solution**

Pour les données du problème, la conductivité relative  $Q_y^*$  est, selon la relation (2.72) :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i y_n^5}} = \frac{2,18}{\sqrt{85^2 \times 4.10^{-4} \times 1,49856621^5}} = 0,46646357$$

La conductivité relative  $Q_y^*$  appartient à l'intervalle  $0,224 \leq Q_y^* \leq 0,48$  et le taux de remplissage  $\eta$  serait alors tel que  $0,58 \leq \eta \leq 1$ . Il est donc régi par la relation (2.79), soit :

$$\eta = \left[ \frac{\sqrt{0,537(1 + 26,4Q_y^{*2}) + 2,593Q_y^*}}{1 + 13,87Q_y^{*2}} \right]^2 = \left[ \frac{\sqrt{0,537 \times (1 + 26,4 \times 0,46646357^2) + 2,593 \times 0,46646357}}{1 + 13,87 \times 0,46646357^2} \right]^2$$

$$= 0,6001264 \cong 0,6$$

Il s'agit bien de la valeur de  $\eta$ , calculé au cours de l'étape *ii* de l'exemple d'application 2. Par suite, le diamètre  $D$  recherché est :

$$D = y_n / \eta = 1,49856621 / 0,6001264 = 2,49708431 \text{ m} \cong 2,5 \text{ m}$$

#### II.5.1.7. Exemple d'application 2.4

Déterminer le diamètre  $D$  de la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1, pour les données suivantes :

$$Q = 1,986 \text{ m}^3 / \text{s} ; C = 80 \text{ m}^{0,5} / \text{s} ; i = 2,1 \cdot 10^{-3} ; y_n = 1 \text{ m} .$$

#### Solution

*i.* Pour les données du problème, la conductivité relative  $Q_y^*$  est, selon la relation (2.72) :

$$Q_y^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i y_n^5}} = \frac{1,986}{\sqrt{80^2 \times 2,1 \cdot 10^{-3} \times 1^5}} = 0,54172591$$

*ii.* La conductivité relative  $Q_y^*$  appartient à l'intervalle  $0,48 \leq Q_y^* \leq 1,569$  et le taux de remplissage  $\eta$  serait alors tel que  $0,11 \leq \eta \leq 0,58$ . Il est donc régi par la relation (2.78), soit :

$$[\sinh(1,34\eta)]^{-1} = 3,478 Q_y^{*3/2}$$

Ainsi :

$$\eta = \left[ \operatorname{asinh} \left( 3,478 \times 0,54172591^{3/2} \right)^{-1} \right] / 1,34 = 0,49990605 \cong 0,5$$

*iii.* Vérifions nos calculs en ayant recours à la relation exacte (2.75), soit :

$$Q_y^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2} \eta^{-5/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}}$$

où les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  sont données par les relations (2.15) et (2.27) respectivement :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,66669628 \right) = 1,26101389$

- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta$   
 $= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,66669628 \right) - \left( \frac{2}{3} - 0,66669628 \right) \times$   
 $\sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - 0,66669628 \right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,66669628 = 0,22630456$

Ainsi :

$$Q_y^* = \frac{0,22630456^{3/2} \times 0,66669628^{-5/2}}{1,26101389^{1/2}} = 0,5425741$$

Nous pouvons ainsi constater que l'écart relatif entre les valeurs de la conductivité  $Q_y^*$  calculées aux étapes *i* et *iii* n'est que de 0,156% seulement. La valeur du taux de remplissage  $\eta$  déterminée au cours de l'étape *ii*, par application de la relation approchée (2.78), est donc acceptable.

iv. Les calculs auraient pu être également vérifiés en ayant recours à la relation approchée (2.70) dans laquelle la conductivité relative  $Q^*$  est donnée par la relation (2.63), soit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{1,986}{\sqrt{80^2 \times 2^5 \times 2,1 \cdot 10^{-3}}} = 0,09571954$$

Selon la relation (2.70), le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite considérée serait approximativement égal à :

$$\eta = \frac{\pi}{3} \sin^{-1} (1,744 Q^{*0,533}) = \frac{\pi}{3} \times \sin^{-1} (1,744 \times 0,09571954^{0,533}) = 0,4994 \cong 0,5$$

Il s'agit bien de la même valeur du taux de remplissage  $\eta$  calculée à l'étape *ii*.

v. Le diamètre  $D$  recherché est, par suite :

$$D = y_n / \eta = 1 / 0,5 = 2 \text{ m}$$

### II.5.1.8. Courbe de remplissage de la conduite pour $C = \text{constante}$

La courbe de remplissage de la conduite, pour une valeur constante du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy, se traduit par la variation du paramètre de forme  $\eta(Q/Q_p)$ . Pour le même diamètre  $D$  et pour la même pente longitudinale  $i$ , nous pouvons écrire que :

$$\frac{Q^*}{Q_p} = \frac{Q}{Q_p} \quad (2.80)$$

Selon l'intervalle du taux de remplissage  $\eta$ , la conductivité relative  $Q^*$  est donnée par l'une des relations (2.64), (2.66) ou (2.68). Rappelons également que  $Q_p^* = 0,22432005 = \text{constante}$  (Relation 2.69). Tenant compte de ces considérations, nous pouvons écrire que pour :

i.  $\eta \leq 1/15$

$$\frac{Q}{Q_p} = 0,03574 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.81)$$

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

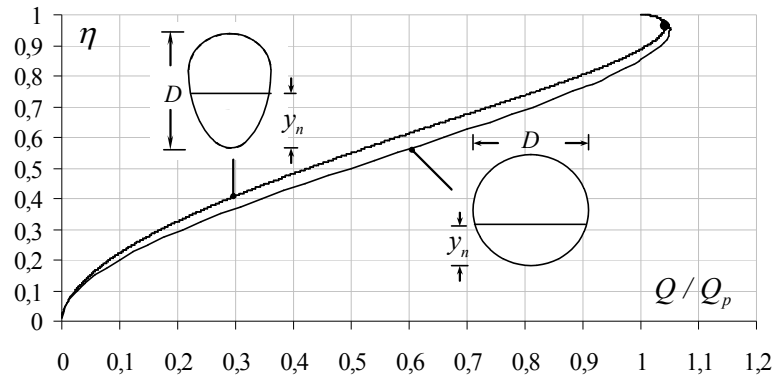
$$\frac{Q}{Q_p} = 4,458 \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \quad (2.82)$$

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\frac{Q}{Q_p} = 4,458 \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \quad (2.83)$$

On peut donc noter que dans l'ensemble de la gamme  $0 \leq \eta \leq 1$ , le rapport  $Q/Q_p$  ne dépend que du taux de remplissage  $\eta$ . Les relations (2.81), (2.82) et (2.83) ont été traduites graphiquement sur la figure 2.9 sur laquelle a été également représentée la courbe de variation  $\eta(Q/Q_p)$  pour le cas de la conduite circulaire.





**Figure 2.9 :** Variation de  $\eta(Q/Q_p)$  pour les cas des conduites de forme ovoïdale et circulaire à coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy constant.

La figure 2.9 montre clairement que :

- a)** le rapport  $Q/Q_p$  augmente avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  jusqu'à un maximum, représenté par un symbole plein sur la figure. Ce maximum correspond à  $Q_{\max.}/Q_p = 1,04225$  ou à  $\eta = 0,962$ . La capacité d'évacuation de la conduite correspond donc au débit maximal égal à environ 1,042 fois le débit de remplissage  $Q_p$ , lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy est constant, soit :

$$Q_{\max.} = 1,04225 Q_p \quad (2.84)$$

Pour le cas de la conduite de forme circulaire, il a été démontré que  $Q_{\max.}/Q_p = 1,05041386$ , valeur légèrement supérieure à celle donnée par la relation (2.84).

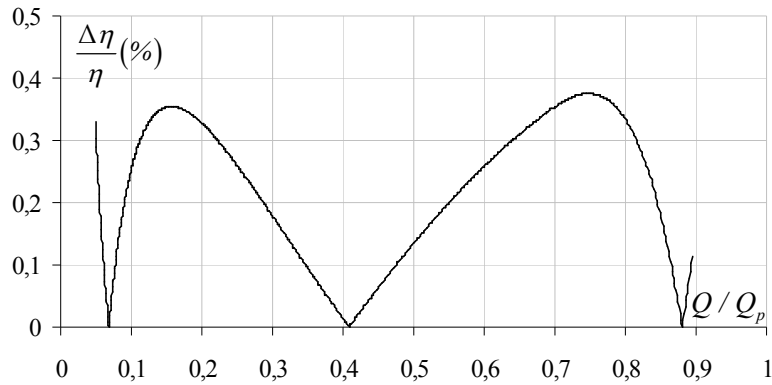
- b)** pour la même valeur du rapport  $Q/Q_p$ , le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite de forme ovoïdale est légèrement supérieur à celui de la conduite de forme circulaire.

Les relations (2.81), (2.82) et (2.83) sont implicites vis-à-vis du taux de remplissage  $\eta$ . Ces relations ont été soumises à une étude particulière et nos calculs ont montré que dans la large gamme  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ , ces relations pouvaient être remplacées par la relation unique suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 0,788 \left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,535} \quad (2.85)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation (2.85) est inférieur à 0,38%, ce qui est largement acceptable pour les applications pratiques.

Les écarts relatifs  $(\Delta\eta)/\eta$  en fonction de  $Q/Q_p$  ont été représentés graphiquement sur la figure 2.10 et concernent la gamme  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ , correspondant à  $0,049 \leq Q/Q_p \leq 0,895$ .



**Figure 2.10** : Ecarts relatifs occasionnés par la relation approchée (2.85) dans la gamme  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ .

#### II.5.1.9. Exemple d'application 2.5

Reprenons l'exemple d'application 4 et déterminons la profondeur normale  $y_n$ , en ayant recours à la relation (2.85). Les données sont alors les suivantes :

$$Q = 1,986 \text{ m}^3 / \text{s} ; C = 80 \text{ m}^{0,5} / \text{s} ; i = 2,1 \cdot 10^{-3} ; D = 2 \text{ m} .$$

#### Solution

i. Calculons la conductivité relative  $Q^*$  par application de la relation (2.63), soit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{1,986}{\sqrt{80^2 \times 2^5 \times 2,1 \cdot 10^{-3}}} = 0,09576452$$

ii. Sachant que  $Q_p^* = 0,22432005 = \text{constante}$  (Relation 2.69), le rapport  $Q/Q_p$  est alors :

$$Q/Q_p = Q^*/Q_p^* = 0,09576452 / 0,22432005 = 0,4269102$$

iii. Par suite, le taux de remplissage  $\eta$  est, en vertu de la relation approchée (2.85) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = \frac{3}{\pi} \sin^{-1}\left[0,788(Q/Q_p)^{0,535}\right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1}\left[0,788 \times 0,4269102^{0,535}\right] = 0,49972874 \cong 0,5$$

Nous retrouvons ainsi la valeur de  $\eta$  calculée au cours de l'exemple d'application 4.

iv. La profondeur normale  $y_n$  recherchée est alors :  $y_n = D\eta = 2 \times 0,5 = 1 \text{ m}$

### II.5.1.10. Relation $\eta(Q/Q_{\max.})$ pour $C = \text{constante}$

Le taux de remplissage  $\eta(Q/Q_{\max.})$  est déterminé par les relations (2.64), (2.66) et (2.68) après avoir noté que :

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = \frac{Q^*}{Q_{\max.}^*} \quad (2.86)$$

Nous avons montré, dans l'un des paragraphes précédents, que la conductivité relative maximale  $Q_{\max.}^*$  est une constante lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* demeure invariable. Nous avons établi que  $Q_{\max.}^* \cong 0,233792$  et s'obtient pour le taux de remplissage  $\eta = 0,962$ . En tenant compte des relations (2.64), (2.66), (2.68) et (2.86), nous pouvons alors écrire que pour :

i.  $\eta \leq 1/15$

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = 0,0343 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (2.87)$$

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

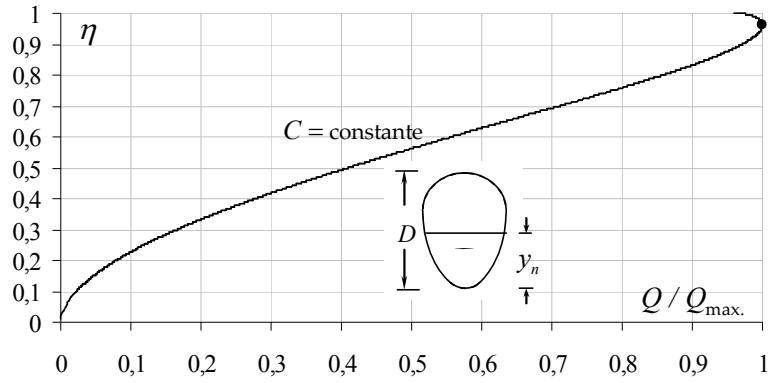
$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = 4,277 \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \quad (2.88)$$

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = 4,277 \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \quad (2.89)$$

Nous pouvons donc observer que le rapport  $Q/Q_{\max.}$  ne dépend que du taux de remplissage  $\eta$ , dans tout l'intervalle  $0 \leq \eta \leq 1$ .

Les relations (2.87), (2.88) et (2.89) ont été représentées graphiquement sur la figure 2.11. La courbe  $\eta(Q/Q_{\max.})$  obtenue montre que lorsque le taux de remplissage  $\eta$  augmente, le rapport  $Q/Q_{\max.}$  augmente jusqu'à un maximum, puis diminue au-delà de ce maximum pour atteindre la valeur  $Q/Q_{\max.} \cong 0,9595$  pour  $\eta = 1$ . Ce résultat peut être obtenu en insérant la valeur  $\eta = 1$  dans la relation (2.89).

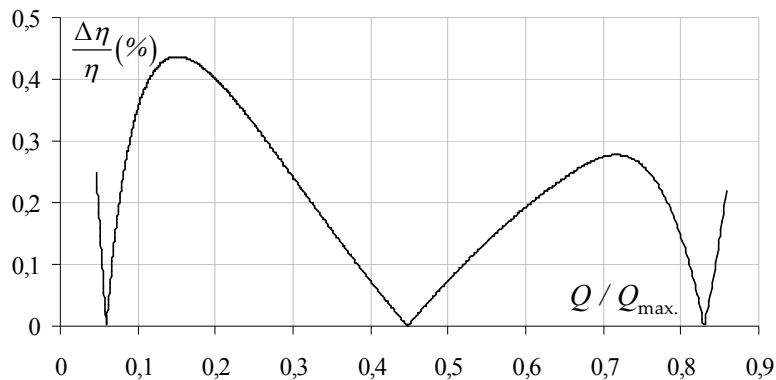


**Figure 2.11 :** Variation de  $\eta(Q/Q_{\max.})$  pour  $C = \text{constante}$ , selon les relations (2.87), (2.88) et (2.89). (●) :  $Q/Q_{\max.} = 1$  correspondant à  $\eta = 0,962$ .

Dans la large gamme pratique  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ , correspondant à  $0,047 \leq Q/Q_{\max.} \leq 0,858$ , nos calculs ont montré que  $\eta(Q/Q_{\max.})$  pouvait s'exprimer par la relation unique suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 0,805\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,535} \quad (2.90)$$

L'erreur relative occasionnée par la relation (2.90) est inférieure à 0,44% dans la gamme ci-dessus indiquée du taux de remplissage  $\eta$ , comme le montre clairement la figure 2.12.



**Figure 2.12 :** Ecarts relatifs en % occasionnés par la relation approchée (2.90) sur le calcul du taux de remplissage  $\eta(Q/Q_{\max.})$ .

#### II.5.1.11. Exemple d'application 2.6

Pour les données de l'exemple d'application 5, déterminer la profondeur normale de l'écoulement en ayant recours à la relation (2.90). Les données du problème sont :

$$Q = 1,986 \text{ m}^3 / \text{s} ; C = 80 \text{ m}^{0,5} / \text{s} ; i = 2,1 \cdot 10^{-3} ; D = 2 \text{ m} .$$

## Solution

i. Calculons la conductivité relative  $Q^*$  par application de la relation (2.63), soit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 D^5 i}} = \frac{1,986}{\sqrt{80^2 \times 2^5 \times 2,1 \cdot 10^{-3}}} = 0,09576452 < Q_{\max.}^* = 0,233792$$

ii. Sachant que  $Q_{\max.}^* \cong 0,233792$ , le rapport  $Q^* / Q_{\max.}^*$  est alors selon la relation (2.86) :

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = \frac{Q^*}{Q_{\max.}^*} = 0,09576452 / 0,233792 = 0,40961417$$

iii. Par suite, le taux de remplissage  $\eta$  est, en vertu de la relation approchée (2.90) :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = \frac{3}{\pi} \sin^{-1}\left[0,805(Q / Q_{\max.})^{0,535}\right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1}\left[0,805 \times 0,40961417^{0,535}\right] = 0,4993 \cong 0,5$$

Nous retrouvons ainsi la valeur de  $\eta$  calculée au cours de l'exemple d'application 5.

iv. La profondeur normale  $y_n$  recherchée est alors :

$$y_n = D\eta = 2 \times 0,5 = 1 \text{ m}$$

## II.5.2. Formule de *Manning-Strickler*

### II.5.2.1. Conductivité relative

Selon *Manning-Strickler*, le débit volume  $Q$  s'exprime par la relation :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (2.91)$$

Pour la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1, l'aire de la section mouillée  $A$  ainsi que le rayon hydraulique  $R_h$  ont déjà été exprimés au cours du paragraphe consacré aux caractéristiques de l'écoulement. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta$ , ce sont les relations (2.7), (2.28) et (2.56) qui gouvernent l'aire de la section mouillée  $A$ , tandis que les relations (2.8), (2.29) et (2.59) expriment le rayon hydraulique  $R_h$ . Nous pouvons alors écrire que pour :

i.  $\eta \leq 1/15$

$$Q = \frac{0,0053}{n} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} D^{8/3} \sqrt{i} \quad (2.92)$$

Rappelons que les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  sont données par les relations (2.3) et (2.6) respectivement.

Introduisons la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} \quad (2.93)$$

La relation (2.92) peut alors s'écrire en termes adimensionnels :

$$Q^* = 0,0053 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \quad (2.94)$$

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[\zeta(\eta)]^{5/3}}{[\vartheta(\eta)]^{2/3}} D^{8/3} \sqrt{i} \quad (2.95)$$

où  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  sont donnés par les relations (2.15) et (2.27) respectivement. En tenant compte de la relation (2.93), la relation (2.95) s'écrit en termes adimensionnels :

$$Q^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{5/3}}{[\vartheta(\eta)]^{2/3}} \quad (2.96)$$

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

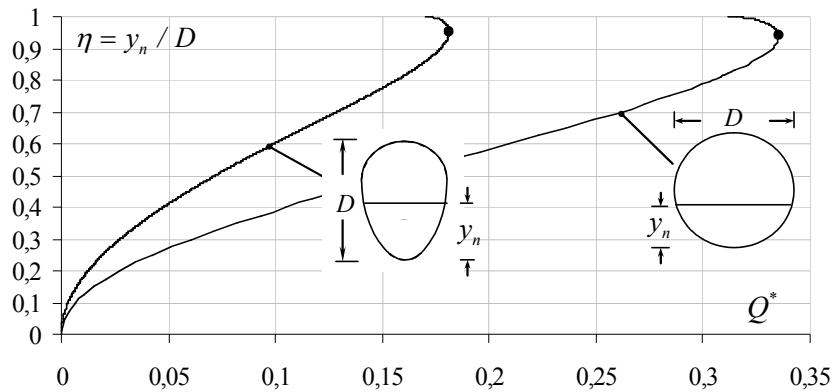
$$Q = \frac{1}{n} \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{[\tau(\eta)]^{2/3}} D^{8/3} \sqrt{i} \quad (2.97)$$

Dans la relation (2.97), les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  sont données par les relations (2.47) et (2.55) respectivement. La relation (2.97) s'écrit en termes adimensionnels, compte tenu de la relation (2.93) :

$$Q^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{[\tau(\eta)]^{2/3}} \quad (2.98)$$

### II.5.2.2. Variation de la conductivité relative

Au regard des relations (2.94), (2.96) et (2.98), il apparaît clairement que la conductivité relative  $Q^*$  ne dépend que du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite. Ces relations ont été représentées graphiquement sur la figure 2.13 et la courbe obtenue de la conductivité relative  $Q^*$  a été comparée à celle de la conduite circulaire, à titre indicatif.



**Figure 2.13 :** Variation de la conductivité relative  $Q^*$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$  selon la formule de *Manning-Strickler*, pour le cas des conduites de formes ovoïdale et circulaire.

(●) Maximum de la conductivité relative :  $Q_{\max}^* \cong 0,181324$  ;  $\eta = 0,953$  pour la conduite de forme ovoïdale.

La figure 2.13 montre que la conductivité relative  $Q^*$  augmente avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  jusqu'à un maximum, puis diminue au-delà de ce maximum. Pour la conduite de

forme ovoïdale étudiée, la conductivité relative atteint son maximum  $Q_{\max}^* \cong 0,181324$  pour le taux de remplissage  $\eta = 0,953$ , tandis que pour la conduite de forme circulaire les calculs ont montré que le maximum de la conductivité relative est  $Q_{\max}^* \cong 0,3353$ , obtenu pour le taux de remplissage  $\eta = 0,94$ .

Pour la même valeur de la conductivité relative  $Q^*$ , la figure 2.13 montre que le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite de forme ovoïdale est supérieur à celui de la conduite de forme circulaire. Il faut noter aussi que la gamme de conductivité relative  $Q^*$  de la conduite circulaire est plus étendue que celle de la conduite de forme ovoïdale. Les calculs ont montré que dans toute la gamme  $0 \leq \eta \leq 1$ , la conductivité relative de la conduite de forme ovoïdale varie dans l'intervalle  $[0; 0,31168]$ , tandis que pour la conduite de forme circulaire, la conductivité relative varie dans l'intervalle  $[0; 0,17054]$ . Les calculs ont également montré que pour :

- $\eta \leq 1/15$   
 $0 \leq Q^* \leq 0,0014581$
- $1/15 \leq \eta \leq 2/3$   
 $0,0014581 \leq Q^* \leq 0,118859$
- $2/3 \leq \eta \leq 1$   
 $0,118859 \leq Q^* \leq 0,17054$

Pour le cas de la conduite de forme ovoïdale, le taux de remplissage  $\eta$ , correspondant à  $Q_{\max}^*$ , appartient à l'intervalle  $2/3 \leq \eta \leq 1$ . La valeur maximale  $Q_{\max}^*$  est donc donnée par la relation (2.98), après avoir calculé les valeurs des fonctions  $\tau(\eta = 0,953)$  et  $\lambda(\eta = 0,953)$ .

### II.5.2.3. Relation approchée $\eta(Q^*)$

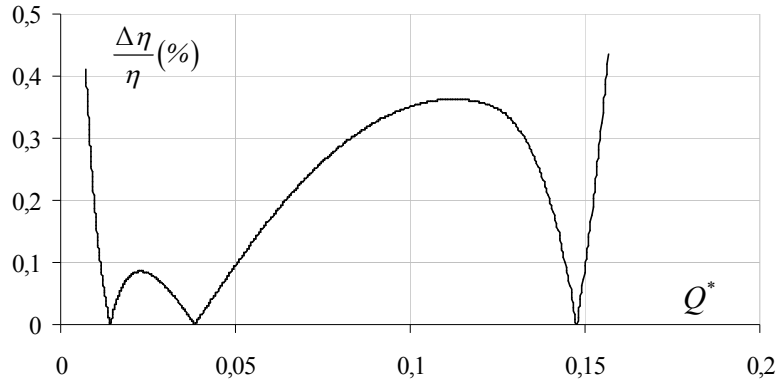
Il est bien évident, au regard des relations (2.96), (2.97) et (2.98), que le taux de remplissage  $\eta$  est implicite vis-à-vis de la conductivité relative  $Q^*$ .

Pour évaluer le taux de remplissage  $\eta$  à partir de la valeur connue de la conductivité relative  $Q^*$ , nos calculs ont montré que dans la large gamme  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ , correspondant à  $0,007175 \leq Q^* \leq 0,15663$ , la relation approchée suivante peut être utilisée avec une erreur relative maximale inférieure à 0,44% seulement :



$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 1,882 Q^{*0,503} \quad (2.99)$$

Les écarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.99) sont représentés graphiquement sur la figure 2.14.



**Figure 2.14 :** Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.99) sur le calcul du taux de remplissage de la conduite de forme ovoïdale dans la gamme  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$  correspondant à  $0,007175 \leq Q^* \leq 0,15663$ .

#### II.5.2.4. Exemple d'application 2.7

On souhaite déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans une conduite circulaire de diamètre  $D = 2 \text{ m}$ , écoulant un débit volume  $Q = 1,2 \text{ m}^3 / \text{s}$  sous une pente longitudinale  $i = 5 \cdot 10^{-4}$ . Le coefficient de résistance à l'écoulement de Manning est  $n = 0,0148 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ .

#### Solution

i. Calculons la conductivité relative  $Q^*$  par application de la relation (2.93) :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3}\sqrt{i}} = \frac{0,0148 \times 1,2}{2^{8/3} \times \sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} = 0,12508675$$

La conductivité relative ainsi calculée appartient bien à l'intervalle  $[0; 0,17054]$ . Elle appartient même à l'intervalle  $[0,007175; 0,156630]$ , ce qui permet d'utiliser la relation approchée (2.99).

ii. Ainsi, le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite est, en vertu de la relation approchée (2.99) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1}\left(1,882 Q^{*0,503}\right) = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1}\left(1,882 \times 0,12508675^{0,503}\right) = 0,69021443 \cong 0,69$$

iii. La profondeur normale  $y_n$  recherchée est, par suite :

$$y_n = D\eta = 2 \times 0,69 = 1,38 \text{ m}$$

iv. Vérifions nos calculs, en déterminant la valeur du débit volume  $Q$  pour le taux de remplissage  $\eta$  ainsi calculé. Pour cela, nous pouvons utiliser la relation (2.97), puisque  $2/3 \leq \eta \leq 1$ . Les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  sont données par les relations (2.47) et (2.55) respectivement, soit :

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,69021443 - 2) = 1,6432354$$

$$\begin{aligned} \lambda(\eta) &= 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2) \\ &= 0,5104589 + (0,69021443 - 2/3) \times \sqrt{(1 - 0,69021443) \times (0,69021443 - 1/3)} \\ &\quad - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,69021443 - 2) = 0,35161142 \end{aligned}$$

Ainsi, selon la relation (2.97), le débit volume  $Q$  serait égal à :

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{[\tau(\eta)]^{2/3}} D^{8/3} \sqrt{i} = \frac{1}{0,0148} \times \frac{0,35161142^{5/3}}{1,6432354^{2/3}} \times 2^{8/3} \times \sqrt{5 \cdot 10^{-4}} = 1,20672515 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons ainsi conclure que l'écart relatif entre le débit volume donné à l'énoncé et celui que nous venons de calculer est inférieur à 0,56% seulement. La valeur calculée du taux de remplissage  $\eta$  par la relation approchée (2.99) est donc acceptable.

#### II.5.2.5. Exemple d'application 2.8

Déterminer la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement dans une conduite circulaire de diamètre  $D = 2 \text{ m}$ , écoulant un débit volume  $Q = 0,96 \text{ m}^3 / \text{s}$  sous une pente longitudinale  $i = 4 \cdot 10^{-4}$ . Le coefficient de résistance à l'écoulement de Manning est  $n = 0,015 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ .

#### Solution

i. Calculons la conductivité relative  $Q^*$  par application de la relation (2.93) :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0,015 \times 0,96}{2^{8/3} \times \sqrt{4 \cdot 10^{-4}}} = 0,11339289$$

La conductivité relative ainsi calculée appartient bien à l'intervalle  $[0; 0,17054]$ . Elle appartient même à l'intervalle  $[0,007175; 0,156630]$ , ce qui permet d'utiliser la relation approchée (2.99).

ii. Ainsi, le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite est, en vertu de la relation approchée (2.99) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left( 1,882 Q^{*0,503} \right) = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left( 1,882 \times 0,11339289^{0,503} \right) = 0,65036425 \cong 0,65$$

iii. La profondeur normale  $y_n$  recherchée est, par suite :

$$y_n = D\eta = 2 \times 0,65 = 1,3 \text{ m}$$

iv. Vérifions nos calculs, en déterminant la valeur du débit volume  $Q$  pour le taux de remplissage  $\eta$  ainsi calculé. Pour cela, nous pouvons utiliser la relation (2.95), puisque  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ . Les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  sont données par les relations (2.15) et (2.27) respectivement, soit :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,65036425 \right) = 1,56349435$$

$$\begin{aligned} \zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,65036425 \right) - \left( \frac{2}{3} - 0,65036425 \right) \times \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - 0,65036425 \right)^2} \\ &\quad - \frac{4}{3} \times 0,65036425 = 0,32505915 \end{aligned}$$

Ainsi, selon la relation (2.95), le débit volume  $Q$  serait égal à :

$$Q = \frac{1 \left[ \zeta(\eta) \right]^{5/3}}{n \left[ \vartheta(\eta) \right]^{2/3}} D^{8/3} \sqrt{i} = \frac{1}{0,015} \times \frac{0,32505915^{5/3}}{1,56349435^{2/3}} \times 2^{8/3} \times \sqrt{4 \cdot 10^{-4}} = 0,96581029 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons ainsi observer que l'écart relatif entre le débit volume donné à l'énoncé et celui que nous venons de calculer est de 0,6% seulement. La valeur calculée du taux de remplissage  $\eta$  par la relation approchée (2.99) est donc acceptable.

#### II.5.2.6. Exemple d'application 2.9

On souhaite déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans une conduite circulaire de diamètre  $D = 3 \text{ m}$ , écoulant un débit volume  $Q = 4,17 \text{ m}^3 / \text{s}$  sous une pente longitudinale  $i = 3,5 \cdot 10^{-4}$ . Le coefficient de résistance à l'écoulement de Manning est  $n = 0,012 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$ .

## Solution

i. Calculons la conductivité relative  $Q^*$  par application de la relation (2.93) :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3}\sqrt{i}} = \frac{0,012 \times 4,17}{3^{8/3} \times \sqrt{3,5 \cdot 10^{-4}}} = 0,14287621$$

La conductivité relative ainsi calculée appartient bien à l'intervalle  $[0; 0,17054]$ . Elle appartient même à l'intervalle  $[0,007175; 0,156630]$ , ce qui permet d'utiliser la relation approchée (2.99).

ii. Ainsi, le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite est, en vertu de la relation approchée (2.99) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left( 1,882 Q^{*0,503} \right) = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left( 1,882 \times 0,14287621^{0,503} \right) = 0,75017476 \cong 0,75$$

iii. La profondeur normale  $y_n$  recherchée est, par suite :

$$y_n = D\eta = 3 \times 0,75 = 2,25 \text{ m}$$

iv. Vérifions nos calculs, en déterminant la valeur du débit volume  $Q$  pour le taux de remplissage  $\eta$  ainsi calculé. Pour cela, nous pouvons utiliser la relation (2.97), puisque  $2/3 \leq \eta \leq 1$ . Les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  sont données par les relations (2.47) et (2.55) respectivement, soit :

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 1,76455412$$

$$\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$$

$$= 0,5104589 + (0,75 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,75) \times (0,75 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 0,39089728$$

Ainsi, selon la relation (2.97), le débit volume  $Q$  serait égal à :

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{[\tau(\eta)]^{2/3}} D^{8/3} \sqrt{i} = \frac{1}{0,012} \times \frac{0,39089728^{5/3}}{1,76455412^{2/3}} \times 3^{8/3} \times \sqrt{3,5 \cdot 10^{-4}} = 4,1769301 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons ainsi conclure que l'écart relatif entre le débit volume donné à l'énoncé et celui que nous venons de calculer est inférieur à 0,17% seulement. La valeur calculée du taux de remplissage  $\eta$  par la relation approchée (2.99) est donc acceptable.

### II.5.2.7. Conductivité relative rapportée à la profondeur normale

La conductivité relative rapportée à la profondeur normale peut être définie par la relation :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{i}} \quad (2.100)$$

Compte tenu de la relation (2.93), nous pouvons alors écrire que :

$$Q_y^* = \frac{Q^*}{\eta^{8/3}} \quad (2.101)$$

La conductivité relative  $Q^*$  s'exprime par les relations (2.94), (2.96) ou (2.98), selon la gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta$ . Ainsi, pour :

i.  $\eta \leq 1/15$

$$Q_y^* = \frac{0,0053 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3}}{\eta^{8/3}} \quad (2.102)$$

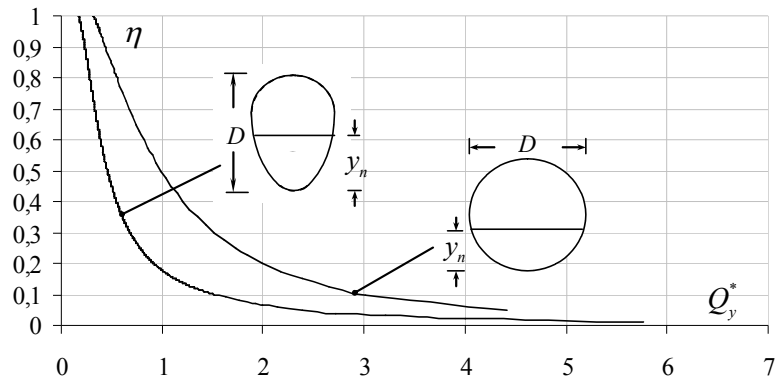
ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$Q_y^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{5/3}}{\eta^{8/3} [\vartheta(\eta)]^{2/3}} \quad (2.103)$$

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$Q_y^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{\eta^{8/3} [\tau(\eta)]^{2/3}} \quad (2.104)$$

Ainsi, dans toute la gamme  $0 \leq \eta \leq 1$ , la conductivité relative  $Q_y^*$  ne dépend que du taux de remplissage  $\eta$ . Les relations (2.102), (2.103) et (2.104) ont été représentées graphiquement sur la figure 2.15. La courbe obtenue a été comparée, à titre indicatif, à celle de l'écoulement dans la conduite circulaire.



**Figure 2.15 :** Courbes de variation  $\eta(Q_y^*)$  de l'écoulement dans les conduites de formes ovoïdale et circulaire.

Le caractère implicite du taux de remplissage  $\eta$ , vis-à-vis de la conductivité relative  $Q_y^*$ , est évident au regard de la forme des relations (2.102), (2.103) et (2.104). L'étude de ces relations a montré que le taux de remplissage  $\eta$  peut s'exprimer de manière explicite en fonction de  $Q_y^*$  par des relations approchées, selon la gamme de valeurs de  $\eta$ . C'est ainsi que pour :

**a)**  $\eta \leq 0,11$ , correspondant à  $Q_y^* \geq 1,413$  :

$$\eta = \left[ \frac{\sqrt{0,486(1 + 0,468Q_y^{*2})} - 0,352Q_y^*}{1 + 0,213Q_y^{*2}} \right]^2 \quad (2.105)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (2.105) reste inférieur à 0,3% seulement.

**b)**  $0,11 \leq \eta \leq 0,58$ , correspondant à  $0,401 \leq Q_y^* \leq 1,413$  :

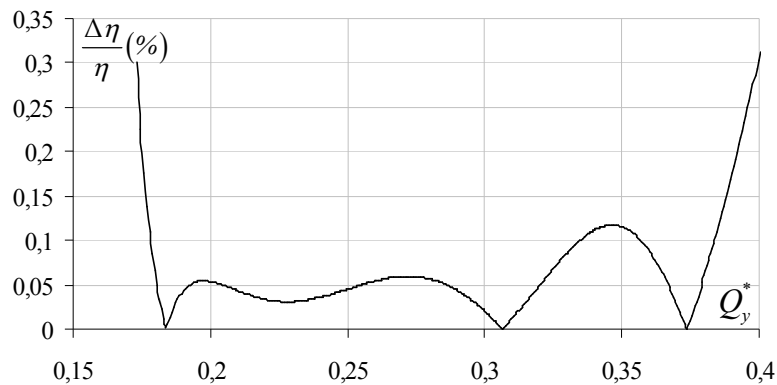
$$[\sinh(1,4\eta)]^{-1} = 3,974Q_y^{*1,407} \quad (2.106)$$

L'application de la relation approchée (2.106) entraîne un écart relatif maximal de l'ordre de 0,6%.

**c)**  $0,58 \leq \eta \leq 0,999$ , correspondant à  $0,173 \leq Q_y^* \leq 0,4$  :

$$\eta = \left[ \frac{\sqrt{0,825(1 + 17,5Q_y^{*2})} + 1,717Q_y^*}{1 + 13,92Q_y^{*2}} \right]^2 \quad (2.107)$$

L'écart relatif maximal occasionné par l'application de la relation approchée (2.107) est inférieur à 0,32% seulement, comme l'indique la figure 2.16.



**Figure 2.16 :** Ecarts relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (2.107).

Les relations approchées (2.105), (2.106) et (2.107) sont intéressantes dans la mesure où elles permettent de déterminer de manière explicite le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite de forme ovoïdale étudiée, et par conséquent le diamètre  $D$  de la conduite, à partir des valeurs imposées du débit volume  $Q$ , de la pente longitudinale  $i$ , de la profondeur normale  $y_n$  et du coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  de Manning. Les exemples suivants indiquent les étapes à suivre pour la détermination du diamètre  $D$  de la conduite, en ayant recours aux relations approchées (2.105), (2.106) et (2.107).

#### II.5.2.8. Exemple d'application 2.10

Reprenons les données de l'exemple d'application 9 et déterminons le diamètre  $D$  de la conduite. Les données sont alors :

$$Q = 4,17 \text{ m}^3 / \text{s} ; i = 3,5 \cdot 10^{-4} ; y_n = 2,25 \text{ m} ; n = 0,012 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$$

#### **Solution**

- i.* Calculons la conductivité relative  $Q_y^*$ , rapportée à la profondeur normale  $y_n$ , par application de la relation (2.100), soit :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0,012 \times 4,17}{2,25^{8/3} \times \sqrt{3,5 \cdot 10^{-4}}} = 0,3077017$$

La conductivité relative ainsi calculée appartient à l'intervalle  $[0,173; 0,4]$ , ce qui permet de conclure que le taux de remplissage  $\eta$  est tel que  $0,58 \leq \eta \leq 1$ . Il est donc régi par la relation approchée (2.107), soit :

$$\eta = \left[ \frac{\sqrt{0,825(1+17,5Q_y^{*2})} + 1,717Q_y^*}{1+13,92Q_y^{*2}} \right]^2 = \left[ \frac{\sqrt{0,825 \times (1+17,5 \times 0,3077017^2)} + 1,717 \times 0,3077017}{1+13,92 \times 0,3077017^2} \right]^2$$

$$= 0,75107839$$

ii. Ainsi, le diamètre  $D$  recherché est :

$$D = y_n / \eta = 2,25 / 0,75107839 = 2,99569265 \text{ m} \cong 3 \text{ m}$$

L'écart relatif entre la valeur du diamètre ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application 9 n'est que de 0,14% seulement.

### II.5.2.9. Exemple d'application 2.11

Déterminer le diamètre  $D$  de la conduite de forme ovoïdale, représentée par la figure 2.1, pour les données suivantes :

$$Q = 2,656 \text{ m}^3 / \text{s} ; i = 5.10^{-4} ; y_n = 1,8 \text{ m} ; n = 0,018 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}.$$

#### Solution

i. Calculons la conductivité relative  $Q_y^*$ , rapportée à la profondeur normale  $y_n$ , par application de la relation (2.100), soit :

$$Q_y^* = \frac{nQ}{y_n^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0,018 \times 2,656}{1,8^{8/3} \times \sqrt{5.10^{-4}}} = 0,4459528$$

La conductivité relative ainsi calculée appartient à l'intervalle  $[0,401;1,413]$ , ce qui permet de conclure que le taux de remplissage  $\eta$  est tel que  $0,11 \leq \eta \leq 0,58$ . Il est donc régi par la relation approchée (2.106), soit :

$$\eta = \frac{1}{1,4} \operatorname{asinh} \left[ 3,974 Q_y^{*1,407} \right]^{-1} = \frac{1}{1,4} \times \operatorname{asinh} \left( 3,974 \times 0,4459528^{1,407} \right)^{-1} = 0,51428062$$

ii. Ainsi, le diamètre  $D$  recherché est :

$$D = y_n / \eta = 1,8 / 0,51428062 = 3,5 \text{ m}$$

iii. Vérifions nos calculs en déterminant, pour le taux de remplissage ainsi calculé, la conductivité relative  $Q_y^*$  en ayant recours à la relation (2.103), puis comparons-la à celle obtenue à l'étape i.



Pour cela, évaluons d'abord les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$ . Celles-ci sont données par les relations (2.15) et (2.27) respectivement, soit :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,51428062 \right) = 1,29013648$

- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta$   
 $= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,51428062 \right) - \left( \frac{2}{3} - 0,51428062 \right) \times \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - 0,51428062 \right)^2}$   
 $- \frac{4}{3} \times 0,51428062 = 0,23551897$

Ainsi, selon la relation (2.103), la conductivité relative  $Q_y^*$  est :

$$Q_y^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{5/3}}{\eta^{8/3} [\vartheta(\eta)]^{2/3}} = \frac{0,23551897^{5/3}}{0,51428062^{8/3} \times 1,29013648^{2/3}} = 0,44642888$$

Nous pouvons alors observer que l'écart relatif entre la conductivité relative  $Q_y^*$  que nous venons de calculer et celle déterminée à l'étape (i) est inférieur à 0,11% seulement. Ce résultat permet de conclure que la valeur du taux de remplissage  $\eta$ , évaluée par la relation approchée (2.106), est acceptable.

#### II.5.2.10. Courbe de remplissage de la conduite pour $n = \text{constante}$

La courbe de remplissage de la conduite est donnée par la variation du taux de remplissage  $\eta$  en fonction du rapport  $Q/Q_p$ , où  $Q_p$  est le débit volume à l'état plein, correspondant à  $\eta = 1$ . Pour une conduite donnée et pour un coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  constant, indépendant de la variation du taux de remplissage  $\eta$ , la relation (2.80) demeure en vigueur.

Pour le cas de la conduite de forme ovoïdale, représentée par la figure 2.1, la conductivité relative  $Q_p^*$  est régie par la relation (2.98) pour  $\eta = 1$ . Pour cette valeur du taux de remplissage, les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$ , exprimées par les relations (2.47) et (2.55) respectivement, prennent les valeurs :

- $\tau(\eta = 1) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 1 - 2) = 2,64329817 \cong 2,6433$

- $\lambda(\eta = 1) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$   
 $= 0,5104589 + (1 - 2/3) \times \sqrt{(1-1) \times (1-1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 1 - 2) = 0,5104589$

Ainsi, selon la relation (2.98), la conductivité relative à l'état plein est :

$$Q_p^* = \frac{[\lambda(\eta=1)]^{5/3}}{[\tau(\eta=1)]^{2/3}} = \frac{0,5104589^{5/3}}{2,64329817^{2/3}} = 0,170544295$$

Ainsi, compte tenu des relations (2.80), (2.94), (2.96) et (2.98), nous pouvons écrire que pour :

i.  $\eta \leq 1/15$

$$\frac{Q}{Q_p} = 0,031077 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \quad (2.108)$$

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$\frac{Q}{Q_p} = 5,86368 \frac{[\zeta(\eta)]^{5/3}}{[\vartheta(\eta)]^{2/3}} \quad (2.109)$$

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\frac{Q}{Q_p} = 5,86368 \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{[\tau(\eta)]^{2/3}} \quad (2.110)$$

Nous pouvons ainsi constater, au regard des relations (2.108), (2.109) et (2.110), que le rapport  $Q/Q_p$  est exclusivement dépendant du taux de remplissage  $\eta$ .

Les relations (2.108), (2.109) et (2.110) ont été représentées graphiquement sur la figure 2.17 et la courbe obtenue a été comparée, à titre indicatif, à celle de la conduite de forme circulaire. La courbe de variation  $\eta(Q/Q_p)$ , notamment celle de la conduite de forme ovoïdale considérée, montre que le rapport  $Q/Q_p$  augmente avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  et atteint un maximum. Au-delà de ce maximum, le rapport  $Q/Q_p$  diminue en dépit de l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$ , jusqu'à la valeur  $Q/Q_p = 1$  correspondant à  $\eta = 1$ , ou à l'état plein de la conduite. La valeur maximale de  $Q/Q_p$  correspond à un taux de remplissage  $\eta = 0,953$ . Cette valeur du taux de remplissage appartient à gamme  $2/3 \leq \eta \leq 1$  et la valeur maximale de  $Q/Q_p$  peut donc être évaluée en vertu de la relation (2.110).

Les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$ , exprimées par les relations (2.47) et (2.55) respectivement, prennent les valeurs :

- $\tau(\eta = 0,953) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,953 - 2) = 2,28497611$

- $\lambda(\eta = 0,953) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$   
 $= 0,5104589 + (0,953 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,953) \times (0,953 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,953 - 2) = 0,49960378$

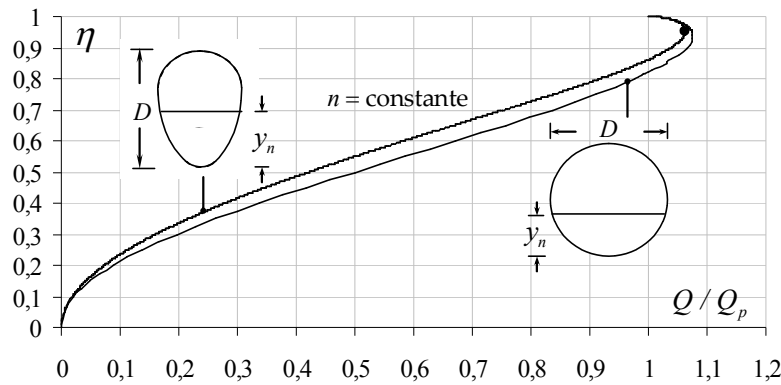
Ainsi, selon la relation (2.110), la valeur maximale de  $Q/Q_p$ , correspondant également à  $Q_{\max.}/Q_p$ , est :

$$\frac{Q_{\max.}}{Q_p} = 5,86368 \frac{[\lambda(\eta = 0,953)]^{5/3}}{[\tau(\eta = 0,953)]^{2/3}} = 5,86368 \times \frac{0,49960378^{5/3}}{2,28497611^{2/3}} = 1,0632$$

ou bien :

$$Q_{\max.} = 1,0632 Q_p \quad (2.111)$$

La capacité d'évacuation de la conduite de forme ovoïdale considérée correspond donc au débit maximal égal à 1,0632 fois le débit à l'état plein, à condition que le coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  de Manning demeure constant.



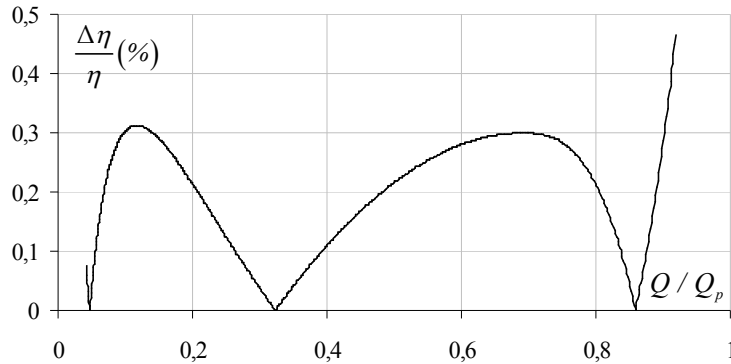
**Figure 2.17 :** Variation du rapport  $Q/Q_p$  pour les conduites de forme ovoïdale et circulaire en fonction du taux de remplissage  $\eta$ .

(●) Valeur maximale de  $Q/Q_p$  pour la conduite ovoïdale, correspondant à  $\eta = 0,953$ .

Au regard des relations (2.108), (2.109) et (2.110), il apparaît bien évident que le taux de remplissage  $\eta$  est implicite vis-à-vis de  $Q/Q_p$ . Les calculs ont montré que dans la large gamme pratique  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ , correspondant à  $0,042 \leq Q/Q_p \leq 0,918$ , les relations (2.108), (2.109) et (2.110) peuvent être remplacées par la relation unique suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 0,773\left(\frac{Q}{Q_p}\right)^{0,504} \quad (2.112)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (2.112) est inférieur à 0,5%. Les écarts relatifs issus de l'application de la relation (2.112), dans la gamme  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ , sont représentés graphiquement sur la figure 2.18.



**Figure 2.18 :** Ecarts relatifs occasionnés par la relation approchée (2.112) dans la gamme  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$  correspondant à  $0,042 \leq Q/Q_p \leq 0,918$ .

#### II.5.2.11. Exemple d'application 2.12

Reprenons l'exemple d'application 9 et déterminons la profondeur normale  $y_n$  en ayant recours à la relation approchée (2.112). Les données du problème sont alors :

$$Q = 4,17 \text{ m}^3 / \text{s} ; D = 3 \text{ m} ; i = 3,5 \cdot 10^{-4} ; n = 0,012 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}.$$

#### Solution

i. Calculons la conductivité relative  $Q^*$  par application de la relation (2.93) :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3}\sqrt{i}} = \frac{0,012 \times 4,17}{3^{8/3} \times \sqrt{3,5 \cdot 10^{-4}}} = 0,14287621$$

ii. Compte tenu du fait que  $Q_p^* = 0,170544295$  et que  $Q/Q_p = Q^*/Q_p^*$ , alors :

$$\frac{Q}{Q_p} = \frac{0,14287621}{0,170544295} = 0,83776599 < \frac{Q_{\max.}}{Q_p} = 1,0632$$

iii. Le rapport  $Q/Q_p$  ainsi calculé appartient à la gamme  $0,042 \leq Q/Q_p \leq 0,918$ . De ce fait, le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite peut alors être évalué par la relation approchée (2.112), soit :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,773 \left( \frac{Q}{Q_p} \right)^{0,504} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,773 \times 0,83776599^{0,504} \right] = 0,74988643 \cong 0,75$$

iv. La profondeur normale  $y_n$  recherchée est par suite :

$$y_n = D\eta = 3 \times 0,75 = 2,25 \text{ m}$$

Il s'agit bien de la valeur de la profondeur normale  $y_n$  calculée à l'étape (iii) de l'exemple d'application 9.

#### II.5.2.12. Relation $\eta(Q/Q_{\max.})$ pour $n = \text{constante}$

Nous avons montré, au cours de l'étude de la variation de la conductivité relative  $Q^*$ , que lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  de *Manning* demeure constant, la valeur maximale de  $Q^*$  est  $Q_{\max.}^* \cong 0,181324$  et s'obtient pour le taux de remplissage  $\eta = 0,953$ . D'autre part, il est bien évident que nous pouvons montrer que la relation (2.86) reste en vigueur lorsque le coefficient  $n$  est une constante. Ainsi, compte tenu des relations (2.86), (2.94), (2.96) et (2.98), nous pouvons écrire que pour :

i.  $\eta \leq 1/15$

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = 0,02923 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \quad (2.113)$$

Rappelons que les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  sont données par les relations (2.3) et (2.6) respectivement.

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

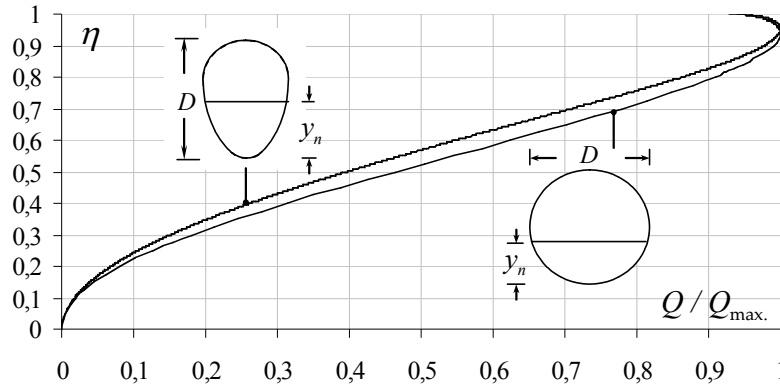
$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = 5,515 \frac{[\zeta(\eta)]^{5/3}}{[\vartheta(\eta)]^{2/3}} \quad (2.114)$$

où  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  sont donnés par les relations (2.15) et (2.27) respectivement.

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = 5,515 \frac{[\lambda(\eta)]^{5/3}}{[\tau(\eta)]^{2/3}} \quad (2.115)$$

Dans la relation (2.115), les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  sont données par les relations (2.47) et (2.55) respectivement. Nous pouvons alors constater, au regard des relations (2.113), (2.114) et (2.115), que le rapport  $Q/Q_{\max}$  est exclusivement dépendant du taux de remplissage  $\eta$ . Les relations (2.113), (2.114) et (2.115) sont graphiquement représentées sur la figure 2.19. La courbe obtenue a été comparée, à titre indicatif, à celle de la conduite de forme circulaire.



**Figure 2.19 :** Variation de  $\eta(Q/Q_{\max})$  pour les conduites de formes ovoïdale et circulaire ( $n = \text{constante}$ ).

Il ressort de la figure 2.19 que  $Q/Q_{\max}$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$ , jusqu'à la valeur  $Q/Q_{\max} = 1$  correspondant à  $\eta = 0,953$ . Dans un second temps,  $Q/Q_{\max}$  diminue en dépit de l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$  dans l'intervalle  $[0,953; 1]$ . La valeur de  $Q/Q_{\max}$  correspondant à  $\eta = 1$  s'obtient par la relation (2.115), soit :

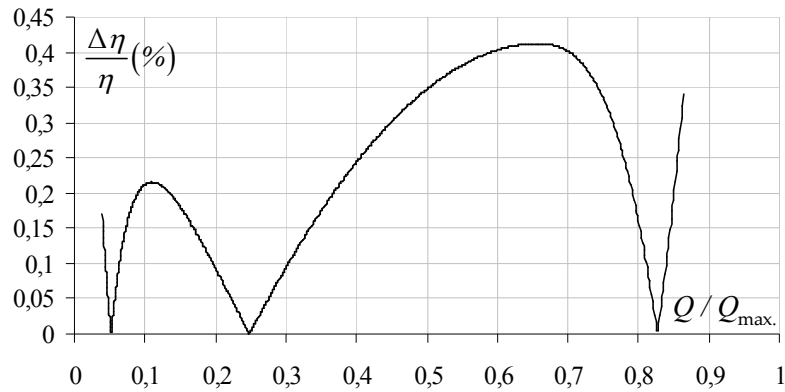
$$\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)_{\eta=1} = 5,515 \frac{[\lambda(\eta=1)]^{5/3}}{[\tau(\eta=1)]^{2/3}} = 5,515 \times \frac{0,5104589^{5/3}}{2,64329817^{2/3}} \cong 0,94$$

Le taux de remplissage  $\eta$  est implicite vis-à-vis du rapport  $Q/Q_{\max}$ , comme le montre les relations (2.113), (2.114) et (2.115). Dans la large gamme pratique  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ , correspondant à  $0,0395 \leq Q/Q_{\max} \leq 0,864$ , nos calculs ont montré que les relations (2.113), (2.114) et (2.115) pouvaient être remplacées par la relation approchée suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 0,798 \left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0,504} \quad (2.116)$$

L'écart relatif maximal occasionné par la relation approchée (2.116) est inférieur à 0,42%, ce qui est largement admissible lors des applications pratiques. Les écarts relatifs, issus de l'application de la

relation approchée (2.116), sont représentés graphiquement sur la figure 2.20.



