RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**
OPTION : **Analyse Fonctionnelle et EDP**
Intitulé :

Semi Groupes et Opérateurs de Toeplitz.

Présenté par : **Aissa BOUHALI**

Sous la direction de : **Zohra BENDAOUD**

Soutenue le 11 septembre 2022 devant le jury composé de :

Mohamed Berbiche	Prof	Université de Biskra	Président
Zohra Bendaoud	MCA	ENS de Laghouat	Directeur de Thèse
Abdelaziz Rahmoune	MCA	Université de Laghouat	Examinateur
Ameur Yagoub	MCA	Université de Laghouat	Examinateur
Tidjani Menacer	Prof	Université de Biskra	Examinateur
Naceur Khelil	Prof	Université de Biskra	Examinateur

Année Universitaire : 2021-2022

Remerciements

Voici venue le moment des remerciements, peut-être en un sens le moment le plus important - tout du moins symboliquement - puisque ces quelques mots à la fois terminent cinq ans de travail.

Je tiens tout d'abord à remercier et en premier lieu ALLAH, le tout puissant et miséricordieux qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour mener à bonne fin ce travail.

Je voudrais remercier grandement mon directeur de thèse, Bendaoud Zohra, pour toute son aide. Je suis ravi d'avoir travaillé en sa compagnie car outre son appui scientifique, elle a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse.

Je tiens à remercier les membres du jury pour leur présence, pour leur lecture attentive de ce mémoire, ainsi que pour les remarques qu'ils m'adresseront lors de cette soutenance afin d'améliorer mon travail.

Je tiens également à remercier mes amis Abdelrahman Yousef et Louhichi Issam pour leur aide, leur soutien et leur gentillesse. Je souhaite également les remercier pour la confiance dont ils ont fait preuve à mon égard en me laissant m'impliquer au sein de leur vie collective. Les rapports humains dont j'ai profité à leurs côtés ont fait naître de réels liens d'amitié qui à mes yeux n'ont pas de prix. Soyez assuré de ma plus profonde gratitude et de mon appréciation.

Une thèse, ce n'est pas seulement un(e) doctorant(e) face à un jury ; c'est aussi des collègues, ami(e), une famille qui vous aident, vous soutiennent, vous accompagnent. Permettez-moi donc de vous retenir un peu pour les remercier alleux aussi.

Dans l'impossibilité de citer tous les noms, nos sincères remerciements vont à tous ceux et celles, qui de près ou de loin, ont permis par leurs conseils et leurs compétences la réalisation de cette thèse.

A mes parents.
Ils ne savaient ni lire ni écrire,
leur amour me permet aujourd'hui d'écrire
ce thèse.

Résumé

Cette thèse s'intéresse aux problèmes de produit et commutativité des opérateurs de Toeplitz quasihomogène ce qui reste un problème ouvert jusqu'à ce jour. De nombreux résultats encourageants dans ce sujet sont discutés. Ceci fait, voyant que les notions de la puissance et racine jouent un rôle très important dans l'étude de la commutativité de ces opérateurs. Ensuite, on présente notre contribution sur la puissance de ces opérateurs dans un cas particulier.

Dans un second temps nous réalisons une étude sur les opérateurs de Toeplitz défini sur l'espace de Hardy. Précisément, les opérateurs dans l'espace Modèle qui sont appelés les opérateurs de Toeplitz tronqués. Les travaux sur le thème du semi-groupes des opérateurs de Toeplitz sur l'espace Modèle sont introduits.

Mots-Clés ; Espace de Hardy, Espace Modèle, Puissance d'Opérateur de Toeplitz Quasihomogène, Opérateur de Toeplitz Tronqué, Semi-Groupes.

Abstract

This thesis is interested in the product and commutativity problems of quasihomogeneous Toeplitz operators which remains an open problem until today. Many encouraging results in this topic are discussed. This done, seeing that the notions of power and root play a very important role in the study of the commutativity of these operators. Then, we present our contribution on the power of these operators in a particular case.

Secondly, we carry out a study on the Toeplitz operators defined on the Hardy space. Precisely, the operators in the Model space which are called the truncated Toeplitz operators. The work on the theme of the semi-groups of Toeplitz operators on the Model space is introduced.

Key-Words ; Hardy Space, Model Space, Power of Quasihomogeneous Toeplitz Operator, Truncated Toeplitz Operator, Semigroups.

الملخص

تهتم هذه الاطروحة بدراسة جداء وتبادل مؤثرات توبليتز شبه المتجانسة والتي تعتبر مسألة مفتوحة الي غاية يومنا هذا، كما سيتم مناقشة بعض النتائج المشجعة في هذا الموضوع. كما سنتطرق لمفهوم قوة وجذر مؤثر توبليتز والتي تلعب دورا مهما في دراسة تبادل هذه المؤثرات، كما سنعرض نتائجنا بخصوص هذا الموضوع.

من جهة اخرى سوف نقوم بدراسة مؤثرات توبليتز في فضاء هاردي وبالأخص تلك المعرفة على الفضاء النموذجي والتي تعرف بمؤثرات توبليتز المقتطعة. كما سنستعرض الأعمال الخاصة بأنصاف زمر مؤثرات توبليتز المقتطعة.

الكلمات المفتاحية : فضاء هاردي، فضاء نموذجي، قوة مؤثر توبليتز شبه المتجانس، مؤثر توبليتز المقتطع، نصف زمرة.

Table des matières

Liste des Symboles

$\mathbb{D}$	Le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$ et $\mathbb{T}$ son bord.
$L^2(\mathbb{T})$	L'ensemble des fonctions mesurables et carré sommable sur $\mathbb{T}$.
$\breve{f}$	Transformation de Fourier de la fonction f.
$\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$	L'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.
H^2	L'espace de Hardy.
k_λ	Le noyau reproduisant en $\lambda \in \mathbb{D}$ sur l'espace de Hardy H^2.
P	La projection orthogonale de L^2 sur H^2.
S	L'opérateur de décalage à droit ou shift sur H^2.
K_u^2	L'espace Modèle associe à la fonction intérieure u.
k_λ^u	Le noyau reproduisant en $\lambda \in \mathbb{D}$ sur l'espace Modèle K_u^2.
P_u	La projection orthogonale de L^2 sur K_u^2.
M_φ	L'opérateur de Laurent ou multiplication par la fonction φ.
T_φ	L'opérateur de Toeplitz de symbole φ.
X	Espace de Banach.
$\mathcal{B}(X)$	L'algèbre de Banach des opérateurs linéaire bornée dans X.
$\mathcal{GL}(X)$	L'ensemble des éléments inversibles dans $\mathcal{B}(X)$.
$\rho(A)$	L'ensemble résolvant de l'opérateur A de domaine de définition $D(A)$.
L_a^2	Espace de Bergman.
$dA(z) = \frac{1}{\pi} r dr d\theta$	La mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$.
$\widehat{\phi}$	Transformation de Mellin de la fonction ϕ.
$*_M$	Produit de convolution de Mellin.
$\lfloor x \rfloor$	La partie entière de x.
A_φ^u	Opérateur de Toeplitz tronqué sur K_u^2 de symbole φ.
S_u	La compression de l'opérateur shift sur K_u^2.
$\otimes$	Produit tensoriel.
$Cf = \widetilde{f}$	Opérateur de conjugaison de la fonction f.
S_u^α	Opérateur de shift généralisé.
$\mathcal{B}_u^\alpha$	L'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α.
$\{A\}'$	L'ensemble des opérateurs commutant avec l'opérateur A.
$\mathcal{T}_u$	L'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués et borné sur K_u^2.
$\mathcal{N}$	Classe de Nevanlinna et $\mathcal{N}^+$ la classe de Smirnov.

Introduction

Il y a au moins deux raisons à l'intérêt continu et croissant chez les opérateurs de Toeplitz. D'une part, les opérateurs de Toeplitz sont importants en relation avec une variété de problèmes en physique, théorie des probabilités, théorie de l'information et du contrôle, et plusieurs autres domaines, bien que nous n'étudions pas les applications de ces opérateurs dans ce thèse. D'autre part, outre les opérateurs différentiels, les opérateurs de Toeplitz constituent l'un des plus importants classes d'opérateurs non auto-adjoints et ils sont un exemple fascinant de la interaction fructueuse entre des sujets tels que la théorie des opérateurs, analyse complexe, la théorie des fonctions et la théorie des algèbres de Banach.
Le plan complexe sera noté $\mathbb{C}$, le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ et son bord $\mathbb{T}$. Notons que dm est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. L'espace de Hardy H^2 se compose de toutes les fonctions holomorphes qui ayant des représentations en séries entières avec des coefficients carrés sommables. On bien connu que H^2 est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f(z)\overline{g}(z)dm(z).$$

L'opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ sur H^2 défini par

$$\begin{aligned} T_\varphi : H^2 &\to H^2 \\ f &\to T_\varphi f = P(\varphi f). \end{aligned}$$

où P la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2, qui est donnée explicitement par l'intégrale de Cauchy :

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{1 - z\overline{\xi}} dm(\xi), \qquad z \in \mathbb{D}$$

Dans la théorie des opérateurs de Toeplitz il a deux problèmes essentiels ; le produit et la commutativité. En 1964 A. Brown et P.R. Halmos dans [8] donnez le résultat le plus populaire sur cette question dans l'espace de Hardy H^2, qui dit : L'opérateur $T_\varphi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $\overline{\varphi}$ ou ψ est analytique, dans

ce cas $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$.
L'opérateur de shift sur H^2 noté par S défini comme l'opérateur de multiplication par z. Théorème de Beurling caractérise tous les sous-espaces invariants par le shift dans l'espace H^2. En effet, l'espace Modèle K_u^2 est un sous-espace fermé non nul de H^2 invariant par l'opérateur adjoint de shift S^*, c'est-à-dire

$$K_u^2 = H^2 \ominus uH^2.$$

pour une fonction intérieure u. Comme dans l'espace de Hardy, K_u^2 est un espace de noyau reproduisant définie par

$$k_\lambda^u(z) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)}u(z)}{1 - \bar{\lambda}z}, \quad (\lambda, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}$$

De plus, la projection orthogonale P_u de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u^2 donné par la formule suivante

$$(P_u f)(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\zeta) \frac{1 - u(\lambda)\overline{u(\zeta)}}{1 - \lambda\bar{\zeta}} |d\zeta|.$$

L'opérateur de Toeplitz tronqué A_φ^u est la compression sur K_u^2 de l'opérateur de Toeplitz défini sur l'espace H^2, de même S_u et S_u^* sont les compressions des opérateurs S et S^* sur l'espace Modèle K_u^2.
De nombreux chercheurs ont étudié les propriétés des opérateurs de Toeplitz tronqué, voir par exemple [5, 6, 9, 17, 18, 19, 20, 38, 39, 40, 41, 44, 47].
Un rôle important va être joué par les travaux de D. Sarason. En particulier, dans [38] il est fourni une condition nécessaire et suffisant pour un opérateur borné dans K_u^2 pour doit être un opérateur de Toeplitz tronqué. En outre, l'espace des opérateurs de Toeplitz tronqués est fermé par la topologie faible. De plus, et donne une caractérisation complète des opérateurs de Toeplitz tronqués de rang un.

Nous dirons qu'un opérateur de Toeplitz tronqué A est de type $\alpha \in \mathbb{C}$ si

$$A = A_{\varphi + \alpha \overline{S_u \bar{\varphi}} + c},$$

cette notion a introduit par N.A. Sedlock dans [41]. Ensuite, il donne des conditions nécessaires et suffisantes pour le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués sur un espace Modèle être lui-même un opérateur de Toeplitz tronqué.
L'auteur dans [42] donné le résultat suivant : $(T_t)_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe tels que pour tout $t \geq 0$, T_t commute avec S_u. Alors, $(T_t)_{t\geq 0}$ est de contraction ; si et seulement s'il existe une fonction analytique C a une partie réelle non positive sur $\mathbb{D}$ telle que pour tout $t \geq 0$, on a $T_t = T(e^{tC} + \phi H^\infty)$.
Le même auteur dans [43] études les opérateurs dissipatifs sur l'espace Modèle, et aussi le générateur infinitésimal de semi-groupe fortement continu.

Les auteurs dans [47] utilisent les résultats dans [38, 41, 42, 43] pour obtenir une caractérisation des semi-groupes des opérateurs de Toeplitz tronqués. Plus précisément, ils étude le générateur de semi-groupes uniformément continus et C_0- semi groupes de contraction des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Soit $dA(z) = \frac{1}{\pi} r dr d\theta$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque unité, l'espace de Bergman noté L_a^2 consistent les fonctions holomorphe dans l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{D}, dA)$. Cet espace est a noyau reproduisant, de plus est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{D}, dA)$. Donc, on peut écrire l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman de symbole $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$ comme suit

$$T_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)\varphi(w)}{(1 - z\overline{w})^2} dA(w), \quad f \in L_a^2, z \in \mathbb{D}$$

L'étude des opérateurs de Toeplitz dans l'espace de Bergman est plus difficile que celle dans l'espace de Hardy, par exemple seulement en 2001, un théorème similaire que le théorème de Brown-Halmos a été donné par P. Ahern et Ž. Čučković dans [1].

Pour tout fonction f dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$ nous pouvons écrire ce qui suit

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\theta} \varphi_k(r), \qquad \varphi_k \in L^2([0, 1[, rdr).$$

Un opérateur de Toeplitz est dite quasihomogène de degré $p \in \mathbb{Z}$ si son symbole est de la forme $e^{ip\theta}\varphi$, où φ est une fonction radiale, i.e ; $\forall z \in \mathbb{D}, \varphi(z) = \varphi(|z|)$. Dans cette thèse, on s'intéressera seulement sur les opérateurs de Toeplitz quasi-homogène.

Soit $p \in \mathbb{Z}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de l'opérateur de Toeplitz quasihomogène sur les éléments de la base de L_a^2

$$T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) = \begin{cases} 0 & , \text{si} \quad n < p \\ 2(n + p + 1)\widehat{\phi}(2n + p + 2)z^{n+p} & , \text{si} \quad n \geq p \end{cases}$$

avec $\widehat{\phi}$ la transformation de Mellin de la fonction ϕ qui est un outil très important dans l'étude de ce sujet.

Le résultat dans [14] permet d'étudier la commutativité de l'opérateur de Toeplitz quasihomogène avec symbole $e^{im\theta}r^p$, où $p, m \in \mathbb{N}$ et $m \neq p$.

I. Louhichi et L. Zakariasy dans [29], ils prouvent qu'un opérateur de Toeplitz quasihomogène ne commute qu'avec un opérateur de Toeplitz quasihomogène de même signe du type. Aussi : Si $T_{e^{ip\theta}\phi}, p \in \mathbb{N}^*$ commute avec $f(re^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\theta}\varphi_k(r) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$. Alors, pour tout $k < 0$ on a $\varphi_k = 0$.

En 2006, les auteurs dans [28] donner des conditions nécessaires et suffisantes

pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz quasihomogènes soit encore un opérateur de Toeplitz quasihomogène.
Plus récemment, il a été prouvé dans [2] que si l'opérateur $T_f = T_{\sum_{k=-\infty}^{N} e^{ik\theta}\varphi_k}$ commute avec $T_{z^2+\bar{z}^2}$ alors $T_f = \alpha T_{z^2+\bar{z}^2} + \beta$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Ce résultat est généralisé dans [45] pour l'opérateur $T_{\phi_1(z)+\bar{z}^m\overline{\phi_2(z)}}$, où ϕ_1 est un polynôme holomorphe non constant, $m \in \mathbb{N}^*$ et ϕ_2 est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ avec $\phi_2(0) \neq 0$.

Dans [25] I. Louhichi introduit la notion de racine (ou puissance) d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène. Par ailleurs, il est déterminé le commutant de l'opérateur $T_{e^{ip\theta}\phi}, p \in \mathbb{N}^*$ dans le cas où cet opérateur admet $T - p^{ième}$ racine. Dans la même direction, I. Louhichi et N.V. Rao dans [26] preuves l'existence de $T - p$ racine pour l'opérateur de Toeplitz quasihomogène $T_{e^{ip\theta}\phi}$ avec la fonction ϕ de la forme suivante :

$$\phi(r) = \sum_{i=1}^{k} r^{a_i}(\ln r)^{b_i}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{N}.$$

Avec collaboration du I. Louhichi nous avons donné une condition suffisante pour la puissance d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène $T_{e^{ip\theta}\phi}$ avec la fonction radiale ϕ est un polynôme reste toujours un opérateur de Toeplitz quasihomogène [7]. L'un des principaux résultats obtenus caractérise les opérateurs de Toeplitz qui sont commutant avec l'opérateur de Toeplitz quasihomogène $T_{e^{ip\theta}\phi}$. De plus, nous avons fourni des nombreux exemples importants.

Notre travail se divise en trois chapitres ;
Le premier chapitre est intitulé : Notions de base, il se limite à présenter les outils nécessaires à la compréhension du reste de la thèse comme l'espace de Hardy, espace Modèle et les opérateurs de Toeplitz, et aussi quelques résultats connus sur les semi-groupes sont munis de leur preuve.

Le deuxième chapitre présente une étude globale sur les opérateurs de Toeplitz quasihomogènes en particulier les problèmes de produit et commutativité. On voulait améliorer les résultats de Louhichi sur la puissance d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène ; c'est dans ce chapitre qu'on trouve notre contribution dans cette direction.

Le dernier chapitre parlera sur les opérateurs de Toeplitz tronques, précisément qui sont de type α. Nous allons nous intéresser par les semi groupes des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Chapitre 1

Notions de Base : Espace de Hardy, Espace Modèle, Opérateurs de Toeplitz et Semi groupes

On note par $L^2(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions mesurables et carré sommable par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée notée m sur $\mathbb{T}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}dm$. Notons que la famille $\{z^n; n \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormale.
Pour toute fonction f dans $L^2(\mathbb{T})$ on peut se développer en série de Fourier sous la forme suivante :

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \breve{f}(n)z^n,$$

avec les coefficients $\breve{f}(n)$, appelés coefficients de Fourier de la fonction f, définie par

$$\breve{f}(n) = \langle f, z^n\rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Voici deux théorèmes fondamentaux de la transformation de Fourier.

