

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : Génie Mécanique
Ref :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم : الهندسة الميكانيكية
المرجع :

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de
Doctorat en Sciences en : Génie Mécanique

Option: Génie Mécanique

Formulation des éléments finis à champ déformation pour l'étude dynamique des structures minces

Présentée par :

Faïçal BOUSSEM

Soutenue publiquement le :16/09/2021

Devant le jury composé de :

Pr. Hecini Mabrouk	Professeur	Président	Université de Biskra
Pr. Belounar Lamine	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Pr. Maalam Toufik	Professeur	Examineur	Université de Batna 2
Dr. Guerraike Khelifa	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Batna 2

Je dédie cette thèse : À la mémoire de mon père

À ma mère

À ma femme, à tous mes enfants Amir, Iyad, Aya et Amjed

À toute ma famille.

REMERCIEMENTS

J'exprime ma profonde reconnaissance à mon encadreur Monsieur **Lamine Belounar** Professeur à l'université de Biskra, pour leur soutien constant et leur aide qu'il m'a apportée tout le long de cette thèse.

Je tiens à remercier particulièrement le Professeur **Hecini Mabrouk** qui m'a fait l'honneur de présider le jury ainsi que les membres : Professeur **Maalam Toufik** et Dr. **Guerraiche Khelifa** pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette étude en acceptant de participer à ce jury.

Je remercie en particulier Dr. Abderrahim Belounar, Dr. Lahcen Fortas et Dr. Abderraouf Messai pour leurs aides précieuses, et leurs encouragements continus à achever ma thèse.

Résumé

L'objectif de la présente thèse est de développer et évaluer deux nouveaux éléments finis de plaque basés sur l'approche en déformation pour l'analyse dynamique des structures. Deux éléments quadrilatères de plaque, l'un de type Kirchhoff à quatre-nœuds, appelé KSBQP (**K**irchhoff **S**train **B**ased **Q**uadrilateral **P**late), avec trois degrés de liberté (un déplacement et deux rotations) par nœud et l'autre de type Reissner-Mindlin à quatre-nœuds, appelé MSBQP (**M**indlin **S**train **B**ased **Q**uadrilateral **P**late), avec trois degrés de liberté (un déplacement et deux rotations) par nœud, sont proposés. L'élément KSBQP est basé sur des fonctions d'ordre élevé du champ de déformations qui satisfont l'équation de compatibilité. L'élément MSBQP a vérifié le test de blocage en cisaillement transversal et passe le patch-test mécanique.

Ces deux éléments sont testés pour l'analyse statique et en vibration libre des plaques en flexion. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par d'autres types d'éléments finis et avec des solutions analytiques données dans la littérature. Tous les résultats montrent que les éléments proposés ont une bonne convergence même dans le cas du maillage grossier, insensible à la distorsion géométrique et ils ont une convergence rapide vers la solution exacte.

Les problèmes de vibrations transversales libres et flambement des plaques sous les charges dans le plan sont deux problèmes à valeur propre. Ils sont couplés dans le cas où des forces dans le plan sont appliquées aux bords de la plaque vibrante transversalement. Un facteur important qui peut influencer sur l'analyse dynamique des plaques est les ouvertures dans les plaques en flexion. L'effet de la force du fluide sur la structure est représenté comme une masse ajoutée, qui diminue la fréquence naturelle de la structure par rapport à celle qui serait mesurée dans le vide. À partir des différents tests étudiés, les éléments finis développés MSBQP et KSBQP des plaques en flexion basés sur l'approche en déformation donnent des résultats acceptables pour les charges de flambement et les fréquences naturelles.

Mots clés: Approche en déformation, Plaque en flexion, Vibration libre, Flambement, Théorie de Mindlin, Théorie de Kirchhoff.

Abstract

The objective of this thesis is to develop and evaluate two new plates finite elements based on the strain approach for the dynamic analysis of structures. Two quadrilateral plate elements, one of the Kirchhoff type with four-node, called KSBQP (**K**irchhoff **S**train **B**ased **Q**uadrilateral **P**late), with three degrees of freedom (one displacement and two rotations) per node, and the other of the Reissner-Mindlin type with four-node, called MSBQP (**M**indlin **S**train **B**ased **Q**uadrilateral **P**late), with three degrees of freedom (one displacement and two rotations) per node, are proposed. The KSBQP element is based on high-order functions of the strain field that satisfies the compatibility equation. The MSBQP element has verified the transverse shear locking test and passes the mechanical patch- test.

Both elements are tested for static and free vibration analysis of the plates in bending. The results obtained are compared with those obtained with other types of finite elements and with analytical solutions given in the literature. All results show that the proposed elements have good convergence even in the case of coarse meshing, insensitive to geometric distortion, and have a fast convergence to the exact solution.

The problems of free transverse vibrations and plate buckling under in-plane loads are two eigenvalue problems. They are coupled in the case where in-plane forces are applied to the edges of the transversely vibrating plate. An important factor that can affect the dynamic analysis of plates is the openings in the bending plates. The effect of the fluid force on the structure is represented as an added mass, which decreases the natural frequency of the structure compared to that which would be measured in a vacuum. From the different tests studied, the developed MSBQP and KSBQP finite elements of the bending plates based on the strain approach give acceptable results for buckling loads and natural frequencies.

Keywords: Strain approach, Plate in bending, Free vibration, Buckling, Mindlin theory, Kirchhoff theory.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو صياغة وتقييم عنصرين محدودين جديدين للصفائح تستند على مقارنة مبدأ التشوه لتحليل الديناميكي للهياكل. اثنان من عناصر الصفيحة الرباعية، أحدهما من نوع Kirchhoff رباعي العقد، ويسمى KSBQP (Kirchhoff Strain Based Quadrilateral Plate)، مع ثلاث درجات من الحرية (إزاحة واحدة ودورانين) لكل عقدة والآخر من نوع Reissner-Mindlin رباعي العقد، ويسمى MSBQP (Mindlin Strain Based Quadrilateral Plate)، مع ثلاث درجات من الحرية (إزاحة واحدة ودورانين) لكل عقدة، تم اقتراحهما. يعتمد عنصر KSBQP على دوال عالية الترتيب لحقل التشوه الذي يحقق معادلة التوافق. اجتاز عنصر MSBQP اختبار قفل القص العرضي واجتاز اختبار التصحيح الميكانيكي.

تم اختبار كلا العنصرين لدراسة التحليل الساكن والاهتزاز الحر للألواح في الانحناء. النتائج التي تم الحصول عليها مقارنة بالحلول التحليلية والعديد للعناصر الأخرى، تظهر جميع النتائج أن العناصر المقترحة لها تقارب جيد حتى حالة التشابك الكبير، وغير حساس للتشويه الهندسي ولها تقارب سريع إلى الحل الدقيق.

تعتبر مسائل الاهتزازات الحرة والتواء الصفائح تحت الأحمال داخل المستوي إشكاليين ذات قيم ذاتية. يتم اقترانها في الحالة التي يتم فيها تطبيق قوى داخل المستوي على حواف الصفيحة الاهتزازية المستعرضة. من العوامل المهمة التي يمكن أن تؤثر على التحليل الديناميكي للصفائح الفتحات الموجودة في صفائح الانحناء. يتم تمثيل تأثير قوة المائع على الهيكل ككتلة مضافة، مما يقلل من التردد الطبيعي للهيكل مقارنة بتلك التي يمكن قياسها في الفراغ. من خلال الاختبارات المختلفة التي تمت دراستها، فإن العناصر المحددة MSBQP و KSBQP المصاغة لألواح الانحناء بناءً على نهج التشوه تعطي نتائج مقبولة لأحمال الالتواء والترددات الاهتزازية الطبيعية.

الكلمات المفتاحية: مقارنة التشوه، إنحناء الصفيحة، الاهتزاز الحر، الالتواء، نظرية Mindlin، نظرية Kirchhoff.

Table des matières

Résumé.....	i
Abstract	ii
ملخص.....	iii
Table des matières.....	iv
Liste des figures	viii
Liste des tableaux.....	xiii
Notations	xvii

Introduction générale

1. Introduction	1
2. Objectifs de la thèse	3
3. Plan de la thèse.....	3

Chapitre 1. Etude bibliographique

1.1 Introduction.....	5
1.2 Théorie des plaques en flexion.....	5
1.2.1 Convention de signe pour déplacements et rotations	5
1.2.2 Hypothèses fondamentales	6
1.2.3 Théorie des plaques minces en flexion.....	6
1.2.3.1 Champ de déplacements et déformations	6
1.2.3.2 Forces et moments agissant sur la plaque.....	8
1.2.3.3 Loi de comportement.....	8
1.2.3.4 Equations d'équilibres	9
1.2.4 Théorie des plaques épaisses en flexion.....	10
1.2.4.1 Champ de déplacements et déformations	11
1.2.4.2 Loi de comportement.....	11
1.3 Coefficient de correction en cisaillement k	13
1.4 Formulation variationnelle faible	13
1.5 Historique sur l'analyse des vibrations libres des plaques en flexion	14

1.6	Notions sur les Vibrations	15
1.6.1	Vibration libre	15
1.6.2	Vibration forcée.....	15
1.7	Matrice masse pour les plaques en vibration libre	16
1.7.1	Matrice masse pour une plaque de Reissner –Mindlin.....	16
1.7.2	Matrice masse pour une plaque de Kirchhoff.....	17
1.8	Modèle en déformation	17
1.8.1	Avantage du modèle en déformation.....	18
1.8.2	Historique des éléments finis existants basés sur le modèle en déformation	18
1.8.2.1	Éléments courbés.....	19
1.8.2.2	Éléments membranaires.....	20
1.8.2.3	Éléments tridimensionnels 3D.....	21
1.8.2.4	Éléments plaques en flexion.....	22

Chapitre 2. Développement et validation d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces

2.1	Introduction	23
2.2	Formulation de l'élément KSBQP	23
2.2.1	Formulation du champ des déplacements.....	23
2.2.2	Evaluation des matrices élémentaires de rigidité et de masse	26
2.3	Validation numérique	27
2.3.1	Validation numérique en statique	27
2.3.1.1	Plaque carrée en torsion.....	27
2.3.1.2	Plaque carrée	28
2.3.1.3	Plaque biaise console.....	29
2.3.1.4	Plaque console soumise à une charge ponctuelle	31
2.3.1.5	Plaque circulaire sous chargement uniforme.....	32
2.3.2	Validation numérique en vibration libre.....	34
2.3.2.1	Vibration libre des plaques carrées.....	34
2.3.2.2	Vibrations transversales d'une plaque rectangulaire mince simplement appuyée	38
2.3.2.3	Vibrations de flexion hors du plan d'une poutre élastique isotrope rectangulaire	40
2.3.2.4	Vibration libre d'une plaque parallélogramme.....	42
2.3.2.5	Vibration libre des plaques biaises	43
2.3.2.6	Vibration libre des plaques triangulaires	44

2.3.2.7	Vibration libre d'une plaque rectangulaire avec un trou central	46
2.3.2.8	Vibration libre des plaques elliptiques	47
2.3.2.9	Vibration libre des plaques circulaires	48
2.4	Conclusion.....	49

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

3.1	Introduction.....	50
3.2	Formulation de l'élément MSBQP	51
3.2.1	Formulation du champ des déplacements.....	51
3.2.2	Evaluation des matrices élémentaires de rigidité et de masse	55
3.3	Validation numérique.....	55
3.3.1	Validation numérique en statique.....	56
3.3.1.1	Patch-test mécanique	56
3.3.1.2	Poutre console	57
3.3.1.3	Plaque carrée isotrope sous chargement uniforme	58
3.3.1.4	Effet du cisaillement transversal sur la flèche	62
3.3.1.5	Plaque biaise de Morley	64
3.3.1.6	Plaque biaise isotrope de Razzaque.....	65
3.3.1.7	Plaque circulaire sous chargement uniforme.....	66
3.3.1.8	Une plaque courbée simplement supportée	67
3.3.2	Validation numérique en vibration libre.....	69
3.3.2.1	Vibration libre des plaques carrées.....	69
3.3.2.2	Vibration libre des plaques rectangulaires.....	79
3.3.2.3	Vibration libre des plaques parallélogrammes	80
3.3.2.4	Vibration libre des plaques biaises	81
3.3.2.5	Vibration libre d'une plaque circulaire encastrée	84
3.3.2.7	Vibration libre d'une plaque rectangulaire avec un trou central	87
3.4	Conclusion.....	88

Chapitre 4. Vibration et flambement des structures minces

4.1	Introduction.....	90
4.2	Vibration des plaques soumises à des charges dans le plan	90
4.2.1	Considération théorique.....	90

4.2.1.1	Problème de flambement des plaques en flexion	90
4.2.1.2	Matrices élémentaires	92
4.2.1.3	Vibration des plaques soumises à des charges dans le plan	93
4.2.2	Validation numérique	94
4.2.2.1	Plaques rectangulaires soumises à une compression uni-axiale dans le plan	94
4.2.2.2	Une plaque rectangulaire soumise à une compression bi-axiale dans le plan	98
4.3	Analyse de la vibration libre des plaques circulaires avec plusieurs trous circulaires	100
4.3.1	Vibration libre d'une plaque annulaire	100
4.3.2	Vibration libre d'une plaque circulaire avec un trou excentré	101
4.3.3	Vibration libre d'une plaque circulaire avec deux trous	104
4.4	Analyse dynamique des plaques en interaction avec un fluide	105
4.4.1	Considération théorique	105
4.4.2	Validation numérique	106
4.4.2.1	Plaque rectangulaire totalement submergée	106
4.4.2.2	Plaque carrée encastree	108
4.4.2.3	Une plaque verticale partiellement immergée	108
4.5	Conclusion	111

Conclusion générale

Conclusion générale	113
Références bibliographiques	115
Annexes	127

Liste des figures

Chapitre 1. Etude bibliographique

Figure 1.1 :	Géométrie d'une plaque.....	5
Figure 1.2 :	Configuration déformée d'une plaque mince en flexion.....	7

Chapitre 2. Développement et validation d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces.

Figure 2.1 :	Elément quadrilatère KSBQP de plaque avec trois degrés de liberté par nœud.....	23
Figure 2.2 :	Torsion d'une plaque carrée ($L=8$, $h=1$, $P=5$, $E=10000$, $\nu=0.3$).....	28
Figure 2.3 :	Plaque carrée avec un maillage de $N \times N$ ($L=20$, $E=10^6$, $\nu = 0.3$, $P=1$, $q=1$)...	28
Figure 2.4 :	Convergence des déplacements W_c normalisés d'une plaque.....	30
Figure 2.5 :	Convergence des déplacements normalisés pour plaque carrée simplement appuyée sous charge uniforme.....	30
Figure 2.6 :	Plaque biaise sous charge uniforme($E=10.5 \times 10^6$, $\nu=0.35$, $q=0.26066$, $h=0.125$).....	30
Figure 2.7 :	Plaque console soumise à une charge ponctuelle ($L=10$, $b=1$, $h=0.1$, $E=2.1 \times 10^6$, $\nu=0$, $P=1$).....	31
Figure 2.8 :	Maillage d'une plaque circulaire ($R=1$, $E=10^{11}$, $\nu=0.3$, $P=4000$, $q=1000$, $h=0.01$).....	32
Figure 2.9 :	Convergence de la flèche normalisée au centre d'une plaque circulaire sous charge concentrée.....	33
Figure 2.10 :	Convergence de la flèche normalisée au centre d'une plaque circulaire sous charge uniforme	33
Figure 2.11 :	Plaque carrée avec un maillage de $N \times N$	34
Figure 2.12 :	Convergence des fréquences non dimensionnelle pour une plaque carrée encastrée. Mode1.....	35
Figure 2.13:	Convergence des fréquences non dimensionnelle pour une plaque carrée encastrée. Mode2.....	35
Figure 2.14:	Convergence des fréquences non dimensionnelle pour une plaque carrée simplement appuyée. Mode 1.....	36

Figure 2.15:	Convergence des fréquences non dimensionnelle pour une plaque carrée simplement appuyée. Mode 2.....	36
Figure 2.16:	Comparaison de l'erreur des fréquences non dimensionnelle de la plaque SSSS.....	38
Figure 2.17:	Comparaison de l'erreur des fréquences non dimensionnelle de la plaque CCCC.....	38
Figure 2.18:	Trois premiers modes propres d'une plaque carrée CCCC ($h/a = 0.01$).....	38
Figure 2.19:	Trois premiers modes propres d'une plaque carrée CCCF ($h/a = 0.01$).....	38
Figure 2.20:	La plaque rectangulaire mince simplement appuyée modélisée avec 8×4 éléments.....	39
Figure 2.21:	Cinq premières fréquences d'une plaque carrée simplement appuyée avec un maillage 8×4 et $L/h=50$	40
Figure 2.22:	Cinq premières fréquences d'une plaque carrée simplement appuyée avec un maillage 8×4 et $L/h=100$	40
Figure 2.23:	Différents modes propres de plaque rectangulaire simplement appuyée ($L/h=50$) (maillage 20×20).....	41
Figure 2.24:	La poutre élastique isotrope modélisée avec 10×1 éléments.....	41
Figure 2.25:	Plaque console biaise avec un maillage $N \times N$	42
Figure 2.26:	Les six modes propres d'une plaque console biaise ($h/L=0.001$).....	43
Figure 2.27:	Géométrie de la plaque biaise et son FE maillage.....	44
Figure 2.28:	Maillage d'une plaque console triangulaire.....	45
Figure 2.29:	Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque console triangulaire ($h/L=0.001$, $\nu=0.3$).....	45
Figure 2.30:	Plaque rectangulaire avec un trou central ($a/b=9/8$, $h/a=0.01$, $\nu=0.3$).....	46
Figure 2.31:	Modes propres d'une plaque rectangulaire avec un trou central.....	47
Figure 2.32:	Maillage d'une plaque elliptique (470 quadrilatères).....	47
Figure 2.33:	Maillage d'une plaque circulaire (384 quadrilatères).....	48

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

Figure 3.1 :	Élément quadrilatère MSBQP de plaque avec trois degrés de liberté par nœud.....	51
Figure 3.2 :	Sollicitations sur le contour reflétant l'état des contraintes constantes.....	56
Figure 3.3 :	Charges nodales équivalentes.....	56
Figure 3.4 :	Poutre -Console soumise à une charge ponctuelle ($E=1.2 \times 10^6$, $L=10$, $b=1$, $\nu=0$).....	57

Figure 3.5 :	Plaque carrée avec un maillage de $N \times N$ ($L=10, E=10.92, \nu=0.3, k=5/6$).....	58
Figure 3.6 :	Convergence de la flèche $((WD/qL^4)100)$ au centre d'une plaque carrée encastré sous charge uniforme ($h/L=0.01$).....	60
Figure 3.7 :	Convergence de la flèche $((WD/qL^4)100)$ au centre d'une plaque carrée encastré sous charge uniforme ($h/L=0.1$).....	60
Figure 3.8 :	Convergence de la flèche $((WD/qL^4)100)$ au centre d'une plaque carrée simplement supportée SS1 sous charge uniforme ($h/L=0.01$).....	60
Figure 3.9 :	Convergence de la flèche $((WD/qL^4)100)$ au centre d'une plaque carrée simplement supportée SS1 sous charge uniforme ($h/L=0.1$).....	61
Figure 3.10 :	Convergence de la flèche $((WD/qL^4)100)$ au centre d'une plaque carrée simplement supportée SS2 sous charge uniforme ($h/L=0.01$).....	61
Figure 3.11 :	Convergence de la flèche $((WD/qL^4)100)$ au centre d'une plaque carrée simplement supportée SS2 sous charge uniforme ($h/L=0.1$).....	61
Figure 3.12 :	Plaque carrée sous différents chargement et différentes conditions aux limites.....	62
Figure 3.13 :	Convergence de la déflexion centrale normalisée en fonction de l'élancement L/h d'une plaque simplement appuyée soumise à une charge répartie.....	63
Figure 3.14 :	Convergence de la déflexion centrale normalisée en fonction de l'élancement L/h d'une plaque simplement appuyée soumise à une charge concentrée	63
Figure 3.15 :	Plaque biaise de Morley à 30° simplement appuyée ($w = 0$).....	64
Figure 3.16 :	Convergence de la flèche au centre d'une plaque biaise (Morley).....	65
Figure 3.17 :	Plaque biaise(Razzaque) avec maillage $N \times N$ ($E=10.92, L=100, \nu=0.3, k=5/6, q = 1.0$).....	65
Figure 3.18 :	Convergence de la flèche au centre d'une plaque biaise (Razzaque).....	66
Figure 3.19 :	Maillage d'un quart de la plaque circulaire($E=10.92, R=5, \nu=0.3, q = 1.0$).....	66
Figure 3.20 :	Convergence du déplacement normalisé du centre de la plaque circulaire encastrée.....	67
Figure 3.21 :	Convergence du déplacement normalisé du centre de la plaque circulaire simplement appuyée.....	67
Figure 3.22 :	Plaque courbé ($E=4.6 \times 10^5 \text{ lb/po}^2, \nu=0.35, h=0.168 \text{ po}, P_A=P_B=P_C=1 \text{ lb}$).....	68
Figure 3.23:	Plaque courbe, déplacement suivant ABC – Charge au point A.....	68
Figure 3.24:	Plaque courbe, déplacement suivant ABC – Charge au point B.....	69
Figure 3.25:	Plaque courbe, déplacement suivant ABC – Charge au point C.....	69
Figure 3.26:	Plaque carrée avec un maillage de $N \times N$	70
Figure 3.27:	Convergence de la fréquence non-dimensionnelle (λ) d'une plaque encastrée ($h/L=0.01$).....	71

Figure 3.28:	Convergence de la fréquence non-dimensionnelle (λ) d'une plaque encastree ($h/L=0.1$).....	72
Figure 3.29:	Convergence de la fréquence non-dimensionnelle (λ) d'une plaque simplement appuyée ($h/L=0.01$).....	72
Figure 3.30:	Convergence de la fréquence non-dimensionnelle (λ) d'une plaque simplement appuyée ($h/L=0.1$).....	72
Figure 3.31:	Trois premiers modes d'une plaque carrée SSSS avec $h/L=0.01$	73
Figure 3.32:	Trois premiers modes d'une plaque carrée CCCC avec $h/L=0.01$	74
Figure 3.33:	Trois premiers modes d'une plaque carrée SCSC avec $h/L=0.1$	75
Figure 3.34:	Trois premiers modes d'une plaque carrée SCSF avec $h/L=0.01$	76
Figure 3.35:	Trois premiers modes d'une plaque carrée SCSS avec $h/L=0.1$	77
Figure 3.36:	Trois premiers modes d'une plaque carrée CCCF avec $h/L=0.1$	78
Figure 3.37:	Quatre premiers modes propres d'une plaque rectangulaire SSSF.....	80
Figure 3.38:	Plaque console biaise avec un maillage $N \times N$	81
Figure 3.39:	Géométrie de la plaque biaise et son FE maillage.....	82
Figure 3.40:	Modes propres des plaques biaises avec $h/L=0.01$	82
Figure 3.41:	Maillage d'une plaque circulaire (480 quadrilatères).....	84
Figure 3.42:	Les trois premiers modes propres d'une plaque circulaire encastree avec $L/h=0.01$	85
Figure 3.43:	Maillage d'une plaque console triangulaire (800 éléments quadrilatères).....	86
Figure 3.44:	Plaque rectangulaire avec un trou central ($a/b=9/8$, $h/a=0.01$, $\nu=0.3$, $k=5/6$)...	88

Chapitre 4. Vibration et flambement des structures minces

Figure 4.1 :	Plaque carrée soumise à une compression uni-axiale avec maillage 20×20 ($E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu=0.3$).....	94
Figure 4.2 :	Convergence de la charge de flambement normalisée K_h/K_{exact} d'une plaque carrée CCCC soumise à une compression uni-axial ($h/b = 0.01$).....	95
Figure 4.3 :	Convergence de la charge de flambement normalisée K_h/K_{exact} d'une plaque carrée SSSS soumise à une compression uni-axiale ($h/b = 0.01$).....	96
Figure 4.4 :	Contour des quatre premiers modes de flambage d'une plaque carrée SSSS soumise à une compression uni-axiale ($h/b=0.01$).....	96
Figure 4.5 :	Paramètres de fréquence fondamentaux V_b d'une plaque carrée soumise à une charge uni-axiale.....	97
Figure 4.6 :	Convergence de la charge de flambage axial K_h de la plaque SSSS avec divers rapports a/b et divers rapports h/b	98

Figure 4.7 :	Modes du flambement uni-axial d'une plaque rectangulaire SSSS avec $h/b=0.01$ et différents rapport a/b	98
Figure 4.8 :	Plaque carrée soumise à une compression bi-axiale avec maillage 20×20	99
Figure 4.9 :	Modes de flambement bi-axiale d'une plaque carrée CCCC avec $h/b=0.01$, $a/b=1$	99
Figure 4.10 :	Paramètres de fréquence fondamentaux V_b d'une plaque carrée soumise à une charge bi-axiale.....	100
Figure 4.11 :	Une plaque annulaire avec 2060 éléments quadrilatéraux.....	100
Figure 4.12 :	Les trois premiers modes de l'élément MSBQP pour une plaque annulaire....	101
Figure 4.13 :	Plaque circulaire avec trous excentré avec 1892 éléments quadrilatéraux.....	102
Figure 4.14 :	Les trois premiers modes de l'élément MSBQP pour une plaque circulaire avec trou excentré($e/a=0.45$, $b=0.25$)	102
Figure 4.15 :	Les trois premiers modes de l'élément MSBQP pour une plaque circulaire C-F avec trou excentré ($b/a=0.40$, $e/a=0.50$)	103
Figure 4.16 :	Les trois premiers modes de l'élément MSBQP pour une plaque circulaire S-F avec trou excentré ($b/a=0.40$, $e/a=0.50$)	103
Figure 4.17 :	Plaque circulaire avec deux trous (1850 éléments quadrilatéraux).....	104
Figure 4.18 :	Les trois premiers modes de l'élément MSBQP pour une plaque avec deux trous	104
Figure 4.19 :	Plaque rectangulaire simplement supporté ou encastree totalement submergée..	107
Figure 4.20 :	Plaque carrée encastree totalement submergée.....	108
Figure 4.21 :	Les quatre premiers modes propres d'une plaque carrée encastree (maillage 10×10).....	109
Figure 4.22 :	Une plaque verticale partiellement immergée.....	109
Figure 4.23 :	Variation des fréquences naturelles d'une plaque verticale progressivement immergée dans un fluide en fonction du rapport (d/A) : (a) premier mode, (b) deuxième mode.....	111

Liste des tableaux

Chapitre 2. Développement d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces.

Tableau 2.1 :	Torsion d'une plaque carrée	28
Tableau 2.2 :	Convergence du déplacement central d'une plaque carrée ($h/L=0.01$).....	29
Tableau 2.3 :	Convergence du moment central d'une plaque carrée soumise à une charge uniforme	29
Tableau 2.4 :	Déplacements d'une plaque console biaise sous charge uniforme.....	31
Tableau 2.5 :	Déplacement transversal normalisé de la plaque console avec maillage régulier	31
Tableau 2.6 :	Déplacement transversal normalisé de la plaque console avec maillage distordu	32
Tableau 2.7 :	Convergence de la flèche normalisée au centre d'une plaque circulaire.....	32
Tableau 2.8 :	Convergence des fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée encastree avec $h/a = 0.01, \nu = 0.3$	35
Tableau 2.9 :	Convergence des fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée simplement appuyée avec $h/a = 0.01, \nu = 0.3$	35
Tableau 2.10 :	Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SSSS avec $h/a=0.01, \nu=0.3$	36
Tableau 2.11 :	Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée CCCC avec $h/a = 0.01, \nu = 0.3$	36
Tableau 2.12 :	Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SCSC avec $h/a = 0.01, \nu = 0.3$	37
Tableau 2.13 :	Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SCSF avec $h/a = 0.01, \nu = 0.3$	37
Tableau 2.14 :	Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SCSS avec $h/a = 0.01, \nu = 0.3$	37

Tableau 2.15 :	Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée CCCF avec $h/a = 0.01, \nu = 0.3$	37
Tableau 2.16 :	Les cinq premières fréquences naturelles pour une plaque rectangulaire mince simplement appuyée.....	39
Tableau 2.17 :	Les trois premières fréquences naturelles de flexion hors du plan d'une poutre rectangulaire.....	42
Tableau 2.18 :	Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque console parallélogramme(CFFF).....	43
Tableau 2.19 :	Les fréquences naturelles de la plaque biaise.....	44
Tableau 2.20 :	Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque console triangulaire ($h/L=0.001, \nu=0.3$).....	45
Tableau 2.21 :	Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque trouée CSCS.....	46
Tableau 2.22 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque elliptique.....	47
Tableau 2.23 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque circulaire encastrée ($h/2R=0.01, \nu=0.3$).....	48

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

Tableau 3.1 :	Résultats du Patch-Test mécanique.....	57
Tableau 3.2 :	Déplacement du point A suivant l'axe "Oz" de la poutre console en flexion simple.....	58
Tableau 3.3 :	Convergence du déplacement transversal $((WD/qL^4)100)$ d'une plaque encastrée sous charge uniforme.....	59
Tableau 3.4 :	Convergence du déplacement transversal $((WD/qL^4)100)$ d'une plaque simplement supportée (SS1) sous charge uniforme.....	59
Tableau 3.5 :	Convergence du déplacement transversal $((WD/qL^4)100)$ d'une plaque simplement supportée (SS2) sous charge uniforme.....	59
Tableau 3.6 :	Effet de l'élanement L/h sur le déplacement central $(W_c / W_{Réf})$ d'une plaque carrée.....	63
Tableau 3.7 :	Convergence du déplacement transversal d'une plaque biaise (Morley).....	64
Tableau 3.8 :	Convergence du déplacement central d'une plaque circulaire.....	67
Tableau 3.9 :	Convergence des fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée encastrée ($k=0.8601, \nu = 0.3$).....	71
Tableau 3.10:	Convergence des fréquences non-dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée simplement appuyée avec ($k=0.8333, \nu = 0.3$).....	71

Tableau 3.11 :	Fréquences non-dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SSSS ($k=0.8333$, $\nu = 0.3$).....	73
Tableau 3.12 :	Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée CCCC ($k=0.8601$, $\nu = 0.3$).....	74
Tableau 3.13 :	Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SCSC ($k = 0.822$, $\nu = 0.3$).....	75
Tableau 3.14 :	Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SCSF ($k=0.822$, $\nu = 0.3$).....	76
Tableau 3.15 :	Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SCSS ($k=0.822$, $\nu = 0.3$).....	77
Tableau 3.16 :	Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée CCCF ($k=0.8601$, $\nu = 0.3$).....	78
Tableau 3.17 :	Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque rectangulaire ($a/b=0.4$).....	79
Tableau 3.18 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque console biaise(CFFF).....	81
Tableau 3.19 :	Les fréquences naturelles de la plaque biaise SCSC.....	83
Tableau 3.20 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque circulaire encastrée ($h/2R=0.01$, $k=\pi^2/12$, $\nu=0.3$).....	84
Tableau 3.21 :	Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque circulaire encastrée ($h/2R=0.1$, $k=\pi^2/12$, $\nu=0.3$).....	85
Tableau 3.22 :	Fréquences propres non dimensionnelles(λ) d'une plaque console triangulaire ($h/L=0.001$, $\nu=0.3$).....	86
Tableau 3.23 :	Fréquences propres non dimensionnelles(λ) d'une plaque console triangulaire ($h/L=0.2$, $\nu=0.3$).....	87
Tableau 3.24 :	Fréquences propres non-dimensionnelles(λ) d'une plaque trouée CSCS.....	88

Chapitre 4. Vibration et flambement des structures minces

Tableau 4.1 :	Convergence de la charge uni-axiale de flambement (K_n) d'une plaque carrée ($h/b= 0.01$, $a/b=1$).....	95
Tableau 4.2 :	Facteur de flambement critique pour une plaque simplement supportée SSSS avec différents rapports a/b et h/b soumise à un effort uni-axial.....	97
Tableau 4.3 :	Facteur de flambement critique (K_n) d'une plaque carrée soumise à une charge bi-axiale de flambement ($h/b= 0.01$, $a/b=1$).....	99
Tableau 4.4 :	Fréquences naturelles λ d'une plaque annulaire.....	101

Tableau 4.5 :	Fréquences naturelles λ d'une plaque circulaire avec trou excentré ($e/a=0.45, b=0.25$).....	102
Tableau 4.6 :	Fréquences naturelles λ^2 d'une plaque circulaire avec trou excentré ($b/a=0.4$).....	103
Tableau 4.7 :	Fréquences naturelles λ d'une plaque annulaire avec deux trous.....	104
Tableau 4.8 :	Fréquences naturelles en (Hz) de la plaque simplement supportée sur deux bords opposés totalement submergée dans l'eau.....	107
Tableau 4.9 :	Fréquences naturelles (Hz) de la plaque encadrée sur deux bords opposés totalement submergée dans l'eau.....	107
Tableau 4.10 :	Fréquences naturelles ω (rad/sec) de la plaque carrée encadrée sur un seul côté totalement submergée dans l'eau ($h_1=5$).....	108
Tableau 4.11 :	Les six premiers modes d'une plaque verticale (dans le vide).....	110
Tableau 4.12 :	Les fréquences naturelles d'une plaque verticale pour différents niveaux d'immersion.....	110

Notations

L, a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
k	Facteur de correction de cisaillement
ρ	Densité de matériau
ν	Coefficient de Poisson
E	Module de Young
h, t	Epaisseur de plaque
β, θ	Angle de la plaque biaise
D	Rigidité de flexion $=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$
G	Module de cisaillement $=E/[2(1+\nu)]$
λ	Fréquence propre non-dimensionnelle
ω	Fréquence angulaire
α_i	Constantes d'interpolation du déplacement
u, v, w	Déplacements dans les directions x, y et z respectivement
β_x, β_y	Rotations autour des axes y et x respectivement
θ_x, θ_y	Rotations autour des axes x et y respectivement
x, y, z	Système des coordonnées cartésiennes
$[K^e]$	Matrice de rigidité élémentaire
$[M^e]$	Matrice de masse élémentaire
$[K_g^e]$	Matrice géométrique élémentaire
$[M_f^e]$	Matrice de masse ajoutée du fluide élémentaire
$[K_g]$	Matrice géométrique de la structure
$[K]$	Matrice de rigidité de la structure
$[M]$	Matrice de masse de la structure
$[M_f]$	Matrice de masse du fluide de la structure
$[C]$	Matrice de transformation
$[P]$	Matrice d'interpolation des déplacements
$[Q]$	Matrice d'interpolation des déformations
$[G]$	Matrice géométrique des déformations
$\{F\}$	Vecteur des forces nodales global
$\{q\}$	Déplacements nodaux de la structure
$\{q_e\}$	Déplacements nodaux élémentaire
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	Déformations directes suivant x et y respectivement
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Déformation de cisaillement
CT	Cisaillement transversale
k	Coefficient de cisaillement

Introduction générale

1. Introduction

L'analyse dynamique des structures est un domaine extrêmement important en raison de sa grande variété d'applications d'ingénierie telles que dans le génie aéronautique, civil et mécanique. Étant donné que les éléments, c'est-à-dire les plaques, font partie intégrante des structures, il est essentiel pour un ingénieur de conception d'avoir une connaissance préalable des premiers modes de vibration avant de finaliser la conception d'une structure donnée. En effet, dans de nombreux secteurs industriels, il est primordial de déterminer, pour le dimensionnement et la conception, les niveaux d'efforts que les structures peuvent soutenir, mais également les propriétés amortissantes qu'elles peuvent développer.

La vibration des plaques est un sujet classique sur lequel beaucoup de travail a déjà été fait. Dans les périodes antérieures, les résultats n'étaient calculés que pour des cas simples où la solution analytique pouvait être trouvée. Différentes théories ont été introduites pour gérer la vibration des problèmes de plaques. En conséquence, de nombreuses nouvelles méthodes puissantes ont également été développées pour analyser ses problèmes. Parmi d'autres, la méthode des éléments finis est l'une des méthodes populaires pour évaluer les caractéristiques vibratoires des plaques dans l'industrie.

Il existe différents types de plaques. Dans la littérature, les plaques sont très souvent classées selon leur géométrie (plaque plane, circulaire), la sollicitation subie (charges ponctuelles, réparties), mais également selon leur comportement type (membrane, flexion) et la prise en compte ou non du cisaillement transverse. Pour ce dernier aspect, on distingue les plaques sans cisaillement transversal, dites plaques de Kirchhoff, et les plaques prenant en compte le cisaillement transversal, dit plaques de Reissner-Mindlin.

La formulation des éléments de plaque suivant la théorie des plaques minces de Kirchhoff nécessitent une continuité C^1 du champ du déplacement en raison de la présence de secondes dérivées du déplacement dans l'expression du travail virtuel. Cependant, les éléments en plaque de Kirchhoff présentent de sérieuses difficultés pour satisfaire les exigences de continuité entre éléments. Cela conduit à des éléments « non conformes ».

Ces dernières années, les recherches ont été orientées vers le développement des éléments de plaque épaisse. Il est bien connu que les éléments finis basés sur la théorie des plaques de

Reissner-Mindlin ne nécessitent que la continuité C^0 du déplacement latéral et des rotations indépendantes. Plusieurs difficultés peuvent être rencontrées lorsque des éléments de plaque Mindlin sont utilisés dans des situations de plaque mince. L'intégration complète des matrices de rigidité conduit à un comportement de verrouillage pour les plaques minces et bien qu'une intégration réduite et sélective puisse souvent surmonter ces difficultés.

La littérature a clarifié dans une certaine mesure les critères qui assurent la convergence de l'approximation des éléments finis vers la solution analytique lorsque le maillage est raffiné. Une condition suffisante est que l'élément soit capable de représenter une condition de déformation constante ; dans le cas de la flexion de la plaque, cela doit être une condition de courbure constante, une flexion pure ou une torsion pure. Cela inclut une condition de déformation nulle qui correspond aux déplacements de corps rigides. Une autre condition est que l'élément soit conforme. Cette condition assure une convergence monotone de l'énergie potentielle totale.

Pour traiter un problème par éléments finis, il existe différentes approches telles que l'approche en déplacement où on propose une approximation du champ de déplacements en supposant qu'il satisfait la compatibilité des déplacements à l'intérieur de l'élément, pour ce faire on choisit une fonction de déplacement permettant de définir l'état de déplacement d'une façon unique. L'approche en contraintes dans laquelle l'approximation se fait sur le champ des contraintes de façon que les équations d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de chaque élément. Le modèle hybride qui est un mélange des deux approches précédentes ce qui a donné naissance au concept d'élément fini hybride. Ce modèle combine un champ interne auto équilibré de contrainte avec un champ de déplacement à la frontière.

Enfin l'approche en déformation qui consiste à supposer les déformations de telle sorte que les équations de compatibilité soient satisfaites. Pour les éléments basés sur cette approche, le champ des déplacements est composé de deux parties; la première est reliée aux conditions du mouvement de corps rigide, la deuxième est basée sur des fonctions de déformations supposées qui vérifient les équations de compatibilité. Cette approche est appliquée dans le présent travail pour dériver de nouveaux champs de déplacement d'éléments quadrilatères avec trois degrés de liberté pour l'analyse des plaques en flexion. Le code MATLAB est utilisé pour programmer ces éléments afin de tester leurs performances par rapport à d'autres éléments publiés précédemment. Le programme est développé selon un organigramme présenté dans l'annexe.

2. Objectifs de la thèse

La présente étude a donc pour but de développer et de valider deux éléments finis de plaques en flexion basés sur le modèle en déformation procédant par tests appliqués sur ces deux éléments. Le premier élément **KSBQP** est un élément quadrilatère de plaque non conforme basé sur l'approche en déformation et la théorie de Kirchhoff. Le deuxième élément **MSBQP** est un élément quadrilatère de plaque basé sur l'approche en déformation et la théorie de Reissner-Mindlin qui prend en considération l'effet du cisaillement transverse.

Les éléments développés sont destinés à l'analyse des différents types de comportements (statique, vibration libre et flambage) des plaques isotropes. Les résultats obtenus permettront de vérifier la performance numérique de ces deux éléments surtout lorsqu'il s'agira de les comparer avec les résultats des éléments basés sur le modèle en déplacement et les solutions analytiques citées dans la littérature.

Autrement dit, quel serait le niveau de performance de ces deux éléments développés ? C'est-à-dire l'exactitude des résultats (déplacements, contraintes et fréquences) qui nous mènera à choisir, parmi plusieurs modèles, celui qui satisfera le plus de nombres d'exigence (convergence rapide, bonne précision avec maillage grossier, programmation efficace, dérivation théorique simple et claire et liberté de tout blocage en cisaillement transversal (CT). Une autre question qui se pose : Laquelle des théories des plaques est la plus appropriée pour l'analyse des plaques en flexion.

3. Plan de la thèse

Cette étude est organisée en quatre chapitres, précédés par une introduction générale et clôturés par une conclusion générale.

Le premier chapitre concerne les théories des plaques, on essaiera d'éclaircir les différentes théories appliquées au développement des éléments de plaques sans pour autant entrer dans les détails, tout en fournissant des références bibliographiques pour un éventuel approfondissement. Ensuite, on propose dans un premier temps une synthèse bibliographique et historique à propos de l'analyse des vibrations libres des plaques en flexion, complétées par des généralités sur les vibrations des plaques où on exposera la procédure de formulation de la matrice de masse élémentaire pour la théorie de Kirchhoff et la théorie de Reissner-Mindlin. Enfin, on exposera le modèle en déformation qui fera l'objet d'une étude, en exposant ces avantages par rapport aux autres modèles, compléter par une synthèse des éléments finis existants basés sur cette approche.

Dans **le deuxième chapitre**, on donnera la formulation théorique d'un élément quadrilatère KSBQP de plaques minces basée sur l'approche en déformation et la théorie de Kirchhoff, il a

trois degrés de liberté par nœud (une translation W et deux rotations β_x et β_y), suivi par la validation numérique de cet élément. Une série de cas-tests standards, considérés par les chercheurs comme outils importants de validation des éléments de plaques minces est utilisés ainsi on donnera des commentaires sur les résultats obtenus.

Dans **le troisième chapitre**, on aborde cette fois le cas des plaques épaisses. On propose un élément MSBQP quadrilatère de plaque basé sur la l'approche en déformation et la théorie de Reissner-Mindlin. Cet élément a trois degrés de liberté par nœud (une translation W et deux rotations β_x et β_y). Dans un premier temps, l'élément développé est validé sur Patch-test des plaques. Ensuite, un certain nombre de cas-tests numériques linéaires ont été analysés pour des cas de comportements statiques et dynamiques (vibrations libres). Les résultats obtenus par l'élément MSBQP sont comparés à des solutions de référence d'origine numérique, théorique ou expérimentale.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du flambement élastique et de la vibration des plaques soumises à une compression dans le plan aux extrémités. En premier lieu, la variation des fréquences naturelles en fonction de la dimension et de l'emplacement du trou des plaques est d'abord étudiée en l'absence de toute charge dans le plan. Ensuite, une étude paramétrique est réalisée pour analyser les effets des charges appliquées dans le plan sur les fréquences naturelles des plaques carrées avec différentes conditions aux limites. Enfin l'élément KSBQP développé dans cette thèse est appliqué à l'analyse des vibrations de plaques rectangulaires en interaction avec un fluide. Les deux éléments KSBQP de plaques minces et l'élément MSBQP de plaques épaisses développés dans les deux chapitres précédents sont évalués à travers une série de tests standards. Des discussions détaillées sont proposées après chaque problème de référence.

Chapitre 1. Étude bibliographique

Sommaire

1.1	Introduction	5
1.2	Théorie des plaques en flexion	5
1.2.1	Convention de signe pour déplacements et rotations	5
1.2.2	Hypothèses fondamentales	6
1.2.3	Théorie des plaques minces en flexion.....	6
1.2.4	Théorie des plaques épaisse en flexion.....	10
1.3	Coefficient de correction en cisaillement k	13
1.4	Formulation variationnelle faible	13
1.5	Historique sur l’analyse des vibrations libres des plaques en flexion	14
1.6	Notions sur les Vibrations	15
1.6.1	Une vibration libre.....	15
1.6.2	Une vibration forcée	15
1.7	Matrice masse pour les plaques en vibration libre	16
1.7.1	Matrice masse pour une plaque de Reissner –Mindlin.....	16
1.7.2	Matrice masse pour une plaque de Kirchhoff.....	17
1.8	Modèle en déformation	17
1.8.1	Avantage du modèle en déformation.....	18
1.8.2	Historique des éléments finis existants basés sur le modèle en déformation.	18

1.1 Introduction

Les plaques sont définies comme des structures planes dont l'épaisseur est très faible par rapport aux autres dimensions [1]. Les éléments finis de plaque peuvent se classer en deux types : éléments de type Kirchhoff [2] destinés pour l'analyse des plaques minces et les éléments de type Reissner-Mindlin [3] sont applicables aux plaques minces et moyennement épaisses.

Dans ce chapitre, un rappel sur les théories des plaques en flexion est abordé en définissons les deux principales théories celle des plaques minces (Kirchhoff) et celles de plaques épaisses (Reissner-Mindlin) et leur domaine de validité, puis, on présentera les différentes équations de la dynamique des plaques en flexion en particulier vibration libre et flambement. Enfin, on exposera le modèle en déformation qui fera l'objet d'une étude critique en donnant un bref historique sur les différents éléments basés sur ce modèle.

1.2 Théorie des plaques en flexion[4–7]

1.2.1 Convention de signe pour déplacements et rotations

Les notations adoptées ci-après pour les déplacements sont définis à la figure 1.1. Soient les déplacements dans le plan u et v , le déplacement transverse w et les rotations β_x et β_y , ou θ_x et θ_y . On a $\beta_x = \theta_y$ et $\beta_y = -\theta_x$.

On dit qu'une plaque travaille à la flexion quand les charges auxquelles elle est soumise sont parallèles à l'axe z (perpendiculaire au plan moyen) et que les déplacements sont dans le plan transversal, appelée flèche « w » fonction des coordonnées x et y (figure 1.1).

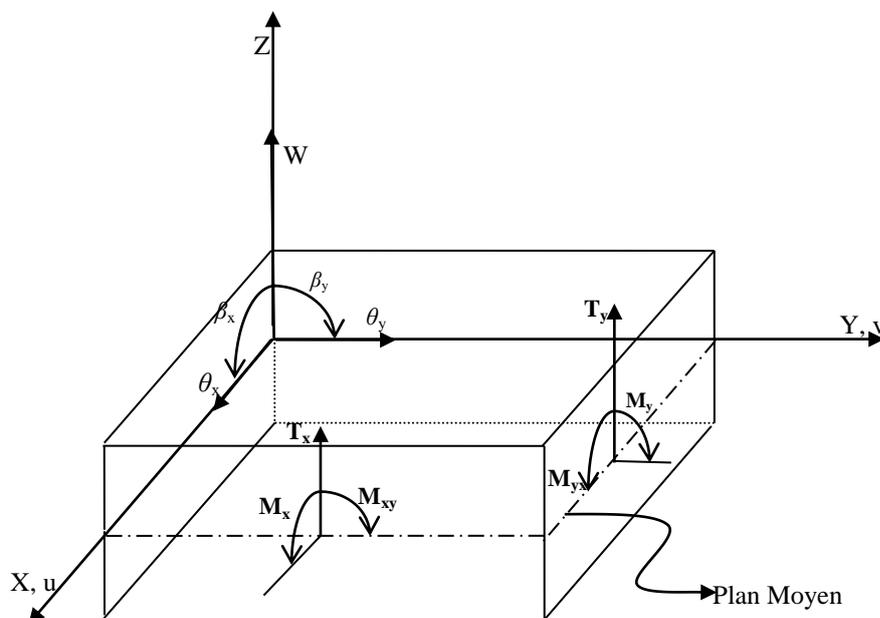


Figure 1.1. Géométrie d'une plaque.

1.2.2 Hypothèses fondamentales

La théorie des plaques repose sur les hypothèses suivantes :

- 1- Les contraintes σ_z normales au plan de la plaque sont négligeables par rapport aux contraintes existant dans le plan de la plaque ($\sigma_z = 0$)
 - 2- Les pentes de la surface moyenne après déformation sont supposées petites par rapport à l'unité (petite déflexion du plan moyen). De plus, le plan moyen ne subit aucune déformation du fait de la flexion.
 - 3- Les déformations transverses $\varepsilon_z = 0$ sont petites: les déplacements sont inférieurs à l'ordre de (1/100) de la longueur de la plaque.
 - 4- Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation ; ceci permet de négliger l'effet de cisaillement transversal. Dans ce cas, on a : $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$
- ✓ La théorie de Kirchhoff ou théorie linéaire des plaques sans cisaillement transverse repose sur les hypothèses 1, 2, 3 et 4.
 - ✓ La théorie de Reissner-Mindlin ou théorie linéaire des plaques avec cisaillement transverse repose sur les hypothèses 1, 2 et 3.
 - ✓ Pour les plaques homogènes isotropes, la validité de la théorie de plaque dépend des caractéristiques géométriques. Pour les plaques de Kirchhoff, le rapport $L/h > 20$ et pour les plaques de Reissner-Mindlin, le rapport est $4 \leq L/h \leq 20$ où L est une dimension caractéristique dans le plan (xy) et h l'épaisseur de la plaque.
 - ✓ La plaque est dite isotrope, si son matériau ayant les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions.