**Figure 2.20** : Ecarts relatif (%) occasionnés par la relation approchée (2.116) dans la Gamme  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$  correspondant à  $0,0395 \leq Q / Q_{\max.} \leq 0,864$ .

### II.5.2.13. Exemple d'application 2.13

Reprenons l'exemple d'application 2.12 et déterminons la profondeur normale  $y_n$  en ayant recours à la relation approchée (2.116). Les données du problème sont alors :

$$Q = 4,17 \text{ m}^3 / \text{s} ; D = 3 \text{ m} ; i = 3,5 \cdot 10^{-4} ; n = 0,012 \text{ m}^{-1/3} \text{ s} .$$

#### Solution

i. Calculons la conductivité relative  $Q^*$  par application de la relation (2.93), soit :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0,012 \times 4,17}{3^{8/3} \times \sqrt{3,5 \cdot 10^{-4}}} = 0,14287621$$

ii. Compte tenu du fait que  $Q_{\max.}^* \cong 0,181324$  et que  $Q / Q_{\max.} = Q^* / Q_{\max.}^*$ , alors :

$$\frac{Q}{Q_{\max.}} = \frac{0,14287621}{0,181324} \cong 0,788$$

iii. Le rapport  $Q / Q_{\max.}$  ainsi calculé appartient à la gamme  $0,0395 \leq Q / Q_{\max.} \leq 0,864$ . De ce fait, le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite peut alors être évalué par la relation approchée (2.116), soit :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_p} \right)^{0,504} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,798 \times 0,83776599^{0,504} \right] \cong 0,7508$$

iv. La profondeur normale  $y_n$  recherchée est par suite :

$$y_n = D\eta = 3 \times 0,7508 = 2,2524 m$$

La profondeur normale  $y_n$  que nous venons de calculer correspond, avec un écart relatif inférieur à 0,11% seulement, à celle calculée à l'étape (iv) de l'exemple d'application 12.



## II.6. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A COEFFICIENT DE RESISTANCE VARIABLE

Le coefficient de résistance à l'écoulement, aussi bien celui de *Chézy* que celui de *Manning*, devrait en principe dépendre, parmi d'autres paramètres, du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite. Lorsqu'il s'agit de déterminer le diamètre de la conduite, le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy*, ou  $n$  de *Manning*, ne constitue pas une donnée du problème et les relations que nous avons considérées dans le paragraphe précédent ne peuvent plus être utilisées. Ces coefficients doivent donc être calculés par des relations différentes de celles que nous avons considérées jusqu'à présent. L'un des objectifs de cette partie de l'étude est de présenter ces relations, puis de les appliquer à quelques exemples pratiques.

### II.6.1. Coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*

#### II.6.1.1. Relation générale et variation du coefficient de résistance $C$ de *Chézy*

Pour exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy* par une relation de validité générale, il est utile d'avoir recours à la formule du débit volume d'*Achour* et *Bedjaoui* (2006), soit :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.117)$$

Dans cette relation,  $\varepsilon$  désigne la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite et  $R$  est un nombre de *Reynolds* défini par la relation :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (2.118)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Pour le cas de la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1, l'aire de la section mouillée  $A$  figurant dans la relation (2.117) s'exprime par les relations (2.7), (2.28), et (2.56) selon la gamme du taux de remplissage  $\eta$ . Quant au rayon hydraulique  $R_h$  figurant dans la relation (2.118), il s'exprime par les relations (2.8), (2.29) et (2.59). Il n'existe de nos jours aucune relation générale susceptible d'évaluer à elle seule l'aire de la section mouillée  $A$  ou le rayon hydraulique  $R_h$ .

Pour une conduite de forme ovoïdale à l'état plein, correspondant au taux de remplissage  $\eta = 1$ , le rayon hydraulique  $R_{h,p}$  est régi par la relation (2.59), où l'indice «  $p$  » désigne l'état plein. Les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  figurant dans cette relation sont données par les relations (2.47) et (2.55) respectivement, et l'on peut aisément montrer que  $\tau(\eta = 1) \cong 2,6433$  et  $\lambda(\eta = 1) \cong 0,51046$ . Par suite, le rayon hydraulique  $R_{h,p}$  à l'état plein est, en vertu de la relation (2.59) :

$$R_{h,p} \cong 0,193 D \quad (2.119)$$

Par suite, le nombre de *Reynolds*  $R_p$  à l'état plein de la conduite est, selon la relation (2.118) :

$$R_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (2.120)$$

En comparant les relations (2.61) et (2.117), nous pouvons déduire que le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy* est tel que :

$$C = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.121)$$

La relation (2.121) peut aussi s'écrire, en termes adimensionnels :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.122)$$

Tenant compte des relations (2.8), (2.29) et (2.59), la relation (2.121) montre que le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy* est fonction à la fois de la rugosité relative  $\varepsilon / D$ , du taux de remplissage  $\eta$  et d'un nombre de *Reynolds*  $R$ , lui-même fonction de la pente longitudinale  $i$ , du diamètre  $D$ , de  $\eta$  et de la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. Nous pouvons donc écrire la relation fonctionnelle :

$$C(D, \eta, i, \varepsilon, \nu) = 0 \quad (2.123)$$

En ayant recours aux relations (2.8), (2.29), (2.59), nous pouvons écrire que pour :

*i.*  $\eta \leq 1/15$

- La relation (2.118) mène à :

$$R = 1,0886[\varphi(\eta)]^{3/2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (2.124)$$

ou bien :

$$R = 0,28347[\varphi(\eta)]^{3/2} R_p \quad (2.125)$$

- La relation (2.122) mène à :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{1,233\varphi(\eta)} + \frac{35,418}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.126)$$

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

- La relation (2.118) mène à écrire que :

$$R = 32\sqrt{2} \left[ \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (2.127)$$

ou bien :

$$R = 11,783 \left[ \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.128)$$

- La relation (2.122) permet d'écrire que :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8[\zeta(\eta)/\vartheta(\eta)]} + \frac{0,852}{R_p [\zeta(\eta)/\vartheta(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.129)$$

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

- La relation (2.118) mène à :

$$R = 32\sqrt{2} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{3/2} \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} \quad (2.130)$$

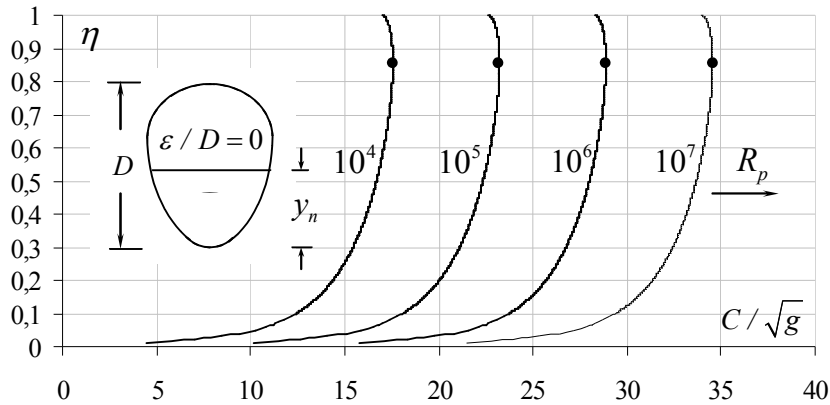
ou bien :

$$R = 11,783 \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{3/2} R_p \quad (2.131)$$

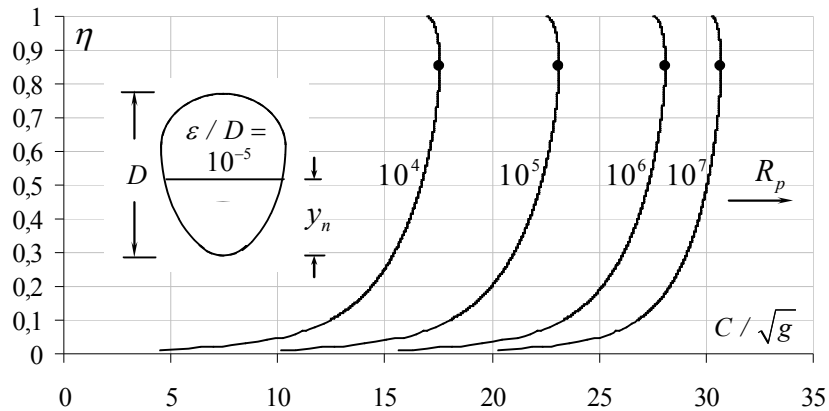
- La relation (2.122) mène à :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,852}{R_p [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.132)$$

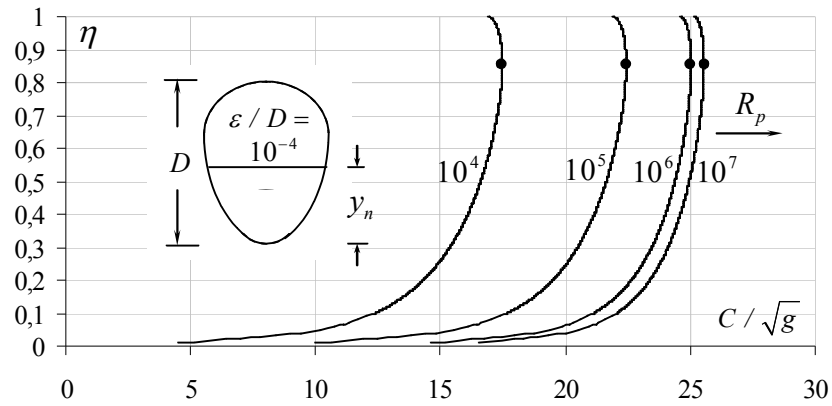
Les relations (2.126), (2.129) et (2.132) traduisent ainsi la relation fonctionnelle (2.123), selon la gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta$ . Ces relations ont été graphiquement représentées sur la figure 2.21 (a à e).



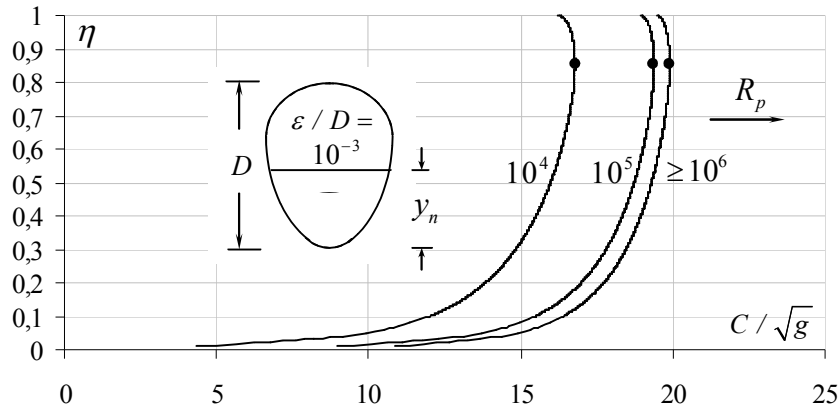
a)



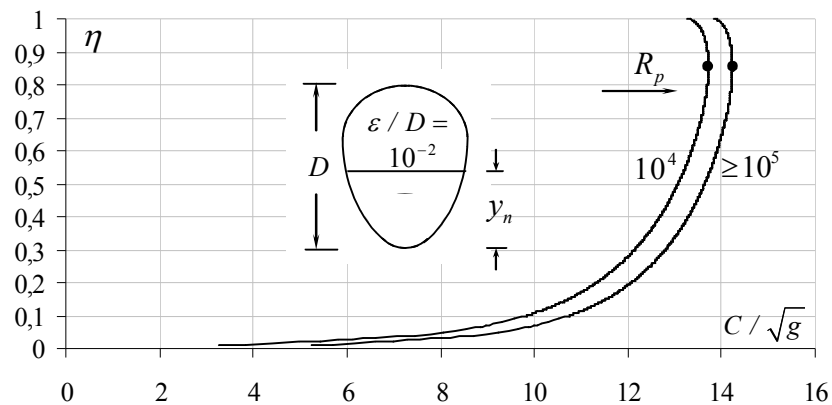
b)



c)



d)



e)

**Figure 2.21 :** Variation du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy en fonction du taux de remplissage  $\eta = y_n / D$ , selon les relations (2.126), (2.129) et (2.132).

(●) Valeurs maximales  $C_{\max.} / \sqrt{g}$  obtenues pour  $\eta \cong 0,8544$ .

Il ressort de la figure 2.21 (a à e) que, pour la même valeur du nombre de Reynolds  $R_p$  à l'état plein et quelle que soit la rugosité relative  $\epsilon / D$ ,  $C / \sqrt{g}$  augmente avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$ . Notons que cette augmentation est très rapide dans la gamme approximative  $0 \leq \eta \leq 0,2$ , alors qu'elle est plus lente au-delà de  $\eta = 0,2$ . Pour toutes les rugosités relatives considérées, les courbes de la figure 2.21 (a à e) montrent que  $C / \sqrt{g}$  atteint un maximum

et les calculs ont montré que le taux de remplissage correspondant à  $C_{\max.} / \sqrt{g}$  est  $\eta = 0,85438$ . Cette valeur de  $\eta$  appartient à l'intervalle  $2/3 \leq \eta \leq 1$  et, de ce fait,  $C_{\max.} / \sqrt{g}$  est régi par la relation (2.132). Nous pouvons donc énoncer que la valeur maximale  $C_{\max.}$  du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* s'obtient à la profondeur  $y = 0,85438 D$ , alors que les calculs ont montré que, pour la conduite de forme circulaire,  $C_{\max.}$  s'obtient à la profondeur  $y = 0,815 D$ .

La figure 2.21 (a à e) montre enfin que les courbes de variation de  $C / \sqrt{g}$  se resserrent au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative  $\varepsilon / D$ . Nous pouvons constater sur la figure 2.21e, correspondant à la plus forte rugosité relative considérée, que les courbes de variation de  $C / \sqrt{g}$  sont extrêmement proches les unes des autres et se confondent au-delà du nombre de *Reynolds*  $R_p = 10^5$ . Ceci correspond au régime turbulent rugueux pour lequel  $C / \sqrt{g}$  est indépendant du nombre de *Reynolds*  $R_p$  et donc de la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Pour exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement  $C_{\max.}$  de *Chézy*, introduisons la valeur  $\eta = 0,85438$  dans la relation (2.132). Les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  sont régies par les relations (2.47) et (2.55) respectivement. Pour  $\eta = 0,85438$ , elles prennent les valeurs suivantes :

- $\tau(\eta = 0,85438) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,85438 - 2) = 1,99488775$
- $\lambda(\eta = 0,85438) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$   
 $= 0,5104589 + (0,85438 - 2/3) \times \sqrt{(1 - 0,85438) \times (0,85438 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,85438 - 2)$   
 $= 0,45409685$

Ainsi, selon la relation (2.132), le coefficient de résistance à l'écoulement maximal  $C_{\max.}$  de *Chézy*

$$\text{est : } C_{\max.} = -4 \sqrt{2g} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8 [0,45409685 / 1,99488775]} + \frac{0,852}{R_p [0,45409685 / 1,99488775]^{3/2}} \right)$$

Soit :

$$C_{\max.} = -4 \sqrt{2g} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) \quad (2.133)$$

Rappelons que le nombre de *Reynolds*  $R_p$ , figurant dans la relation (2.133), est donné par la relation (2.120). La relation (2.133) permet donc d'évaluer la valeur maximale du coefficient de résistance à

l'écoulement de *Chézy*, à partir des valeurs connues du diamètre  $D$  de la conduite, de la rugosité absolue  $\varepsilon$ , de la pente longitudinale  $i$  et de la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement.

Pour l'état plein de la conduite, correspondant à  $\eta = 1$ , la relation (2.132) permet d'exprimer le coefficient de résistance à l'écoulement  $C_p$  de *Chézy*. Pour  $\eta = 1$ , les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  prennent respectivement les valeurs suivantes :

- $\tau(\eta = 1) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 1 - 2) = 2,64329817$
- $\lambda(\eta = 1) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$   
 $= 0,5104589 + (1 - 2/3) \times \sqrt{(1-1) \times (1-1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 1 - 2) = 0,5104589$

Ainsi, selon la relation (2.132), le coefficient de résistance à l'écoulement  $C_p$  de *Chézy* à l'état plein est donné par la relation :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8 [0,5104589 / 2,64329817]} + \frac{0,852}{R_p [0,5104589 / 2,64329817]^{3/2}} \right)$$

Soit :

$$C_p = -4\sqrt{2g} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{2,858} + \frac{10,04}{R_p} \right) \quad (2.134)$$

Le nombre de *Reynolds*  $R_p$ , figurant dans la relation (2.134), est donné par la relation (2.120). La relation (2.134) permet donc l'évaluation du coefficient de résistance à l'écoulement  $C_p$  de *Chézy* à l'état plein, à partir des valeurs connues du diamètre  $D$  de la conduite, de la rugosité absolue  $\varepsilon$ , de la pente longitudinale  $i$  et de la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement.

#### II.6.1.2. Calcul du coefficient de résistance à l'écoulement $C$ de *Chézy* par la MMR

Lorsque le diamètre  $D$  de la conduite n'est pas une donnée du problème, les relations (2.126), (2.129) et (2.132) ne peuvent être utilisées pour évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy*. Les paramètres connus du problème sont le débit volume  $Q$ , le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite, la pente longitudinale  $i$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. Pour ces seuls paramètres, la MMR (*Achour, 2007*) permet la détermination du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy*.

Selon la MMR, l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est caractérisé par un coefficient de frottement  $\bar{f} = 1/16$ , ce qui se traduit par un coefficient de résistance de *Chézy* :

$$\bar{C} = \sqrt{8g / \bar{f}} = 8\sqrt{2g} = \text{constante} \quad (2.135)$$

En outre, le modèle rugueux est caractérisé par un diamètre  $\bar{D}$ , écoulant un débit volume  $\bar{Q}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\bar{\nu}$  correspondant à un taux de remplissage  $\bar{\eta}$ , sous une pente longitudinale  $\bar{i}$ . Pour déterminer le coefficient de résistance  $C$  de *Chézy*, caractérisant l'écoulement dans la conduite considérée, admettons les conditions suivantes :

i.  $\bar{D} \neq D$

ii.  $\bar{Q} = Q$

iii.  $\bar{i} = i$

iv.  $\bar{\eta} = \eta$

v.  $\bar{\nu} = \nu$

Selon la relation (2.63) et tenant compte des conditions (ii) et (iii), la conductivité relative  $\bar{Q}^*$  du modèle rugueux de référence serait telle que :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 \bar{D}^5 i}} \quad (2.136)$$

ou bien, en tenant compte de la relation (2.135) :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128g \bar{D}^5 i}} \quad (2.137)$$

La conductivité relative  $\bar{Q}^*$  est régie par les relations (2.64), (2.66) et (2.68) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta$ . Ainsi, pour :

i.  $\eta \leq 1/15$

$$\bar{Q}^* = \frac{\sigma(\eta)[\varphi(\eta)]^{3/2}}{72\sqrt{3}} \quad (2.138)$$



Les relations (2.137) et (2.138) permettent de déduire que le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est :

$$\bar{D} = \frac{2,61165}{[\sigma(\eta)]^{0,4} [\varphi(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (2.139)$$

Pour  $\eta \leq 1/15$ , le nombre de Reynolds  $\bar{R}$ , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.125), soit :

$$\bar{R} = 0,28347 [\varphi(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.140)$$

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$\bar{Q}^* = \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \quad (2.141)$$

Les relations (2.137) et (2.141) permettent d'écrire que :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639 [\zeta(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (2.142)$$

Dans la gamme  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ , le nombre de Reynolds  $\bar{R}$ , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.128), soit :

$$\bar{R} = 11,783 \left[ \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.143)$$

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\bar{Q}^* = \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \quad (2.144)$$

Nous pouvons déduire des relations (2.137) et (2.144) que :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639 [\lambda(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} \quad (2.145)$$

Dans la gamme  $2/3 \leq \eta \leq 1$ , le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$ , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'exprime par une relation similaire à la relation (2.131), soit :

$$\bar{R} = 11,783 \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{3/2} \bar{R}_p \quad (2.146)$$

Ainsi, avec les valeurs connues des paramètres  $Q$ ,  $\eta$  et  $i$ , le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence peut être explicitement évalué par l'une des relations (2.139), (2.142) ou (2.145). Ces paramètres permettent également d'évaluer le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, par application de l'une des relations (2.140), (2.143) et (2.146). Dans ces relations, le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_p$  à l'état plein s'exprime par une relation similaire à la relation (2.120), soit :

$$\bar{R}_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} \quad (2.147)$$

Selon la MMR, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* est défini par la relation :

$$C = \frac{\bar{C}}{\psi^{5/2}}$$

Soit, en tenant compte de la relation (2.135) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (2.148)$$

Dans la relation (2.148),  $\psi$  est un paramètre sans dimension tel que  $0 \leq \psi \leq 1$  et défini par la relation :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon}{19 R_h} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.149)$$

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta$ , le rayon hydraulique  $\bar{R}_h$ , figurant dans la relation (2.149), est défini par des relations similaires aux relations (2.8), (2.29) et (2.59). De même que le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  est donné par l'une des relations (2.140), (2.143) et (2.146). Ainsi :

i.  $\eta \leq 1/15$

$$\overline{R}_h = \frac{\overline{D}}{12} \varphi(\eta) \quad (2.150)$$

La relation (2.149) s'écrit, en tenant compte des relations (2.140) et (2.150) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \overline{D}}{1,583 \varphi(\eta)} + \frac{29,985}{[\varphi(\eta)]^{3/2} \overline{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.151)$$

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$\overline{R}_h = \overline{D} \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \quad (2.152)$$

Tenant compte des relations (2.29) et (2.143), la relation (2.151) s'écrit :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \overline{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \overline{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.153)$$

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\overline{R}_h = \overline{D} \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \quad (2.154)$$

La relation (2.149) devient alors, tenant compte des relations (2.146) et (2.154) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \overline{D}}{19 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \overline{R}_p} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.155)$$

Pour évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy, pour les valeurs connues des paramètres  $Q, \eta, \varepsilon, i$  et  $\nu$ , les étapes suivantes sont recommandées :

- a) Connaissant la valeur du taux de remplissage  $\eta$ , l'une des relations (2.139), (2.142) ou (2.145) permet d'évaluer le diamètre  $\overline{D}$  du modèle rugueux de référence.
- b) Les paramètres connus  $\overline{D}, i$  et  $\nu$  sont introduits dans la relation (2.147) pour le calcul du nombre de Reynolds  $\overline{R}_p$  à l'état plein.
- c) Le coefficient  $\psi$  peut alors être évalué par l'une des relations (2.151), (2.153) ou (2.155).
- d) Enfin, le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy est déduit de la relation (2.148).

### II.6.1.3. Exemple d'application 2.14

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1 est le siège d'un écoulement uniforme. Elle écoule un débit volume  $Q = 1,087 \text{ m}^3 / \text{s}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ , sous une pente longitudinale  $i = 5 \cdot 10^{-4}$ . La paroi interne de la conduite est considérée comme étant à l'état géométriquement lisse ( $\varepsilon = 0$ ) et le taux de remplissage est  $\eta = 0,6$ .

- i. Calculer la valeur du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy.
- ii. Déduire la valeur du diamètre  $D$  de la conduite.

#### Solution

- i. Puisque  $0,5 \leq \eta \leq 1$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.131). Les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  sont données par les relations (2.15) et (2.27) respectivement et prennent pour valeurs :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,6 \right) = 1,46266832$

- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta$   
 $= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,6 \right) - \left( \frac{2}{3} - 0,6 \right) \times \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - 0,6 \right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,6 = 0,29158036$

Selon la relation (2.142), le diamètre  $\bar{D}$  est :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q^2}{g i} \right)^{0,2} = \frac{1,46266832^{0,2}}{2,639 \times 0,29158036^{0,6}} \times \left( \frac{1,087}{\sqrt{9,81 \times 0,0005}} \right)^{0,4} = 2,56506771 \text{ m}$$

Le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  à l'état plein est, en vertu de la relation (2.147) :

$$\bar{R}_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 2,56506771^3}}{10^{-6}} = 1104838,96$$

Le facteur  $\psi$  est par suite, selon la relation (2.153) :

$$\begin{aligned}\psi &= 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{0,721}{[0,29158036 / 1,46266832]^{3/2} \times 1104838,96} \right) \right]^{-2/5} = 0,70165715\end{aligned}$$

Le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy est, selon la relation (2.148) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,70165715^{5/2}} = 85,9264968 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \cong 86 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$$

ii. La relation (2.65) permet de déduire que le diamètre  $D$  de la conduite est régi par la relation :

$$D = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{C \sqrt{i}} \right)^{0,4}$$

soit :

$$D = \frac{1,46266832^{0,2}}{0,29158036^{0,6}} \times \left( \frac{1,087}{85,9264968 \times \sqrt{0,0005}} \right)^{0,4} = 1,7997873 \text{ m} \cong 1,8 \text{ m}$$

Le diamètre  $D$  aurait pu être également évalué par la relation fondamentale de la MMR, applicable à toute forme de profil géométrique de conduites et canaux :

$$D = \psi \bar{D}$$

soit :

$$D = \psi \bar{D} = 0,70165715 \times 2,56506771 = 1,79979809 \text{ m} \cong 1,8 \text{ m}$$

iii. Vérifions nos calculs en déterminant, pour le diamètre ainsi obtenu, le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy par application de la relation (2.129). Pour cela, évaluons d'abord le nombre de Reynolds  $R_p$  à l'état plein, en ayant recours à la relation (2.120) :

$$R_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 1,7997873^3}}{10^{-6}} = 649355,47$$

Ainsi, selon la relation (2.129), le coefficient  $C$  est :

$$C = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left( \frac{0,852}{649355,47 \times [0,29158036 / 1,46266832]^{3/2}} \right) = 85,6028096 m^{0,5} / s$$

$$\cong 85,6 m^{0,5} / s$$

L'écart relatif entre les valeurs du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy, calculées selon les relations (2.148) et (2.129) est inférieur à 0,38% seulement.

Vérifions enfin que  $C$  ainsi calculé est inférieur à la valeur  $C_{\max.}$  donnée par la relation (2.133) :

$$C_{\max.} = -4 \sqrt{2g} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left( \frac{7,845}{649355,47} \right) = 87,1341229 m^{0,5} / s$$

$$\cong 87,15 m^{0,5} / s$$

iv. Nos calculs auraient pu être également vérifiés en déterminant le débit volume  $Q$  par application de la formule générale (2.117). Pour cela, évaluons d'abord l'aire de la section mouillée  $A$ , le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de Reynolds  $R$ , pour le diamètre  $D$  que nous avons calculé à l'étape (ii).

L'aire de la section mouillée  $A$  est donnée par la relation (2.28), soit :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 1,7997873^2 \times 0,29158036 = 0,94449712 m^2$$

Le rayon hydraulique est donné par la relation (2.29), soit :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 1,7997873 \times \frac{0,29158036}{1,46266832} = 0,35878444 m$$

Le nombre de Reynolds  $R$  est régi par la relation (2.118), soit :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 0,35878444^3}}{10^{-6}} = 681137,639$$

Ainsi, selon la relation (2.117), le débit volume  $Q$  est égal à :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,94449712 \times \sqrt{0,35878444} \times 0,0005 \times \log \left( \frac{10,04}{681137,639} \right) = 1,08291413 m^3 / s$$

$$\cong 1,083 m^3 / s$$

L'écart relatif entre le débit volume  $Q$  que nous venons de calculer et celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,38% seulement.