Théorème 1.0.1. *(Plancherel-Parseval)*
Si $f \in L^2(\mathbb{T})$ et si $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est la suite de ses coefficients de Fourier de f. Alors

$$\|f\|_2 = \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2dt\Big)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

De plus, f est la somme de la série de Fourier $\{S_n(f)\}_{n\geq 0}$ avec

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\|_2 = 0,$$

où

$$S_n(f)(e^{it}) = \sum_{|k|\leq n} c_k e^{ikt}.$$

Théorème 1.0.2. *(Riesz-Fischer)*
Toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ *telle que* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < \infty$ *est une suite des coefficients de Fourier d'une fonction* f *dans* $L^2(\mathbb{T})$.

1.1 Espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$

On appelle espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ sur le disque unité $\mathbb{D}$ l'ensemble des fonctions holomorphe qui ont une quantité $\lim\limits_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$ fini, c'est-à-dire ;

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \ : \ \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty \right\},$$

où $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.
De plus, cette quantité définit une norme sur $H^2(\mathbb{D})$ comme suit :

$$\|f\|^2_{H^2(\mathbb{D})} = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Théorème 1.1.1.
Soit f *une fonction holomorphe sur* $\mathbb{D}$ *telle que* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. *Donc,* $f \in H^2(\mathbb{D})$ *si et seulement si*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < \infty, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt.$$

Preuve.
Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ telle que $z \in \mathbb{D}$, on pose $z = re^{it}$ avec $r \in [0,1[$ et $t \in \mathbb{R}$. D'après le Théorème de Plancherel-Parseval 1.0.1, on obtient :

$$f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

On passe à la limite, on a :

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

□

Remarque 1.1.2.

On a donc une autre écriture de la norme de $f \in H^2(\mathbb{D})$:

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit l'espace de Hardy H^2 sur le cercle unité $\mathbb{T}$ par :

$$H^2(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) \ ; \ \breve{f}(n) = 0, \ n < 0 \right\}.$$

on rappelle aussi la limite radiale de f et on note f^* donne par

$$f^*(e^{it}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{int}.$$

Théorème 1.1.3.

Supposons que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une fonction dans* $H^2(\mathbb{D})$. *Alors*

$$\lim_{r\to 1^-} f(re^{it}) = f^*(e^{it}).$$

existe presque partout sur $\mathbb{T}$, *de plus*

$$\|f\|_{H^2} = \|f^*\|_{L^2}.$$

Le théorème suivant identifier $H^2(\mathbb{T})$ à l'espace $H^2(\mathbb{D})$. Donc, dans tout ce qui suit dans cette thèse on utilise la notation H^2 laquelle désignera indifféremment $H^2(\mathbb{D})$ ou $H^2(\mathbb{T})$ suivant le contexte.

Théorème 1.1.4.

L'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{T}) \\ & f & \longmapsto & \Phi(f) = f^*. \end{array}$$

est un isomorphisme isométrique.

Preuve.

Puisque

$$\lim_{r\to 1^-} \|f^* - f_r\| = 0 \qquad\qquad (f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}))$$

On a :

$$\|f\|_2 := \lim_{r\to 1^-} \|f_r\|_2 = \|f^*\|_2.$$

Comme $\breve{f^*}(n) = 0$ pour tout entier $n < 0$, l'application Φ est bien une isométrie de $H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{T})$.
Maintenant, il est clair que Φ une application linéaire et injective.
Pour la surjectivité on suppose que $g \in H^2(\mathbb{T})$ donc g est de la forme $g(e^{it}) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{int}$ avec $\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty$.
Ensuite, d'après le Théorème 1.1.1, la fonction $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ définit sur $\mathbb{D}$ appartient a $H^2(\mathbb{D})$. Ainsi, l'application Φ est surjective, on conclut que l'application Φ est un isomorphisme.
Ainsi Φ est bien un isomorphisme isométrique. $\square$

Théorème 1.1.5. *[15]*
L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$ est un espace de Banach.

Théorème 1.1.6.
L'espace $H^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire suivant :

$$< f, g >_{H^2(\mathbb{D})} = < f^*, g^* >_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(e^{it}) \overline{g^*(e^{it})} dt.$$

Preuve.

On a,

$$< f, f >_{H^2(\mathbb{D})} = \|f^*\|^2_{L^2(\mathbb{T})},$$

grâce au Théorème 1.1.3 on obtient :

$$\|f^*\|_{L^2(\mathbb{T})} = \|f\|_2.$$

donc, la norme de $H^2(\mathbb{D})$ se déduit bien du produit scalaire que nous avons fixé.
De plus $H^2(\mathbb{D})$ est un espace complet, d'après le Théorème 1.1.5. Ainsi $H^2(\mathbb{D})$ est bien un espace de Hilbert. $\square$

Théorème 1.1.7.
Pour toute fonction f dans $H^2(\mathbb{D})$ et pour toute $z \in \mathbb{D}$, on a :

$$|f(z)| \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{1 - |z|^2}}.$$

Preuve.
En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur f on obtient, pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |\sum_{n\geq 0} a_n z^n| \\
&\leq \sum_{n\geq 0} |a_n||z^n| \\
&\leq \left(\sum_{n\geq 0} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\geq 0} |z|^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_2 \times \left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1.8.
Toute suite convergente en norme dans $H^2(\mathbb{D})$ converge vers la même limite uniformément sur tout compact dans $\mathbb{D}$.

Preuve.
Supposons que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^2(\mathbb{D})$ une suite convergente en norme dans $H^2(\mathbb{D})$ vers une fonction f dans $H^2(\mathbb{D})$, autrement dit ;

$$\|f_n - f\|_2 \to 0, \qquad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Ensuite, pour tout nombre réel $0 < R < 1$ et pour tout n fixé, le Théorème 1.1.7 implique que ;

$$\sup_{|z|\leq R} |f_n(z) - f(z)| \leq \frac{\|f_n - f\|_2}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

c'est-à-dire, f_n converge uniformément vers f dans le disque fermé $\{|z| \leq R\}$. On déduit que, f_n converge uniformément vers f sur tout compact dans $\mathbb{D}$. □

Exemples 1.1.9.
La fonction $z \mapsto \log\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n}$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$, car la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

L'espace de Hardy H^2 admet un noyau reproduisant k_λ en $\lambda \in \mathbb{D}$, définie par :

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\overline{\lambda}z}.$$

pour toute fonction $f \in H^2$, on a

$$\langle f, k_\lambda \rangle = f(\lambda).$$

De plus,

$$\|k_\lambda\|^2 = \langle k_\lambda, k_\lambda \rangle = k_\lambda(\lambda) = \frac{1}{1 - |\lambda|^2}.$$

La projection orthogonale P de L^2 sur H^2 peut être exprimée en terme d'un opérateur noyau :

$$P(f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - z\overline{\zeta}} |d\zeta|.$$

Remarque 1.1.10.

Une définition similaire pour les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$, $\quad (0 < p < \infty)$ peut être formulée comme suit :

$$H^p(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}) \ : \ \lim_{r \to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt < \infty \right\}.$$

et $H^\infty(\mathbb{D})$ l'espace de fonctions f holomorphes sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty.$$

De plus, nous avons les inclusions suivantes :

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^q(\mathbb{D}).$$

pour $0 < q < p < \infty$.
Il est bien connu si $g \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $f \in H^2(\mathbb{D})$. Donc

$$fg \in H^2(\mathbb{D}) \qquad \text{et} \qquad \|fg\|_2 \leq \|f\|_2 \|g\|_\infty.$$

1.2 Espace Modèle

L'opérateur de décalage à droite (ou shift) sur H^2 noté S définit par :

$$S[f](z) = zf(z), \qquad f \in H^2, z \in \mathbb{T}$$

et son adjoint [1] l'opérateur de décalage à gauche $S^* : H^2 \to H^2$ est définit par :

$$S^*[f](z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}, \qquad z \in \mathbb{T}.$$

Définition 1.2.1.
Un sous-espace M de H^2 est dit invariant par l'opérateur de shift S s'il est fermé et tel que

$$SM \subset M.$$

Le résultat suivant que nous allons énonce donne une caractérisation complète des sous espaces invariants par le shift dans H^2. Tout d'abord, on dit que u une fonction intérieure si appartient à H^∞ et de module égale 1 presque partout sur $\mathbb{T}$.

Théorème 1.2.2. *(Beurling)*
$\mathcal{M} \neq \{0\}$ est un sous-espace de H^2 vérifiant $z\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, si et seulement s'il existe une fonction intérieure u telle que

$$\mathcal{M} = uH^2.$$

Pour une preuve de ce théorème, on pourra se reporter à [33].
Notons que E est un sous espace fermé invariant par S dans H^2 si et seulement si $E^\perp$ est invariant par S^*.

Définition 1.2.3. (Espace Modèle)
Le sous espace fermé non nul de H^2, invariant par S^* appelé espace Modèle est noté K_u^2. De plus, on a

$$K_u^2 = (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2.$$

pour une certaine fonction intérieure u.

1. Soit H un espace de Hilbert et $A \in L(H)$. Alors il existe un unique opérateur $A^* \in L(H)$, appelé adjoint de A, qui vérifie la relation suivante :

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \qquad \forall x, y \in H$$

De plus, on a

$$||A|| = ||A^*||.$$

Proposition 1.2.4. *Soient u et v deux fonctions intérieures.*

1. *Si u divise v dans H^∞, alors*
$$K_u^2 \subset K_v^2.$$
2. *Si u divisible dans H^2 par z, alors K_u^2 contient les constantes.*

Preuve.

1. Soit $f \in K_u^2$. Alors $f \perp uh$ pour toute fonction $h \in H^2$. Par hypothèse on a, $v = ug$ avec g une fonction dans H^∞. Alors
$$\langle f, vh \rangle = \langle f, ugh \rangle = 0,$$
car $gh \in H^2$ (voir Remarque 1.1.10), ensuite
$$f \in K_v^2.$$
ce qui achève la preuve.
2. Si $f \in K_z^2$, alors
$$\langle f, z^n \rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$
donc, K_z^2 est l'ensemble des applications constantes. Il suit de la point précédente que $K_z^2 \subset K_u^2$.

□

Pour toute $f = uh \in uH^2$, on a
$$\begin{aligned} f(\lambda) = u(\lambda)h(\lambda) &= u(\lambda)\langle h, k_\lambda \rangle \\ &= u(\lambda)\langle \overline{u}f, k_\lambda \rangle \\ &= \langle f, \overline{u(\lambda)}uk_\lambda \rangle, \end{aligned}$$
donc le noyau reproduisant de uH^2 est $\overline{u(\lambda)}u(z)k_\lambda(z)$.
Comme dans le cas de l'espace H^2, chaque K_u^2 est un espace à noyau reproduisant noté k_λ^u donnée par $k_\lambda - \overline{u(\lambda)}uk_\lambda$. De plus, pour $(\lambda, z) \in \mathbb{D} \times \mathbb{T}$;
$$k_\lambda^u(z) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)}u(z)}{1 - \overline{\lambda}z}.$$
En effet, si $f \in K_u^2$ on obtient
$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \langle f, k_\lambda \rangle \\ &= \langle f, k_\lambda \rangle - u(\lambda)\langle f, uk_\lambda \rangle \\ &= \langle f, (1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \rangle. \end{aligned}$$

De plus,

$$(1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \in K_u^2.$$

car pour tout $h \in H^2$, on a

$$\begin{aligned}\langle uh, (1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda\rangle &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)\langle uh, uk_\lambda\rangle \\ &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)\langle h, k_\lambda\rangle \\ &= u(\lambda)h(\lambda) - u(\lambda)h(\lambda) = 0.\end{aligned}$$

On déduit que :

$$f(\lambda) = \langle f, k_\lambda^u\rangle, \qquad f \in K_u^2.$$

Soit u une fonction intérieure, on désigne par P_u la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u^2 donne par :

$$P_u = P - M_u P M_{\overline{u}}.$$

où M_u et $M_{\overline{u}}$ les opérateurs de multiplication par u et $\overline{u}$ respectivement.
En particulier, pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a :

$$\begin{aligned}\langle f, k_\lambda^u\rangle = \langle f, P_u k_\lambda\rangle &= \langle P_u f, k_\lambda\rangle \\ &= (P_u f)(\lambda) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(\zeta)\frac{1-u(\lambda)\overline{u(\zeta)}}{1-\lambda\overline{\zeta}}|d\zeta|.\end{aligned}$$

Maintenant nous allons donner la caractérisation suivante :

Proposition 1.2.5.

Soit u une fonction intérieure .
L'espace Modèle K_u^2 est l'ensemble des fonctions $f \in H^2$ telles que $f = u\overline{zg}$ presque partout sur $\mathbb{T}$ pour une certaine fonction $g \in H^2$. Autrement dit,

$$K_u^2 = H^2 \bigcap u\overline{zH^2}.$$

***Preuve*.**

Pour toute fonction f dans K_u^2, il est clair que $f \perp uH^2$. Donc

$$\begin{aligned}\langle f, uh\rangle = 0, \quad \forall h \in H^2 &\Leftrightarrow \langle \overline{u}f, h\rangle = 0, \quad \forall h \in H^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{u}f \in (H^2)^\perp = L^2 \ominus H^2 = \overline{zH^2} \\ &\Leftrightarrow f \in u\overline{zH^2} \quad \text{car} \quad |u| = 1, \quad \text{p.p sur} \quad \mathbb{T}.\end{aligned}$$

alors $f \in (uH^2)^\perp$ si et seulement si f dans $u\overline{zH^2}$. □

Exemples 1.2.6.

Soit u une fonction intérieure .
Si $u(z) = z^n$ alors K_u^2 est l'ensemble des polynômes de degré $(n-1)$ à coefficients dans $\mathbb{C}$. c'est-à-dire

$$K_u^2 = \{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}; \quad a_0, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{C}\}.$$

1.3 Opérateurs de Toeplitz sur l'Espace de Hardy H^2

Nous allons voir dans cette section un aperçu de certains opérateurs très étudiés sur l'espace de Hardy $H^2 = H^2(\mathbb{T})$.
Soit $P : L^2(\mathbb{T}) \to H^2$ la projection orthogonale définie par :

$$P\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}.$$

Pour toute fonction f dans $L^2(\mathbb{T})$. On a,

$$\|Pf\|_2 \leq \|f\|_2.$$

Définition 1.3.1.
Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. L'opérateur de Laurent (ou opérateur de multiplication) M_φ : $L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ est donné par :

$$(M_\varphi f)(e^{it}) = \varphi(e^{it})f(e^{it}). \tag{1.3.1}$$

Théorème 1.3.2.
Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, alors M_φ est un opérateur borné. En particulier,

$$\sup\{\|M_\varphi f\|_2 : f \in H^2, \|f\|_2 = 1\} = \|\varphi\|_\infty.$$

Preuve.
Il est clair que, $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$, car :

$$\begin{aligned}\|M_\varphi f\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})f(e^{it})|^2 dt \\ &\leq \|\varphi\|_\infty^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt = \|\varphi\|_\infty^2 \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

La réciproque est un peu plus compliquée. Étant donné $\epsilon > 0$ on peut trouver un ensemble $A_\epsilon \subset \mathbb{T}$, de mesure strictement positive tel que

$$|\varphi(e^{it})| > \|\varphi\|_\infty - \epsilon \qquad \text{sur} \quad A_\epsilon.$$

On définit $\chi = \chi_{A_\epsilon}$ comme la fonction qui est égale à 1 sur A_ϵ et 0 sur son complémentaire.
On a $\chi \in L^2(\mathbb{T})$ et $\|\chi\|_2^2 = \mu(A_\epsilon)$, ou μ est la mesure de Lebesgue normalisée sur

le cercle unité.
De plus,

$$\begin{aligned}\|M_\varphi \chi\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(e^{it})\chi(e^{it})|^2 dt \\ &> \Big(\|\varphi\|_\infty - \epsilon\Big)^2 \mu(A_\epsilon).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{\|M_\varphi \chi\|_2}{\|\chi\|_2} > \|\varphi\|_\infty - \epsilon \quad \text{et} \quad \|M_\varphi\| > \|\varphi\|_\infty - \epsilon,$$

Comme $\epsilon > 0$ était arbitraire, cela nous montre que $\|M_\varphi\| \geq \|\varphi\|_\infty$, et nous avons donc égalité.
A présent, notons que $\chi = \chi_{A_\epsilon}$ n'est pas nécessairement dans H^2. Mais, si l'on écrit $\chi(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$, alors la suite des fonctions (f_m) donnée par

$$f_m(e^{it}) = e^{imt}\chi(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k+m)t}.$$

satisfait $\|f_m\|_2 = \|\chi\|_2$ et

$$\|M_\varphi f_m\|_2 = \|M_{e^{imt}} M_\varphi \chi\|_2 > \Big(\|\varphi\|_\infty - \epsilon\Big)\|\chi\|_2.$$

On remarque que :

$$\begin{aligned}\|Pf_m - f_m\|_2 &= \|\sum_{k=-m}^{\infty} c_k e^{i(k+m)t} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k+m)t}\|_2 \\ &= \Big(\sum_{k=-\infty}^{-m-1} |c_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \to 0 \qquad \text{lorsque} \quad m \to \infty.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|Pf_m\|_2 \to \|\chi\|_2 \quad \text{et} \quad \|M_\varphi P f_m - M_\varphi f_m\|_2 \to 0.$$

Ce qui implique

$$\|M_\varphi P f_m\|_2 \to \|M_\varphi \chi\|_2 \qquad \text{lorsque} \quad m \to \infty.$$

Notons que $Pf_m \in H^2$ et $\dfrac{\|M_\varphi P f_m\|_2}{\|Pf_m\|_2} > (\|\varphi\|_\infty - \epsilon)$ pour m suffisamment grand, ce qui donne l'inégalité inverse. □

Remarque 1.3.3.