1.2.3 Théorie des plaques minces en flexion

1.2.3.1 Champ de déplacements et déformations

Considérant l'élément de plaque représenté sur la figure 1.2, les déplacements dans le plan u et v , respectivement dans les directions x et y , peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Où w représente le déplacement vertical du plan moyen de la plaque.

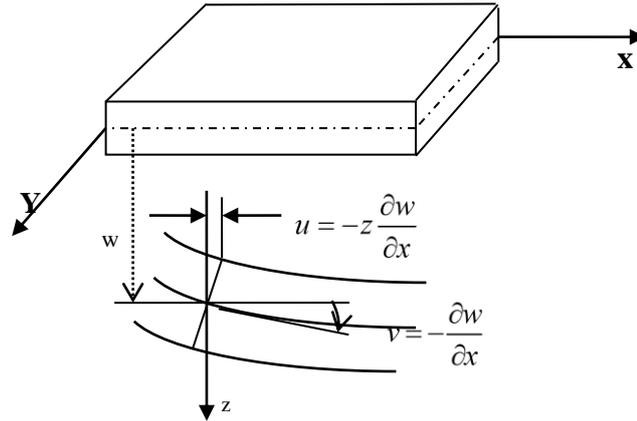


Figure 1.2. Configuration déformée d'une plaque mince en flexion.

Les composantes des déformations sont données comme suit:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0\end{aligned}\tag{1.2}$$

Le vecteur des déformations peut être écrit sous la forme :

$$\{\varepsilon\} = -z \{\chi\} = -z \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}\}^T\tag{1.3}$$

Où le vecteur des courbures $\{\chi\}$ est donné comme suit :

$$\begin{aligned}\kappa_x &= \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \kappa_y &= \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \kappa_{xy} &= \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{1.4}$$

1.2.3.2 Forces et moments agissant sur la plaque

Les contraintes internes dans les plaques produisent des moments de flexion et des forces de cisaillement. Les moments et les forces de cisaillement sont les résultantes des contraintes et sont définis comme agissant par unité de longueur de la plaque. Ces actions internes sont définies comme suit:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (1.5)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (1.6)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (1.7)$$

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad (1.8)$$

$$T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (1.9)$$

1.2.3.3 Loi de comportement

En supposant un état de contrainte plane pour la plaque en flexion,

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (1.10)$$

Et la substitution de $\{\varepsilon\}$ en utilisant l'équation (1.3) donne l'équation :

$$\{\sigma\} = -z[D]\{\chi\} \quad (1.11)$$

Où:

$$\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T \quad (1.12)$$

L'énergie de déformation dans une plaque est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} \{\chi\}^T [\bar{D}] \{\chi\} dA \quad (1.13)$$

En substituant σ_x , σ_y et τ_{xy} dans les équations (1.5)-(1.7) et en réorganisant les résultats sous une forme matricielle, on obtient :

$$\{M\} = \frac{h^3}{12} [\bar{D}] \{\chi\} \quad (1.14)$$

Avec $[\bar{D}]$ est donnée par :

$$[\bar{D}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

$$\{M\} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T = [D]\{\chi\} = [D] \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (1.16)$$

Avec [D] la matrice d'élasticité est :

$$[D] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Avec : $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, E module de Young et ν coefficient de Poisson.

1.2.3.4 Equations d'équilibres

Les équations d'équilibres sont données par :

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x = 0 \quad (1.18a)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - T_y = 0 \quad (1.18b)$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} - q(x, y) = 0 \quad (1.18c)$$

Avec $q(x,y)$ est la force latérale distribuée (par unité de surface) et, T_x, T_y sont les forces de cisaillement (par unité de longueur).

A partir de l'équation (1.18a) et l'équation (1.18b), on peut trouver :

$$T_x = \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \quad (1.19)$$

$$T_y = \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) \quad (1.20)$$

En substituant les équations (1.19) et (1.20) dans l'équation (1.18c), on trouve :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - q(x, y) = 0 \quad (1.21)$$

En substituant l'équation (1.16) dans l'équation (1.21) conduit à l'équation différentielle générale des plaques rectangulaires simples :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (1.22)$$

Qui s'écrit souvent :

$$\nabla^4 w = \frac{q(x, y)}{D} \quad (1.23)$$

La solution d'une plaque rectangulaire simple en flexion nécessite de trouver une fonction $w(x, y)$ qui satisfait l'équation (1.22) ainsi que les conditions aux limites du problème spécifique.

1.2.4 Théorie des plaques épaisses en flexion

Pour les plaques épaisses, le rapport épaisseur sur longueur n'est pas assez petit pour négliger les déformations de cisaillement transversales. C'est une hypothèse acceptable pour les plaques très minces, mais elle peut entraîner des erreurs, qui ne sont pas négligeables dans les plaques épaisses.

Pour surmonter ce problème, l'hypothèse classique de déformation transversale nulle est relâchée. Tout d'abord, Reissner a proposé d'introduire les rotations de la normale à la surface médiane de la plaque dans le plan xOz et yOz en tant que variables indépendantes. Ensuite, Mindlin a simplifié l'hypothèse de Reissner en considérant que les normales à la surface médiane de la plaque avant déformation restent droites, mais pas nécessairement normales à la plaque après déformation.

1.2.4.1 Champ de déplacements et déformations

Selon les hypothèses de Reissner-Mindlin, les déplacements parallèles à la surface médiane peuvent être exprimés comme :

$$\begin{aligned} u &= z\beta_x(x, y) \\ v &= z\beta_y(x, y) \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1.24)$$

Le champ de déformations est donné par:

$$\{\varepsilon\} = z\{\chi\} = z\{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T \quad (1.25)$$

$$\{\varepsilon\} = z\{\chi\} = z \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial\beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial\beta_y}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial\beta_x}{\partial y} + \frac{\partial\beta_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{array} \right\} \quad (1.26)$$

Où:

Le vecteur des courbures est :

$$\{\kappa\} = \{\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}\}^T = \left\{ \frac{\partial\beta_x}{\partial x}, \frac{\partial\beta_y}{\partial y}, \left(\frac{\partial\beta_x}{\partial y} + \frac{\partial\beta_y}{\partial x} \right) \right\}^T \quad (1.27)$$

Les déformations transversales sont :

$$\{\gamma\} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{array} \right\} \quad (1.28)$$

1.2.4.2 Loi de comportement

Les relations contraintes - déformations sont données par :

$$\{\sigma\} = z[H]\{\kappa\} \quad (1.29)$$

$$\{\tau\} = [G]\{\gamma\} \quad (1.30)$$

Avec :

$$[H] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; [G] = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T; \{\tau\} = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}\}^T \quad (1.32)$$

En utilisant les équations (1.5)-(1.9), les relations efforts résultants – déformations peuvent être exprimées comme suit :

$$\{M\} = [H_f]\{\kappa\} \quad (1.33)$$

$$\{T\} = [H_c]\{\gamma\} \quad (1.34)$$

Avec

$$[H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; [H_c] = \frac{kE}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.35)$$

Avec k coefficient de correction pris généralement égale $k=5/6$.

Les relations des moments pour la théorie des plaques de Reissner-Mindlin sont obtenues en combinant les équations (1.33) et (1.34) pour avoir :

$$\begin{Bmatrix} M \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_f] & 0 \\ 0 & [H_c] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (1.36)$$

Avec la matrice d'élasticité $[D]$ est :

$$[D] = \begin{bmatrix} [H_f] & 0 \\ 0 & [H_c] \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

L'énergie de déformation dans la plaque peut être écrite comme la somme des énergies dues à la flexion et à la déformation par cisaillement.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV + \frac{1}{2} \int_V \{\tau\}^T \{\gamma\} dV \quad (1.38)$$

Où, intégrant à travers l'épaisseur

$$U = \frac{1}{2} \int_A \frac{h^3}{12} \{\chi\}^T [H_f] \{\chi\} dA + \frac{1}{2} \int_A kh \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\} dA \quad (1.39)$$

1.3 Coefficient de correction en cisaillement k

Le coefficient k^2 est un facteur corrigeant l'hypothèse de contraintes de cisaillement σ_{xz} et σ_{yz} constantes sur l'épaisseur de la plaque dans la théorie de Mindlin, en contradiction avec la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les surfaces libres. Mindlin [6] trouve ce coefficient k^2 variait linéairement en fonction du coefficient de Poisson et variant de 0.76 pour $\nu = 0$ à 0.91 pour $\nu = 0.5$ dans le cas d'un matériau isotrope.

1.4 Formulation variationnelle faible

La forme intégrale faible pour les cas statique et en vibration libre peuvent être exprimée respectivement :

$$\int_{S_e} \delta \{\kappa\}^T [M] dS + \int_{S_e} \delta \{\gamma\}^T [T] dS = \int_{S_e} \delta \{U_e\}^T \{f_v\} dS \quad (1.40)$$

$$\int_{S_e} \delta \{\kappa\}^T [M] dS + \int_{S_e} \delta \{\gamma\}^T [T] dS + \int_{S_e} \delta \{U_e\}^T \left\{ \ddot{U} \right\} dS = 0 \quad (1.41)$$

Pour le flambement, la forme intégrale faible est donnée par :

$$\int_{S_e} \delta \{\kappa\}^T [H_f] \{\kappa\} dS + \int_{S_e} \delta \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\} dS + h \int_{S_e} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] [\sigma_0] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} dS \\ + \frac{h^3}{12} \int_{S_e} \left[\frac{\partial \beta_x}{\partial x} \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \right] [\sigma_0] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \end{array} \right\} dS + \frac{h^3}{12} \int_{S_e} \left[\frac{\partial \beta_y}{\partial x} \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \right] [\sigma_0] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \end{array} \right\} dS = 0 \quad (1.42)$$

L'équation (1.42) peut être réécrite sous forme suivante :

$$\int_{S_e} \delta \{\kappa\}^T [H_f] \{\kappa\} dS + \int_{S_e} \delta \{\gamma\}^T [H_c] \{\gamma\} dS + \int_{S_e} \delta \{\varepsilon^g\}^T [\tau] \{\varepsilon^g\} dS = 0 \quad (1.43)$$

Les matrices $[\sigma_0]$, $[\tau]$ et $\{\varepsilon^g\}$ sont détaillées dans le chapitre 4.

1.5 Historique sur l'analyse des vibrations libres des plaques en flexion

L'analyse des vibrations libres des structures en plaques a été parmi les principaux travaux de recherche qui ont été menés par plusieurs chercheurs. Au début, les méthodes analytiques étaient largement adoptées, mais il est largement reconnu que des solutions exactes pour les fréquences propres ne sont possibles que pour un ensemble limité de géométries simples et de conditions aux limites. Par conséquent, la méthode des éléments finis (FE) est rapidement devenue l'approche la plus populaire pour évaluer les caractéristiques vibratoires des plaques.

L'étude de la vibration libre des plaques remonte aux années 1800. Chladni[8] a étudié la vibration libre d'une plaque carrée complètement libre et a observé les motifs nodaux de cette plaque en 1802. Rayleigh [9] a présenté sa méthode générale de résolution des fréquences propres de la vibration de toute structure en 1877. Ritz a amélioré la procédure de Rayleigh en 1902 en supposant un ensemble de fonctions d'essai admissibles, chacune ayant des coefficients d'amplitude indépendants. Cette approche est connue sous le nom de Rayleigh-Ritz ou Ritz méthode qui est l'une des méthodes approximatives les plus populaires pour l'analyse des vibrations des structures.

Des résultats analytiques précis pour les vibrations libres de plaques rectangulaires minces peuvent être facilement obtenus[10–13], mais il est plus difficile d'obtenir les solutions analytiques pour les vibrations libres des plaques Mindlin rectangulaires en raison des équations plus gouvernantes et des paramètres cinétiques impliqués. Pour tenir compte de cet effet de cisaillement, Mindlin[3] a proposé la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre pour le mouvement de plaques moyennement épaisses et il a incorporé l'effet de l'inertie de rotation. Un facteur de correction de cisaillement, κ , a été introduit dans cette théorie pour compenser les erreurs résultant de l'hypothèse d'une distribution uniforme des déformations de cisaillement dans le sens de l'épaisseur.

Mindlin et al [14] ont étudié la vibration libre de plaques Mindlin rectangulaires en flexion avec des conditions aux limites simplement supportées et avec une paire de bords parallèles libres et l'autre paire simplement supportée. Des solutions analytiques pour ces plaques ont été obtenues. Une étude de Mc Gee et Leissa[15] s'est concentrée sur la vibration des plaques consoles biaisées épaisses. Une analyse tridimensionnelle basée sur la formulation de Rayleigh-Ritz a été réalisée, les résultats ont été vérifiés avec des solutions d'éléments finis tridimensionnels calculés à l'aide du logiciel MSC: NASTRAN.

Plus récemment, Liew et al [16] ont utilisé la méthode pb-2 Rayleigh-Ritz pour analyser la vibration des plaques biaisées de Mindlin avec différentes combinaisons de conditions aux limites libres, simplement supportées et encastées. De nombreuses fréquences de vibration

ont été présentées et l'effet du coefficient de Poisson variable sur la vibration des plaques biaises à bords libres a également été étudié.

De nombreux chercheurs ont développé des éléments finis pour la vibration des plaques. Un élément [17] quadrilatère isoparamétrique de plaque en flexion est introduit et son utilisation pour l'analyse des vibrations libres des plaques épaisses et minces est testée. L'élément de plaque proposé est très polyvalent, très précis et peut être facilement mis en œuvre.

Afin de déterminer les fréquences naturelles des plaques et des coques, un élément ANSP9 [18] de coque dégénérée à neuf nœuds est développé en utilisant le concept du solide dégénéré basé sur les hypothèses de Reissner- Mindlin. L'élément proposé se comporte bien dans la plupart des situations et les résultats sont très proches des solutions théoriques et présentent un bon accord avec les autres solutions de référence.

Un élément ANSP4 [19] de plaque à quatre nœuds est développé en utilisant les déformations naturelles supposées sur la base des hypothèses de Reissner – Mindlin (RM). Le présent élément basé sur la formulation proposée a donné de bons résultats dans la plupart des situations. Il est applicable aux plaques minces ou épaisses dans des conditions de vibrations libres avec une précision suffisante.

1.6 Notions sur les Vibrations

Tout mouvement qui se répète après un intervalle de temps est appelé vibration ou oscillation. D'un point de vue historique, Rayleigh fut l'un des premiers, en 1877, à formuler la théorie des vibrations telle l'on la connaît aujourd'hui. Il a introduit le concept fondamental d'oscillation d'un système linéaire autour d'une position d'équilibre, et la notion de fréquences et des modes propres, montrant leur existence pour les systèmes.

1.6.1 Vibration libre

Une vibration qui affecte naturellement la plaque lorsque, après avoir été écartée de sa position d'équilibre, elle est abandonnée à elle-même. En d'autres termes, une vibration est un mouvement rapide de va-et-vient autour d'une position d'équilibre, caractérisée par sa durée, ses fréquences ou sa période, et son amplitude.

1.6.2 Vibration forcée

Une vibration imposée à la plaque, soit par son fonctionnement propre, soit par des sollicitations de son entourage : $M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = F(t)$ dans laquelle M , C et K sont respectivement la matrice masse, la matrice d'amortissement et la matrice de rigidité et $u(t)$ est le vecteur de déplacement généralisé et $F(t)$ est la force généralisée de la structure. La

réponse du système est la somme d'une réponse transitoire, fonction des conditions initiales et qui est la solution en régime libre obtenue pour $F(t)=0$, et d'une solution particulière qui correspond au régime établi, indépendante des conditions initiales.

1.7 Matrice masse pour les plaques en vibration libre

En utilisant le principe de Hamilton [20], nous pouvons exprimer les équations de mouvement des plaques comme :

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \quad (1.44)$$

Où M , K sont les matrices de masse et de rigidité du système, respectivement, et \ddot{u} , u sont les accélérations et les déplacements. En supposant un mouvement harmonique, nous obtenons les fréquences naturelles et les modes de vibration en résolvant le problème propre généralisé [21]:

$$(K - \omega^2 M)X = 0 \quad (1.45)$$

Où ω est la fréquence naturelle et X le mode de vibration.

1.7.1 Matrice masse pour une plaque de Reissner –Mindlin[20]

L'énergie cinétique pour une plaque de Reissner –Mindlin est :

$$T_e = \frac{1}{2} \int \rho \left[h\dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\beta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\beta}_y^2 \right] dA \quad (1.46)$$

Le vecteur des déplacements $\{U\}$ est donné par :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = [N] \{q_e\} \quad (1.47)$$

Avec $\{q_e\}^T = \{W_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, W_2, \beta_{x2}, \beta_{y2}, W_3, \beta_{x3}, \beta_{y3}, W_4, \beta_{x4}, \beta_{y4}\}$

En remplaçant l'équation (1.47) dans l'équation (1.46) on trouve :

$$T_e = \frac{1}{2} \left\{ \dot{q}_e \right\} [M^e] \left\{ \dot{q}_e \right\}^T \quad (1.48)$$

Avec

$$M^e = \int \rho [N]^T \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} [N] dA \quad (1.49)$$

1.7.2 Matrice masse pour une plaque de Kirchhoff [20]

L'énergie cinétique pour une plaque de Kirchhoff est :

$$T_e = \frac{1}{2} \int \rho h \dot{w}^2 dA \quad (1.50)$$

Avec

$$w = [N] \{q_e\} \quad (1.51)$$

En remplaçant l'équation (1.51) dans l'équation (1.50) on trouve :

$$T_e = \frac{1}{2} \left\{ \dot{q}_e \right\} [M^e] \left\{ \dot{q}_e \right\}^T \quad (1.52)$$

Avec

$$M^e = \int \rho h [N]^T [N] dA \quad (1.53)$$

1.8 Modèle en déformation

C'est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ des déformations de telle façon que les équations de compatibilité soient satisfaites à l'intérieur de l'élément. Ensuite, le champ de déplacements est obtenu par intégration des composantes de déformation en fonction des relations déformation - déplacement. L'approche en déformation permet le développement des éléments d'ordre supérieur avec des degrés de liberté minimums exigés qui sont simples pour mettre en application et efficaces à employer.

Contrairement aux éléments conventionnels ordinaires et les éléments d'ordre supérieur, les composantes du champ des déplacements pour les éléments basés sur le modèle en déformation ne sont pas indépendantes, mais liées en conformité avec les exigences de la

relation constitutive du déplacement-déformation [22]. Le lien entre ces différents déplacements n'est pas limité aux termes qui correspondent aux modes de déformation libre du corps rigide, mais se produit également dans les termes correspondant à la déformation de l'élément.

1.8.1 Avantage du modèle en déformation

La méthode est attachée avec l'invention de l'approche de contrainte. Cette approche est combinée avec le modèle en déplacement pour produire des éléments mixtes et hybrides. L'avantage du modèle en déformation par rapport au modèle en contrainte c'est que les fonctions de déplacements correspondantes sont obtenues par intégration simple des relations déformation-déplacement (possibilité d'enrichir le champ de déplacements par des termes d'ordre élevé sans l'introduction de nœuds intermédiaires ni de degrés de liberté supplémentaires). La procédure habituelle d'élément fini s'impose comme méthode appliquée pour calculer la matrice de rigidité de l'élément à partir des fonctions de déplacements.

Les raisons de développer un élément basé sur des fonctions généralisées de déformations s'expliquent comme suit :

Les équations reliant les déplacements et les déformations sont, pour les éléments courbés, couplées de telle manière que quelques déformations sont des fonctions de plus d'un déplacement, par conséquent, si nous proposons les déplacements (u , v , w) indépendants l'un de l'autre, les déformations ne seront pas ainsi [23].

L'approche en déformation présente certaine facilitée par rapport aux autres formulations. On cite parmi d'autres la relation directe des deux critères de convergence principaux (mode de déformation constante et mode du corps rigide) aux déformations donc il sera plus facile de les satisfaire en faisant appel à des fonctions de déformation qu'à des fonctions de déplacements.

1.8.2 Historique des éléments finis existants basés sur le modèle en déformation

Pour analyser différents types de problèmes de structures par la méthode des éléments finis, il existe plusieurs approches peuvent être générées; la plus connue et largement applicable est l'approche en déplacement. Cette approche est la première méthode utilisée pour le développement d'éléments finis [24]. Il existe d'autres formulations parmi d'autres, l'approche en déformation. Les performances des éléments finis basés sur le modèle en déformation par rapport aux éléments classiques basés sur le modèle en déplacement ont été illustrées par plusieurs types d'éléments finis existant dans la littérature.

1.8.2.1 Éléments courbés

L'approche en déformation a été appliquée pour la première fois sur des éléments courbés. Ashwell et Sabir [25] ont montré que pour avoir des résultats satisfaisants et qui convergent rapidement, les éléments basés sur le modèle en déplacements exigent la division des structures courbées en grand nombre d'éléments. Pour surmonter ces imperfections, les éléments finis basés sur le modèle en déformation plutôt que des éléments basés sur le modèle en déplacement a été une meilleure solution. Cette formulation a été utilisée pour l'analyse des arcs par Ashwell, Sabir et Roberts [26] et pour l'analyse des coques cylindriques par Ashwell et Sabir [23].

Le succès de l'application de l'approche en déformation a conduit à l'extension des travaux au développement d'éléments finis pour l'analyse des problèmes d'oscillations libre dans le plan des anneaux circulaires. Ashwell et Sabir [27] ont comparé les fonctions de forme des différents éléments finis pour obtenir des fréquences naturelles d'un anneau vibrant dans son plan, les résultats obtenus montrent une grande efficacité de l'élément basé sur le modèle en déformation.

Sabir et Ashwell [23] ont développé un élément rectangulaire de coque cylindrique qui a vingt degrés de liberté. Pour cet élément, on utilise seulement des degrés de liberté externes, trois déplacements linéaires et deux rotations afin d'éviter les difficultés associées aux degrés de liberté interne et les nœuds internes. L'efficacité de cet élément a été testée en l'appliquant à l'analyse des problèmes de cylindres pincés et sur le panneau soumis à son poids propre, et il a été démontré que les résultats obtenus convergent rapidement, soit pour les déplacements ou pour les contraintes.

Pour l'analyse de la non-linéarité géométrique des arcs circulaires, un élément courbé a été également développé par Sabir et Lock [28]. La supériorité de cet élément a été démontrée par rapport aux éléments à fonction de forme polynomiale. Sabir et Ashwell [29] ont entrepris des essais sur des coques minces en appliquant des chargements, soit des forces radiales ou des moments concentrés. Les résultats obtenus étaient similaires aux solutions théoriques.

Plusieurs éléments finis ont été formulés sur la base de l'élément Sabir et Ashwell [23] dans le but d'améliorer ses performances. Sabir et Charchafchi [30] ont développé un élément basé sur les hypothèses de Koiter- Sander au lieu des hypothèses de Love-Kirchhoff utilisé dans l'élément Sabir et Ashwell [23], en gardant les mêmes représentations géométriques. Une autre version de cet élément où on inclut le coefficient de Poisson dans les expressions des déformations afin de satisfaire les équations d'équilibre. Ces deux éléments sont utilisés pour modéliser des coques cylindriques avec des trous circulaires ou elliptiques. Des variantes de

Bull [31] qui introduit des modifications sur le champ de déformation de l'élément de Sabir et Ashwell[23] ont été développées pour produire des éléments de flexion.

Dans le cas des éléments basés sur les hypothèses des coques surbaissées, un élément récent est développé par Djoudi et Bahai[32], c'est un élément rectangulaire à quatre nœuds, ayant cinq degrés de liberté dans chaque nœud. L'efficacité de l'élément est testée dans l'analyse linéaire et non linéaire géométrique des structures coques. Plus tard, cet élément [22]a était évalué dans l'analyse en vibration libre des coques cylindriques. Djoudi et Bahai[33] ont proposé ensuite un élément pour étudier l'influence des ouvertures dans les panneaux cylindriques sur le comportement dynamique des structures citées.

Mousa et Djoudi [34] ont proposé un élément pour les problèmes de la vibration libre des coques cylindriques circulaires à extrémité oblique, cet élément fini est triangulaire et n'a que cinq degrés de liberté nécessaires à chaque nœud de coin. L'efficacité de l'élément développé est testée en l'appliquant au calcul des fréquences propres du problème de coques simples et aux coques à extrémité oblique.

Pour la modélisation des coques courbés avec des éléments finis à facette plane, un nouvel élément [35]est obtenu par superposition de l'élément membranaire'RSBE5'[36] basé sur l'approche en déformation et l'élément connu de plaques minces en flexion 'ACM'. Cet élément a été développé pour l'analyse des coques minces même si la géométrie est irrégulière. Cet élément de coque s'est avéré avoir un taux de convergence rapide et fourni des résultats précis. Un autre élément fini triangulaire à quatre nœuds de coque à facette plane a été proposé par Guenfoud et al. [37], cet élément est la combinaison de deux éléments de membrane T43_Eq [38] et de plaque Himeur et Guenfoud[39] basés sur l'approche en déformation. L'élément formulé a été utilisé pour l'étude du comportement statique des coques.

1.8.2.2 Éléments membranaires

Cette approche a été appliquée dans le développement d'éléments finis pour les problèmes généraux d'élasticité plane en coordonnées cartésiennes. Tout d'abord, Sabir [40]a développé un élément rectangulaire de base ayant uniquement les degrés de liberté essentiels qui satisfait les conditions de modes libres du corps rigide et les équations de compatibilité. Cet élément à huit degrés de liberté est basé sur les déformations directes linéaires et la déformation de cisaillement constante. Cet élément a été appliqué pour résoudre plusieurs problèmes d'élasticité plane tels que la poutre console et la poutre simplement supportée et s'est avéré donner de bons résultats et un taux de convergence rapide.

De nombreux éléments [41–49] ont été proposés en utilisant l’approche en déformation où l’inclusion de la rotation dans le plan comme degré supplémentaire de liberté. Le succès de l’application de l’approche en déformation aux problèmes d’élasticité plane en coordonnées cartésiennes a conduit à l’extension des travaux au développement d’éléments finis secteurs [50–52] en coordonnées polaires. L’introduction de degrés de liberté interne supplémentaires et la technique de condensation statique sont utilisées pour la formulation de plusieurs éléments [36,53–55].

Dans des travaux plus récents, Rezaiee-Pajand et al. [56–59] ont proposé divers éléments d’ordre supérieur basé sur l’approche en déformation. L’idée principale est de rapprocher le champ de déformation de l’élément avec une fonction mathématique supposée. L’expansion polynomiale de Taylor est un choix courant pour cette fonction supposée. Cette méthode a été utilisée pour développer des éléments finis robustes de différentes formes.

1.8.2.3 Éléments tridimensionnels 3D

Les avantages des éléments finis basés sur le modèle de déformation par rapport aux éléments classiques basés sur le modèle de déplacement ont été illustrés par plusieurs éléments tridimensionnels 3D. Des éléments qui ont été développés non seulement pour l’étude des problèmes 3D, mais aussi pour l’analyse des plaques minces et épaisses. Ils permettent une très bonne représentation du cisaillement transversal sans risque de verrouillage. Belarbi et Charif[60] ont développé un élément fini de solide hexaédrique (SBH8) basé sur l’approche en déformation. Cet élément possède huit nœuds avec trois degrés de liberté par nœud (u , v et w). Il a été utilisé pour l’analyse des plaques minces et épaisses en flexion avec la modification de la matrice d’élasticité. Cet élément s’est trouvé numériquement plus performant que celui du modèle en déplacement.

Des éléments tridimensionnels vérifiant les équations d’équilibre pour la flexion des plaques minces et épaisses ont été développés par Maalem[61] et Belouar et Guerraiche[62]. Guerraiche et al. [63] ont développé un nouvel élément fini brique tridimensionnelle pour l’analyse linéaire de la flexion des plaques. Cet élément a trois degrés de liberté externes essentiels à chacun des huit nœuds de coin ainsi qu’au nœud de centre. Le champ de déplacement de l’élément développé satisfait les équations de compatibilité et la technique de la condensation statique a été utilisée pour éliminer le nœud central. Messai et al [64] ont proposé un élément brique 3D à neuf nœuds à champ de déformation. Cet élément a été implémenté dans le code Abaqus pour l’étude du comportement statique et en vibration libre des plaques en flexion. Un autre élément fini [65] secteur 3D a été développé pour l’analyse

statique des structures circulaires. Cet élément est formulé en utilisant le champ de déplacements de l'élément de Belarbi et Charif[60].

1.8.2.4 Éléments plaques en flexion

Cette approche a été appliquée pour l'analyse de plaques par Belounar et Guenfoud [66] qui ont développé le premier élément de plaque en flexion basé sur l'approche en déformation et la théorie de Reissner-Mindlin. Cet élément se trouve numériquement plus efficace que l'élément correspondant basé sur le modèle en déplacement. Belounar A. et al [67] ont proposé un élément fini triangulaire à trois nœuds en utilisant la théorie des plaques de Reissner-Mindlin pour l'analyse statique et vibration libre des plaques en flexion. Deux éléments[68], un élément quadrilatère et un élément triangulaire basés sur l'approche en déformation et la théorie de Reissner-Mindlin, sont développés pour l'analyse statique, de vibration libre, et de flambage des plaques.

Himeur et Guenfoud[39] ont développé un nouvel élément fini triangulaire de plaque basé sur la théorie des plaques minces (Théorie de Kirchhoff), sa formulation utilise un quatrième nœud fictif, la condensation statique pour éliminer le quatrième nœud interne et l'intégration analytique pour calculer la matrice de rigidité. L'élément formulé a été utilisé pour l'étude du comportement statique des plaques minces.

Un élément fini rectangulaire a été développé par Abderahmani[69] pour l'analyse des plaques minces avec un comportement élastique linéaire. Une intégration analytique est utilisée pour évaluer la matrice de rigidité de l'élément. Le champ de déplacements obtenu de l'élément précédent a été utilisé pour avoir un élément secteur [70] en transformant le système de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires. Cet élément est développé pour l'analyse des plaques minces circulaires. Belounar A. et al. [71] ont formulé un élément quadrilatère pour étudier la vibration libre des plaques en flexion. Cet élément est libre de verrouillage de cisaillement transversal, qui a une excellente précision et insensible aux conditions aux limites.

Chapitre 2. Développement d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces.

Sommaire

2.1	Introduction	23
2.2	Formulation de l'élément KSBQP	23
2.2.1	Dérivation du champ des déplacements	23
2.2.2	Evaluation des matrices élémentaires de rigidité et de masse	26
2.3	Validation numérique	27
2.3.1	Validation numérique en statique	27
2.3.2	Validation numérique en vibration libre.....	34
2.4	Conclusion	48

2.1 Introduction

Plusieurs chercheurs ont développé des éléments de plaque fiables et efficaces qui sont utilisés pour analyser les problèmes de plaques minces. Un élément robuste de plaque ACM rectangulaire non conforme a été développé par Melosh[72]. Cet élément a douze degrés de liberté (DOF) et qui utilise une expansion polynomiale complète du troisième ordre en x et y . de nombreux éléments finis robustes ont été formulés pour l'analyse de la flexion des plaques minces. La théorie de Kirchhoff discret a été efficacement utilisée par plusieurs chercheurs [73,74] pour développer des éléments de plaques minces. La formulation hybride qui a une immense capacité à construire des éléments finis utiles pour l'analyse des structures de plaque en flexion, sur la base de cette méthodologie, la méthode la plus récente appelée hybride-Trefftz (HT) a été développée pour l'analyse des plaques minces en flexion. Les avantages de cette technique ont incité de nombreux chercheurs à développer plusieurs éléments de plaques en flexion [75,76].

Dans de ce chapitre, un élément quadrilatère à quatre nœuds basé sur la théorie des plaques de Kirchhoff pour l'analyse des problèmes de plaque minces en flexion est proposé. Ce nouvel élément appelé **KSBQP**[77] (**K**irchhoff **S**train **B**ased **Q**uadrilatère **P**late) est basé sur des fonctions d'ordre supérieur pour les différentes composantes du champ de déformation en satisfaisant l'équation de compatibilité. Cet élément qui contient trois degrés de liberté (w , β_x et β_y) par nœud est testé pour l'analyse statique et en vibration libre des plaques en flexion. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par d'autres types d'éléments finis et avec des solutions analytiques données dans la littérature.

2.2 Formulation de l'élément KSBQP

2.2.1 Développement du champ des déplacements

L'élément développé est un élément de plaque mince basé sur la théorie de Kirchhoff. Cet élément est un élément quadrilatère à quatre nœuds (figure 2.1) avec trois degrés de liberté par nœud (w , β_x et β_y).

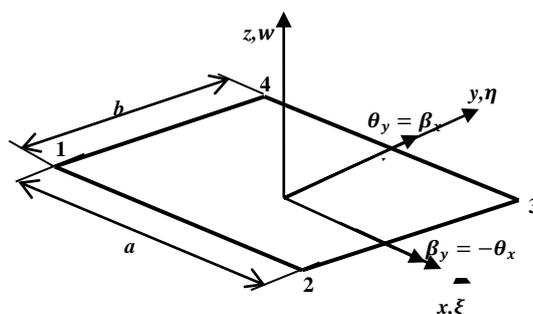


Figure 2.1. Elément quadrilatère KSBQP de plaque avec trois degrés de liberté par nœud.

Chapitre 2. Développement d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces.

Les équations de compatibilité pour les plaques sont données par [78]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \kappa_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \kappa_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \kappa_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial x} &= 2 \frac{\partial \kappa_x}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial y} &= 2 \frac{\partial \kappa_y}{\partial x}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Le champ des déplacements du corps rigide est obtenu en égalisant à zéro l'équation (1.4) et après intégration, on obtient le champ des déplacements représentant les mouvements du corps rigide qui se présente comme suit :

$$\begin{aligned}w &= \alpha_1 - \alpha_2 x - \alpha_3 y \\ \beta_x &= \alpha_2 \\ \beta_y &= \alpha_3\end{aligned}\quad (2.2)$$

Avec α_2 et α_3 , des paramètres représentant les rotations θ_y et θ_x du corps rigide respectivement autour des axes "y" et "x, et α_1 représentant la translation (flèche) du corps rigide le long de la normale (axe "z").

Cet élément possède trois degrés de liberté pour chacun des quatre nœuds de coin. Donc le champ des déplacements doit contenir douze constantes indépendantes. Les trois constantes ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) sont utilisées pour la représentation des modes du corps rigide, il reste donc neuf constantes ($\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_{12}$) pour exprimer les déplacements dus aux déformations imposées à l'élément. Ces neuf constantes indépendantes sont réparties entre les déformations données par l'équation (1.4) comme suit :

$$\begin{aligned}\kappa_x &= \alpha_4 + x \alpha_5 + y \alpha_6 + xy \alpha_7 + x^2 \alpha_9 \\ \kappa_y &= \alpha_8 + x \alpha_9 + y \alpha_{10} + xy \alpha_{11} + y^2 \alpha_6 \\ \kappa_{xy} &= \alpha_{12} + (x^2 \alpha_7 + y^2 \alpha_{11} + 2x \alpha_6 + 2y \alpha_9)\end{aligned}\quad (2.3)$$

Les termes entre parenthèses dans l'équation (2.3) sont ajoutés afin de satisfaire les relations de compatibilité données par l'équation (2.1). En substituant l'équation (2.3) dans l'équation (1.4) et après intégration, les fonctions des déplacements sont données par :

Chapitre 2. Développement d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces.

$$\begin{aligned}
 w &= -\frac{x^2}{2}\alpha_4 - \frac{x^3}{6}\alpha_5 - \left(\frac{x^2y}{2} + \frac{y^4}{12}\right)\alpha_6 - \frac{x^3y}{6}\alpha_7 - \frac{y^2}{2}\alpha_8 - \left(\frac{y^2x}{2} + \frac{x^4}{12}\right)\alpha_9 - \frac{y^3}{6}\alpha_{10} - \frac{y^3x}{6}\alpha_{11} - \frac{xy}{2}\alpha_{12} \\
 \beta_x &= x\alpha_4 + \frac{x^2}{2}\alpha_5 + xy\alpha_6 + \frac{x^2y}{2}\alpha_7 + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\alpha_9 + \frac{y^3}{6}\alpha_{11} + \frac{y}{2}\alpha_{12} \\
 \beta_y &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)\alpha_6 + \frac{x^3}{6}\alpha_7 + y\alpha_8 + xy\alpha_9 + \frac{y^2}{2}\alpha_{10} + \frac{xy^2}{2}\alpha_{11} + \frac{x}{2}\alpha_{12}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le champ final des déplacements est obtenu en ajoutant les équations (2.2) et (2.4) pour obtenir ce qui suit :

$$\begin{aligned}
 w &= \alpha_1 - \alpha_2x - \alpha_3y - \frac{x^2}{2}\alpha_4 - \frac{x^3}{6}\alpha_5 - \left(\frac{x^2y}{2} + \frac{y^4}{12}\right)\alpha_6 - \frac{x^3y}{6}\alpha_7 - \frac{y^2}{2}\alpha_8 - \left(\frac{y^2x}{2} + \frac{x^4}{12}\right)\alpha_9 - \frac{y^3}{6}\alpha_{10} \\
 &\quad - \frac{y^3x}{6}\alpha_{11} - \frac{xy}{2}\alpha_{12} \\
 \beta_x &= \alpha_2 + x\alpha_4 + \frac{x^2}{2}\alpha_5 + xy\alpha_6 + \frac{x^2y}{2}\alpha_7 + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\alpha_9 + \frac{y^3}{6}\alpha_{11} + \frac{y}{2}\alpha_{12} \\
 \beta_y &= \alpha_3 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)\alpha_6 + \frac{x^3}{6}\alpha_7 + y\alpha_8 + xy\alpha_9 + \frac{y^2}{2}\alpha_{10} + \frac{xy^2}{2}\alpha_{11} + \frac{x}{2}\alpha_{12}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Les fonctions de déplacements équation (2.5) et les fonctions de déformations équation (2.3) sont données sous forme matricielle comme suit :

$$\{U\} = [P]\{\alpha\} \tag{2.6}$$

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{\alpha\} \tag{2.7}$$

Avec $\{\alpha_i\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}\}^T$

$$[P] = \begin{bmatrix}
 1 & -x & -y & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{6} & -\left(\frac{x^2y}{2} + \frac{y^4}{12}\right) & -\frac{x^3y}{6} & -\frac{y^2}{2} & -\left(\frac{y^2x}{2} + \frac{x^4}{12}\right) & -\frac{y^3}{6} & -\frac{y^3x}{6} & -\frac{xy}{2} \\
 0 & 1 & 0 & x & \frac{x^2}{2} & xy & \frac{x^2y}{2} & 0 & \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) & 0 & \frac{y^3}{6} & \frac{y}{2} \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \left(\frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) & \frac{x^3}{6} & y & xy & \frac{y^2}{2} & \frac{y^2x}{2} & \frac{x}{2}
 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Avec $[Q]$ la matrice de déformations est donnée par :

$$[Q] = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & x^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y^2 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & x^2 & 0 & 2y & 0 & y^2 & 1
 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Chapitre 2. Développement d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces.

La matrice de transformation $[C]$ qui relie le vecteur des déplacements $\{q_e\}$ et le vecteur des constantes $\{\alpha\}$ est donnée comme suit :

$$\{q_e\} = [C]\{\alpha\} \quad (2.10)$$

Avec

$$\{q_e\}^T = \{w_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, w_2, \beta_{x2}, \beta_{y2}, w_3, \beta_{x3}, \beta_{y3}, w_4, \beta_{x4}, \beta_{y4}\}$$

Et la matrice de transformation $[C]$ pour l'élément KSBQP est:

$$[C] = \begin{bmatrix} P_1(x_1, y_1) \\ P_2(x_2, y_2) \\ P_3(x_3, y_3) \\ P_4(x_4, y_4) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Où la matrice $[P_i(x_i, y_i)]$ est calculée de l'équation (2.8) pour les quatre coordonnées des nœuds (x_i, y_i) , ($i= 1, 2, 3, 4$), pour obtenir:

$$[P_i(x_i, y_i)] = \begin{bmatrix} 1 & -x_i & -y_i & -\frac{x_i^2}{2} & -\frac{x_i^3}{6} & -\left(\frac{x_i^2 y_i}{2} + \frac{y_i^4}{12}\right) & -\frac{x_i^3 y_i}{6} & -\frac{y_i^2}{2} & -\left(\frac{y_i^2 x_i}{2} + \frac{x_i^4}{12}\right) & -\frac{y_i^3}{6} & -\frac{y_i^3 x_i}{6} & -\frac{x_i y_i}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_i & \frac{x_i^2}{2} & x_i y_i & \frac{x_i^2 y_i}{2} & 0 & \left(\frac{y_i^2}{2} + \frac{x_i^3}{3}\right) & 0 & \frac{y_i^3}{6} & \frac{y_i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \left(\frac{y_i^3}{3} + \frac{x_i^2}{2}\right) & \frac{x_i^3}{6} & y_i & x_i y_i & \frac{y_i^2}{2} & \frac{y_i^2 x_i}{2} & \frac{x_i}{2} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Le vecteur des constantes $\{\alpha\}$ est calculé de l'équation (2.10).

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{q_e\} \quad (2.13)$$

En remplaçant l'équation (2.13) dans les équations (2.6) et (2.7), on obtient :

$$\{U\} = [P][C]^{-1} \{q_e\} = [N]\{q_e\} \quad (2.14)$$

$$\{\varepsilon\} = [Q(x, y)][C]^{-1} \{q_e\} = [B]\{q_e\} \quad (2.15)$$

Avec:

$$[N] = [P][C]^{-1}; [B] = [Q(x, y)][C]^{-1} \quad (2.16)$$

2.2.2 Evaluation des matrices élémentaires de rigidité et de masse

Les matrices élémentaires de rigidité et de masse ($[K^e]$ et $[M^e]$) sont respectivement données comme suit :

$$[K^e] = \int_V [B]^T [D][B]dV = [C]^{-T} \underbrace{\left(\int [Q]^T [D][Q] \det(J) d\xi d\eta \right)}_{[K_0]} [C]^{-1} \quad (2.17)$$

$$[M^e] = \rho h \int_{S_e} [N]^T [N]dS = [C]^{-T} \rho h \underbrace{\left(\int [P]^T [P] \det(J) d\xi d\eta \right)}_{[M_0]} [C]^{-1} \quad (2.18)$$

La matrice de transformation [C] reliant les douze degrés de liberté des quatre nœuds de l'élément aux douze constantes n'est pas singulière et par la suite les matrices élémentaires de rigidité et de masse $[K^e]$ et $[M^e]$ peuvent être évaluées. Ces matrices élémentaires sont ensuite assemblées pour obtenir les matrices globales de rigidité et de masse de la structure ($[K]$ et $[M]$). Ces dernières matrices sont utilisées dans l'équation du mouvement pour le système de vibration libre donné par :

$$([K] - \omega^2 [M])\{q\} = 0 \quad (2.19)$$

Les matrices $[K^e]$ et $[M^e]$ données dans les équations (2.17) et (2.18) sont évaluées numériquement.

2.3 Validation numérique

Dans cette section, nous étudions la précision et l'efficacité de l'élément KSBQP pour l'analyse statique et en vibration libre des plaques minces en flexion. Les résultats du présent élément sont ensuite comparés aux solutions analytiques et aux autres résultats numériques disponibles dans la littérature.

2.3.1 Validation numérique en statique

2.3.1.1 Plaque carrée en torsion

La plaque carrée de la figure 2.2 est simplement supportée ($w = 0$) aux trois nœuds de coin B, C et D. Une force transversale P est appliquée au coin A. La solution exacte utilisant la théorie des plaques minces est $w_A=0,2496$ et $w_F=0,0624$ au centre de la plaque, $M_{xy}= 2,5$ et $M_x=M_y=0$ partout dans la plaque. Ce problème a été considéré par de nombreux chercheurs[73] et [79] comme un patch-test pour les plaques minces en flexion. Les résultats des déplacements aux points A, F et des moments sont présentés au tableau 2.1 avec ceux des autres éléments. Les résultats de l'élément KSBQP sont excellents et les deux maillages fournissent la solution exacte pour les contraintes et les déplacements.

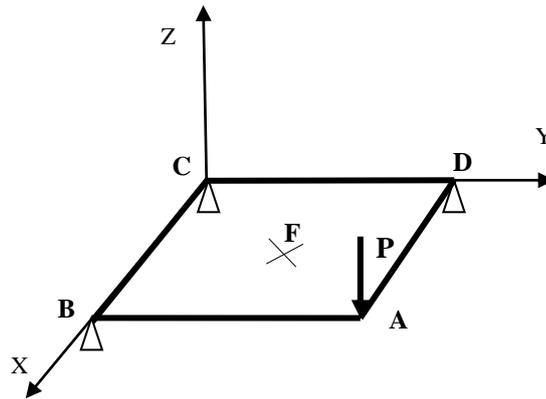


Figure 2.2. Torsion d'une plaque carrée ($L=8$, $h=1$, $P=5$, $E=10000$, $\nu=0.3$).

Tableau 2.1. Torsion d'une plaque carrée.

Eléments	Déflexions		Moment dans la plaque	
	w_A	w_F	M_x et M_y	M_{xy}
KSBQP (1×1)	0.24960	-	0	2.5
KSBQP (2×2)	0.24960	0.06240	0	2.5
ACM [80] (8×8)	0.24972	0.06244	-	-
HCT [80] (8×8)	0.25002	0.06254	-	-
HSM [73]	0.24960	0.06240	0	2.5
DKT [73]	0.24960	0.06240	0	2.5
Solution exacte[73]	0.24960	0.06240	0	2.5

2.3.1.2 Plaque carrée

Une plaque carrée de longueur L et d'épaisseur h avec diverses conditions aux limites est analysée sous deux cas de charge: une charge répartie uniforme et une force concentrée appliquée au centre de la plaque. La géométrie et les propriétés du matériau sont représentées sur la figure 2.3. En raison de la symétrie, un quart de la plaque est divisé en $N \times N$ éléments. Les solutions de référence (w_{ref}) pour les plaques minces ($h/L=0.01$) ont été retenues des valeurs données par la solution de Kirchhoff [1].

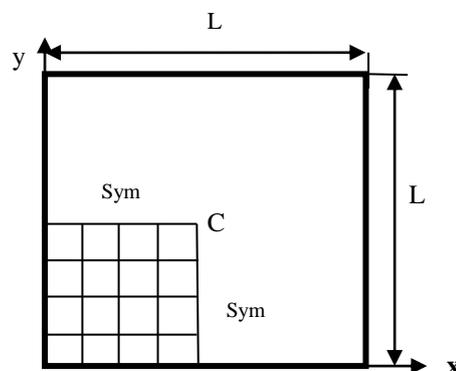


Figure 2.3. Plaque carrée avec un maillage de $N \times N$ ($L=20$, $E=10^6$, $\nu = 0.3$, $P=1$, $q=1$).

Chapitre 2. Développement d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces.

Les résultats de l'élément KSBQP pour le déplacement w_C avec différents maillages sont donnés dans le tableau 2.2 et sont illustrés dans les figures 2.4 et 2.5. Les moments de flexion sont ensuite listés dans le tableau 2.3 pour l'élément proposé dans les cas de la plaque simplement supportée ($w=0$) et de la plaque encastree ($w=\beta_x=\beta_y=0$) soumises à une charge uniforme. La comparaison des résultats de l'élément KSBQP avec ceux obtenus par d'autres éléments ACM et DKQ [74] est également représentée sur la figure 2.5. Les résultats obtenus en utilisant seulement un petit nombre d'éléments prouvent la rapidité de convergence de l'élément développé vers la solution de référence [1].

Tableau 2.2. Convergence du déplacement central d'une plaque carrée ($h/L=0.01$).

Plaque carrée	Charge uniforme ($w_C / (qL^4/100D)$)		Force concentrée ($w_C / (PL^2/100D)$)		
	Maillage	Simply appuyée	Encastree	Simply appuyée	Encastree
	2×2	0.3992	0.1330	1.1879	0.5818
	4×4	0.4022	0.1298	1.1791	0.5771
	8×8	0.4052	0.1274	1.1672	0.5668
	10×10	0.4054	0.1271	1.1639	0.5650
	12×12	0.4061	0.1268	1.1619	0.5637
Solution Exacte[1]		0.4062	0.1265	1.160	0.5612

Tableau 2.3. Convergence du moment central d'une plaque carrée soumise à une charge uniforme.