#### II.6.1.4. Exemple d'application 2.15

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1 est le siège d'un écoulement uniforme. Elle écoule un débit volume  $Q = 1,337 \text{ m}^3 / \text{s}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ , sous une pente longitudinale  $i = 5.10^{-4}$ . La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue  $\varepsilon = 0,0005 \text{ m}$  et le taux de remplissage est  $\eta = 0,65$ .

- i. Calculer la valeur du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy.
- ii. Déduire la valeur du diamètre  $D$  de la conduite.

#### Solution

- i. Puisque  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.142). Les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  sont données par les relations (2.15) et (2.27) respectivement et prennent pour valeurs :

$$\bullet \quad \vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,65 \right) = 1,56276574$$

$$\bullet \quad \zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta$$

$$= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,65 \right) - \left( \frac{2}{3} - 0,65 \right) \times \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - 0,65 \right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,65 = 0,32481641$$

Selon la relation (2.142), le diamètre  $\bar{D}$  est :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = \frac{1,56276574^{0,2}}{2,639 \times 0,32481641^{0,6}} \times \left( \frac{1,337}{\sqrt{9,81 \times 0,0005}} \right)^{0,4} = 2,64655773 \text{ m}$$

Le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  à l'état plein est, en vertu de la relation (2.147) :

$$\bar{R}_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 2,64655773^3}}{10^{-6}} = 1157904,62$$

Le facteur  $\psi$  est par suite, selon la relation (2.153) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \right]^{-2/5}$$

soit :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{0,0005 / 2,64655773}{19 \times [0,32481641 / 1,56276574]} + \frac{0,721}{[0,32481641 / 1,56276574]^{3/2} \times 1157904,62} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0,75577791 \end{aligned}$$

Le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy est, selon la relation (2.148) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,75577791^{5/2}} = 71,359863 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \cong 71,36 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$$

ii. La relation (2.65) permet de déduire que le diamètre  $D$  de la conduite est régi par la relation :

$$D = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{C \sqrt{i}} \right)^{0,4}$$

soit :

$$D = \frac{1,56276574^{0,2}}{0,32481641^{0,6}} \times \left( \frac{1,337}{71,359863 \times \sqrt{0,0005}} \right)^{0,4} = 2,00019787 \text{ m} \cong 2 \text{ m}$$

Le diamètre  $D$  aurait pu être également évalué par la relation fondamentale de la MMR, applicable à toute forme de profil géométrique de conduites et canaux :

$$D = \psi \bar{D}$$

soit :

$$D = \psi \bar{D} = 0,75577791 \times 2,64655773 = 2,00020986 \text{ m} \cong 2 \text{ m}$$

iii. Vérifions nos calculs en déterminant, pour le diamètre ainsi obtenu, le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy par application de la relation (2.129). Pour cela, évaluons d'abord le nombre de Reynolds  $R_p$  à l'état plein, en ayant recours à la relation (2.120) :

$$R_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 2,00019787^3}}{10^{-6}} = 760781,897$$



Ainsi, selon la relation (2.129), le coefficient  $C$  est :

$$C = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left( \frac{0,0005 / 2,00019787}{14,8 \times [0,32481641 / 1,56276574]} + \frac{0,852}{649355,47 \times [0,32481641 / 1,56276574]^{3/2}} \right)$$

$$= 71,4228454 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \cong 71,4 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$$

L'écart relatif entre les valeurs du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy, calculées selon les relations (2.148) et (2.129) est inférieur à 0,09% seulement.

Vérifions enfin que  $C$  ainsi calculé est inférieur à la valeur  $C_{\max.}$  donnée par la relation (2.133) :

$$C_{\max.} = -4 \sqrt{2g} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left( \frac{0,0005 / 2,00019787}{3,369} + \frac{7,845}{760781,897} \right)$$

$$= 72,1661397 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \cong 72,2 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$$

iv. Nos calculs auraient pu être également vérifiés en déterminant le débit volume  $Q$  par application de la formule générale (2.117). Pour cela, évaluons d'abord l'aire de la section mouillée  $A$ , le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de Reynolds  $R$ , pour le diamètre  $D$  que nous avons calculé à l'étape (ii).

L'aire de la section mouillée  $A$  est donnée par la relation (2.28), soit :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 2,00019787^2 \times 0,32481641 = 1,29952273 \text{ m}^2 \cong 1,3 \text{ m}^2$$

Le rayon hydraulique est donné par la relation (2.29), soit :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 2,00019787 \times \frac{0,32481641}{1,56276574} = 0,41573543 \text{ m}$$

Le nombre de Reynolds  $R$  est déterminé par la relation (2.118), soit :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0005 \times 0,41573543^3}}{10^{-6}} = 849591,262$$

Ainsi, selon la relation (2.117), le débit volume  $Q$  est égal à :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,29952273 \times \sqrt{0,41573543 \times 0,0005} \times \log \left( \frac{0,0005}{14,8 \times 0,41573543} + \frac{10,04}{849591,262} \right) \\
&= 1,33818171 m^3 / s \cong 1,338 m^3 / s
\end{aligned}$$

L'écart relatif entre le débit volume  $Q$  que nous venons de calculer et celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,09% seulement.

### II.6.1.5. Exemple d'application 2.16

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1 est le siège d'un écoulement uniforme. Elle écoule un débit volume  $Q = 2,89 m^3 / s$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} m^2 / s$ , sous une pente longitudinale  $i = 4 \cdot 10^{-4}$ . La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue  $\varepsilon = 0,0002 m$  et le taux de remplissage est  $\eta = 0,75$ .

- i. Calculer la valeur du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy.
- ii. Déduire la valeur du diamètre  $D$  de la conduite.

#### Solution

- i. Puisque  $2/3 \leq \eta \leq 1$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est donné par la relation (2.145). Les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  sont régies par les relations (2.47) et (2.55) respectivement et prennent pour valeurs :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 1,76455412$
- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$   
 $= 0,5104589 + (0,75 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,75) \times (0,75 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 0,39089728$

Selon la relation (2.145), le diamètre  $\bar{D}$  est :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639 [\lambda(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = \frac{1,76455412^{0,2}}{2,639 \times 0,39089728^{0,6}} \times \left( \frac{2,89}{\sqrt{9,81 \times 0,0004}} \right)^{0,4} = 3,45353099 m$$

Le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  à l'état plein est, en vertu de la relation (2.147) :

$$\bar{R}_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0004 \times 3,45353099^3}}{10^{-6}} = 1543799,01$$

Le facteur  $\psi$  est par suite, selon la relation (2.155) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \right]^{-2/5}$$

soit :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{0,0002 / 3,45353099}{19 \times [0,39089728 / 1,76455412]} + \frac{0,721}{[0,39089728 / 1,76455412]^{3/2} \times 1543799,01} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0,72453339 \end{aligned}$$

Le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy est, selon la relation (2.148) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,72453339^{5/2}} = 79,3037043 \text{ m}^{0,5} / \text{s} \cong 79,3 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$$

La relation (2.67) permet de déduire que le diamètre  $D$  de la conduite est régi par la relation :

$$D = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{C\sqrt{i}} \right)^{0,4}$$

soit :

$$D = \frac{1,76455412^{0,2}}{0,39089728^{0,6}} \times \left( \frac{2,89}{79,3037043 \times \sqrt{0,0004}} \right)^{0,4} = 2,50218352 \text{ m} \cong 2,5 \text{ m}$$

Le diamètre  $D$  aurait pu être également évalué par la relation fondamentale de la MMR, applicable à toute forme de profil géométrique de conduites et canaux :

$$D = \psi \bar{D}$$

soit :

$$D = \psi \bar{D} = 0,72453339 \times 3,45353099 = 2,50219852 \text{ m} \cong 2,5 \text{ m}$$

ii. Vérifions nos calculs en déterminant, pour le diamètre ainsi obtenu, le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy par application de la relation (2.132). Pour cela, évaluons d'abord le nombre de Reynolds  $R_p$  à l'état plein, en ayant recours à la relation (2.120) :

$$R_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0004 \times 2,50218352^3}}{10^{-6}} = 952082,238$$

Ainsi, selon la relation (2.132), le coefficient  $C$  est :

$$C = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left( \frac{0,0002 / 2,50218352}{14,8 \times [0,39089728 / 1,76455412]} + \frac{0,852}{952082,238 \times [0,39089728 / 1,76455412]^{3/2}} \right)$$

$$= 79,4108825 m^{0,5} / s \cong 79,4 m^{0,5} / s$$

L'écart relatif entre les valeurs du coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de Chézy, calculées selon les relations (2.148) et (2.132) est inférieur à 0,14% seulement.

Vérifions enfin que  $C$  ainsi calculé est inférieur à la valeur  $C_{\max.}$  donnée par la relation (2.133) :

$$C_{\max.} = -4 \sqrt{2g} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log \left( \frac{0,0002 / 2,50218352}{3,369} + \frac{7,845}{952082,238} \right)$$

$$= 79,6472115 m^{0,5} / s \cong 79,65 m^{0,5} / s$$

iii. Nos calculs auraient pu être également vérifiés en déterminant le débit volume  $Q$  par application de la formule générale (2.117). Pour cela, évaluons d'abord l'aire de la section mouillée  $A$ , le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de Reynolds  $R$ , pour le diamètre  $D$  que nous avons calculé à l'étape (ii).

L'aire de la section mouillée  $A$  est donnée par la relation (2.56), soit :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 2,50218352^2 \times 0,39089728 = 2,4473775 m^2$$

Le rayon hydraulique  $R_h$  est donné par la relation (2.59), soit :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 2,50218352 \times \frac{0,39089728}{1,76455412} = 0,55430248 m$$

Le nombre de Reynolds  $R$  est déterminé par la relation (2.118), soit :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0004 \times 0,55430248^3}}{10^{-6}} = 1169902,6$$

Ainsi, selon la relation (2.117), le débit volume  $Q$  est égal à :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,4473775 \times \sqrt{0,55430248 \times 0,0004} \times \log \left( \frac{0,0002}{14,8 \times 0,55430248} + \frac{10,04}{1169902,6} \right) \\
&= 2,89391247 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 2,894 \text{ m}^3 / \text{s}
\end{aligned}$$

L'écart relatif entre le débit volume  $Q$  que nous venons de calculer et celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,14% seulement.

## II.6.2. Expression du débit volume maximal $Q_{\max}$ .

L'expression du débit volume maximal  $Q_{\max}$ , correspondant à la capacité d'évacuation de la conduite, peut être déduite de la formule générale (2.117). Dans cette relation, l'aire de la section mouillée  $A$ , le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de *Reynolds*  $R_s$  s'expriment par les relations que nous avons déjà établies, selon la gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta$ . Nous pouvons alors écrire que pour :

$$i. \quad \eta \leq 1/15$$

L'aire de la section mouillée  $A$ , le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de *Reynolds*  $R_s$  s'expriment par les relations (2.7), (2.8) et (2.125) respectivement. Tenant compte de ces relations, la relation (2.117) s'écrit :

$$Q = -0,04536092 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{1,233 \varphi(\eta)} + \frac{35,418}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.156)$$

Introduisons la conductivité relative :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g i D^5}} \quad (2.157)$$

La relation (2.156) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$Q^* = -0,04536092 \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{1,233 \varphi(\eta)} + \frac{35,418}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.158)$$

$$ii. \quad 1/15 \leq \eta \leq 2/3$$

L'aire de la section mouillée  $A$ , le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de *Reynolds*  $R_s$  s'expriment par les relations (2.28), (2.29) et (2.128) respectivement. Tenant compte de ces relations, la relation

(2.117) s'écrit :

$$Q = -4\sqrt{2} \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,852}{R_p [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.159)$$

soit :

$$Q^* = -4\sqrt{2} \frac{[\zeta(\eta)]^{3/2}}{[\vartheta(\eta)]^{1/2}} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,852}{R_p [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.160)$$

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

L'aire de la section mouillée  $A$ , le rayon hydraulique  $R_h$  et le nombre de *Reynolds*  $R$  s'expriment par les relations (2.56), (2.59) et (2.131) respectivement. Tenant compte de ces relations, la relation (2.117) s'écrit :

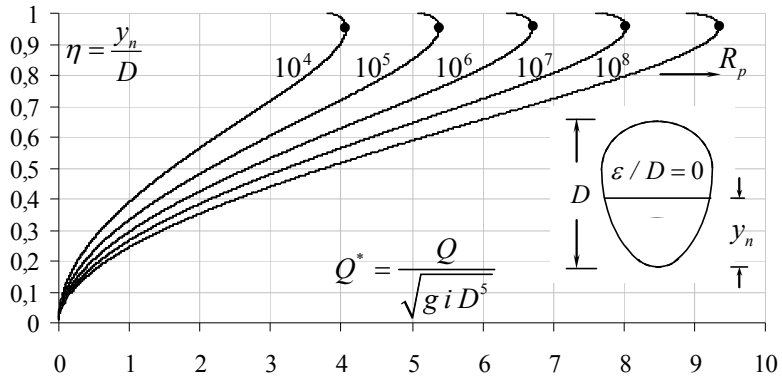
$$Q = -4\sqrt{2} \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,852}{R_p [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.161)$$

Ou bien :

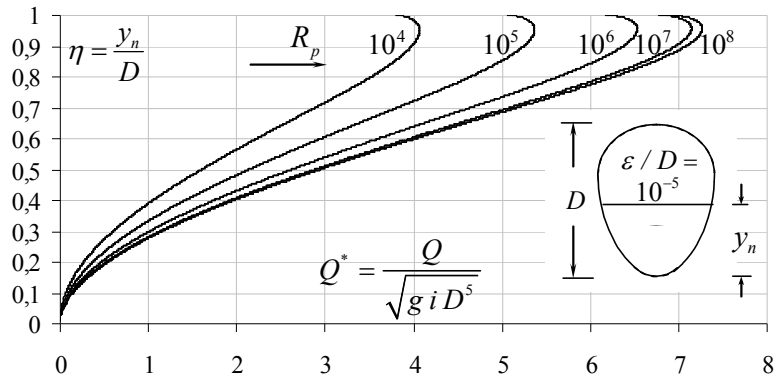
$$Q^* = -4\sqrt{2} \frac{[\lambda(\eta)]^{3/2}}{[\tau(\eta)]^{1/2}} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,852}{R_p [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2}} \right) \quad (2.162)$$

Rappelons que dans les relations (2.160), (2.161) et (2.162), le nombre de *Reynolds*  $R_p$  à l'état plein est donné par la relation (2.120). Les relations (2.160), (2.161) et (2.162) montrent que la conductivité relative  $Q^*$  de la conduite est fonction à la fois du taux de remplissage  $\eta$ , de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$  à l'état plein.

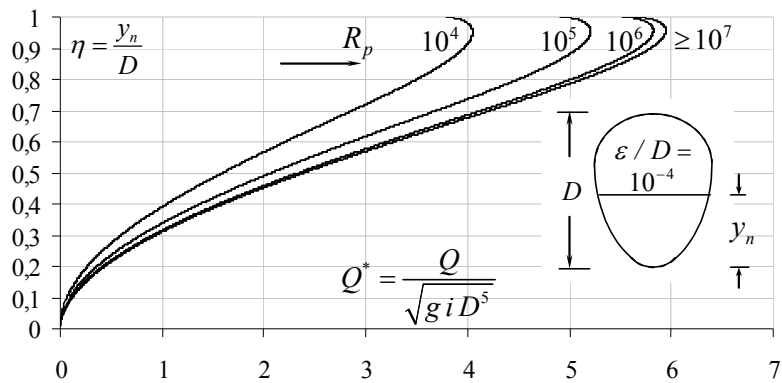
La variation du taux de remplissage  $\eta$  en fonction de la conductivité relative  $Q^*$  a été représentée sur la figure 2.22 (a à f), conformément aux relations (2.160), (2.161) et (2.162).



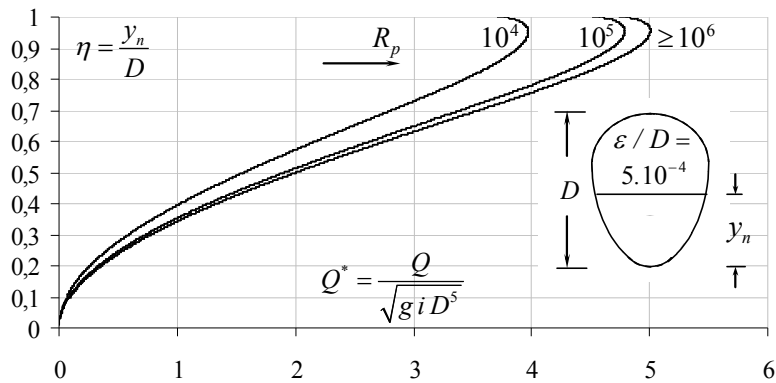
a)



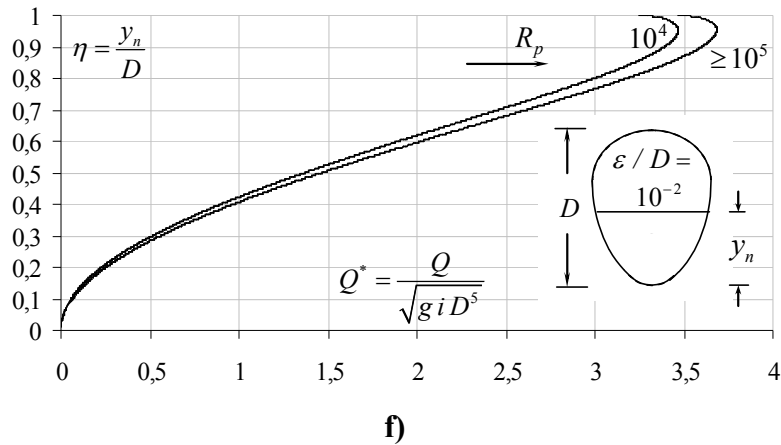
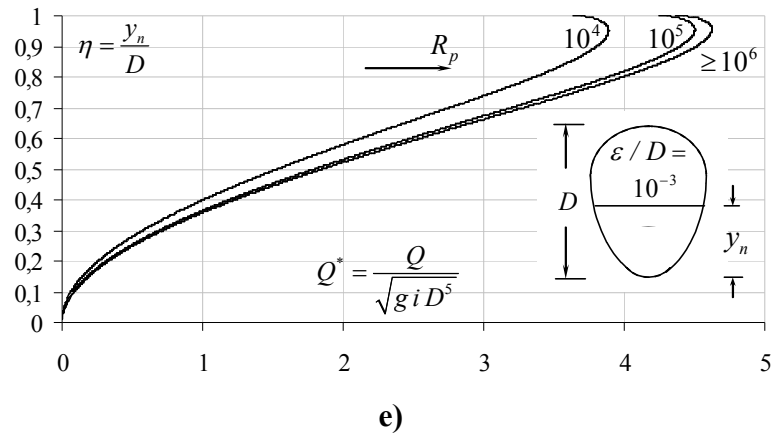
b)



c)



d)



**Figure 2.22 :** Variation de  $\eta(Q^*)$  pour diverses valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  conformément aux relations (2.160), (2.161) et (2.162).

Il ressort principalement de la figure 2.22 (a à f) que la conductivité relative  $Q^*$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$ , puis diminue dans un second temps même si  $\eta$  continue d'augmenter. La variation de  $\eta(Q^*)$  passe ainsi par un maximum qui dépend à la fois de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . Le tableau 2.1 regroupe les valeurs particulières  $\eta_0$  du taux de remplissage  $\eta$  correspondant à  $Q^* = Q^*_{\max}$ , calculées selon les relations (2.160), (2.161) et (2.162) pour diverses valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ . L'espace grisâtre du tableau 1 correspond au domaine pratique de la rugosité  $\varepsilon / D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ .



**Tableau 2.1 :** Valeurs du taux de remplissage  $\eta_0$  correspondant à  $Q^* = Q_{\max}^*$  pour diverses valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ .

$\varepsilon / D \rightarrow$	0	$10^{-5}$	$5.10^{-5}$	$10^{-4}$	$5.10^{-4}$	$10^{-3}$	$5.10^{-3}$	$10^{-2}$	
$R_p$	$10^4$	0,95083	0,950834	0,950862	0,950894	0,951111	0,951297	0,951621	0,951381
	$5.10^4$	0,95267	0,952703	0,952822	0,952946	0,953437	0,953582	0,953046	0,952352
	$10^5$	0,953285	0,953348	0,953558	0,953742	0,954210	0,954201	0,953283	0,952494
	$5.10^5$	0,954434	0,954688	0,955166	0,955351	0,955208	0,954865	0,953486	0,952611
	$10^6$	0,954838	0,955258	0,955743	0,955812	0,955377	0,954963	0,953512	0,952626
	$5.10^6$	0,955623	0,956489	0,956507	0,956315	0,955523	0,955045	0,953533	0,952638
	$10^7$	0,955909	0,956855	0,956639	0,956390	0,955542	0,955055	0,953536	0,952640
	$5.10^7$	0,956478	0,957259	0,956639	0,956453	0,955557	0,955064	0,953538	0,952641
	$10^8$	0,956691	0,957319	0,956767	0,956461	0,955559	0,955065	0,953538	0,952641

Nous pouvons ainsi constater que dans la large gamme pratique  $10^{-5} \leq \varepsilon / D \leq 5.10^{-3}$  et  $10^5 \leq R_p \leq 5.10^7$ , le taux de remplissage  $\eta_0$  correspondant à  $Q^* = Q_{\max}^*$  varie dans l'intervalle  $[0,953; 0,957]$ . La valeur moyenne  $\eta_0 = 0,9547 \cong 0,955$  peut donc être considérée comme la valeur la plus appropriée pour le calcul du débit volume maximal. Elle appartient à l'intervalle  $[2/3; 1]$ , ce qui permet de déduire que la conductivité relative maximale  $Q_{\max}^*$  est régie par la relation (2.162). Ainsi, le débit volume maximal s'obtient à la profondeur  $y = 0,955 D$ .

Pour  $\eta_0 = 0,955$ , les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$ , régies par les relations (2.47) et (2.55) respectivement, prennent les valeurs :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,955 - 2) = 2,29286753$
- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$   
 $= 0,5104589 + (0,955 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,955) \times (0,955 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,955 - 2) = 0,50027964$

La conductivité relative maximale  $Q_{\max}^*$  est par suite, selon la relation (2.162) :

$$Q_{\max}^* = -1,322 \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \quad (2.163)$$

Tenant compte de la relation (2.157), nous pouvons alors écrire que :

$$Q_{\max} = -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \quad (2.164)$$

Nous obtenons ainsi l'expression du débit volume maximal en fonction de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$  à l'état plein.

### II.6.2.1. Exemple d'application 2.17

Quelle est la capacité d'évacuation de la conduite ovoïdale représentée par la figure 2.1, sachant que :

$$D = 3 \text{ m} ; i = 0,0001 , \varepsilon = 0,0004 \text{ m} , \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

#### **Solution**

Le nombre de *Reynolds*  $R_p$  à l'état plein est, selon la relation (2.120) :

$$R_p \cong 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 0,0001 \times 3^3}}{10^{-6}} = 624953,364$$

Ainsi, en vertu de la relation (2.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 0,0001 \times 3^5} \times \log \left( \frac{0,0004 / 3}{3,229} + \frac{8,359}{624953,364} \right) \cong 2,751 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

### II.6.3. Relation approchée de la profondeur normale

L'objectif de cette partie de l'étude est la détermination d'une relation approchée permettant le calcul explicite de la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement dans la conduite de forme ovoïdale considérée, dans le cas du coefficient de résistance à l'écoulement variable. Pour cela, la démarche adoptée consiste à trouver la loi de variation de  $\eta(Q / Q_{\max.})$  en tenant compte des relations (2.156), (2.159), (2.161) et (2.163).

Nos calculs ont montré, après un programme de vérification intense, que dans la gamme  $0,20 \leq \eta \leq 0,75$ , le taux de remplissage  $\eta$  pouvait s'exprimer par la relation approchée suivante :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\eta\right) = 0,798\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,51} \quad (2.165)$$

L'application de la relation approchée (2.165) à de multiples exemples numériques a montré que la valeur du taux de remplissage  $\eta$  est obtenue avec un écart relatif maximal inférieur à 0,5% seulement. Compte tenu de la relation (2.165), la profondeur normale  $y_n$  s'écrit alors :

$$y_n = \frac{3}{\pi} D \sin^{-1}\left[0,798\left(\frac{Q}{Q_{\max.}}\right)^{0,51}\right] \quad (2.166)$$

### II.6.3.1. Exemple d'application 2.18

En ayant recours à la relation (2.166), déterminer la valeur de la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement dans la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 1, sachant que :

$$Q = 1,8 m^3 / s ; i = 10^{-4} ; \varepsilon = 0,001 m ; \eta = 0,75 ; \nu = 10^{-6} m^2 / s .$$

#### Solution

i. Puisque le taux de remplissage  $\eta$  est compris entre  $2/3$  et  $1$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est régi par la relation (2.145). Pour  $\eta = 0,75$ , les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$ , régies par les relations (2.47) et (2.55) respectivement, prennent les valeurs :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 1,76455412$
- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$   
 $= 0,5104589 + (0,75 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,75) \times (0,75 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 0,39089728$

Le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g}i}\right)^{0,4} = \frac{1,76455412^{0,2}}{2,639 \times 0,39089728^{0,6}} \times \left(\frac{1,8}{\sqrt{9,81 \times 10^{-4}}}\right)^{0,4} = 3,77072813 m$$

ii. Le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  à l'état plein est, en vertu de la relation (2.147) :

$$\overline{R_p} = 3,84 \frac{\sqrt{g i \overline{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 3,77072813^3}}{10^{-6}} = 880650,444$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est, selon la relation (2.155) :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \overline{D}}{19 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \overline{R_p}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{0,001 / 3,77072813}{19 \times [0,39089728 / 1,76455412]} + \frac{0,721}{[0,39089728 / 1,76455412]^{3/2} \times 880650,444} \right) \right]^{-2/5} = 0,76406673 \end{aligned}$$

iv. Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = \psi \overline{D} = 0,76406673 \times 3,77072813 = 2,8810879 \text{ m}$$

v. Adoptons le diamètre  $D = 3 \text{ m}$ . Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds*  $R_p$  à l'état plein est, compte tenu de la relation (2.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 3^3}}{10^{-6}} = 624953,364$$

vi. En application de la relation (2.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) = -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 3^5} \times \log \left( \frac{0,001 / 3}{3,229} + \frac{8,359}{624953,364} \right) \\ &= 2,53877166 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est, selon la relation (2.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,798 \times \left( \frac{1,8}{2,53877166} \right)^{0,51} \right] = 0,70063975$$

viii. La profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,70063975 \times 3 = 2,10191924 \text{ m} \cong 2,10 \text{ m}$$

ix. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume  $Q$  par la relation générale (2.117) :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

- Les fonctions  $\lambda(\eta)$  et  $\tau(\eta)$  prennent les nouvelles valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\lambda(\eta) &= 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta-2) \\ &= 0,5104589 + (0,70063975 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,70063975) \times (0,70063975 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,70063975 - 2) \\ &= 0,35853542\end{aligned}$$

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta-2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,70063975 - 2) = 1,66416496$$

- L'aire de la section mouillée  $A$  est donnée par la relation (2.56) :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 3^2 \times 0,35853542 = 3,2268188 m^2$$

- Le rayon hydraulique  $R_h$  est, selon la relation (2.59) :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 3 \times \frac{0,35853542}{1,66416496} = 0,64633392 m$$

- Selon la relation (2.118), le nombre de *Reynolds*  $R$  est :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 0,64633392^3}}{10^{-6}} = 736520,61$$

Ainsi, le débit volume  $Q$  est :

$$\begin{aligned}Q &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 3,2268188 \times \sqrt{0,64633392 \times 10^{-4}} \times \log \left( \frac{0,001}{14,8 \times 0,64633392} + \frac{10,04}{736520,61} \right) \\ &= 1,80520853 m^3 / s \cong 1,805 m^3 / s\end{aligned}$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,29% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