Si φ est une fonction mesurable sur $\mathbb{T}$ est essentiellement non borné, alors nous pouvons prendre suite des fonctions $\varphi_n \in L^\infty(\mathbb{T})$ telles que $|\varphi_n(e^{it})|$ croit de façon monotone vers $|\varphi(e^{it})|$ presque partout et $\|\varphi_n\|_\infty \to \infty$(on remplace simplement φ par 0 aux points ou la valeur absolue de φ est supérieure à n). Alors $\|M_\varphi f\| \geq \|M_{\varphi_n} f\|$ pour toute fonction $f \in H^2$ et

$$\|M_{\varphi_n}\| = \|\varphi_n\|_\infty \to \infty,$$

de sorte que M_φ est non borné sur H^2 .

Corollaire 1.3.4.

Soit $\varphi \in H^\infty$. Alors l'opérateur $M_\varphi : H^2 \to H^2$ qui définit par la relation 1.3.1 satisfait

$$\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty.$$

Preuve.

Ci résulte du Théorème 1.3.2, une fois que l'on a vérifie que $\varphi \cdot f \in H^2$ (et pas simplement dans $L^2(\mathbb{T})$) pour $\varphi \in H^\infty$ et $f \in H^2$. On peut montrer directement en multipliant les séries, ou alternativement, en calculant les produits scalaires :

$$\langle \varphi \cdot f, e^{ikt} \rangle = \langle \varphi, \bar{f} e^{ikt} \rangle = 0 \qquad \text{pour} \quad k < 0,$$

car $\varphi \in H^2$ et $\bar{f}(e^{it})e^{ikt}$ n'a que des coefficients de Fourier d'indice strictement négatifs non nuls. □

Nous introduisons maintenant les opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy H^2.

Définition 1.3.5.

Pour $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, l'opérateur de Toeplitz de symbole φ est défini par :

$$\begin{aligned} T_\varphi : H^2 &\to H^2 \\ f &\to T_\varphi f = P(M_\varphi f). \end{aligned}$$

Dans le cas ou $\varphi \in H^\infty$, on remarque que T_φ est le même opérateur M_φ.

Remarque 1.3.6.

1. Soit $\varphi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k$. Alors

$$\begin{aligned} T_\varphi e_n &= P(\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikt} e^{int}) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} d_{p-n} e^{ipt}, \end{aligned}$$

ou $p = n+k$. Ceci donne une matrice de Toeplitz de T_φ ; à savoir la matrice

$$\begin{pmatrix} d_0 & d_{-1} & d_{-2} & d_{-3} & \cdots \\ d_1 & d_0 & d_{-1} & d_{-2} & \cdots \\ d_2 & d_1 & d_0 & d_{-1} & \cdots \\ d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

2. Des cas spéciaux importants sont les suivants :
   - si $\varphi = 1$, alors T_φ est l'identité ;
   - si $\varphi(z) = z$, alors T_φ est le shift (à droite) ;
   - si $\varphi(z) = \frac{1}{z}$, alors T_φ est l'adjoint du shift (ou encore le shift à gauche).
   - Enfin, il est clair que, $T_\varphi = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$.

Dans la suite, On discute quelques propriétés des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy.

Théorème 1.3.7.
Pour toute fonction φ dans $L^\infty(\mathbb{T})$. On a,

$$\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty.$$

Preuve.
Comme $\|P\| = 1$ on constate aisément $\|T_\varphi\| = \|P_{H^2}M_\varphi\| \leq \|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$, il suffit simplement de prouver que l'inégalité inverse est vrai.
Étant donné $\epsilon > 0$, il existe une function $f \in H^2$ avec $\|f\|_2 = 1$ et

$$\|M_\varphi f\|_2 > \|\varphi\|_\infty - \epsilon,$$

par le Théorème 1.3.2. on peut supposer, sans perte de généralité que f est un polynôme

$$p(e^{it}) = \sum_{k=0}^{N} c_k e^{ikt},$$

car on peut toujours trouver une suite de polynômes p_n telle que

$$\|p_n - f\|_2 \to 0 \qquad \text{et} \qquad \|M_\varphi p_n - M_\varphi f\| \to 0.$$

Nous allons tout d'abord montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a

$$\|(T_\varphi - M_\varphi)(e^{imt}e^{ikt})\|_2 \to 0 \qquad \text{lorsque} \quad m \to \infty.$$

A cette fin, avec φ ayant les coefficients de Fourier $(d_n)_n$ comme ci-dessus, cette quantité est simplement

$$\begin{aligned}\|(I-P)\sum_{r=-\infty}^{\infty} d_r e^{irt} e^{imt} e^{ikt}\|_2 &= \| \sum_{r=-\infty}^{-1-m-k} d_r e^{i(r+m+k)t}\|_2 \\ &= \Big(\sum_{r=-\infty}^{-1-m-k} |d_r|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \to 0,\end{aligned}$$

lorsque $m \to \infty$. Il s'ensuit que

$$\|(T_\varphi - M_\varphi)(e^{imt}p(e^{it}))\|_2 \leq \sum_{k=0}^{N} |c_k| \|(T_\varphi - M_\varphi)e^{imt}e^{ikt}\|_2 \to 0.$$

Comme $\|e^{imt}p\|_2 = \|p\|_2$, on a donc

$$\|T_\varphi(e^{imt}p)\|_2 \to \|M_\varphi(e^{imt}p)\|_2 = \|e^{imt}\varphi p\|_2 = \|M_\varphi p\|_2.$$

D'autre part,

$$\|M_\varphi p\| > \|\varphi\|_\infty - \epsilon.$$

Ce qui donne le résultat car $\epsilon > 0$ est arbitraire. $\square$

Bien que les opérateurs de Toeplitz puissent être bornés, ils ne sont pas, en général, des opérateurs compacts.

Proposition 1.3.8.

Le seul opérateur de Toeplitz qui soit compact est $T_0 = 0$.

Preuve.

Supposons que T_ϕ un opérateur de Toeplitz compact. Rappelons que les opérateurs compacts envoient les suites faiblement convergentes aux suites convergentes aux norme. Pour cela, on a ;

$$\{\langle T_\phi e_{s+n}, e_{t+n}\rangle\} \to 0 \qquad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

puisque $\{e_{s+n}\}$ converge faiblement vers zéro lorsque $n \to \infty$. D'autre part, T_ϕ est un opérateur de Toeplitz, donc

$$\langle T_\phi e_{s+n}, e_{t+n}\rangle = \phi_{s-t}.$$

où ϕ_k est le k^{ieme} coefficient de Fourier de la fonction ϕ.
Donc, pour tous les entiers non négatifs s et t, on a

$$\phi_{s-t} = 0,$$

c'est-à-dire, $\phi_k = 0$ pour tout entiers k, ce qui implique que $\phi = 0$ p.p ce qui signifie que $T_\phi = 0$. $\square$

Théorème 1.3.9.
L'application $\varphi \to T_\varphi$ linéaire et injective application de L^∞ à l'espace des opérateurs de Toeplitz, de plus on a :

$$T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}.$$

Preuve.
Il est clair que $\varphi \to T_\varphi$ linéaire.
Maintenant si T_φ et T_ψ sont égale. Puis en comparant leurs matrices. Alors φ et ψ ont le mémé coefficients de Fourier ce implique que $\varphi = \psi$ est l'application soit injective.
Si $f, g \in H^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle T_\varphi^* f, g\rangle &= \langle f, T_\varphi g\rangle = \langle f, PM_\varphi g\rangle = \langle f, \varphi g\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{\varphi(e^{i\theta})g(e^{i\theta})}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\varphi(e^{i\theta})}f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta \\
&= \langle \overline{\varphi} f, g\rangle = \langle PM_{\overline{\varphi}} f, g\rangle \\
&= \langle T_{\overline{\varphi}} f, g\rangle.
\end{aligned}$$

□

1.4 Compléments sur les Semi-Groupes

Dans cette partie, nous rappelons les résultats clés de semi-groupes et donnons également leur propriété et les théorèmes fondamentaux utilisent dans ce domaine. On pourra consulter pour plus de détails [[16], [22], [23], [30], [32], [35]].
Tout d'abord, ont noté par X l'espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ et par $\mathcal{B}(X)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornée dans X et nous désignerons par $\mathcal{GL}(X)$ l'ensemble des éléments inversibles dans $\mathcal{B}(X)$.

Lemme 1.4.1.
Soit X un espace de Banach et $f : [a, b] \to X$ une application continue. Alors

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_a^{a+t} f(s)ds = f(a).$$

Preuve.
Nous avons :

$$\|\frac{1}{t}\int_a^{a+t} f(s)ds - f(a)\| = \|\frac{1}{t}\int_a^{a+t} [f(s) - f(a)]ds\| \leq \sup_{s\in[a,a+t]} \|f(s) - f(a)\|.$$

L'égalité de l'énoncé résulte de la continuité de l'application f. □

Définition 1.4.2.

Soit A un opérateur dans $\mathcal{B}(X)$. L'ensemble résolvant de A noté $\rho(A)$ est donne par :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad \text{telle que} \quad \lambda I - A \quad \text{est inversible dans} \quad \mathcal{B}(X)\}.$$

Rappelons aussi que l'application :

$$\begin{aligned} R(\cdot; A) : \rho(A) &\to \mathcal{B}(X) \\ \lambda &\to R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}, \end{aligned}$$

s'appelle la résolvante de l'opérateur A.

Proposition 1.4.3.

Soit $A \in \mathcal{B}(X)$. Alors $\rho(A)$ est un ensemble ouvert dans $\mathbb{C}$.

***Preuve*.**

Définissons l'application :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\to \mathcal{B}(X) \\ \lambda &\to \phi(\lambda) = \lambda I - A. \end{aligned}$$

Évidemment ϕ est continue, et si $\lambda \in \rho(A)$, alors $\lambda I - A \in \mathcal{GL}(X)$ et par suite

$$\rho(A) = \phi^{-1}(\mathcal{GL}(X)).$$

Comme $\mathcal{GL}(X)$ est un ensemble ouvert dans $\mathcal{B}(X)$, on voit que $\rho(A)$ est ouvert. □

Lemme 1.4.4. *[22]*

Si $A \in \mathcal{B}(X)$ et $\|A\| < 1$, alors $I - A \in \mathcal{G}L(X)$ et

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Proposition 1.4.5. *[30]*

La résolvante d'un opérateur $A \in \mathcal{B}(X)$, a les propriétés suivantes :

1. *Si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, alors :*
$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda)R(\lambda; A)R(\mu; A).$$
2. *$R(\cdot; A)$ est une application analytique sur $\rho(A)$.*
3. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $|\lambda| > \|A\|$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et nous avons :*
$$R(\lambda; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}.$$
4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \in \rho(A)$, on a :*
$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}.$$

1.4.1 Semi-Groupes Uniformément Continus

Définition 1.4.6.

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaire borné de X dans X. On dit que $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupes si :

- $T(0) = I$ (I identité opérateur sur X)
- $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour tous nombres réels $t, s \geq 0$.

La générateur infinitésimal de semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ défini sur le domaine :

$$D(A) = \{x \in X, \quad \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{exists}\},$$

par

$$Ax = \lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+T(t)x}{dt}\Big|_{t=0} \quad \text{pour tout} \quad x \in D(A).$$

On dit que le semi-groupes $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continu si

$$\lim_{t\downarrow 0} \|T(t) - I\| = 0. \tag{1.4.1}$$

Remarque 1.4.7.

Si le semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ est uniformément continu, alors on a :

$$\lim_{s\to t} \|T(s) - T(t)\| = 0.$$

Le résultat ci-dessous fournit une condition nécessaire et suffisante être pour lui un opérateur est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu.

Théorème 1.4.8.

On dit que l'opérateur A est infinitésimal générateur d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.

Preuve. ($\Leftarrow$) Soit A un opérateur linéaire borné sur X. On définit

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!},$$

converge en norme et définit un opérateur linéaire borné pour tout $t \geq 0$, et on a :

$$T(0) = I$$

$$T(t)T(s) = e^{tA}e^{sA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{n-k}A^{n-k}s^k A^k}{(n-k)!k!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n A^n}{n!} = T(t+s).$$

De plus on a :

$$\|T(t)-I\| \leq \|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n\|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|}-1 \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

et

$$\Big\|\frac{T(t)-I}{t}-A\Big\| \leq \|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-1}A^n}{n!}\| \leq t\|A\|^2e^{t\|A\|} \xrightarrow{t\to 0} 0.$$

ce qui implique que $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu et A son générateur infinitésimal.

($\Rightarrow$) Supposons que $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu des opérateurs linéaires bornée sur X.
Fixer $\rho > 0$ assez petit, telle que $\|I-\rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds\| < 1$. Alors d'après le Lemme 1.4.4 on a :
$\rho^{-1}\int_0^\rho T(s)ds$ est inversible ainsi $\int_0^\rho T(s)ds$ est inversible. Donc

$$\begin{aligned}
h^{-1}(T(h)-I)\int_0^\rho T(s)ds &= h^{-1}\Big(\int_0^\rho T(s+h)ds - \int_0^\rho T(s)ds\Big)\\
&= h^{-1}\Big(\int_\rho^{\rho+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds\Big)\\
&= \Big(h^{-1}\int_0^\rho T(s+h)ds - h^{-1}\int_0^\rho T(s)ds\Big).
\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$h^{-1}(T(h)-I) = \Big(h^{-1}\int_0^\rho T(s+h)ds - h^{-1}\int_0^\rho T(s)ds\Big)\Big(\int_0^\rho T(s)ds\Big)^{-1}.$$

Si $h\to 0$ on utilise le Lemme 1.4.1, donc $h^{-1}(T(h)-I)$ converge en norme à l'opérateur linéaire borné $(T(\rho)-I)(\int_0^\rho T(s)ds)^{-1}$ qui le générateur infinitésimal de $(T(t))_{t\geq 0}$.

□

Corollaire 1.4.9.

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaire borné. Alors, on a les propriétés suivantes :

1. *Il existe un constante $w \geq 0$ telle que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$.*
2. *Il existe une unique opérateur linéaire borné A telle que $T(t) = e^{tA}$. (A le générateur infinitésimal de $T(t)$)*
3. *$t \to T(t)$ une application dérivable en norme avec*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Preuve.

Le point 2 est clair (voir les Théorèmes 1.4.8 et 1.4.15).
Maintenant on utilise le point 2 pour démontrer facilement les points 1 et 3. (Car A est borné et l'exponentiel est dérivable). □

1.4.2 Semi-Groupes Fortement Continus

Définition 1.4.10.

Un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ des opérateurs linéaires bornés de X est fortement continue, si pour tout $x \in X$ on a

$$\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x.$$

Les semi-groupes fortement continue sont appelé semi-groupe de classe C_0 où C_0-semi-groupe.

Remarque 1.4.11.

Les semi-groupes uniformément continus sont C_0- semi-groupes puisque :

$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t) - I\|\|x\| \to 0 \qquad \text{lorsque} \quad t \to 0.$$

Mais, il existe des C_0- semi-groupes qui ne sont pas uniformément continu.

Théorème 1.4.12.

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0- semi-groupe, donc il existe une constante $w \geq 0$ et $M \geq 1$ telle que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}.$$

En effet, on dit que $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de type (M, w).

Preuve.

Supposons que $(T(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateur linéaire borné. Alors :

$$\exists M \geq 1; \quad \|T(s)\| \leq M \qquad \forall s \in [0, 1].$$

On pose $t = s + n$ ensuite, pour tout $s \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\|T(t)\| = \|T(s+n)\| &= \|T(s)\|\|T(n)\| \\ &\leq M\|T(1)\|^n \\ &\leq MM^n \\ &\leq Me^{n\log M} = Me^{wt}.\end{aligned}$$

avec $w = \log M$. □

$(T(t))_{t\geq 0}$ est un C_0- semi-groupe de contraction si de type $(1,0)$, i.e :

$$\forall t \geq 0, \qquad \|T(t)\| \leq 1.$$

Corollaire 1.4.13.
Si $(T(t))_{t\geq 0}$ est un C_0- semi-groupe. Alors l'application :

$$[0,+\infty[\ni t \to T(t)x \in X,$$

est continue sur $[0,+\infty[$ quel que soit $x \in X$.

Preuve.
Soient $t_0, h \in [0,+\infty[$ et $x \in X$. Si $t_0 < h$, nous avons :

$$\begin{aligned}\|T(t_0+h)x - T(t_0)x\| &= \|T(t_0)T(h)x - T(t_0)x\| \\ &\leq \|T(t_0)\|\|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{wt_0}\|T(h)x - x\|.\end{aligned}$$

Si $t_0 > h$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\|T(t_0-h)x - T(t_0)x\| &= \|T(t_0-h)x - T(t_0-h+h)x\| \\ &= \|T(t_0-h)x - T(t_0-h)T(h)x\| \\ &\leq \|T(t_0-h)\|\|T(h)x - x\| \\ &\leq Me^{w(t_0-h)}\|T(h)x - x\|.\end{aligned}$$

la continuité forte en t_0 de l'application considérée dans l'énoncé est évident. □

Théorème 1.4.14.
Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semi-groupe sur un espace de Banach X et A son générateur infinitésimal. Alors :

- *$\overline{D(A)} = X$.*
- *A est un opérateur fermé.*[2]

Preuve.

- Soient $x \in X$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds \in D(A),$$

D'après le Lemme 1.4.1 on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)xds = T(0)x = x.$$

Par conséquent $\overline{D(A)} = X$.

2. L'opérateur $A : D(A) \subseteq X \to Y$ est dit fermé si $G(A) = \{(x, Ax), \quad x \in D(A)\}$ est fermé dans $X \times Y$.

- Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$. Alors, pour $t \geq 0$ on a

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq \|T(s)\|\|Ax_n - y\| \leq Me^{ws}\|Ax_n - y\|.$$

pour tout s dans $[0,t]$. Par suite, $T(s)Ax_n \to T(s)y$, lorsque $n \to \infty$, uniformément par rapport à $s \in [0,t]$.
D'autre part, puisque $x_n \in D(A)$, nous avons :

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds,$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}[T(t)x_n - x_n] = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T(s)Ax_n ds,$$

cela implique que ;

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)yds.$$

Finalement, on voit que :

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds = y.$$

pour $x \in D(A)$ et $Ax = y$, on en déduit que A est un opérateur fermé.

□

Le théorème suivant affirmer que le générateur infinitésimal générer un unique C_0- semi-groupe.

Théorème 1.4.15.
Soient $(T(t))_{t\geq 0}$ et $(S(t))_{t\geq 0}$ deux C_0- semi-groupes des opérateurs linéaires bornés. Si

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{S(t) - I}{t} = A,$$

Alors, pour tout $t \geq 0$ on a :

$$T(t) = S(t).$$

***Preuve*.**
Soient $t > 0$ et $x \in D(A)$. On définit l'application suivante :

$$[0,t] \ni s \to U(s)x = T(t-s)S(s)x \in D(A).$$

Alors, pour tout $x \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}U(s)x &= \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0,\end{aligned}$$

par suite $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in D(A)$, d'où :

$$T(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in D(A) \quad \text{et} \quad \forall t \geq 0.$$

Mais, comme

$$\overline{D(A)} = X \quad \text{et} \quad T(t), S(t) \in \mathcal{B}(X) \quad \forall t \geq 0,$$

nous en déduisons que :

$$T(t)x = S(t)x,$$

pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in X$. □

Théorème 1.4.16. *[16]*

Soit $(T(t))_{t\geq 0}$ un C_0- semi-groupe de type (M, w) et $(A, D(A))$ sont générateur infinitésimal. Alors on a :

- *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(s)xds$ existe pour tout $x \in X$. Alors, pour tout $\lambda \in \rho(A)$ on a*
$$R(\lambda, A) = R(\lambda).$$
- *Si $Re\lambda > w$. Alors $\lambda \in \rho(A)$ et*
$$R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(s)ds.$$
- *Pour tout λ telle que $Re\lambda > w$,*
$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{Re\lambda - w}.$$

1.4.3 Théorème de Hille-Yosida

Dans la suie nous présentons un résultat très important concernant les semi-groupes de classe C_0. Il s'agit du célébré théorème de Hille-Yosida qui donne une caractérisation pour les opérateurs qui sont générateurs de C_0- semi-groupes. Il a été montré pour la première fois indépendamment par Hille et par Yosida.

Théorème 1.4.17.

Pour tout opérateur linéaire $(A, D(A))$ sur un espace de Banach X, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *$(A, D(A))$ générateur de C_0- semi-groupe de contraction.*
2. • *A est fermé et $D(A)$ dense dans X*
   • *Pour tout $\lambda > 0$ on a :*

$$\lambda \in \rho(A) \quad et \quad \|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1.$$

Preuve. $(1 \Rightarrow 2)$ Soit $(A, D(A))$ un générateur du C_0- semi-groupe de contraction. Alors, grâce au Théorème 1.4.14 on a, A fermé et $D(A)$ dense dans X.

D'autre part, à partir du Théorème 1.4.16 on a

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{Re\lambda - w}, \qquad \forall Re\lambda > w.$$

comme A est le générateur du C_0- semi-groupe de contraction. Alors $w = 0$ et $M = 1$, cela implique que $\lambda > w$ et

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - 0} = \frac{1}{\lambda}.$$

$(2 \Rightarrow 1)$ Pour cela on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 1.4.18.
Soit A un opérateur que vérifier la condition 2 du Théorème de Hille-Yosida 1.4.17. Alors, pour tout x dans X, on a

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x.$$

Preuve.
Soit $x \in D(A)$. On a :

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &= \|AR(\lambda, A)x\| \\ &= \|R(\lambda, A)Ax\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \to 0, \qquad \text{lorsque} \quad \lambda \to \infty. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $D(A)$ est dense dans X, ce qui achève la preuve. □

Lemme 1.4.19.
Soit A un opérateur qui vérifie la condition 2 du Théorème de Hille-Yosida 1.4.17. Donc, pour tout $x \in D(A)$ on a

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax.$$

où A_λ l'approximation de Yosida de A, défini pour tout $\lambda > 0$ comme suit :

$$A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I.$$

Preuve.
Pour $x \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x &= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda AR(\lambda, A)x \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax \\ &= Ax.\end{aligned}$$

□

Lemme 1.4.20.
Soit A un opérateur vérifier la condition 2 du Théorème de Hille-Yosida 1.4.17. Alors, A_λ est le générateur de C_0- semi-groupe de contraction $(e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$. De plus,

$$\|e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

pour tout $\lambda, \mu > 0$ et pour tout $x \in X$.

Preuve.
Par définition A_λ est un opérateur linéaire borné et donc généré un C_0- semi-groupe est satisfait :

$$\|e^{tA_\lambda}\| \leq e^{-\lambda t}\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\| \leq e^{-\lambda t}e^{t\lambda^2\|R(\lambda,A)\|} \leq 1.$$

Ce que implique que e^{tA_λ} est un C_0- semi-groupe de contraction.
À présent, on sait que $e^{tA_\lambda}, e^{tA_\mu}, A_\lambda, A_\mu$ commutant. Alors :

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \|\int_0^1 \frac{d}{ds}\Big(e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\Big)ds\| \\ &\leq \int_0^1 t\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\|ds \\ &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.\end{aligned}$$

□

On revient à la démonstration de Théorème 1.4.17. $(2 \Rightarrow 1)$
Soit $x \in D(A)$. Alors

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|Ax - A_\mu x\|.\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.4.19 on a, $e^{tA_\lambda}x$ convergent lorsque $\lambda \to \infty$ pour tout $x \in D(A)$ et cet convergence est uniform sur un intervalle borné.
De plus, $D(A)$ est dense dans X et $\|e^{tA}\| \leq 1$. Alors, on obtient

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x; \qquad \forall x \in X.$$

cet limite $T(t)$ est continu uniforme sur un intervalle borné et vérifie la propriété de semi-groupe et pour tout $x \in X$ on a :

$$T(0)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{0A_\lambda}x = x \Rightarrow T(0) = I.$$

En outre, $t \to T(t)x$ continu pour tout $t \geq 0$ comme la limite d'une fonction uniforme continus $t \to e^{tA_\lambda}x$. Alors, $T(t)$ est un C_0- semi-groupe de contraction sur X.
Enfin, il suffit démontrer que A est un générateur infinitésimal de $T(t)$.
Soit $x \in D(A)$. On a :

$$\begin{aligned} T(t)x - x &= \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x - x \\ &= \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x ds \\ &= \int_0^t T(s)Axds. \end{aligned}$$

puisque, $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ converge uniforme vers $T(t)Ax$ sur un intervalle borné.
Soient B un générateur infinitésimal de $T(t)$ et $x \in D(B)$ telle que $Ax = Bx$ et $A \subseteq B$ [3] alors par la condition nécessaire on a

$$1 \in \rho(B).$$

En effet, la condition 2 dans la Théorème de Hille-Yosida 1.4.17 on a $1 \in \rho(A)$ et comme $A \subseteq B$. Donc :

$$(I - B)D(A) = (I - A)D(A) = X.$$

Ainsi,

$$D(B) = (I - B)^{-1}X = D(A).$$

donc,

$$A = B.$$

$\square$

3. Si A, B sont deux opérateurs non bornés de domaines $D(A), D(B)$, on note $A \subset B$ lorsque $D(A) \subset D(B)$ et $B_{|D(A)} = A$.

1.4.4 Semi-Groupes dans un Espace de Hilbert

Dans cette partie, on définit quelques notions sur la théorie des opérateurs, puis on présente quelques résultats de générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continus dans un espace de Hilbert.

Définition 1.4.21.
On dit qu'un opérateur non borné A sur un espace de Hilbert H est coercif s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$Re\langle Au, u\rangle \geq C\|u\|^2, \qquad \forall u \in D(A).$$

Lemme 1.4.22.
Un opérateur non borné $A : D(A) \to H$ coercif et fermé admet un inverse continu

$$A^{-1} : H \to D(A).$$

(de norme inférieur à C^{-1} ou C est la constante de coercivité).

Lemme 1.4.23.
L'adjoint A^* d'un opérateur A à domaine dense est fermé.

Preuve.
Soit $(u_n, v_n = A^*u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite du graphe de l'adjoint A^* de A convergeant dans $H \times H$ vers (u, v). Alors, pour tout $\varphi \in D(A)$, on a

$$\langle v - A^*u, \varphi\rangle = \langle v, \varphi\rangle - \langle u, A\varphi\rangle = \lim_{n\to\infty}\Big[\langle A^*u_n, \varphi\rangle - \langle u_n, A\varphi\rangle\Big] = 0.$$

Comme $D(A)$ est dense dans H, cela implique que $v = A^*u$ et donc ImA^* fermée, ce qui achève la preuve. □

Définition 1.4.24.
Un opérateur non borné est dit dissipatif si

$$Re\langle Au, u\rangle \leq 0, \qquad u \in D(A).$$

Il est maximal dissipatif si en plus il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $A - \lambda_0 I$ soit surjectif.

Remarque 1.4.25.
En fait $A - \lambda_0 I$ est bijectif d'inverse continu car

$$-Re\langle (A - \lambda_0 I)u, u\rangle \geq \lambda_0\|u\|^2.$$

implique que $A - \lambda_0 I$ est injectif et de plus par Cauchy-Schwarz

$$\|(A - \lambda_0 I)u\| \geq \lambda_0\|u\|.$$

ce qui implique que $\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda_0}$.

Lemme 1.4.26.

Soit A un opérateur maximal dissipatif et B un opérateur dissipatif, si $A \subset B$ alors $A = B$.

Preuve.

Soit $v \in D(B)$, il existe $u \in D(A)$ tel que $(B - \lambda I)v = (A - \lambda I)u$ et comme $Au = Bu$, on a $(B - \lambda I)(v - u) = 0$.
Comme B est dissipatif nous obtenons

$$0 = -\langle (B - \lambda I)(v - u), v - u \rangle \geq \lambda \|v - u\|^2.$$

ce qui implique $u = v$ et donc $v \in D(A)$. Ceci donne $D(A) = D(B)$ et $A = B$. □

Remarque 1.4.27.

Ce lemme justifie la dénomination de maximal dissipatif : il n'y a pas d'opérateur dissipatif B plus grand pour la relation d'ordre ($\subset$) qu'un opérateur maximal dissipatif.

Lemme 1.4.28.

Un opérateur maximal dissipatif est à domaine dense.

Preuve.

Supposons que $v \in D(A)^{\perp}$, comme $A - \lambda_0 I$ est surjectif, donc il existe $u \in D(A)$ telle que

$$v = (A - \lambda_0 I)u.$$

Nous avons donc

$$0 = Re\langle u, v \rangle = Re\langle Au, u \rangle - \lambda_0 \|u\|^2 \leq -\lambda_0 \|u\|^2,$$

ce qui implique $u = 0$ et $v = 0$. Ainsi, $D(A)^{\perp} = \{0\}$ et donc $D(A)$ est dense dans H. □

Lemme 1.4.29.

Soit A un opérateur maximal dissipatif. Alors, il existe $\lambda_0 > 0$ telle que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ l'opérateur $(A - \lambda I)$ inversible avec inverse continu.

Preuve.

D'après la Remarque 1.4.25 $A - \lambda_0 I$ est inversible d'inverse $R(\lambda_0; A)$ borné. De plus, on a

$$(A - \lambda I) = \Big(A - \lambda_0 I - (\lambda I - \lambda_0 I)\Big) = \Big(A - \lambda_0 I\Big)\Big(I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0; A)\Big).$$

il suffit donc à montrer que l'opérateur borné ;

$$T_\lambda = I - (\lambda - \lambda_0) R(\lambda_0; A).$$

est inversible et son inverse continu pour tout $\lambda \geq \lambda_0$.
Remarquons que

$$\langle T_\lambda u, u\rangle = \|u\|^2 - (\lambda - \lambda_0)\langle R(\lambda_0; A)u, u\rangle \geq \|u\|^2.$$

Par conséquent, T_λ est coercif et par le Lemme 1.4.22 T_λ est inversible d'inverse continu. □

Théorème 1.4.30. *(Lumer-Phillips)*
Un opérateur non borné à domaine dense dans un espace de Hilbert, est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contraction si et seulement s'il est maximal dissipatif.

***Preuve*.**
Si A est à domaine dense et maximal dissipatif alors A vérifie les hypothèses du Théorème de Hille-Yosida 1.4.17, il existe donc un unique semi-groupe de contraction associé à A.
Réciproquement, soit A un générateur infinitésimal d'un semi groupe de contraction $(T(t))_{t\geq 0}$. Alors, pour tout $u \in D(A)$, et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a

$$Re\Big\langle \frac{S(t)u - u}{t}, u\Big\rangle \leq \frac{1}{t}\Big(\|S(t)u\|\|u\| - \|u\|^2\Big) \leq 0.$$

en faisant tendre t vers 0, on obtient que A est dissipatif et par le Théorème 1.4.17 encore A est maximal dissipatif. □

Le résultat suivant, donne une condition plus simple pour un opérateur pour générer un semi-groupe fortement continu de contraction.

Corollaire 1.4.31. *[35]*
Soit A un opérateur non borné de domaine dense. Alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction si et seulement si A et son adjoint A^* sont dissipatifs.

Semi-Groupes Unitaires et Théorème de Stone

Lemme 1.4.32.
Si $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0- semi-groupe de contraction et si A son générateur infinitésimal. Alors, $(S^*(t))_{t\geq 0}$ est un C_0- semi-groupe de contraction et l'adjoint A^* de A son générateur infinitésimal.

***Preuve*.**
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe fortement continu de contraction. Alors, on a

$$S^*(t + t') = (S(t + t'))^* = (S(t)S(t'))^* = S^*(t')S^*(t),$$

et
$$S^*(0) = I \qquad , \qquad \|S^*(t)\| = \|S(t)\| \leq 1.$$
Donc, S^* est un semi-groupe de contraction. De plus, pour tout $u \in H$ on a :
$$\|S^*(t)u - u\|^2 \leq 2\|u\|^2 - 2Re\langle S^*(t)u, u\rangle = 2\|u\|^2 - 2Re\langle u, S(t)u\rangle.$$
On en déduit que S^* est fortement continu, car le terme à droite tend vers 0 lorsque t tend vers 0.
Maintenant, Supposons que B est le générateur infinitésimal de S^* et soient $u \in D(B)$ et $v \in D(A)$, on a :
$$\langle Bu, v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\langle S^*(t)u - u, v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\langle u, S(t)v - v\rangle = \langle u, Av\rangle.$$
On en déduit que la forme linéaire $u \to \langle Bu, v\rangle$ est bornée par $\|Av\|$, et donc que $u \in D(A^*)$ ainsi, $Bu = A^*u$.
Soient $u \in D(A^*)$ et $v \in D(A)$, en intégrant $\frac{d(Su)}{dt} = Au$, on a
$$\langle S(t)v - v, u\rangle = \int_0^t \langle AS(\tau)v, u\rangle d\tau.$$
ce qui donne :
$$\langle u, S^*(t)v - v\rangle = \int_0^t \langle v, S(\tau)^* A^* u\rangle d\tau.$$
et comme $D(A)$ est dense dans H, on en déduit que
$$S(t)^*u - u = \int_0^t S(\tau)^*.A^*ud\tau$$
Ceci permet de conclure que $u \in D(B)$ et $A^*u = Bu$. Ainsi, $D(A^*) = D(B)$ et $A^* = B$. □

Définition 1.4.33.
Soit S un semi-groupe fortement continu, on dit que S est unitaire, si
$$S^*(t) = (S(t))^{-1},$$
pour tout $t \geq 0$.

Théorème 1.4.34. *(Stone)*
Un opérateur non borné A à domaine dense $D(A)$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu unitaire si et seulement si A est anti-adjoint, i.e. $D(A^*) = D(A)$ et $A^* = -A$.

Preuve.

Soit S un semi-groupe fortement continu unitaire. Pour tout $u \in D(A)$ on a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{S(t)^*u - u}{t} = \lim_{t\to 0} S^*(t)\Big(\frac{u - S(t)u}{t}\Big) = -Au.$$

On en déduit que $D(A) \subset D(A^*)$ et que $A^*u = -Au$ pour tout $u \in D(A)$. En intervertissant les rôles de S et S^* on obtient que A est anti-adjoint.
Réciproquement, supposons que A soit un opérateur anti-adjoint. Alors

$$-Re\langle (A - I)u, u\rangle = \|u\|^2.$$

lorsque $u \in D(A)$. On en déduit que $A - I$ est coercif, et qu'il n'est pas difficile de voir qu'il est fermé car A est fermé. Donc, $(A - I)$ est inversible, d'inverse continu par conséquent A est maximal dissipatif. On note S le semi-groupe engendré par A. En calculant la dérivée

$$\frac{d}{dt}\|S(t)u\|^2 = 2Re\langle AS(t)u, S(t)u\rangle = 0.$$

on obtient,

$$\|S(t)u\|^2 = \|S(0)u\|^2 = \|u\|^2.$$

ce qui implique que $S(t)$ est unitaire. $\square$

Chapitre 2

Opérateurs de Toeplitz sur l'Espace de Bergman

L'objectif de ce chapitre et tout d'abord nous donnons quelques propriétés et résultats sur les opérateurs de Toeplitz quasihomogène. En particulier, on va insister sur les problèmes de produit et commutativité.

Motivé par la représentation en coordonnées polaires d'un élément dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$, plusieurs auteurs intéresse par les opérateurs de Toeplitz quasihomogène (voir [2], [14], [25], [26], [27], [28], [29], [45]).
Ainsi, comme on est intéressé à étudier les problèmes de produit et commutativité, on va étudiera la puissance de ces opérateurs. L'idée principale est alors d'utiliser les notions de puissance et racine pour répondre à ces questions dans quelques cas particuliers.