Maillage	Moment central	
	Encastree	Simply appuyée
2×2	0.0636	0.2192
4×4	0.1844	0.4284
8×8	0.2184	0.4693
10×10	0.2223	0.4705
12×12	0.2244	0.4766
Solution Exacte[1]	0.2291($qL^2/10$)	0.4789($qL^2/10$)

2.3.1.3 Plaque biaise console

Une plaque biaise console fixée d'un côté et soumise à une charge répartie a été analysée en utilisant un maillage de 12×12 éléments. La géométrie et les propriétés des matériaux sont illustrées sur la figure 2.6. Dans le tableau 2.4, les résultats des déplacements transversaux à six emplacements sont comparés aux solutions obtenues en utilisant d'autres éléments. On peut conclure que l'élément proposé donne une solution acceptable par rapport à la solution expérimentale[81].

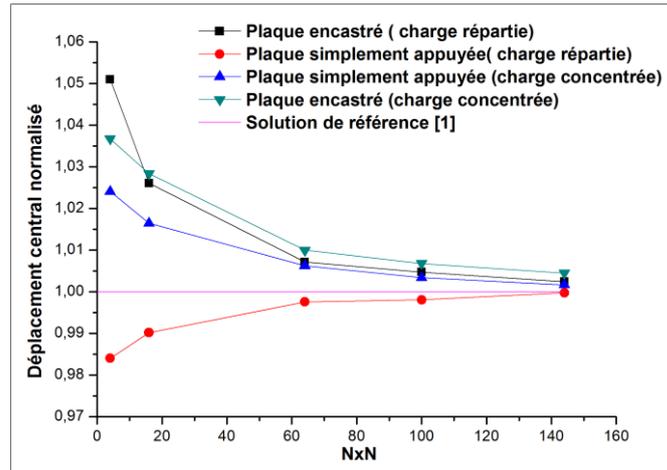


Figure 2.4. Convergence des déplacements W_c normalisés d'une plaque carrée.

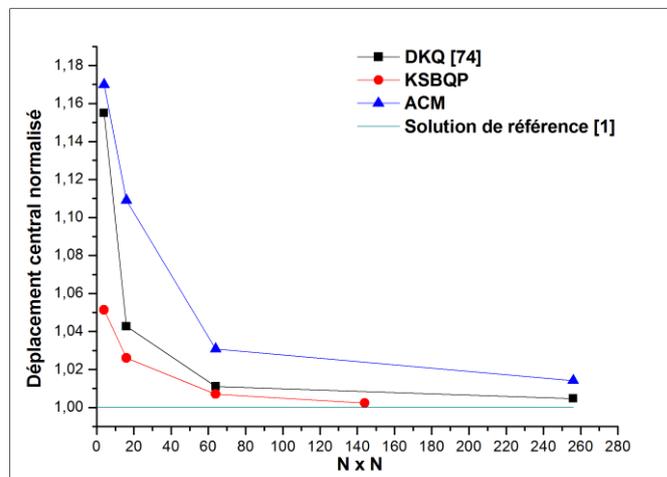


Figure 2.5. Convergence des déplacements normalisés pour plaque carrée encastrée sous charge uniforme.

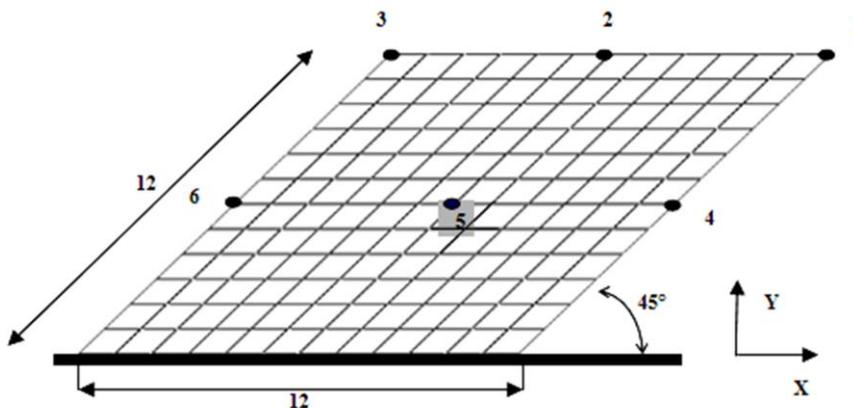


Figure 2.6. Plaque biaisée sous charge uniforme ($E=10.5 \times 10^6$, $\nu=0.35$, $q=0.26066$, $h=0.125$).

Tableau 2.4. Déplacements d'une plaque console biaisée sous charge uniforme.

Éléments	Déplacement aux emplacements						
	Maillage	1	2	3	4	5	6
KSBQP	12×12	0.284	0.190	0.114	0.114	0.049	0.020
HCT [80]	8×6	0.281	0.188	0.111	0.111	0.049	0.018
DKT [73]	4×4	0.304	0.198	0.113	0.121	0.056	0.023
4-node [81]	4×4	0.272	0.183	0.106	0.102	0.046	0.019
Experimental [81]		0.297	0.204	0.121	0.129	0.055	0.022

2.3.1.4 Plaque console soumise à une charge ponctuelle

Une plaque console (figure 2.7) soumise à une charge ponctuelle $P=1$ à son extrémité a été analysée en utilisant un maillage régulier et un maillage distordu. Dvorkin et Bathe[81] ont étudié ce problème en utilisant des éléments de coque à quatre nœuds basés sur la mécanique des milieux continus. Les résultats de l'élément KSBQP donnés avec différents maillages dans les tableaux 2.5 et 2.6 indiquent que l'élément a une bonne convergence pour un maillage grossier et que les déplacements transversaux à l'extrémité libre sont insensibles aux distorsions géométriques.

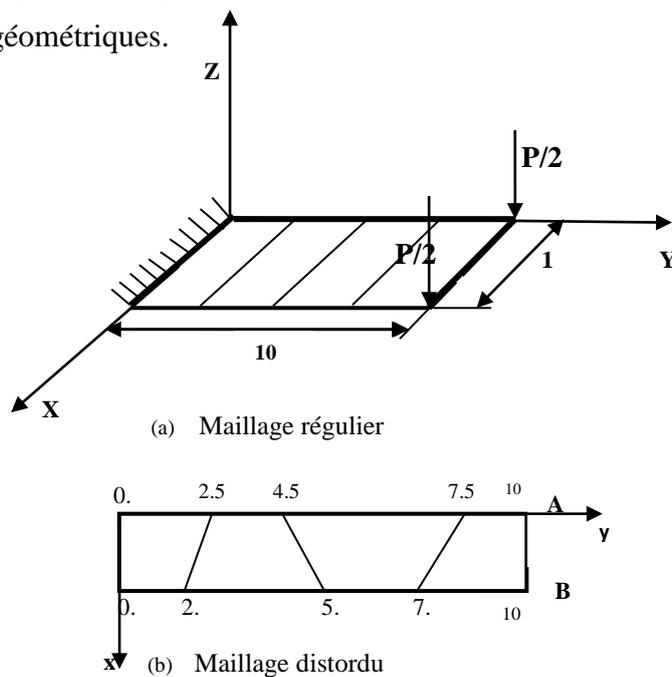


Figure 2.7. Plaque console soumise à une charge ponctuelle ($L=10$, $b=1$, $h=0.1$, $E=2.1 \times 10^6$, $\nu=0$, $P=1$).

Tableau 2.5. Déplacement transversal normalisé de la plaque console avec maillage régulier.

N	w/w_{ref} , $w_{ref} = pL^3/3EI + pL/AG$	
	KSBQP	Réf[81]
1	1.001	0.750
4	1.000	0.984

N : Le nombre de divisions le long de la longueur de la plaque.

Tableau 2.6. Déplacement transversal normalisé de la plaque console avec maillage distordu.

KSBQP		Réf[81]	
η_{pointB}	η_{pointA}	η_{pointB}	η_{pointA}
1.006	1.007	0.989	0.996

$$\eta = (w \text{ maillage distordu}) / (w \text{ maillage régulier}).$$

2.3.1.5 Plaque circulaire sous chargement uniforme

La figure 2.8 présente la géométrie et le maillage utilisés pour l'analyse d'une plaque circulaire isotrope mince ($R/h=100$) soumise à une charge uniforme ou une charge concentrée. Deux cas de conditions aux limites sont considérés (encastrée ou simplement appuyée). Vu la symétrie, un quart de la plaque est discrétisée en utilisant quatre types de maillage $N_{elt}=3, 12, 48$ et 192 (figure 2.8).

Les résultats du nouvel élément sont présentés dans le tableau 2.7 et sur les figures 2.9 et 2.10. La performance de notre nouvel élément est satisfaisante et une bonne convergence vers les solutions de référence [1] est atteinte.

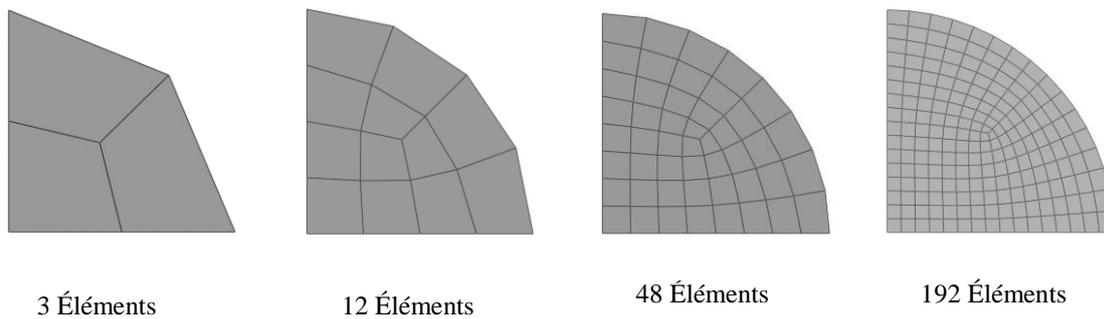


Figure 2.8. Maillage d'une plaque circulaire ($R=1, E=10^{11}, \nu=0.3, P=4000, q=1000, h=0.01$).

Tableau 2.7. Convergence de la flèche normalisée au centre d'une plaque circulaire.

Nombre d'éléments	Charge concentrée		Charge uniforme	
	Encastrée	Simplyment appuyée	Encastrée	Simplyment appuyée
3	1.359	1.154	1.523	1.061
12	1.113	1.068	1,145	1.057
48	1.036	1.028	1.046	1.032
192	1.013	1.008	1.018	1.010
Solution Exacte[1]	1.989 ($PR^2/10D$)	0.5050 ($PR^2/10D$)	0.1563 ($qR^4/10D$)	0.6370 ($qR^4/10D$)

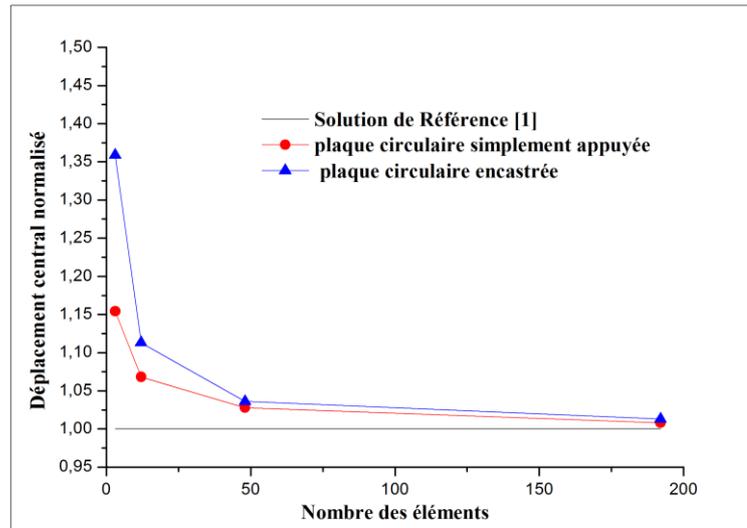


Figure 2.9. Convergence de la flèche normalisée au centre d'une plaque circulaire sous charge concentrée.

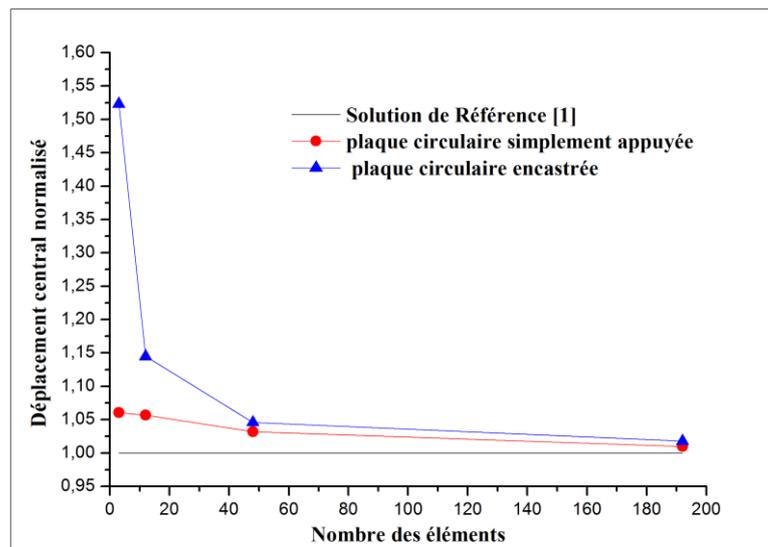


Figure 2.10. Convergence de la flèche normalisée au centre d'une plaque circulaire sous charge uniforme.

2.3.2 Validation numérique en vibration libre

Dans cette section, nous allons mettre en œuvre l'élément KSBQP en vibration libre et montrer qu'il est efficace pour étudier les modes et fréquences propres de vibration des structures de plaques minces.

2.3.2.1 Vibration libre des plaques carrées

Une plaque carrée est analysée pour évaluer l'effet de différentes conditions aux limites sur le comportement de vibration libre de l'élément KSBQP. Dans cet exemple, la géométrie de la plaque carrée est illustrée sur la figure 2.11. Les fréquences sont présentées sous forme non dimensionnelle en utilisant le paramètre $\lambda = \omega a (\rho/G)^{1/2}$. Les tests de convergence de l'élément quadrilatère formulé sont d'abord vérifiés pour des plaques en appui simple ($W = \beta_s = 0$) ou encastré. Les résultats des fréquences non dimensionnelles sont présentés dans les tableaux 2.8 et 2.9 et les figures 2.12- 2.15 avec ceux de l'élément ACM. On peut observer qu'une convergence rapide de l'élément KSBQP vers la solution analytique des plaques minces TC [82] est obtenue en utilisant seulement un petit nombre d'éléments pour tous les cas.

Pour le calcul des fréquences de plaque avec diverses conditions aux limites (SSSS, CCCC, SCSC, SCSF, SCSS et CCCF), nous avons utilisé un maillage avec 20×20 éléments. Les fréquences non dimensionnelles calculées en utilisant l'élément KSBQP sont illustrées dans les tableaux 2.10- 2.15. Sur les figures 2.16 et 2.17, l'erreur des fréquences pour l'élément KSBQP et d'autres éléments a été tracée. Les trois premières modes des plaques CCCC et CCCF sont présentées sur les figures 2.18 et 2.19.

D'après les résultats numériques, l'élément KSBQP présente de bonnes performances et ses résultats sont comparables à ceux obtenus par d'autres éléments de plaque (élément ACM et l'élément à neuf nœuds ANS9 [18]) et qui sont proches des solutions analytiques TC [82]. L'élément R4 possède des résultats plus élevés que la solution des plaques épaisses MC [83] et souffre d'un blocage en CT pour les plaques minces.

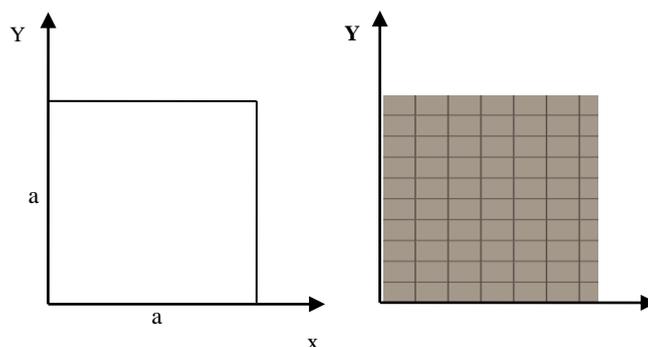


Figure 2.11. Plaque carrée avec un maillage de $N \times N$.

Chapitre 2. Développement d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces.

Tableau 2.8. Convergence des fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée encastrée avec $h/a = 0.01$, $\nu = 0.3$.

Mode	Elément	Maillage					TC [82]
		4×4	8×8	12×12	16×16	20×20	
1	KSBQP	0.1712	0.1738	0.1747	0.1751	0.1753	0.1756
	ACM	0.1674	0.1729	0.1743	0.1749	0.1751	
2	KSBQP	0.3516	0.3537	0.3559	0.3568	0.3573	0.3581
	ACM	0.3417	0.3515	0.3549	0.3562	0.3569	

Tableau 2.9. Convergence des fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée simplement appuyée avec $h/a = 0.01$, $\nu = 0.3$.

Mode	éléments	Maillage					TC [82]
		4×4	8×8	12×12	16×16	20×20	
1	KSBQP	0.0942	0.0957	0.0960	0.0961	0.0962	0.0963
	ACM	0.0934	0.0955	0.0959	0.0961	0.0966	
2	KSBQP	0.2336	0.2385	0.2397	0.2402	0.2404	0.2408
	ACM	0.2313	0.2378	0.2394	0.2400	0.2430	

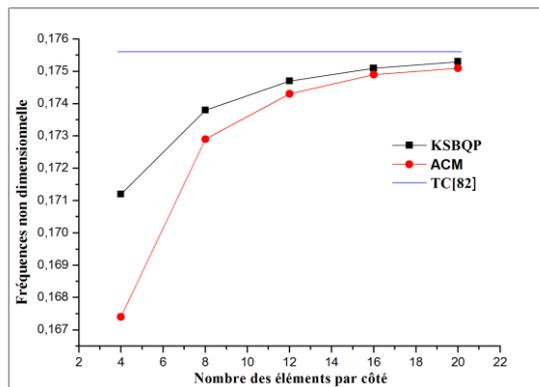


Figure 2.12. Convergence des fréquences non dimensionnelle pour une plaque carrée encastrée Mode 1.

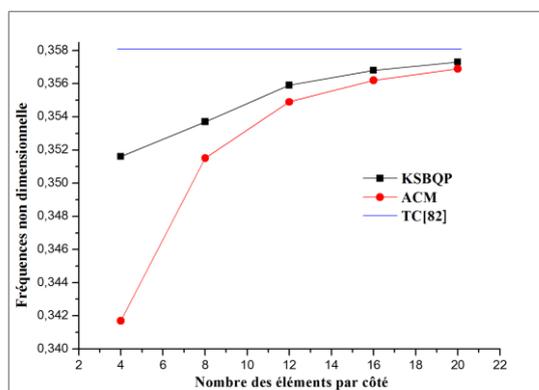


Figure 2.13. Convergence des fréquences non dimensionnelle pour une plaque carrée encastrée Mode 2.

Chapitre 2. Développement d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces.

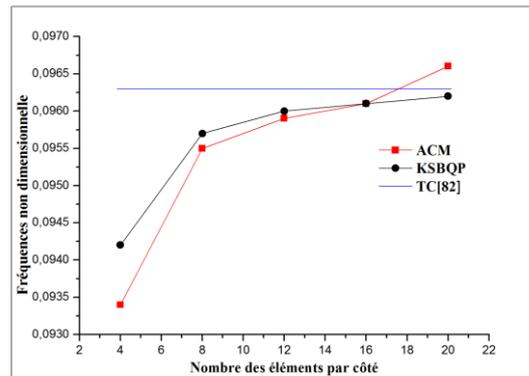


Figure 2.14. Convergence des fréquences non dimensionnelle pour une plaque carrée simplement appuyée Mode 1.

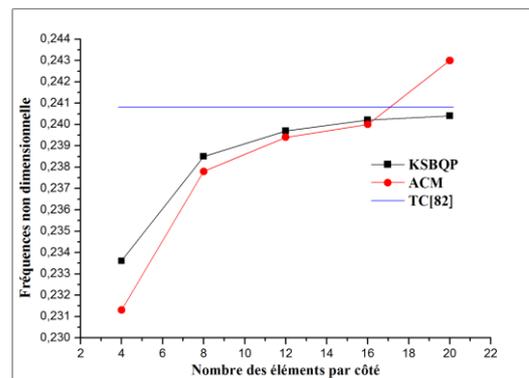


Figure 2.15. Convergence des fréquences non dimensionnelle pour une plaque carrée simplement appuyée Mode 2.

Tableau 2.10. Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SSSS avec $h/a=0.01$, $\nu=0.3$.

Mode	m	n	TC[82]	MC[83]	ACM	ANSP9[18]	R4	KSBQP
1	1	1	0.0963	0.0963	0.0966	0.0963	0.2079	0.0962
2	2	1	0.2408	0.2406	0.2430	0.2406	0.5917	0.2404
3	2	2	0.3853	0.3848	0.3890	0.3848	0.8358	0.3837
4	3	1	0.4816	0.4809	0.4928	0.4818	1.2930	0.4807
5	3	2	0.6261	0.6249	0.6380	0.6253	1.4454	0.6227
6	4	1	0.8187	0.8167	0,8167	0.8198	1.8958	0.8172

Tableau 2.11. Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée CCCC avec $h/a = 0.01$, $\nu = 0.3$.

Mode	m	n	TC[82]	MC[83]	ACM	ANSP9[18]	R4	KSBQP
1	1	1	0.1756	0.1754	0.1751	0.1754	0.4593	0.1753
2	2	1	0.3581	0.3576	0.3569	0.3576	0.9421	0.3573
3	2	2	0.5280	0.5274	0.5239	0.5268	1.2734	0.5251
4	3	1	0.6421	0.6402	0.6399	0.6415	1.7710	0.6405
5	1	3	0.6432	0.6432	0.6431	0.6446	1.7733	0.6436

Chapitre 2. Développement d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces.

Tableau 2.12. Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SCSC avec $h/a = 0.01$, $\nu = 0.3$.

Mode	m	n	TC[82]	MC[83]	ACM	ANSP9[18]	R4	KSBQP
1	1	1	0.1413	0.1411	0.1409	0.1411	0.3524	0.1411
2	2	1	0.2671	0.2668	0.2661	0.2668	0.6589	0.2664
3	2	2	0.3383	0.3377	0.3375	0.3378	0.8961	0.3377
4	3	1	0.4615	0.4608	0.4584	0.4607	1.0767	0.4593
5	3	2	0.4988	0.4979	0.4970	0.4984	1.3268	0.4975
6	4	1	0.6299	0.6279	0.6284	0.6295	1.6008	0.6288

Tableau 2.13. Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SCSF avec $h/a = 0.01$, $\nu = 0.3$.

Mode	m	n	TC[82]	MC[83]	ACM	ANSP9[18]	R4	KSBQP
1	1	1	0.0619	0.0622	0.0619	0.0619	0.1520	0.0619
2	2	1	0.1613	0.1612	0.1610	0.1612	0.3578	0.1610
3	2	2	0.2035	0.2045	0.2035	0.2034	0.5656	0.2036
4	3	1	0.3075	0.3075	0.3065	0.3071	0.6765	0.3066
5	3	2	0.3533	0.3528	0.3524	0.3528	0.9025	0.3523

Tableau 2.14. Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SCSS avec $h/a = 0.01$, $\nu = 0.3$.

Mode	m	n	TC[82]	MC[83]	ACM	ANSP9[18]	R4	KSBQP
1	1	1	0.1154	0.1153	0.1152	0.1153	0.2679	0.1153
2	2	1	0.2521	0.2521	0.2514	0.2519	0.6171	0.2516
3	2	2	0.2862	0.2858	0.2855	0.2859	0.7347	0.2857
4	3	1	0.4203	0.4190	0.4177	0.4197	0.9447	0.4184
5	3	2	0.4893	0.4889	0.4879	0.4890	1.3059	0.4909
6	4	1	0.5525	0.5533	0.5511	0.5522	1.5109	0.5515

Tableau 2.15. Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée CCCF avec $h/a = 0.01$, $\nu = 0.3$.

Mode	m	n	TC[82]	MC[83]	ACM	ANSP9[18]	R4	KSBQP
1	1	1	0.1171	0.1171	0.1167	0.1166	0.3214	0.1168
2	2	1	0.1953	0.1951	0.1947	0.1944	0.4589	0.1947
3	2	2	0.3094	0.3093	0.3086	0.3082	0.8780	0.3087
4	3	1	0.3744	0.3740	0.3731	0.3738	0.9993	0.3732
5	3	2	0.3938	0.3931	0.3918	0.3924	0.9564	0.3923
6	4	1	0.5699	0.5695	0.5652	0.5678	1.2923	0.5661

Note: MC[83]: Reissner - Mindlin plaques épaisses; TC[82]: Théorie des plaques minces.

S - Simplement appuyée : pour le bord parallèle à l'axe x ($w=0$ et $\beta_x=0$), pour le bord parallèle à l'axe y ($w=0$ et $\beta_y=0$). C - Encastree : ($w=0, \beta_x=0$ et $\beta_y=0$). F - Libre : ($w \neq 0, \beta_x \neq 0$ and $\beta_y \neq 0$).

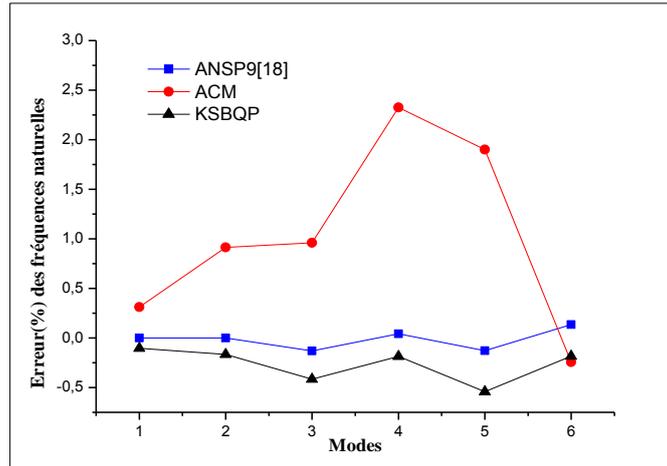


Figure 2.16. Comparaison de l'erreur des fréquences non dimensionnelle de la plaque SSSS.

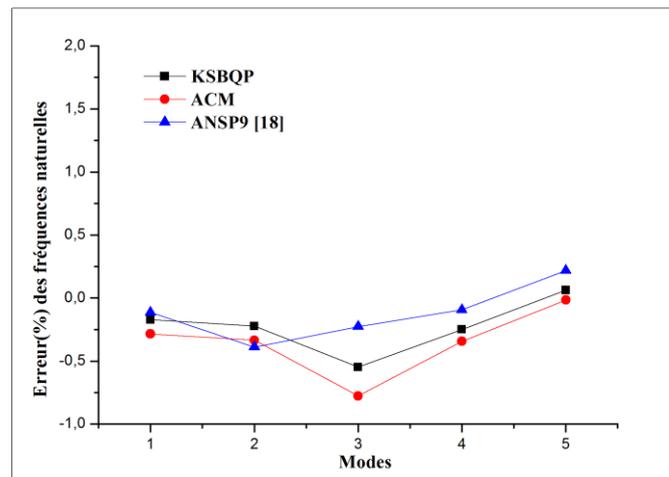


Figure 2.17. Comparaison de l'erreur des fréquences non dimensionnelle de la plaque CCCC.

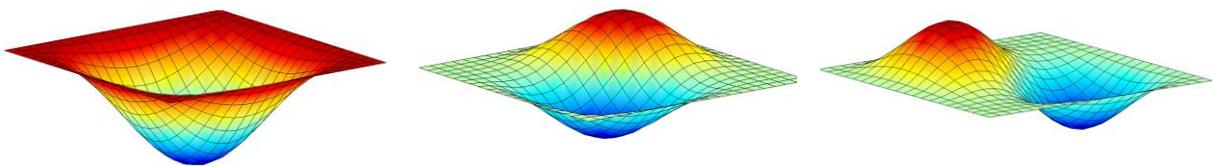


Figure 2.18. Trois premiers modes propres d'une plaque carrée CCCC ($h/a = 0.01$).

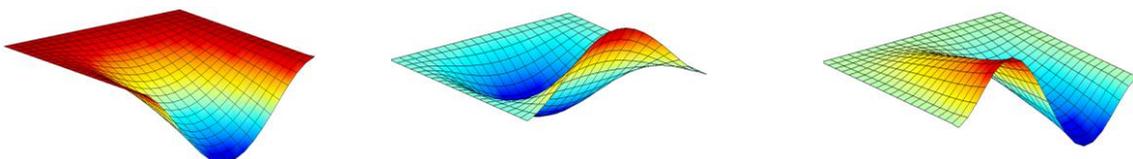


Figure 2.19. Trois premiers modes propres d'une plaque carrée CCCF ($h/a = 0.01$).

2.3.2.2 Vibrations transversales d'une plaque rectangulaire mince simplement appuyée

Pour l'analyse des vibrations libres transversales d'une plaque rectangulaire simplement appuyée, les propriétés des matériaux sont considérées comme suit: Module de Young

Chapitre 2. Développement d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces.

$E = 2 \times 10^{11}$ N/m², densité $\rho = 8000$ kg/m³, coefficient de Poisson est $\nu = 0.3$. La plaque (figure 2.20) a 100mm de longueur et 50mm de largeur. La plaque est modélisée avec un maillage régulier constitué de huit éléments sur la longueur et quatre éléments sur la largeur. Les expressions analytiques des fréquences transversales sont données par [84]:

$$f_{mn} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{m}{L^2} + \frac{n^2}{l^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (2.20)$$

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 2.16. Une comparaison directe est représentée sur les figures 2.21 et 2.22 d'une plaque simplement appuyée avec $L/h=50$ et $L/h=100$. Pour avoir une meilleure vision, la figure 2.23 montre également les quatre premiers modes de vibration pour la plaque avec $L/h=50$. L'élément KSBQP présente de bons résultats par rapport à la solution analytique [84]. Les figures 2.21 et 2.22 montrent que l'élément KSBQP produit des résultats plus précis que ceux donnés par d'autres éléments (l'élément solide 3D SBBNN [64] et l'élément hexaédrique 3D SFR8 [85]).

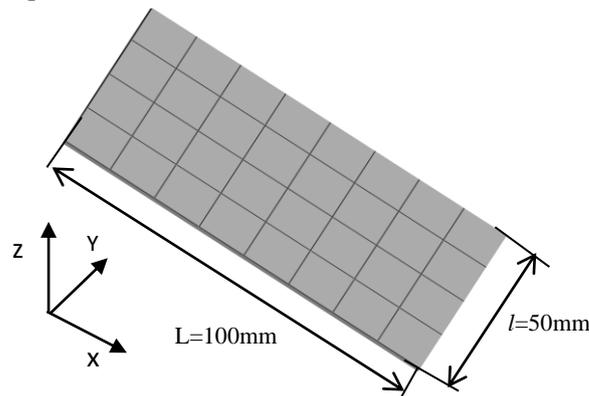


Figure 2.20. La plaque rectangulaire mince simplement appuyée modélisée avec 8×4 éléments.

Tableau 2.16. Les cinq premières fréquences naturelles pour une plaque rectangulaire mince simplement appuyée.

	SBBNN[64]	SFR8[85]	KSBQP	Solution Exacte[84]
L/h = 50				
f11	25.062	26.447	23.564	23.767
f21	41.026	41.856	37.175	38.027
f31	70.536	69.172	60.006	61.794
f12	93.949	96.68	80.265	80.808
f22	115.94	110.34	92.228	95.068
L/h = 100				
f11	12.703	13.296	11.773	11.883
f21	21.211	21.136	18.587	19.013
f31	38.967	35.129	30.003	30.897
f12	50.096	49.094	40.132	40.404
f22	67.377	56.909	46.114	47.534

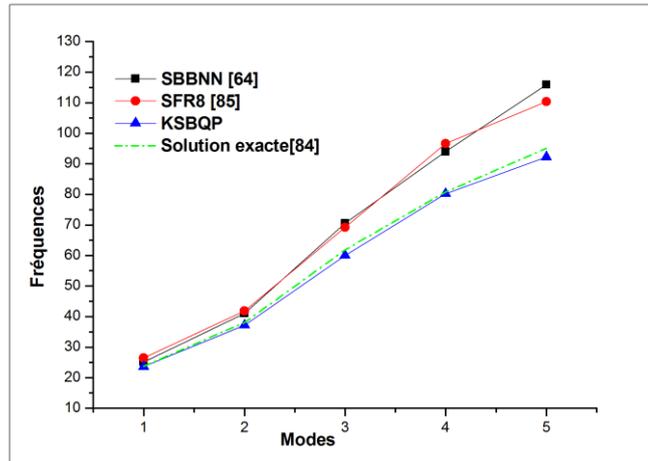


Figure 2.21. Cinq premières fréquences d'une plaque carrée simplement appuyée avec un maillage 8×4 et $L/h=50$.

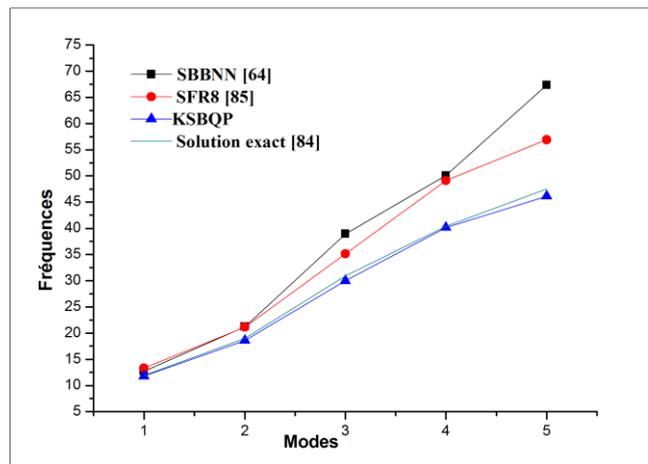


Figure 2.22. Cinq premières fréquences d'une plaque carrée simplement appuyée avec un maillage 8×4 et $L/h=100$.

2.3.2.3 Vibrations de flexion hors du plan d'une poutre élastique isotrope rectangulaire

Nous considérons un exemple de vibrations de flexion hors plan de la poutre élastique isotrope qui est modélisée avec un maillage régulier constitué de 10 éléments sur la longueur et un élément sur la largeur. Les données géométriques et mécaniques sont illustrées dans la figure 2.24. Les expressions analytiques des fréquences naturelles transverses sont données par [84] :

$$f_n = \frac{a_n}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho SL^2}} ; I = \frac{bh^3}{12} ; S = b \times h \quad (2.21)$$

Où EI est la rigidité à la flexion de la section, ρ la masse volumique.

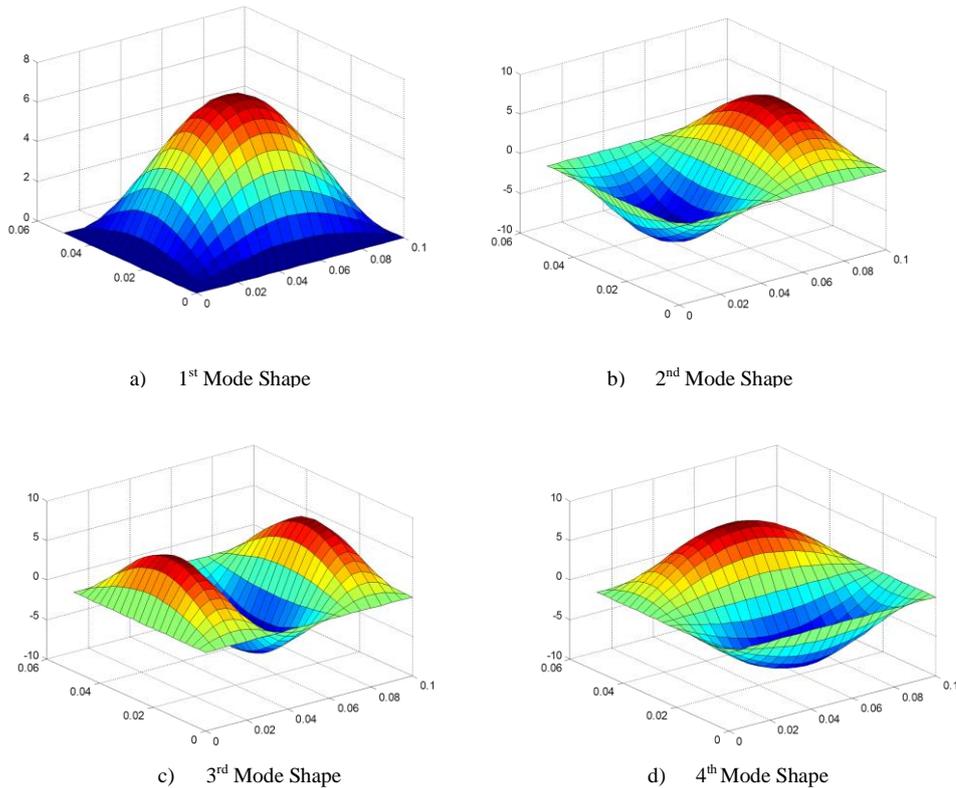


Figure 2.23. Différents modes propres de la plaque rectangulaire simplement appuyée ($L/h=50$) (maillage 20×20).

Le tableau 2.17 résume les résultats obtenus des trois premières fréquences naturelles numériques uniquement pour trois configurations: encastrement - libre (CF), encastrement - encastrement (CC) et simplement appuyée (SS). Nous remarquons que les fréquences obtenues par l'élément KSBQP sont plus précises que ceux de l'élément SFR8 [85]. Pour les configurations CF et SS, l'élément SBBNN [64] présente les résultats les plus précis.

$$E=2.1 \times 10^{11} Pa, \nu=0.3, L/h=40, \rho=7800 \text{ kg/m}^3$$

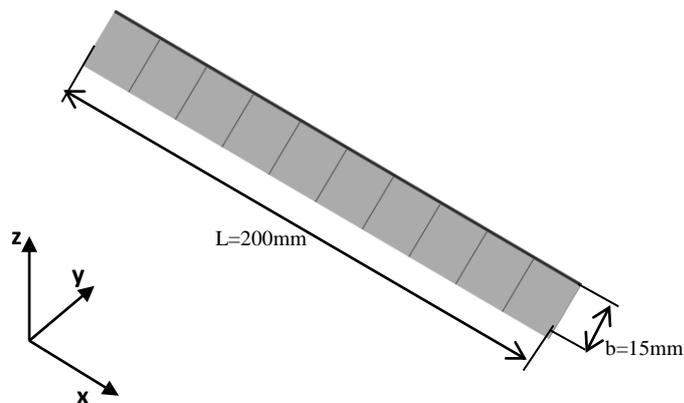


Figure 2.24. La poutre élastique isotrope modélisée avec 10×1 éléments.

Tableau 2.17. Les trois premières fréquences naturelles de flexion hors du plan d'une poutre rectangulaire.

	SBBNN[64]	SFR8[85]	KSBQP	Solution Exacte[84]
C-F				
f1	105.08	111.23	105.509	104.892
f2	654.79	703.04	663.198	655.578
f3	1824.9	2000.4	1869.654	1838.599
C-C				
f1	682.18	725.65	677,756	655.578
f2	1897.9	2042.0	1880.822	1838.599
f3	3751.4	4123.9	3721.330	3605.680
S-S				
f1	294.17	309.16	294.827	294.104
f2	1176.9	1246.9	1187.634	1176.417
f3	2645.2	2842.3	2700.647	2646.940

2.3.2.4 Vibration libre d'une plaque parallélogramme

Une plaque console parallélogramme d'angle d'inclinaison ($\beta=60^\circ$) (figure 2.25) avec un rapport d'épaisseur $h/L=0.001$ est étudié en utilisant un maillage de 22×22 éléments. Les six premières fréquences non dimensionnelles $\lambda = \omega L^2 / \pi^2 (\rho h / D)^{1/2}$ sont présentées dans le tableau 2.18. Ces résultats sont comparés à d'autres solutions numériques (DSG3, ES-DSG3 et MITC4) [86] et analytiques [87]. La figure 2.26 montre également les six premiers modes de vibration pour la plaque biaise console. Les fréquences obtenues par l'élément KSBQP semblent tout à fait satisfaisantes. Ces résultats sont en bon accord avec les solutions analytiques [87], comparables et proches des résultats des éléments ES-DSG3 et MITC4 [86] et meilleurs que l'élément DSG3 [86].

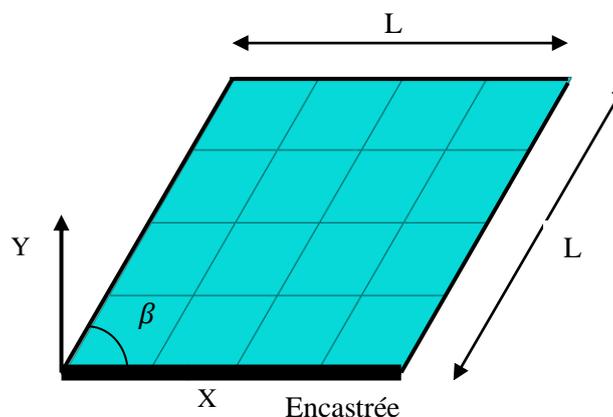


Figure 2.25. Plaque console biaise avec un maillage $N \times N$.

Tableau 2.18. Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque console parallélogramme (CFFF).

Modes	h/L	KSBQP	DSG3 [86]	ES-DSG3 [86]	MITC4 [86]	Solution exacte [87]
1	0.001	0.3973	0.4019	0.3981	0.3984	0.3980
2		0.9468	0.9949	0.9532	0.9552	0.9540
3		2.5529	2.6392	2.5692	2.5776	2.5640
4		2.6090	2.8569	2.6508	2.6395	2.6270
5		4.0676	4.3554	4.2030	4.2163	4.1890
6		5.0678	6.0079	5.2283	5.1728	5.1310

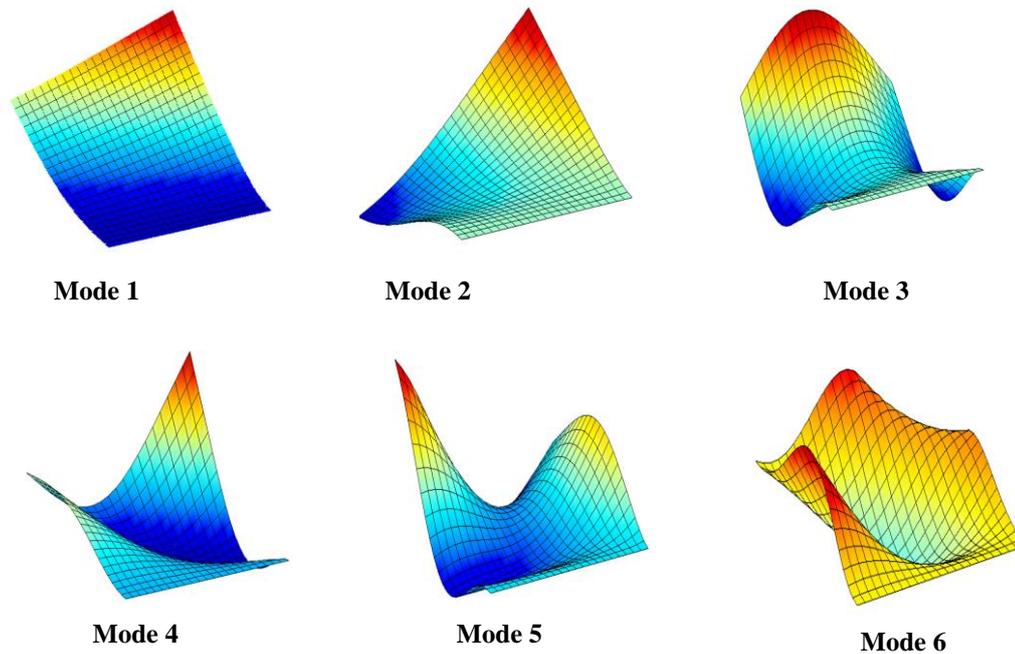


Figure 2.26. Les six modes propres d'une plaque console biaisée (h/L=0.001).

2.3.2.5 Vibration libre des plaques biaisées

Dans cet exemple, une plaque parallélogramme avec un angle d'inclinaison variable $0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ est étudiée en utilisant un rapport épaisseur h/L=0.01. La géométrie de la plaque parallélogramme est illustrée sur la figure 2.27. La condition aux limites de la plaque S-C-S-C est utilisée dans cet exemple. Le résultat de huit fréquences non dimensionnelles $\lambda = \omega L^2 / \pi^2 (\rho h / D)^{1/2}$ en utilisant un maillage 22x22 est rapporté dans le tableau 2.19 et comparé avec la solution de référence en utilisant la méthode de Ritz [88] (théorie des plaques minces).

L'élément KSBQP présente de bonnes performances et ses résultats sont en bon accord avec la solution de référence [88]. Mais il y a une certaine différence entre les résultats de l'élément KSBQP et la solution de référence dans le cas de la plaque avec angle $\theta = 30^\circ$.

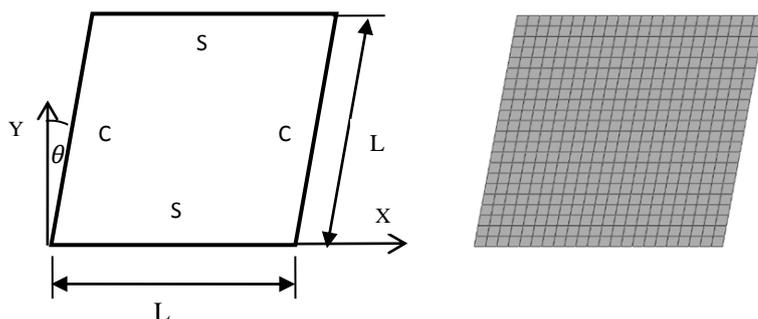


Figure 2.27. Géométrie de la plaque biaise et son FE maillage.

Tableau 2.19. Les fréquences naturelles de la plaque biaise.

		Mode n							
θ°		1	2	3	4	5	6	7	8
0	Réf [88]	2.933	5.548	7.024	9.586	10.361	13.080	14.210	15.690
	KSBQP	2.938	5.563	7.037	9.634	10.389	13.106	14.321	15.787
5	Réf[88]	2.953	5.570	7.084	9.557	10.500	13.180	14.140	15.870
	KSBQP	2.943	5.591	7.043	9.663	10.156	13.111	14.386	15.813
10	Réf[88]	3.014	5.641	7.266	9.529	10.860	13.500	14.030	16.340
	KSBQP	2.961	5.679	7.062	9.746	10.662	13.130	14.585	15.894
15	Réf[88]	3.121	5.765	7.579	9.552	11.390	13.980	14.080	16.960
	KSBQP	2.992	5.8312	7.094	9.890	11.021	13.164	14.932	16.039
20	Réf[88]	3.276	5.955	8.040	9.699	12.100	14.050	14.910	17.750
	KSBQP	3.039	6.060	7.141	10.107	11.557	13.212	15.451	15.247
25	Réf[88]	3.497	6.226	8.678	9.949	13.000	14.300	16.100	18.800
	KSBQP	3.105	6.380	7.209	10.412	12.309	13.282	16.180	16.545
30	Réf[88]	3.797	6.598	9.539	10.300	14.100	14.700	17.800	19.600
	KSBQP	3.196	6.8209	7.300	10.833	13.335	13.378	16.960	17.183

2.3.2.6 Vibration libre des plaques triangulaires

Dans cet exemple, une plaque console triangulaire (figure 2.28) avec différentes géométries (α variable). La plaque triangulaire est discrétisée en 880 éléments quadrilatéraux. Le rapport d'épaisseur $h/L=0.001$, et divers angles d'inclinaison $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ sont considérés. Les résultats numériques obtenus par l'élément KSBQP des cinq premières fréquences $\lambda=\omega L^2/\pi^2(\rho h/D)^{1/2}$ sont présentés dans le tableau 2.20 avec d'autres résultats numériques et analytiques. Les premières fréquences non dimensionnelles pour les plaques triangulaires minces sont représentées sur la figure 2.29. Les fréquences calculées en utilisant l'élément de plaque KSBQP sont proches aux solutions de références [89–92].