### II.6.3.2. Exemple d'application 2.19

Déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1, sachant que :

$$Q = 1,36 m^3 / s ; i = 10^{-4} ; \varepsilon \rightarrow 0 ; \eta = 0,70 ; \nu = 10^{-6} m^2 / s .$$

## Solution

i. Puisque le taux de remplissage  $\eta$  est compris entre  $2/3$  et  $1$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est régi par la relation (2.145). Pour  $\eta = 0,70$ , les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$ , régies par les relations (2.47) et (2.55) respectivement, prennent les valeurs :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,7 - 2) = 1,6628789$
- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$   
 $= 0,5104589 + (0,7 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,7) \times (0,7 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,7 - 2) = 0,3581111$

Le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0,4} = \frac{1,6628789^{0,2}}{2,639 \times 0,3581111^{0,6}} \times \left( \frac{1,36}{\sqrt{9,81 \times 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 3,51078168 m$$

ii. Le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  à l'état plein est, en vertu de la relation (2.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 3,51078168^3}}{10^{-6}} = 791173,01$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est, selon la relation (2.155) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{0,721}{[0,3581111 / 1,6628789]^{3/2} \times 791173,01} \right) \right]^{-2/5} = 0,70690178$$

iv. Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = \psi \bar{D} = 0,70690178 \times 3,51078168 = 2,48177781 m$$

v. Adoptons le diamètre  $D = 2,5 m$ . Pour ce diamètre, le nombre de Reynolds  $R_p$  à l'état plein est, compte tenu de la relation (2.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{giD^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 2,5^3}}{10^{-6}} = 475418,132$$

vi. En application de la relation (2.164), le débit volume maximal est :

$$Q_{\max.} = -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) = -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 2,5^5} \times \log \left( \frac{8,359}{475418,132} \right)$$

$$= 1,94562583 \text{ m}^3 / \text{s}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est, selon la relation (2.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \times \left( \frac{1,36}{1,94562583} \right)^{0,51} \right] = 0,69444282$$

viii. La profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,69444282 \times 2,5 = 1,73610705 \text{ m} \cong 1,736 \text{ m}$$

ix. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume  $Q$  par la relation générale (2.117) :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

• Les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  prennent les nouvelles valeurs suivantes :

$$\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$$

$$= 0,5104589 + (0,69444282 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,69444282) \times (0,69444282 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,69444282 - 2)$$

$$= 0,35442196$$

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,69444282 - 2) = 1,65171741$$

• L'aire de la section mouillée  $A$  est donnée par la relation (2.56) :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 2,5^2 \times 0,35442196 = 2,21513724 \text{ m}^2$$

• Le rayon hydraulique  $R_h$  est, selon la relation (2.59) :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 2,5 \times \frac{0,35442196}{1,65171741} = 0,5364446 \text{ m}$$

• Selon la relation (2.118), le nombre de Reynolds  $R$  est :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 0,5364446^3}}{10^{-6}} = 556912,289$$

Ainsi, le débit volume  $Q$  est :

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,21513724 \times \sqrt{0,5364446 \times 10^{-4}} \times \log\left(\frac{10,04}{556912,289}\right) = 1,36371027 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1,364 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré n'est que de 0,27% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

### II.6.3.3. Exemple d'application 2.20

Déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1, sachant que :

$$Q = 1 \text{ m}^3 / \text{s} ; i = 5.10^{-4} ; \varepsilon = 5.10^{-4} \text{ m} ; \eta = 0,65 ; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

#### Solution

i. Puisque le taux de remplissage  $\eta$  est compris entre 1/15 et 2/3, alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est régi par la relation (2.142). Pour  $\eta = 0,65$ , les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$ , régies par les relations (2.15) et (2.27) respectivement, prennent les valeurs :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,65\right) = 1,56276574$

- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3} \eta$   
 $= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,65\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,65\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,65\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,65 = 0,32481641$

Le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}}\right)^{0,4} = \frac{1,56276574^{0,2}}{2,639 \times 0,32481641^{0,6}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4}}}\right)^{0,4} = 2,35629037 \text{ m}$$

ii. Le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  à l'état plein est, en vertu de la relation (2.147) :



$$\overline{R_p} = 3,84 \frac{\sqrt{g i \overline{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 2,35629037^3}}{10^{-6}} = 972733,656$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est, selon la relation (2.153) :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \overline{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \overline{R_p}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{5.10^{-4} / 2,35629037}{19 \times [0,32481641 / 1,56276574]} + \frac{0,721}{[0,32481641 / 1,56276574]^{3/2} \times 972733,656} \right) \right]^{-2/5} = 0,75960998 \end{aligned}$$

iv. Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = \psi \overline{D} = 0,75960998 \times 2,35629037 = 1,78986168 \text{ m}$$

v. Adoptons le diamètre  $D = 1,8 \text{ m}$ . Pour ce diamètre, le nombre de Reynolds  $R_p$  à l'état plein est, compte tenu de la relation (2.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 1,8^3}}{10^{-6}} = 649470,587$$

vi. En application de la relation (2.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 1,8^5} \times \log \left( \frac{5.10^{-4} / 1,8}{3,229} + \frac{8,359}{649470,587} \right) = 1,61181487 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est, selon la relation (2.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,798 \times \left( \frac{1}{1,61181487} \right)^{0,51} \right] = 0,64539399$$

viii. La profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,64539399 \times 1,8 = 1,16170917 \text{ m} \cong 1,162 \text{ m}$$

ix. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume  $Q$  par la relation générale (2.117) :

$$Q = -4\sqrt{2g} A\sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right)$$

- Les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  prennent les nouvelles valeurs suivantes :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2\sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,64539399\right) = 1,55355205$$

$$\begin{aligned}\zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,64539399\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,64539399\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,64539399\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,64539399 \\ &= 0,3217474\end{aligned}$$

- L'aire de la section mouillée  $A$  est donnée par la relation (2.28) :

$$A = D^2\zeta(\eta) = 1,8^2 \times 0,3217474 = 1,04246157 \text{ m}^2$$

- Le rayon hydraulique  $R_h$  est, selon la relation (2.29) :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 1,8 \times \frac{0,3217474}{1,55355205} = 0,37278784 \text{ m}$$

- Selon la relation (2.118), le nombre de *Reynolds*  $R$  est :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 0,37278784^3}}{10^{-6}} = 721401,586$$

Ainsi, le débit volume  $Q$  est :

$$\begin{aligned}Q &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,04246157 \times \sqrt{0,37278784 \times 5.10^{-4}} \times \log\left(\frac{5.10^{-4}}{14,8 \times 0,37278784} + \frac{10,04}{721401,586}\right) \\ &= 1,0037969 \cong 1,0038 \text{ m}^3 / \text{s}\end{aligned}$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,38% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

### II.6.3.4. Exemple d'application 2.21

Déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans la conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1, sachant que :

$$Q = 0,7 \text{ m}^3 / \text{s} ; i = 3.10^{-4} ; \varepsilon = 2.10^{-4} \text{ m} ; \eta = 0,5 ; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

#### Solution

i. Puisque le taux de remplissage  $\eta$  est compris entre  $1/15$  et  $2/3$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est régi par la relation (2.142). Pour  $\eta = 0,5$ , les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$ , régies par les relations (2.15) et (2.27) respectivement, prennent les valeurs :

$$\bullet \quad \vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,5 \right) = 1,26120446$$

$$\bullet \quad \zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta$$

$$= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,5 \right) - \left( \frac{2}{3} - 0,5 \right) \times \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - 0,5 \right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,5 = 0,22636457$$

Le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = \frac{1,26120446^{0,2}}{2,639 \times 0,22636457^{0,6}} \times \left( \frac{0,7}{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,69224018 \text{ m}$$

ii. Le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  à l'état plein est, en vertu de la relation (2.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 2,69224018^3}}{10^{-6}} = 920231,421$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est, selon la relation (2.153) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{2.10^{-4} / 2,69224018}{19 \times [0,22636457 / 1,26120446]} + \frac{0,721}{[0,22636457 / 1,26120446]^{3/2} \times 920231,421} \right) \right]^{-2/5} = 0,74010581$$

iv. Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = \psi \bar{D} = 0,74010581 \times 2,69224018 = 1,9925426 \text{ m}$$

- v. Adoptons le diamètre  $D = 2 \text{ m}$ . Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds*  $R_p$  à l'état plein est, compte tenu de la relation (2.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 2^3}}{10^{-6}} = 589211,682$$

- vi. En application de la relation (2.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 2^5} \times \log \left( \frac{2 \cdot 10^{-4} / 2}{3,229} + \frac{8,359}{589211,682} \right) = 1,76286764 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

- vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est, selon la relation (2.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,798 \times \left( \frac{0,7}{1,76286764} \right)^{0,51} \right] = 0,49805067$$

- viii. La profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,49805067 \times 2 = 0,99610133 \text{ m} \cong 1 \text{ m}$$

- ix. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume  $Q$  par la relation générale (2.117) :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

- Les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  prennent les nouvelles valeurs suivantes :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,49805067 \right) = 1,25724983$$

$$\begin{aligned} \zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,49805067 \right) - \left( \frac{2}{3} - 0,49805067 \right) \times \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - 0,49805067 \right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,49805067 \\ &= 0,22512019 \end{aligned}$$

- L'aire de la section mouillée  $A$  est donnée par la relation (2.28) :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 2^2 \times 0,22512019 = 0,90048075 \text{ m}^2$$

- Le rayon hydraulique  $R_h$  est, selon la relation (2.29) :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 2 \times \frac{0,22512019}{1,25724983} = 0,35811528 \text{ m}$$

- Selon la relation (2.118), le nombre de *Reynolds*  $R$  est :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 0,35811528^3}}{10^{-6}} = 526131,602$$

Ainsi, le débit volume  $Q$  est :

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,90048075 \times \sqrt{0,35811528 \times 3 \cdot 10^{-4}} \times \log \left( \frac{2 \cdot 10^{-4}}{14,8 \times 0,35811528} + \frac{10,04}{526131,602} \right) = 0,70207975$$

$$\cong 0,702 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,3% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

#### II.6.4. Expression de la vitesse moyenne maximale $V_{\max}$ .

En ayant recours à la relation générale (2.117) exprimant le débit volume  $Q$  et compte tenu du fait que la vitesse moyenne  $V$  est telle que  $V = Q / A$ , nous pouvons alors écrire que :

$$V = -4 \sqrt{2g} \sqrt{R_h} i \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.167)$$

Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta$ , le rayon hydraulique  $R_h$  s'exprime par l'une des relations (2.8), (2.29) ou (2.59), tandis que le nombre de *Reynolds*  $R$  est donné par l'une des relations (2.125), (2.128) ou (2.131). Ainsi, pour :

i.  $\eta \leq 1/15$

$$V = -1,633 \sqrt{g i D} [\varphi(\eta)]^{1/2} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{1,233 \varphi(\eta)} + \frac{35,418}{[\varphi(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.168)$$

Introduisons la vitesse relative  $V^*$  telle que :

$$V^* = \frac{V}{\sqrt{g i D}} \quad (2.169)$$

La relation (2.168) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$V^* = -1,633 [\varphi(\eta)]^{1/2} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{1,233 \varphi(\eta)} + \frac{35,418}{[\varphi(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.170)$$

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$V = -4\sqrt{2} \sqrt{g i D} \left[ \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{1/2} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,852}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.171)$$

Ou bien :

$$V^* = -4\sqrt{2} \left[ \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{1/2} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,852}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.172)$$

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$V = -4\sqrt{2} \sqrt{g i D} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{1/2} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,852}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.173)$$

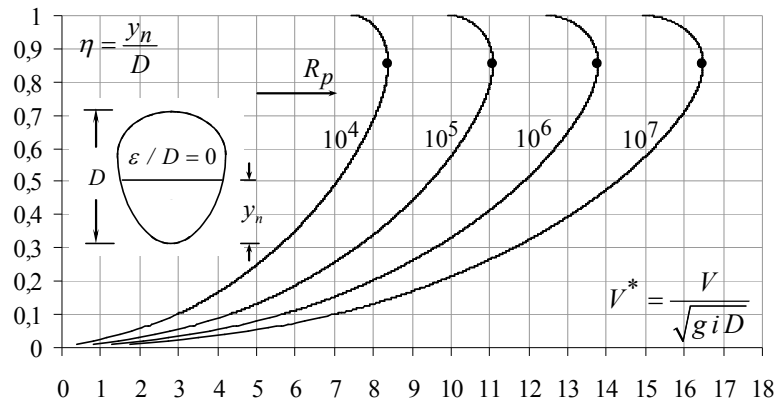
Ou bien :

$$V^* = -4\sqrt{2} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{1/2} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,852}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.174)$$

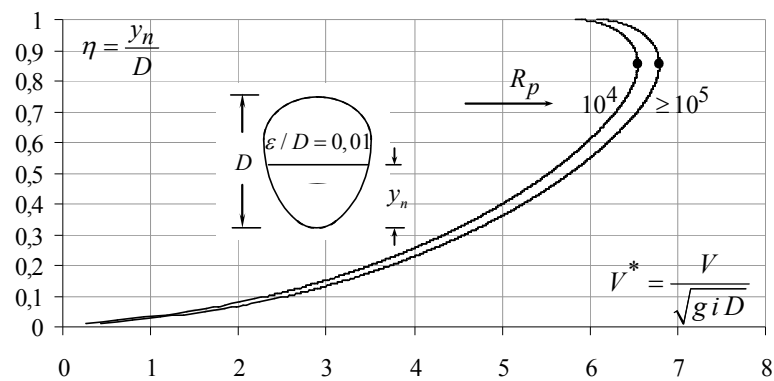
Nous pouvons ainsi observer que dans toute la gamme  $0 \leq \eta \leq 1$ , la vitesse relative  $V^*$  peut s'exprimer en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de

Reynolds  $R_p$  à l'état plein.

Conformément aux relations (2.170), (2.172) et (2.174), la vitesse relative  $V^*$  a été représentée graphiquement sur la figure 2.23 (a et b) en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour diverses valeurs du nombre de Reynolds  $R_p$  et pour les rugosités relatives extrêmes  $\varepsilon/D = 0$  et  $\varepsilon/D = 0,01$ .



a)



b)

**Figure 2.23 :** Variation de  $\eta(V^*)$  pour diverses valeurs du nombre de Reynolds  $R_p$  à l'état plein, conformément aux relations (2.170), (2.172) et (2.174). (a) :  $\varepsilon/D = 0$  ; (b) :  $\varepsilon/D = 0,01$ .

(•) Valeurs maximales de  $V^*$  correspondant à  $\eta = 0,85438$ .

La figure 2.23 (a et b) montre que la vitesse relative  $V^*$  augmente dans un premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$ , puis diminue dans un second temps en passant par un maximum. Le taux de remplissage  $\eta$  correspondant à la valeur maximale de  $V^*$  a été estimé à  $\eta = 0,854375$  et demeure constant quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds  $R_p$  et de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ . Nous pouvons affirmer que  $V_{\max}^*$  et donc  $V_{\max}$  apparaît à la profondeur  $y = 0,854375D$ . D'autre part, la figure 2.23 montre aussi que plus la rugosité relative augmente et plus les courbes de variation de  $\eta(V^*)$  se resserrent pour ensuite se confondre quasiment à partir de la valeur  $R_p = 10^5$ , lorsque la rugosité relative atteint la valeur  $\varepsilon/D = 0,01$ . Au-

délà de la valeur  $R_p = 10^5$ , le nombre de *Reynolds*  $R_p$  n'a aucune influence sur la vitesse relative  $V^*$  et l'écoulement est alors dans le domaine turbulent rugueux. La vitesse relative  $V^*$  ne dépend que de la rugosité relative  $\varepsilon / D$ .

Puisque la valeur  $\eta = 0,854375$ , correspondant à  $V_{\max}^*$ , appartient à l'intervalle  $[2/3; 1]$ , alors  $V_{\max}^*$  est régie par la relation (2.174). Pour  $\eta = 0,85438$ , les fonctions  $\lambda(\eta)$  et  $\tau(\eta)$  prennent respectivement la valeur :

$$\begin{aligned}\lambda(\eta) &= 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta-2) \\ &= 0,5104589 + (0,85438 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,854375) \times (0,854375 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,854375 - 2) \\ &= 0,4540941 \\ \tau(\eta) &= 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta-2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,854375 - 2) = 1,9948756\end{aligned}$$

La relation (2.174) permet alors d'écrire que :

$$V_{\max}^* = -2,699 \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) \quad (2.175)$$

Tenant compte des relations (2.169) et (2.175), nous pouvons écrire que :

$$V_{\max} = -2,699 \sqrt{g i D} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) \quad (2.176)$$

Rappelons que dans la relation (2.176), le nombre de *Reynolds*  $R_p$  à l'état plein est donné par la relation (2.120).

#### II.6.4.1. Exemple d'application 2.22

Soit une conduite en béton de forme ovoïdale (Figure 2.1) dont la paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue  $\varepsilon = 1 \text{ mm}$ . Admettons que la vitesse d'auto-curage doit être supérieure ou égale à  $0,2 \text{ m/s}$  et que, pour éviter tout phénomène érosif, la vitesse moyenne admissible ne doit pas excéder  $2,5 \text{ m/s}$  à  $3 \text{ m/s}$ . La conduite écoule le débit volume  $Q = 2,4 \text{ m}^3 / \text{s}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ , sous une pente longitudinale  $i = 3.10^{-4}$ . Le taux de remplissage de la conduite est  $\eta = 0,6$ .

Déterminer la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement.



## Solution

i. Le taux de remplissage imposé est tel que  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est régi par la relation (2.142). Pour  $\eta = 0,6$ , les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$ , régies par les relations (2.15) et (2.27) respectivement, prennent les valeurs :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,6\right) = 1,46266832$

- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta$   
 $= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,6\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,6\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,6\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,6 = 0,29158036$

Le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}}\right)^{0,4} = \frac{1,46266832^{0,2}}{2,639 \times 0,29158036^{0,6}} \times \left(\frac{2,4}{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4}}}\right)^{0,4} = 3,89996996 \text{ m}$$

ii. Le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  à l'état plein est, en vertu de la relation (2.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 3,89996996^3}}{10^{-6}} = 1604420,67$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est, selon la relation (2.153) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{10^{-3} / 3,89996996}{19 \times [0,29158036 / 1,46266832]} + \frac{0,721}{[0,29158036 / 1,46266832]^{3/2} \times 1604420,67} \right) \right]^{-2/5} = 0,76490882$$

iv. Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = \psi \bar{D} = 0,76490882 \times 3,89996996 = 2,98312142 \text{ m}$$

v. Adoptons le diamètre  $D = 3 \text{ m}$ . Pour ce diamètre, le nombre de Reynolds  $R_p$  à l'état plein est, compte tenu de la relation (2.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 3^3}}{10^{-6}} = 1082450,98$$

vi. En application de la relation (2.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322\sqrt{g i D^5} \log\left(\frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p}\right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 3 \cdot 10^{-4} \times 3^5} \times \log\left(\frac{10^{-3} / 3}{3,229} + \frac{8,359}{1082450,98}\right) = 4,4214097 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est, selon la relation (2.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,798 \times \left( \frac{2,4}{4,4214097} \right)^{0,51} \right] = 0,59595391 \cong 0,596$$

Cette valeur de  $\eta$  appartient aussi à l'intervalle  $[1/15; 2/3]$ .

viii. La profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,59595391 \times 3 = 1,78786174 \text{ m} \cong 1,788 \text{ m}$$

ix. Calculons l'aire de la section mouillée  $A$  en vertu de la relation (2.28). La fonction  $\zeta(\eta)$  prend la valeur :

$$\begin{aligned} \zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,59595391 \right) - \left( \frac{2}{3} - 0,59595391 \right) \times \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - 0,59595391 \right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,59595391 \\ &= 0,28890209 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 3^2 \times 0,28890209 = 2,60011881 \text{ m}^2 \cong 2,6 \text{ m}^2$$

x. La vitesse moyenne de l'écoulement est, par suite :

$$V = Q / A = 2,4 / 2,60011881 = 0,92303475 \text{ m} / \text{s} \cong 0,923 \text{ m} / \text{s}$$

La vitesse moyenne ainsi calculée est bien supérieure à la vitesse d'auto-curage imposée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

xi. Déterminons la vitesse maximale en application de la relation (2.176), soit :

$$V_{\max.} = -2,699 \sqrt{g i D} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) = -2,699 \times \sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 3} \log \left( \frac{10^{-3} / 3}{3,369} + \frac{7,845}{1082450,98} \right)$$

$$= 1,00780827 \text{ m / s} \cong 1 \text{ m / s}$$

La vitesse maximale calculée est bien inférieure à la vitesse maximale admissible imposée lors de l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

xii. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume  $Q$  par la relation générale (2.117) :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

- La fonction  $\vartheta(\eta)$  prend la nouvelle valeur suivante :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,59595391 \right) = 1,45455698$$

- Le rayon hydraulique  $R_h$  est, selon la relation (2.29) :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 3 \times \frac{0,28890209}{1,45455698} = 0,59585584 \text{ m}$$

- Selon la relation (2.118), le nombre de *Reynolds*  $R$  est :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 3.10^{-4} \times 0,59585584^3}}{10^{-6}} = 1129202,69$$

Ainsi, le débit volume  $Q$  est :

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 2,60011881} \times \sqrt{0,59585584 \times 3.10^{-4}} \times \log \left( \frac{10^{-3}}{14,8 \times 0,59585584} + \frac{10,04}{1129202,69} \right) = 2,4099139 \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$\cong 2,41 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,42% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

## II.6.4.2. Exemple d'application 2.23

Soit une conduite de forme ovoïdale (Figure 2.1) dont la paroi interne est caractérisée par la rugosité absolue  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Admettons que la vitesse d'auto-curage doit être supérieure ou égale à  $0,2 m/s$  et que, pour éviter tout phénomène érosif, la vitesse moyenne admissible ne doit pas excéder  $2 m/s$  à  $2,5 m/s$ . La conduite écoule le débit volume  $Q = 2,6 m^3/s$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} m^2/s$ , sous une pente longitudinale  $i = 4.10^{-4}$ . Le taux de remplissage de la conduite est  $\eta = 0,67$ .

Déterminer la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement.

### Solution

i. Le taux de remplissage imposé est tel que  $2/3 \leq \eta \leq 1$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est régi par la relation (2.142). Pour  $\eta = 0,67$ , les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$ , régies par les relations (2.15) et (2.27) respectivement, prennent les valeurs :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,67 \right) = 1,6027673$

- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta$   
 $= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,67 \right) - \left( \frac{2}{3} - 0,67 \right) \times \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - 0,67 \right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,67 = 0,33814819$

Le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = \frac{1,6027673^{0,2}}{2,639 \times 0,33814819^{0,6}} \times \left( \frac{2,6}{\sqrt{9,81 \times 4.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 3,54253383 m$$

ii. Le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  à l'état plein est, en vertu de la relation (2.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 4.10^{-4} \times 3,54253383^3}}{10^{-6}} = 1603861,02$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est, selon la relation (2.153) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{0,721}{\left[ 0,33814819 / 1,6027673 \right]^{3/2} \times 1603861,02} \right) \right]^{-2/5} = 0,69107636$$

iv. Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = \psi \bar{D} = 0,69107636 \times 3,54253383 = 2,44816138 \text{ m}$$

v. Adoptons le diamètre  $D = 2,5 \text{ m}$ . Pour ce diamètre, le nombre de Reynolds  $R_p$  à l'état plein est, compte tenu de la relation (2.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 4,10^{-4} \times 2,5^3}}{10^{-6}} = 950836,264$$

vi. En application de la relation (2.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 4,10^{-4} \times 2,5^5} \times \log \left( \frac{8,359}{950836,264} \right) = 4,13760347 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est, selon la relation (2.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,798 \times \left( \frac{2,6}{4,13760347} \right)^{0,51} \right] = 0,65040182$$

Cette valeur de  $\eta$  appartient aussi à l'intervalle  $[1/15; 2/3]$ .

viii. La profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,65040182 \times 2,5 = 1,62600454 \text{ m} \cong 1,626 \text{ m}$$

ix. Calculons l'aire de la section mouillée  $A$  en vertu la relation (2.28). La fonction  $\zeta(\eta)$  prend la valeur :

$$\begin{aligned} \zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,65040182 \right) - \left( \frac{2}{3} - 0,65040182 \right) \times \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - 0,65040182 \right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,65040182 \\ &= 0,32508418 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 2,5^2 \times 0,32508418 = 2,03177611 m^2$$

x. La vitesse moyenne de l'écoulement est, par suite :

$$V = Q / A = 2,6 / 2,03177611 = 1,27966856 m / s \cong 1,28 m / s$$

La vitesse moyenne ainsi calculée est bien supérieure à la vitesse d'auto-curage imposée à l'énoncé de l'exemple considéré.

xi. Déterminons la vitesse moyenne maximale en application de la relation (2.176), soit :

$$V_{\max.} = -2,699 \sqrt{g i D} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) = -2,699 \times \sqrt{9,81 \times 4.10^{-4} \times 2,5} \log \left( \frac{7,845}{950836,264} \right) = 1,35894321 m / s$$

$$\cong 1,36 m / s$$

La vitesse moyenne maximale calculée est bien inférieure à la vitesse maximale admissible imposée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

xii. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume  $Q$  par la relation générale (2.117) :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

• La fonction  $\vartheta(\eta)$  prend la nouvelle valeur suivante :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,65040182 \right) = 1,56356949$$

• Le rayon hydraulique  $R_h$  est, selon la relation (2.29) :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 2,5 \times \frac{0,32508418}{1,56356949} = 0,51977891 m$$

• Selon la relation (2.118), le nombre de *Reynolds*  $R$  est :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 4.10^{-4} \times 0,51977891^3}}{10^{-6}} = 1062325,13$$

Ainsi, le débit volume  $Q$  est :

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,03177611 \times \sqrt{0,51977891 \times 4.10^{-4}} \times \log \left( \frac{10,04}{1062325,13} \right) = 2,60807195 m^3 / s \cong 2,608 m^3 / s$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,31% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

### II.6.4.3. Exemple d'application 2.24

Reprenons l'exemple d'application 2.23 et déterminons la profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement pour les données suivantes :

$$Q = 3,2 \text{ m}^3 / \text{s}, \quad i = 5 \cdot 10^{-4}, \quad \eta = 0,7, \quad \varepsilon = 1 \text{ mm}, \quad \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

#### Solution

i. Puisque le taux de remplissage  $\eta$  est compris entre  $2/3$  et  $1$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est régi par la relation (2.145). Pour  $\eta = 0,7$ , les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$ , régies par les relations (2.47) et (2.55) respectivement, prennent les valeurs :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,7 - 2) = 1,6628789$
- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$   
 $= 0,5104589 + (0,7 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,7) \times (0,7 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,7 - 2) = 0,3581111$

Le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux est alors :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = \frac{1,6628789^{0,2}}{2,639 \times 0,3581111^{0,6}} \times \left( \frac{3,2}{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 3,5830614 \text{ m}$$

ii. Le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  à l'état plein est, en vertu de la relation (2.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 3,5830614^3}}{10^{-6}} = 1824030,54$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est, selon la relation (2.155) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{10^{-3} / 3,5830614}{19 \times [0,3581111 / 1,6628789]} + \frac{0,721}{[0,3581111 / 1,6628789]^{3/2} \times 1824030,54} \right) \right]^{-2/5} = 0,76465047$$

iv. Selon la relation fondamentale de la MMR, le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = \psi \bar{D} = 0,76465047 \times 3,5830614 = 2,73978958 \text{ m}$$

v. Adoptons le diamètre  $D = 2,75 \text{ m}$ . Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds*  $R_p$  à l'état plein est, compte tenu de la relation (2.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5,10^{-4} \times 2,75^3}}{10^{-6}} = 1226449,78$$

vi. En application de la relation (2.164), le débit volume maximal est :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5,10^{-4} \times 2,75^5} \times \log \left( \frac{10^{-3} / 2,75}{3,229} + \frac{8,359}{1226449,78} \right) = 4,55499481 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est, selon la relation (2.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,798 \times \left( \frac{3,2}{4,55499481} \right)^{0,51} \right] = 0,69662587$$

viii. La profondeur normale  $y_n$  de l'écoulement est par suite :

$$y_n = \eta D = 0,69662587 \times 2,75 = 1,91572114 \text{ m} \cong 1,916 \text{ m}$$

ix. Calculons l'aire de la section mouillée  $A$  en vertu la relation (2.28). La fonction  $\lambda(\eta)$  prend la valeur :

$$\begin{aligned} \lambda(\eta) &= 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2) \\ &= 0,5104589 + (0,69662587 - 2/3) \times \sqrt{(1 - 0,69662587) \times (0,69662587 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,69662587 - 2) \\ &= 0,35587185 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 2,75^2 \times 0,35587185 = 2,6912809 \text{ m}^2$$

x. La vitesse moyenne de l'écoulement est, par suite :



$$V = Q / A = 3,2 / 2,6912809 = 1,1890249 \text{ m/s} \cong 1,2 \text{ m/s}$$

La vitesse moyenne ainsi calculée est bien supérieure à la vitesse d'auto-curage imposée à l'énoncé de l'exemple considéré.

xi. Déterminons la vitesse moyenne maximale en application de la relation (2.176), soit :

$$\begin{aligned} V_{\max.} &= -2,699 \sqrt{g i D} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) \\ &= -2,699 \times \sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 2,75} \log \left( \frac{10^{-3} / 2,75}{3,369} + \frac{7,846}{1226449,78} \right) = 1,23562492 \cong 1,236 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La vitesse moyenne maximale calculée est bien inférieure à la vitesse maximale admissible imposée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

xii. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume  $Q$  par la relation générale (2.117)

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

- La fonction  $\tau(\eta)$  prend la nouvelle valeur suivante :

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,69662587 - 2) = 1,65609999$$

- Le rayon hydraulique  $R_h$  est, selon la relation (2.59) :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 2,75 \times \frac{0,35587185}{1,65609999} = 0,59093509 \text{ m}$$

- Selon la relation (2.118), le nombre de *Reynolds*  $R$  est :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 0,59093509^3}}{10^{-6}} = 1439773,42$$

Ainsi, le débit volume  $Q$  est :

$$\begin{aligned} Q &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,6912809 \times \sqrt{0,59093509 \times 5.10^{-4}} \times \log \left( \frac{10^{-3}}{14,8 \times 0,59093509} + \frac{10,04}{1439773,42} \right) = 3,20978699 \text{ m}^3 / \text{s} \\ &\cong 3,21 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

Nous pouvons observer que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,31% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

## II.6.5. Coefficient $n$ de *Manning*

### II.6.5.1. Relation générale du coefficient $n$ de *Manning*

La relation universellement connue de *Manning* exprime le débit volume  $Q$  sous la forme suivante :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (2.177)$$

où  $n$  est le coefficient de *Manning*.