2.1 Espace de Bergman

Comme annoncé précédent soient $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$, et $L^2(\mathbb{D}, dA)$ l'espace de Lebesgue usuel muni du produit scalaire défini par :

$$< f, g >= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}dA(z), \qquad f, g \in L^2(\mathbb{D}, dA).$$

tel que $dA(z) = \frac{1}{\pi} r dr d\theta$ est la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque unité $\mathbb{D}$ du plan complexe $\mathbb{C}$.
On note par L^2_a l'espace de Bergman qui définit par l'intersection de $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ et $L^2(\mathbb{D}, dA)$, i.e.

$$L^2_a(\mathbb{D}) = \{f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}); \|f\|^2_{L^2_a} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA(z) < \infty\}.$$

Lemme 2.1.1.
Pour tout $f \in L^2_a$, il existe une constante positive C tel que

$$|f(z)| \leq C\|f\|_{L^2_a}, \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Preuve.
Soit $z \in \mathbb{D}$, on pose $r_z = 1 - |z|$, en utilisant la propriété de la moyenne pour $f \in L^2_a$, on obtient

$$f(z) = \frac{1}{(1-|z|)^2} \int_{|z-w|<r_z} f(w)dA(w).$$

Donc,

$$|f(z)| = \frac{1}{(1-|z|)^2} \int_{|z-w|<r_z} |f(w)|dA(w) \leq \frac{\|f\|_{L^2_a}}{(1-|z|)^2}.$$

Soit K un compact dans $\mathbb{D}$, alors on a

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \leq \frac{1}{(dist(K, \partial\mathbb{D}))^2} \|f\|_{L^2_a}.$$

□

Proposition 2.1.2.
L'espace de Bergman $L^2_a(\mathbb{D})$ est fermé dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$.

Preuve.
Soient $(f_n)_n$ une suite dans $L^2_a(\mathbb{D})$ convergente vers $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ pour la norme de $L^2(\mathbb{D}, dA)$, donc $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$, par le Lemme 2.1.1 on a

$$\sup_{z\in K} |f_n(z) - f_m(z)| \to 0, \quad si \quad n, m \to \infty.$$

pour tout compact K dans $\mathbb{D}$.
Alors $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$ parce qu'il est complet pour la topologie de convergent uniforme sur tout compact. Donc, pour tout compact $K \subseteq \mathbb{D}$

$$\exists f \in \mathcal{H}ol(\mathbb{D}), \quad \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| \to 0, \quad si \quad n \to \infty.$$

Comme $L^2(\mathbb{D}, dA)$ est un espace de Hilbert donc complet, alors il existe $g \in L^2(\mathbb{D}, dA)$ tel que

$$\|f_n(z) - g(z)\|_2 \to 0, \qquad si \quad n \to \infty.$$

par conséquent, $f = g$ p.p et donc $f \in L^2_a(\mathbb{D})$. □

L'espace de Bergman L_a^2 est un espace de Hilbert muni du produit scalaire induit par celui de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ est aussi la famille $\{\sqrt{n+1}z^n, n \in \mathbb{N}\}$ en est une base hilbertienne orthonormée.
Pour $z \in \mathbb{D}$ fixé, la fonction $L_a^2 \ni f \to f(z)$ est une forme linaire continue. Donc d'après le Théorème de représentation de Riesz, il existe une unique fonction $K_z \in L_a^2$ appelée le noyau reproduisant où le noyau de Bergman est donné explicitement par la formule

$$\mathbb{D} \ni w \to K_z(w) = \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2}.$$

La projection orthogonale où projection de Bergman noté par P de $L^2(\mathbb{D}, dA)$ dans L_a^2 est bien définie car l'espace de Bergman est un sous espace fermé de $L^2(\mathbb{D}, dA)$. De plus on a

$$Pf(z) =< Pf, K_z >=< f, PK_z >=< f, K_z >= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^2} dA(w),$$

pour tout $f \in L_a^2$ et tout $z \in \mathbb{D}$.

2.2 Opérateurs de Toeplitz Quasihomogène

On définit l'opérateur de Toeplitz T_φ sur $L_a^2(\mathbb{D})$ de symbole $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$ par :

$$\begin{aligned} T_\varphi : L_a^2(\mathbb{D}) &\to L_a^2(\mathbb{D}) \\ f &\to T_\varphi f = P(\varphi f). \end{aligned}$$

Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on peut écrire T_φ comme suit ;

$$T_\varphi f(z) = P(\varphi(z) f(z)) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)\varphi(w)}{(1-z\overline{w})^2} dA(w). \tag{2.2.1}$$

Quelque propriétés immédiate des opérateurs de Toeplitz sont regroupées dans la proposition suivants.

Proposition 2.2.1. *[48]*
Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{D})$. Alors
(1) $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$.
(2) $T_{\alpha\varphi+\beta\psi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\psi$.
(3) $(T_\varphi)^* = T_{\overline{\varphi}}$, tel que $\overline{\varphi}$ le conjugue de φ.
(4) $T_\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$.
(5) Si $\varphi \in H^\infty$, donc $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$ et $T_{\overline{\varphi}} T_\psi = T_{\overline{\varphi}\psi}$.

Une fonction $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est dite radiale si pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $\varphi(z) = \varphi(|z|)$. Soient $\mathcal{R} = \{v : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \quad \text{radiale}, \int_0^1 |v(r)|^2 r dr < \infty\}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}_k = e^{ik\theta}\mathcal{R}$.
Pour tout $u \in \mathcal{R}_k$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |u(z)|^2 dA(z) &= \int_{\mathbb{D}} |e^{ik\theta} v(r)|^2 dA(re^{i\theta}) \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} |v(r)|^2 r d\theta dr = 2\pi \int_0^1 |v(r)|^2 r dr < \infty,\end{aligned}$$

donc, $\mathcal{R}_k$ est un sous espace de $L^2(\mathbb{D}, dA)$. De plus, si $k \neq l$ on a $\mathcal{R}_k \perp \mathcal{R}_l$.
Puisque les polynômes en z et $\overline{z}$ sont dense dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$, nous avons la décomposition suivants,

$$L^2(\mathbb{D}, dA) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}_k.$$

Note que pour une fonction radiale $\varphi \in L^1(\mathbb{D}, dA)$ on peut lui associer une fonction dans $L^1([0,1[, rdr)$. Alors pour tout fonction $f \in L^2(\mathbb{D}, dA)$, on a

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik\theta} \varphi_k(r), \qquad \varphi_k \in L^2([0,1[, rdr).$$

Définition 2.2.2.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{D}$. Un opérateur de Toeplitz T_f est dite quasihomogène de degré $p \in \mathbb{Z}$ si le symbole f est quasihomogène de degré $p \in \mathbb{Z}$, i.e. Il existe une fonction radiale ϕ telle que pour tout $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$, on peut écrire $f(re^{i\theta}) = e^{ip\theta}\phi(r)$.

Pour une fonction $\phi \in L^1([0,1], rdr)$, considérées comme nulles *p.p* sur l'intervalle $]1, \infty[$. On définit la transformation de Mellin de ϕ, notée $\widehat{\phi}$, par

$$\widehat{\phi}(z) = \int_0^1 \phi(r) r^{z-1} dr.$$

Il est clair que pour $\phi \in L^1([0,1], rdr)$, $\widehat{\phi}$ est une fonction holomorphe bornée sur le demi-plan $\Pi = \{z; \Re z > 2\}$. De plus, la transformation de Mellin $\widehat{\phi}$ est uniquement déterminée par ses valeurs sur toute suites arithmétique d'entiers. En fait, nous avons le théorème classique suivant [36, p. 102].

Théorème 2.2.3.
Supposons que f est une fonction holomorphe bornée sur $\{z : \Re z > 0\}$ qui est nulle sur une suite des points distincts $z_1, z_2, \ldots,$ vérifiant :
(1) $\inf\{|z_n|\} > 0$

(2) $\sum_{n\geq 1} \Re(1/z_n) = \infty$.
Alors f *est identiquement nulle sur* $\{z \ : \ \Re z > 0\}$.

Dans le corollaire suivant, nous allons nous placer dans un cas plus particulier.

Corollaire 2.2.4.
Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ *une suite d'entiers positifs supérieures ou égales à* 2 *vérifiant la condition*

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{n_k} = +\infty.$$

Si $\phi \in L^1([0,1], rdr)$ *est telle que* $\widehat{\phi}(n_k) = 0$ *pour tout* $k \geq 0$, *alors* ϕ *est nulle.*

La formule d'inversion de la transformation de Mellin est donnée par

$$\phi(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \widehat{\phi}(z) r^{-z} dr, \tag{2.2.2}$$

où l'intégration se fait le long d'une ligne verticale passant par $\Re(z) = c$ dans Π. Aussi, on définit la convolution de Mellin de la fonction f et g noté $f *_M g$ par :

$$(f *_M g)(r) = \int_0^{+\infty} f(\frac{x}{y}) g(y) \frac{dy}{y}.$$

la convolution de Mellin se rattache à la transformée de Mellin par la relation :

$$\widehat{f *_M g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

Le lemme suivant donne la valeur d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène évalué à tout élément de la base orthonormée de l'espace de Bergman.

Lemme 2.2.5.
Soient $n, p \in \mathbb{N}$ *et* ϕ *une fonction radiale intégrable. Alors, pour tout* $n \geq 0$, *on a*

$$T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) = 2(n+p+1)\widehat{\phi}(2n+p+2) z^{n+p}.$$

et

$$T_{e^{-ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \quad n < p \\ 2(n-p+1)\widehat{\phi}(2n-p+2) z^{n-p} & , \text{ si } \quad n \geq p \end{cases}$$

Preuve.

Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ et par la formule 2.2.1, on a

$$\begin{aligned}
T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{e^{ip\theta}\phi(w)w^n}{(1-z\overline{w})^2} dA(w) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \phi(r) r^n e^{i(n+p)\theta} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) r^k e^{-ik\theta} z^k r dr \frac{d\theta}{\pi} \\
&= \int_0^1 \phi(r) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \int_0^{2\pi} e^{i(n+p-k)\theta} \frac{d\theta}{\pi} r^{n+k} z^k r dr \\
&= 2(n+p+1) \int_0^1 \phi(r) r^{2n+p+1} dr z^{n+p} \\
&= 2(n+p+1)\widehat{\phi}(2n+p+2) z^{n+p}.
\end{aligned}$$

par le même calculation si on change p par $-p$ on obtient le résultat désire. $\square$

Pour répondre à la question de produit des opérateurs de Toeplitz quasihomogène, nous en profiterons la proposition ci-dessous.

Proposition 2.2.6.

Soit f et g deux fonctions bornées quasihomogènes de degré p et s respectivement. S'il existe une fonction h tel que $T_fT_g = T_h$, alors sa fonction h est quasihomogène de degré $p+s$.

Preuve.

Soient ϕ et ψ deux fonctions radiales, telles que $f = e^{ip\theta}\phi$ et $g = e^{is\theta}\psi$. Par le Lemme 2.2.5, si p et s est supérieur ou égal à 0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{is\theta}\psi}(z^n) = 4(n+s+1)(n+p+s+1)\widehat{\psi}(2n+s+2)\widehat{\phi}(2n+2s+p+2)z^{n+p+s}.$$

dans le cas où $p \in \mathbb{N}$ et $s < 0$, on a $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{is\theta}\psi}(z^n) =$

$$\begin{cases} 0 & \text{, si} \quad n < -s \\ 4(n+s+1)(n+p+s+1)\widehat{\psi}(2n+s+2)\widehat{\phi}(2n+2s+p+2)z^{n+p+s} & \text{, si} \quad n \geq -s \end{cases}$$

Maintenant, nous aurons besoin du résultat suivant (pour la preuve voir ([29, Proposition 3 p.3])) : Une fonction bornée ω est quasihomogène de degré $p \in \mathbb{Z}$ si et seulement si, pour tout entier $n \geq 0$, il existe $\lambda_n \in \mathbb{C}$ tel que

$$T_\omega(z^n) = \begin{cases} 0 & \text{, si} \quad n < \max(-p, 0) \\ \lambda_n z^{n+p} & \text{, si} \quad n \geq \max(-p, 0) \end{cases}$$

Ainsi, si $T_fT_g = T_h$, par prendre $\lambda_n = 4(n+s+1)(n+p+s+1)\widehat{\psi}(2n+s+2)\widehat{\phi}(2n+2s+p+2)$ dans l'équation précédente, h c'est une fonction quasihomogène de degré

$p+s$.
Si p et s sont à la fois négatifs, ou si $p<0$ et $s\geq 0$, alors en considérant l'opérateur adjoint on obtient le même résultat. $\square$

On dit que φ est une T-fonction si T_φ qui donne par la relation 2.2.1, définis un opérateur borné sur L^2_a.
Dans [28] les auteurs donne une réponse aux problème de produit des opérateurs de Toeplitz quasihomogènes.

Théorème 2.2.7.
Soit $p,s\in\mathbb{Z}$ tel que $p\geq s\geq 0$, et soit ϕ,ψ deux fonctions radiales sur $\mathbb{D}$ telles que $e^{ip\theta}\phi$ et $e^{-is\theta}\psi$ sont des T-fonctions. Alors le produit $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement s'il existe une fonction radiale ω vérifie :
(1) $e^{i(p-s)\theta}\omega$ est une T-fonction.
(2) $\widehat{\omega}(2n+p-s+2)=0$, si $0\leq n\leq s-1$.
(3) ω est une solution de l'équation suivant :

$$\mathbb{1}*_M r^{p+s}\omega = r^p\phi *_M r^s\psi.$$

Dans ce cas, $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}=T_{e^{i(p-s)\theta}\omega}$.

Preuve.
La condition nécessaire est clear. Il reste montrer la condition suffisante.
On Supposons que $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}$ est un opérateur de Toeplitz, donc grâce de Proposition 2.2.6, on a

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}=T_{e^{i(p-s)\theta}\omega},$$

de plus le Lemme 2.2.5, implique

$$\widehat{\omega}(2n+p-s+2)=\begin{cases}0 & \text{, si } \quad n<-s\\ 2(n-s+1)\widehat{\psi}(2n-s+2)\widehat{\phi}(2n-2s+p+2) & \text{, si } \quad n\geq -s\end{cases}$$

D'autre part, pour tout $n\geq s$ on a

$$\frac{1}{2(n-s+1)}\widehat{\omega}(2n+p-s+2)=\widehat{\psi}(2n-s+2)\widehat{\phi}(2n-2s+p+2),$$

on pose $k=n-s$, on obtient

$$\frac{1}{2(k+1)}\widehat{\omega}(2k+p+s+2)=\widehat{\psi}(2k+s+2)\widehat{\phi}(2k+p+2),\quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Autrement dite,

$$(\mathbb{1}*_M r^{p+s}\omega)(2k+2)=(r^p\phi *_M r^s\psi)(2k+2).$$

Ce qui termine la preuve. $\square$

Remarque 2.2.8.

(1) Si $p, s \in \mathbb{N}^*$ et si ϕ, ψ sont deux T-fonctions radiales. Alors le produit $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{is\theta}\psi}$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement s'il existe une T-fonction radiale ω telle que

$$\mathbb{r}^s *_M r^p\omega = r^{p+s}\phi *_M \psi.$$

(2) En passant aux opérateurs adjoints, on vérifie que le produit $T_{e^{-ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi}$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{is\theta}\psi}$ est un opérateur de Toeplitz est on obtient des résultats similaire comme dans la Théorème 2.2.7.

La corollaire suivant est un cas simple de la Théorème 2.2.7 où $\phi(r) = r^{l_1}$ et $\psi(r) = r^{l_2}$.

Corollaire 2.2.9.

Soient $p, s \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq s$ et $l_1, l_2 \in \mathbb{R}\backslash]-\infty, -1[$. Alors, le produit $T_{e^{ip\theta}r^{l_1}}T_{e^{-is\theta}r^{l_2}}$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si

(a) $l_2 - p \geq -1$, $l_1 - s \geq -1$ et $s = 0$ ou $s = 1$.

ou

(b) $l_1 = p = 0$ ou $l_2 = s = 0$.

Preuve.