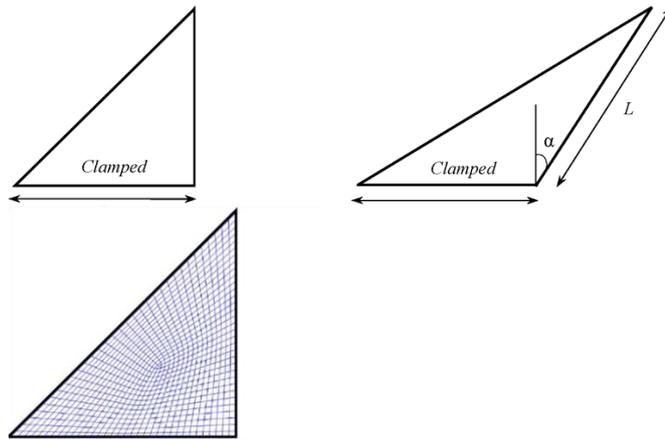


Figure 2.28. Maillage d'une plaque console triangulaire.

Tableau 2.20. Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque console triangulaire ($h/L=0.001$, $\nu=0.3$).

α	Eléments	Mode				
		1	2	3	4	5
0°	KSBQP	0.624	2.371	3.305	5.638	7.722
	Réf [89]	0.624	2.336	3.373	5.665	7.547
	Réf [90]	0.588	2.318	3.239	5.540	7.518
	Rayleigh-Ritz[91]	0.624	2.377	3.308	5.689	7.743
	Pb2- Rayleigh-Ritz [92]	0.625	2.377	3.310	5.689	7.743
15°	KSBQP	0.584	2.175	3.405	5.263	7.236
	Réf [89]	0.587	2.140	3.441	5.271	6.976
	Rayleigh-Ritz [91]	0.584	2.181	3.409	5.280	7.264
	Pb2- Rayleigh-Ritz [92]	0.586	2.182	3.412	5.279	7.263
30°	KSBQP	0.573	2.171	3.628	5.499	7.074
	Réf [89]	0.584	2.138	3.642	5.486	6.831
	Rayleigh-Ritz [91]	0.576	2.174	3.639	5.511	7.108
	Pb2- Rayleigh-Ritz [92]	0.578	2.178	3.657	5.518	7.109
45°	KSBQP	0.590	2.327	4.140	6.377	7.568
	Réf [89]	0.605	2.327	4.141	6.378	7.393
	Rayleigh-Ritz [91]	0.590	2.329	4.137	6.381	7.602
	Pb2- Rayleigh-Ritz [92]	0.593	2.335	4.222	6.487	7.609

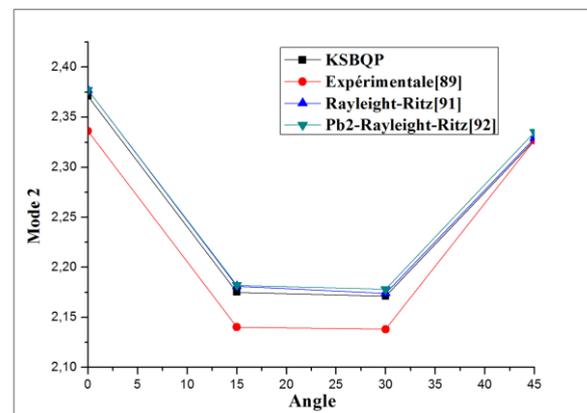
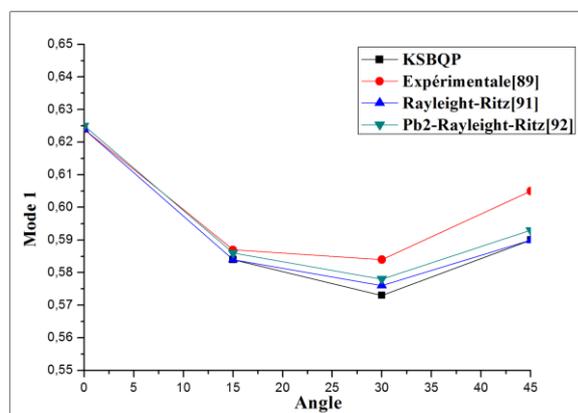


Figure 2.29. Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque console triangulaire ($h/L=0.001$, $\nu=0.3$).

2.3.2.7 Vibration libre d'une plaque rectangulaire avec un trou central

Pour tester les performances de l'élément proposé dans un problème présentant une discontinuité interne, nous considérons une plaque carrée avec un trou central (figure 2.30). La plaque est encadrée sur deux côtés opposés et en appui simple sur les deux autres côtés (CSCS). L'ouverture a une forme carrée où ses côtés sont parallèles à ceux de la plaque. Ce test est traité expérimentalement par Aksu et Ali[93]. Les résultats des quatre premières fréquences $\lambda = \omega a^2 (\rho h / D)^{1/2}$ pour un maillage 24×24 sont présentés dans le tableau 2.21 et comparés aux solutions expérimentales et numériques [93–96]. Les quatre premiers modes sont présentés dans la figure 2.31.

Les résultats de l'élément développé sont très proches de ceux donnés par Lam, et al [95] et la performance de l'élément KSBQP est satisfaisante comparons avec d'autres solutions [93,94,96]. Cependant, l'élément KSBQP est plus économique que l'élément LSWRI[96] à neuf nœuds .

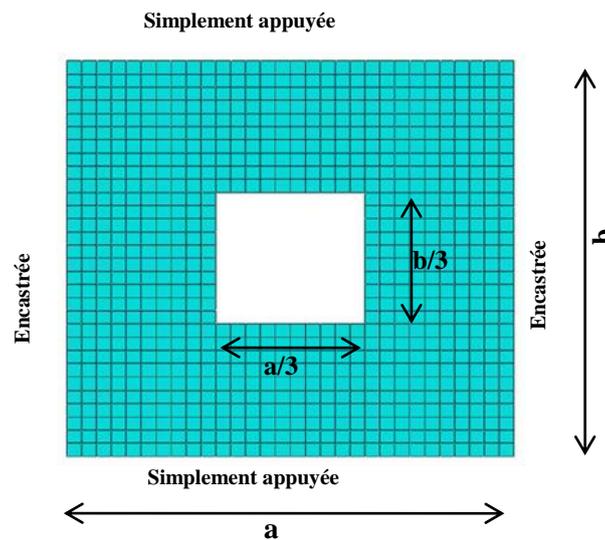


Figure 2.30. Plaque rectangulaire avec un trou central
($a/b=9/8$, $h/a=0.01$, $\nu=0.3$).

Tableau 2.21. Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque trouée CSCS.

Modes	KSBQP	LSWRI [96]	Lam, et al[95]	Aksu, and Ali [93]	Liew, et al[94]	Résultat Expérimental [93]
1	34.1934	32.5421	34.04	33.22	32.4250	33.83
2	54.9233	58.1577	54.57	53.01	53.4260	53.99
3	64.6295	65.2573	65.05	61.91	62.3530	62.49
4	95.7167	96.8386	95.38	91.87	94.839	95.03

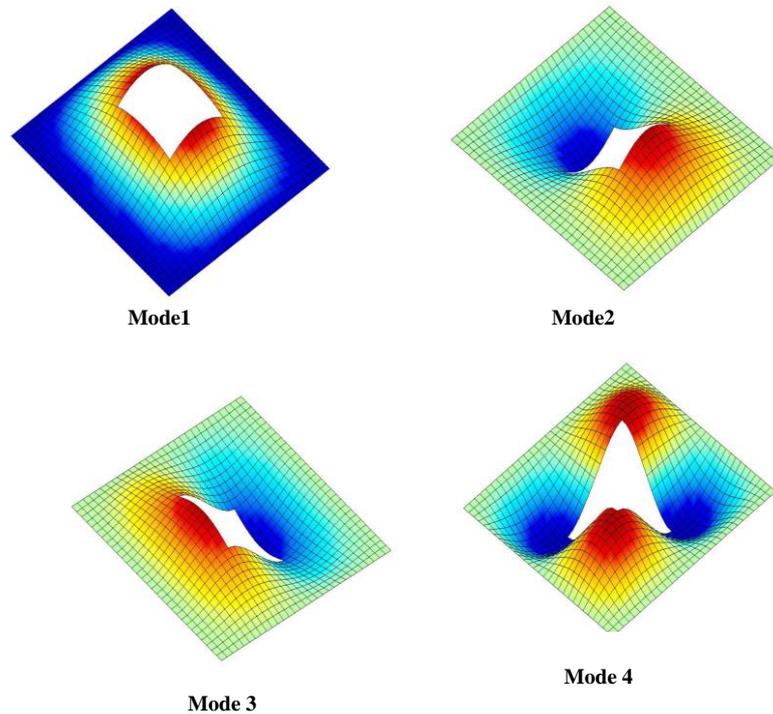


Figure 2.31. Modes propres d'une plaque rectangulaire avec un trou central.

2.3.2.8 Vibration libre des plaques elliptiques

Dans cet exemple, les vibrations des plaques elliptiques encadrées avec des rapports $a/b=2, 3$ et 4 sont étudiées. La géométrie de la plaque est présentée sur la figure 2.32. Le rapport d'épaisseur est $h/2b=0.01$. Les fréquences non dimensionnelles sont présentées sous la forme suivante: $\lambda=\omega a^2(\rho h/D)^{1/2}$.

Les fréquences non dimensionnelles sont résumées dans le tableau 2.22. D'après les résultats numériques, les fréquences calculées en utilisant le présent élément sont en bon accord avec la solution de référence [97] à l'exception d'une certaine différence dans les modes supérieurs.

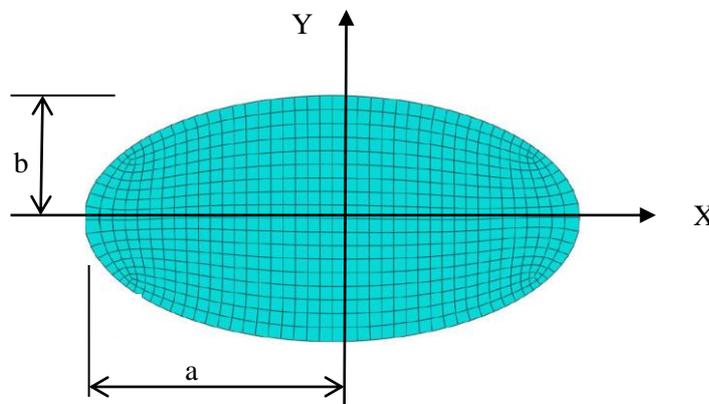


Figure 2.32. Maillage d'une plaque elliptique (470 quadrilatères).

Chapitre 2. Développement d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces.

Tableau 2.22. Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque elliptique.

		Mode n					
		1	2	3	4	5	6
a/b=2	Réf[97]	27.4773	39.4976	55.9773	69.8557	77.0443	88.0472
470 éléments	KSBQP	27.2140	38.8463	54.6743	69.5986	75.1776	87.0996
	Erreur %	-0,9582	-1,6489	-2,3277	-0,3680	-2,4228	-1,0762
a/b=3	Réf[97]	56.8995	71.5902	90.2380	113.266	140.746	150.089
478 éléments	KSBQP	56.6558	71.0878	88.9737	110.224	135.069	149.649
	Erreur %	-0,4282	-0,7017	-1,4010	-2,6857	-4,0335	-0,2933
a/b=4	Réf[97]	97.5984	115.608	137.269	164.325	195.340	255.095
480 éléments	KSBQP	97.4533	115.152	136.392	161.284	189.965	222.564
	Erreur %	-0,1487	-0,3944	-0,6390	-1,8505	-2,7516	-12,7525

2.3.2.9 Vibration libre des plaques circulaires

La figure 2.33 montre une plaque circulaire encastree sur son contour avec une valeur du rapport épaisseur-rayon $h/2R=0,01$. Pour tester cet élément en distorsion géométrique des éléments, on a calculé les quatre fréquences non dimensionnelles $\lambda=\omega R^2(\rho h/D)^{1/2}$ qui sont reportés dans le tableau 2.23. Les fréquences obtenues par l'élément KSBQP semblent tout à fait satisfaisantes par rapport à la solution analytique Irie, et al [98].

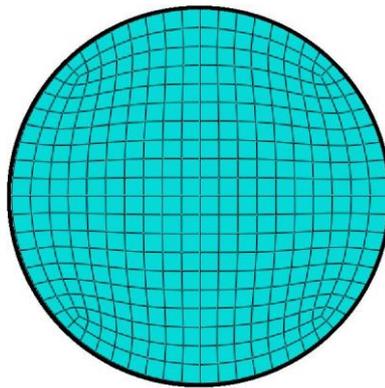


Figure 2.33. Maillage d'une plaque circulaire (384 quadrilatères).

Chapitre 2. Développement d'un élément fini quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse statique et des vibrations des plaques minces.

Tableau 2.23. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque circulaire encastrée ($h/2R=0.01$, $\nu=0.3$).

Modes	KSBQP	ANSP9 [18]	DSG3 [86]	ES-DSG3 [86]	ANS4 [19]	Irie, et al [98]
1	9.9326	10.2129	10.4182	10.3109	10.2572	10.2158
2	20.7457	21.3110	22.3362	21.6702	21.4981	21.2600
3	20.7493	21.3110	22.3555	21.6900	21.4981	21.2600
4	33.6744	34.7816	38.0399	36.3124	35.3941	34.8800
5	34.5219	34.7915	38.1428	36.3816	35.5173	34.8800
6	38.9027	39.6766	42.9671	41.3801	40.8975	39.7710
7	49.8777	50.8348	58.4283	54.7796	52.2054	51.0400
8	49.8859	50.8348	58.7024	54.8922	52.2054	51.0400
9	59.5726	60.6761	69.0108	64.6300	63.2397	60.8200
10	59.5843	60.6761	69.5195	65.1330	63.2397	60.8200

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un élément fini quadrilatère à quatre nœuds (KSBQP) a été formulé pour l'analyse statique et en vibration libre des plaques minces isotropes. L'élément possède trois degrés de liberté habituels à chaque nœud. Cet élément basé sur l'approche en déformation et la théorie des plaques de Kirchhoff a été enrichi par un champ de déformations d'ordre supérieur. La précision et l'efficacité de l'élément de plaque proposé ont été évaluées à travers plusieurs tests numériques approfondis des plaques minces avec différents cas de conditions aux limites, de chargements et de géométries.

Nous avons également testé l'élément KSBQP en vibrations libres à travers des tests standards. Les résultats obtenus sont comparés avec des solutions analytiques et ceux obtenus par d'autres solutions numériques données dans la littérature. Tous les résultats révèlent que l'élément proposé a une bonne convergence dans le cas de maillage grossier, insensible à la distorsion géométrique et il a une convergence rapide vers la solution exacte.

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

Sommaire

3.1 Introduction	50
3.2 Formulation de l'élément MSBQP	51
3.2.1 Dérivation du champ des déplacements.....	51
3.2.2 Evaluation des matrices élémentaires de rigidité et de masse	55
3.3 Validation numérique	55
3.3.1 Validation numérique en statique	56
3.3.2 Validation numérique en vibration libre	69
3.4 Conclusion	88

3.1 Introduction

Pendant des années, de nombreux travaux de recherche ont été menés sur l'analyse des vibrations libres des plaques en flexion. Au début, les méthodes analytiques étaient largement adoptées, mais dans le cas de formes compliquées, il est généralement difficile d'obtenir une solution analytique précise pour des structures de différentes dimensions, différentes charges et différentes propriétés de matériaux. Par conséquent, nous devons appliquer des méthodes numériques approchées pour obtenir des solutions appropriées de problèmes statiques et dynamiques.

La résolution par voie numérique de ces problèmes constitue la base d'une méthode communément appelée méthode des éléments finis (en abrégé M.E.F). L'un des domaines fertiles pour l'application de cette méthode est la mécanique des structures : barres, poutres, plaques et coques. De ce nombre, les plaques font l'objet de ce chapitre. De nombreuses recherches utilisent la théorie classique des plaques minces dans laquelle l'effet de déformation par cisaillement est ignoré. Par conséquent, les résultats évalués en utilisant la théorie classique des plaques minces peuvent ne pas être fiables lorsque la plaque devient plus épaisse. Les procédures de développement des éléments de plaque de Kirchhoff sont assez difficiles et plus compliquées [99].

Par contre, dans la théorie des plaques épaisses de Reissner-Mindlin, la flèche w et les rotations β_x, β_y sont définies indépendamment, de sorte que les influences de la déformation de cisaillement transverse peuvent être incluses, et seulement la continuité C^0 est requise lors de la formulation des fonctions d'interpolation des variables cinématiques. Par conséquent, la construction d'éléments de plaques épaisses est en effet plus facile que celle des éléments de plaques minces [100], et de plus en plus d'attention a été accordée au développement d'éléments de plaque en flexion basés sur la théorie des plaques de Reissner-Mindlin.

Dans de ce chapitre, un élément quadrilatère à quatre nœuds basé sur la théorie des plaques de Reissner -Mindlin et l'approche en déformation pour l'analyse des problèmes de plaque en flexion est proposé. Ce nouvel élément appelé **MSBQP** (**M**indlin **S**train **B**ased **Q**uadrilateral **P**late) qui contient trois degrés de liberté (w, β_x et β_y) par nœud est testé pour l'analyse statique et en vibration libre des plaques en flexion. Les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par d'autres types d'éléments finis et avec des solutions analytiques données dans la littérature.

3.2 Formulation de l'élément MSBQP

3.2.1 Formulation du champ des déplacements

L'élément développé est un élément de plaque basé sur la théorie de Reissner-Mindlin. Cet élément est un élément quadrilatère à quatre nœuds (figure 3.1) avec trois degrés de liberté par nœud (w , β_x et β_y).

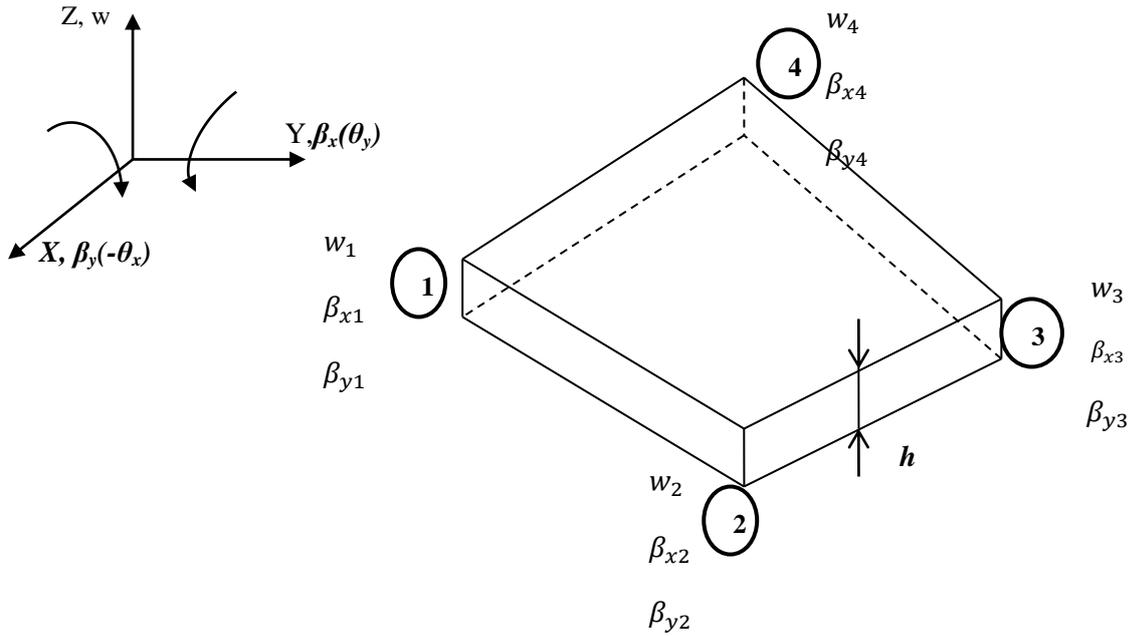


Figure 3.1. Élément quadrilatère MSBQP de plaque avec trois degrés de liberté par nœud.

Le champ des déplacements du corps rigide est obtenu en égalisant à zéro l'équation (1.4) des courbures $K_x, K_y, K_{xy}, \gamma_{xz}$ et γ_{yz} et après intégration, on obtient le champ des déplacements représentant les mouvements du corps rigide qui se présente comme suit :

$$\begin{aligned} w &= \alpha_1 - \alpha_2 x - \alpha_3 y \\ \beta_x &= \alpha_2 \\ \beta_y &= \alpha_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Cet élément possède trois degrés de liberté pour chacun des quatre nœuds de coin. Donc le champ des déplacements doit contenir douze constantes indépendantes. Les trois ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) sont utilisées pour la représentation des modes du corps rigide, il reste donc neuf constantes ($\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_{12}$) pour exprimer les déplacements dus aux déformations imposées à l'élément.

Ces neuf constantes indépendantes sont réparties entre les déformations données par l'équation (1.4) comme suit :

$$\kappa_x = \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_7 xy$$

$$\kappa_y = \alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_5 xy$$

$$\kappa_{xy} = \alpha_8 + \alpha_5(2x + y^2) + \alpha_7(2y + x^2) \quad (3.2)$$

$$\gamma_{xz} = \alpha_9 + \alpha_{10} y$$

$$\gamma_{yz} = \alpha_{11} + \alpha_{12} x$$

Les termes entre parenthèses dans l'équation (3.2) sont ajoutés afin de satisfaire les relations de compatibilité données par l'équation (2.1). En substituant l'équation (3.2) dans l'équation (1.4) et après intégration, les fonctions des déplacements sont données par :

$$\begin{aligned} w &= -\frac{x^2}{2} \alpha_4 - \left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^3}{6}\right) \alpha_5 - \frac{y^2}{2} \alpha_6 - \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{x^3 y}{6}\right) \alpha_7 - \frac{xy}{2} \alpha_8 + \frac{x}{2} \alpha_9 + \frac{xy}{2} \alpha_{10} + \frac{y}{2} \alpha_{11} + \frac{xy}{2} \alpha_{12} \\ \beta_x &= x \alpha_4 + \left(xy + \frac{y^3}{6}\right) \alpha_5 + \left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2}{2}\right) \alpha_7 + \frac{y}{2} \alpha_8 + \frac{1}{2} \alpha_9 + \frac{y}{2} \alpha_{10} - \frac{y}{2} \alpha_{12} \\ \beta_y &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{xy^2}{2}\right) \alpha_5 + y \alpha_6 + \left(xy + \frac{x^3}{6}\right) \alpha_7 + \frac{x}{2} \alpha_8 - \frac{x}{2} \alpha_{10} + \frac{1}{2} \alpha_{11} + \frac{x}{2} \alpha_{12} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Le champ final des déplacements est obtenu en ajoutant les équations (3.1) et (3.3) pour obtenir ce qui suit :

$$\begin{aligned} w &= \alpha_1 - \alpha_2 x - \alpha_3 y - \frac{x^2}{2} \alpha_4 - \left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^3}{6}\right) \alpha_5 - \frac{y^2}{2} \alpha_6 - \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{x^3 y}{6}\right) \alpha_7 - \frac{xy}{2} \alpha_8 + \frac{x}{2} \alpha_9 \\ &\quad + \frac{xy}{2} \alpha_{10} + \frac{y}{2} \alpha_{11} + \frac{xy}{2} \alpha_{12} \\ \beta_x &= \alpha_2 + x \alpha_4 + \left(xy + \frac{y^3}{6}\right) \alpha_5 + \left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2}{2}\right) \alpha_7 + \frac{y}{2} \alpha_8 + \frac{1}{2} \alpha_9 + \frac{y}{2} \alpha_{10} - \frac{y}{2} \alpha_{12} \\ \beta_y &= \alpha_3 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{xy^2}{2}\right) \alpha_5 + y \alpha_6 + \left(xy + \frac{x^3}{6}\right) \alpha_7 + \frac{x}{2} \alpha_8 - \frac{x}{2} \alpha_{10} + \frac{1}{2} \alpha_{11} + \frac{x}{2} \alpha_{12} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Les fonctions de déplacements équation (3.4) et les fonctions de déformations équation (3.2) sont données sous forme matricielle comme suit :

$$\{U\} = [P]\{\alpha\} \quad (3.5)$$

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{\alpha\} \quad (3.6)$$

Avec $\{\alpha_i\}^T = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{12}\}^T$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & -\frac{x^2}{2} & -\left(\frac{x^2y}{2} + \frac{xy^3}{6}\right) & -\frac{y^2}{2} & -\left(\frac{xy^2}{2} + \frac{x^3y}{6}\right) & -\frac{xy}{2} & \frac{x}{2} & \frac{xy}{2} & \frac{y}{2} & \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & xy + \frac{y^3}{6} & 0 & \left(\frac{y^2}{2} + \frac{yx^2}{2}\right) & \frac{y}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} & 0 & -\frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \left(\frac{x^2}{2} + \frac{xy^2}{2}\right) & y & xy + \frac{x^3}{6} & \frac{x}{2} & 0 & -\frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & xy & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x + y^2 & 0 & 2y + x^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Le champ des déplacements $\{U\}$ et le champ des déformations $\{\varepsilon\}$ sont:

$$\{U\} = \{W, \beta_x, \beta_y\}^T, \{\varepsilon\} = [\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T \quad (3.9)$$

La matrice de transformation $[C]$ qui relie les déplacements nodaux élémentaire $\{q_e\}$ aux douze constantes $\{\alpha\}$ peut être exprimé par:

$$\{q_e\} = [C]\{\alpha\} \quad (3.10)$$

Avec:

$$\{q_e\}^T = \{w_1, \beta_{x1}, \beta_{y1}, w_2, \beta_{x2}, \beta_{y2}, w_3, \beta_{x3}, \beta_{y3}, w_4, \beta_{x4}, \beta_{y4}\}$$

D'où:

$$[C] = \begin{bmatrix} P_1(x_1, y_1) \\ P_2(x_2, y_2) \\ P_3(x_3, y_3) \\ P_4(x_4, y_4) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Les sous matrices $[P_i(x_i, y_i)]$, calculées de l'équation (3.11) pour les coordonnées (x_i, y_i) , ($i=1, 2, 3, 4$), sont données comme suit:

$$[P_i(x_i, y_i)] = \begin{bmatrix} 1 & -x_i & -y_i & -\frac{x_i^2}{2} & -\left(\frac{x_i^2 y_i}{2} + \frac{x_i y_i^3}{6}\right) & -\frac{y_i^2}{2} & -\left(\frac{y_i^2 x_i}{2} + \frac{y_i x_i^3}{6}\right) & -\frac{x_i y_i}{2} & \frac{x_i}{2} & \frac{x_i y_i}{2} & \frac{y_i}{2} & \frac{x_i y_i}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & x_i y_i + \frac{y_i^3}{6} & 0 & \left(\frac{y_i^2}{2} + \frac{y_i x_i^2}{2}\right) & \frac{y_i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y_i}{2} & 0 & -\frac{y_i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \left(\frac{x_i^2}{2} + \frac{x_i y_i^2}{2}\right) & y_i & x_i y_i + \frac{x_i^3}{6} & \frac{x_i}{2} & 0 & -\frac{x_i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x_i}{2} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Le vecteur des constantes $\{\alpha\}$ est obtenu de l'équation (3.10) comme suit:

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{q_e\} \quad (3.13)$$

Nous substituons l'équation (3.13) dans les équations (3.5) and (3.6), on obtient:

$$\{U\} = [P][C]^{-1} \{q_e\} = [N] \{q_e\} \quad (3.14)$$

$$\{\varepsilon\} = [Q(x, y)][C]^{-1} \{q_e\} = [B] \{q_e\} \quad (3.15)$$

Avec:

$$[N] = [P][C]^{-1}; [B] = [Q(x, y)][C]^{-1} \quad (3.16)$$

La relation contraintes – déformations est donnée par:

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.17)$$

D'où:

$$\{\sigma\} = \{M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y\}^T$$

Et la matrice de rigidité $[D]$ est:

$$[D] = \begin{bmatrix} [D_f] & 0 \\ 0 & [D_c] \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Avec $[D_f]$ et $[D_c]$ sont, respectivement, la matrice de flexion et la matrice de cisaillement qui sont données comme suit :

$$[D_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; [D_c] = \frac{kEh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

3.2.2 Evaluation des matrices élémentaires de rigidité et de masse

Les matrices élémentaires de rigidité et de masse ($[K^e]$ et $[M^e]$) sont respectivement données comme suit :

$$[K^e] = \int_{S_e} [B]^T [D] [B] dS = [C]^{-T} \underbrace{\left(\int [Q]^T [D] [Q] \det(J) d\xi d\eta \right)}_{[K_0]} [C]^{-1} \quad (3.20)$$

$$[M^e] = \int_{S_e} [N]^T [T] [N] dS = [C]^{-T} \underbrace{\left(\int [P]^T [T] [P] \det(J) d\xi d\eta \right)}_{[M_0]} [C]^{-1} \quad (3.21)$$

Avec $[T]$ est la matrice contenant la masse volumique du matériau donnée comme suit :

$$[T] = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

La matrice de transformation $[C]$ reliant les douze degrés de liberté des quatre nœuds de l'élément aux douze constantes n'est pas singulière et par la suite les matrices élémentaires de rigidité et de masse $[K^e]$ et $[M^e]$ peuvent être évaluées numériquement. Ces matrices élémentaires sont ensuite assemblées pour obtenir les matrices globales de rigidité et de masse de la structure ($[K]$ et $[M]$). Ces dernières matrices sont utilisées dans l'équation du mouvement pour le système de vibration libre donné par :

$$\left([K] - \omega^2 [M] \right) \{q\} = 0 \quad (3.23)$$

Les matrices $[K^e]$ et $[M^e]$ données dans les équations (3.20) et (3.21) sont évaluées numériquement.

3.3 Validation numérique

Nous proposons de valider l'élément développé basé sur l'approche en déformation et la théorie de Reissner- Mindlin à travers une série de cas-tests standards des plaques en flexion. Ces tests ont été choisis pour montrer l'efficacité et la précision de l'élément **MSBQP** dans l'analyse statique et en vibration libre. Pour chaque cas-test, les résultats obtenus sont comparés, d'une part, aux solutions analytiques extraits de la littérature, et d'autre part, aux solutions numériques données par les éléments usuels existants.

3.3.1 Validation numérique en statique

3.3.1.1 Patch-test mécanique

Le patch test est introduit pour examiner la convergence des éléments finis. On vérifie si l'élément est capable de reproduire une distribution constante de toutes les quantités pour un maillage arbitraire des éléments finis. C'est un assemblage de cinq éléments quadrilatères qui modélisent une plaque rectangulaire (figure 3.2), de côtés $L=2a=40$ unités et $2b=20$ unités, reposant sur trois appuis ($w_1=w_2=w_3=0$). Cette plaque est sollicitée aux quatre coins de manière à générer une distribution (théorique) unitaire des efforts M_x , M_y et M_{xy} . On impose des sollicitations traduisant l'état des moments (ou de contraintes) constants.

- Les sollicitations sur le contour sont en accord avec le champ défini par $M_n=1$ (voir figure 3.2(a)) pour avoir $M_x=M_y=1$ partout voir figure 3.3(a) dans la plaque.
- Dans un second test les sollicitations sur le contour sont en accord avec le champ défini par $M_{ns}=1$ (voir figure 3.2(b)) pour avoir $M_{xy}=1$ partout voir figure 3.3(b) dans la plaque.

Les tests ont été effectués pour des rapports d'épaisseurs $L/h = 10$ et 100 unités. Les résultats de l'élément sont reportés dans le tableau 3.1. Ces résultats indiquent que l'élément MSBQP représente exactement l'état de contrainte constant pour les deux cas de charge.

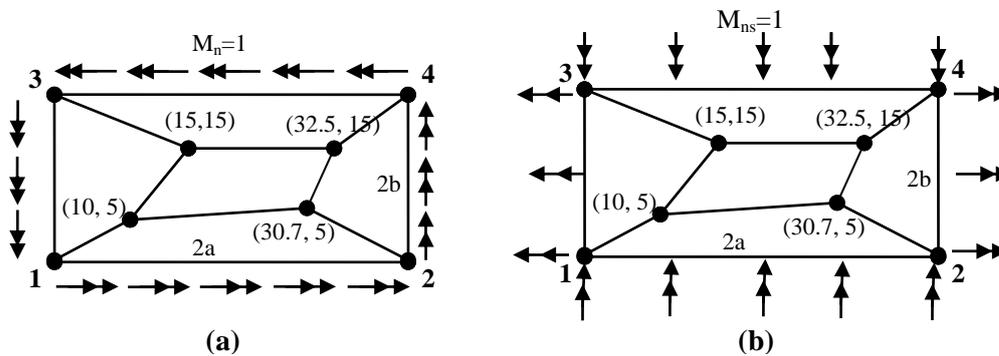


Figure 3.2. Sollicitations sur le contour reflétant l'état des contraintes constantes.

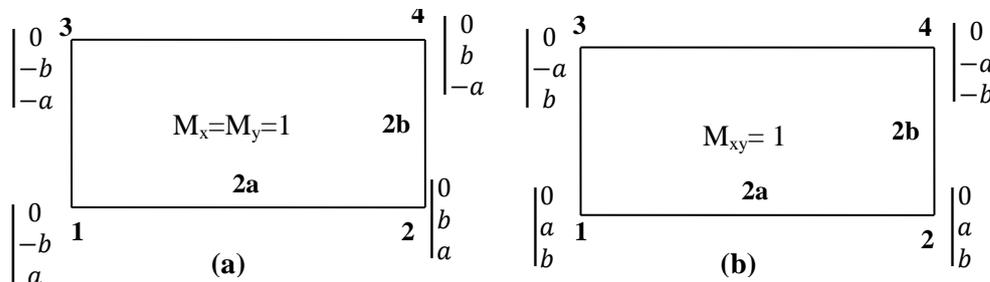


Figure 3.3. Charges nodales équivalentes.

Tableau 3.1. Résultats du Patch-test mécanique.

Charge appliquée	Moments dans la plaque	L/h	
		10	100
$M_n=1$	M_x	1	1
	M_y	1	1
$M_{ns}=1$	M_{xy}	1	1

3.3.1.2 Poutre console

Ce test permet de vérifier le comportement de notre élément en flexion simple en fonction de l'élanement (rapport L/h). À l'extrémité libre, la poutre est soumise selon la direction "Oz", à une charge ponctuelle d'intensité $P=0.1$. On simule un encastrement parfait à l'autre extrémité (voir figure 3.4). Dans ce test, le déplacement " w " du point "A" selon la direction "Oz" pour plusieurs valeurs du rapport " $L/h=1-100$ " est évalué pour montrer l'influence du cisaillement transversal sur le comportement de la poutre console. La solution théorique du déplacement est donnée avec $k=5/6$ comme suit :

$$W_t = \frac{4PL^3}{Ebh^3} \left[1 + \frac{1}{2k} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (3.24)$$

Les résultats obtenus pour le déplacement w du point A par l'élément MSBQP sont illustrés dans le tableau 3.2. Ces résultats montrent :

- Une convergence de l'élément MSBQP vers la solution analytique est obtenue pour 10 éléments et une absence totale du phénomène de blocage en cisaillement transversal qui apparaît lorsque l'épaisseur de la poutre devient petite par rapport à sa longueur.
- L'élément MSBQP donne de meilleurs résultats comparativement à certains éléments existants R4, DSTM et DKTM.
- L'élément R4 rectangulaire bilinéaire standard se comporte très mal dans le cas des plaques minces (phénomènes de blocage par cisaillement).

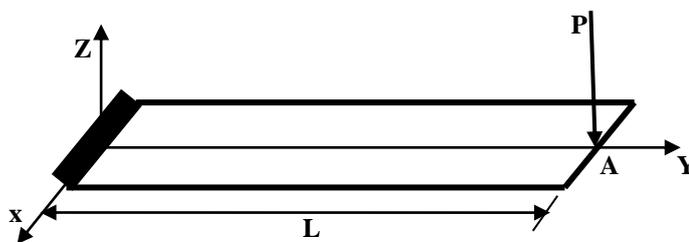


Figure 3.4. Poutre console soumise à une charge ponctuelle ($E=1.2 \times 10^6$, $L=10$, $b=1$, $\nu=0$).

Tableau 3.2. Déplacement du point A suivant l'axe "Oz" de la poutre console en flexion simple.

L/h	DSTM [66]	DKTM[66]	SBRP [66]	R4	MSBQP	Solution Théorique
1	5.1×10^{-7}	3.1×10^{-7}	5.3×10^{-7}	5.3×10^{-7}	5.3×10^{-7}	5.3×10^{-7}
2	2.9×10^{-6}	2.5×10^{-6}	3.1×10^{-6}	3.0×10^{-6}	3.1×10^{-6}	3.1×10^{-6}
3	9.0×10^{-6}	8.4×10^{-6}	9.6×10^{-6}	9.2×10^{-6}	9.6×10^{-6}	9.6×10^{-6}
4	2.0×10^{-5}	2.0×10^{-5}	2.2×10^{-5}	2.1×10^{-5}	2.2×10^{-5}	2.2×10^{-5}
5	4.0×10^{-5}	3.9×10^{-5}	4.3×10^{-5}	3.9×10^{-5}	4.3×10^{-5}	4.3×10^{-5}
10	-	-	3.3×10^{-4}	2.4×10^{-4}	3.3×10^{-4}	3.3×10^{-4}
100	0.31329	0.31327	0.33254	0.00783	0.33252	0.3333

3.3.1.3 Plaque carrée isotrope sous chargement uniforme

Il s'agit d'une plaque carrée isotrope de côté « L » et d'épaisseur « h » avec différentes conditions aux limites et diverses valeurs d'élancement (h/L). On doit vérifier la convergence de l'élément MSBQP par le calcul de la flèche centrale d'une plaque soumise à une charge uniforme (q=1). Il s'agit de tester le comportement de l'élément MSBQP pour une plaque carrée avec trois cas de conditions aux limites (encastree, SS1 ($w=0$) et SS2 ($w = \beta_s = 0$) et deux rapports (h/L= 0.1 et 0.01).

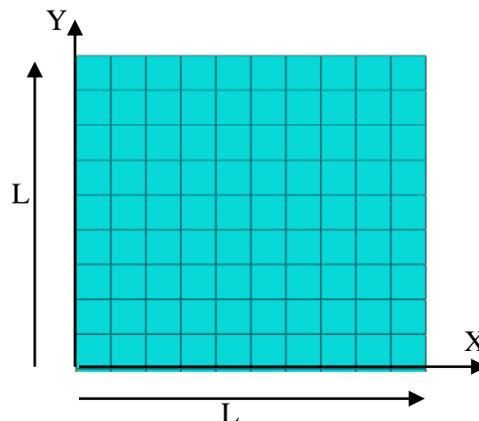


Figure 3.5. Plaque carrée avec un maillage de N×N (L=10, E=10.92, ν=0.3, k=5/6).

Les résultats obtenus du déplacement vertical au centre de la plaque sont comparés aux solutions de référence [101] et à ceux de l'élément SBRP [66] dans les tableaux 3.3 - 3.5 et sont tracés sous forme de graphes (voir figures 3.6 - 3.11).

À travers ces résultats, on constate que :

- Les résultats de l'élément MSBQP convergent vers la valeur exacte d'en bas (voir figures 3.6 - 3.11).

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

- Les résultats de l'élément proposé MSBQP sont plus précis que la réponse de l'élément SBRP [66] dans ce test pour les plaques épaisses et pour les plaques minces.
- Lorsque le maillage des éléments finis est raffiné, les résultats ont tendance à converger vers la solution exacte avec de meilleurs résultats obtenus par notre élément MSBQP.
- Une précision significative de l'élément MSBQP dans les maillages grossiers pour tous les cas de l'élanement ($h/L=0.1$ et 0.01) et de conditions aux limites est évidemment illustrée dans la résolution de ce problème.
- Une bonne performance de l'élément MSBQP pour un maillage grossier ($N = 4$) pour le cas des plaques épaisses par rapport à l'élément SBRP [66].

Tableau 3.3. Convergence du déplacement transversal $((wD/qL^4)100)$ d'une plaque encastree sous charge uniforme.

h/L	Eléments	Maillage					Solution de Réf [101]
		4×4	8×8	10×10	12×12	16×16	
0.01	MSBQP	0,0257	0,1156	0.1225	0.1246	0.1259	0.1267
	SBRP[66]	0.0027	0.0558	0.0860	0.1035	0.1179	
0.1	MSBQP	0,1303	0.1470	0.1483	0.1490	0.1497	0.1499
	SBRP[66]	0.0903	0.1384	0.1429	0.1453	0.1476	

Tableau 3.4. Convergence du déplacement transversal $((wD/qL^4)100)$ d'une plaque simplement supportée (SS1) sous charge uniforme.

h/L	Eléments	Maillage					Solution de Réf [101]
		4×4	8×8	10×10	12×12	16×16	
0.01	MSBQP	0.1173	0.3870	0.3998	0.4034	0.4056	0.4062
	SBRP[66]	0.0673	0.3115	0.3589	0.3802	0.3962	
0.1	MSBQP	0.4100	0.4446	0.4492	0.4521	0.4556	0.4617
	SBRP[66]	0.3587	0.4311	0.4407	0.4463	0.4524	

Tableau 3.5. Convergence du déplacement transversal $((wD/qL^4)100)$ d'une plaque simplement supportée (SS2) sous charge uniforme.

h/L	Eléments	Maillage					Solution de Réf [101]
		4×4	8×8	10×10	12×12	16×16	
0.01	MSBQP	0.1134	0.3867	0.3993	0.4029	0.4050	0.4064
	SBRP[66]	0.0523	0.3081	0.3572	0.3789	0.3952	
0.1	MSBQP	0.3932	0.4222	0.4242	0.4252	0.4261	0.4273
	SBRP[66]	0.3200	0.4048	0.4131	0.4175	0.4218	

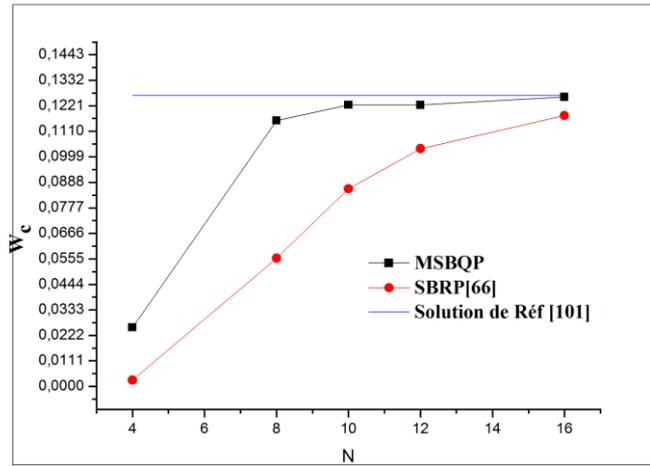


Figure 3.6. Convergence de la flèche $((WD/qL^4)100)$ au centre d'une plaque carrée encastré sous charge uniforme ($h/L=0.01$).

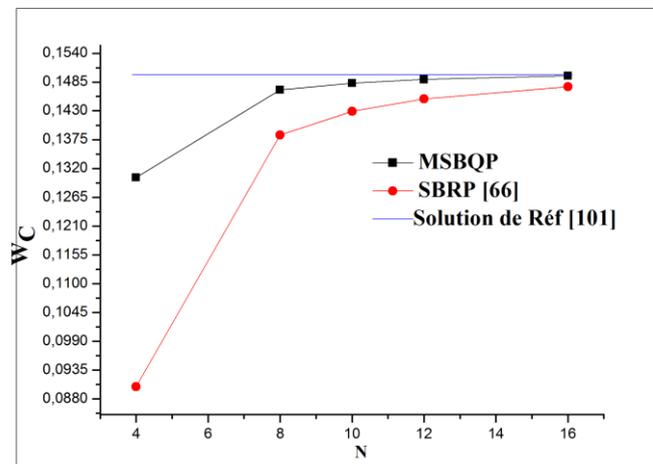


Figure 3.7. Convergence de la flèche $((WD/qL^4)100)$ au centre d'une plaque carrée encastré sous charge uniforme ($h/L=0.1$).

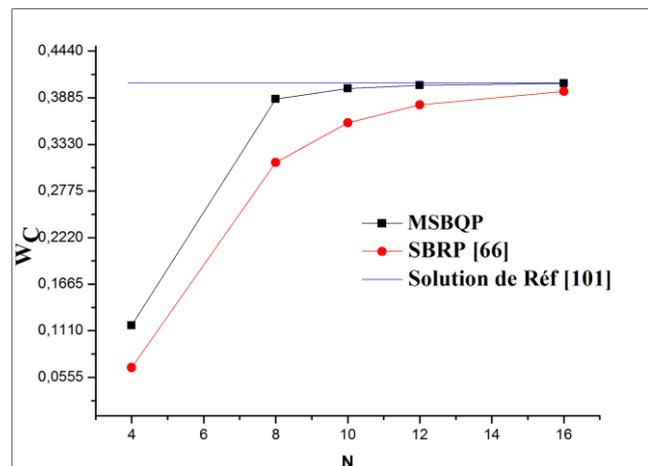


Figure 3.8. Convergence de la flèche $((WD/qL^4)100)$ au centre d'une plaque carrée simplement supportée SS1 sous charge uniforme ($h/L=0.01$).

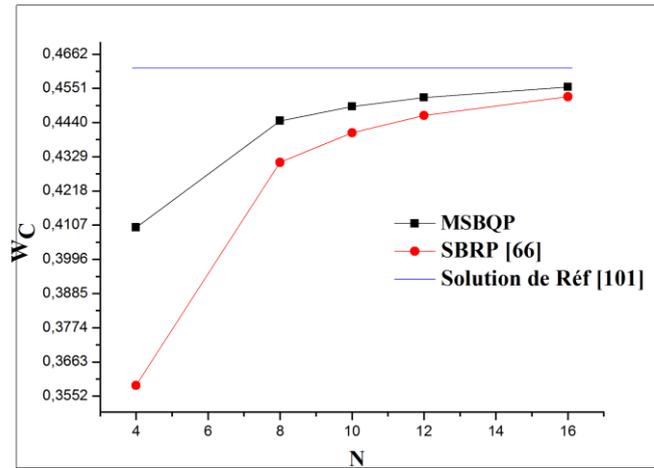


Figure 3.9. Convergence de la flèche $((wD/qL^4)100)$ au centre d'une plaque carré simplement supportée SS1 sous charge uniforme ($h/L=0.1$).

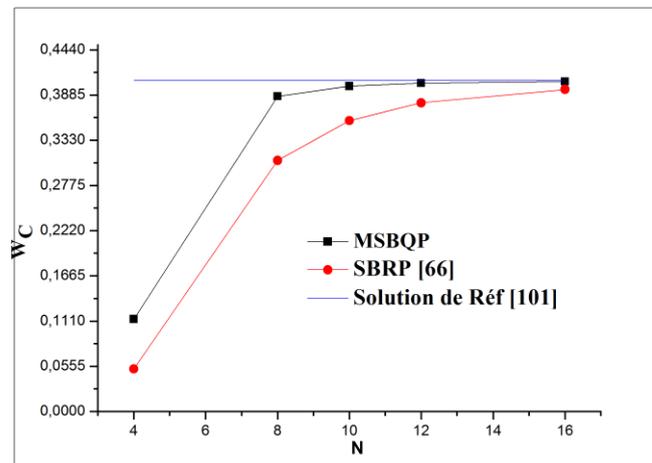


Figure 3.10. Convergence de la flèche $((wD/qL^4)100)$ au centre d'une plaque carré simplement supportée SS2 sous charge uniforme ($h/L=0.1$).

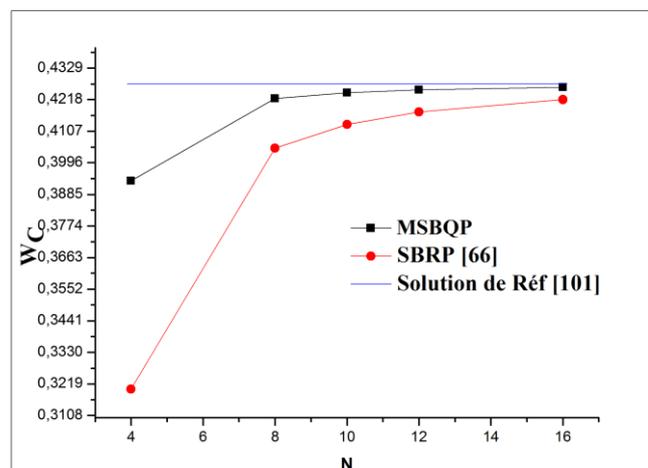


Figure 3.11. Convergence de la flèche $((wD/qL^4)100)$ au centre d'une plaque carrée simplement supportée SS2 sous charge uniforme ($h/L=0.1$).