En comparant les relations (2.117) et (2.177), nous pouvons aisément déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4 \sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.178)$$

La relation (2.178) constitue la relation générale du coefficient  $n$  de *Manning*, applicable à tous les profils géométriques et dans tout le domaine de l'écoulement turbulent tel que défini par le diagramme universel de *Moody*.

Le nombre de *Reynolds*  $R$  figurant dans la relation (2.178) est, pour rappel, donné par les relations (2.125), (2.128) et (2.131), dépendant de la gamme de variation du taux de remplissage  $\eta$ . La relation (2.178) montre que le coefficient  $n$  de *Manning* est fonction de la rugosité absolue  $\varepsilon$ , du nombre de *Reynolds*  $R$  et du rayon hydraulique  $R_h$ . Cette dépendance de  $n$  vis-à-vis de  $R_h$  traduit bien le fait que  $n$  varie en fonction du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite, mais il est intéressant d'observer le degré de cette dépendance. Le rayon hydraulique  $R_h$  est donné par les relations (2.8), (2.29) et (2.59), selon la gamme de variation du taux de remplissage  $\eta$ .

En tenant compte de toutes ces relations, nous pouvons écrire que pour :

i.  $\eta \leq 1/15$

$$\frac{1}{n} = -8,559 \sqrt{g} D^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{-1/6} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{1,233 \varphi(\eta)} + \frac{35,418}{[\varphi(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.179)$$

En introduisant le paramètre adimensionnel :

$$N = \frac{D^{1/6}}{n \sqrt{g}} \quad (2.180)$$

la relation (2.179) s'écrit alors, en termes adimensionnels :

$$N = -8,559 [\varphi(\eta)]^{-1/6} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{1,233 \varphi(\eta)} + \frac{35,418}{[\varphi(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.181)$$

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$\frac{1}{n} = -4 \sqrt{2g} D^{-1/6} \left[ \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,852}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.182)$$

ou bien :

$$N = -4 \sqrt{2} \left[ \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,852}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.183)$$

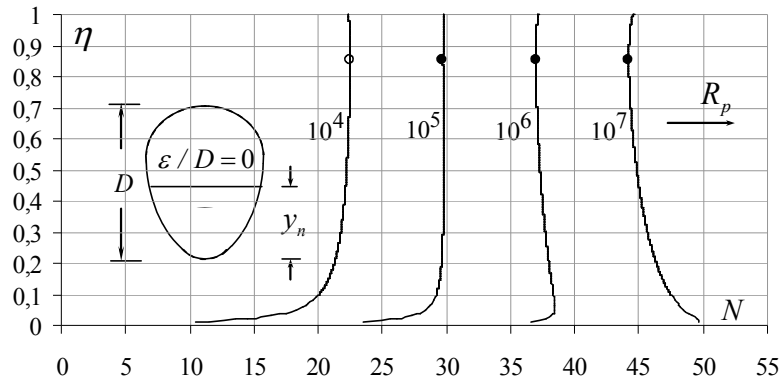
iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$\frac{1}{n} = -4 \sqrt{2g} D^{-1/6} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,852}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.184)$$

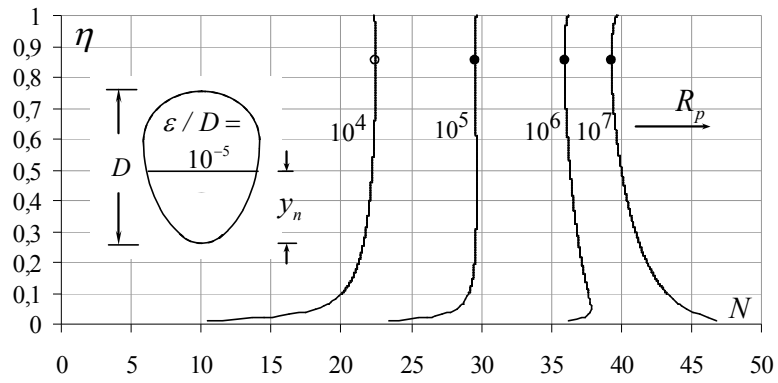
ou bien :

$$N = -4 \sqrt{2} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{-1/6} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{14,8 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,852}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \quad (2.185)$$

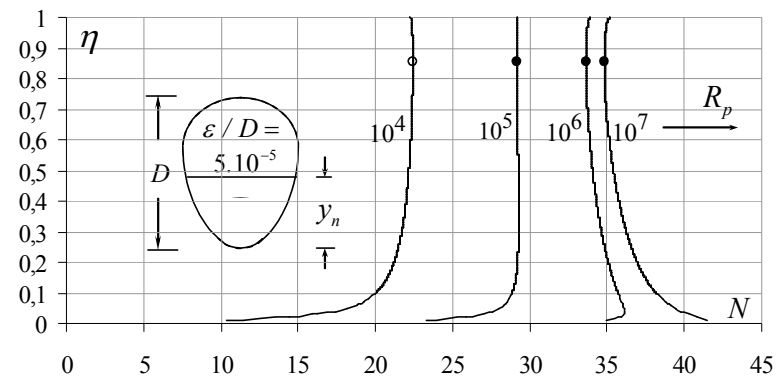
Nous pouvons donc constater que dans toute la gamme  $0 \leq \eta \leq 1$ , le paramètre adimensionnel  $N$  est fonction du taux de remplissage  $\eta$  de la conduite, de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  à l'état plein. Les relations (2.181), (2.183) et (2.185) ont été représentées graphiquement sur la figure 2.24 (a à g), pour quelques valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$ .



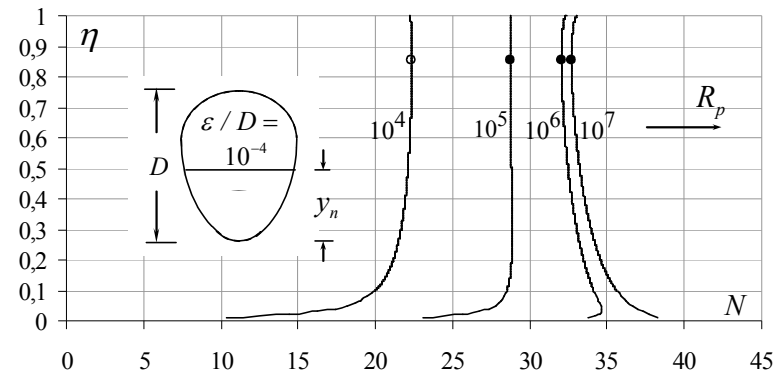
a)



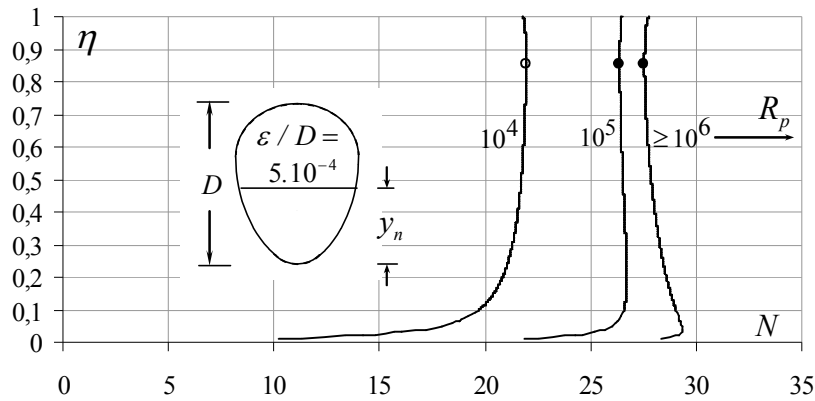
b)



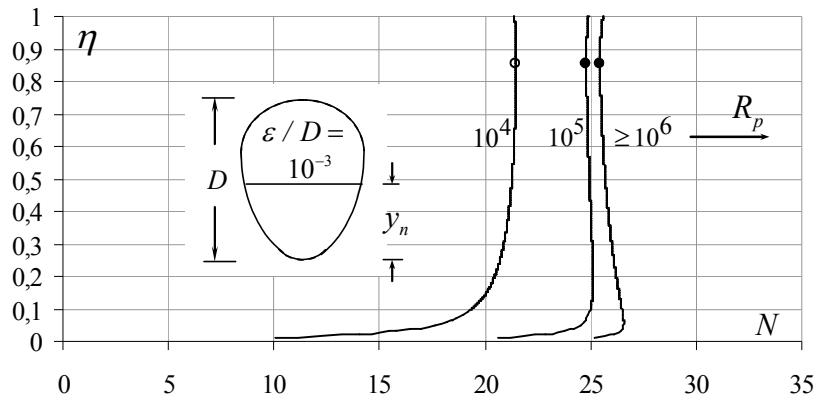
c)



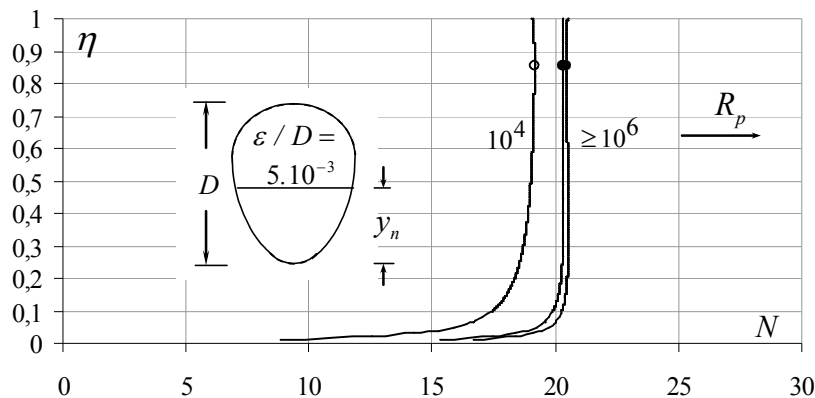
d)



e)



f)



g)

**Figure 2.24 :** Variation du paramètre adimensionnel  $N$  en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , pour quelques valeurs de la rugosité relative  $\varepsilon / D$  et du nombre de Reynolds  $R_p$  à l'état plein.

(o) : Valeur maximale de  $N$  . (●) : Valeur minimale de  $N$

Pour les valeurs pratiques de  $\eta$ , telles que  $\eta \geq 0,2$ , Il ressort de la figure 2.24 (a à g) les observations suivantes :

- i. Le paramètre adimensionnel  $N$  augmente, jusqu'à un maximum, avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$ , pour les valeurs de  $R_p$  atteignant  $10^4$  ou légèrement supérieures à  $10^4$ . Le maximum de  $N$  a été observé pour  $\eta \cong 0,85438$ .

- ii. Au-delà de son maximum, le paramètre  $N$  diminue avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$ .
- iii. Pour les valeurs de  $R_p \geq 10^5$ , le paramètre  $N$  diminue avec l'accroissement de  $\eta$ , jusqu'à un minimum. Le minimum de  $N$  a été également observé pour  $\eta \cong 0,85438$ .
- iv. Au-delà de son minimum, le paramètre  $N$  augmente avec l'accroissement du taux de remplissage  $\eta$ .
- v. Un changement de concavité des courbes s'opère dès que le nombre de *Reynolds*  $R_p$  atteint  $10^5$ .
- vi. Au-delà de  $\eta = 0,2$ , la variation de  $N$  est graduelle et les courbes se resserrent au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative  $\varepsilon / D$ . Dès que la rugosité relative atteint la valeur  $5 \cdot 10^{-3}$ , les courbes se confondent quasiment lorsque le nombre de *Reynolds*  $R_p$  atteint  $10^5$ .

Pour les cas pratiques, la plus petite valeur du nombre de *Reynolds*  $R_p$  est de l'ordre de  $10^5$ , ce qui permet de conclure que le paramètre adimensionnel  $N$  présente en pratique des valeurs minimales. Pour le taux de remplissage  $\eta \cong 0,85438$ ,  $N$  est régi par la relation (2.185) et les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  prennent la valeur  $\tau(\eta = 0,85438) = 1,99488775$  et  $\lambda(\eta = 0,85438) = 0,45409685$ .

Ainsi, en vertu de la relation (2.185), nous pouvons écrire que pour  $R_p \geq 10^5$  :

$$N_{\min.} = -7,239 \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right) \quad (2.186)$$

Ou bien, compte tenu de la relation (2.180) :

$$n_{\max.} = \frac{0,138 D^{1/6}}{\sqrt{g} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,369} + \frac{7,845}{R_p} \right)} \quad (2.187)$$

#### II.6.5.2. Calcul du coefficient $n$ de *Manning* par la MMR

Les relations (2.179), (2.182) ou (2.184) ne permettent d'évaluer le coefficient  $n$  de *Manning* que si le diamètre  $D$  de la conduite est une donnée du problème. Dans le cas où  $D$  n'est pas connu, il est tout de même possible de calculer de manière explicite la valeur de  $n$ , à condition d'avoir recours à la méthode du modèle rugueux (MMR).

En comparant les relations (2.61) et (2.177), nous pouvons déduire que :

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{C} \quad (2.188)$$

Par conséquent, le modèle rugueux de référence est caractérisé par un coefficient de résistance  $\bar{n}$  de *Manning* tel que :

$$\bar{n} = \frac{\bar{R}_h^{1/6}}{\bar{C}} \quad (2.189)$$

Rappelons que  $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$ .

Le modèle rugueux est caractérisé par un diamètre  $\bar{D}$  ; il écoule un débit volume  $\bar{Q}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\bar{\nu}$  correspondant à un taux de remplissage  $\bar{\eta}$ , pour une pente longitudinale  $\bar{i}$ . Pour déterminer le coefficient  $n$  de *Manning*, admettons les conditions suivantes :

- i.  $\bar{D} \neq D$  : le diamètre de la conduite considérée est différent de celui du modèle rugueux de référence.
- ii.  $\bar{Q} = Q$  : la conduite considérée et le modèle rugueux de référence écoulent le même débit volume  $Q$ .
- iii.  $\bar{i} = i$  : la conduite considérée et le modèle rugueux de référence sont caractérisés par la même pente longitudinale  $i$ .
- iv.  $\bar{\eta} = \eta$  : Le taux de remplissage de la conduite considérée est égal à celui du modèle rugueux de référence.
- v.  $\bar{\nu} = \nu$  : la conduite considérée et le modèle rugueux de référence écoulent le même liquide.

Le débit volume  $\bar{Q}$  écoulé par le modèle rugueux de référence s'écrit :

$$\bar{Q} = Q = \frac{1}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{2/3} \sqrt{\bar{i}} \quad (2.190)$$

L'aire de la section mouillée  $A$  ainsi que le rayon hydraulique  $R_h$  sont liés à leurs homologues du modèle rugueux de référence  $\bar{A}$  et  $\bar{R}_h$  par les relations suivantes :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (2.191)$$

$$R_h = \psi \overline{R}_h \quad (2.192)$$

En tenant compte des relations (2.191) et (2.192), la relation (2.177) devient :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} = \frac{\psi^{8/3}}{n} \overline{A} \overline{R}_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (2.193)$$

Il ressort ainsi des relations (2.190) et (2.193) que :

$$n = \overline{n} \psi^{8/3} \quad (2.194)$$

En combinant les relations (2.189) et (2.194), il vient que :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \overline{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (2.195)$$

Le coefficient de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est donné par l'une des relations (2.151), (2.153) ou (2.155) selon la gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta$ , tandis que  $\overline{R}_h$  s'exprime par l'une des relations (2.150), (2.152) ou (2.154). Ainsi :

i.  $\eta \leq 1/15$

$$n = \frac{0,13}{\sqrt{g}} \overline{D}^{-1/6} [\varphi(\eta)]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \overline{D}}{1,583 \varphi(\eta)} + \frac{29,985}{[\varphi(\eta)]^{3/2} \overline{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.196)$$

ii.  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$

$$n = \frac{0,197}{\sqrt{g}} \overline{D}^{-1/6} \left[ \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \overline{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} \overline{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.197)$$

iii.  $2/3 \leq \eta \leq 1$

$$n = \frac{0,197}{\sqrt{g}} \overline{D}^{-1/6} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \overline{D}}{19 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \overline{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \quad (2.198)$$

Selon les relations (2.196), (2.197) et (2.198), le coefficient  $n$  de Manning s'exprime en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , de la rugosité absolue  $\varepsilon$  et des caractéristiques  $\overline{D}$  et  $\overline{R}_p$  du modèle rugueux



de référence. Suivant la valeur de  $\eta$ , le diamètre  $\bar{D}$  est donné par l'une des relations (2.139), (2.142) ou (2.145), tandis que le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  est régi par la relation (2.147).

L'exemple d'application suivant montre les étapes d'évaluation du coefficient  $n$  de Manning par la MMR.

### II.6.5.3. Exemple d'application 2.25

La conduite ovoïdale représentée par la figure 2.1 écoule le débit volume  $Q = 1 \text{ m}^3 / \text{s}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ , sous la pente longitudinale  $i = 5 \cdot 10^{-4}$ . La paroi interne de la conduite est dans un état pratiquement lisse et le taux de remplissage de la conduite doit être maintenu à 60%.

Calculer la valeur :

- i. du coefficient  $n$  de Manning.
- ii. de la profondeur normale  $y_n$ .

#### Solution

i. Puisque le taux de remplissage  $\eta = 0,60$  est compris entre  $1/15$  et  $2/3$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est régi par la relation (2.142). Les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  sont données par les relations (2.15) et (2.27) respectivement. Ainsi :

$$\bullet \quad \vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,6 \right) = 1,46266832$$

$$\bullet \quad \zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta$$

$$= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,6 \right) - \left( \frac{2}{3} - 0,6 \right) \times \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - 0,6 \right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,6 = 0,29158036$$

$$\bullet \quad \bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639 [\zeta(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = \frac{1,46266832^{0,2}}{2,639 \times 0,29158036^{0,6}} \times \left( \frac{1}{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,48088718 \text{ m}$$

ii. Le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux à l'état plein est, selon la relation (2.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 2,48088718^3}}{10^{-6}} = 1050899,66$$

iii. Puisque  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ , alors le coefficient  $n$  de *Manning* est régi par la relation (2.197), soit :

$$\begin{aligned} n &= \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[ \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 \left[ \zeta(\eta) / \vartheta(\eta) \right]} + \frac{0,721}{\left[ \zeta(\eta) / \vartheta(\eta) \right]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \\ &= \frac{0,197}{\sqrt{9,81}} \times 2,48088718^{1/6} \times \left[ \frac{0,29158036}{1,46266832} \right]^{1/6} \\ &\quad \times \left[ -\log \left( \frac{0,721}{\left[ 0,29158036 / 1,46266832 \right]^{3/2} \times 1050899,66} \right) \right]^{-16/15} = 0,00981168 m^{-1/3} s \end{aligned}$$

iv. Selon la relation (2.95), le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = \frac{\left[ \vartheta(\eta) \right]^{1/4}}{\left[ \zeta(\eta) \right]^{5/8}} \left( \frac{n Q}{\sqrt{i}} \right)^{3/8} = \frac{1,46266832^{1/4}}{0,29158036^{5/8}} \times \left( \frac{0,00981168 \times 1}{\sqrt{5.10^{-4}}} \right)^{3/8} = 1,7445369 m$$

v. Adoptons le diamètre  $D = 1,75 m$ . Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds*  $R_p$ , caractérisant l'écoulement dans la conduite à l'état plein est, selon la relation (2.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 1,75^3}}{10^{-6}} = 622598,118$$

vi. Le débit maximum  $Q_{\max.}$  pour le diamètre ainsi adopté est, en vertu de la relation (2.164) :

$$\begin{aligned} Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) = -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 1,75^5} \times \log \left( \frac{8,359}{622598,118} \right) \\ &= 1,82750313 m^3 / s \end{aligned}$$

vii. Pour le diamètre  $D = 1,75 m$ , la nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est, en application de la relation (2.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,798 \times \left( \frac{1}{1,82750313} \right)^{0,51} \right] = 0,59878202$$

La profondeur normale  $y_n$  est, par suite :

$$y_n = \eta D = 0,59878202 \times 1,75 = 1,04786853 \text{ m} \cong 1,05 \text{ m}$$

viii. La vérification des calculs peut porter sur la détermination du débit volume  $Q$  par la relation générale (2.117).

L'aire de la section mouillée  $A$  est donnée par la relation (2.28). La valeur de la fonction  $\zeta(\eta)$  est, selon la relation (2.27) :

$$\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,59878202\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,59878202\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,59878202\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,59878202 = 0,2907739$$

Ainsi :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 1,75^2 \times 0,2907739 = 0,89049505 \text{ m}^2$$

Le rayon hydraulique  $R_h$  est régi par la relation (2.29). La valeur de la fonction  $\vartheta(\eta)$  est, en vertu de la relation (2.15) :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,59878202\right) = 1,46022683$$

Ainsi :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 1,75 \times \frac{0,2907739}{1,46022683} = 0,34847621 \text{ m}$$

Le nombre de *Reynolds*  $R$  est, selon la relation (2.118) :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 0,34847621^3}}{10^{-6}} = 651994,887$$

Par suite, selon la relation (2.117), le débit volume  $Q$  est :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right)$$

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,89049505 \times \sqrt{0,34847621 \times 5.10^{-4}} \times \log\left(\frac{10,04}{651994,887}\right) = 1,00226892 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,23% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

#### II.6.5.4. Exemple d'application 2.26

Reprenons l'exemple d'application 2.25 en imposant un taux de remplissage  $\eta = 2/3$ .

Calculer la valeur :

- i. du coefficient  $n$  de *Manning*.
- ii. de la profondeur normale  $y_n$ .

#### Solution

- i. Puisque le taux de remplissage est, alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est régi par la relation (2.142). Les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  sont données par les relations (2.15) et (2.27) respectivement. Ainsi :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) = 1,59610062$

- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta\right)^2} - \frac{4}{3}\eta$   
 $= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right)^2} - \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = 0,33592598$

- $\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g i}}\right)^{0,4} = \frac{1,59610062^{0,2}}{2,639 \times 0,33592598^{0,6}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4}}}\right)^{0,4} = 2,3189891 m$

- ii. Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_p$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux à l'état plein est, selon la relation (2.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 2,3189891^3}}{10^{-6}} = 949727,016$$

- iii. Puisque  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ , alors le coefficient  $n$  de *Manning* est régi par la relation (2.197), soit :

$$\begin{aligned}
n &= \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[ \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 \left[ \zeta(\eta) / \vartheta(\eta) \right]} + \frac{0,721}{\left[ \zeta(\eta) / \vartheta(\eta) \right]^{3/2} R_p} \right) \right]^{-16/15} \\
&= \frac{0,197}{\sqrt{9,81}} \times 2,3189891^{1/6} \times \left[ \frac{0,33592598}{1,59610062} \right]^{1/6} \\
&\quad \times \left[ -\log \left( \frac{0,721}{\left[ 0,33592598 / 1,59610062 \right]^{3/2} \times 949727,016} \right) \right]^{-16/15} = 0,00980771 m^{-1/3} s
\end{aligned}$$

Il est utile de noter que le coefficient  $n$  de *Manning*, calculé au cours de l'exemple d'application 25, n'a subi aucune variation notable alors le taux de remplissage  $\eta$  est passé de 0,60 à 2/3. Cette variation extrêmement faible du coefficient  $n$  a été mise en évidence sur la figure 2.24 (a à g).

iv. Selon la relation (2.95), le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = \frac{\left[ \vartheta(\eta) \right]^{1/4} \left( \frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8}}{\left[ \zeta(\eta) \right]^{5/8}} = \frac{1,59610062^{1/4}}{0,33592598^{5/8}} \times \left( \frac{0,00980771 \times 1}{\sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{3/8} = 1,63171303 m$$

v. Adoptons le diamètre  $D = 1,65 m$ . Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds*  $R_p$ , caractérisant l'écoulement dans la conduite à l'état plein est, selon la relation (2.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,65^3}}{10^{-6}} = 570002,35$$

vi. Le débit maximum  $Q_{\max.}$  pour le diamètre ainsi adopté est, en vertu de la relation (2.164) :

$$\begin{aligned}
Q_{\max.} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) = -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,65^5} \times \log \left( \frac{8,359}{570002,35} \right) \\
&= 1,56510154 m^3 / s
\end{aligned}$$

vii. Pour le diamètre  $D = 1,65 m$ , la nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est, en application de la relation approchée (2.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,798 \times \left( \frac{1}{1,56510154} \right)^{0,51} \right] = 0,6570223$$

La profondeur normale  $y_n$  est, par suite :

$$y_n = \eta D = 0,6570223 \times 1,65 = 1,08408679 \text{ m} \cong 1,1 \text{ m}$$

viii. La vérification des calculs peut porter sur la détermination du débit volume  $Q$  par la relation générale (2.117).