Supposons que le produit $T_{e^{ip\theta}r^{l_1}}T_{e^{-is\theta}r^{l_2}}$ est un opérateur de Toeplitz et en appliquant la Proposition 2.2.6 avec $f(z) = e^{ip\theta}|z|^{l_1}, g(z) = e^{-is\theta}|z|^{l_2}$ et $h(z) = e^{i(p-s)\theta}w(z)$, donc

$$\begin{aligned} T_{e^{ip\theta}r^{l_1}}T_{e^{-is\theta}r^{l_2}}(z^n) &= \frac{2(n-s+1)}{(2n-s+l_2+2)}\frac{2(n-s+p+1)}{(2n-2s+p+l_1+2)}z^{n+p-s} \\ &= 2(n+p-s+1)\widehat{w}(2n+p-s+2)z^{n+p-s}. \end{aligned}$$

par la transformation inverse de Mellin, on obtient

$$w(r) = \begin{cases} \frac{l_2+s}{s+l_2-p-l_1}r^{l_2-p} + \frac{l_1+p}{p+l_1-s-l_2}r^{l_1-s}, & \text{Si} \quad l_1 - s \neq l_2 - p \\ r^{l_1-s}\{1 + (l_1+p)\log r\}, & \text{Si} \quad l_1 - s = l_2 - p \end{cases}$$

il est clair que la fonction w est borné ou presque borné si la condition suivante est satisfaite :

$$(*) \begin{cases} l_1 + p \neq 0, \quad l_2 + s \neq 0, \quad \text{et} \quad l_1 - s \geq -1, \quad l_2 - p \geq -1 \\ \quad \text{ou} \\ l_2 + s = 0, \quad \text{et} \quad l_1 - s \geq -1 \\ \quad \text{ou} \\ l_1 + p = 0, \quad \text{et} \quad l_2 - p \geq -1 \end{cases}$$

par un calcul direct des coefficients de Mellin de la fonction w montre que pour tout entier $m \geq 2$, on a

(1) Si $l_1 + p \neq 0$ et $l_2 + s \neq 0$, on a

$$\widehat{w}(m) = \frac{m - (p+s)}{(l_1 - s + m)(l_2 - p + m)}.$$

(2) Si $l_1 + p \neq 0$ et $l_2 + s = 0$, alors

$$\widehat{w}(m) = \frac{l_1 + p}{(l_1 - s + m)(l_2 + s - l_1 - p)}.$$

(3) Si $l_1 + p = 0$ et $l_2 + s \neq 0$, donc

$$\widehat{w}(m) = \frac{l_2 + s}{(l_2 - p + m)(l_2 + s - l_1 - p)}.$$

(4) Si $l_1 + p = 0$ et $l_2 + s = 0$, alors

$$\widehat{w}(m) = \frac{1}{m - (p+s)}.$$

Ainsi, nous voyons que $\widehat{w}(m) = 0$ si et seulement si $m = p + s$, $l - 2 + s \neq 0$ et $l_1 + p \neq 0$. Donc

$$\widehat{w}(2k + p - s + 2) = 0 \Leftrightarrow k = s - 1, l_2 + s \neq 0, l_1 + p \neq 0.$$

En résumé, si le produit est un opérateur Toeplitz alors, soit $s = 0$ et $(*)$ est vraie, ou bien $s = 1$ et $(*)$ est vraie, $l_1 + p \neq 0, l_2 + s \neq 0$. Il est facile de voir que ces conditions impliquent que soit (a) soit (b) est vraie.
Quant à la suffisance des conditions (a) et (b), si la condition (a) est satisfaite, alors le produit est un opérateur Toeplitz par le Théorème 2.2.7, si la condition (b) est satisfait alors le produit est aussi, clairement, un opérateur Toeplitz puisque, dans ce cas, au moins l'un des deux facteurs est l'opérateur d'identité. $\square$

2.3 Commutativité des Opérateurs de Toeplitz Quasihomogènes

Cette section vise à étude et déterminez le commutant d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène. Dans le théorème suivants on a donné le résultat principal de [14] qui caractérise le commutant d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène dans un cas particulier.

Théorème 2.3.1.
Soient $\psi(re^{i\theta}) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\theta}\psi_k(r)$ *et* $\phi(re^{i\theta}) = e^{i\delta\theta}r^m$ *deux fonctions dans* $L^\infty(\mathbb{D}, dA)$, *où* $\psi_k \in \mathcal{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$T_\phi T_\psi = T_\psi T_\phi,$$

si et seulement si pour tout entiers k, *il existe des constantes réelles* $a_0(k)$, $a(k) = \frac{k}{2\delta}$, $b(k) = \frac{m+\delta-k}{2\delta}$, $c(k) = \frac{2\delta-k}{2\delta}$ *et* $d(k) = \frac{k+\delta+m}{2\delta}$ *telles que :*

$$\widehat{\psi_k}(z) = a_0(k)\frac{\Gamma(z/2\delta + a(k))\Gamma(z/2\delta + b(k))}{\Gamma(z/2\delta + c(k))\Gamma(z/2\delta + d(k))},$$

où Γ *est la fonction de Gamma.*

L'une des principaux conséquences obtenus dans [14] est de pose des conditions nécessaires et suffisants telle que la fonction $\widehat{\psi_k}$ soit rationnelle ou irrationnelle. Désormais, nous allons énoncer le lemme :

Lemme 2.3.2.
Soient $p \in \mathbb{N}$ *et* ϕ *une fonction bornée sur* $[0, 1[$ *et soit*

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}\varphi_k(r),$$

Alors,

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_f = T_f T_{e^{ip\theta}\phi} \Leftrightarrow T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{ik\theta}\varphi_k} = T_{e^{ik\theta}\varphi_k}T_{e^{ip\theta}\phi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

***Preuve*.**
$(\Longrightarrow)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_f(z^n) = \sum_{k+n\geq 0} T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{ik\theta}\varphi_k},$$

et

$$T_f T_{e^{ip\theta}\phi}(z^n) = \sum_{k+n+p\geq 0} T_{e^{ik\theta}\varphi_k}T_{e^{ip\theta}\phi},$$

Ensuite, pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ on a,

$$\langle T_f T_{e^{ip\theta}\phi} z^n, z^m \rangle = \langle T_{e^{i(m-n-p)\theta}\varphi_{m-n-p}} T_{e^{ip\theta}\phi} z^n, z^m \rangle.$$

et

$$\langle T_{e^{ip\theta}\phi} T_f z^n, z^m \rangle = \langle T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{i(m-n-p)\theta}\varphi_{m-n-p}} z^n, z^m \rangle.$$

Donc,

$$\begin{aligned} < T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{ik\theta}\varphi_k} z^n, z^m > &= \begin{cases} 0 & , \quad m \neq k+n+p \\ < T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{i(m-n-p)\theta}\varphi_{m-n-p}} z^n, z^m > & , \quad m = k+n+p \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad m \neq k+n+p \\ < T_{e^{ip\theta}\phi} T_f z^n, z^m > & , \quad m = k+n+p \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} < T_{e^{ik\theta}\varphi_k} T_{e^{ip\theta}\phi} z^n, z^m > &= \begin{cases} 0 & , \quad m \neq k+n+p \\ < T_{e^{i(m-n-p)\theta}\varphi_{m-n-p}} T_{e^{ip\theta}\phi} z^n, z^m > & , \quad m = k+n+p \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , \quad m \neq k+n+p \\ < T_f T_{e^{ip\theta}\phi} z^n, z^m > & , \quad m = k+n+p \end{cases} \end{aligned}$$

Maintenant si $T_{e^{ip\theta}\phi} T_f = T_f T_{e^{ip\theta}\phi}$, alors pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on obtient :

$$< T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{ik\theta}\varphi_k} z^n, z^m >=< T_{e^{ik\theta}\varphi_k} T_{e^{ip\theta}\phi} z^n, z^m > .$$

par conséquence,

$$T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{ik\theta}\varphi_k} = T_{e^{ik\theta}\varphi_k} T_{e^{ip\theta}\phi}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

($\Longleftarrow$) Supposons que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{ik\theta}\varphi_k} = T_{e^{ik\theta}\varphi_k} T_{e^{ip\theta}\phi}$, alors en particulier pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, si $m = k+n+p$, on a

$$< T_{e^{ip\theta}\phi} T_{e^{i(m-n-p)\theta}\varphi_{m-n-p}} z^n, z^m >=< T_{e^{i(m-n-p)\theta}\varphi_{m-n-p}} T_{e^{ip\theta}\phi} z^n, z^m > .$$

d'après les calculs précédent, on en déduit :

$$< T_{e^{ip\theta}\phi} T_f z^n, z^m >=< T_f T_{e^{ip\theta}\phi} z^n, z^m > .$$

c'est-à-dire

$$T_{e^{ip\theta}\phi} T_f = T_f T_{e^{ip\theta}\phi}.$$

□

La proposition suivante assurée qu'un opérateur de Toeplitz quasihomogène peut être seulement commuté avec un opérateur de Toeplitz quasihomogène de même degré.

Proposition 2.3.3.

Soit $p, s \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \geq s$ et soient ϕ et ψ deux fonctions radiales bornées. Si

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{-is\theta}\psi} = T_{e^{-is\theta}\psi}T_{e^{ip\theta}\phi}.$$

alors ϕ est nulle ou ψ est nulle.

Preuve.

Supposons que $T_{e^{ip\theta}\phi}$ commute avec $T_{e^{-is\theta}\psi}$ et si l'on utilise le Lemme 2.2.5 pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\widehat{\phi}(2n+p+2)\widehat{\psi}(2n+2p-s+2) = 0, \quad n \leq s-1, \tag{2.3.1}$$

et

$$\widehat{\phi}(2n+p+2)\widehat{\psi}(2n+2p-s+2) = \frac{n-s+1}{n+p+1}\widehat{\phi}(2n+p-2s+2)\widehat{\psi}(2n-s+2), \quad n \geq s, \tag{2.3.2}$$

De l'équation 2.3.1, on déduit que pour tout entier $n_0 \leq s-1$ il existe une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ définit par $n_{k+1} = n_k + p$ ou $n_k + s$ pour laquelle on a :

$$\widehat{\phi}(2n_k+p+2)\widehat{\psi}(2n_k+2p-s+2) = 0, \tag{2.3.3}$$

En effet, soit $n_0 \leq s-1$ tel que :

$$\widehat{\phi}(2n_0+p+2)\widehat{\psi}(2n_0+2p-s+2) = 0,$$

Il vient que :

$$\widehat{\phi}(2n_0+p+2) = 0 \quad \text{ou} \quad \widehat{\psi}(2n_0+2p-s+2) = 0.$$

Si $\widehat{\phi}(2n_0+p+2) = 0$ (resp. $\widehat{\psi}(2n_0+2p-s+2) = 0$) alors, en posant $n_1 = n_0 + s$ (resp. $n_1 = n_0 + p$) et en remplaçant dans l'équation 2.3.2 n par n_1, on obtient :

$$\widehat{\phi}(2n_1+p+2)\widehat{\psi}(2n_1+2p-s+2) = \frac{n_1-s+1}{n_1+p+1}\widehat{\phi}(2n_0+p+2)\widehat{\psi}(2n_1-s+2).$$

(resp. $\widehat{\phi}(2n_1+p+2)\widehat{\psi}(2n_1+2p-s+2) = \frac{n_1-s+1}{n_1+p+1}\widehat{\phi}(2n_1+p-2s+2)\widehat{\psi}(2n_0+2p-s+2)$).
Comme $\widehat{\phi}(2n_0+p+2) = 0$ (resp. $\widehat{\psi}(2n_0+2p-s+2) = 0$), il vient que :

$$\widehat{\phi}(2n_1+p+2)\widehat{\psi}(2n_1+2p-s+2) = 0.$$

Ainsi en réitérant le même procédé, on arrive à construire une suite n_k d'entiers positifs vérifiant l'équation 2.3.3. De plus il est simple de voir que pour tout $k \geq 1$,

$$2n_k + 1 \leq 2(n_0 + kp) \leq 2(k+1)p,$$

car $n_0 \leq s \leq p$. Donc

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n_k+1} = +\infty. \tag{2.3.4}$$

Soit E_1 et E_2 les deux ensembles définis par :

$$E_1 = \{k \in \mathbb{N} : \widehat{\phi}(2n_k + p + 2) = 0\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{k \in \mathbb{N} : \widehat{\psi}(2n_k + 2p - s + 2) = 0\}.$$

Il est clair que :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n_k+1} \leq \sum_{k\in E_1} \frac{1}{2n_k+1} + \sum_{k\in E_2} \frac{1}{2n_k+1}.$$

D'où, d'après l'équation 2.3.4, au moins l'une des deux séries $\sum_{k\in E_1} \frac{1}{2n_k+1}$ et $\sum_{k\in E_2} \frac{1}{2n_k+1}$ est divergente, donc ϕ est nulle ou ψ est nulle. □

La proposition suivante dit en particulier que la commutant d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène est unique. Pour la démonstration nous avons besoin le technique suivant.

Lemme 2.3.4.
Soient F et G deux fonctions analytiques bornées sur le demi plan $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 2\}$ et non identiquement nulles. S'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$F(z)G(z+p) = F(z+p)G(z),$$

alors, $F = CG$ pour certain constant C.

Preuve.
En définissant $h(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$, par les hypothèses h une fonction analytique et borné sur $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > 2\}$. De plus, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$h(z) = h(z+p),$$

c'est-à-dire h une fonction $p-$ périodique, par conséquence $h \equiv C$, où C une constante. □

Proposition 2.3.5.
Soient $p, s \in \mathbb{N}^*$ et ϕ une fonction radiale bornée non identiquement nulle. S'il existe ψ_1, ψ_2 deux fonctions radiales bornées non identiquement nulle telle que $T_{e^{is\theta}\psi_1}$ et $T_{e^{is\theta}\psi_2}$ commutent avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$. Donc, $\psi_1 = C\psi_2$ pour certain constant C.

Preuve.

Par l'hypothèse et pour tout entier $n \geq 0$:

$$\widehat{\phi}(2n+p+2s+2)\widehat{\psi_1}(2n+s+2) = \frac{n+p+1}{n+s+1}\widehat{\phi}(2n+p+2)\widehat{\psi_1}(2n+2p+s+2).$$
$$\widehat{\phi}(2n+p+2s+2)\widehat{\psi_2}(2n+s+2) = \frac{n+p+1}{n+s+1}\widehat{\phi}(2n+p+2)\widehat{\psi_2}(2n+2p+s+2).$$

ce qui donne ;

$$\widehat{\psi_1}(2n+s+2)\widehat{\psi_2}(2n+2p+s+2) = \widehat{\psi_1}(2n+2p+s+2)\widehat{\psi_2}(2n+s+2).$$

On pose $z = 2n+2$, il vient :

$$\widehat{r^s\psi_1}(z)\widehat{r^s\psi_2}(z+2p) = \widehat{r^s\psi_1}(z+2p)\widehat{r^s\psi_2}(z), \quad \forall z \in \{\Re z > 0\}$$

Ainsi, si l'on pose $F = \widehat{r^s\psi_1}$ et $G = \widehat{r^s\psi_2}$ dans le Lemme 2.3.4, on obtient :

$$\widehat{r^s\psi_1} = C\widehat{r^s\psi_2},$$

pour certain constant C, et ceci implique $\psi_1 = C\psi_2$. □

On aura discuté le cas radial.

Proposition 2.3.6.

Soient ϕ et ψ deux fonctions radiales bornées et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_\psi = T_\psi T_{e^{ip\theta}\phi}.$$

alors $\phi = 0$ ou ψ est constante.

Preuve.

Supposons que $T_{e^{ip\theta}\phi}T_\psi = T_\psi T_{e^{ip\theta}\phi}$ alors, pour tout entier naturel n, on a :

$$(n+p+1)\widehat{\phi}(2n+p+2)\widehat{\psi}(2n+2p+2) = (n+1)\widehat{\phi}(2n+p+2)\widehat{\psi}(2n+2).$$

Maintenant, on considère l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N};\quad \widehat{\phi}(2n+p+2) = 0\}$. Notons d'abord que si $\sum\limits_{n \in E} \frac{1}{n} = \infty$ donc grâce à Corollaire 2.2.4, on a $\phi = 0$.
Sinon $\sum\limits_{n \in \mathcal{C}_{\mathbb{N}}E} \frac{1}{n} = \infty$, par conséquent on a :

$$(n+p+1)\widehat{\psi}(2n+2p+2) = (n+1)\widehat{\psi}(2n+2), \quad \forall n \in \mathcal{C}_{\mathbb{N}}E$$

Pour tout $n_0 \in \mathcal{C}_{\mathbb{N}}E$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $n = n_0 + 2(k-1)p$, on obtient :

$$\begin{aligned}(2n_0+2kp+2)\widehat{\psi}(2n_0+2kp+2) &= (2n_0+2(k-1)p+2)\widehat{\psi}(2n_0+2(k-1)p+2)\\ &= (2n_0+2(k-2)p+2)\widehat{\psi}(2n_0+2(k-2)p+2)\\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots\\ &= (2n_0+2)\widehat{\psi}(2n_0+2).\end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout entier $k \geq 1$:

$$\widehat{\psi}(2n_0+2kp+2) = \frac{C}{2n_0+2kp+2} = C\widehat{\mathbb{1}}(2n_0+2kp+2).$$

Donc, ψ est constante. $\square$

Remarque 2.3.7.

Par passage à l'adjoint on déduit que les Propositions 2.3.3,2.3.6 et le Lemme 2.3.2 est encore valable pour un entier négatif p et un entier positif s. On peut aussi supposant que p et s deux entiers négatifs dans la Proposition 2.3.5 est le résultat reste vraie.

Dans [27, Theorem 2], les auteurs prouvent que si l'opérateur $T_{\sum\limits_{k=-\infty}^{N} e^{ik\theta} f_k(r)}$ commute avec $T_{z+\overline{z}}$, alors nous avons ce qui suit :

$$T_{\sum\limits_{k=-\infty}^{N} e^{ik\theta} f_k(r)} = Q(T_{z+\overline{z}}),$$

où Q une fonction polynôme de degré inférieur ou égal 3.
Dans l'article [2], le théorème suivant est présenté, qui est une généralisation du résultat précédent.

Théorème 2.3.8.

Si T_f ou $f(re^{i\theta}) = \sum\limits_{k=-\infty}^{N} e^{ik\theta} f_k(r)$ tel que $T_f T_{z^2+\overline{z}^2} = T_{z^2+\overline{z}^2} T_f$. Alors, on a

$$T_f = c_1(z^2+\overline{z}^2)+c_0,$$

avec $c_0, c_1 \in \mathbb{C}$.

Puis, dans [45] une autre généralisation de ce résultat a été donnée en remplaçant le symbole $z^2+\overline{z}^2$ par le symbole

$$f(z) = f_1(z) + \overline{z}^m \overline{f_2(z)},$$

ou $m \in \mathbb{N}^*$ et f, g sont deux fonctions polynôme holomorphe non constant.

2.4 Racines des Opérateurs de Toeplitz Quasi-homogènes

Soit $p \in \mathbb{N}$, on dit que l'opérateur de Toeplitz quasihomogène $T_{e^{ip\theta}\phi}$ a une $T-p^{ième}$ racine si et seulement s'il existe une fonction radiale borné ψ tel que

$$\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^p = T_{e^{ip\theta}\phi}.$$

Grâce à cette notion. Ci-dessous, on reformule le Lemme 2.3.2, en utilisant les propositions 2.3.3 et 2.3.5. De plus, on rassemble dans la proposition suivante quelques conséquences utiles dans la preuve.

Proposition 2.4.1.