3.3.1.4 Effet du cisaillement transversal sur la flèche

On considère une plaque carrée (figure 3.12) sous diverses conditions (de chargement et de conditions aux limites). L'effet du cisaillement transversal est étudié à travers une série de tests qui consiste à évaluer l'influence de l'élancement L/h d'une plaque carrée sur la flèche au centre C . De par la symétrie de la géométrie, du chargement et des conditions aux limites, seul le quart de la plaque est considéré. Le quart de la plaque est modélisé avec un maillage de (10×10) éléments. L'objectif de cet exemple est de vérifier l'absence de verrouillage en cisaillement (*shear locking*) dans l'élément MSBQP quand l'épaisseur de la plaque décroît par rapport aux autres dimensions.

Les résultats de la flèche au centre de la plaque illustrés dans le tableau 3.6 sont normalisés par rapport à la solution de la théorie des plaques minces de Kirchhoff obtenue par Timoshenko et Woinowsky-Krieger [1]. Le test de convergence de la flèche normalisée en fonction de l'élancement L/h est aussi illustré dans les figures 3.13 et 3.14. Nous remarquons que les éléments MSBQP et SBRP[66] donnent des résultats acceptables dans ce test pour les plaques épaisses et pour les plaques minces. L'élément MSBQP est libre de tout verrouillage en cisaillement. De plus, la solution analytique est atteinte pour un élancement $L/h=50$ dans tous les cas. On remarque aussi que l'élément standard R4 ne présente pas un bon comportement pour les cas des plaques minces. Les figures 3.13 et 3.14 illustrent le problème de blocage en cisaillement transversal CT pour l'élément standard R4.

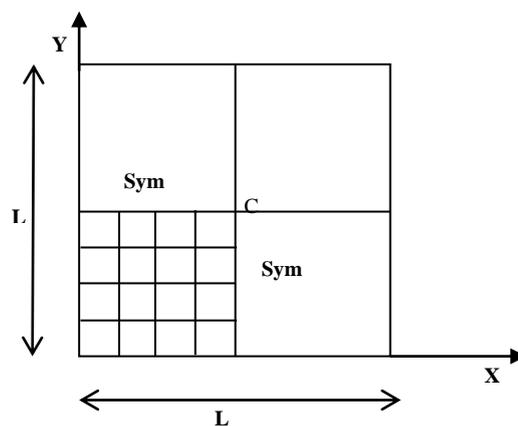


Figure 3.12. Plaque carrée sous différents chargement et différentes conditions aux limites.

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

Tableau 3.6. Effet de l'élancement L/h sur le déplacement central ($w_c/w_{Réf}$) d'une plaque carrée.

Plaque carrée	L/h						
	Elément	5	10	20	40	50	100
Charge répartie	SBRP[66]	1.3545	1.1215	1.0368	1.0049	0.9997	0.9885
	R4	1.3473	1.0872	0.9105	0.6413	0.5291	0.2171
	MSBQP	1,3607	1,1289	1,0452	1,0144	1,0098	1,0031
	$w_{Réf}[1]$	0.4062 × ($qL^2/100D$)					
Simplement appuyée	SBRP[66]	1.8167	1.2234	1.0548	1.0039	0.9964	0.9805
	R4	1.8157	1.1937	0.9282	0.6334	0.5188	0.2096
	MSBQP	1,8275	1,2350	1,0673	1,0178	1,0095	1,0018
	$w_{Réf}[1]$	1.16 × ($pL^2/100D$)					
Encastree	SBRP[66]	1.7115	1.1795	1.0372	0.9980	0.9920	0.9720
	R4	1.7070	1.1188	0.8664	0.5411	0.4260	0.1545
	MSBQP	1,7196	1,1897	1,0491	1,0125	1,0080	1,0019
	$w_{Réf}[1]$	0.126 × ($qL^2/100D$)					
Charge concentrée	SBRP[66]	2.4835	1.3570	1.0691	0.9934	0.9826	0.9556
	R4	2.4888	1.3256	0.9124	0.5550	0.4363	0.1583
	MSBQP	2,4985	1,3748	1,0886	1,0161	1,0073	0,9954
	$w_{Réf}[1]$	0.56 × ($pL^2/100D$)					

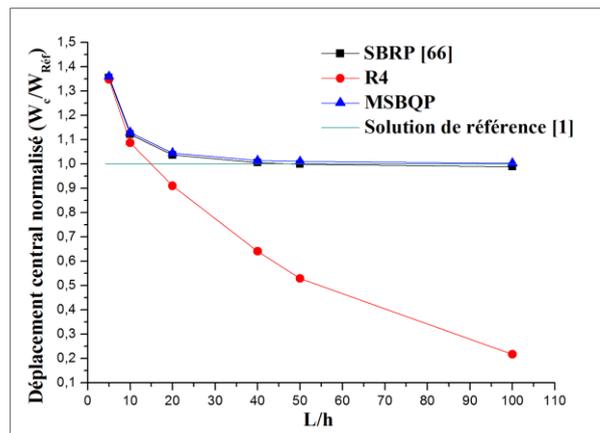


Figure 3.13. Convergence de la déflexion centrale normalisée en fonction de l'élancement L/h d'une plaque simplement appuyée soumise à une charge répartie.

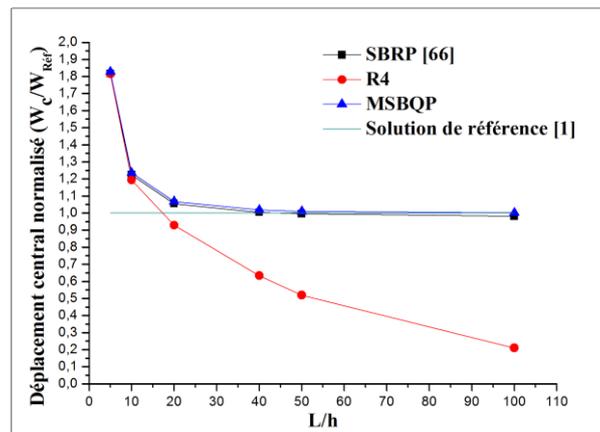


Figure 3.14. Convergence de la déflexion centrale normalisée en fonction de l'élancement L/h d'une plaque simplement appuyée soumise à une charge concentrée.

3.3.1.5 Plaque biaise de Morley

Ce problème est considéré comme sévère par l'ensemble des chercheurs à cause de la distorsion du maillage. Il s'agit d'une plaque biaise de Morley à 30° simplement appuyée ($W=0$) sur les quatre côtés de dimension $L \times L$ soumise à une charge uniforme (figure 3.15). Cette plaque est modélisée par quatre maillages avec $N = 4, 8, 16$ et 32 éléments par côté. Nous avons étudié ce problème en considérant deux valeurs de l'éclatement ($L/h=100$ et 1000).

La solution analytique de référence proposée par Morley [102] est obtenue en utilisant la théorie de Kirchhoff pour une plaque mince ($L/h = 1000$). Dans le cas d'une plaque épaisse ($L/h=100$), on a utilisé la solution d'élasticité tridimensionnelle obtenue par Babuska et Scapolla [103] comme une solution de référence.

Les valeurs du déplacement au centre de la plaque sont données dans le tableau 3.7 pour les épaisseurs $L/h=1000$ et 100 . Les courbes de convergence en fonction du nombre d'élément par côté sont illustrées dans la figure 3.16 pour l'épaisseur $h = 0.1$ et 1 . ($L/h = 1000$ et 100). Les résultats sont comparés avec les résultats numériques des éléments SBQP [68] et MITC4 [104]. On constate dans ce problème le bon comportement de l'élément MSBQP et ces résultats sont en bon accord avec les solutions analytiques [102] et [103]. L'élément MSBQP, pour les plaques minces, semble être plus performant que l'élément SBQP [68]. Cependant, pour les plaques épaisses, l'élément MSBQP produit des résultats plus précis que les éléments SBQP [68] et MITC4 [104].

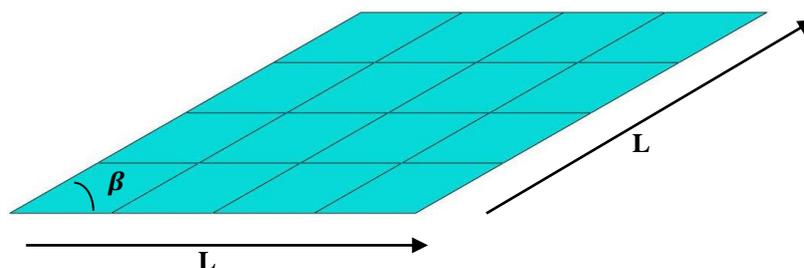


Figure 3 .15. Plaque biaise de Morley à 30° simplement appuyée ($w = 0$).

Tableau 3.7. Convergence du déplacement transversal d'une plaque biaise (Morley).

Maillage	$w = w_c (D/qL^4) \times 10^3$					
	L/h=100			L/h=1000		
	MSBQP	SBQP [68]	MITC4 [104]	MSBQP	SBQP [68]	MITC4 [104]
4×4	0.1708	0.231	0.359	0.0102	0.143	0.358
8×8	0.3324	0.323	0.357	0.1491	0.206	0.343
16×16	0.4025	0.380	0.383	0.2716	0.280	0.343
32×32	0.4187	0.405	0.404	0.3468	0.339	0.359
Réf [103]		0.4235		Réf [102]	0.408	

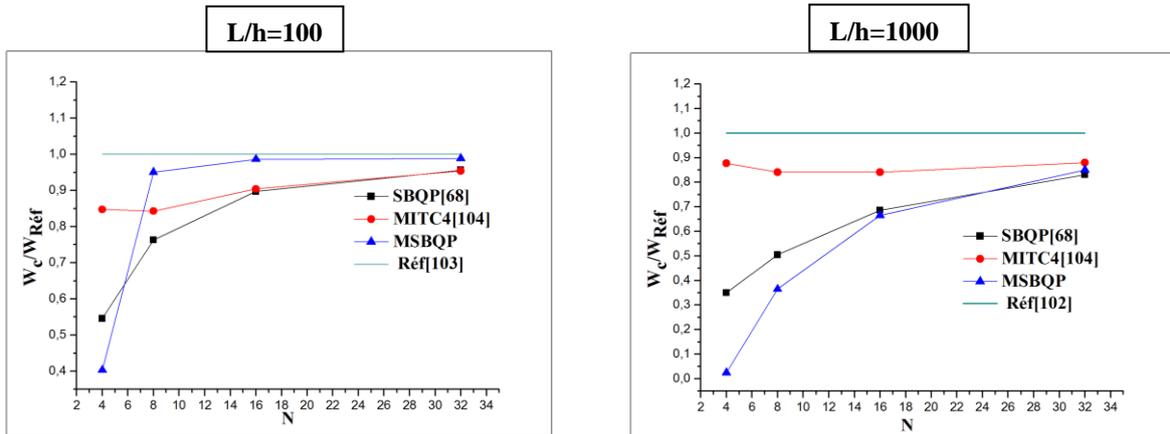


Figure 3.16. Convergence de la flèche au centre d'une plaque biaise (Morley).

3.3.1.6 Plaque biaise isotrope de Razzaque

Il s'agit, pour ce test, d'une plaque isotrope biaise (angle 60°) (figure 3.17) soumise à une charge uniforme q ayant deux appuis simples ($w=0, \beta_x=0$) et deux bords libres. La solution de référence [105], obtenue par un schéma de différences finies avec 16×16 éléments, est donnée par la formule :

$$w_{\text{Réf}} = 0.7945(qL^4 / 100D) \quad (3.25)$$

Les résultats des déplacements obtenus au centre de la plaque par l'élément MSBQP sont illustrés par le graphe de la figure 3.18. On remarque une convergence monotone pour l'élément MSBQP vers la solution analytique [105].

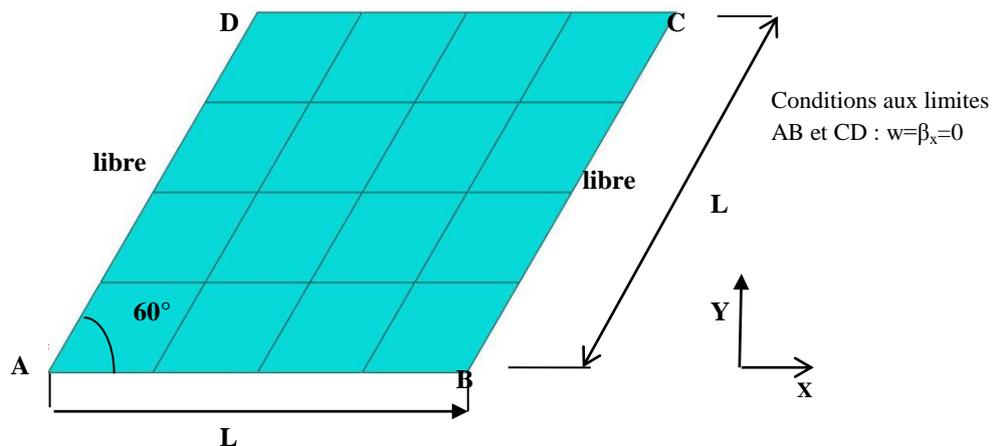


Figure 3.17. Plaque biaise(Razzaque) avec maillage $N \times N$
($E=10.92, L=100, \nu=0.3, k=5/6, q=1.0$).

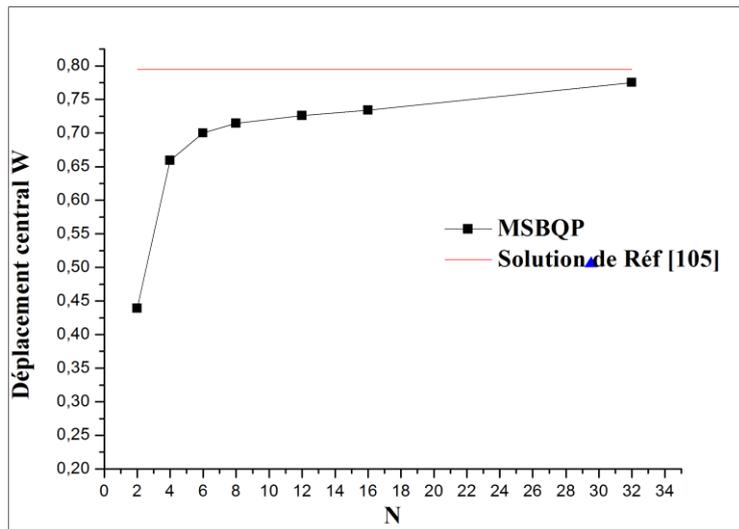


Figure 3.18. Convergence de la flèche au centre d'une plaque biaisée (Razzaque).

3.3.1.7 Plaque circulaire sous chargement uniforme

La figure 3.19 montre la géométrie et les maillages utilisés pour l'analyse d'une plaque circulaire isotrope pour les différentes épaisseurs ($h = 0.1, 1.0$ et 2.5). Les données de géométrie, de chargement et de matériau de ce problème sont montrées dans figure 3.19. Quatre types de maillages, utilisant un nombre défini d'éléments $N_{elt} = 3, 12, 48$ et 192 , ont été plus particulièrement étudiés pour l'élément MSBQP. La solution de référence est obtenue à partir de la théorie des plaques de Kirchhoff dans la référence [1].

Les résultats de ce problème sont reportés dans le tableau 3.8 et comparés avec la solution analytique. Le déplacement normalisé au centre de la plaque pour différents rapport d'épaisseurs ($R/h = 50, 5$ et 2) en fonction du nombre d'éléments est illustré dans les figures 3.20 et 3.21. La performance de notre élément est très satisfaisante comparons avec la solution analytique [1]. L'élément MSBQP converge plus rapidement pour les cas ou $R/h=5$ et 2 .

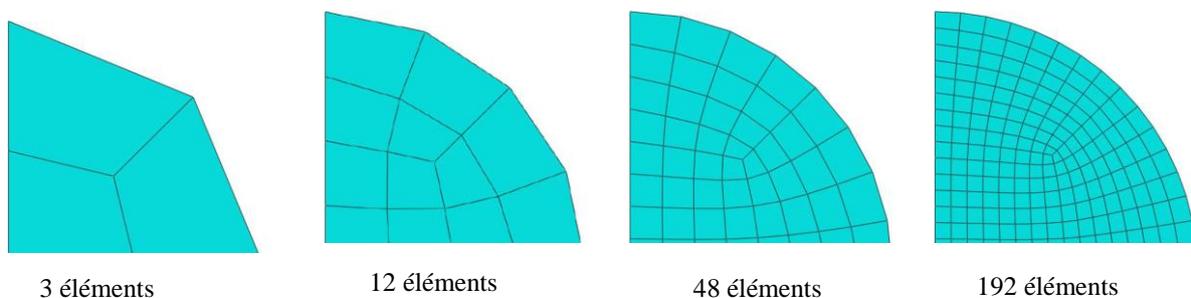


Figure 3.19. Maillage d'un quart de la plaque circulaire ($E=10.92, R=5, \nu=0.3, q = 1.0$).

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

Tableau 3.8. Convergence du déplacement central d'une plaque circulaire.

<i>Nelt</i>	Encastrée			Simplement appuyée		
	R/h=50	R/h=5	R/h=2	R/h=50	R/h=5	R/h=2
3	279,79	6,558	1,050	32549,49	35,398	2,875
12	6926,24	10,888	1,308	38223,69	40,249	3,189
48	9487,95	11,428	1,339	39464,96	41,274	3,250
192	9745,31	11,542	1,346	39748,06	41,540	3,266
Théorie [1]	9783.51	11.551	1.339	39831	41.599	3.262

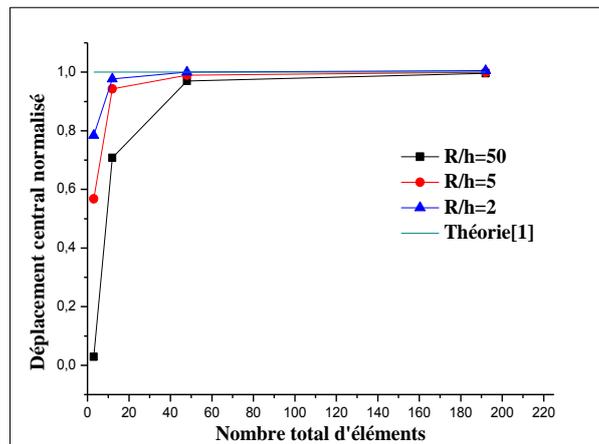


Figure 3.20. Convergence du déplacement normalisé du centre de la plaque circulaire encastree.

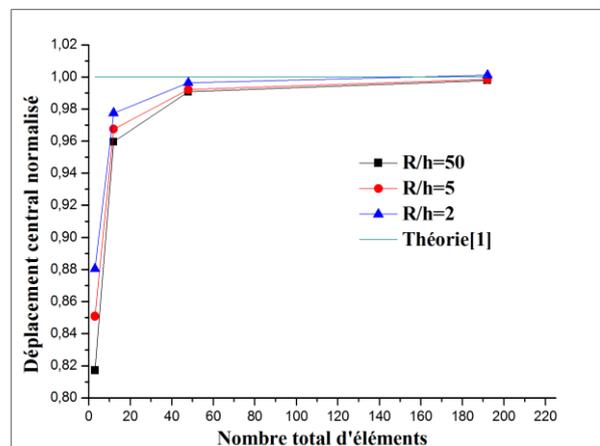


Figure 3.21. Convergence du déplacement normalisé du centre de la plaque circulaire simplement appuyee.

3.3.1.8 Une plaque courbée simplement supportée

Cet exemple a été traité par Coul et Das[106] qui ont proposé des solutions analytique et expérimentale pour une plaque courbée simplement supportée le long de deux rayons et libre le long des côtés courbés. Cette plaque est soumise à trois types de charges concentrer sur le

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

plan de symétrie, mais à différents emplacements A, B et C. Les données mécaniques sont indiquées sur la Figure 3.22. Cette plaque a été étudiée également par Allowood et Cornes [107] qui ont fourni des résultats numériques en considérant un maillage de 60 éléments hybrides quadrilatéraux à 12 ddl. À cause de la symétrie, seulement la moitié a été modélisée en 30 éléments quadrilatéraux.

Les résultats reportés sur les Figures 3.23-3.25 illustrent les variations des déplacements W le long du rayon central pour les trois cas de charges concentrées. Les résultats obtenus en utilisant l'élément MSBQP sont en bon accord avec les résultats expérimentaux et analytiques [106] pour les trois cas de chargement. Les résultats de l'élément MSBQP et l'élément de contrainte hybrides [107] sont presque identiques.

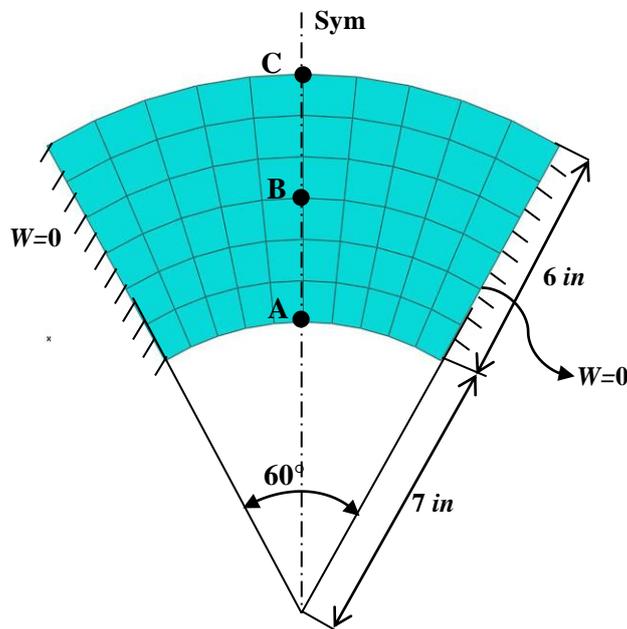


Figure 3.22. Plaque courbée ($E=4.6 \times 10^5 \text{ lb/po}^2, \nu=0.35, h=0.168 \text{ po}, P_A= P_B= P_C=1 \text{ lb}$).

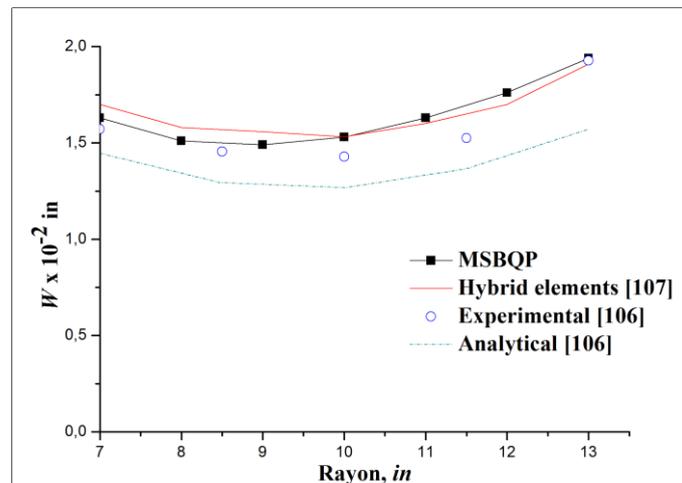


Figure 3.23. Plaque courbée, déplacement suivant ABC – Charge au point A.

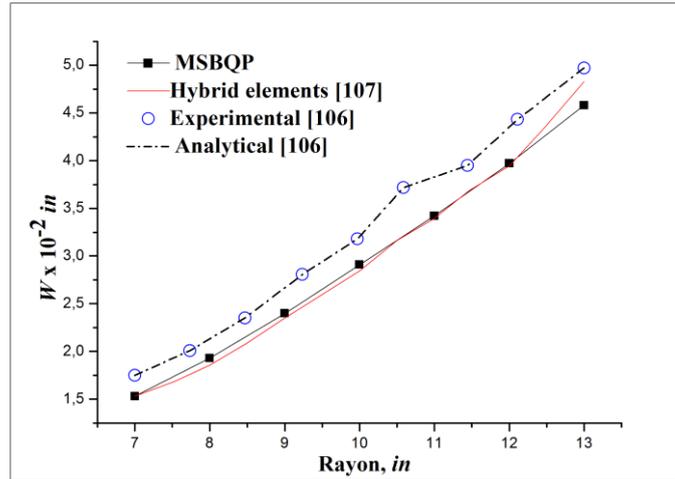


Figure 3.24. Plaque courbée, déplacement suivant ABC – Charge au point B.

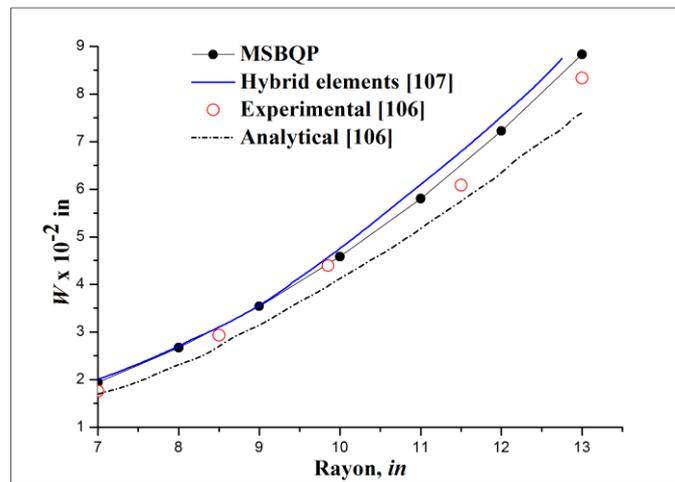


Figure 3.25. Plaque courbée, déplacement suivant ABC – Charge au point C.

3.3.2 Validation numérique en vibration libre

3.3.2.1 Vibration libre des plaques carrées

Premièrement, des tests de convergence de l'élément quadrilatéral MSBQP proposé sont effectués pour des plaques carrées (figure 3.26) simplement supportées ($w=\beta_s=0$) ou encastées avec deux rapports ($h/L=0,01$ et $0,1$) en utilisant cinq maillages 4×4 , 8×8 , 12×12 , 16×16 et 20×20 . Les résultats des fréquences non dimensionnelles $\lambda = \omega_{mn} L(\rho/G)^{1/2}$ sont présentés dans les tableaux 3.9 et 3.10. Les courbes de convergence en fonction du nombre d'éléments de chaque côté sont illustrées dans les figures 3.27 - 3.30 avec celles de l'élément R4 qui utilise une intégration complète 2×2 .

En outre, la fiabilité de l'élément MSBQP est également testée pour les six séries de diverses conditions aux limites avec un maillage 20×20 dans cet exemple: SSSS, CCCC,

SCSC, SCSF, SCSS et CCCF. Les premières fréquences sont énumérées dans les tableaux 3.11-3.16 et les trois premiers modes sont présentés dans les figures 3.31-3.36.

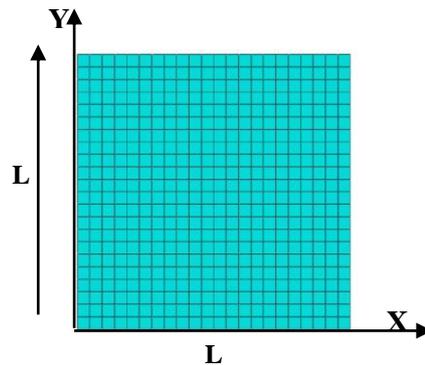


Figure 3.26. Plaque carrée avec un maillage $N \times N$.

Ces résultats ont été comparés avec des solutions analytiques MC[83] et Rayleigh-Ritz[108] et avec ceux obtenus par d'autres éléments (ANS4 [19], ANSP9 [18] et R4), où on peut conclure que :

- Les résultats obtenus par l'élément MSBQP sont en bon accord avec des solutions analytiques MC [83] et Rayleigh-Ritz[108] et avec des solutions numériques des autres éléments (ANS4 [19], ANSP9 [18]) dans les deux cas des plaques minces ou épaisses.
- L'élément MSBQP est libre de blocage de cisaillement transversal et qui a une précision excellente et insensible aux conditions aux limites contrairement aux résultats numériques obtenus par l'élément de plaque standard R4 qui présente un verrouillage de cisaillement transversal dans le cas des plaques minces.
- De ce test, les plaques avec épaisseur $h/L=0.01$ ont des fréquences plus petites que les plaques avec épaisseur $h/L=0.1$. L'élément MSBQP est plus performant que les éléments ANS4[19] et R4. Cependant, l'élément MSBQP donne des résultats moins précis que ceux obtenus par l'élément ANSP9[18].
- En augmentant le nombre d'éléments, les résultats convergent vers les valeurs exactes. Le taux de convergence du mode de vibration inférieur est plus rapide que celui du mode supérieur.

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

Tableau 3.9. Convergence des fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée encastree ($k=0.8601$, $\nu = 0.3$).

h/L	Mode	éléments	Maillage					Rayleigh-Ritz [108]
			4 × 4	8 × 8	12 × 12	16 × 16	20 × 20	
0.01	1	MSBQP	0.4037	0.1846	0.1772	0.1762	0.1759	0.1754
		R4	2.2367	1.0886	0.3717	0.5595	0.4593	
	2	MSBQP	0.8659	0.3897	0.3656	0.3613	0.3598	0.3576
		R4	5.1126	2.3366	1.5398	1.681	0.9550	
0.1	1	MSBQP	1.7562	1.6181	1.6023	1.5973	1.5950	1.5940
		R4	2.6160	1.8818	1.7246	1.6672	1.6401	
	2	MSBQP	3.7955	3.1598	3.0893	3.0665	3.0564	3.0460
		R4	5.5141	3.7139	3.3441	3.2118	3.1499	

Tableau 3.10. Convergence des fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée simplement appuyée avec $k=0.8333$, $\nu = 0.3$.

h/L	Mode	éléments	Maillage					MC [83]
			4 × 4	8 × 8	12 × 12	16 × 16	20 × 20	
0.01	1	MSBQP	0.1754	0.0977	0.0962	0.0962	0.0962	0.0963
		R4	0.9726	0.4756	0.3230	0.2499	0.2079	
	2	MSBQP	0.5157	0.2488	0.2416	0.2409	0.2407	0.2406
		R4	3.2443	1.4284	0.9448	0.7201	0.5917	
0.1	1	MSBQP	0.9335	0.9268	0.9285	0.9293	0.9296	0.930
		R4	1.3461	1.0421	0.9809	0.9590	0.9487	
	2	MSBQP	2.3526	0.2349	2.2253	2.2225	2.2213	2.219
		R4	3.9151	2.6437	2.4088	2.3261	2.2878	

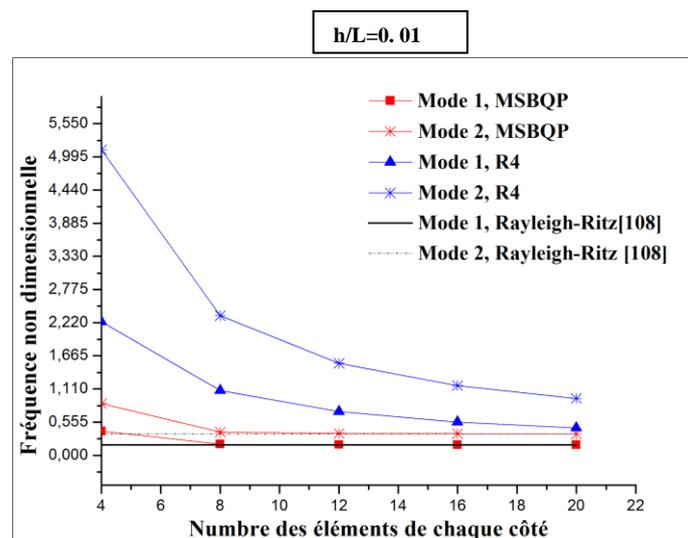


Figure 3.27. Convergence de la fréquence non dimensionnelle (λ) d'une plaque encastree ($h/L=0.01$).

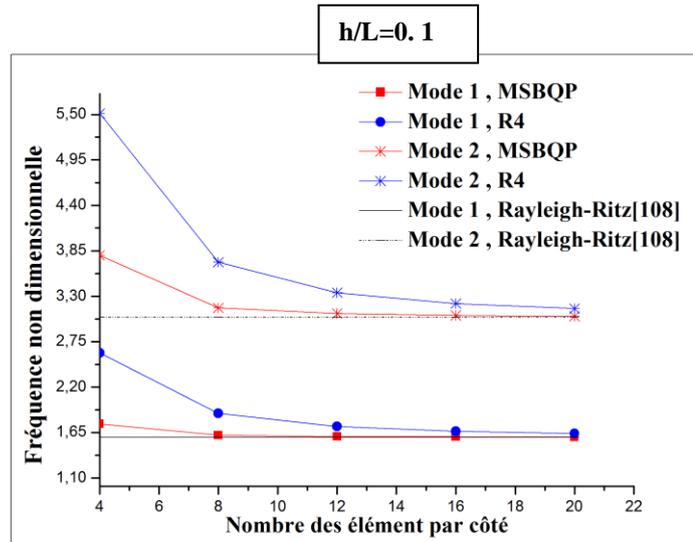


Figure 3.28. Convergence de la fréquence non dimensionnelle (λ) d'une plaque encastree ($h/L=0.1$).

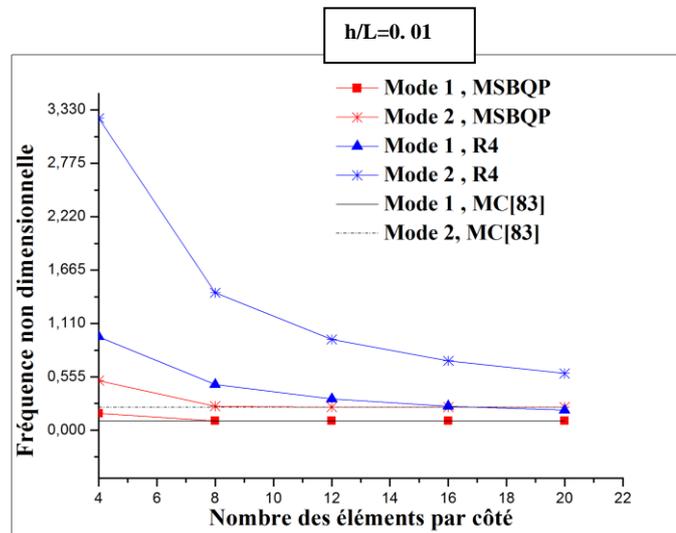


Figure 3.29. Convergence de la fréquence non dimensionnelle (λ) d'une plaque simplement appuyée ($h/L=0.01$).

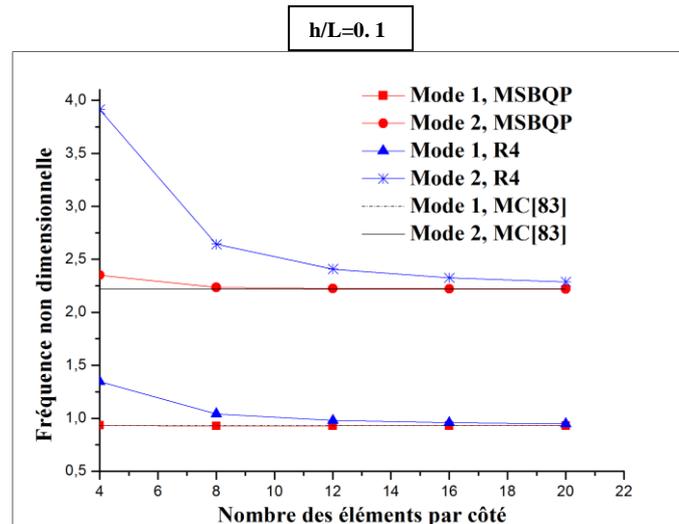


Figure 3.30. Convergence de la fréquence non dimensionnelle (λ) d'une plaque simplement appuyée ($h/L=0.1$).

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

Tableau 3.11. Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SSSS ($k=0.8333$, $\nu = 0.3$).

Mode	h/L	m	n	MC[83]	ANS4[19]	ANSP9[18]	R4	MSBQP
1	0.1	1	1	0.9300	0.9327	0.9303	0.9487	0.9296
2		2	1	2.2190	2.2394	2.2195	2.2878	2.2213
3		2	2	3.4060	3.4381	3.4054	3.4896	3.3989
4		3	1	4.1490	4.2364	4.1510	4.3352	4.1737
5		3	2	5.2060	5.2957	5.2053	5.3785	5.2056
6		4	1	6.5200	6.7564	6.5270	6.9065	6.6064
7		3	3	6.8340	6.9652	6.8307	7.0531	6.8183
8		4	2	7.4460	7.6736	7.4484	7.8001	7.4492
9		4	3	8.8960	9.1428	8.8892	9.2554	8.9000
10		5	1	9.1740	9.6690	9.1928	9.6830	9.3843
11		5	2	9.9840	10.4566	9.9924	10.6256	10.1377
12		4	4	10.7640	11.0955	10.7430	11.2122	10.7554
1	0.01	1	1	0.0963	0.0966	0.0963	0.2079	0.0962
2		2	1	0.2406	0.2430	0.2406	0.5917	0.2407
3		2	2	0.3848	0.3890	0.3847	0.8358	0.3836
4		3	1	0.4809	0.4928	0.4810	1.2930	0.4833
5		3	2	0.6249	0.6380	0.6247	1.4454	0.6234
6		4	1	0.8167	0.8551	0.8179	1.8958	0.8264
7		3	3	0.8647	0.8857	0.8639	2.3061	0.8586
8		4	2	0.9605	0.9991	0.9609	2.4148	0.9627
9		4	3	1.1997	1.2449	1.1988	2.7376	1.1915

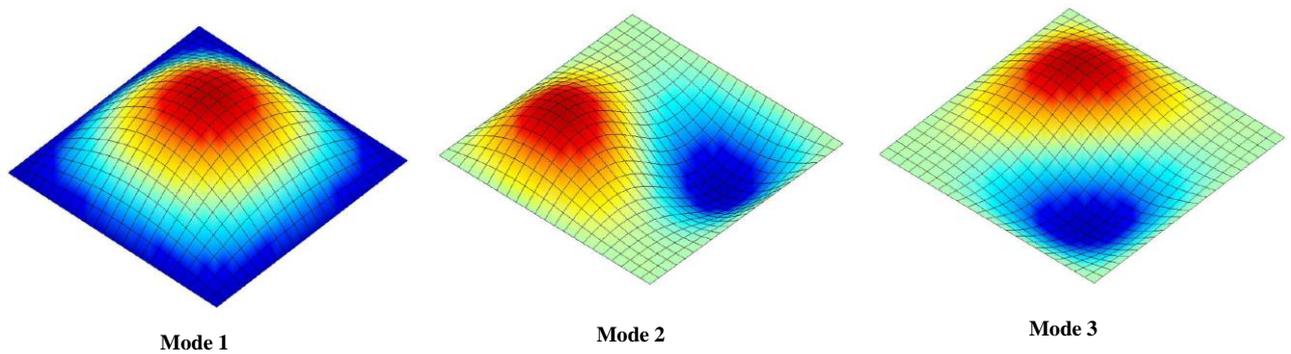


Figure 3.31. Trois premiers modes d'une plaque carrée SSSS avec $h/L=0.01$.

Tableau 3.12. Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée CCCC ($k=0.8601$, $\nu = 0.3$).

Mode	h/L	m	n	MC[83]	ANS4[19]	ANSP9[18]	R4	MSBQP
1	0.1	1	1	1.5940	1.5962	1.5913	1.6345	1.5950
2		2	1	3.0460	3.0683	3.0406	3.1349	3.0564
3		2	2	4.2850	4.2999	4.2653	4.3717	4.2743
4		3	1	5.0350	5.1275	5.0341	5.2315	5.0841
5		3	2	5.0780	5.1767	5.0817	5.2810	5.1339
6		4	1	—	6.1745	6.0891	6.2693	6.1136
7		3	3	—	7.6621	7.4459	7.8016	7.5590
8		4	2	—	7.8053	7.6934	7.9044	7.7052
9		4	3	—	8.4836	8.2911	8.6082	8.3574
10		5	1	—	8.5642	8.3669	8.6884	8.4405
11		5	2	—	9.9295	9.7322	10.0453	9.7612
1	0.01	1	1	0.1754	0.1765	0.1754	0.4531	0.1757
2		2	1	0.3576	0.3635	0.3576	0.9421	0.3598
3		2	2	0.5274	0.5359	0.5268	1.2734	0.5280
4		3	1	0.6402	0.6634	0.6415	1.7710	0.6494
5		3	2	0.6432	0.6666	0.6446	1.7733	0.6525
6		4	1	—	0.8267	0.8034	1.9885	0.8065
7		3	3	—	1.087	1.0296	2.5319	1.0482
8		4	2	—	1.1052	1.0705	2.9271	1.0697
9		4	3	—	1.2395	1.1818	3.0781	1.1914
10		5	1	—	1.2448	1.1868	3.0826	1.1933
11		5	2	—	1.5095	1.4436	3.4802	1.4418

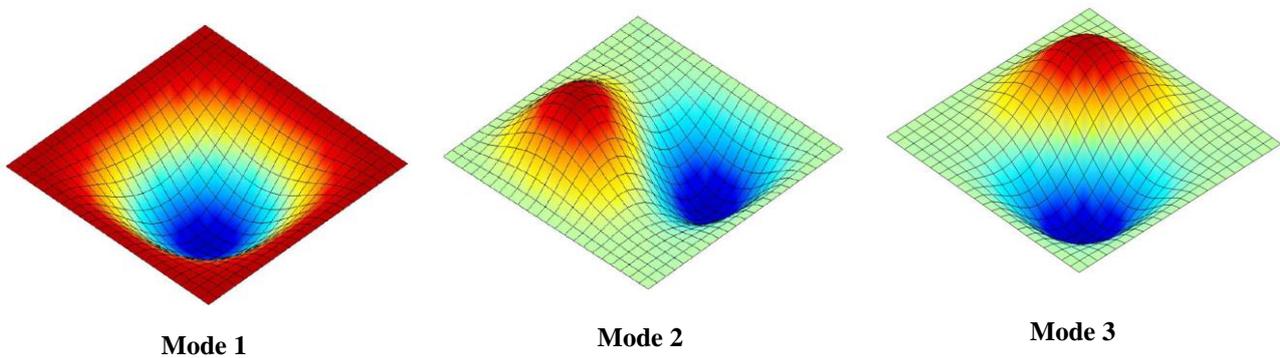


Figure 3.32. Trois premiers modes d'une plaque carrée CCCC avec $h/L=0.01$.

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

Tableau 3.13. Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SCSC ($k = 0.822$, $\nu = 0.3$).

Mode	h/L	m	n	MC[83]	ANS4[19]	ANSP9[18]	R4	MSBQP
1	0.1	1	1	1.302	1.3105	1.3002	1.3368	1.3023
2		2	1	2.398	2.4234	2.3941	2.4704	2.3963
3		2	2	2.888	2.9412	2.8852	2.9930	2.9021
4		3	1	2.852	3.9070	3.8394	3.9535	3.8422
5		3	2	4.237	4.3388	4.2328	4.4247	4.2549
6		4	1	4.939	5.1044	4.9394	5.1792	4.9954
7		3	3	—	5.5886	5.4571	5.6523	5.4620
8		4	2	—	5.9597	5.7913	6.0156	5.8183
9		4	3	—	6.8351	6.5611	6.9543	6.6402
10		5	1	—	7.4326	7.2173	7.4829	7.2239
11		5	2	—	7.6691	7.3119	7.7554	7.4430
12		4	4	—	7.8722	7.5854	7.9603	7.6322
13		—	—	—	8.4274	8.0746	8.4899	8.1633
14		—	—	—	9.4747	9.1256	9.5323	9.1511
1	0.01	1	1	0.1411	0.1419	0.1411	0.3524	0.1414
2		2	1	0.2668	0.2694	0.2668	0.6589	0.2670
3		2	2	0.3377	0.3438	0.3377	0.8961	0.3402
4		3	1	0.4608	0.4676	0.4604	1.0767	0.4609
5		3	2	0.4979	0.5098	0.4980	1.3268	0.5001
6		4	1	0.6279	0.6517	0.6287	1.6008	0.6377
7		3	3	—	0.6973	0.6820	1.7467	0.6813
8		4	2	—	0.7763	0.7529	1.8652	0.7572
9		4	3	—	0.8673	0.8301	2.2363	0.8382
10		—	—	—	1.0001	0.9705	2.3266	0.9692
11		—	—	—	1.0447	1.0052	2.5142	1.0068
12		—	—	—	1.0778	1.0158	2.9108	1.0383
13		—	—	—	1.2034	1.1416	2.9875	1.1561
14		—	—	—	1.3396	1.2623	2.9995	1.2816

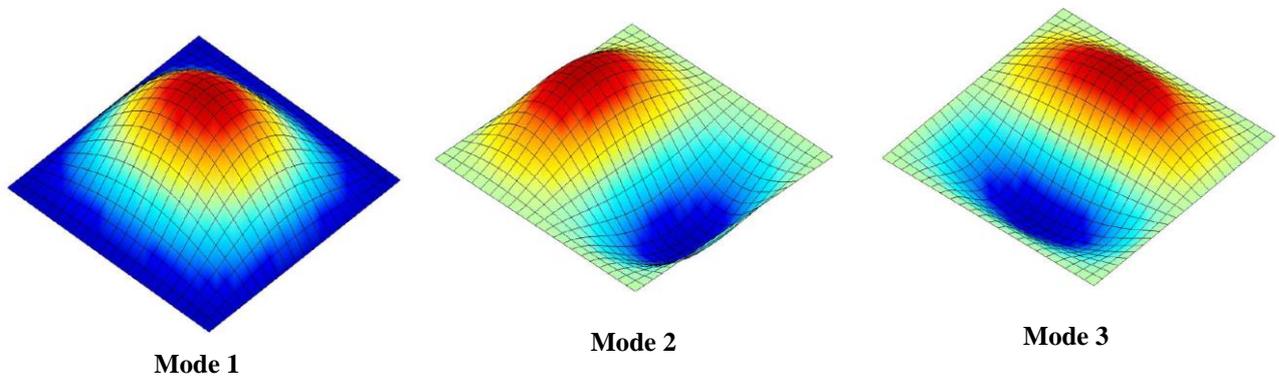


Figure 3.33. Trois premiers modes d'une plaque carrée SCSC avec h/L=0.1.

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

Tableau 3.14. Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SCSF ($k=0.822$, $\nu = 0.3$).

Mode	h/L	m	n	MC[83]	ANS4[19]	ANSP9[18]	R4	MSBQP
1	0.1	1	1	0.603	0.6001	0.5977	0.6148	0.5988
2		1	2	1.495	1.4949	1.4835	1.5185	1.4868
3		2	1	1.900	1.9297	1.8845	1.9639	1.8939
4		1	3	2.744	2.7555	2.7214	2.7945	2.7269
5		2	2	3.073	3.1107	3.0584	3.1689	3.0732
6		2	3	3.855	3.9354	3.8299	4.0351	3.8696
7		—	—	—	4.2601	4.1872	4.3051	4.1946
8		—	—	—	4.6775	4.5671	4.7520	4.5925
9		—	—	—	5.3070	5.1489	5.3998	5.1993
10		—	—	—	6.0373	5.8948	6.0912	5.9079
11		—	—	—	6.3133	6.1415	6.3793	6.1718
12		—	—	—	6.4988	6.2218	6.6341	6.3308
13		—	—	—	7.1360	6.8598	7.2435	6.9432
14		—	—	—	7.9114	7.5885	7.9615	7.7004
1	0.01	1	1	0.0622	0.0620	0.0619	0.1520	0.0620
2		1	2	0.1612	0.1620	0.1612	0.3578	0.1614
3		2	1	0.2045	0.2057	0.2033	0.5656	0.2042
4		1	3	0.3075	0.3099	0.3070	0.6765	0.3073
5		2	2	0.3528	0.3580	0.3527	0.9025	0.3543
6		2	3	0.4438	0.4536	0.4417	1.0964	0.4459
7		—	—	—	0.5094	0.5021	1.2744	0.5022
8		—	—	—	0.5571	0.5449	1.3473	0.5469
9		—	—	—	0.6606	0.6402	1.6300	0.6466
10		—	—	—	0.7593	0.7430	1.7518	0.7422
11		—	—	—	0.8119	0.7768	1.8819	0.7890
12		—	—	—	0.8142	0.7899	2.2667	0.7923
13		—	—	—	0.9161	0.8788	2.2903	0.8865
14		—	—	—	1.0638	1.0252	2.3471	1.0305

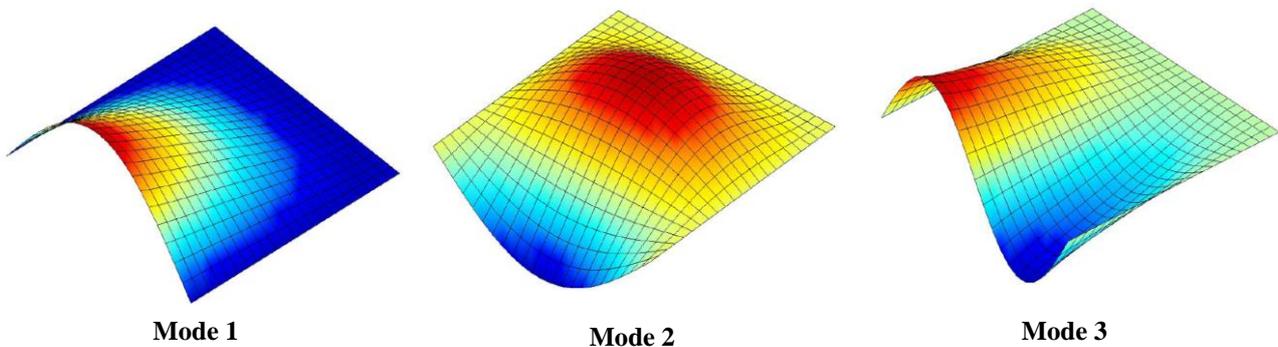


Figure 3.34. Trois premiers modes d'une plaque carrée SCSF avec $h/L=0.01$.