L'aire de la section mouillée  $A$  est donnée par la relation (2.28). La valeur de la fonction  $\zeta(\eta)$  est, selon la relation (2.27) :

$$\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,6570223\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,6570223\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,6570223\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,6570223 = 0,3294967$$

Ainsi :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 1,65^2 \times 0,3294967 = 0,89705476 \text{ m}^2$$

Le rayon hydraulique  $R_h$  est régi par la relation (2.29). La valeur de la fonction  $\vartheta(\eta)$  est, en vertu de la relation (2.15) :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,6570223\right) = 1,57681159$$

Ainsi :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 1,65 \times \frac{0,3294967}{1,57681159} = 0,34479043 \text{ m}$$

Le nombre de *Reynolds*  $R$  est, selon la relation (2.118) :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 0,34479043^3}}{10^{-6}} = 641678,211$$

Par suite, selon la relation (2.117), le débit volume  $Q$  est :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right)$$

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,89705476 \times \sqrt{0,34479043 \times 5.10^{-4}} \times \log\left(\frac{10,04}{641678,211}\right) = 1,00285279 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,3% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

### II.6.5.5. Exemple d'application 2.27

Reprenons l'exemple d'application 2.25 en imposant la rugosité absolue  $\varepsilon = 0,0008 m$  ainsi que le taux de remplissage  $\eta = 2/3$ . Calculer la valeur :

- i. du coefficient  $n$  de *Manning*.
- ii. de la profondeur normale  $y_n$ .

#### Solution

i. Puisque le taux de remplissage est  $\eta = 2/3$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est régi par la relation (2.142). Les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  sont données par les relations (2.15) et (2.27) respectivement. Ainsi :

- $\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = 1,59610062$

- $\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta$   
 $= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) - \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) \times \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right)^2} - \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} = 0,33592598$

- $\bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = \frac{1,59610062^{0,2}}{2,639 \times 0,33592598^{0,6}} \times \left( \frac{1}{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 2,3189891 m$

ii. Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_p$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux à l'état plein est, selon la relation (2.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 2,3189891^3}}{10^{-6}} = 949727,016$$

iii. Puisque  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ , alors le coefficient  $n$  de *Manning* est régi par la relation (2.197), soit :

$$\begin{aligned}
n &= \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[ \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \right]^{-16/15} \\
&= \frac{0,197}{\sqrt{9,81}} \times 2,3189891^{1/6} \times \left[ \frac{0,33592598}{1,59610062} \right]^{1/6} \\
&\quad \times \left[ -\log \left( \frac{0,0008 / 2,3189891}{19 \times [0,33592598 / 1,59610062]} + \frac{0,721}{[0,33592598 / 1,59610062]^{3/2} \times 949727,016} \right) \right]^{-16/15} \\
&= 0,01263231 m^{-1/3} s
\end{aligned}$$

iv. Selon la relation (2.95), le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = \frac{[\vartheta(\eta)]^{1/4}}{[\zeta(\eta)]^{5/8}} \left( \frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8} = \frac{1,59610062^{1/4}}{0,33592598^{5/8}} \times \left( \frac{0,01263231 \times 1}{\sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{3/8} = 1,79416349 m$$

v. Adoptons le diamètre  $D = 1,80 m$ . Pour ce diamètre, le nombre de Reynolds  $R_p$ , caractérisant l'écoulement dans la conduite à l'état plein est, selon la relation (2.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,8^3}}{10^{-6}} = 649470,587$$

vi. Le débit maximum  $Q_{\max}$  pour le diamètre ainsi adopté est, en vertu de la relation (2.164) :

$$\begin{aligned}
Q_{\max} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\
&= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 1,8^5} \times \log \left( \frac{0,0008 / 1,8}{3,229} + \frac{8,359}{649470,587} \right) = 1,53840838 m^3 / s
\end{aligned}$$

vii. Pour le diamètre  $D = 1,80 m$ , la nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est, en application de la relation approchée (2.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,798 \times \left( \frac{1}{1,50242029} \right)^{0,51} \right] = 0,6736776$$

La profondeur normale  $y_n$  est, par suite :

$$y_n = \eta D = 0,6736776 \times 1,8 = 1,21261967 m \cong 1,213 m$$



viii. La vérification des calculs peut porter sur la détermination du débit volume  $Q$  par la relation générale (2.117).

Puisque la nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est telle que  $2/3 \leq \eta \leq 1$ , alors l'aire de la section mouillée  $A$  est donnée par la relation (2.56). La valeur de la fonction  $\lambda(\eta)$  est, selon la relation (2.55) :

$$\begin{aligned}\lambda(\eta) &= 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2) \\ &= 0,5104589 + (0,6736776 - 2/3) \times \sqrt{(1 - 0,6736776) \times (0,6736776 - 1/3)} \\ &\quad - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,6736776 - 2) = 0,34059958\end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 1,8^2 \times 0,34059958 = 1,10354265 \text{ m}^2$$

Le rayon hydraulique  $R_h$  est régi par la relation (2.59). La valeur de la fonction  $\tau(\eta)$  est, en vertu de la relation (2.47) :

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,6736776 - 2) = 1,61012351$$

soit :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 1,8 \times \frac{0,34059958}{1,61012351} = 0,38076535 \text{ m}$$

Le nombre de *Reynolds*  $R$  est, selon la relation (2.118) :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 0,38076535^3}}{10^{-6}} = 744681,595$$

Par suite, selon la relation (2.117), le débit volume  $Q$  est :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$\begin{aligned}Q &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 1,10354265 \times \sqrt{0,38076535 \times 5.10^{-4}} \times \log \left( \frac{0,0008}{14,8 \times 0,38076535} + \frac{10,04}{744681,595} \right) \\ &= 1,00350834 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 1 \text{ m}^3 / \text{s}\end{aligned}$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré n'est que de 0,35% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

#### II.6.5.6. Exemple d'application 2.28

La conduite ovoïdale représentée par la figure 2.1 écoule le débit volume  $Q = 2,75 \text{ m}^3 / \text{s}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ , sous la pente longitudinale  $i = 5 \cdot 10^{-4}$ . La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue  $\varepsilon = 0,001 \text{ m}$  et le taux de remplissage de la conduite doit être maintenu à 75%. Calculer la valeur :

- i. du coefficient  $n$  de *Manning*.
- ii. de la profondeur normale  $y_n$ .

#### Solution

- i. Puisque le taux de remplissage est tel que  $2/3 \leq \eta \leq 1$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est régi par la relation (2.145). Les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  sont données par les relations (2.47) et (2.55) respectivement. Ainsi :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 1,76455412$

- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$   
 $= 0,5104589 + (0,75 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,75) \times (0,75 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2)$   
 $= 0,39089728$

- $\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = \frac{1,76455412^{0,2}}{2,639 \times 0,39089728^{0,6}} \times \left( \frac{2,75}{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 3,23783934 \text{ m}$

- ii. Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_p$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux à l'état plein est, selon la relation (2.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 3,23783934^3}}{10^{-6}} = 1566872,55$$

- iii. Puisque  $2/3 \leq \eta \leq 1$ , alors le coefficient  $n$  de *Manning* est régi par la relation (2.198), soit :

$$\begin{aligned}
n &= \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 \left[ \lambda(\eta) / \tau(\eta) \right]} + \frac{0,721}{\left[ \lambda(\eta) / \tau(\eta) \right]^{3/2} R_p} \right) \right]^{-16/15} \\
&= \frac{0,197}{\sqrt{9,81}} \times 3,23783934^{1/6} \times \left[ \frac{0,39089728}{1,76455412} \right]^{1/6} \\
&\quad \times \left[ -\log \left( \frac{0,001 / 2,3189891}{19 \times \left[ 0,39089728 / 1,76455412 \right]} + \frac{0,721}{\left[ 0,39089728 / 1,76455412 \right]^{3/2} \times 1566872,55} \right) \right]^{-16/15} \\
&= 0,01318011 m^{-1/3} s
\end{aligned}$$

iv. Selon la relation (2.97), le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = \frac{[\tau(\eta)]^{1/4}}{[\lambda(\eta)]^{5/8}} \left( \frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8} = \frac{1,76455412^{1/4}}{0,39089728^{5/8}} \times \left( \frac{0,01318011 \times 2,75}{\sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{3/8} = 2,48474646 m$$

v. Adoptons le diamètre  $D = 2,5 m$ . Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds*  $R_p$ , caractérisant l'écoulement dans la conduite à l'état plein est, selon la relation (2.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 2,5^3}}{10^{-6}} = 1063067,26$$

vi. Le débit maximum  $Q_{\max}$  pour le diamètre ainsi adopté est, en vertu de la relation (2.164) :

$$\begin{aligned}
Q_{\max} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\
&= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 2,5^5} \times \log \left( \frac{0,001 / 2,5}{3,229} + \frac{8,359}{1063067,26} \right) = 3,55029255 m^3 / s
\end{aligned}$$

vii. Pour le diamètre  $D = 2,5 m$ , la nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est, en application de la relation approchée (2.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,798 \times \left( \frac{2,75}{3,55029255} \right)^{0,51} \right] = 0,74116143$$

La profondeur normale  $y_n$  est, par suite :

$$y_n = \eta D = 0,74116143 \times 2,5 = 1,85290358 m \cong 1,853 m$$

viii. La vérification des calculs peut porter sur la détermination du débit volume  $Q$  par la relation générale (2.117).

Puisque la nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est telle que  $2/3 \leq \eta \leq 1$ , alors l'aire de la section mouillée  $A$  est donnée par la relation (2.56). La valeur de la fonction  $\lambda(\eta)$  est, selon la relation (2.55) :

$$\begin{aligned}\lambda(\eta) &= 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta-1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta-2) \\ &= 0,5104589 + (0,74116143 - 2/3) \times \sqrt{(1-0,74116143) \times (0,74116143 - 1/3)} \\ &\quad - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,74116143 - 2) = 0,38517259\end{aligned}$$

Ainsi :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 2,5^2 \times 0,38517259 = 2,40732869 m^2$$

Le rayon hydraulique  $R_h$  est régi par la relation (2.59). La valeur de la fonction  $\tau(\eta)$  est, en vertu de la relation (2.47) :

$$\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta-2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,74116143 - 2) = 1,7463591$$

soit :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 2,5 \times \frac{0,38517259}{1,7463591} = 0,55139374 m$$

Le nombre de *Reynolds*  $R$  est, selon la relation (2.118) :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 0,55139374^3}}{10^{-6}} = 1297708,74$$

Par suite, selon la relation (2.117), le débit volume  $Q$  est :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$\begin{aligned}Q &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,40732869 \times \sqrt{0,55139374 \times 5.10^{-4}} \times \log \left( \frac{0,001}{14,8 \times 0,55139374} + \frac{10,04}{1297708,74} \right) \\ &= 2,7514832 m^3 / s \cong 2,751 m^3 / s\end{aligned}$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,054% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

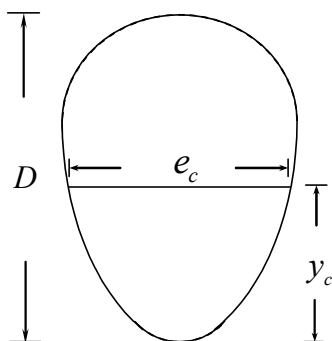
## II.7. ECOULEMENT CRITIQUE

La profondeur critique est un paramètre important qui permet de se prononcer sur le caractère fluvial ou torrentiel de l'écoulement. Lorsque la profondeur critique  $y_c$  est supérieure à la profondeur normale  $y_n$ , l'écoulement est de nature torrentielle. Dans le cas contraire, l'écoulement est fluvial.

L'écoulement critique est régi par la relation bien connue sous le nom de condition de criticité. Celle-ci s'écrit :

$$\frac{Q^2 e_c}{g A_c^3} = 1 \quad (2.199)$$

où  $e_c$  désigne la largeur du plan d'eau (Figure 2.25) et l'indice «  $c$  » se réfère l'état critique de l'écoulement.



**Figure 2.25 :** Schéma de définition de l'écoulement critique dans une conduite de forme ovoïdale.

La largeur du plan d'eau critique  $e_c$  est régie, selon la gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta_c$ , par l'une des relations (2.1), (2.10) ou (2.37), tandis que l'aire de la section mouillée critique  $A_c$  est donnée par l'une des relations (2.7), (2.28) ou (2.56). Tenant compte de ces relations, la condition de criticité s'écrit, pour :

i.  $\eta_c \leq 1/15$

$$\frac{\phi(\eta_c)}{[\sigma(\eta_c)\varphi(\eta_c)/36]^3} \left( \frac{Q^2}{gD^5} \right) = 1 \quad (2.200)$$

où :

$$\phi(\eta_c) = \sqrt{\frac{4}{3}\eta_c(1-3\eta_c)} \quad (2.201)$$

Les fonctions  $\sigma(\eta)$  et  $\varphi(\eta)$  sont régies par les relations (2.3) et (2.6) respectivement. Introduisons le débit relatif :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gD^5}} \quad (2.202)$$

La relation (2.200) s'écrit alors :

$$Q^* = \frac{[\sigma(\eta_c)\varphi(\eta_c)/36]^{3/2}}{[\phi(\eta_c)]^{1/2}} \quad (2.203)$$

ii.  $1/15 \leq \eta_c \leq 2/3$

$$\frac{\gamma(\eta_c)}{[\zeta(\eta_c)]^3} \left( \frac{Q^2}{gD^5} \right) = 1 \quad (2.204)$$

où :

$$\gamma(\eta_c) = 2 \left[ \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta_c \right)^2} - \frac{2}{3} \right] \quad (2.205)$$

La fonction  $\zeta(\eta_c)$  est régie par la relation (2.17). La relation (2.204) permet également d'écrire que :

$$Q^* = \frac{[\zeta(\eta_c)]^{3/2}}{[\gamma(\eta_c)]^{1/2}} \quad (2.206)$$

iii.  $2/3 \leq \eta_c \leq 1$

$$\frac{\delta(\eta_c)}{[\lambda(\eta_c)]^3} \left( \frac{Q^2}{gD^5} \right) = 1 \quad (2.207)$$

où :

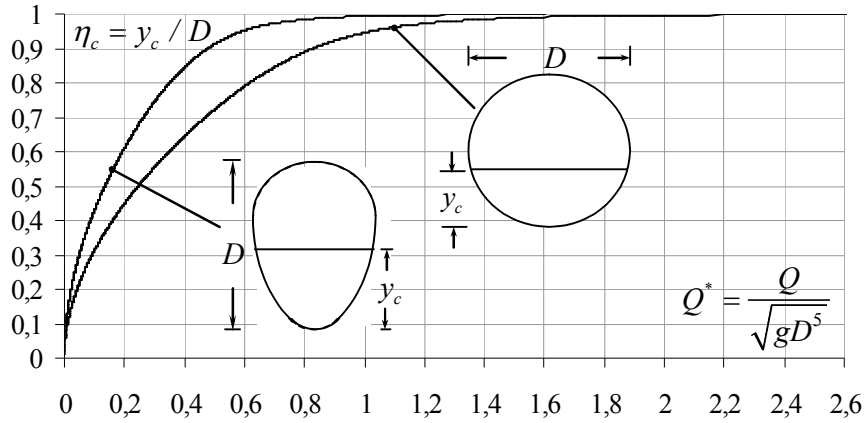
$$\delta(\eta_c) = 2\sqrt{(1-\eta_c)(\eta_c - 1/3)} \quad (2.208)$$

La fonction  $\lambda(\eta_c)$  est donnée par la relation (2.55). La relation (2.207) peut se mettre sous la forme :

$$Q^* = \frac{[\lambda(\eta_c)]^{3/2}}{[\delta(\eta_c)]^{1/2}} \quad (2.209)$$

Les relations (2.203), (2.206) et (2.209) ont été représentées graphiquement sur la figure 2.26. Elle montre que le débit relatif  $Q^*$  augmente avec l'accroissement du taux de remplissage critique  $\eta_c$  et tend vers l'infini lorsque  $\eta_c \rightarrow 1$ . La courbe obtenue a été comparée à celle de l'écoulement critique dans la conduite de forme circulaire.

En règle générale, le débit volume  $Q$  ainsi que le diamètre  $D$  de la conduite de forme ovoïdale considérée sont des paramètres connus et l'on cherche à déterminer la valeur de la profondeur critique  $y_c$ . Le problème revient donc à calculer  $y_c$  à partir de la valeur connue du débit relatif  $Q^*$ , défini par la relation (2.202). L'évaluation de la profondeur critique  $y_c$  peut se faire graphiquement en ayant recours à la figure 2.26, ou par voie de calcul itératif en utilisant l'une des relations (2.203), (2.206) ou (2.209). La valeur connue de  $Q^*$  permet le choix de la relation appropriée pour le calcul de  $\eta_c$  et donc de  $y_c$ . Le calcul a en effet montré que lorsque  $Q^* \leq 0,00268197$ , le taux de remplissage  $\eta_c$  est inférieur à  $1/15$  et doit être évalué par la relation (2.203). Lorsque  $0,00268197 \leq Q^* \leq 0,23845751$ , le taux de remplissage  $\eta_c$  est tel que  $1/15 \leq \eta_c \leq 2/3$  et doit donc être calculé en ayant recours à la relation (2.206). Pour les valeurs de  $Q^*$  telles que  $Q^* \geq 0,23845751$ , le taux de remplissage critique  $\eta_c$  est supérieur à  $2/3$  et doit donc être évalué par la relation (2.209).



**Figure 2.26 :** Variation du taux de remplissage critique  $\eta_c$  en fonction du débit relatif  $Q^*$  pour les conduites de formes ovoïdale et circulaire.

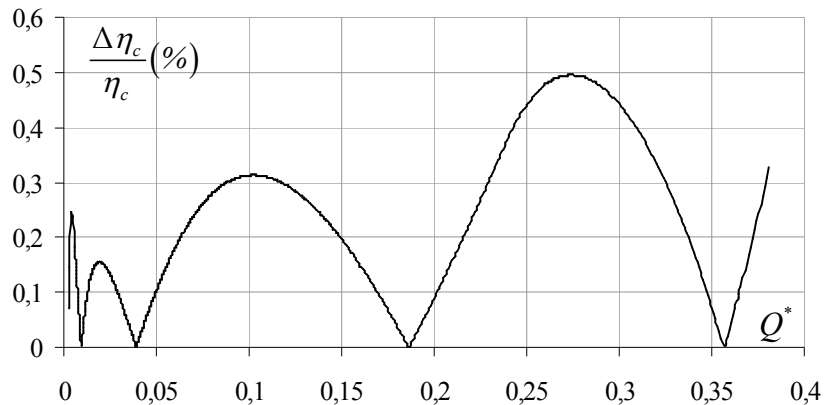
Afin de simplifier le calcul du taux de remplissage critique  $\eta_c$  et donc de celui de la profondeur critique  $y_c$ , il est recommandé d'utiliser la relation approchée suivante, établie dans la large gamme pratique  $1/15 \leq \eta_c \leq 0,83$  et qui correspond à  $0,0027 \leq Q^* \leq 0,383$  :

$$\sinh(0,7\eta_c) = 1,0155 Q^{*0,52} \quad (2.210)$$

L'écart relatif maximal, occasionné par l'application de la relation (2.210), est inférieur à 0,5% dans toute la gamme ci-dessus définie du taux de remplissage critique  $\eta_c$ . La relation (2.210) permet donc d'écrire que :

$$y_c = \frac{D}{0,7} \operatorname{asinh}(1,0155 Q^{*0,52}) \quad (2.211)$$

Les écarts relatifs occasionnés par l'application de la relation approchée (2.210) sont représentés graphiquement sur la figure 2.27.



**Figure 2.27 :** Ecarts relatifs occasionnés par la relation approchée (2.210) sur le calcul du taux de remplissage à l'état critique de la conduite de forme ovoïdale.



## II.7.1. Exemple d'application 2.29

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1 écoule le débit volume  $Q = 2,2 \text{ m}^3 / \text{s}$  sous la pente longitudinale  $i = 5.10^{-4}$ . La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue  $\varepsilon = 0,001 \text{ m}$  et la viscosité cinématique du liquide en écoulement est  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ . Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,65$ , déterminer :

1. le diamètre  $D$  de la conduite en ayant recours à la relation de *Manning*.
2. la nature de l'écoulement en comparant les profondeurs normale et critique.

### Solution

1.

i. Puisque le taux de remplissage  $\eta = 0,65$  est compris entre  $1/15$  et  $2/3$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est régi par la relation (2.142). Les fonctions  $\vartheta(\eta)$  et  $\zeta(\eta)$  sont données par les relations (2.15) et (2.27) respectivement. Ainsi :

$$\bullet \quad \vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,65 \right) = 1,56276574$$

$$\bullet \quad \zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - \eta \right) - \left( \frac{2}{3} - \eta \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - \eta \right)^2} - \frac{4}{3} \eta$$

$$= 1,224814865 - \sin^{-1} \left( \frac{2}{3} - 0,65 \right) - \left( \frac{2}{3} - 0,65 \right) \times \sqrt{1 - \left( \frac{2}{3} - 0,65 \right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,65 = 0,32481641$$

$$\bullet \quad \bar{D} = \frac{[\vartheta(\eta)]^{0,2}}{2,639[\zeta(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = \frac{1,56276574^{0,2}}{2,639 \times 0,32481641^{0,6}} \times \left( \frac{2,2}{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4}}} \right)^{0,4} = 3,22996548 \text{ m}$$

ii. Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}_p$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux à l'état plein est, selon la relation (2.147) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 3,22996548^3}}{10^{-6}} = 1561160,49$$

iii. Puisque  $1/15 \leq \eta \leq 2/3$ , alors le coefficient  $n$  de *Manning* est régi par la relation (2.197), soit :

$$\begin{aligned}
n &= \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[ \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} \right]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]} + \frac{0,721}{[\zeta(\eta) / \vartheta(\eta)]^{3/2} R_p} \right) \right]^{-16/15} \\
&= \frac{0,197}{\sqrt{9,81}} \times 3,22996548^{1/6} \times \left[ \frac{0,32481641}{1,46266832} \right]^{1/6} \\
&\quad \times \left[ -\log \left( \frac{0,001 / 3,22996548}{[0,32481641 / 1,46266832]} + \frac{0,721}{[0,32481641 / 1,46266832]^{3/2} \times 1561160,49} \right) \right]^{-16/15} \\
&= 0,01313634 m^{-1/3} s
\end{aligned}$$

iv. Selon la relation (2.95), le diamètre  $D$  de la conduite est :

$$D = \frac{[\vartheta(\eta)]^{1/4}}{[\zeta(\eta)]^{5/8}} \left( \frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8} = \frac{1,56276574^{1/4}}{0,32481641^{5/8}} \times \left( \frac{0,01313634 \times 2,2}{\sqrt{5 \cdot 10^{-4}}} \right)^{3/8} = 2,4858749 m$$

v. Adoptons le diamètre  $D = 2,5 m$ . Pour ce diamètre, le nombre de *Reynolds*  $R_p$ , caractérisant l'écoulement dans la conduite à l'état plein est, selon la relation (2.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 2,5^3}}{10^{-6}} = 1063067,26$$

vi. Le débit maximum  $Q_{\max}$  pour le diamètre ainsi adopté est, en vertu de la relation (2.164) :

$$\begin{aligned}
Q_{\max} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\
&= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 2,5^5} \times \log \left( \frac{0,001 / 2,5}{3,229} + \frac{8,359}{1063067,26} \right) = 3,55029255 m^3 / s
\end{aligned}$$

vii. Pour le diamètre  $D = 2,5 m$ , la nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est, en application de la relation (2.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,798 \times \left( \frac{2,2}{3,55029255} \right)^{0,51} \right] = 0,64492099$$

La profondeur normale  $y_n$  est, par suite :

$$y_n = \eta D = 0,64492099 \times 2,5 = 1,61230249 m \cong 1,612 m$$

viii. La vérification des calculs peut porter sur la détermination du débit volume  $Q$  par la relation générale (2.117).

L'aire de la section mouillée  $A$  est donnée par la relation (2.28). La valeur de la fonction  $\zeta(\eta)$  est, selon la relation (2.27) :

$$\zeta(\eta) = 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,64492099\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,64492099\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,64492099\right)^2} - \frac{4}{3} \times 0,64492099 = 0,32143229$$

Ainsi :

$$A = D^2 \zeta(\eta) = 2,5^2 \times 0,32143229 = 2,00895181 m^2$$

Le rayon hydraulique  $R_h$  est régi par la relation (2.29). La valeur de la fonction  $\vartheta(\eta)$  est, en vertu de la relation (2.15) :

$$\vartheta(\eta) = 1,59610062 - 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,64492099\right) = 1,55260585$$

Ainsi :

$$R_h = D \frac{\zeta(\eta)}{\vartheta(\eta)} = 2,5 \times \frac{0,32143229}{1,55260585} = 0,51756904 m$$

Le nombre de *Reynolds*  $R$  est, selon la relation (2.118) :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 0,51756904^3}}{10^{-6}} = 1180149,21$$

Par suite, selon la relation (2.117), le débit volume  $Q$  est :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right)$$

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,00895181 \times \sqrt{0,51756904 \times 5.10^{-4}} \times \log\left(\frac{0,001}{14,8 \times 0,51756904} + \frac{10,04}{1180149,21}\right) = 2,20839457 m^3 / s \cong 2,208 m^3 / s$$

Nous pouvons constater que l'écart relatif entre la valeur du débit volume ainsi calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est de 0,38% seulement. Ceci confirme la validité des calculs que nous avons effectués.

2.

i. Selon la relation (2.202), le débit relatif  $Q^*$  est :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g D^5}} = \frac{2,2}{\sqrt{9,81 \times 2,5^5}} = 0,07107848$$

La valeur ainsi calculée de  $Q^*$  est telle que  $0,00152 \leq Q^* \leq 0,383$ , la relation approchée (2.211) est donc applicable. En outre, le taux de remplissage critique  $\eta_c$  doit se situer dans l'intervalle  $[1/15; 2/3]$  puisque  $0,00268197 \leq Q^* \leq 0,23845751$ . La profondeur critique est, en vertu de la relation approchée (2.211), est :

$$y_c = \frac{D}{0,7} \operatorname{asinh}\left(1,0155 Q^{*0,52}\right) = \frac{2,5}{0,7} \times \operatorname{asinh}\left(1,0155 \times 0,07107848^{0,52}\right) = 0,90732739 \text{ m} \cong 0,91 \text{ m}$$

Nous pouvons ainsi conclure que l'écoulement est de nature fluviale puisque  $y_n > y_c$ .

ii. Vérifions que la condition de criticité est bien satisfaite pour la profondeur critique ainsi calculée. Le taux de remplissage critique  $\eta_c$  est :

$$\eta_c = y_c / D = 0,90732739 / 2,5 = 0,36293096 \cong 0,363$$

Puisque  $\eta_c$  appartient à l'intervalle  $[1/15; 2/3]$ , la condition de criticité est alors définie par la relation (2.206), dans laquelle les fonctions  $\zeta(\eta_c)$  et  $\gamma(\eta_c)$  sont, en vertu des relations (2.27) et (2.205) respectivement :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \zeta(\eta) &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta_c\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta_c\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta_c\right)^2} - \frac{4}{3} \eta_c \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,36293096\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,36293096\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,36293096\right)^2} \\ &\quad - \frac{4}{3} \times 0,36293096 = 0,14290964 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \gamma(\eta_c) = 2 \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta_c\right)^2} - \frac{2}{3} \right] = 2 \times \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,36293096\right)^2} - \frac{2}{3} \right] = 0,57217932$$

Ainsi :

$$Q^* \frac{[\gamma(\eta_c)]^{1/2}}{[\zeta(\eta_c)]^{3/2}} = 0,07107848 \times \frac{0,57217932^{1/2}}{0,14290964^{3/2}} = 0,99520365 \cong 1$$

La condition de criticité définie par la relation (2.206) est vérifiée avec un écart relatif inférieur à 0,48% seulement. La valeur approchée de la profondeur critique  $y_c$ , calculée à l'étape (i), est donc bien acceptable.