Soient ϕ, ψ deux fonctions radiale borné non nulle et $n, p, s \in \mathbb{N}^*$. Nous avons

(1)

$$\left(T_{e^{ips\theta}\phi}\right)^n = \left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^{np} \Rightarrow T_{e^{ips\theta}\phi} = c_1\left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p.$$

où c_1 une constante.

(2) Si $T_{e^{ip\theta}\phi}$ commute avec $T_{e^{is\theta}\psi}$, alors il existe $c_2 \in \mathbb{C}$ tel que

$$\left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^s = c_2\left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p.$$

Pour la démonstration voir [25, Propositions 7,9].

Théorème 2.4.2.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et ϕ une fonction radiale bornée tel que $T_{e^{ip\theta}\phi}$ admet une $T-p^{ième}$ racine $T_{e^{i\theta}\psi}$.
Si $T_{e^{ip\theta}\phi}$ commute avec T_f, où $f(re^{i\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}\varphi_k(r) \in L^\infty(\mathbb{D}, dA)$. Alors,

(1) Pour tout $k \in \mathbb{Z}_-$, on a $\varphi_k = 0$.

(2) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ est un opérateur de Toeplitz, alors $f_k = 0$ ou $T_{e^{ik\theta}f_k} = \left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$.

(3) Supposons que $k \in \mathbb{N}$ et $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ n'est pas un opérateur de Toeplitz, donc forcément on a $f_k = 0$.

Preuve.

On suppose que l'opérateur $T_{e^{ip\theta}\phi}$ commute avec $T_{\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}\varphi_k(r)}$, du le Lemme 2.3.2 et pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$T_{e^{ip\theta}\phi}T_{e^{ik\theta}\varphi_k} = T_{e^{ik\theta}\varphi_k}T_{e^{ip\theta}\phi},$$

d'après la Proposition 2.3.3 on a $\varphi_k = 0$ pour tout $k < 0$.
Maintenant, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ est un opérateur de Toeplitz quasihomogène de degré k et de plus commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$ et comme le commutant est unique (voir la Proposition 2.3.5), donc $f_k = 0$ ou $T_{e^{ik\theta}f_k} = \left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$.
D'autre part, si $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ n'est pas un opérateur de Toeplitz, et s'il existe un opérateur de Toeplitz quasihomogène $T_{e^{ik\theta}f_k}$ commute avec $T_{e^{ip\theta}\phi}$. En utilisant la Proposition 2.4.1 le point (2), on obtient

$$\left(T_{e^{ik\theta}f_k}\right)^p = \left(T_{e^{ip\theta}\phi}\right)^k = \left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^{pk}.$$

Par conséquent, la Proposition 2.4.1(1) implique que $T_{e^{ik\theta}f_k} = \left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^k$ contradiction. Ceci achève la preuve. □

Dans [14] les auteurs étudient la commutativité de l'opérateur $T_{e^{im\theta}r^p}$ avec $p, m \in \mathbb{N}$ (voir Théorème 2.3.1). Plus tard, I. Louhichi dans [25] a reformulé cette théorème et en a donné une brève preuve.

Théorème 2.4.3.
Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout entier s tel que $1 \leq s \leq m$ il existe une fonction radiale bornée ψ vérifie l'équation suivante

$$T_{e^{is\theta}\psi}T_{e^{im\theta}r^p} = T_{e^{im\theta}r^p}T_{e^{is\theta}\psi}.$$

Preuve.
On constate aisément que le cas de $s = m$ est trivial. Maintenant, on définit la fonction radiale ψ suivante

$$r^s\psi(r) = (f *_M g)(r),$$

avec

$$f(r) = 2mr^{2s}(1 - r^{2m})^{-\frac{s}{m}}, \quad g(r) = 2mr^{m+p}(1 - r^{2m})^{\frac{s}{m}-1}.$$

Pour la démonstration de la fonction ψ est borné voir [14].
En effet, si on pose $x = r^{2m}$ on obtient

$$\widehat{f}(2k+2m+2) = B(\frac{2k+2m+2s+2}{2m}, 1-\frac{s}{m}) \quad \text{et} \quad \widehat{g}(2k+2m+2) = B(\frac{2k+3m+p+2}{2m}, \frac{s}{m}).$$

où B désigne la fonction Bêta. Par conséquent (en utilisant les propriétés des fonctions Gamma et Bêta), on a

$$B(\frac{2k+2m+2s+2}{2m}, 1-\frac{s}{m}) = \frac{2k+2s+2}{2k+2m+2}B(\frac{2k+2s+2}{2m}, 1-\frac{s}{m}).$$

et

$$B(\frac{2k+3m+p+2}{2m},\frac{s}{m}) = \frac{2k+m+p+2}{2k+m+p+2s+2}B(\frac{2k+m+p+2}{2m},\frac{s}{m}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
T_{e^{is\theta}\psi}T_{e^{im\theta}r^p}(z^k) &= \frac{2k+2m+2}{2k+m+p+2}(2k+2m+2s+2)\widehat{\psi}(2k+2m+s+2)z^{k+m+s}\\
&= \frac{(2k+2m+2)(2k+2m+2s+2)}{2k+m+p+2}\widehat{r^s\psi}(2k+2m+2)z^{k+m+s}\\
&= \frac{(2k+2m+2)(2k+2m+2s+2)}{2k+m+p+2}B(\frac{2k+2m+2s+2}{2m},1-\frac{s}{m})\\
&\times B(\frac{2k+3m+p+2}{2m},\frac{s}{m})\\
&= \frac{(2k+2m+2s+2)(2k+2s+2)}{2k+m+p+2s+2}B(\frac{2k+2s+2}{2m},1-\frac{s}{m})\\
&\times B(\frac{2k+m+p+2}{2m},\frac{s}{m})\\
&= T_{e^{im\theta}r^p}T_{e^{is\theta}\psi}(z^k).
\end{aligned}$$

□

En particulier, si $s=1$ il existe une fonction radiale bornée ψ tel que $T_{e^{i\theta}\psi}$ commute avec $T_{e^{im\theta}r^p}$ du [25, Proposition 7], on obtient

$$\Big(T_{e^{i\theta}\psi}\Big)^m = T_{e^{im\theta}r^p}.$$

en résume, l'opérateur $T_{e^{im\theta}r^p}$ admet toujours une $T-p^{i\grave{e}me}$ racine pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $p\in\mathbb{N}$.
En 2011, I. Louhichi et N.V. Rao dans leur article [26] ont étudié la racine d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène, notamment les opérateurs de symbole $e^{ip\theta}\phi$ avec

$$\phi(r) = \sum_{n=1}^{k} r^{a_i}(\ln r)^{b_i}, \quad a_i, b_i \geq 0.$$

Leur méthode de démonstration ils reposent de façon essentielle sur le produit de convolution de Mellin et les fonctions Bêta et Gamma.

2.5 Puissances des Opérateurs de Toeplitz Quasihomogènes

Le but de cette partie est de présente notre contribution sur la puissance des opérateurs de Toeplitz quasihomogène [7]. Tout d'abord, nous choisissons d'énoncer le lemme classique suivant de l'analyse complexe ([11, Lemma 2.2 p.29]) que nous utiliserons plus tard pour prouver nôtres résultats.

Lemme 2.5.1.
Soit $\overline{f}(s)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan droit $\Re s > \gamma$. Si $|\overline{f}(re^{i\theta})| < Cr^{-\nu}$ avec $-\pi \leq \theta \leq \pi$ et $r > R_0$ pour certaines constantes R_0, C et $\nu(> 0)$, alors pour tout $t > 0$, on a

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\Omega_1} e^{st}\overline{f}(s)\, ds = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{r\to\infty} \int_{\Omega_2} e^{st}\overline{f}(s)\, ds = 0.$$

où Ω_1 et Ω_2 sont respectivement les arcs BCD et DEA de Ω comme dans la figure 1.

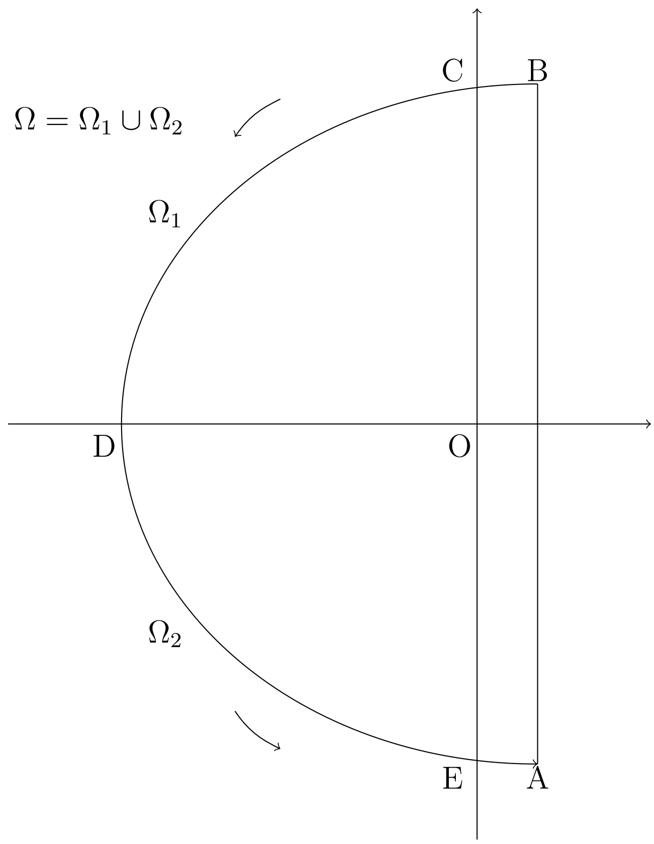

FIGURE 2.1 – Le contour de Bromwich

Nous aurons également besoin du lemme simple suivant.

Lemme 2.5.2.

Soit f une fonction polynomiale dans r^α et $r^\beta \log^\gamma(r)$ où α, β et γ sont dans $\mathbb{Z}$. Si $\alpha \geq -1$ et $\beta, \gamma \in \mathbb{N}$, alors $f \in L^2([0,1], rdr)$.

Le lemme suivant détermine les valeurs des puissances d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène borné évalué en tout élément de la base orthogonale de $L^2_a(\mathbb{D})$. En fait, l'opérateur de Toeplitz quasihomogène et ses puissances mappent l'espace des polynômes en z en lui-même.

Lemme 2.5.3.

Soient $p \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}_+$ et soit ψ une fonction radiale dans $L^1([0,1], rdr)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p(\xi^n)(z) &= \Big[\prod_{j=0}^{p-1} 2(n+js+s+1)\widehat{\psi}(2n+2js+s+2)\Big] z^{n+ps} \\ &= \frac{\prod_{j=0}^{p-1} \widehat{\psi}(2n+2js+s+2)}{\prod_{j=0}^{p-1} \widehat{\mathbb{1}}(2n+2js+2s+2)} z^{n+ps}.\end{aligned}$$

où $\mathbb{1}$ désigne la fonction constante de valeur un.

Nous avons une définition analogue de la $T - p^{ième}$ racine dans [25], nous dirons qu'un opérateur de Toeplitz quasihomogène $T_{e^{is\theta}\psi}$ admet une $T - p^{ième}$ puissance si et seulement s'il existe une fonction radiale ϕ tel que

$$(T_{e^{is\theta}\psi})^p = T_{e^{ips\theta}\phi}.$$

En particulier, $(T_{e^{ip\theta}\psi})^0 = I$ où I l'opérateur d'identité dans $L^2_a(\mathbb{D})$.
Le corollaire suivante preuve l'existence de non trivial opérateur de Toeplitz quasihomogène admet toujours une puissance.

Corollaire 2.5.4. *[25]*

Il existe une fonction radiale bornée ψ tel que le produit $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^p$ un opérateur de Toeplitz quasihmomgène pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Nous sommes maintenant prêts à énoncer notre résultat principal qui peut être vu comme une généralisation de corollaire précédent.

Théorème 2.5.5.

Soit $\psi(r) = \sum_{i=1}^{m} a_i r^{k_i}$ une fonction polynomiale radiale non nulle et soit $P_{\widehat{\psi}} = \{-k_i : i = 1, \ldots, m\}$ et $Z_{\widehat{\psi}}$ sont les ensembles de pôles et de zéros de sa transformation de Mellin $\widehat{\psi}$, respectivement. Suppose que :

(1) Si $i = 1, \dots, m$ au moins un k_i est un nombre impair. On note par k_{i_0} le plus grand nombre impair.
(2) Il existe un ensemble d'entiers $\{\alpha_i\}_{i=1, i\neq i_0}^{i=m}$, tel que :
(i) $\{\alpha_i\}_{i=1, i\neq i_0}^{i=m} \subseteq Z_{\widehat{\psi}}$, et
(ii) Pour tout $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$, on a, $-k_i < \alpha_i \leq k_i + 1$ et k_i et α_i sont la même parité.

Alors, $(T_{e^{i\theta}\psi})^p$ est toujours un opérateur de Toeplitz pour tout $p \in \mathbb{N}$.

***Preuve**.*

Puisque $\psi(r) = \sum_{i=1}^{m} a_i r^{k_i}$, on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(z) &= \int_0^1 \psi(r) r^{z-1} dr \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{m} a_i r^{k_i} r^{z-1} dr \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{z + k_i},\end{aligned}$$

et donc $P_{\widehat{\psi}} = \{-k_i : i = 1, \dots, m\}$. Il est clear que (voir [21, p.105-106]) la fonction $\widehat{\psi}$ peut être étendue à une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$. Ceci implique, avec l'hypothèse du théorème, que $\widehat{\psi}$ peut s'écrire comme

$$\widehat{\psi}(z) = \frac{\prod\limits_{i=1, i\neq i_0}^{m} (z - \alpha_i)}{\prod\limits_{i=1}^{m} (z + k_i)} f(z),$$

où f est holomorphe et non nulle dans un voisinage de chaque pôle $-k_i$, avec $i = 1, \dots, m$. Ensuite, pour tout entier $p \geq 1$, nous montrons l'existence de la fonction ϕ dans $L^2([0,1], rdr)$ tel que $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^p = T_{e^{ip\theta}\phi}$. En effet, le Lemme 2.5.3 implique que pour tous les entiers $n \geq 0$, on a

$$\prod_{j=0}^{p-1} (2n + 2j + 4) \widehat{\psi}(2n + 2j + 3) = (2n + 2p + 2) \widehat{\phi}(2n + p + 2).$$

En utilisant le Théorème 2.2.3, il est facile de voir que si $p = 1$ alors $\phi \equiv \psi$. Donc soit $p \geq 2$, on complexifie l'égalité précédente et on pose $z = 2n+p+2$, on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(z) &= \Big[\prod_{j=0}^{p-2}(z-p+2j+2)\Big]\Big[\prod_{j=0}^{p-1}\widehat{\psi}(z-p+2j+1)\Big] \\ &= \frac{\Big[\prod_{l=0}^{p-2}(z-p+2l+2)\Big]\Big[\prod_{(i,s)=(1,0),i\neq i_0}^{(m,p-1)}(z-\alpha_i-p+2s+1)\Big]}{\prod_{(d,j)=(1,0)}^{(m,p-1)}(z+k_d-p+2j+1)}h(z),\end{aligned}$$

où $h(z) = \prod_{j=0}^{p-1} f(z-p+2j+1)$.
Ainsi $\widehat{\phi}$ est une fonction méromorphe dans $\mathbb{C}$ et a des pôles simples aux entiers $-k_d+p-2j-1$, avec $(d,j) = (1,0),\ldots,(m,p-1)$. De plus, la ligne d'intégration dans la formule d'inversion (2.2.2) est décalée vers la gauche en prenant des résidus dans le contour de Bromwich (voir Figure 2.1). En utilisant le Lemme 2.5.1 et le Théorème des Résidus, nous concluons que ϕ est déterminé par la somme des résidus à tous les pôles à gauche de $\Re z = c$ et nous avons

$$\phi(r) = \sum_{(d,j)=(1,0)}^{(m,p-1)} Res\ \widehat{\phi}(z)\Big|_{z=-k_d+p-2j-1} r^{k_d-p+2j+1}. \qquad (2.5.1)$$

Claim : ϕ appartient à $L^2([0,1], rdr)$.
Pour le prouver, il suffit, en utilisant le Lemme 2.5.2, de montrer que $P_{\widehat{\phi}} \subseteq \mathbb{Z}_-$. Sans perte de généralité, nous supposons que $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$. Ensuite, nous avons les cas suivants :

Cas 1 : $p \leq k_1$. On a

$$p \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_m,$$

ensuite,

$$k_d - p \geq 0, \text{ pour tout } d \in \{1,\ldots,m\}.$$

Donc,

$$k_d - p + 2j + 1 \geq 1, \text{pour tout } d \in \{1,\ldots,m\} \text{ et tout } j \in \{0,\ldots,p-1\}.$$

Case 2 : $k_n < p \leq k_{n+1}$ pour $n \in \{1,\ldots,m-1\}$. Ici, nous considérons deux sous-cas.

Cas A : $n \in \{1,\ldots,m-1\} \setminus \{i_0\}$. De Case 1 nous savons que

$$k_d - p + 2j + 1 \geq 1, \ \forall d \in \{n+1,\ldots,m\} \text{ et } \forall j \in \{0,\ldots,p-1\}.$$

Maintenant, si $d \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$k_d - p + 2j + 1 < 0 \text{ i.e. } j < \frac{-k_d + p - 1}{2}.$$

Si on pose $j_0 = \lfloor \frac{-k_d+p-1}{2} \rfloor$ la partie entière de $\frac{-k_d+p-1}{2}$, alors pour tout $d \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{0, \ldots, j_0\}$, nous avons

$$k_d - p + 2j + 1 < 0. \tag{2.5.2}$$

Ensuite, nous montrerons que les pôles de $\widehat{\phi}$ dans (2.5.2) sont annulés par des zéros de $\widehat{\phi}$. En d'autres termes,

$$\forall (j, d) \in \{(0, 1), \ldots, (j_0, n)\}, \exists (i, s) \in \{(1, 0), \ldots, (m, p-1)\}, \text{et} i \neq i_0$$

tel que

$$-\alpha_i + 2s = k_d + 2j.$$

Pour ce faire, on prend $i = d$ et on pose $s = \dfrac{k_d + \alpha_d + 2j}{2}$. Alors, par l'hypothèse (2)(ii), $s \in \mathbb{N}$, et

$$\begin{aligned} 2s &= k_d + \alpha_d + 2j \\ &\leq k_d + \alpha_d + 2j_0 \\ &\leq \alpha_d + p - 1 \\ &< 2p, \end{aligned}$$

ce qui implique $s \leq p - 1$.