Tableau 3.15. Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée SCSS ($k=0.822$, $\nu = 0.3$).

Mode	h/L	m	n	MC[83]	ANS4[19]	ANSP9[18]	R4	MSBQP
1	0.1	1	1	1.092	1.0978	1.0918	1.1181	1.0924
2		1	2	2.298	2.3237	2.2965	2.3689	2.2990
3		2	1	2.543	2.5812	2.5420	2.6305	2.5507
4		1	3	3.616	3.6663	3.6108	3.7111	3.6095
5		2	2	4.187	4.2911	4.1859	4.3766	4.2089
6		2	3	4.543	4.6771	4.5434	4.7587	4.5823
7		—	—	—	5.4462	5.3216	5.5095	5.3255
8		—	—	—	5.6337	5.4910	5.6941	5.5054
9		—	—	—	6.8102	6.5365	6.9291	6.6162
10		—	—	—	7.2111	6.9192	7.2644	7.0127
11		—	—	—	7.2348	7.0137	7.3383	7.0246
12		—	—	—	7.7896	7.5063	7.8774	7.5530
13		—	—	—	8.0719	7.7554	8.1478	7.8228
14		—	—	—	9.3323	8.9942	9.3914	9.0149
1	0.01	1	1	0.1153	0.1158	0.1153	0.2679	0.1154
2		1	2	0.2521	0.2544	0.2519	0.6171	0.2521
3		2	1	0.2858	0.2897	0.2858	0.7347	0.2869
4		1	3	0.4199	0.4249	0.4195	0.9447	0.4191
5		2	2	0.4889	0.5004	0.4886	1.3059	0.4908
6		2	3	0.5533	0.5683	0.5516	1.5109	0.5568
7		—	—	—	0.6653	0.6511	1.5132	0.6502
8		—	—	—	0.7032	0.6854	1.6450	0.6866
9		—	—	—	0.8607	0.8235	2.0543	0.8319
10		—	—	—	0.9398	0.9136	2.3142	0.9109
11		—	—	—	0.9621	0.9142	2.4579	0.9283
12		—	—	—	1.0204	0.9815	2.5996	0.9833
13		—	—	—	1.0968	1.0478	2.6977	1.0553
14		—	—	—	1.2895	1.2404	2.8520	1.2343

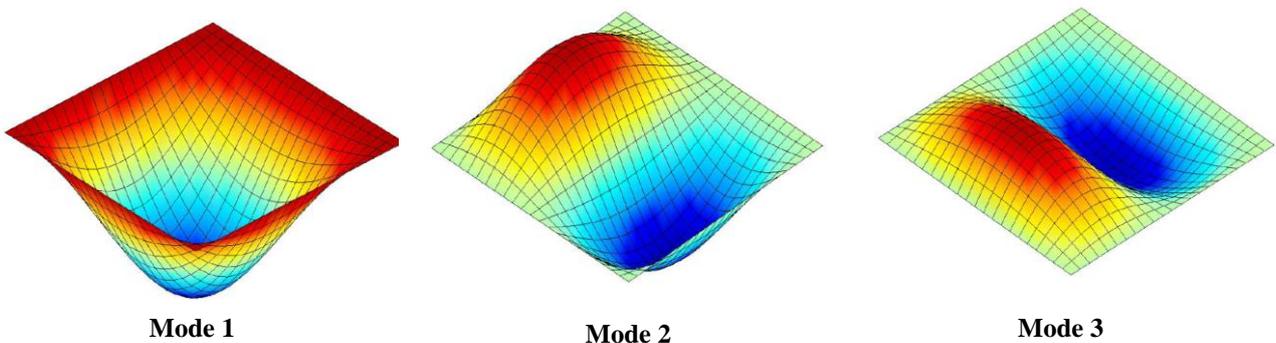


Figure 3.35. Trois premiers modes d'une plaque carrée SCSS avec h/L=0. 1.

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

Tableau 3.16. Fréquences non dimensionnelle (λ) d'une plaque carrée CCCF ($k = 0.8601$, $\nu = 0.3$).

Mode	h/L	m	n	MC[83]	ANS4[19]	ANSP9[18]	R4	MSBQP
1	0.1	1	1	1.089	1.0846	1.0807	1.1167	1.0865
2		1	2	1.785	1.7473	1.7438	1.7840	1.7492
3		2	1	2.673	2.6863	2.6569	2.7616	2.6684
4		1	3	3.216	3.2207	3.1967	3.2961	3.2117
5		2	2	3.318	3.3125	3.2902	3.3778	3.3094
6		2	3	4.615	4.5884	4.5579	4.6664	4.5731
7		—	—	—	4.8303	4.7328	4.9540	4.8103
8		—	—	—	5.3367	5.2457	5.4645	5.2959
9		—	—	—	5.3968	5.3129	5.5060	5.3714
10		—	—	—	6.4768	6.3925	6.5933	6.4269
11		—	—	—	6.5242	6.4456	6.6272	6.4832
12		—	—	—	7.3710	7.1454	7.5419	7.3093
13		—	—	—	7.8748	7.8748	8.0300	7.8025
14		—	—	—	7.9108	7.6851	8.0925	7.8100
1	0.01	1	1	0.1171	0.1174	0.1166	0.3214	0.1173
2		1	2	0.1951	0.1960	0.1949	0.4589	0.1954
3		2	1	0.3093	0.3143	0.3081	0.8780	0.3116
4		1	3	0.3740	0.3789	0.3736	0.9493	0.3753
5		2	2	0.3931	0.3984	0.3923	0.9564	0.3947
6		2	3	0.5695	0.5770	0.5674	1.2923	0.5690
7		—	—	—	0.6188	0.5955	1.7322	0.6070
8		—	—	—	0.6749	0.6547	1.7779	0.6610
9		—	—	—	0.7053	0.6825	1.7888	0.6912
10		—	—	—	0.8636	0.8402	2.0061	0.8433
11		—	—	—	0.8844	0.8591	2.0141	0.8637
12		—	—	—	1.0422	0.9800	2.5609	1.0071
13		—	—	—	1.0914	1.0361	2.8977	1.0526
14		—	—	—	1.1296	1.0684	2.9328	1.0903

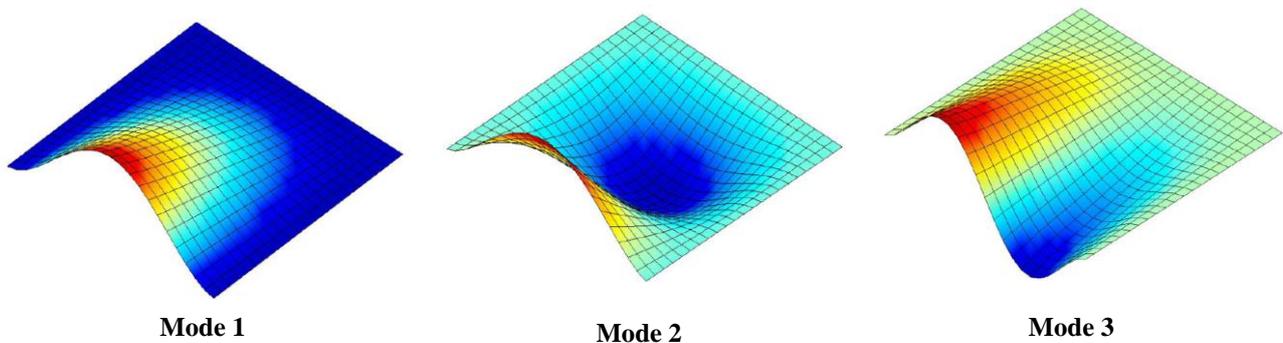


Figure 3.36. Trois premiers modes d'une plaque carrée CCCF avec $h/L=0.1$.

3.3.2.2 Vibration libre des plaques rectangulaires

Des calculs numériques ont été effectués, en vibration libre, pour différentes combinaisons de conditions aux limites encastrée(C), simplement appuyée(S) et libre(F) d'une plaque rectangulaire. Tous les résultats numériques, en utilisant un maillage 20×50, sont comparés aux solutions analytiques[109–111]. Les fréquences non dimensionnelles $\lambda=(\omega b^2/\pi^2)(\rho h/D)^{1/2}$ d'une plaque rectangulaire ($a/b=0.4$) sont indiquées dans le tableau 3.17 pour l'épaisseur relative $h/b = 0.1$ et 0.2 . Les quatre premiers modes propres obtenus par l'élément MSBQP d'une plaque SSSF sont représentés sur la figure 3.35. Les résultats obtenus de l'élément proposé MSBQP sont en excellent accord avec les solutions analytiques [109–111]

Tableau 3.17. Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque rectangulaire ($a/b=0.4$).

Conditions aux limites	h/b		Modes								
			1	2	3	4	5	6	7	8	
CCCC	0.1	MSBQP	10.731	12.372	15.275	19.227	22.758	23.930	24.079	26.281	
		Liew[109]	10.702	12.352	15.257	19.195	22.627	23.861	23.972	26.198	
		Xing[111]	10.748	12.494	15.478	19.457	22.710	24.130	24.230	26.615	
	0.2	MSBQP	6.9221	8.0049	9.7825	12.0496	13.1779	14.0574	14.6302	15.4229	
		Liew[109]	6.9109	7.9963	9.7716	12.0280	13.1280	14.0130	14.5860	15.3840	
		Xing[111]	6.9598	8.1342	9.9572	12.2220	13.2140	14.2380	14.7640	15.6820	
		Kolarevic[110]	6.9111	7.9973	9.7714	12.027	13.131	14.0130	14.5800	15.3800	
	SSSS	0.1	MSBQP	6.4764	8.8020	12.3657	16.8524	19.1183	20.7819	21.9904	23.4255
			Liew[109]	6.4733	8.8043	12.370	16.845	19.050	20.732	21.952	23.399
			Xing[111]	6.4733	8.8043	12.370	16.845	19.050	20.732	21.952	23.399
		0.2	MSBQP	5.1862	6.7218	9.9163	11.5001	12.7508	13.6548	14.3038	15.0672
			Liew[109]	5.1831	6.7212	8.9137	11.487	12.703	13.614	14.267	15.033
Xing[111]			5.1831	6.7212	8.9137	11.487	12.703	13.614	14.267	15.033	
Kolarevic[110]			5.1826	6.7206	8.9122	11.485	12.706	13.617	14.266	15.036	
SCSC		0.1	MSBQP	6.7330	9.5130	13.4010	18.0211	19.1750	20.9779	23.1451	23.7787
			Liew[109]	6.7300	9.5130	13.397	17.989	19.106	20.927	23.086	23.748
			Xing[111]	6.7683	9.6133	13.539	18.159	19.127	20.927	23.086	23.748
		0.2	MSBQP	5.2890	6.9597	6.1848	11.7213	12.7637	13.6955	14.4482	15.1307
			Liew[109]	5.2858	6.9578	9.1799	11.705	12.715	13.654	14.410	15.095
	Xing[111]		5.3265	7.0520	9.2945	11.818	12.726	13.690	14.514	15.156	
	Kolarevic[110]		5.2859	6.9587	9.1797	11.702	12.716	13.658	14.408	15.097	
	SSSF	0.1	MSBQP	5.7778	7.4222	9.9591	13.7292	18.3296	18.5591	19.6605	21.7327
			Liew[109]	5.7705	7.2381	9.9582	13.726	18.212	18.471	19.589	21.672
			Xing[111]	5.7872	7.2771	10.037	13.835	18.433	18.501	19.622	21.738
		0.2	MSBQP	4.6945	5.6875	7.4257	9.6766	12.2324	12.4399	13.0420	14.1545
			Liew[109]	4.6886	5.6837	7.4226	9.6690	12.211	12.382	12.991	14.110
Xing[111]			4.7028	5.7198	7.4990	9.7879	12.387	12.390	13.006	14.148	

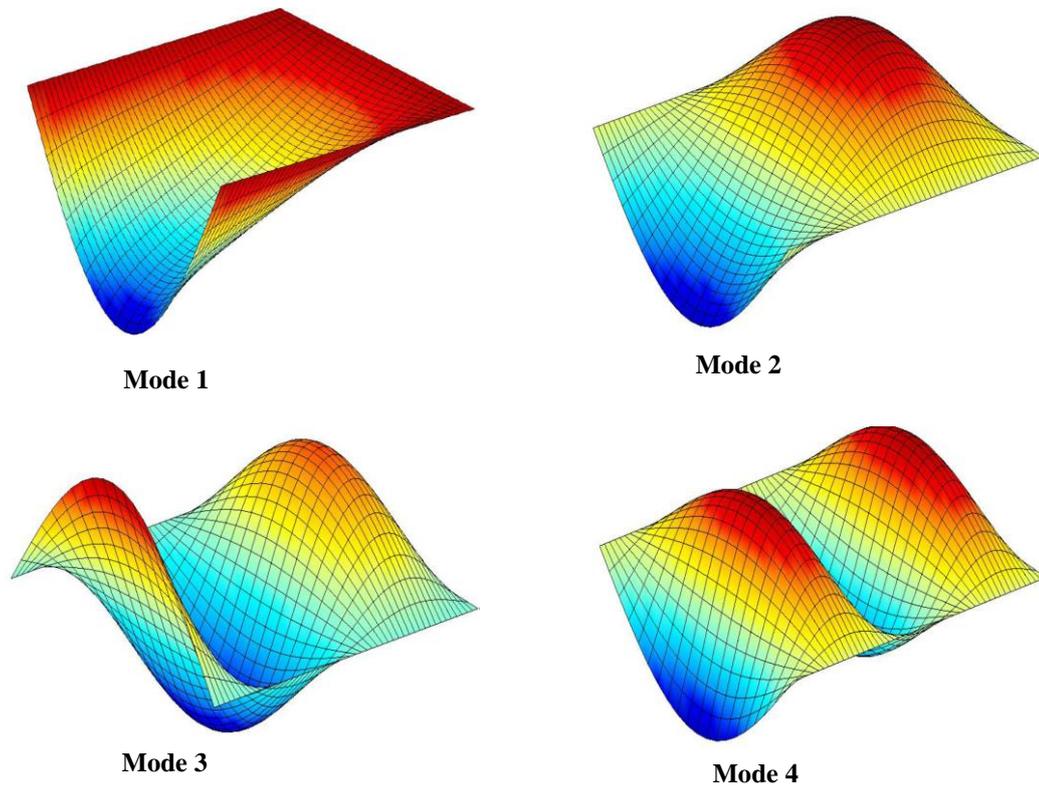


Figure 3.37. Quatre premiers modes propres d'une plaque rectangulaire SSSF.

3.3.2.3 Vibration libre des plaques parallélogrammes

Ce problème d'une plaque console biaise (figure 3.38) a pour objectif de tester l'élément MSBQP en vibration libre et en distorsion géométrique des éléments. Nous cherchons à déterminer les fréquences non dimensionnelles ($\lambda = \omega L^2 / \pi^2 (\rho h / D)^{1/2}$) de la plaque d'angle d'inclinaison ($\beta = 60^\circ$) avec deux rapports d'épaisseur h/L (0,001 et 0,2). Cette plaque est modélisée par un maillage 20×20 . Les six premières fréquences non dimensionnelles sont illustrées dans le tableau 3.18. Les résultats d'autres solutions numériques (DSG3, ES-DSG3 et MITC4[86]) et analytiques [87] servent à la comparaison.

D'après le tableau 3.18 des résultats, on peut dire que l'élément MSBQP se comporte bien dans les cas de distorsion de maillage. On peut constater que l'élément proposé possède de bonnes précisions comparées aux solutions analytiques [87]. L'élément MSBQP semble être plus performant que l'élément DSG3 [86] et moins précis que les éléments ES-DSG3 et MITC4[86] .

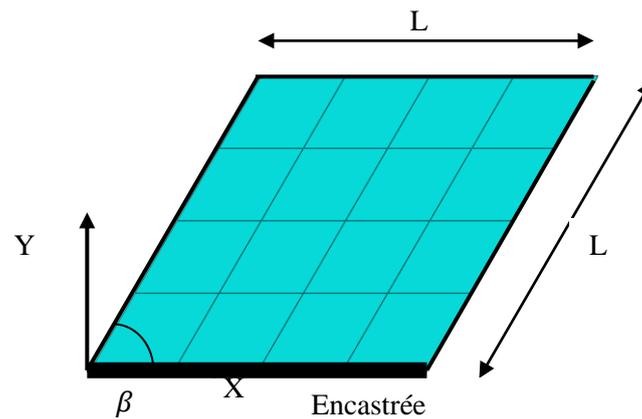


Figure 3.38. Plaque console biaisée avec un maillage $N \times N$.

Tableau 3.18. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque console biaisée (CFFF).

Modes	h/L	MSBQP	DSG3 [86]	ES-DSG3 [86]	MITC4 [86]	Solution exacte [87]
1	0.001	0.4004	0.4019	0.3981	0.3984	0.3980
2		0.9680	0.9949	0.9532	0.9552	0.9540
3		2.6046	2.6392	2.5692	2.5776	2.5640
4		2.6714	2.8569	2.6508	2.6395	2.6270
5		4.2752	4.3554	4.2030	4.2163	4.1890
6		5.2752	6.0079	5.2283	5.1728	5.1310
1	0.2	0.3779	0.3783	0.3772	0.3777	0.3770
2		0.8186	0.8187	0.8129	0.8190	0.8170
3		1.9907	1.9738	1.9573	1.9911	1.9810
4		2.1690	2.1982	2.1786	2.1748	2.1660
5		3.1192	3.1374	3.0999	3.1224	3.1040
6		3.7612	3.8689	3.8050	3.7835	3.7600

3.3.2.4 Vibration libre des plaques biaisées

Dans cet exemple, une étude approfondie sur la performance de l'élément développé à travers un test d'une plaque parallélogramme avec un angle d'inclinaison variable $0^\circ \leq \theta \leq 50^\circ$ est étudié en vibration libre avec un rapport d'épaisseur $h/L=0,01$. La géométrie de la plaque parallélogramme est illustrée sur la figure 3.39. La condition aux limites de la plaque S-C-S-C est utilisée dans cet exemple. Le résultat de huit fréquences non dimensionnelles $\lambda = \omega L^2 / \pi^2 (\rho h / D)^{1/2}$ en utilisant un maillage 22×22 est présenté dans le tableau 3.19 et comparé avec la solution de référence qui utilise la méthode de Ritz [88] (théorie des plaques minces).

Les modes de deux jusqu'à 5 des angles $\theta = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ$ et 50° sont représentés sur la figure 3.40. L'élément MSBQP présente de bonnes performances dans la plupart des angles d'inclinaison et ses résultats sont en bon accord avec la solution de référence [88] et l'élément

ANS4 [19]. Mais il y a une certaine différence entre les résultats de l'élément MSBQP et la solution de référence [88] dans le cas de la plaque avec grande inclinaison.

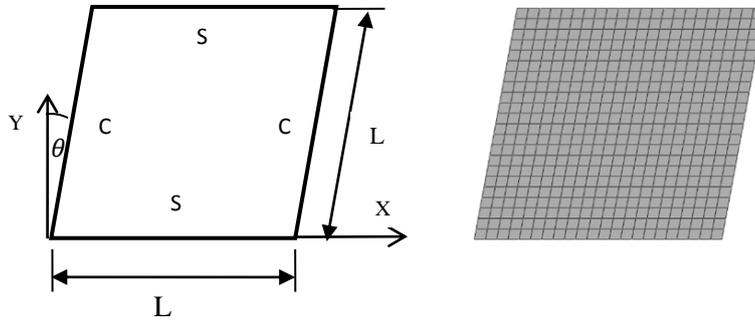


Figure 3.39. Géométrie de la plaque biaise et son FE maillage.

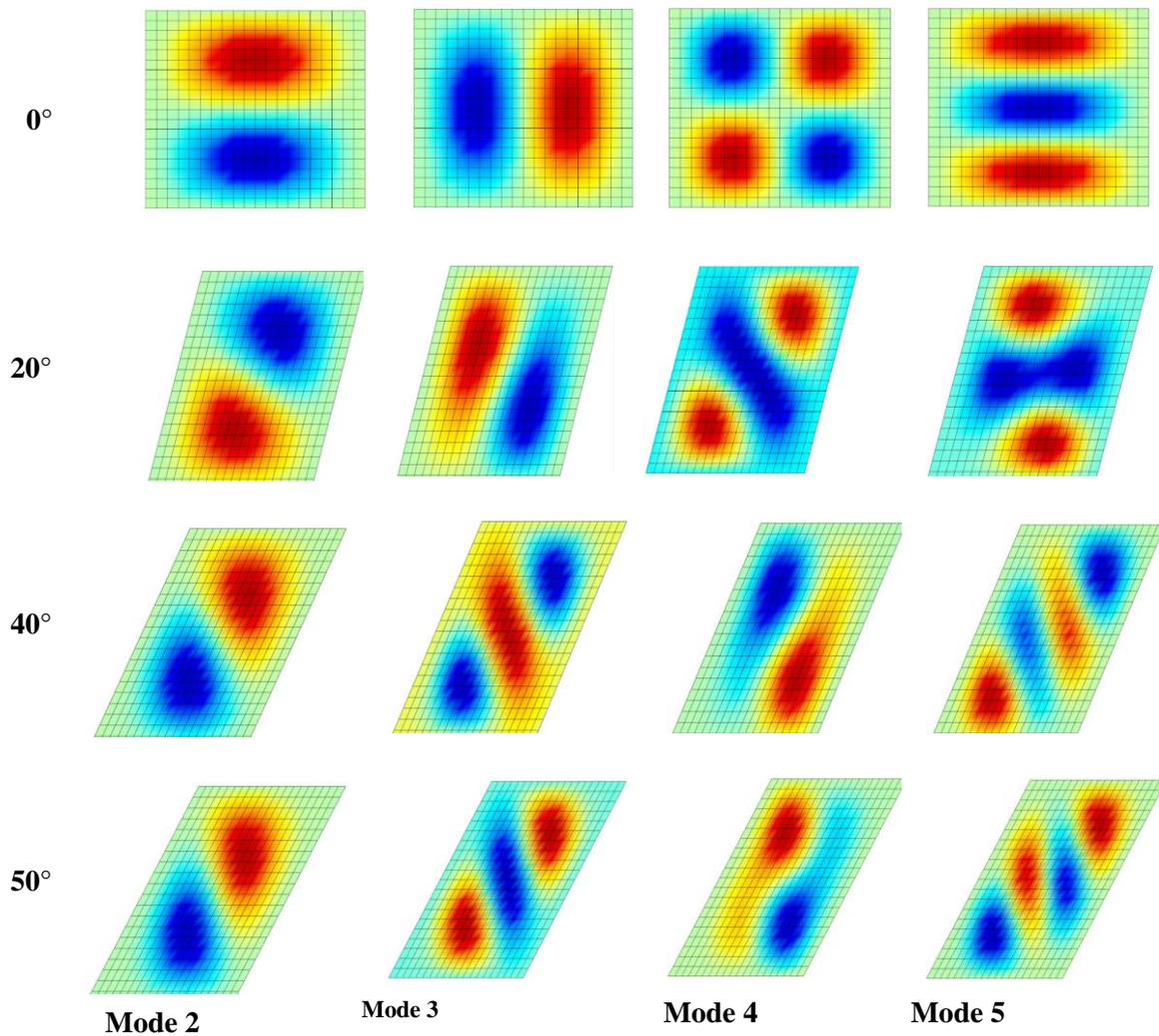


Figure 3.40. Modes propres des plaques biaises avec $h/L=0.01$.

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

Tableau 3.19. Les fréquences naturelles de la plaque biaise SCSC.

		Mode N							
θ°		1	2	3	4	5	6	7	8
0	Réf [88]	2.933	5.548	7.024	9.586	10.361	13.080	14.210	15.690
	ANS4[19]	2.947	5.593	7.138	9.708	10.586	13.531	14.477	16.119
	MSBQP	2.936	5.541	7.063	9.565	10.381	13.240	14.137	15.715
5	Réf[88]	2.953	5.570	7.084	9.557	10.500	13.180	14.140	15.870
	ANS4[19]	2.966	5.615	7.197	9.684	10.716	13.636	14.415	16.297
	MSBQP	2.955	5.563	7.121	9.536	10.514	13.343	10.069	15.894
10	Réf[88]	3.014	5.641	7.266	9.529	10.860	13.500	14.030	16.340
	ANS4[19]	3.025	5.682	7.375	9.658	11.063	13.956	14.307	16.751
	MSBQP	3.014	5.269	7.299	9.503	10.864	13.661	13.948	16.340
15	Réf[88]	3.121	5.765	7.579	9.552	11.390	13.980	14.080	16.960
	ANS4[19]	3.125	5.800	7.680	9.693	11.584	14.256	14.512	17.384
	MSBQP	3.115	5.746	7.604	9.530	11.380	13.886	14.213	16.947
20	Réf[88]	3.276	5.955	8.040	9.699	12.100	14.050	14.910	17.750
	ANS4[19]	3.275	5.981	8.127	9.188	12.274	14.319	15.336	18.187
	MSBQP	3.265	5.924	8.051	9.649	12.062	13.937	15.033	17.708
25	Réf[88]	3.497	6.226	8.678	9.949	13.000	14.300	16.100	18.800
	ANS4[19]	3.483	6.237	8.742	10.057	13.162	14.529	16.478	19.209
	MSBQP	3.473	6.179	8.666	9.881	12.934	14.135	16.167	18.677
30	Réf[88]	3.797	6.598	9.539	10.300	14.100	14.700	17.800	19.600
	ANS4[19]	3.765	6.591	9.565	10.436	14.298	14.921	17.991	20.415
	MSBQP	3.756	6.529	9.489	10.251	14.047	14.512	17.657	19.648
35	Réf[88]	4.203	7.104	10.700	10.900	15.400	15.700	19.600	20.900
	ANS4[19]	4.142	7.071	10.658	10.988	15.537	15.761	19.830	21.356
	MSBQP	4.135	7.005	10.583	10.7932	15.114	15.479	19.360	20.707
40	Réf[88]	4.753	7.791	11.800	12.200	16.400	17.600	21.300	23.300
	ANS4[19]	4.649	7.720	11.768	12.117	16.444	17.676	21.493	23.564
	MSBQP	4.646	7.651	11.563	12.046	16.012	17.4398	20.785	23.157
45	Réf[88]	5.510	8.740	12.900	14.400	17.800	20.300	23.000	27.300
	ANS4[19]	5.341	8.605	12.856	14.088	17.749	20.233	23.000	27.300
	MSBQP	5.347	8.536	12.648	14.026	17.333	19.835	22.416	26.562
50	Réf[88]	6.590	10.100	14.600	17.400	19.700	24.00	25.300	32.000
	ANS4[19]	6.306	9.835	14.387	16.797	19.642	23.723	25.336	31.449
	MSBQP	6.332	9.776	14.202	16.745	19.328	23.141	24.892	29.990

3.3.2.5 Vibration libre d'une plaque circulaire encastrée

Dans ce problème, une plaque circulaire encastrée sur son contour (figure 3.41). La plaque est modélisée par un maillage de 480 éléments en prenant en considération deux valeurs du rapport épaisseur-rayon $h/2R$ (0.01 et 0.1). Nous présentons dans les tableaux 3.20 et 3.21 les résultats numériques des dix premières fréquences non dimensionnelles $\lambda = \omega R^2 (\rho h/D)^{1/2}$. La figure 2.42 montre également les trois premiers modes de vibration pour la plaque circulaire encastrée avec $h/2R=0.01$. On remarque que les fréquences obtenues par l'élément MSBQP semblent tout à fait satisfaisantes.

Les résultats de l'élément MSBQP, dans le cas des plaques minces, sont comparables et proches des résultats de l'élément ANSP9 [18] qui est un élément très coûteux et meilleurs de ceux des éléments ANS4 [19], DSG3, ES-DSG3 [86]. Dans le cas des plaques épaisses, l'élément MSBQP offre de meilleurs résultats.

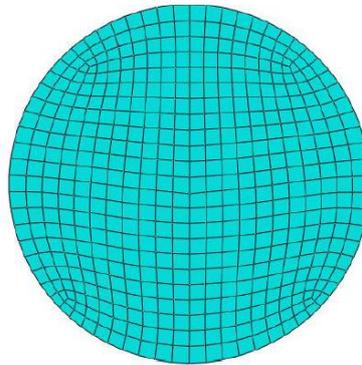


Figure 3.41. Maillage d'une plaque circulaire (480 quadrilatères).

Tableau 3.20. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque circulaire encastrée ($h/2R=0.01$, $k=\pi^2/12$, $\nu=0.3$).

Modes	MSBQP	ANSP9 [18]	DSG3 [86]	ES-DSG3 [86]	ANS4 [19]	Irie, et al [98]
1	10.2125	10.2129	10.4182	10.3109	10.2572	10.2158
2	21.3094	21.3110	22.3362	21.6702	21.4981	21.2600
3	21.3115	21.3110	22.3555	21.6900	21.4981	21.2600
4	34.8283	34.7816	38.0399	36.3124	35.3941	34.8800
5	35.2332	34.7915	38.1428	36.3816	35.5173	34.8800
6	39.9767	39.6766	42.9671	41.3801	40.8975	39.7710
7	51.2830	50.8348	58.4283	54.7796	52.2054	51.0400
8	51.3953	50.8348	58.7024	54.8922	52.2054	51.0400
9	61.2894	60.6761	69.0108	64.6300	63.2397	60.8200
10	61.8201	60.6761	69.5195	65.1330	63.2397	60.8200

Tableau 3.21. Fréquences propres non-dimensionnelles (λ) d'une plaque circulaire encastrée ($h/2R=0.1, k=\pi^2/12, \nu=0.3$).

Modes	MSBQP	MIN3 [86]	DSG3 [86]	ES-DSG3 [86]	ANS4 [19]	Leissa [10]
1	9.2523	9.96820	9.40710	9.32620	9.26050	9.2400
2	17.8179	20.3060	18.3363	18.0461	17.9469	17.834
3	17.8267	20.3256	18.3544	18.0673	17.9469	17.834
4	27.0587	32.7800	28.5094	27.8438	27.0345	27.214
5	27.2249	32.7905	28.5388	27.8856	27.6566	27.214
6	30.4368	37.1591	31.9501	31.1280	30.3221	30.211
7	37.0210	47.5437	39.9949	38.6936	37.2579	37.109
8	37.0258	47.5993	40.0120	38.7042	37.2579	37.109
9	42.8249	55.3530	45.6439	44.1130	43.2702	42.409
10	42.8734	55.6608	45.8554	44.3286	43.2702	42.409

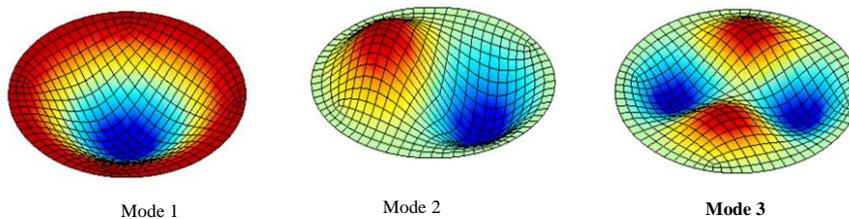


Figure 3. 42. Les trois premiers modes propres de la plaque circulaire encastrée avec $h/2R = 0.01$.

3.3.2.6 Vibration libre des plaques triangulaires

Nous considérons maintenant des plaques triangulaires console (CFF) de différentes géométries (voir la figure 3.43). La plaque triangulaire est discrétisée en 800 éléments quadrilatéraux. Deux différents rapports d'épaisseur $h/L=0.001$ et 0.2 et divers angles d'inclinaison $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ sont considérés. Les résultats numériques obtenus des six premières fréquences ($\lambda=\omega L^2/\pi^2(\rho h/D)^{1/2}$) sont présentés dans les tableaux 3.22 et 3.23. Dans ces deux tableaux, l'élément MSBQP est également comparé aux éléments finis (DSG3, MIN3 et ES-DSG3) [86] et ANS4 [19] et la méthode de pb2-Ritz Méthode Ritz [92].

D'après les tableaux 3.22 et 3.23, il est à nouveau vérifié que les résultats de l'élément MSBQP sont beaucoup plus proches des solutions de référence ANS4 [19] que (DSG3, MIN3 et ES-DSG3) [86]. L'élément MSBQP se comporte bien, que ce soit en plaques minces ou épaisses. On observe également que la plaque avec le rapport $h/L= 0.2$ produit des fréquences plus basses que celles calculées avec $h/L=0.001$ en raison des effets de la déformation de cisaillement et de l'inertie en rotation.

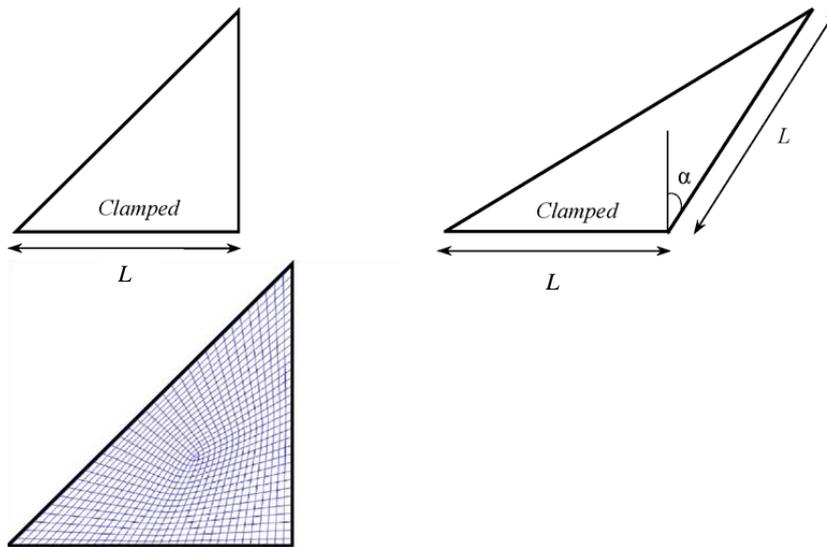


Figure 3.43. Maillage d'une plaque console triangulaire (800 éléments quadrilatères).

Tableau 3.22. Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque console triangulaire ($h/L=0.001$, $\nu=0.3$).

α	Eléments	Modes					
		1	2	3	4	5	6
0°	MSBQP	0.6245	2.3783	3.3129	5.7057	7.7717	10.1052
	MIN3 [86]	0.6272	2.4242	3.4344	5.9458	8.2460	11.0178
	DSG3 [86]	0.6288	2.4399	3.4796	5.9913	8.3737	11.2081
	ANS4[19]	0.6240	2.3790	3.3170	5.7240	7.7940	10.2000
	ES-DSG3[86]	0.6241	2.3970	3.3631	5.7976	7.9696	10.5356
	Pb2-Ritz [92]	0.6250	2.3770	3.3100	5.6890	7.7430	-
15°	MSBQP	0.5867	2.2015	3.3997	5.2991	7.3014	10.0570
	MIN3 [86]	0.5886	2.2229	3.5717	5.5286	7.7447	10.9544
	DSG3 [86]	0.5915	2.2360	3.6467	5.5686	7.8875	11.1572
	ANS4[19]	0.5830	2.1810	3.4130	5.3030	7.2890	10.0950
	ES-DSG3[86]	0.5843	2.1979	3.4937	5.3893	7.4745	10.4532
	Pb2-Ritz [92]	0.5860	2.1820	3.4120	5.2790	7.2630	-
30°	MSBQP	0.5775	2.1775	3.6686	5.5452	7.1703	10.6048
	MIN3 [86]	0.5866	2.2164	3.8656	5.8059	7.6697	11.5791
	DSG3 [86]	0.5928	2.2293	3.9729	5.8523	7.8772	11.9930
	ANS4[19]	0.5750	2.1740	3.6380	5.5340	7.1390	10.4770
	ES-DSG3 [86]	0.5795	2.1881	3.7620	5.6464	7.3608	10.9609
	Pb2-Ritz[92]	0.5780	2.1780	3.6570	5.5180	7.1090	-
45°	MSBQP	0.6143	2.3362	4.1877	6.3414	7.6817	11.5349
	MIN3 [86]	0.6125	2.4038	4.4237	6.9194	8.3447	12.7848
	DSG3 [86]	0.6265	2.4298	4.5709	6.9888	8.7055	13.4984
	ANS4[19]	0.5880	2.3240	4.1260	6.3810	7.6140	11.2240
	ES-DSG3 [86]	0.6001	2.3557	4.2652	6.6442	7.9210	11.8923
	Pb2-Ritz [92]	0.5930	2.3350	4.2220	6.4870	7.6090	-

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

Tableau 3.23. Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque console triangulaire ($h/L=0.2$, $\nu=0.3$).

α	Eléments	Modes					
		1	2	3	4	5	6
0°	MSBQP	0.5831	1.9021	2.4170	3.9633	4.9993	5.8754
	MIN3 [86]	0.6042	2.1109	2.7737	4.6581	6.1311	7.3208
	DSG3 [86]	0.5872	1.9529	2.4678	4.1305	5.2243	6.2886
	ANS4[19]	0.5820	1.9150	2.4280	3.9840	5.1080	5.9440
	ES-DSG3 [86]	0.5856	1.9376	2.4411	4.0678	5.1289	6.1359
	Pb2-Ritz [92]	0.5820	1.9000	2.4080	3.9360	-	-
15°	MSBQP	0.5449	1.7746	2.3930	3.6411	4.8158	5.5342
	MIN3 [86]	0.5656	1.9555	2.7772	4.2851	5.8857	6.9977
	DSG3 [86]	0.5478	1.8160	2.4429	3.8111	5.0253	6.0033
	ANS4[19]	0.5450	1.7640	2.4200	3.6080	4.8200	5.4310
	ES-DSG3 [86]	0.5457	1.8018	2.4121	3.7529	4.9317	5.8327
	Pb2-Ritz [92]	0.5440	1.7710	2.3860	3.6280	-	-
30°	MSBQP	0.5337	1.7756	2.4260	3.5763	4.7391	5.3484
	MIN3 [86]	0.5582	1.9551	2.8595	4.2605	5.8273	6.9945
	DSG3 [86]	0.5365	1.8126	2.4954	3.7549	4.9796	5.9219
	ANS4[19]	0.5320	1.7730	2.4370	3.5910	4.7650	5.3230
	ES-DSG3 [86]	0.5329	1.7963	2.4552	3.6902	4.8717	5.6942
	Pb2-Ritz [92]	0.5330	1.7720	2.4190	3.5650	-	-
45°	MSBQP	0.5403	1.8874	2.5026	3.7049	4.7310	5.3116
	MIN3 [86]	0.5724	2.1044	3.0165	4.5535	6.0525	7.2736
	DSG3 [86]	0.5448	1.9269	2.6246	3.9196	5.1474	5.9838
	ANS4[19]	0.5410	1.8840	2.5180	3.7480	4.7400	5.2920
	ES-DSG3 [86]	0.5380	1.9002	2.5682	3.8239	4.9806	5.6000
	Pb2-Ritz [92]	0.5400	1.8850	2.4890	3.6740	-	-

3.3.2.7 Vibration libre d'une plaque rectangulaire avec un trou central

Pour tester les performances de l'élément proposé dans un problème présentant une discontinuité interne, une plaque carrée avec un trou central (figure 3.44) est étudiée. La plaque est encastree sur deux côtés opposés et en appui simple sur les deux autres côtés (CSCS). Le trou a une forme carrée où ses côtés sont parallèles à ceux de la plaque. Ce test est traité expérimentalement par Aksu et Ali [95]. Les résultats des quatre premières fréquences $\lambda = \omega a^2 (\rho h / D)^{1/2}$, pour un maillage 24×24 , sont présentés dans le tableau 3.24 et comparés aux solutions expérimentales et numériques [93–96].

Le tableau 3.24 indique que les résultats de l'élément développé MSBQP sont très similaires à ceux donnés par Lam, et al [95] et sont comparables à d'autres solutions [93,94,96].

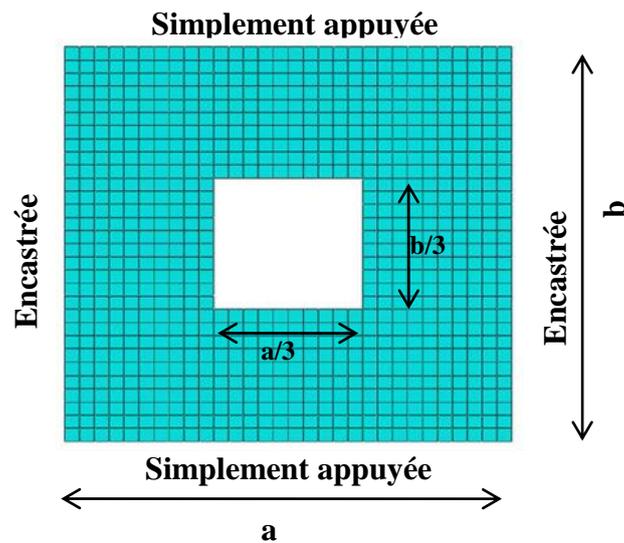


Figure 3.44. Plaque rectangulaire avec un trou central ($a/b=9/8$, $h/a=0.01$, $\nu=0.3$, $k=5/6$).

Tableau 3.24. Fréquences propres non dimensionnelles (λ) d'une plaque trouée CSCS.

Modes	MSBQP	LSWRI [96]	Lam, et al [95]	Aksu and Ali [93]	Liew, et al [94]	Résultat Expérimental [93]
1	34.2542	32.5421	34.04	33.22	32.4250	33.83
2	55.1134	58.1577	54.57	53.01	53.4260	53.99
3	65.0006	65.2573	65.05	61.91	62.3530	62.49
4	96.0411	96.8386	95.38	91.87	94.8390	95.03

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, un élément fini quadrilatère à quatre nœuds (MSBQP), basé sur la théorie de Reissner-Mindlin et l'approche en déformation, a été formulé pour l'analyse statique et en vibration libre des plaques isotropes. L'élément possède trois degrés de liberté habituels à chaque nœud. La précision et l'efficacité de l'élément de plaque proposé ont été évaluées à travers plusieurs tests numériques approfondis avec différents cas de conditions aux limites, de chargement et de géométrie. Les résultats obtenus sont comparés avec des solutions analytiques et ceux obtenus par d'autres solutions numériques données dans la littérature.

Afin d'étudier les caractéristiques vibratoires des plaques, un élément de plaque est développé. Nous pouvons constater à travers la série de tests effectués que l'élément (MSBQP) présente les caractéristiques suivantes :

- Tous les résultats révèlent que l'élément proposé a une bonne convergence dans le cas de maillage grossier, insensible à la distorsion géométrique et une convergence rapide vers la solution exacte.

Chapitre 3. Développement et validation d'un nouvel élément fini quadrilatère de type Reissner-Mindlin en statique et en vibration libre

- L'élément MSBQP est très efficace dans le domaine dynamique (vibration libre).
- Il est démontré que l'élément MSBQP est applicable à des situations de plaque minces ou épaisses avec une précision suffisante.
- L'élément MSBQP ne présente aucun phénomène de verrouillage avec la matrice de rigidité formée par l'intégration complète de Gauss, mais au contraire des résultats numériques produits par l'élément de plaque R4 standard qui présentent un phénomène de verrouillage grave en plaque mince.
- La comparaison avec les résultats analytiques indique l'importance de l'inclusion de l'effet de déformation par cisaillement même dans les plaques qui pourraient être considérées comme des plaques minces.

Chapitre 4. Vibration et flambement des structures minces

Sommaire

4.1 Introduction	90
4.2 Vibration des plaques soumises à des charges dans le plan	90
4.2.1 Considération théorique	90
4.2.2 Validation numérique.....	92
4.2.3 Vibration des plaques soumises à des charges dans le plan	93
4.3 Analyse de la vibration libre des plaques circulaires avec plusieurs trous circulaires	100
4.3.1 Vibration libre d'une plaque annulaire.....	100
4.4.2 Vibration libre d'une plaque circulaire avec trou excentré.....	101
4.4.3 Vibration libre d'une plaque circulaire avec deux trous.....	102
4.4 Analyse dynamique des plaques en interaction avec un fluide	104
4.4.1 Considération théorique	105
4.4.2 Validation numérique	106
4.5 Conclusion	111

4.1 Introduction

Les plaques rectangulaires utilisées dans les structures d'ingénierie sont souvent soumises à des charges normales, de compression et de cisaillement, qui agissent dans le plan médian de la plaque. Dans certaines conditions, ces charges peuvent entraîner un flambage des plaques. L'analyse du flambage des plaques est une autre classe de problème de valeur propre. Comme on le sait, une plaque peut perdre sa capacité à supporter les charges externes lorsque la contrainte dans le plan atteint un niveau critique. Ce phénomène est le flambage de la plaque, et la charge critique correspondante à laquelle la plaque commence à devenir instable, est appelé charge de flambage.

Les concepteurs doivent souvent intégrer des coupures ou des ouvertures dans une structure pour servir de portes et de fenêtres. L'analyse des vibrations des structures comportant des ouvertures pose un énorme défi et doit être bien comprise lors de la conception de la structure. Un facteur important qui peut affecter les fréquences naturelles de ces plaques est l'emplacement de l'ouverture.

Dans ce chapitre, le flambement élastique des plaques soumises à une compression uni-axiale ou bi-axiale aux extrémités est étudié en premier lieu. Ensuite, la variation de la fréquence naturelle en fonction de la dimension et de l'emplacement du trou est d'abord étudiée en l'absence de toute charge dans le plan. Cette analyse est ensuite effectuée pour une série de valeurs des charges appliquées dans le plan. Enfin, l'effet du fluide sur le comportement dynamique de la plaque submergée avec le fluide est étudié.

4.2 Vibration des plaques soumises à des charges dans le plan

4.2.1 Considération théorique

4.2.1.1 Problème de flambement des plaques en flexion

Les déformations géométriques peuvent être exprimées pour les plaques épaisses (théorie de Reissner-Mindlin) comme suit :

$$\{\varepsilon^g\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} [P] \{\alpha\} \quad (4.1)$$

La contribution du cisaillement pour la matrice de rigidité géométrique est négligeable pour les plaques minces. Les déformations géométriques peuvent être exprimées pour les plaques minces (théorie Kirchhoff) comme suit :

$$\{\varepsilon^g\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} [P] \{\alpha\} \quad (4.2)$$

On pose pour les plaques épaisses:

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} [P] \quad (4.3)$$

Et pour les plaques minces:

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} [P] \quad (4.4)$$

On a :

$$\{\varepsilon^g\} = [G] \{\alpha\} = [B^g] \{q_e\} \quad (4.5)$$

Avec

$$[B^g] = [G][C]^{-1} \quad (4.6)$$

La matrice [G] est calculée par l'équation (4.3) pour l'élément MSBQP basé sur la théorie de Reissner –Mindlin .

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -x & -xy + \frac{y^3}{6} & 0 & -\frac{y^2}{2} + \frac{x^2y}{2} & -\frac{y}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} & 0 & \frac{y}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2x}{2} & -y & -xy + \frac{x^3}{6} & -\frac{x}{2} & 0 & \frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & -xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x + \frac{y^2}{2} & 0 & y - \frac{x^2}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x - \frac{y^2}{2} & 0 & y + \frac{x^2}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -xy & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

La matrice $[G]$ est calculée par l'équation (4.4) pour l'élément KSBQP basée sur la théorie des plaques minces (théorie de Kirchhoff).