## II.7.2. Exemple d'application 2.30

La conduite de forme ovoïdale représentée par la figure 2.1 écoule le débit volume  $Q = 2,4 \text{ m}^3 / \text{s}$  sous la pente longitudinale  $i = 4.10^{-4}$ . La paroi interne de la conduite est caractérisée par la rugosité absolue  $\varepsilon = 0,001 \text{ m}$  et la viscosité cinématique du liquide en écoulement est  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ . Pour le taux de remplissage  $\eta = 0,75$ , déterminer :

1. le diamètre  $D$  de la conduite en ayant recours à la relation de *Manning*.
2. la nature de l'écoulement en comparant les profondeurs normale et critique.

### Solution

#### 1.

i. Puisque le taux de remplissage  $\eta = 0,75$  est compris entre  $2/3$  et  $1$ , alors le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est régi par la relation (2.145). Les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  sont données par les relations (2.47) et (2.55) respectivement. Ainsi :

$$\bullet \quad \tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 1,76455412$$

$$\bullet \quad \lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$$

$$= 0,5104589 + (0,75 - 2/3) \times \sqrt{(1 - 0,75) \times (0,75 - 1/3)} - (1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,75 - 2) = 0,39089728$$

Selon la relation (2.145), le diamètre  $\bar{D}$  du modèle rugueux de référence est par suite :

$$\bar{D} = \frac{[\tau(\eta)]^{0,2}}{2,639[\lambda(\eta)]^{0,6}} \left( \frac{Q}{\sqrt{g i}} \right)^{0,4} = \frac{1,76455412^{0,2}}{2,639 \times 0,39089728^{0,6}} \times \left( \frac{2,4}{\sqrt{9,81 \times 4 \cdot 10^{-4}}} \right)^{0,4} = 3,20618602 \text{ m}$$

ii. Le nombre de Reynolds  $\bar{R}_p$  à l'état plein est, par suite, selon la relation (2.120) :

$$\bar{R}_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i \bar{D}^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 3,20618602^3}}{10^{-6}} = 1380952,69$$

iii. Puisque  $2/3 \leq \eta \leq 1$ , alors le coefficient  $n$  de Manning est régi par la relation (2.198), soit :

$$\begin{aligned} n &= \frac{0,197}{\sqrt{g}} \bar{D}^{-1/6} \left[ \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} \right]^{1/6} \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}}{19 [\lambda(\eta) / \tau(\eta)]} + \frac{0,721}{[\lambda(\eta) / \tau(\eta)]^{3/2} \bar{R}_p} \right) \right]^{-16/15} \\ &= \frac{0,197}{\sqrt{9,81}} \times 3,20618602^{1/6} \times \left[ \frac{0,39089728}{1,76455412} \right]^{1/6} \times \\ &\quad \left[ -\log \left( \frac{0,001 / 3,20618602}{19 \times [0,39089728 / 1,76455412]} + \frac{0,721}{[0,39089728 / 1,76455412]^{3/2} \times 1380952,69} \right) \right]^{-16/15} \\ &= 0,01318352 \text{ m}^{-1/3} \text{ s} \end{aligned}$$

iv. Selon la relation (2.97), le diamètre de la conduite est :

$$D = \frac{[\tau(\eta)]^{1/4}}{[\lambda(\eta)]^{5/8}} \left( \frac{n Q}{\sqrt{i}} \right)^{8/3} = \frac{0,39089728^{1/4}}{1,76455412^{5/8}} \times \left( \frac{0,01318352 \times 2,4}{\sqrt{0,0004}} \right)^{8/3} = 2,46220602 \text{ m}$$

v. Adoptons le diamètre  $D = 2,5 \text{ m}$ . Pour ce diamètre, le nombre de Reynolds  $R_p$  à l'état plein est, selon la relation (2.120) :

$$R_p = 3,84 \frac{\sqrt{g i D^3}}{\nu} = 3,84 \times \frac{\sqrt{9,81 \times 4 \cdot 10^{-4} \times 2,5^3}}{10^{-6}} = 950836,264$$

vi. Pour le diamètre adopté, le débit volume maximal  $Q_{\max}$  est, selon la relation (2.164) :

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= -1,322 \sqrt{g i D^5} \log \left( \frac{\varepsilon / D}{3,229} + \frac{8,359}{R_p} \right) \\ &= -1,322 \times \sqrt{9,81 \times 4 \cdot 10^{-4} \times 2,5^5} \times \log \left( \frac{0,001 / 2,5}{3,229} + \frac{8,359}{950836,264} \right) = 3,1729831 \text{ m}^3 / \text{s} \end{aligned}$$

vii. La nouvelle valeur du taux de remplissage  $\eta$  est, en vertu de la relation approchée (2.165) :

$$\eta = \frac{3}{\pi} \sin^{-1} \left[ 0,798 \left( \frac{Q}{Q_{\max.}} \right)^{0,51} \right] = \frac{3}{\pi} \times \sin^{-1} \left[ 0,798 \times \left( \frac{2,4}{3,1729831} \right)^{0,51} \right] = 0,72992858 \cong 0,73$$

viii. La profondeur normale est, par suite :

$$y_n = \eta D = 0,72992858 \times 2,5 = 1,82482146 \text{ m}$$

ix. Vérifions nos calculs en déterminant, pour le dimaètre adopté, le débit volume  $Q$  par la relation générale (2.117). Puisque la nouvelle valeur du taux de remplissage est comprise entre  $2/3$  et  $1$ , alors les fonctions  $\tau(\eta)$  et  $\lambda(\eta)$  sont données par les relations (2.47) et (2.55) respectivement.

Ainsi :

- $\tau(\eta) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \cos^{-1}(3\eta - 2) = 2,64329817 - \frac{2}{3} \times \cos^{-1}(3 \times 0,72992858 - 2) = 1,72339657$
- $\lambda(\eta) = 0,5104589 + (\eta - 2/3) \sqrt{(1-\eta)(\eta - 1/3)} - (1/9) \cos^{-1}(3\eta - 2)$   
 $= 0,5104589 + (0,72992858 - 2/3) \times \sqrt{(1 - 0,72992858) \times (0,72992858 - 1/3)} -$   
 $(1/9) \times \cos^{-1}(3 \times 0,72992858 - 2) = 0,37784602$

Selon la relation (2.56), l'aire de la section mouillée  $A$  est :

$$A = D^2 \lambda(\eta) = 2,5^2 \times 0,37784602 = 2,36153763 \text{ m}^2$$

Le rayon hydraulique  $R_h$  est, en vertu de la relation (2.59) :

$$R_h = D \frac{\lambda(\eta)}{\tau(\eta)} = 2,5 \times \frac{0,37784602}{1,72339657} = 0,54811241 \text{ m}$$

Le nombre de *Reynolds*  $R$ , de la relation (2.117), est donné par la relation (2.118), soit :

$$R = 32 \sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9,81 \times 4.10^{-4} \times 0,54811241^3}}{10^{-6}} = 1150360,42$$

Selon la relation (2.117) le débit volume  $Q$  serait donc égal à :

$$Q = -4 \sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left( \frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

$$Q = -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times 2,36153763 \times \sqrt{0,54811241} \times 4.10^{-4}$$

$$\times \log \left( \frac{0,001}{14,8 \times 0,54811241} + \frac{10,04}{1150360,42} \right) = 2,40345684 \text{ m}^3 / \text{s} \cong 2,403 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Il apparaît que l'écart relatif entre le débit volume ainsi calculé et celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré est inférieur à 0,15%, ce qui confirme la validité des calculs effectués.

## 2.

i. Selon la relation (2.202), le débit relatif  $Q^*$  est :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g D^5}} = \frac{2,4}{\sqrt{9,81 \times 2,5^5}} = 0,07754016$$

Le débit relatif ainsi calculé appartient bien à l'intervalle  $0,00152 \leq Q^* \leq 0,383$ , ce qui permet de conclure que la relation approchée (2.211) est applicable. Il apparaît également que le taux de remplissage à l'état critique  $\eta_c$  doit se situer dans l'intervalle  $[1/15; 2/3]$ , puisque  $0,00268197 \leq Q^* \leq 0,23845751$ . La profondeur critique est alors :

$$y_c = \frac{D}{0,7} \operatorname{asinh}\left(1,0155 Q^{*0,52}\right) = \frac{2,5}{0,7} \times \operatorname{asinh}\left(1,0155 \times 0,07754016^{0,52}\right) = 0,94838279 \text{ m} \cong 0,95 \text{ m}$$

Nous pouvons donc conclure que l'écoulement est de nature fluviale, puisque  $y_n > y_c$ .

ii. Vérifions si la condition de criticité est bien vérifiée pour la profondeur critique ainsi calculée.

Le taux de remplissage à l'état critique est :

$$\eta_c = y_c / D = 0,94838279 / 2,5 = 0,37935312 \cong 0,38$$

Puisque  $\eta_c$  appartient à l'intervalle  $[1/15; 2/3]$ , la condition de criticité est alors définie par la relation (2.206), dans laquelle les fonctions  $\zeta(\eta_c)$  et  $\gamma(\eta_c)$  sont, en vertu des relations (2.27) et (2.205), respectivement :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \zeta(\eta_c) &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - \eta_c\right) - \left(\frac{2}{3} - \eta_c\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta_c\right)^2} - \frac{4}{3} \eta_c \\ &= 1,224814865 - \sin^{-1}\left(\frac{2}{3} - 0,37935312\right) - \left(\frac{2}{3} - 0,37935312\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,37935312\right)^2} \\ &\quad - \frac{4}{3} \times 0,37935312 = 0,15239033 \\ \bullet \quad \gamma(\eta_c) &= 2 \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - \eta_c\right)^2} - \frac{2}{3} \right] = 2 \times \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} - 0,37935312\right)^2} - \frac{2}{3} \right] = 0,58233984 \end{aligned}$$



Ainsi :

$$Q^* \frac{[\gamma(\eta_c)]^{1/2}}{[\zeta(\eta_c)]^{3/2}} = 0,07754016 \times \frac{0,58233984^{1/2}}{0,15239033^{3/2}} = 0,99466959 \cong 1$$

La condition de criticité définie par la relation (2.206) est vérifiée avec un écart relatif inférieur à 0,54% seulement. La valeur approchée de la profondeur critique  $y_c$ , calculée à l'étape (x), est donc acceptable.

## II.8. Conclusion

Le second chapitre de notre mémoire a eu pour objectif l'étude de l'écoulement uniforme dans une conduite de forme ovoïdale de hauteur  $D$ , égale au diamètre du cercle qui l'a générée. Les caractéristiques géométriques de la conduite ont été données ainsi les propriétés hydrauliques de l'écoulement, telles que la largeur du plan d'eau, le rayon hydraulique et l'aire de la section mouillée. Ces caractéristiques et propriétés dépendent du lieu géométrique de l'écoulement et dépendent ainsi du taux de remplissage de la conduite. Leur variation a été représentée graphiquement et a été comparée à celle de la conduite de forme circulaire. Nous avons noté en particulier que le rayon hydraulique atteint un maximum dont l'expression a été déterminée.

L'étude a d'abord concerné l'écoulement uniforme à coefficient de résistance constant aussi bien le coefficient  $C$  de *Chézy* que celui  $n$  de *Manning*. Selon le taux de remplissage de la conduite, l'expression du débit volume a été déterminée lorsque l'une ou l'autre des relations de *Chézy* et de *Manning* a été utilisée.

La relation de *Chézy* a permis d'introduire la notion de conductivité relative qui est  $Q^* = Q / \sqrt{C^2 D^5 i}$ , où  $i$  est la pente longitudinale de la conduite et  $Q$  est le débit volume. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage de la conduite, l'expression de la conductivité relative a été donnée, en particulier la conductivité relative à l'état plein dont la valeur est constante et vaut  $Q_p^* = 0,22432005$ . La variation de la conductivité relative en fonction du taux de remplissage  $\eta$  a montré une courbe à deux branches distinctes. L'une croissante et l'autre décroissante, indiquant un maximum pour la conductivité relative. Ce maximum a été déterminé pour la valeur  $\eta = 0,9617$ , correspondant à  $Q_{\max}^* \cong 0,233792$ . La relation de la conductivité relative est implicite vis-à-vis du taux de remplissage  $\eta$  et nous avons pu proposer une excellente relation approchée établie dans la large gamme  $0,20 \leq \eta \leq 0,80$  et correspondant à  $0,0185 \leq Q^* \leq 0,20$ . Cette relation permet, pour la valeur connue de la conductivité relative, la détermination du taux de remplissage et par conséquent celle de la profondeur normale  $y_n$ . Des exemples d'application ont

été proposés dans le but d'illustrer la démarche à suivre pour le calcul de cette profondeur. La conductivité relative rapportée au diamètre de la conduite a été transformée pour s'écrire  $Q_y^* = Q / \sqrt{C^2 i y_n^5}$ . Elle a donc été rapportée à la profondeur normale  $y_n$ . La relation de  $Q_y^*$  est implicite vis-à-vis du taux de remplissage  $\eta$  et nous avons alors proposé une relation approchée selon la gamme de valeurs de  $\eta$ . Cette relation permet de déterminer le taux de remplissage  $\eta$ , par suite le diamètre  $D$  de la conduite, pour les valeurs connues du débit volume  $Q$ , du coefficient  $C$  de *Chézy*, de la pente longitudinale  $i$  et de la profondeur normale  $y_n$ . Des exemples d'application ont été également proposés, illustrant les étapes de calcul.

La courbe de remplissage de la conduite considérée, traduisant la variation de  $\eta(Q/Q_p)$  a été graphiquement représentée. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage, l'expression de  $Q/Q_p$  a été déterminée et sa variation a été graphiquement représentée. La courbe obtenue est constituée de deux branches. L'une croissante et l'autre décroissante, indiquant un maximum pour  $Q/Q_p$ . Ce maximum correspond à  $Q_{\max.}/Q_p = 1,04225$  et il a été obtenu pour  $\eta = 0,962$ . L'expression de  $Q/Q_p$  est implicite vis-à-vis de  $\eta$  et une relation approchée a été proposée dans la gamme  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ , correspondant à  $0,049 \leq Q/Q_p \leq 0,895$ . Pour le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy* constant, nous avons déterminé l'expression de  $Q/Q_{\max}$  et sa représentation graphique a montré deux branches, l'une croissante et l'autre décroissante, passant un maximum correspondant à  $Q/Q_{\max} = 1$  et  $\eta = 0,962$ .

En ayant recours à la relation de *Manning*, la conductivité relative  $Q^* = nQ / (D^{8/3} \sqrt{i})$  a été exprimée, selon la gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta$ . La courbe de variation de  $Q^*$  passe par un maximum correspondant à  $Q_{\max}^* \cong 0,181324$ , atteint pour le taux de remplissage  $\eta = 0,953$ . La relation de la conductivité relative  $Q^*$  est implicite vis-à-vis du taux de remplissage  $\eta$  et une excellente relation approchée a été déterminée dans la large gamme  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ , correspondant à  $0,007175 \leq Q^* \leq 0,15663$ . D'intéressantes relations approchées ont été également proposées et qui permettent de déterminer de manière explicite le taux de remplissage  $\eta$  de la conduite de forme ovoïdale étudiée, et par conséquent le diamètre  $D$  de la conduite, à partir des valeurs imposées du débit volume  $Q$ , de la pente longitudinale  $i$ , de la profondeur normale  $y_n$  et du coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  de *Manning*.

La courbe de remplissage de la conduite pour  $n$ =constante a révélé que  $Q_{\max.} = 1,0632 Q_p$ , correspondant à un taux de remplissage  $\eta = 0,953$ . Dans la large gamme  $0,15 \leq \eta \leq 0,80$ , une relation approchée explicite de  $\eta(Q/Q_p)$  a été déterminée. Elle permet de calculer la profondeur normale

$y_n$  de l'écoulement. Dans la même gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta$ , une relation approchée explicite de  $\eta(Q/Q_{\max})$  a été proposée.

Notre étude s'est poursuivie par l'analyse de l'écoulement à coefficient de résistance variable, aussi bien celui de *Chézy* que celui de *Manning*.

La relation générale du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* a été identifiée en ayant recours la relation du débit volume proposée par *Achour et Bedjaoui* (2006). Le coefficient de résistance à l'écoulement  $C$  de *Chézy* est fonction à la fois de la rugosité relative  $\varepsilon/D$ , du taux de remplissage  $\eta$  et d'un nombre de *Reynolds*  $R$ , lui-même fonction de la pente longitudinale  $i$ , du diamètre  $D$ , de  $\eta$  et de la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement. Nous avons donc écrit la relation fonctionnelle  $C(D, \eta, i, \varepsilon, \nu) = 0$ . Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage  $\eta$ , nous avons déterminé le paramètre adimensionnel  $C/\sqrt{g}$ . Il se présente en fonction du taux de remplissage  $\eta$ , de la rugosité relative  $\varepsilon/D$  et du nombre de *Reynolds*  $R_p$  à l'état plein. La représentation graphique du paramètre  $C/\sqrt{g}$ , en fonction de  $\eta$  et de  $R_p$ , a montré que  $C/\sqrt{g}$  passe par un maximum pour  $\eta \cong 0,8544$ . Lorsque le diamètre  $D$  de la conduite n'est pas une donnée du problème, le calcul du coefficient  $C$  de *Chézy* a pu être possible en ayant recours à la méthode du modèle rugueux (MMR). Des exemples d'application ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre.

En tenant compte de la relation générale du débit volume proposée par *Achour et Bedjaoui* (2006), nous avons montré que le débit volume maximal est atteint pour la profondeur  $y \cong 0,955 D$ . Dans la gamme  $0,20 \leq \eta \leq 0,75$ , nous avons pu exprimer la relation approchée explicite permettant le calcul du taux de remplissage  $\eta$  et, par conséquent, celui de la profondeur normale  $y_n$ .

La relation générale de la vitesse moyenne  $V$  a été exprimée en tenant compte également de la relation du débit volume proposée par *Achour et Bedjaoui* (2006). La vitesse relative  $V^* = V/\sqrt{g i D}$  a été exprimée selon la gamme de variation du taux de remplissage  $\eta$ . Sa représentation graphique a montré qu'elle passe par un maximum, atteint à la profondeur  $y = 0,854375 D$ .

En ce qui concerne le coefficient de résistance  $n$  de *Manning*, son expression générale a été déterminée. La représentation graphique du paramètre adimensionnel  $N = D^{1/6} / (n \sqrt{g})$  a montré un minimum, atteint pour  $\eta \cong 0,85438$ . Pour cette même valeur de  $\eta$ , le coefficient  $n$  de *Manning* atteint alors sa valeur maximale et dont l'expression a été déterminée. Lorsque le diamètre de la conduite n'est pas une donnée du problème, la méthode du modèle rugueux a permis de calculer le

coefficient de résistance à l'écoulement  $n$  de *Manning*. Des exemples d'application numériques ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre.

Notre étude s'est poursuivie par l'analyse de l'écoulement critique dans la conduite de forme ovoïdale considérée. En se basant sur la condition de criticité, le débit relatif  $Q^* = Q / \sqrt{gD^5}$  a été exprimé pour chacune des gammes du taux de remplissage critique. La forme implicite du taux de remplissage critique a été levée en proposant une excellente relation approchée. Cette relation permet de calculer la profondeur critique dans la conduite de forme ovoïdale considérée.

## CONCLUSION GENERALE

Notre travail de recherche a eu pour objectif l'étude de l'écoulement uniforme dans une conduite de forme ovoïdale de hauteur égale au diamètre du cercle qui la engendrée. Deux principaux chapitres ont été présentés.

Le premier chapitre a eu pour but de donner un bref état de la littérature sur l'écoulement uniforme. Cette étude a d'abord révélé que l'écoulement uniforme est, en général, analysé à l'aide des relations de *Chézy* et de *Manning*. Ces deux relations ont été largement présentées et commentées en mettant l'accent sur la constance du coefficient de résistance à l'écoulement et qui peut être estimé selon les relations de *Bazin* et de *Kutter*. La relation de *Chézy* a été déduite du développement des équations du mouvement. L'étude bibliographique a surtout montré que les relations de type *Chézy* ou *Manning* ne s'appliquent qu'aux écoulements se situant dans le domaine turbulent rugueux et qu'aucune relation n'a encore été établie pour estimer les coefficients de résistance de ces deux relations, lorsque l'écoulement est dans le domaine lisse ou de transition.

Le second chapitre du mémoire, qui constitue notre contribution à l'étude de l'écoulement uniforme dans une conduite de forme ovoïdale, a été consacré dans un premier temps aux caractéristiques géométriques de l'ouvrage et à celles de l'écoulement, ainsi qu'à leurs variations. Ces caractéristiques dépendent de la gamme de valeurs du taux de remplissage. Dans un second temps, l'écoulement est analysé d'une part sous la constance du coefficient de résistance et lorsque ce coefficient est variable d'autre part. Ces deux aspects du problème ont été examinés sur la base des relations de *Chézy* et de *Manning*. Le débit volume écoulé par la conduite a été exprimé selon la gamme de variation du taux de remplissage et les relations régissant la conductivité relative ont été déduites. A coefficient de résistance constant, le calcul a montré que la conductivité relative selon *Chézy* passe par un maximum correspond au taux de remplissage  $\eta = 0,9617$ . Une relation explicite approchée liant le taux de remplissage à la conductivité relative a été proposée pour le calcul de la profondeur normale de l'écoulement. La conductivité relative rapportée à la profondeur normale a été également exprimée selon la gamme de valeurs du taux de remplissage. Une relation approchée a aussi été proposée pour le calcul du diamètre de la conduite lorsque la profondeur normale est imposée. A coefficient de résistance constant de *Chézy*, la courbe de remplissage de la conduite a été analytiquement exprimée et graphiquement représentée. Cette courbe passe par un maximum correspondant au taux de remplissage  $\eta = 0,9617$ . Une relation approchée, permettant de calculer le taux de remplissage en fonction du rapport débit volume écoulé au débit volume à l'état plein, a été proposée dans une large pratique du taux de remplissage. A coefficient de rugosité constant, la conductivité relative selon *Manning* passe par un maximum correspondant au taux de remplissage  $\eta = 0,953$ . La relation approchée liant le taux de remplissage à la conductivité relative a

été établie dans le but de calculer la profondeur normale de l'écoulement. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage, la conductivité relative rapportée à la profondeur normale, selon *Manning*, a pu être exprimée. Le caractère implicite de la relation obtenue a pu être levé par une relation approchée fiable permettant de déduire le diamètre de la conduite lorsque la profondeur normale est imposée. A coefficient de rugosité de *Manning* constant, la courbe de remplissage de la conduite a été graphiquement représentée et commentée, tout en déterminant une excellente relation approchée pour le calcul de la profondeur normale.

L'étude de l'écoulement à coefficient de résistance variable s'est basée sur la relation générale du débit volume. Celui-ci dépend de l'aire de la section mouillée, de la pente longitudinale de la conduite, du rayon hydraulique, de la rugosité absolue et de la viscosité cinématique du liquide en écoulement. De la relation générale du débit volume a été déduite l'expression du coefficient de résistance de *Chézy* et celle du coefficient de rugosité de *Manning*, selon la gamme de variation du taux de remplissage. En absence du diamètre de la conduite, la méthode du modèle rugueux a permis de calculer ces coefficients. La courbe de variation du coefficient de résistance de *Chézy*, en fonction du taux de remplissage et du nombre de *Reynolds* à l'état plein, a montré que ce coefficient passe par un maximum correspondant au taux de remplissage  $\eta \cong 0,8544$ . Pour les faibles valeurs du taux de remplissage, le coefficient de résistance de *Chézy* subit une variation rapide, puis une variation lente pour les valeurs intermédiaires du taux de remplissage et diminue au-delà de son maximum. Plus la rugosité relative augmente et plus les courbes de variation du coefficient de *Chézy* se rapprochent les unes des autres. La représentation graphique de la conductivité relative a montré que le maximum est atteint pour la valeur moyenne du taux de remplissage  $\eta_0 = 0,9547 \cong 0,955$ . Ceci a permis d'exprimer le débit volume maximal, correspondant à la capacité d'évacuation de la conduite, en fonction du diamètre de la conduite, de la pente longitudinale, de la rugosité absolue et du nombre de *Reynolds* à l'état plein. En ce qui concerne le calcul de la profondeur normale de l'écoulement, nous avons pu établir une excellente relation approchée prenant en compte le rapport du débit volume au débit volume maximal. La relation générale du débit volume a aussi permis d'exprimer la vitesse moyenne de l'écoulement. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage, les relations de la vitesse moyenne relative ont été proposées et les courbes de variation obtenues ont révélé que le maximum est atteint pour le taux de remplissage  $\eta \cong 0,8544$ , comme pour le cas du coefficient de résistance de *Chézy*. La relation générale du débit volume a permis aussi de déduire l'expression du coefficient de rugosité de *Manning*, selon la gamme de variation du taux de remplissage. La variation de ce coefficient en fonction du taux de remplissage et du nombre de *Reynolds* à l'état plein a montré un maximum, atteint pour le taux de remplissage  $\eta \cong 0,8544$ . Ceci a permis de déduire l'expression du coefficient

maximal de rugosité. Grâce à la méthode du modèle rugueux, le coefficient de rugosité de *Manning* sa pu être évalué même en l'absence du diamètre de la conduite. De nombreux exemples d'application ont été proposés pour illustrer la démarche à suivre.

Le second chapitre de ce travail s'est achevé par l'étude de l'écoulement critique dans la conduite de forme ovoïdale. L'objectif principal a été de développer la condition de criticité et d'établir une relation approchée au calcul de la profondeur critique.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Achour B. and Bedjaoui, A., Discussion of Explicit Solutions for Normal Depth Problem, J. Hydraulic Research, IAHR, 2006, 44, No. 5, pp. 715-717.
- Achour B., *Calcul des conduites et canaux par la MMR – Conduites et canaux en charge*, Larhyss Edition Capitale, Tome 1, 2007, 610p.
- Bazin H., Etude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts, Mémoire n°41, Annales des ponts et chaussées, Vol.14, ser.7, 4ème trimestre, p.20-70, 1897.
- Bock J., Einfluss der Querschnittsform auf die Widerstandsbeiwerte offener Gerinne, Technischer Bericht 2, Inst. Hydromechanik und Wasserbau, TH Darmstadt, ed. O. Kirshmer, Darmstadt, 1966.
- Chow V.T., *Open channel Hydraulics*, McGraw-Hill International Editions, 1973.
- Colebrook, C.F., White, C.M., Experiments with fluid friction in roughened pipes, Proc. R. Soc. London, Ser. A, 1937, 161, pp. 367-381.
- Crausse E., *Hydraulique des canaux découverts*, Ed. Eyrolles, Paris, 1951.
- Graf W.H., Altinakar M.S., *Hydraulique Fluviale, Ecoulement permanent uniforme et non uniforme, Traité de Génie-Civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*, Tome 1, 1993.
- Graf W.H., Altinakar M.S., *Hydrodynamique*, Ed. Eyrolles, Paris, 1991.
- Manning R., On the flow of water in open channels and pipes, Transactions, Institution of Civil engineers of Ireland, Vol.20, p.161-207, Dublin, 1891.
- Marchi E., Rubatta A., *Meccanica dei Fluidi*, UTET, Torino, 1981.
- Silberman E. et al., Friction factor in open channels, Proc., Am. Soc. Civil Engrs., Vol. 89, HY2, 1963, USA.
- Sinniger, R.O., Hager W.H., *Constructions hydrauliques, Traité de Génie Civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne*, Presses Polytechniques Romandes, (15), 1<sup>ère</sup> Edition, Suisse, 1989.