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -x & -\frac{x^2}{2} & -xy & -\frac{yx^2}{2} & 0 & -\frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3} & 0 & -\frac{y^3}{6} & -\frac{y}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} & -\frac{x^3}{6} & -y & -xy & -\frac{y^2}{2} & -\frac{xy^2}{2} & -\frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

4.2.1.2 Matrices élémentaires

Pour tout élément fini de plaque, les matrices de rigidité $[K^e]$ et géométrique $[K_g^e]$, sont données par :

$$[K^e] = \int_{S_e} [B]^T [D] [B] dS = [C]^{-T} \underbrace{\left(\int [Q]^T [D] [Q] \det(J) d\xi d\eta \right)}_{[K_0]} [C]^{-1} \quad (4.9)$$

$$[K_g^e] = \int_{S_e} [B^g]^T [\tau] [B^g] dS = [C]^{-T} \underbrace{\left(\int [G]^T [\tau] [G] \det(J) d\xi d\eta \right)}_{[K_{g0}]} [C]^{-1} = [C]^{-T} [K_{g0}] [C]^{-1} \quad (4.10)$$

Pour le cas des plaques épaisses :

$$[\tau] = \begin{bmatrix} h[\sigma_0] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^3}{12}[\sigma_0] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^3}{12}[\sigma_0] \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Pour le cas des plaques minces :

$$[\tau] = h[\sigma_0] \quad (4.12)$$

Avec

$$[\sigma_0] = \begin{bmatrix} \sigma_x^0 & \sigma_{xy}^0 \\ \sigma_{xy}^0 & \sigma_y^0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

D'où σ_x^0 , σ_y^0 et σ_{xy}^0 sont les contraintes membranaires.

L'analyse du flambement implique la solution du problème aux valeurs propres.

$$([K] - \lambda_{cr} [K_g])\{q\} = 0 \quad (4.14)$$

Avec $[K_g]$ est la matrice de rigidité géométrique, et λ_{cr} est un scalaire par lequel les charges dans le plan choisies doivent être multipliées afin de provoquer un flambage.

4.2.1.3 Vibration des plaques soumises à des charges dans le plan

Pour déterminer la fréquence naturelle d'une plaque soumise à une charge dans le plan, l'énergie potentielle totale Π_p est la somme de l'énergie de déformation de la plaque due à la flexion U_p , de l'énergie de déformation résultant des contraintes de la membrane U_{pg} et de l'énergie cinétique du système vibrant V_{pv} .

$$\Pi_p = U_p + U_{pg} + V_{pv} \quad (4.15)$$

Pour une plaque de coordonnées cartésiennes x et y , les expressions des équations d'énergie sont données en termes de déplacement hors plan w . Elles sont données par Timoshenko et Goodier[112].

$$U_p = \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (4.16)$$

$$U_{pg} = -\frac{1}{2} \iint \left[\sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2\tau_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (4.17)$$

$$V_{pv} = \frac{1}{2} \rho t \omega^2 \iint w^2 dx dy \quad (4.18)$$

Où D est la rigidité en flexion, ν est le coefficient de Poisson, σ_x , σ_y et τ_{xy} sont les contraintes dans le plan, ρ est la densité de masse, t est l'épaisseur et ω est la fréquence circulaire naturelle.

Afin de calculer les fréquences naturelles, le principe d'énergie potentielle minimum est utilisé. La première variation de l'énergie potentielle totale donne l'équation d'équilibre nécessaire, et à partir de la deuxième variation, on obtient l'équation suivante, qui décrit la vibration d'une structure soumise à des charges dans le plan.

$$\partial^2 \Pi_p = \frac{1}{2} \{\delta q\}^T [K - P_{cr} K_g - \omega^2 M] \{\delta q\} = 0 \quad (4.19)$$

Alors l'analyse de la vibration implique la solution du problème aux valeurs propres :

$$([K - P_{cr} K_g] - \omega^2 M) \{q\} = 0 \quad (4.20)$$

Où P_{cr} est la charge critique qui cause le flambement de la structure.

4.2.2 Validation numérique

Nous proposons de valider les deux éléments KSBQP[77] de plaques minces et l'élément MSBQP de plaques épaisses développées dans les deux chapitres précédents à travers une série de tests standards. Ces tests ont été choisis pour montrer l'efficacité et la précision des deux éléments proposés dans l'analyse de la vibration et du flambement isotrope des plaques.

Les résultats sont donnés en fonction des quantités non dimensionnelles suivantes :

- $K_h = \frac{P_{cr} b^2}{\pi^2 D}$ facteur de charge de flambage, b étant la largeur de la plaque et P_{cr} la charge critique de flambage.
- $V_b = \omega \times b^2 \sqrt{\frac{\rho t}{D}}$ coefficient de fréquence non dimensionnelle.

4.2.2.1 Plaques rectangulaires soumises à une compression uni-axiale dans le plan

On considère d'abord une plaque de longueur a , de largeur b et d'épaisseur h . La géométrie et le maillage régulier de 20×20 éléments sont illustrés dans la figure 4.1. Le tableau 4.1 présente la convergence du facteur de charge de flambement obtenu par les deux éléments proposés par rapport aux solutions analytiques de Timoshenko et Gere [113] avec conditions aux limites SSSS, CCCC et un rapport $h/b=0.01$.

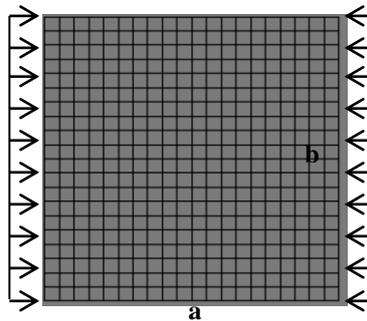


Figure 4.1. Plaque carrée soumise à une compression uni-axiale avec maillage 20×20 ($E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu=0.3$).

Les figures 4.2 et 4.3 montrent la convergence du facteur de la charge de flambage normalisée K_h/K_{exact} de la plaque carrée ($a=b$) SSSS et CCCC avec un rapport d'épaisseur

$h/b = 0.01$, où K_h est la charge de flambage numérique et K_{exact} est la charge de flambage analytique [113]. La figure 4.4 représente le contour des quatre premiers modes de flambage d'une plaque carrée SSSS soumise à une compression uni-axiale ($h/b=0.01$). Il est à noter que les facteurs de flambement obtenus par les éléments MSBQP et KSBQP[77] ont une bonne convergence vers les solutions analytique[113] pour toutes les conditions aux limites considérées. Ces résultats sont plus précis que ceux de la DSG3 , ES-DSG3[114,115] et similaires à ceux du NS-DSG3 [114] pour les cas de la plaque SSSS et CCCC(voir tableau 4.1).

Tableau 4.1. Convergence de la charge uni-axiale de flambement (K_h) d'une plaque carrée ($h/b= 0.01$, $a/b=1$).

	Eléments	Maillage					Solution analytique[113]
		4×4	8×8	12×12	16×16	20×20	
CCCC	MSBQP	11.5145	10.3165	10.1632	10.1121	10.0888	10.070
	KSBQP[77]	9.2406	9.7697	9.9283	9.9898	10.0195	
	DSG3[114,115]	31.8770	14.7592	11.9823	11.0446	10.6282	
	ES-SG3[114,115]	14.7104	11.0428	10.3881	10.2106	10.1410	
	NS-DSG3[114]	11.4457	11.2947	10.7144	10.1173	-	
SSSS	MSBQP	3.9399	3.9584	3.9791	3.9869	3.9906	4.000
	KSBQP[77]	3.7644	3.9353	3.9707	3.9834	3.9894	
	DSG3[114,115]	7.5891	4.8013	4.3200	4.1590	4.0889	
	ES-SG3[114,115]	4.7023	4.1060	4.0368	4.1070	4.0089	
	NS-DSG3[114]	4.1313	4.0741	4.0396	4.0231	-	

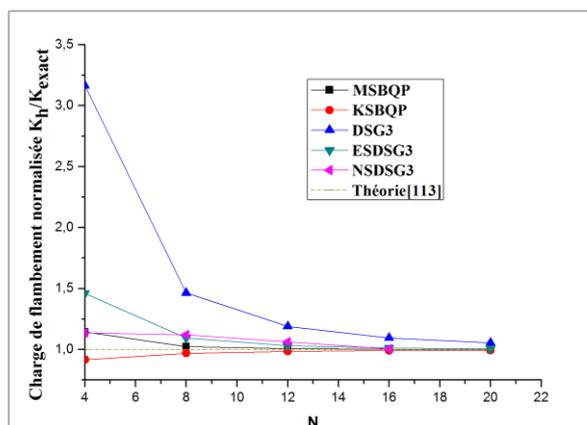


Figure 4.2. Convergence de la charge de flambement normalisée K_h/K_{exact} d'une plaque carrée CCCC soumise à une compression uni-axiale ($h/b = 0.01$).

Les paramètres de fréquence fondamentaux V_b pour une plaque carrée soumise à des forces de compression uni-axiales uniformément réparties pour l'élément KSBQP[77] sont étudiés et présentés dans la figure 4.5. On constate que les fréquences naturelles diminuent avec l'augmentation de l'amplitude des forces de compression uni-axiale dans le plan.

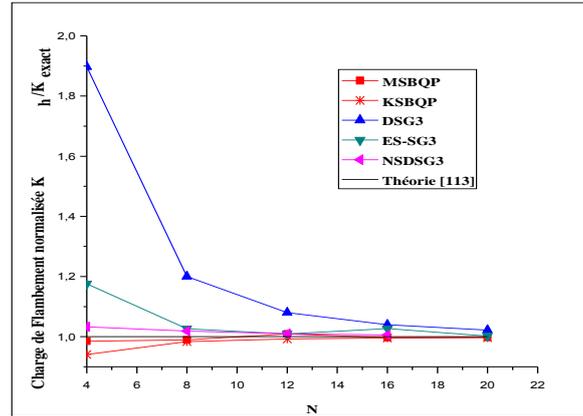


Figure 4.3. Convergence de la charge de flambement normalisée K_h/K_{exact} d'une plaque carrée SSSS soumise à une compression uni-axiale ($h/b = 0.01$).

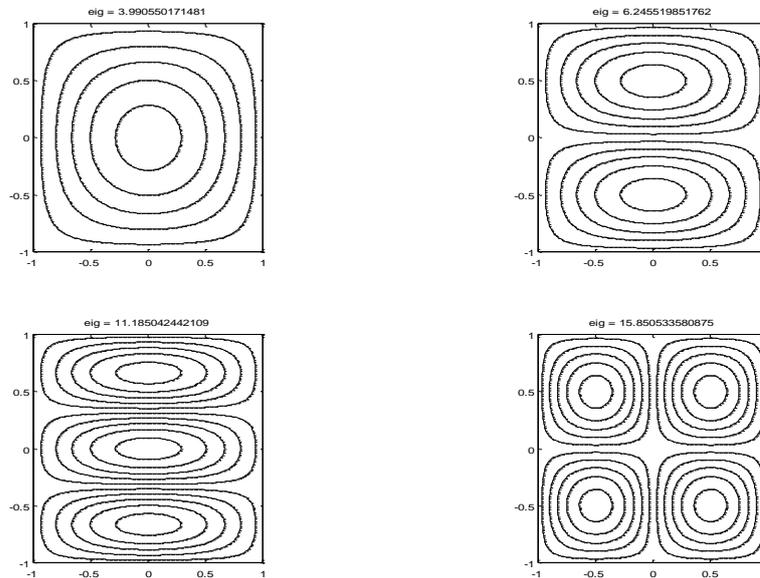


Figure 4.4. Contour des quatre premiers modes de flambage d'une plaque carrée SSSS soumise à une compression uni-axiale ($h/b=0.01$).

Une étude sur l'influence du rapport longueur/largeur (a/b) sur le facteur de charge critique du flambage d'une plaque simplement supportée SSSS est également présentée dans cette section. Diverses valeurs spécifiées telles que $a/b=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ et 2.5 sont considérées. On utilise divers rapports $h/b=0.05, 0.1$ et 0.2 . Les résultats obtenus par l'élément MSBQP en utilisant un maillage 20×20 sont comparés à ceux de la méthode Ritz pb-2 présentée par Kitipornchai et al [116] et Liew et al [117] et sont détaillées dans le tableau 4.2 et figure 4.6. En plus, les modes de flambage pour différents rapports a/b sont présentées dans la figure 4.7.

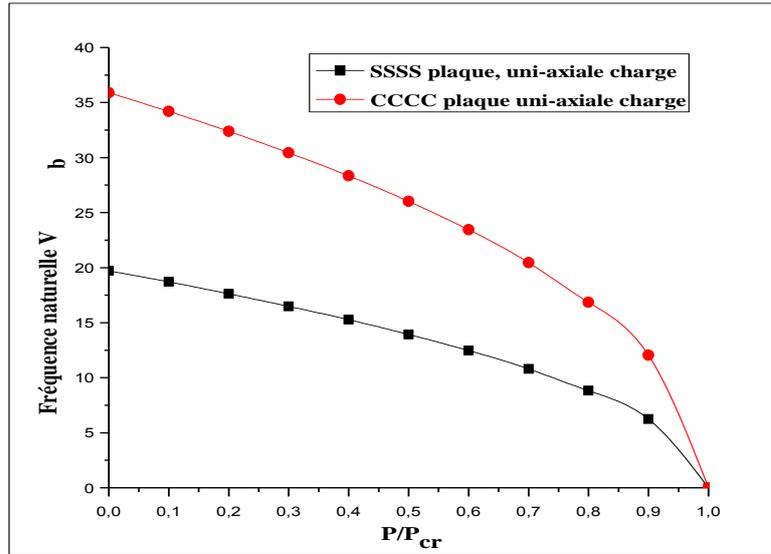


Figure 4.5. Paramètres de fréquence fondamentaux V_b d'une plaque carrée soumise à une charge uni-axiale.

Les résultats de l'élément MSBQP sont en accord avec les autres résultats Liew et al [117], mais légèrement inférieurs à ceux des solutions analytiques Ritz pb-2[116], comme le montre le tableau 4.2. On constate, à partir de ces résultats, que le facteur de la charge critique de flambage diminue avec l'augmentation de l'épaisseur h .

Tableau 4.2. Facteur de flambement critique pour une plaque simplement supportée SSSS avec différents rapports a/b et h/b soumise à un effort uni-axial.

a/b	h/b	MSBQP	Liew et al[117]	Ritz pb-2[116]
0.5	0.05	5.9700	6.0405	6.0372
	0.1	5.3022	5.3116	5.4777
	0.2	3.7332	3.7157	3.9963
1.	0.05	3.9224	3.9293	3.9444
	0.1	3.7260	3.7270	3.7865
	0.2	3.1223	3.1471	3.2637
1.5	0.05	4.2275	4.2116	4.2849
	0.1	3.9428	3.8982	4.0250
	0.2	3.1345	3.1032	3.3048
2	0.05	3.9131	3.8657	3.9444
	0.1	3.7177	3.6797	3.7865
	0.2	3.1166	3.0783	3.2637
2.5	0.05	4.0305	3.9600	4.0645
	0.1	3.7900	3.7311	3.8683
	0.2	3.0821	3.0306	3.2421

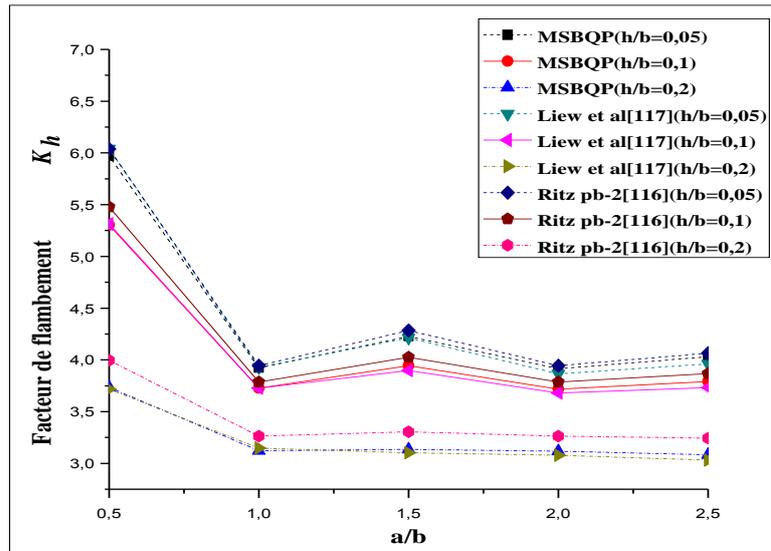


Figure 4.6. Convergence de la charge de flambage uni-axiale K_h de la plaque SSSS avec divers rapports a/b et divers rapports h/b .

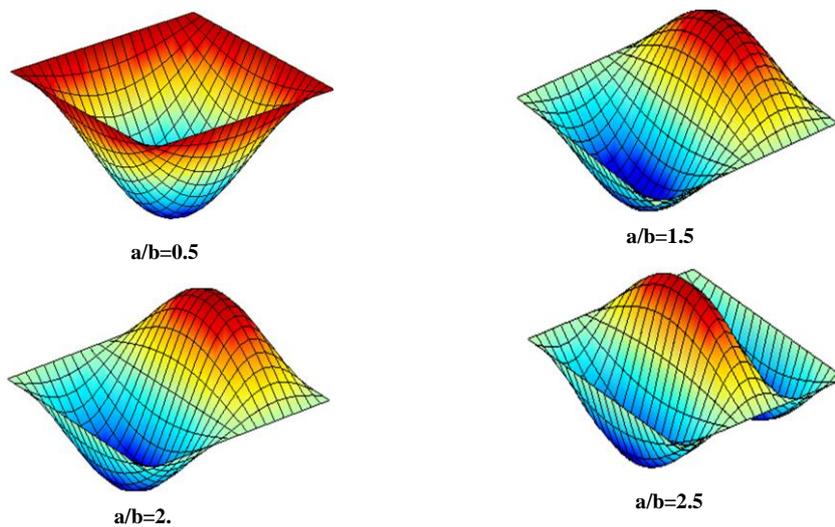


Figure 4.7. Modes du flambement uni- axial d'une plaque rectangulaire SSSS avec $h/b=0.01$ et différents rapport a/b .

4.2.2.2 Une plaque rectangulaire soumise à une compression bi-axiale dans le plan

Considérons une plaque soumise à une compression bi-axiale comme la montre la figure 4.8. Les paramètres liés aux matériaux et autres sont issus de l'exemple précédent. Le tableau 4.3 donne le facteur de flambage de la plaque carrée soumise à une compression bi-axiale avec les trois conditions aux limites essentielles (SSSS, CCCC, SCSC).

Figure 4.9 présente les modes de flambement bi-axiale d'une plaque carrée CCCC avec $h/b=0.01$ et $a/b=1$. Les paramètres de fréquence fondamentaux V_b pour une plaque carrée soumise à des forces de compression bi-axiales pour l'élément MSBQP sont étudiés et présentés dans la figure 4.10.

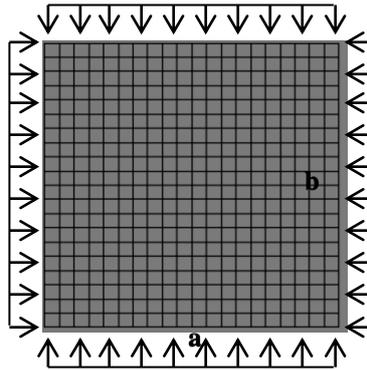


Figure 4.8. Plaque carrée soumise à une compression bi-axiale avec maillage 20×20.

On constate que les fréquences naturelles diminuent avec l'augmentation de l'amplitude des forces de compression bi-axiale dans le plan. Les résultats des éléments MSBQP et KSBQP[77] en utilisant un maillage 20×20 éléments rectangulaires sont plus précis que celles de la DSG3[114] et en bon agreement avec ceux ES-DSG3[114] et NS-DSG3[114].

Tableau 4.3. Facteur de flambement critique (K_h) d'une plaque carrée soumise à une charge bi-axiale de flambement ($h/b= 0.01, a/b=1$).

Conditions aux limites	Éléments					Solution exacte[113]
	MSBQP	KSBQP[77]	DSG3[114]	ES-DSG3[114]	NS-DSG3[114]	
SSSS	1.9953	1.9947	2.0549	2.0023	2.0138	2.00
CCCC	5.2996	5.2761	5.6419	5.3200	5.3537	5.31
SCSC	3.8296	3.8149	4.0108	3.8332	3.8531	3.83

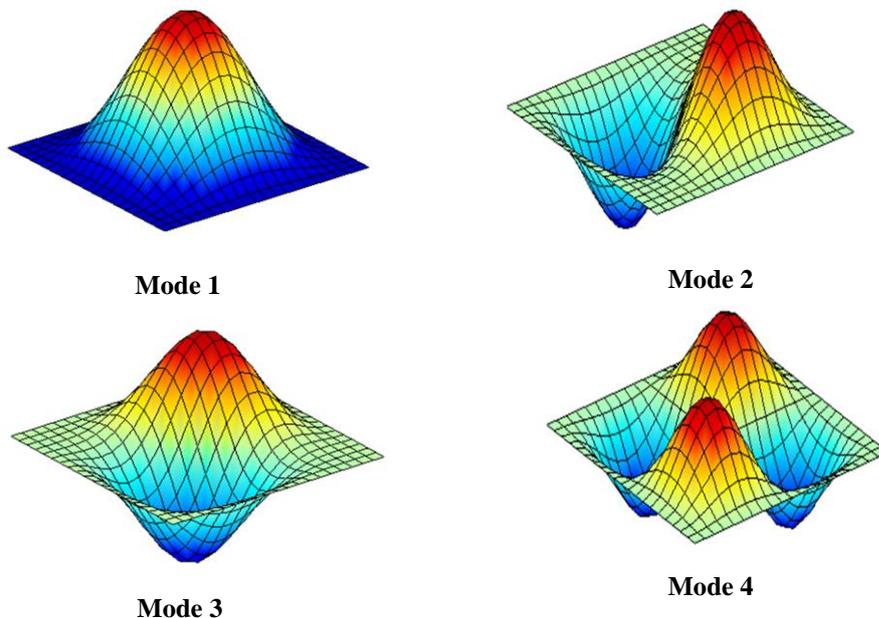


Figure 4.9. Modes de flambement bi-axiale d'une plaque carrée CCCC avec $h/b=0.01, a/b=1$.

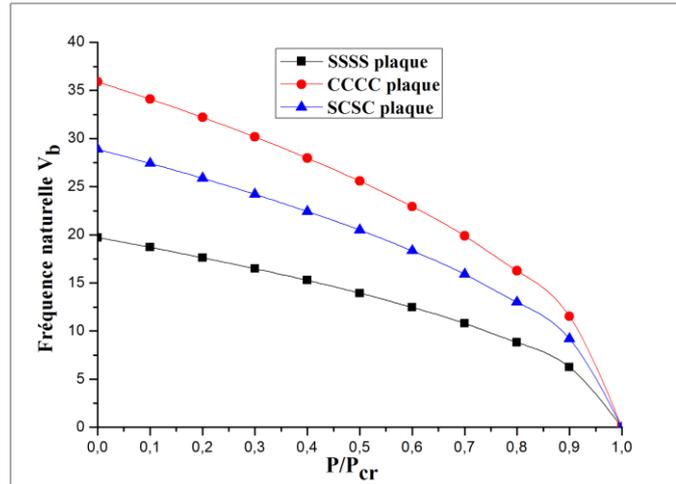


Figure 4.10. Paramètres de fréquence fondamentaux V_b d'une plaque carrée soumise à une charge bi-axiale.

4.3 Analyse de la vibration libre des plaques circulaires avec plusieurs trous circulaires

Les plaques circulaires à trous circulaires multiples sont largement utilisées, dans les structures d'ingénierie, par exemple les missiles, les avions, etc., pour réduire le poids de l'ensemble de la structure. Ces trous dans la structure entraînent généralement une modification de la fréquence naturelle ainsi qu'une diminution de la résistance correspondante. Le but de cette section est de résoudre les fréquences naturelles et les modes naturels d'une plaque circulaire avec des trous circulaires multiples en utilisant l'élément proposé MSBQP.

4.3.1 Vibration libre d'une plaque annulaire

Une plaque annulaire avec le rayon extérieur d'un mètre ($a = 1$ m), le rayon intérieur de 0,25m ($b = 0,25$ m), l'épaisseur de 0,002 m et le coefficient de Poisson $\nu = 1/3$ est considérée comme indiqué sur la figure 4.11. Les limites extérieures et intérieures sont soumises aux conditions aux limites encastree et libres, respectivement.

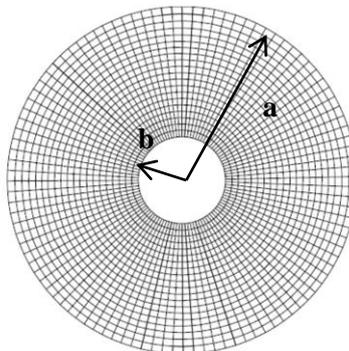


Figure 4.11. Plaque annulaire avec 2060 éléments quadrilatéraux.

La plaque annulaire a également été résolue à l'aide du logiciel FEM [118] (l'élément de coque S4, d'ABAQUS) avec 8903 éléments et 9099 nœuds et une approche semi-analytique proposé par Lee[118]. Le tableau 4.4 montre les six premiers paramètres de fréquence naturelle $\lambda^4 = \omega^2 \rho h / D$ en utilisant l'élément MSBQP, la méthode analytique [10] et la méthode de Lee[118]. La figure 4.12 illustre les trois premiers modes de vibration de l'élément MSBQP pour une plaque annulaire. Les résultats de l'élément MSBQP avec seulement 2060 éléments et 2163 nœuds sont en bon accord avec les solutions exactes [10] et les résultats utilisant ABAQUS [118]. L'élément MSBQP a été utilisé pour modéliser le problème de la plaque. Bien que l'épaisseur de la plaque soit de 0,002 m, cet élément ne souffre pas de blocage en cisaillement transversal.

Tableau 4.4. Fréquences naturelles λ d'une plaque annulaire.

Eléments	Modes					
	1	2	3	4	5	6
MSBQP	3.2794	4.4955	5.8075	6.8367	7.2478	7.6029
Lee[118]	3.2750	4.4610	5.7640	6.8160	7.0680	7.5360
FEM [118] (S4 Abaqus)	3.2747	4.4631	5.7676	6.8201	7.0736	7.5427
solutions analytique[10]	3.2719	4.4623	5.7640	6.8183	7.0680	7.5391

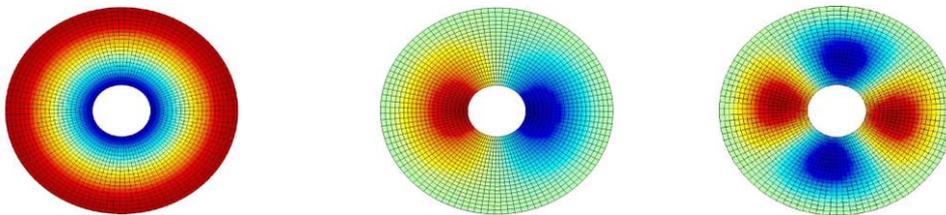


Figure 4.12. Les trois premiers modes de l'élément MSBQP pour une plaque annulaire.

4.3.2 Vibration libre d'une plaque circulaire avec un trou excentré

Une plaque circulaire affaiblie par un trou excentrique avec les mêmes rayons extérieur et intérieur que le test précédant est considérée. La distance de décalage e du trou excentré est de $e=0,45m$ ($e/a = 0,45$) comme le montre la figure 4.13. Les six premiers paramètres de fréquence naturelle obtenus par la méthode FEM [118], la méthode de Lee[118] et l'élément MSBQP sont présentés au tableau 4.5. Le modèle FEM d'Abaqus a utilisé 8217 éléments et 8404 nœuds. La figure 4.14 illustre les trois premiers modes de vibration de l'élément MSBQP. Les résultats de l'élément MSBQP avec 1892 éléments et 1989 nœuds correspondent bien à ceux de la méthode FEM et la méthode de Lee[118].

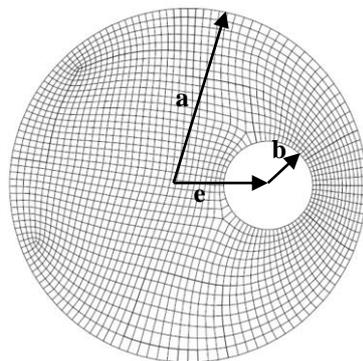


Figure 4.13. Plaque circulaire avec un trou excentré avec 1892 éléments quadrilatéraux.

Tableau 4.5. Fréquences naturelles λ d'une plaque circulaire avec un trou excentré ($e/a = 0.45$, $b = 0.25$).

Eléments	Modes					
	1	2	3	4	5	6
MSBQP	3.2067	5.5449	4.7586	4.8040	6.1312	6.2858
Lee[118]	3.1870	4.5210	4.7400	5.7580	6.0600	6.2560
FEM Abaqus [118] (S4)	3.2020	4.5300	4.7450	5.7753	6.0899	6.2361

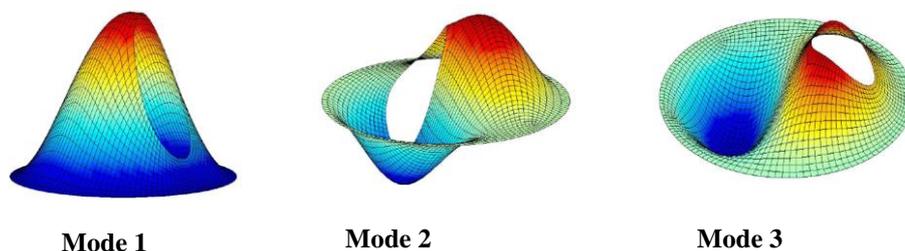


Figure 4.14. Les trois premiers modes de l'élément MSBQP pour une plaque circulaire avec un trou excentré($e/a = 0.45$, $b = 0.25$).

En considérant différentes conditions aux limites, avec encasturé et appui simple sur le bord extérieur, le tableau 4.6 donne la liste des six valeurs propres de la plaque circulaire avec un trou circulaire de rayon $b/a = 0,4$ et une excentricité e/a variant de 0.1, 0.3 à 0.5. Les trois premiers modes de l'élément MSBQP pour une plaque circulaire C-F et S-F avec un trou sont présentés dans les figures 4.15 et 4.16. Les résultats de l'élément MSBQP sont conformes à ceux de Laura[119] et Lee[118]. Les fréquences de la plaque annulaire avec une condition de limite encasturé-libre(C-F) sont plus grandes que celles des cas appui simple-libre(S-F) en raison de la rigidité de la condition encastrement.

Tableau 4.6. Fréquences naturelles λ^2 d'une plaque circulaire avec un trou excentré ($b/a = 0.4$).

Excentricité	BC		1	2	3	4	5	6	
e/a=0.1		MSBQP	12.9889	19.6179	21.0107	32.0454	32.6871	48.5450	
	C-F	Lee[118]	13.0465	19.6249	21.0314	31.8999	31.9451	47.1969	
		Laura[119]	13.0480	-	21.0260	-	31.9530	47.2310	
			MSBQP	4.7298	11.9767	12.1853	23.2490	23.2503	37.4556
	S-F	Lee[118]	4.7524	12.0270	12.2500	23.2131	23.2131	37.2832	
		Laura[119]	4.7486	-	12.2530	-	23.2180	37.2930	
e/a=0.3		MSBQP	11.2184	19.8924	26.3596	34.3248	39.8324	42.3701	
	C-F	Lee[118]	11.2359	19.8025	26.0508	34.0356	39.2377	41.9127	
		Laura[119]	11.2409	-	26.0740	-	39.1730	41.6860	
			MSBQP	4.6410	12.1518	14.0498	23.5993	24.1453	31.1876
	S-F	Lee[118]	4.6883	12.1661	14.1075	23.6002	24.1867	31.1364	
		Laura[119]	4.6454	-	14.1160	-	24.2840	31.1370	
e/a=0.5		MSBQP	10.1220	20.2347	24.4864	34.7930	37.4071	44.2035	
	C-F	Lee[118]	10.1124	20.0883	24.3838	34.5744	37.0394	43.6921	
		Laura[119]	10.1420	-	24.4310	-	37.0650	44.2150	
			MSBQP	4.5414	12.4354	15.2920	23.7717	27.3553	29.6185
	S-F	Lee[118]	4.5199	12.3904	15.3037	23.7754	27.2484	29.5718	
		Laura[119]	4.5258	-	15.3100	-	27.3240	29.6200	

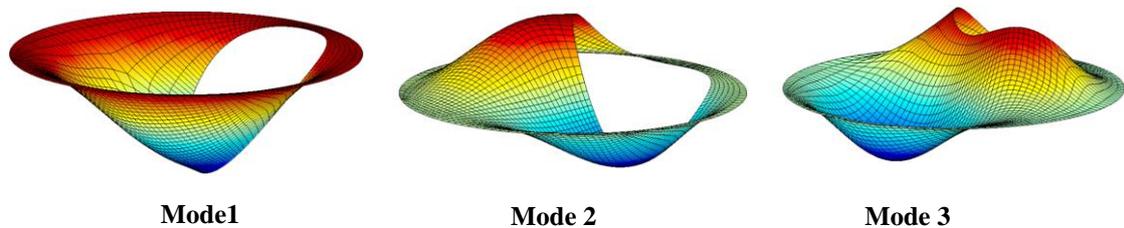


Figure 4.15. Les trois premiers modes de l'élément MSBQP pour une plaque circulaire C-F avec un trou excentré ($b/a=0.4, e/a=0.5$)

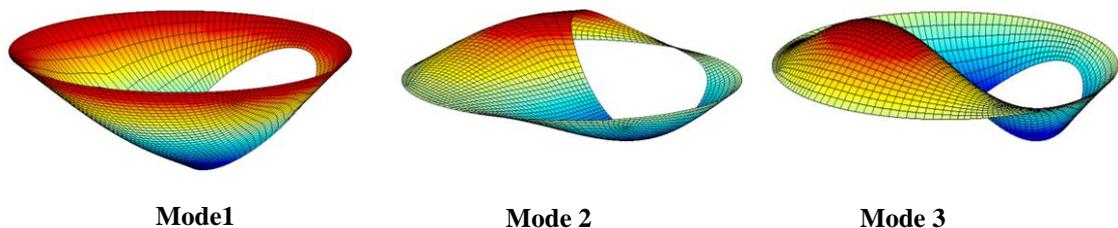


Figure 4.16. Les trois premiers modes de l'élément MSBQP pour une plaque circulaire S-F avec un trou excentré ($b/a=0.4, e/a=0.5$).

4.3.3 Vibration libre d'une plaque circulaire avec deux trous

Une plaque circulaire avec deux trous est considérée comme le montre la figure 4.17. Les rayons des trous sont de $b=0,25$ et $c=0,15$ m et les coordonnées du centre sont respectivement $(0.5, 0)$ et $(-0.4, -0.3)$ dans le système de coordonnées dont l'origine se trouve au centre du cercle extérieur. Le tableau 4.7 montre les cinq premiers paramètres de fréquence naturelle de l'élément MSBQP, utilisant ABAQUS et la méthode de Lee[118]. Les trois premiers modes de l'élément MSBQP pour une plaque circulaire avec deux trous sont présentés dans les figures 4.18. Un bon accord entre les résultats de l'élément MSBQP avec 1850 éléments et 1959 nœuds et ceux d'Abaqus est obtenu.

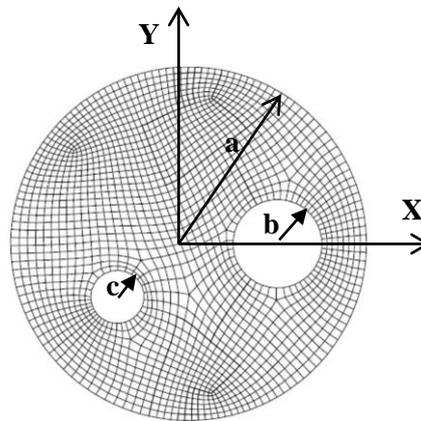


Figure 4.17. Plaque circulaire avec deux trous (1850 éléments quadrilatéraux).

Tableau 4.7. Fréquences naturelles λ d'une plaque annulaire avec deux trous.

Eléments	Modes				
	1	2	3	4	5
MSBQP	3.2077	4.5554	4.7337	5.7368	6.1265
Lee[118]	3.1770	4.5290	4.699	5.7510	5.9570
FEM Abaqus [118] (S4)	3.1950	4.5296	4.7086	5.8070	6.0208

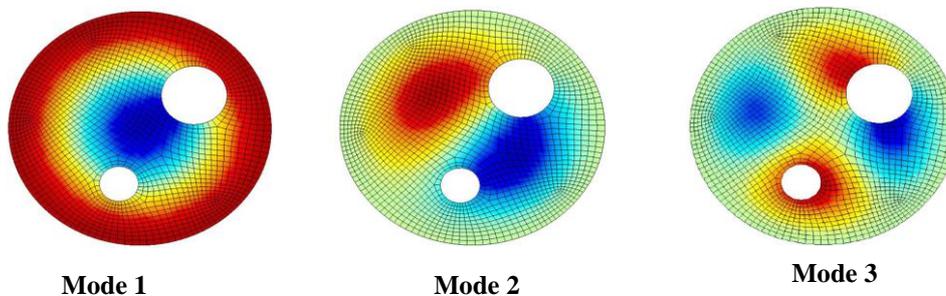


Figure 4.18. Les trois premiers modes de l'élément MSBQP pour une plaque avec deux trous.

4.4 Analyse dynamique des plaques en interaction avec un fluide

Les plaques couplées avec un fluide ont une grande importance pratique dans le domaine du génie nucléaire, océanique et naval. Il est bien connu que les fréquences naturelles des structures en contact avec un fluide sont différentes de celles dans le vide. Par conséquent, la prédiction des changements de fréquence naturelle dus à la présence du fluide est importante pour la conception des structures qui sont en contact avec le fluide ou immergées dans le fluide. Une chute de fréquences très importante est constatée, elle est causée par l'échange d'énergie cinétique entre le fluide et la structure[120].

Afin de vérifier la performance de l'élément KSBQP développé dans le chapitre 2, nous allons utiliser de plusieurs travaux expérimentaux et théoriques pour des plaques ayant des conditions aux limites différentes, en contact avec le fluide ou totalement submergées.

4.4.1 Considération théorique

Les hypothèses suivantes sont faites pour modéliser le comportement dynamique du fluide dans les formulations mathématiques :

- L'amplitude des vibrations est faible (c'est-à-dire que le mouvement du fluide est faible).
- Le fluide est incompressible, non visqueux et non rotationnel (c'est-à-dire que l'écoulement du fluide est potentiel).

La pression appliquée par le fluide au repos sur la structure lors du contact peut être exprimée en fonction de l'accélération du système [121]. La présence de fluide augmente l'inertie du système en ajoutant à la masse du solide une masse additionnelle induite par le fluide.

Le vecteur de forces provoqué par le fluide peut être exprimé au repère local de la façon suivante [121]:

$$\{\mathbf{F}\}^e = \int_A [\mathbf{R}][\mathbf{C}]^{-1} \{\mathbf{P}\} dA \quad (4.21)$$

$[\mathbf{C}]$ est la matrice de transformation ;

$[\mathbf{R}]$ est une matrice d'ordre (3×12) donnée comme suit :

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{6} & -\left(\frac{x^2y}{2} + \frac{y^4}{12}\right) & -\frac{x^3y}{6} & -\frac{y^2}{2} & -\left(\frac{y^2x}{2} + \frac{x^4}{12}\right) & -\frac{y^3}{6} & -\frac{y^3x}{6} & -\frac{xy}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$\{P\}$ est un vecteur contenant la pression appliquée par le fluide sur l'élément fini ;

$$\{P\} = Z_{fi} [R][C]^{-1} \left\{ \ddot{\delta} \right\} \quad (4.23)$$

Les coefficients Z_{fi} dépendent du modèle de contact fluide-structure.

En plaçant l'équation (4.23) dans la relation (4.21), on obtient le vecteur des forces fluides comme suit :

$$\{F\}^e = Z_{fi} \int_A [C]^{-T} [R]^T [R][C]^{-1} dA \left\{ \ddot{\delta} \right\}^e = [M_f]^e \left\{ \ddot{\delta} \right\}^e \quad (4.24)$$

Alors on a :

$$[M_f]^e = Z_{fi} [C]^{-T} \int_A [R]^T [R] dA [C]^{-1} \quad (4.25)$$

Avec

$[M_f]^e$ est la matrice de masse ajoutée élémentaire induite par le fluide.

Le système d'équations globales du mouvement d'une plaque rectangulaire en interaction avec un fluide peut être représenté comme suit :

$$\left[[M_s] - [M_f] \right] \left\{ \ddot{\delta}_T \right\} + [K_s] \left\{ \delta_T \right\} = \{0\} \quad (4.26)$$

$[M_s]$ et $[K_s]$ sont les matrices de masse et de rigidité de la plaque sans fluide, respectivement;

$[M_f]$ est la matrice de masse globale représentant l'effet des forces d'inertie du fluide ;

$\{\delta_T\}$ est le vecteur de déplacements global.

La solution de ce système nous permet d'avoir les fréquences et les modes de vibrations du système couplé fluide-structure en résolvant le problème des valeurs propres exprimé par :

$$\det \left[K_s - \omega^2 (M_s - M_f) \right] = 0 \quad (4.27)$$

4.4.2 Validation numérique

4.4.2.1 Plaque rectangulaire totalement submergée

Une plaque en acier rectangulaire simplement supportée ou encastree sur ses deux côtés les plus courts, totalement submergée dans l'eau (Figure. 4.19). Les dimensions de la plaque sont : La longueur $B=0.655$ m, la largeur $A=0.20165$ m et l'épaisseur de la plaque $h=9.36$ mm. Les tests ont été faits dans un réservoir rectangulaire ayant 1.3m de longueur, 0.55m de largeur et une profondeur égale à 0.8m. Les propriétés mécaniques de cette plaque sont : La masse volumique du solide $\rho_s=7850$ kg/m³, coefficient de Poisson $\nu=0.3$ et Module de Young $E=207$ GPa.

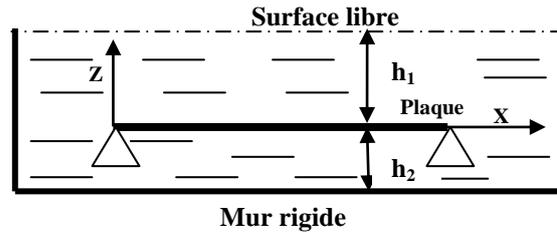


Figure 4.19. Plaque rectangulaire simplement supportée ou encastrée totalement submergée.

La pression dynamique totale est donc la somme des pressions inférieure et supérieure et peut être calculée en utilisant l'équation suivante[120] :

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{1 + Ce^{2\mu h_1}}{1 - Ce^{2\mu h_1}} + \frac{e^{-2\mu h_2} + 1}{e^{-2\mu h_2} - 1} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f_3} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (4.28)$$

Avec $\mu = \pi \sqrt{\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}}$

A et B sont les dimensions de la plaque ; la valeur de C tend vers -1. Cette approximation est faite pour éviter d'avoir un système de valeurs propres non linéaire.

Les résultats de l'élément KSBQP avec un maillage de 288 éléments sont présentés aux tableaux 4.8 et 4.9. On peut remarquer que ces résultats sont acceptables par rapport aux valeurs numériques de l'élément fini rectangulaire de Kerboua et al [120] qui a quatre nœuds, chaque nœud possède six degrés de liberté et par rapport aux résultats expérimentaux de Haddara et Cao[122].

Tableau 4.8. Fréquences naturelles en (Hz) de la plaque simplement supportée sur deux bords opposés totalement submergée dans l'eau.

Mode	Plaque submergée		
	KSBQP	Kerboua et al [120]	Résultat expérimental [122]
1	32.428	31.28	28.723
2	130.934	126.40	117.125
3	147.168	141.78	154.51
4	296.983	285.98	281.79
5	316.116	304.57	335.04

Tableau 4.9. Fréquences naturelles (Hz) de la plaque encastrée sur deux bords opposés totalement submergée dans l'eau.

Mode	Plaque submergée		
	KSBQP	Kerboua et al [121]	Résultat expérimental[122]
1	75.147	72.7	67.58
2	171.73	168.16	167
3	207.20	200.84	179.15
4	368.79	359.64	344.99
5	407.50	395.95	385.73

4.4.2.2 Plaque carrée encastrée

Dans cet exemple, une plaque carrée en acier encastrée sur un seul côté, totalement submergée dans un réservoir (Figure 4.20). Les dimensions et les propriétés mécaniques de la plaque sont: $A=B=10\text{m}$ et l'épaisseur $h=0.238\text{m}$. La masse volumique du solide $\rho_s=7830\text{ kg/m}^3$, coefficient de Poisson $\nu=0.3$ et Module de Young $E=206\text{ GPa}$. On suppose que la hauteur d'eau sous la plaque est suffisamment élevée ($h_2 \gg$ longueur de la plaque) pour qu'elle n'ait aucune influence sur le comportement dynamique du système couplé[122]. Cette plaque a été étudié expérimentalement par Lindholm et *al.*[123] et numériquement par Fu et Price[124] et Kerboua et *al.* [120].

Les résultats obtenus par l'élément KSBQP avec un maillage de 144 éléments, sont présentés dans le tableau 4.10. La figure 4.21 montre également les quatre premiers modes de vibration pour la plaque carrée encastrée sans fluide. Les résultats numériques de l'élément KSBQP montrent une coïncidence favorable avec les résultats expérimentaux et les résultats numériques correspondants.

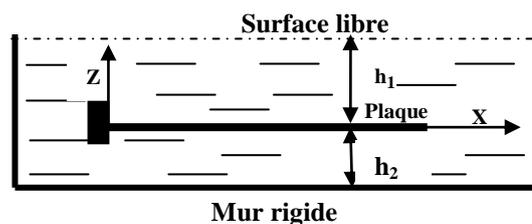


Figure 4.20. Plaque carrée encastrée totalement submergée.

Tableau 4.10. Fréquences naturelles ω (rad/sec) de la plaque carrée encastrée sur un seul côté totalement submergée dans l'eau ($h_1=0.5$).

Mode	Plaque sans fluide			Plaque submergée			
	KSBQP	Kerboua et al [120]	Fu et Price[124]	KSBQP	Kerboua et al [120]	Fu et Price[124]	Lindholm et al.[123]
1	12.846	12.93	12.94	6.97	7.0	7.35	6.56
2	31.318	31.69	31.93	17.08	17.16	20.19	19.66
3	78.937	79.37	79.8	42.78	42.98	50.11	45.32

4.4.2.3 Une plaque verticale partiellement immergée

Une plaque verticale est partiellement immergée dans un récipient de fluide (Figure 4.22), son comportement est complètement différent de celui d'une plaque horizontale immergée puisque les éléments finis immergés sont soumis à la pression du fluide alors que les éléments secs vibrent dans le vide. Les dimensions de la plaque sont : La longueur $A=1.016\text{m}$, la largeur $B=0.2032\text{ m}$ et l'épaisseur de la plaque $h=4.84\text{mm}$. Les propriétés mécaniques de cette plaque

sont : La masse volumique du solide $\rho_s=7830 \text{ kg/m}^3$, coefficient de Poisson $\nu=0.3$ et Module de Young $E=206.8 \text{ GPa}$. La densité du fluide est de 1000 kg/m^3 .

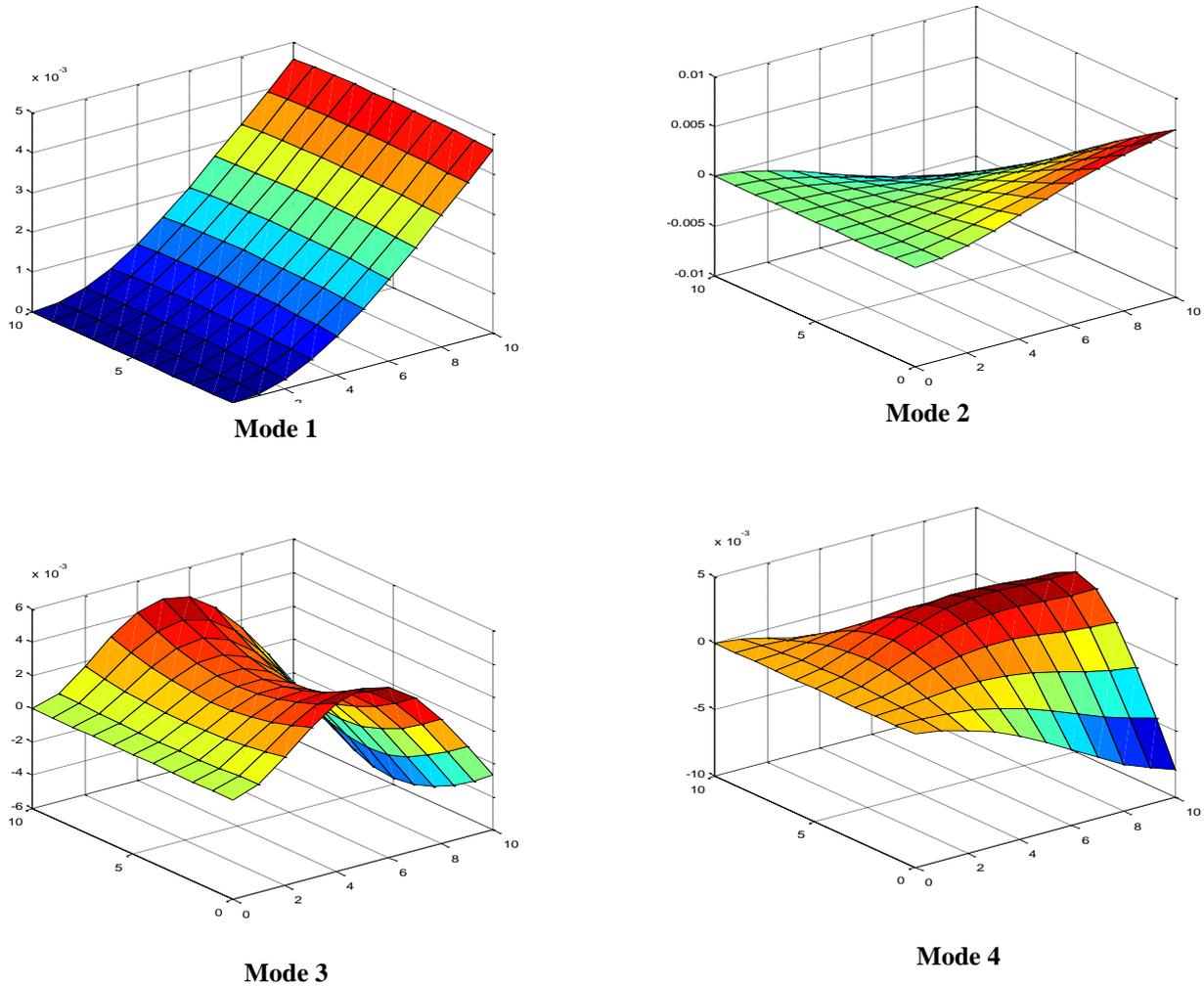


Figure 4.21. Les quatre premiers modes propres d'une plaque carrée encastree (maillage 10×10).

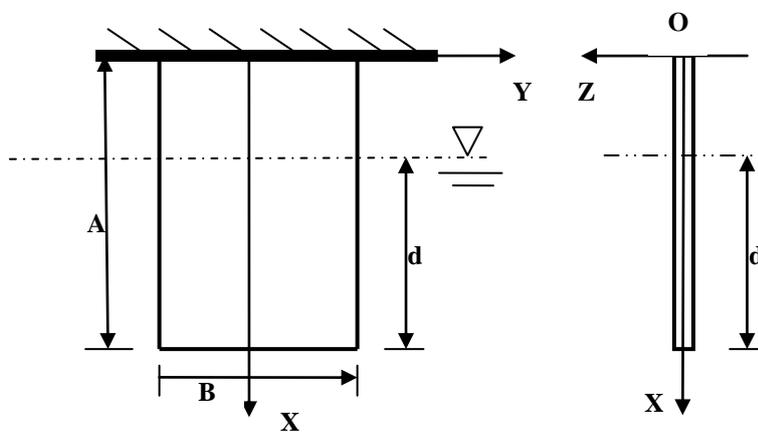


Figure 4.22. Une plaque verticale partiellement immergée.

Les caractéristiques dynamiques dans le vide de la plaque console ont été étudiées. Le tableau 4.11 montre les résultats expérimentaux de Lindholm et al.[123] et les fréquences naturelles calculées par ANSYS[125] et par l'élément KSBQP, pour les six premiers modes. Les résultats du maillage (512 éléments) de l'élément KSBQP se rapprochent très bien des mesures expérimentales de Lindholm et al.[123] .

Tableau 4.11. Les six premiers modes d'une plaque verticale (dans le vide).

Modes	ANSYS[125] (512 éléments)	KSBQP			Résultats expérimentales Lindholm et al.[123]
		128 éléments	288 éléments	512 éléments	
1	3.94	3,943	3,943	3,943	3.84
2	24.66	24,693	24,685	24,682	24.20
3	39.07	39,366	39,361	39,360	39.10
4	69.24	69,332	69,284	69,268	68.10
5	119.47	120,395	120,405	120,397	121.00
6	136.35	136,456	136,292	136,235	-

L'analyse vibratoire a été réalisée à quatre niveaux d'immersion (25%, 50%, 75% et 100%). La pression du fluide appliquée sur la partie immergée de la plaque est égale au double de la pression exprimée par l'équation suivante[120] :

$$P = -\frac{\rho_f}{\mu} \left[\frac{e^{-2\mu h_1} + 1}{e^{-2\mu h_1} - 1} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Z_{f_2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (4.29)$$

Le tableau 4.12 montre les fréquences naturelles calculées pour différents niveaux d'immersion. Les résultats de l'élément KSBQP sont en bon accord avec ceux d'autres travaux Lindholm et al.[123] et Ergin et al.[125] sauf pour les modes supérieurs. La figure 4.23 montre les fréquences naturelles correspondant aux deux premiers modes calculés pour différents niveaux d'immersion. On peut noter que la fréquence naturelle d'une plaque console diminue de manière significative lorsque la partie immergée est inférieure à la moitié de la longueur de la plaque.

Tableau 4.12. Les fréquences naturelles d'une plaque verticale pour différents niveaux d'immersion.

Mode	Ergin and Ugurlu[125]				KSBQP				Résultats expérimentales Lindholm et al.[123]			
	Rapport de profondeur (d/A)				Rapport de profondeur (d/A)				Rapport de profondeur (d/A)			
	0.25	0.5	0.75	1	0.25	0.5	0.75	1	0.25	0.5	0.75	1
1	2.29	1.90	1.83	1.82	2,154	1,92	1,892	1,890	2.17	1.82	1.79	1.78
2	21.32	15.69	12.20	11.68	20,188	14,44	12,026	11,838	21.01	15.5	11.99	11.50
3	29.42	25.43	24.16	24.00	23,752	20,05	18,990	18,878	29.75	25.5	24.20	24.20
4	59.32	52.23	38.67	34.31	53,886	48,38	35,426	33,222	57.36	51.6	38.27	33.50
5	105.01	93.84	77.31	73.91	98,871	75,79	60,225	57,745	106.35	95.9	79.00	75.26
6	116.35	98.71	84.46	71.22	109,36	89,26	73,667	65,341	-	-	-	-

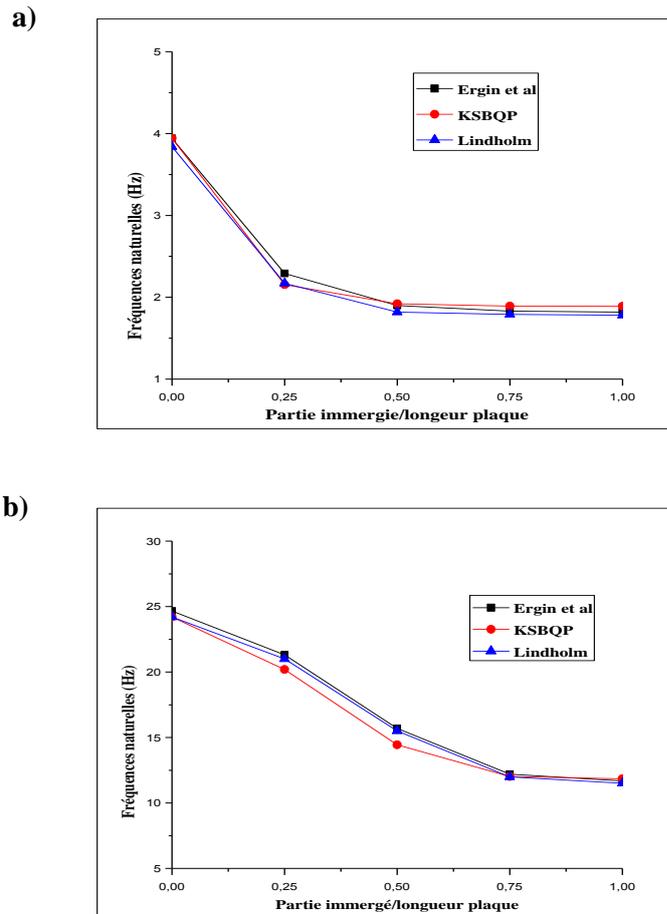


Figure 4.23. Variation des fréquences naturelles d'une plaque verticale progressivement immergée dans un fluide en fonction du rapport (d/A) : (a) premier mode, (b) deuxième mode.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, des solutions ont été obtenues pour le calcul de la charge de flambage et les fréquences naturelles de la vibration libre des plaques. Des cas de charges uni-axiale et bi-axiale pour des plaques simplement supportées ou encastées sont considérés. Les éléments finis utilisés MSBQP et KSBQP des plaques en flexion basés sur l'approche en déformation donnent des résultats acceptables pour les charges de flambement et les fréquences naturelles.

À partir des différents tests étudiés dans ce chapitre, les conclusions et recommandations suivantes peuvent être tirées des discussions présentées précédemment :

- Le facteur de la charge critique de flambage diminue avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque.
- Les fréquences naturelles diminuent avec l'augmentation de l'amplitude des forces de compression dans le plan.
- Les ouvertures ont une influence considérable sur les fréquences et les formes de mode.
- L'élément MSBQP ne souffre pas de blocage en cisaillement transversal.

- Les exemples numériques, qui comprennent l'analyse des vibrations naturelles de plaques circulaires avec des trous circulaires excentrés montrent un très bon accord avec les résultats obtenus par FEM(Abaqus) ainsi qu'avec certains résultats qui sont présentés dans la littérature.
- Nous pouvons conclure pour le cas des plaques en interaction avec le fluide que la précision des fréquences calculées à l'aide de notre élément KSBQP est soit très bonne soit au moins suffisante pour les cas étudiés.

Conclusion générale

L'objectif de ce travail est de développer deux éléments finis pour l'étude dynamique (vibration libre) des plaques en flexion. Dans le présent travail, deux types d'éléments finis de plaques basés sur l'approche en déformation ont été formulés et validés à travers des tests standards.

Le premier élément fini développé est un élément quadrilatère à quatre nœuds basé sur la théorie des plaques de Kirchhoff pour l'analyse des problèmes de plaque minces en flexion. Ce nouvel élément appelé **KSBQP** (**K**irchhoff **S**train **B**ased **Q**uadrilatère **P**late) est basé sur des fonctions d'ordre supérieur pour les différentes composantes du champ de déformation en satisfaisant l'équation de compatibilité. Cet élément contient trois degrés de liberté (w , β_x et β_y) par nœud. Un deuxième élément fini quadrilatère à quatre nœuds basé sur la théorie des plaques de Mindlin-Reissner et l'approche en déformation est proposé. Ce nouvel élément appelé **MSBQP** (**M**indlin **S**train **B**ased **Q**uadrilateral **P**late) qui contient trois degrés de liberté (w , β_x et β_y) par nœud est testé pour l'analyse des plaques en flexion. Les deux éléments finis proposés sont simples dans leurs formulations ainsi que le champ de déplacement de chaque élément est enrichi par des termes d'ordre élevé sans qu'il soit nécessaire d'inclure des nœuds intermédiaires ou des degrés de liberté supplémentaires non essentiels.

L'étude bibliographique préalable nous a permis de faire une synthèse sur les théories des plaques appliquées au développement des éléments de plaques en flexion. Puis des généralités sur les vibrations et le flambage des plaques ont été présentées. Finalement, le modèle de déformation a été exposé, en citant ses avantages par rapport aux autres modèles, et on a clôturé par une synthèse des éléments finis existants basés sur cette approche[126–131].

Les deux éléments nommés KSBQP et MSBQP ont été validés avec une assez grande variété de structures dans les chapitres 2 et 3. Ces deux éléments montrent une bonne performance globale et donnent des résultats meilleurs que ceux trouvés dans la littérature. L'élément «**MSBQP**» proposé a été démontré qu'il était applicable à des situations de plaques minces ou épaisses avec une précision suffisante. Cet élément à intégration complète est libre de tout blocage en cisaillement et passe le Patch test. L'élément «**KSBQP**» est performant pour les structures minces, sauf que cet élément est sensible à la distorsion du maillage.

Dans le chapitre 4, nous avons étudié les problèmes de vibrations transversales libres et d'instabilité sous les charges dans le plan qui sont deux problèmes à valeur propre. Ils sont couplés dans le cas où des forces dans le plan sont appliquées aux bords de la plaque vibrante transversalement. Les fréquences naturelles diminuent avec l'augmentation de l'amplitude des forces de compression dans le plan. Les résultats obtenus par les deux éléments confirment ses bonnes performances pour cette analyse. Ensuite, l'effet du rapport d'aspect des plaques, de la taille et de l'emplacement des trous sur le coefficient de vibration des plaques perforées est étudié. Les ouvertures ont une influence considérable sur les fréquences naturelles.

Le comportement dynamique d'une structure en contact avec un fluide change d'une façon remarquable, une chute de fréquences très importante est constatée. Les caractéristiques dynamiques (fréquences naturelles et modes associés) de plaque rectangulaire totalement submergée, plaque carrée encastree (cantilever) et une plaque verticale partiellement submergée ont été calculées par un élément fini KSBQP basée sur l'approche en déformation. On peut conclure que les résultats obtenus montrent un très bon accord avec les données expérimentales et numériques.

En conclusion, le but de la thèse l'analyse dynamique des structures minces, est atteint, comme l'ont montré les exemples traités aux chapitres 2, 3 et 4. Tous les résultats montrent que les deux éléments proposés MSBQP et KSBQP présentent de bonnes précisions et convergence dans les maillages grossiers, qu'ils sont très peu sensibles à la distorsion du maillage et qu'ils convergent rapidement vers la solution exacte. Les fréquences obtenues par ces deux éléments sont d'une excellente précision en les comparant avec des solutions analytiques, numériques ou expérimentales. La comparaison avec les résultats analytiques indique qu'il est important de prendre en compte l'effet de la déformation en cisaillement, même dans le cas de plaques minces. Les avantages de l'utilisation de l'approche en déformations sont à nouveau confirmés pour l'analyse des vibrations de plaques.

Une perspective du travail consiste à examiner ses éléments dans l'étude dynamique forcée et sur la non-linéarité matérielle et géométrique.

Références bibliographiques

- [1] Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S., 1959, Theory of Plates and Shells, London.
- [2] Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L., 2005, The Finite Element Method Volume 1 : Its Basis & Fundamentals (Sixth Edition).
- [3] Mindlin, R. D., 1951, “Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates,” Journal of Applied Mechanics, **18**, pp. 31–38.
- [4] Radece, M., 2006, Finite Element Analysis, Printech.
- [5] Imbert, J. F., 1984, Analyse Des Structures Par Éléments Finis. Cépaduès
- [6] Craveur, J. C., 2008, Modélisation Par Éléments Finis: Cours et Exercices Corrigés, Dunod.
- [7] Khennane, A., 2013, Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB and Abaqus, Taylor & Francis.
- [8] Chladni, E. F. F., 1830, Die Akustik, Breitkopf & Härtel.
- [9] Rayleigh, L., 1877, Theory of Sound , Volume1, London,Macmillan ; reprinted 1945 by Dover New York.
- [10] Leissa, A. W., 1969, Vibration of Plates, NASA SP-169, Washington,DC.
- [11] Leissa, A. W., 1977, “Recent Research in Plate Vibrations: Classical Theory,” The Shock and Vibration Digest, **9**(10), pp. 13–24.
- [12] Leissa, A. W., 1977, “Recent Research in Plate Vibrations: Complicating Effects,” The Shock and Vibration Digest, **9**(11), pp. 21–35.
- [13] Leissa, A. W., 1981, “Plate Vibrations Research,1976-1980: Classical Theory,” The Shock and Vibration Digest, **13**(9), pp. 11–22.
- [14] Mindlin,R.D.,Schacknow,A., and Deresiewicz, H., 1956, “Flexural Vibrations of Rectangular Plates,” Journal of Applied Mechanics, **23**, pp. 430–436.
- [15] McGee, O. G., and Leissa, A. W., 1991, “Three-Dimensional Free Vibrations of Thick Skewed Cantilevered Plates,” Journal of Sound and Vibration, **144**(2), pp. 305–322.
- [16] Liew, K.M., Xiang, Y., Kitipornchai, S. , and Wang, C. M., 1993, “Vibration of Thick Skew

- Plates Based on Mindlin Shear Deformation Plate Theory,” *Journal of Sound and Vibration*, **168**, pp. 39–69.
- [17] Rock, T. A., Hinton, E., 1976, “A Finite Element Method For the Free Vibration of Plates Allowing for Transverse Shear Deformation,” *Computers & Structures*, **6**, pp. 37–44.
- [18] Lee, S. J., and Han, S. E., 2001, “Free-Vibration Analysis of Plates and Shells with a Nine-Node Assumed Natural Degenerated Shell Element,” *Journal of Sound and Vibration*, **241**(4), pp. 605–633.
- [19] Lee, S. J., 2004, “Free Vibration Analysis of Plates by Using a Four-Node Finite Element Formulated with Assumed Natural Transverse Shear Strain,” *Journal of Sound and Vibration*, **278**(3), pp. 657–684.
- [20] Maurice Petyt, 2010, *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*, Cambridge University Press, United States of America.
- [21] Hinton, E., 1988, *Numerical Method and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells.*, Pineridge Press, Swansea.
- [22] Djoudi, M.S and Bahai, H., 2004, “A Cylindrical Strain-Based Shell Element for Vibration Analysis of Shell Structures,” *Finite Elements in Analysis and Design*, **40**, pp. 1947–1961.
- [23] Ashwell, D.G. and Sabir, A. B., 1972, “A New Cylindrical Shell Finite Element Based on Simple Independent Strain Functions,” *Int.J.mech.Sci*, **14**, pp. 171–183.
- [24] Zeinkiewics, O.C. and Taylor, R. L., 2005, *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, Elsevier Science.
- [25] Ashwell, D. G., and Sabir, A. B., 1971, “Limitations of Certain Curved Finite Elements When Applied to Arches,” *International Journal of Mechanical Sciences*, **13**(2), pp. 133–139.
- [26] Ashwell, D. G., Sabir, A. B., and Roberts, T. M., 1971, “Further Studies in the Application of Curved Finite Elements to Circular Arches,” *International Journal of Mechanical Sciences*, **13**(6), pp. 507–517.
- [27] Sabir, A. B., and Ashwell, D. G., 1971, “A Comparison of Curved Beam Finite Elements When Used in Vibration Problems,” *Journal of Sound and Vibration*, **18**(4), pp. 555–563.
- [28] Sabir, A. B. and Lock, A. C., 1973, “Large Deflexion , Geometrically Non-Linear Finite Element Analysis of Circular Arches,” *International Journal of Mechanical Sciences*, **15**, pp. 37–47.

Références bibliographiques

- [29] Sabir, A.B and Ashwell, D. G., 1979, “Diffusion of Concentrated Loads into Thin Cylindrical Shells,” *The mathematics of finite elements and application III*, **33**, pp. 379–389.
- [30] Charchafchi, T.A and Sabir, A. B., 1982, “Curved Rectangular and General Quadrilateral Shell Elements for Cylindrical Shells,” *The Mathematics of Finite Elements and Application IV*, J.R Whiteman, ed., Academic Press, pp. 231–239.
- [31] Bull, J. W., 1984, “The Strain Approach to the Development of Thin Cylindrical Shell Finite Elements,” *Thin-Walled Structures*, **2**(3), pp. 195–205.
- [32] Djoudi, M. S., and Bahai, H., 2003, “A Shallow Shell Finite Element for the Linear and Non-Linear Analysis of Cylindrical Shells,” *Engineering Structures*, **25**(6), pp. 769–778.
- [33] Djoudi, M. S., and Bahai, H., 2004, “Strain Based Finite Element for the Vibration of Cylindrical Panels with Openings,” *Thin-Walled Structures*, **42**(4), pp. 575–588.
- [34] Mousa, A., and Djoudi, M., 2015, “New Strain Based Triangular Finite Element for the Vibration of Circular Cylindrical Shell with Oblique End,” *International Journal of Civil & Environmental Engineering*, **15**(05), pp. 6–11.
- [35] Hamadi, D., Ayoub, A., and Abdelhafid, O., 2015, “A New Flat Shell Finite Element for the Linear Analysis of Thin Shell Structures,” *European Journal of Computational Mechanics*, **24**(6), pp. 232–255.
- [36] Hamadi, D., Ayoub, A., and Maalem, T., 2016, “A New Strain-Based Finite Element for Plane Elasticity Problems,” *Engineering Computations (Swansea, Wales)*, **33**(2), pp. 562–579.
- [37] Guenfoud, H., Himeur, M., Ziou, H., and Guenfoud, M., 2018, “A Consistent Triangular Thin Flat Shell Finite Element with Drilling Rotation Based on the Strain Approach,” *International Journal of Structural Engineering*, **9**(3), pp. 191–223.
- [38] Himeur, M., 2014, “Contribution à La Formulation de Quelques Éléments de Coques Basés Sur La Formulation En Déformation,” Université 08 mai 1945 de Guelma.
- [39] Himeur, M., and Guenfoud, M., 2011, “Bending Triangular Finite Element with a Fictitious Fourth Node Based on the Strain Approach,” *European Journal of Computational Mechanics*, **20**(7–8), pp. 455–485.
- [40] Sabir, A. B., 1983, “A New Class of Finite Elements for Plane Elasticity Problems,” *CAFEM 7th , Int. Conf. Struct. Mech. in Reactor Technology*, Chicago.
- [41] Sabir, A. B., 1985, “A Rectangular and Triangular Plane Elasticity Element with Drilling

- Degrees of Freedom,” 2nd International Conference on Variational Methods in Engineering, Southampton University, Springer- Verlag, Berlin, pp. 17–25.
- [42] Tayeh, S. M., 2003, “New Strain-Based Triangular and Rectangular Finite Elements for Plane Elasticity Problems,” The Islamic University of Gaza.
- [43] Bourezane, M., 2013, “A New Strain Based Triangular Element with Drilling Rotation,” *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*, **1**, pp. 173–177.
- [44] Rebiai, C., and Belounar, L., 2014, “An Effective Quadrilateral Membrane Finite Element Based on the Strain Approach,” *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, **50**(1), pp. 263–269.
- [45] Rebiai, C., Saidani, N., and Bahloul, E., 2015, “A New Finite Element Based on the Strain Approach for Linear and Dynamic Analysis,” *Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology*, **11**(6), pp. 639–644.
- [46] Belarbi, M. T., and Charif, A., 1998, “Nouvel Élément Secteur Basé Sur Le Modèle de Déformation Avec Rotation Dans Le Plan,” *Revue Européenne des Eléments*, **7**(4), pp. 439–458.
- [47] Belarbi, M. T., and Bourezane, M., 2005, “On Improved Sabir Triangular Element with Drilling Rotation,” *Revue européenne de génie civil*, **9**(9–10), pp. 1151–1175.
- [48] Fortas, L., Belounar, L., and Merzouki, T., 2019, “Formulation of a New Finite Element Based on Assumed Strains for Membrane Structures,” *International Journal of Advanced Structural Engineering*, **11**, pp. 9–18.
- [49] Rebiai, C., and Belounar, L., 2013, “A New Strain Based Rectangular Finite Element with Drilling Rotation for Linear and Nonlinear Analysis,” *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, **13**(1), pp. 72–81.
- [50] Bouzriba, A., and Bouzrira, C., 2015, “Sector Element for Analysis of Thick Cylinders Exposed to Internal Pressure and Change of Temperature,” *Gradjevinar*, **67**(6), pp. 547–555.
- [51] Sabir, A. B., 1985, “A Segmental Finite Element for General Plane Elasticity Problems in Polar Coordinates,” 8th Int. Conf. Struct. Mech. in Reactor Technology, pp. 327–332.
- [52] Sabir, A.B. and Salhi, Y., 1986, “A Strain Based Finite Element for General Plane Elasticity in Polar Coordinates,” *Res. Mechanica*, **19**, pp. 1–16.
- [53] Sabir, A. B., and Sfenjji, A., 1995, “Triangular and Rectangular Plane Elasticity Finite

- Elements,” *Thin-Walled Structures*, **21**(3), pp. 225–232.
- [54] Belarbi, M. T., and Maalem, T., 2005, “On Improved Rectangular Finite Element for Plane Linear Elasticity Analysis,” *Revue Européenne des Elements*, **14**(8), pp. 985–997.
- [55] Bouzidi, L., Belounar, L., and Guerraiche, K., 2019, “Presentation of a New Membrane Strain-Based Finite Element for Static and Dynamic Analysis,” *International Journal of Structural Engineering*, **10**(1), pp. 40–60.
- [56] Rezaiee-Pajand, M., Gharaei-Moghaddam, N., and Ramezani, M., 2019, “A New Higher-Order Strain-Based Plane Element,” *Scientia Iranica*, **26**(0), pp. 2258–2275.
- [57] Rezaiee-Pajand, M., and Yaghoobi, M., 2012, “Formulating an Effective Generalized Four-Sided Element,” *European Journal of Mechanics, A/Solids*, **36**, pp. 141–155.
- [58] Rezaiee-Pajand, M., Gharaei-Moghaddam, N., and Ramezani, M., 2019, “Two Triangular Membrane Elements Based on Strain,” *International Journal of Applied Mechanics*, **11**(1).
- [59] Rezaiee-Pajand, M., Ramezani, M., and Gharaei-Moghaddam, N., 2020, “Using Higher-Order Strain Interpolation Function to Improve the Accuracy of Structural Responses,” *International Journal of Applied Mechanics*, **12**(3).
- [60] Belarbi, M. T., and Charif, A., 1999, “Développement d’un Nouvel Élément Hexaédrique Simple Basé Sur Le Modèle En Déformation Pour l’étude Des Plaques Minces et Épaisses,” *Revue Européenne des Eléments*, **8**(2), pp. 135–157.
- [61] Hamadi, D., and Maalem, T., 2010, “Presentation of an Efficient Parallelepiped Finite Element Based on the Strain Approach ‘SBP8C,’” *WCE 2010 - World Congress on Engineering 2010*, **3**, pp. 1761–1764.
- [62] Guerraiche, K. H., Belounar, L., and Bouzidi, L., 2018, “A New Eight Nodes Brick Finite Element Based on the Strain Approach,” *Journal of Solid Mechanics*, **10**(1), pp. 186–199.
- [63] Belounar, L., and Guerraiche, K., 2014, “A New Strain Based Brick Element for Plate Bending,” *Alexandria Engineering Journal*, **53**(1), pp. 95–105.
- [64] Messai, A., Belounar, L., and Merzouki, T., 2018, “Static and Free Vibration of Plates with a Strain Based Brick Element,” *European Journal of Computational Mechanics*, **00**(00), pp. 1–21. <https://doi.org/10.1080/17797179.2018.1560845>.
- [65] Khiouani, H. E., Belounar, L., and Houhou, M. N., 2020, “A New Three-Dimensional Sector Element for Circular Curved Structures Analysis,” *Journal of Solid Mechanics*, **12**(1), pp. 165–

- 174.
- [66] Belounar, L., and Guenfoud, M., 2005, “A New Rectangular Finite Element Based on the Strain Approach for Plate Bending,” *Thin-Walled Structures*, **43**(1), pp. 47–63.
- [67] Belounar, A., Benmebarek, S., and Belounar, L., 2018, “Strain Based Triangular Finite Element for Plate Bending Analysis,” *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **0**(0), pp. 1–13.
- [68] Belounar, A., Benmebarek, S., Houhou, M. N., and Belounar, L., 2019, “Static, Free Vibration, and Buckling Analysis of Plates Using Strain-Based Reissner–Mindlin Elements,” *International Journal of Advanced Structural Engineering*, **11**(2), pp. 211–230.
- [69] Abderrahmani, S., Maalem, T., and Hamadi, D., 2016, “On Improved Thin Plate Bending Rectangular Finite Element Based on the Strain Approach,” *International Journal of Engineering Research in Africa*, **27**, pp. 76–86.
- [70] Abderrahmani, S., Maalem, T., Zatar, A., and Hamadi, D., 2017, “A New Strain Based Sector Finite Element for Plate Bending Problems,” *International Journal of Engineering Research in Africa*, **31**, pp. 1–13.
- [71] Belounar, A., Benmebarek, S., Houhou, M. N., and Belounar, L., 2020, “Free Vibration with Mindlin Plate Finite Element Based on the Strain Approach,” *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C*, **101**(2), pp. 331–346.
- [72] Melosh, R. J., 1962, “A Stiffness Matrix for the Analysis of Thin Plates in Bending,” *Journal of the Aerospace Sciences*, **29**(1), pp. 102–103.
- [73] Batoz, J. -L., Bathe, K.-J., and Ho, L., 1980, “A Study of Three-node Triangular Plate Bending Elements,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **15**, pp. 1771–1812.
- [74] Batoz, J. -L., and Tahar, M. Ben, 1982, “Evaluation of a New Quadrilateral Thin Plate Bending Element,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **18**(11), pp. 1655–1677.
- [75] Jirousek, J., and Leon, N., 1977, “A Powerful Finite Element for Plate Bending,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **12**(1), pp. 77–96.
- [76] Rezaiee-Pajand, M., Yaghoobi, M., and Karkon, M., 2012, “Hybrid Trefftz Formulation for Thin Plate Analysis,” *International Journal of Computational Methods*, **9**(4).
- [77] Boussem, F., and Belounar, L., 2020, “A Plate Bending Kirchhoff Element Based on Assumed Strain Functions,” *Journal of Solid Mechanics*, **12**(4), pp. 935–952.

- [78] Frey, F., 1990, *Analyse Des Structures et Milieux Continus: Mécanique Des Structures*, Presses polytechniques et universitaires Romandes.
- [79] Felippa, C.A. and Bergan, B. ., 1987, “A Triangular Bending Element Based on an Energy-Orthogonal Free Formulation,” *computer methods in applied mechanics and engineering* , **61**, pp. 129–160.
- [80] Clough, R., and Tocher, J., 1965, “Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending,” *First Conference Matrix Methods in Structural Mechanics*, pp. 515–545.
- [81] Dvorkin, E. N., and Bathe, K. J., 1984, “A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis,” *Engineering Computations*, **1**(1), pp. 77–88.
- [82] Leissa, A. W., 1973, “The Free Vibration of Rectangular Plates,” *Journal of sound and vibration*, **31**(3), pp. 257–293.
- [83] Janabi, B., Hinton, E., and Vuksanovic, D., 1989, “Free Vibrations of Mindlin Plates Using the Finite Element Method: Part 1. Square Plates with Various Edge Conditions,” *Engineering Computations*, **6**, pp. 90–96.
- [84] Den Hartog, J. P., 1985, *Mechanical Vibrations*, New York.
- [85] Zouari, W., Assarar, M., Meftah, K., and Ayad, R., 2015, “Free Vibration Analysis of Homogeneous Piezoelectric Structures Using Specific Hexahedral Elements with Rotational DOFs,” *Acta Mechanica*, **226**(6), pp. 1737–1756.
- [86] Wu, F., Liu, G. R., Li, G. Y., Cheng, A. G., and He, Z. C., 2014, “A New Hybrid Smoothed FEM for Static and Free Vibration Analyses of Reissner-Mindlin Plates,” *Computational Mechanics*, **54**(3), pp. 865–890.
- [87] Karunasena, W., Liew, K. M., and Al-Bermani, F. G. A., 1996, “Natural Frequencies of Thick Arbitrary Quadrilateral Plates Using the Pb-2 Ritz Method,” *Journal of Sound and Vibration*, **196**(4), pp. 371–385.
- [88] Nair, P. S., and Durvasula, S., 1973, “Vibration of Skew Plates,” *Journal of Sound and Vibration*, **26**(1), pp. 1–19.
- [89] Mirza, S. and Bijlanis, M., 1985, “Vibration of Triangular Plates Thickness,” *Computers & Structures*, **21**(6), pp. 1129–1135.
- [90] Gustafson, P.N., Stoskey, W.F. and Zorowski, C. F., 1953, “An Experimental Study of Natural Vibrations of Cantilevered Triangular Plates,” *Journal of Aeronautical Science*, **20**, pp. 331–

- 337.
- [91] McGee, O. G., Leissa, A. W., and Huang, C. S., 1992, “Vibrations of Cantilevered Skewed Trapezoidal and Triangular Plates with Corner Stress Singularities,” *International Journal of Mechanical Sciences*, **34**(1), pp. 63–84.
- [92] Karunasena, W., Kitipornchai, S., and Al-Bermani, F. G. A., 1996, “Free Vibration of Cantilevered Arbitrary Triangular Mindlin Plates,” *International Journal of Mechanical Sciences*, **38**(4), pp. 431–442.
- [93] Aksu, G., and Ali, R., 1976, “Determination of Dynamic Characteristics of Rectangular Plates with Cutouts Using a Finite Difference Formulation,” *Journal of Sound and Vibration*, **44**(1), pp. 147–158.
- [94] Liew, K. M., Kitipornchai, S., Leung, A. Y. T., and Lim, C. W., 2003, “Analysis of the Free Vibration of Rectangular Plates with Central Cut-Outs Using the Discrete Ritz Method,” *International Journal of Mechanical Sciences*, **45**(5), pp. 941–959.
- [95] Lam, K. Y., Hung, K. C., and Chow, S. T., 1989, “Vibration Analysis of Plates with Cutouts by the Modified Rayleigh-Ritz Method,” *Applied Acoustics*, **28**(1), pp. 49–60.
- [96] Kalita, K., and Haldar, S., 2016, “Free Vibration Analysis of Rectangular Plates with Central Cutout,” *Cogent Engineering*, **3**(1), pp. 1–12.
- [97] Lam, K. Y., Liew, K. M., and Chow, S. T., 1992, “Use of Two-Dimensional Orthogonal Polynomials for Vibration Analysis of Circular and Elliptical Plates,” *Journal of Sound and Vibration*, **154**(2), pp. 261–269.
- [98] Irie, T., Yamada, G., and Aomura, S., 1980, “Natural Frequencies of Mindlin Circular Plates,” *Journal of Applied Mechanics*, **47**(3), pp. 652–655.
- [99] Hrabok, M. M., and Hrudey, T. M., 1984, “A Review and Catalogue of Plate Bending Finite Elements,” *Computers and Structures*, **19**(3), pp. 479–495.
- [100] Long, Y.-Q., Cen, S., and Long, Z. F., 2009, *Advanced Finite Element Method In Structural Engineering*, Tsinghua University Press, Berlin, Germany.
- [101] Taylor, R. L. and Auricchio, F., 1993, “Linked Interpolation for Reissner-Mindlin Plate Elements: Part II-A Simple Triangle,” *International journal for numerical Methods in Engineering*, **36**, pp. 3057–3066.
- [102] Morley, L. S. D., 1963, *Skew Plates and Structures*, Oxford.

Références bibliographiques

- [103] Babuška, I., and Scapolla, T., 1989, “Benchmark Computation and Performance Evaluation for a Rhombic Plate Bending Problem,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**(1), pp. 155–179.
- [104] Wanji, C., and Cheung, Y. K., 2000, “Refined Quadrilateral Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **47**(1–3), pp. 605–627.
- [105] Razzaque, A., 1973, “Program of Triangular Bending Elements with Derivative Smoothing,” *International journal for numerical Methods in Engineering*, **6**, pp. 333–343.
- [106] Coull, A. and Das, P. C., 1967, “Analysis of Curved Bridge Decks.,” *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, **37**(1), pp. 75–85.
- [107] Allwood, R.J. and Cornes, G. M., 1969, “A Polygonal Finite Element for Plate Bending Problems Using the Assumed Stress Approach,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **1**(August 1968), pp. 135–149.
- [108] Dawe, D. J., and Roufaeil, O. L., 1980, “Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of Mindlin Plates,” *Journal of Sound and Vibration*, **69**(3), pp. 345–359.
- [109] Liew, K. M., Xiang, X. and Kitipornchai, S., 1993, “Transverse Vibration of Thick Rectangular Plates-I. Comprehensive Sets of Boundary Conditions,” *Computers & Structures*, **49**(1), pp. 1–29.
- [110] Kolarevic, N., Nefovska-Danilovic, M., and Petronijevic, M., 2015, “Dynamic Stiffness Elements for Free Vibration Analysis of Rectangular Mindlin Plate Assemblies,” *Journal of Sound and Vibration*, **359**, pp. 84–106.
- [111] Xing, Y., and Liu, B., 2009, “Closed Form Solutions for Free Vibrations of Rectangular Mindlin Plates,” *Acta Mechanica Sinica/Lixue Xuebao*, **25**(5), pp. 689–698.
- [112] Timoshenko, S., & Goodier, J. ., 1951, *Theory of Elasticity*, London.
- [113] Timoshenko, S. P., and Gere, J. M., 1970, *Theory of Elastic Stability*, New York,.
- [114] Nguyen-Xuan, H., Rabczuk, T., Nguyen-Thanh, N., Nguyen-Thoi, T., and Bordas, S., 2010, “A Node-Based Smoothed Finite Element Method with Stabilized Discrete Shear Gap Technique for Analysis of Reissner-Mindlin Plates,” *Computational Mechanics*, **46**(5), pp. 679–701.
- [115] Nguyen-Xuan, H., Liu, G. R., Thai-Hoang, C., and Nguyen-Thoi, T., 2010, “An Edge-Based Smoothed Finite Element Method (ES-FEM) with Stabilized Discrete Shear Gap Technique for

- Analysis of Reissner-Mindlin Plates,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**(9–12), pp. 471–489.
- [116] Kitipornchai, S., Xiang, Y., Wang, C. M., and Liew, K. M., 1993, “Buckling of Thick Skew Plates,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, pp. 1299–1310.
- [117] Liew, K. M., Wang, J., Ng, T. Y., and Tan, M. J., 2004, “Free Vibration and Buckling Analyses of Shear-Deformable Plates Based on FSDT Meshfree Method,” *Journal of Sound and Vibration*, **276**, pp. 997–1017.
- [118] Lee, W. M., Chen, J. T., and Lee, Y. T., 2007, “Free Vibration Analysis of Circular Plates with Multiple Circular Holes Using Indirect BIEMs,” *Journal of Sound and Vibration*, **304**(3–5), pp. 811–830.
- [119] Laura, P. A. A., Masiá, U., and Avalos, D. R., 2006, “Small Amplitude, Transverse Vibrations of Circular Plates Elastically Restrained against Rotation with an Eccentric Circular Perforation with a Free Edge,” *Journal of Sound and Vibration*, **292**(3–5), pp. 1004–1010.
- [120] Kerboua, Y., Lakis, A., Thomas, M., and Marcouiller, L., 2008, “Vibration Analysis of Rectangular Plates Coupled with Fluid,” *Applied Mathematical Modelling*, **32**(12), pp. 2570–2586.
- [121] Kerboua, Y., Lakis, A., Thomas, M., and Marcouiller, L. 2005, *Comportement Dynamique Des Plaques Rectangulaires Submergées*, rapport.
- [122] Haddara, M. R., and Cao, S., 1996, “A Study of the Dynamic Response of Submerged Rectangular Flat Plates,” *Marine Structure*, **9**, pp. 913–933.
- [123] Lindholm, U., Kana, D., Chu, W., and Abramson, H., 1965, “Elastic Vibration Characteristics of Cantilever Plates in Water,” *Journal of Ship Research*, **9**(1), p. 123.
- [124] Fu, Y., and Price, W. G., 1987, “Interactions between a Partially or Totally Immersed Vibrating Cantilever Plate and the Surrounding Fluid,” *Journal of Sound and Vibration*, **118**(3), pp. 495–513.
- [125] Ergin, A., and Uğurlu, B., 2003, “Linear Vibration Analysis of Cantilever Plates Partially Submerged in Fluid,” *Journal of Fluids and Structures*, **17**(7), pp. 927–939.
- [126] Belouнар, A., 2019, “Eléments Finis Membranaires et Flexionnels à Champ de Déformation Pour l’Analyse Des Structures,” Université Mohamed Khider – Biskra.
- [127] Fortas, L., 2020, “Investigation des éléments finis non conforme pour l'analyse des structures.”

Références bibliographiques

- Université Mohamed Khider – Biskra.
- [128] Messai, A., 2019, “Contribution de l’approche En Déformation Dans l’analyse Statique et Dynamique Des Structures,” Université Mohamed Khider – Biskra.
- [129] Guerraiche, K., 2014, “Eléments finis d’Élasticité Plane et de Volume Basés sur l’Approche En Déformation.” Université Mohamed Khider – Biskra.
- [130] Khiouani, H. E., 2020, “Contribution de l’ Approche En Déformation Pour La Modélisation Des Structures Courbes,” Université Mohamed Kheider Biskra.
- [131] Belounar, L., Messai, A., Merzouki, T., and Fortas, L., 2016, “A Comparative Study of Membrane Finite Elements Based on the Strain Approach,” *Academic Journal of Civil Engineering*, **34**(1), pp. 66–72.
- [132] Boussef, F., Belounar, A., and Belounar, L., 2021, “Assumed Strain Finite Element for Natural Frequencies of Bending Plates,” *World Journal of Engineering*, <https://doi.org/10.1108/WJE-02-2021-0114>.

Annexes

La matrice de transformation [C] (12×12) de l'élément **KSBQP**[77] est donnée comme suit :

$$[C] = \begin{bmatrix} P_1(x_1, y_1) \\ P_2(x_2, y_2) \\ P_3(x_3, y_3) \\ P_4(x_4, y_4) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Où la matrice [P_i] (3×12) avec les coordonnées (x_i, y_i) du nœud i (i=1,2,3,4) est :

$$[P_i(x_i, y_i)] = \begin{bmatrix} 1 & -x_i & -y_i & -\frac{x_i^2}{2} & -\frac{x_i^3}{6} & -\left(\frac{x_i^2 y_i}{2} + \frac{y_i^4}{12}\right) & -\frac{x_i^3 y_i}{6} & -\frac{y_i^2}{2} & -\left(\frac{y_i^2 x_i}{2} + \frac{x_i^4}{12}\right) & -\frac{y_i^3}{6} & -\frac{y_i^3 x_i}{6} & -\frac{x_i y_i}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x_i & \frac{x_i^2}{2} & x_i y_i & \frac{x_i^2 y_i}{2} & 0 & \left(\frac{y_i^2}{2} + \frac{x_i^3}{3}\right) & 0 & \frac{y_i^3}{6} & \frac{y_i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \left(\frac{y_i^3}{3} + \frac{x_i^2}{2}\right) & \frac{x_i^3}{6} & y_i & x_i y_i & \frac{y_i^2}{2} & \frac{y_i^2 x_i}{2} & \frac{x_i}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Les matrices [Q] et [P] sont données respectivement comme suit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & x^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y^2 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & x^2 & 0 & 2y & 0 & y^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & -\frac{x^2}{2} & -\frac{x^3}{6} & -\left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{y^4}{12}\right) & -\frac{x^3 y}{6} & -\frac{y^2}{2} & -\left(\frac{y^2 x}{2} + \frac{x^4}{12}\right) & -\frac{y^3}{6} & -\frac{y^3 x}{6} & -\frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & \frac{x^2}{2} & xy & \frac{x^2 y}{2} & 0 & \left(\frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) & 0 & \frac{y^3}{6} & \frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \left(\frac{y^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) & \frac{x^3}{6} & y & xy & \frac{y^2}{2} & \frac{y^2 x}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

La matrice [G] est donnée pour l'élément **KSBQP** comme suit :

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -x & -\frac{x^2}{2} & -xy & -\frac{yx^2}{2} & 0 & -\frac{y^2}{2} - \frac{x^3}{3} & 0 & -\frac{y^3}{6} & -\frac{y}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} & -\frac{x^3}{6} & -y & -xy & -\frac{y^2}{2} & -\frac{xy^2}{2} & -\frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

La matrice de transformation [C] (12×12) de l'élément **MSBQP**[132] est donnée comme suit:

$$[C] = \begin{bmatrix} P_1(x_1, y_1) \\ P_2(x_2, y_2) \\ P_3(x_3, y_3) \\ P_4(x_4, y_4) \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Où la matrice [P_i] (3×12) avec les coordonnées (x_i, y_i) du nœud i (i=1, 2,3 ,4) est :

$$[P_i(x_i, y_i)] = \begin{bmatrix} 1 & -x_i & -y_i & -\frac{x_i^2}{2} & -\left(\frac{x_i^2 y_i}{2} + \frac{x_i y_i^3}{6}\right) & -\frac{y_i^2}{2} & -\left(\frac{y_i^2 x_i}{2} + \frac{y_i x_i^3}{6}\right) & -\frac{x_i y_i}{2} & \frac{x_i}{2} & \frac{x_i y_i}{2} & \frac{y_i}{2} & \frac{x_i y_i}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & x_i y_i + \frac{y_i^3}{6} & 0 & \left(\frac{y_i^2}{2} + \frac{y_i x_i^2}{2}\right) & \frac{y_i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y_i}{2} & 0 & -\frac{y_i}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \left(\frac{x_i^2}{2} + \frac{x_i y_i^2}{2}\right) & y_i & x_i y_i + \frac{x_i^3}{6} & \frac{x_i}{2} & 0 & -\frac{x_i}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x_i}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Les matrices [Q] et [P] sont données respectivement comme suit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & xy & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x+y^2 & 0 & 2y+x^2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

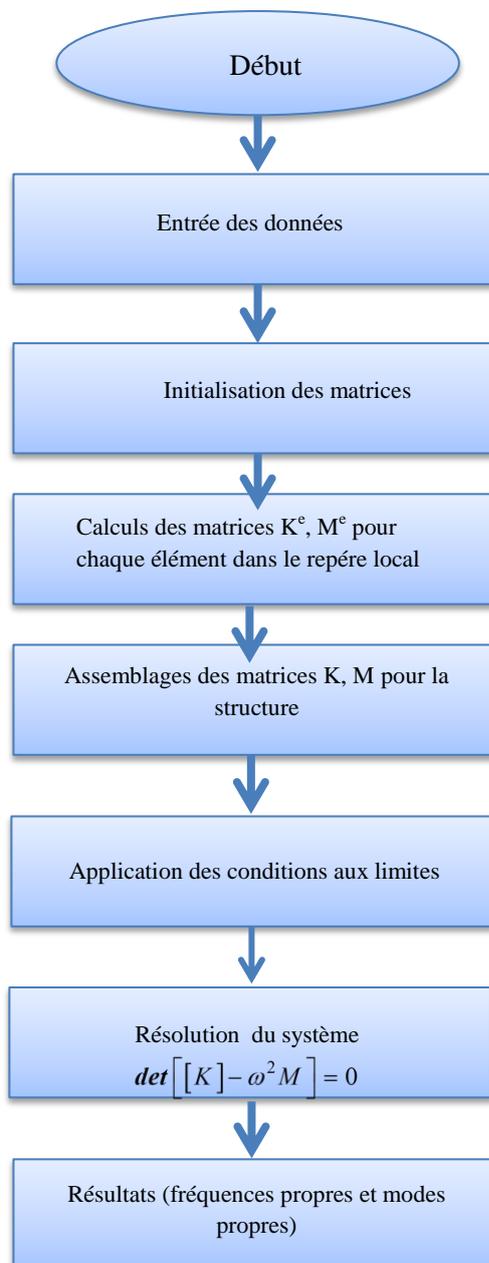
$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & -x & -y & -\frac{x^2}{2} & -\left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^3}{6}\right) & -\frac{y^2}{2} & -\left(\frac{xy^2}{2} + \frac{x^3 y}{6}\right) & -\frac{xy}{2} & \frac{x}{2} & \frac{xy}{2} & \frac{y}{2} & \frac{xy}{2} \\ 0 & 1 & 0 & x & xy + \frac{y^3}{6} & 0 & \left(\frac{y^2}{2} + \frac{yx^2}{2}\right) & \frac{y}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} & 0 & -\frac{y}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \left(\frac{x^2}{2} + \frac{xy^2}{2}\right) & y & xy + \frac{x^3}{6} & \frac{x}{2} & 0 & -\frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

La matrice [G] est donnée pour l'élément MSBQP basé sur la théorie de Reissner –Mindlin comme suit :

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -x & -xy + \frac{y^3}{6} & 0 & -\frac{y^2}{2} + \frac{x^2 y}{2} & -\frac{y}{2} & \frac{1}{2} & \frac{y}{2} & 0 & \frac{y}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2 x}{2} & -y & -xy + \frac{x^3}{6} & -\frac{x}{2} & 0 & \frac{x}{2} & \frac{1}{2} & \frac{x}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & -xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x + \frac{y^2}{2} & 0 & y - \frac{x^2}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x - \frac{y^2}{2} & 0 & y + \frac{x^2}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -xy & 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Organigrammes :

1- Vibration libre



2- Vibration libre du structure en interaction avec un fluide