Cas B : $n = i_0$. Alors pour tout $j \in \{0, \ldots, j_0 = \lfloor \frac{-k_{i_0}+p-1}{2} \rfloor\}$, on a

$$k_{i_0} - p + 2j + 1 < 0. \tag{2.5.3}$$

Comme pour le sous-cas précédent, ces pôles de $\widehat{\phi}$ sont annulés par des zéros de $\widehat{\phi}$. En fait, en prenant $l = \dfrac{k_{i_0} + 2j - 1}{2}$, il est facile de voir que $l \in \{0, \ldots, p-2\}$ et aussi que $2l + 2 = k_{i_0} + 2j + 1$ pour tout $j \in \{0, \ldots, j_0\}$.

Cas 3 : $p > k_m$. Nous suivons le même argument que dans le cas 2.

□

Remarque 2.5.6.

Si $\widehat{\phi}$ admet des pôles de multiplicité supérieurs à 1, l'expression (2.5.1) devient

$$\phi(r) = \sum_{(d,j)=(1,0)}^{(m,p-1)} \alpha_{d,j} (\log r)^n r^{k_d - p + 2j + 1},$$

où $n \in \mathbb{N}$ est la multiplicité du pôle $z = -k_d + p - 2j - 1$; et le même argument dans la preuve reste vrai.

Exemples 2.5.7.
Soit $\psi(r) = 3r - 12r^2 + 10r^3$. Alors

$$\widehat{\psi}(z) = \frac{3}{z+1} - \frac{12}{z+2} + \frac{10}{z+3} = \frac{(z-1)(z-2)}{(z+1)(z+2)(z+3)}.$$

En utilisant le Lemme 2.5.3, on obtient pour tout $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^p(\xi^n)(z) &= \Big[\prod_{j=0}^{p-1} 2(n+j+2)\widehat{\psi}(2n+2j+3)\Big] z^{n+p} \\
&= \frac{\prod_{j=0}^{p-1}(2n+2j+4)(2n+2j+2)(2n+2j+1)}{\prod_{j=0}^{p-1}(2n+2j+4)(2n+2j+5)(2n+2j+6)} z^{n+p} \\
&= \frac{\prod_{j=0}^{p-1}(2n+2j+2)(2n+2j+1)}{\prod_{j=2}^{p+1}(2n+2j+1)(2n+2j+2)} z^{n+p} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n+4)(2n+3)}{(2n+2p+2)(2n+2p+1)(2n+2p+4)(2n+2p+3)} z^{n+p}.
\end{aligned}$$

Nous voulons maintenant trouver une fonction radiale ϕ telle que

$$\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^p(\xi^n)(z) = T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^n)(z),$$

pour chaque entier $p \geq 1$. Cela équivaut à trouver ϕ pour lequel

$$\begin{aligned}
T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) &= (2n+2p+2)\widehat{\phi}(2n+p+2) z^{n+p} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n+4)(2n+3)}{(2n+2p+2)(2n+2p+1)(2n+2p+4)(2n+2p+3)} z^{n+p},
\end{aligned}$$

et donc pour tout $n \geq 0$, il faut avoir

$$\widehat{\phi}(2n+p+2) = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n+4)(2n+3)}{(2n+2p+2)^2(2n+2p+1)(2n+2p+4)(2n+2p+3)}.$$

En utilisant le Théorème 2.2.3 et on pose $z = 2n+p+2$, on obtient

$$\widehat{\phi}(z) = \frac{(z-p)(z-p-1)(z-p+2)(z-p+1)}{(z+p)^2(z+p-1)(z+p+2)(z+p+1)}.$$

Il est clear que $\widehat{\phi}$ est holomorphe sur $\{z; \Re z > 0\}$ et admet des pôles simples à $1-p, -p-2, -p-1$ et de pôle double à $-p$. Enfin pour trouver la fonction ϕ, nous utilisons la transformation de Mellin inverse et le Théorème des Résidus et nous obtenons

$$\begin{aligned}\phi(r) &= Res\ \widehat{\phi}(z)\Big|_{z=1-p} r^{p-1} + Res\ \widehat{\phi}(z)\Big|_{z=-p-1} r^{p+1}\\ &+ Res\ \widehat{\phi}(z)\Big|_{z=-p-2} r^{p+2} + Res\ \widehat{\phi}(z) r^{-z}\Big|_{z=-p}\\ &= a_1 r^{p-1} + a_2 r^{p+1} + a_3 r^{p+2} + (a_4 + a_5 \log r) r^p.\end{aligned}$$

où a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 sont des constantes réelles. Il convient de mentionner ici que pour tout $p \geq 1$, la fonction ϕ est "presque bornée" [1, p. 204] et donc $T_{e^{ip\theta}\phi}$ est un opérateur de Toeplitz borné.

Dans la proposition suivante, nous prouvons l'existence de fonctions radiales non polynomiales ψ pour lesquelles $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^p$ est toujours un opérateur de Toeplitz pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.5.8.
Il existe des fonctions non polynomiales ψ telles que la puissance $\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^p$ est toujours un opérateur de Toeplitz pour tous les entiers $p \geq 1$.

Preuve.
Soit $\psi(r) = r + 4r^2 \log r$. Donc

$$\widehat{\psi}(z) = \frac{-4}{(z+2)^2} + \frac{1}{z+1} = \frac{z^2}{(z+1)(z+2)^2}.$$

En utilisant le Lemme 2.5.3, nous obtenons cela pour tout $n \geq 0$ et tout $p \geq 1$

$$\begin{aligned}\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^p(\xi^n)(z) &= \left[\prod_{j=0}^{p-1} 2(n+j+2)\widehat{\psi}(2n+2j+3)\right] z^{n+p}\\ &= \frac{\prod_{j=0}^{p-1}(2n+2j+4)(2n+2j+3)^2}{\prod_{j=0}^{p-1}(2n+2j+4)(2n+2j+5)^2} z^{n+p}\\ &= \frac{\prod_{j=0}^{p-1}(2n+2j+3)^2}{\prod_{j=0}^{p-1}(2n+2j+5)^2} z^{n+p}\\ &= \frac{\prod_{j=0}^{p-1}(2n+2j+3)^2}{\prod_{j=1}^{p}(2n+2j+3)^2} z^{n+p}\\ &= \frac{(2n+3)^2}{(2n+2p+3)^2} z^{n+p}.\end{aligned}$$

On veut trouver une fonction radiale ϕ telle que

$$\left(T_{e^{i\theta}\psi}\right)^p(\xi^n)(z) = T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^n)(z),$$

pour chaque entier $p \geq 1$ et tout $n \geq 0$. Cela équivaut à trouver ϕ pour lequel

$$\begin{aligned} T_{e^{ip\theta}\phi}(\xi^n)(z) &= (2n+2p+2)\widehat{\phi}(2n+p+2)z^{n+p} \\ &= \frac{(2n+3)^2}{(2n+2p+3)^2}z^{n+p}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq 0$, nous devons avoir

$$\widehat{\phi}(2n+p+2) = \frac{(2n+3)^2}{(2n+2p+2)(2n+2p+3)^2}.$$

En utilisant le Théorème 2.2.3 et le changement de variables $z = 2n+p+2$, on obtient

$$\widehat{\phi}(z) = \frac{(z-p+1)^2}{(z+p)(z+p+1)^2}.$$

Il est clear que $\widehat{\phi}$ est holomorphe sur $\{z; \Re z > 0\}$ et a un pôle simple à $-p$ et un double pôle à $-p-1$. Enfin, pour récupérer la fonction ϕ, nous utilisons la transformation de Mellin inverse et le Théorème des Résidus et nous obtenons

$$\begin{aligned} \phi(r) &= Res\ \widehat{\phi}(z)\Big|_{z=-p} r^p + Res\ \widehat{\phi}(z)\Big|_{z=-p-1} r^{p+1} \\ &= (1-2p)^2 r^p + 4pr^{p+1}\Big((1-p) + p\log r\Big). \end{aligned}$$

Enfin, pour tout $p \geq 1$, la fonction ϕ est presque bornée et donc $T_{e^{ip\theta}\phi}$ est un opérateur de Toeplitz. $\square$

Remarque 2.5.9.

Notez que dans l'Exemple 2.5.7 (resp. Proposition 2.5.8), au lieu d'utiliser la transformation inverse de Mellin et le Théorème des Résidus pour obtenir la fonction ϕ, on peut récupérer ϕ à partir de sa transformation de Mellin en écrivant la décomposition en fraction partielle de $\widehat{\phi}(z)$ puis en utilisant les identités suivantes à savoir $\widehat{r^m}(z) = \frac{1}{z+m}$ et $\widehat{r^m \ln^n(r)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{(z+m)^{n+1}}$ pour tous les entiers non négatifs m et n.

En utilisant des arguments et des notations similaires à ceux de la preuve du Théorème 2.5.5, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 2.5.10.

Soit $\psi(r) = \sum_{i=1}^{m} a_i r^{k_i}$ *une fonction polynomiale non nul et* $s \in \mathbb{N}^*$. *Suppose que :*

(1) pour $i = 1, \ldots, m$, *il existe au moins un* k_i *tel que* $k_i - s$ *soit un entier non négatif et divisible par* $2s$. *Soit* k_{i_0} *le plus grand de ces nombres.*

(2) il existe un ensemble d'entiers $\{\alpha_i\}_{i=1, i\neq i_0}^{i=m}$, *tel que :*

(i) $\{\alpha_i\}_{i=1, i\neq i_0}^{i=m} \subseteq Z_{\widehat{\psi}}$.
(ii) $\forall i \in \{1, \cdots, m\} \setminus \{i_0\}$, *on a* $-k_i < \alpha_i \leq k_i + s$ *et* $\alpha_i + k_i$ *est divisible par* $2s$.

Alors, $(T_{e^{is\theta}\psi})^p$ *est toujours un opérateur de Toeplitz pour tout* $p \in \mathbb{N}$.

Exemples 2.5.11.
Soient m, n, et p des nombres naturels.

1) Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{N}$ tels que $T_{e^{is\theta}(\alpha r^n + \beta r^m)}$ admet toujours une $T-p^{ième}$ puissance pour tout $p \geq 1$. Par exemple, $(T_{e^{3i\theta}(-\frac{6}{7}r^2 + \frac{13}{7}r^9)})^p$ est toujours un opérateur de Toeplitz.
2) Pour tout $p, s \in \mathbb{N}$, le produit $(T_{e^{is\theta}r^m})^p$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si $m \geq s$ et $m - s$ est divisible par $2s$.

Remarque 2.5.12.

(i) Dans [25, Theorem 13 p.1472], le troisième auteur a montré que si $T_{e^{i\theta}\psi}$ admet une $T - p^{ième}$ puissance et si T_f est un opérateur de Toeplitz borné tel que $T_f T_{e^{i\theta}\psi} = T_{e^{i\theta}\psi} T_f$, alors T_f doit être la somme des puissances de $T_{e^{i\theta}\psi}$. Dans le même esprit et sous l'hypothèse du Théorème 2.5.5 (resp. Corollaire 2.5.10), si T_f commute avec $T_{e^{i\theta}\psi}$ (resp. $T_{e^{is\theta}\psi}$), alors T_f est la somme des puissances de $T_{e^{i\theta}\psi}$ (resp. $T_{e^{is\theta}\psi}$) également.

(ii) Soient ψ une fonction polynomiale non nul et s un nombre naturel. Si $T_{e^{is\theta}\psi}$ admet une $T-p^{ième}$ puissance pour tout $p \in \mathbb{N}$, alors par le Théorème 2.5.5 et le Corollaire 2.5.10 il est facile de voir qu'il existe un entier positif n tel que $(T_{e^{in\theta}\psi})^p$ est un opérateur de Toeplitz pour tout p.

(iii) Nous rappelons que $T_f^* = T_{\bar{f}}$, où $\bar{f}$ est le conjugué complexe de f. Donc en passant a l'adjoint, $T_{e^{-i\theta}\psi}$ a une $T - p^{ième}$ puissance si et seulement si $T_{e^{i\theta}\psi}$ a cela aussi. Par conséquent, les résultats précédents restent vrais pour l'opérateur de Toeplitz quasihomogène de degrés négatifs.

Dans ce qui suit, nous abordons le cas des opérateurs de Toeplitz radiale.

Théorème 2.5.13.
Soit $\psi(r) = \sum_{i=1}^{m} a_i r^{k_i}$ *un symbole polynomial non nul. Alors, pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *il existe un symbole radial* $\phi \in L^2([0,1], rdr)$, *tel que*

$$(T_\psi)^p = T_\phi.$$

De plus, si $p \geq 2$ *on a*

$$\phi(r) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} r^{\beta_i} (\log r)^{\gamma_j}, \ \textit{avec}\ \beta_i, \gamma_j \in \mathbb{N} \textit{et}\ \alpha_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

Preuve.

Comme indiqué au début de la preuve du Théorème 2.5.5, $\widehat{\psi}$ peut être écrit comme

$$\widehat{\psi}(z) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m}(z+k_i)} f(z),$$

où f est holomorphe et non nul dans un voisinage de chaque pôle $-k_i, i = 1, \dots, m$. Maintenant, nous prouvons l'existence de ϕ dans $L^2([0,1], rdr)$ pour lequel $(T_\psi)^p = T_\phi$ pour tout entier $p \geq 1$. Si ϕ existe, le Lemme 2.5.3 implique que

$$(2n+2)^{p-1}\left[\widehat{\psi}(2n+2)\right]^p = \widehat{\phi}(2n+2), \ \forall n \geq 0.$$

Notez que p est un entier positif et que notre discussion est triviale pour $p = 1$ puisque dans ce cas $\phi \equiv \psi$.

Nous supposons donc $p \geq 2$. On pose $z = 2n+2$, on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}(z) &= z^{p-1}\left[\widehat{\psi}(z)\right]^p \\ &= \frac{z^{p-1}}{\prod_{i=1}^{m}(z+k_i)^p} h(z),\end{aligned}$$

où $h(z) = (f(z))^p$. De la même manière que dans la preuve du Théorème 2.5.5 et en utilisant la formule de Leibniz, nous montrons que

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \sum_{i=1}^{m} Res\ \widehat{\phi}(z) \cdot r^{-z}\Big|_{z=-k_i} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to -k_i}\frac{\partial^{p-1}}{\partial z^{p-1}}\left[\frac{z^{p-1}}{\prod_{l=1,l\neq i}^{m}(z+k_l)^p} h(z)\cdot r^{-z}\right]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to -k_i}\sum_{j=0}^{p-1}\left[\frac{(p-1)!}{j!(p-1-j)!} g^{(j)}(z)\cdot (r^{-z})^{(p-1-j)}\right]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=0}^{p-1}\left[\frac{1}{j!(p-1-j)!} g^{(j)}(-k_i)\cdot(-1)^{p-1-j}(\log r)^{p-1-j}(r^{k_i})\right]\right),\end{aligned}$$

tel que $g^{(j)}$ est le $j^{ième}$ dérivé de la fonction $g(z) = \dfrac{z^{p-1}}{\prod_{l=1,l\neq i}^{m}(z+k_l)^p} h(z)$.

Enfin, on posent $\alpha_{i,j} = \dfrac{(-1)^{p-1-j}}{j!(p-1-j)!} g^{(j)}(-k_i)$, $\beta_i = k_i \geq 0$ et $\gamma_i = p-1-j \geq 0$, nous obtenons le résultat. $\square$

Exemples 2.5.14.

Soit $\psi(r) = r^m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Alors on a $\widehat{\psi}(z) = \frac{1}{z+m}$. Encore une fois, le Lemme 2.5.3 implique que pour tout $p \geq 1$ et tout $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}(T_\psi)^p(\xi^n)(z) &= \left[\prod_{j=0}^{p-1}(2n+2)\widehat{\psi}(2n+2)\right] z^n \\ &= \frac{(2n+2)^p}{(2n+2+m)^p} z^n.\end{aligned}$$

Nous voulons trouver un symbole radiale ϕ tel que

$$(T_\psi)^p(\xi^n)(z) = T_\phi(\xi^n)(z),$$

pour tout $n \geq 0$. Cela équivalent de trouver ϕ tel que

$$\widehat{\phi}(2n+2) = \frac{(2n+2)^{p-1}}{(2n+2+m)^p}.$$

En utilisant le Théorème 2.2.3 et on pose $z = 2n+2$, on obtient

$$\widehat{\phi}(z) = \frac{z^{p-1}}{(z+m)^p}.$$

Clair que $\widehat{\phi}$ admet un pôle d'ordre p à $z = -m$. Pour obtenir ϕ nous choisissons de procéder comme suit (mais on peut aussi utiliser la décomposition en fraction partielle de $\widehat{\phi}(z)$ comme mentionné dans la Remarque 2.5.9).

$$\begin{aligned}\phi(r) &= Res\ \widehat{\phi}(z) \cdot r^{-z}\Big|_{z=-m} \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to -m} \frac{\partial^{p-1}}{\partial z^{p-1}} \left[z^{p-1} \cdot r^{-z}\right] \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to -m} \sum_{j=0}^{p-1} \left[\frac{(p-1)!}{j!(p-1-j)!}(z^{p-1})^{(p-1-j)} \cdot (r^{-z})^{(j)}\right] \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to -m} \sum_{j=0}^{p-1} \left[\frac{(p-1)!}{j!(p-1-j)!}(p-1)(p-2)\cdots(j+1)z^j \cdot (-1)^j(\log r)^j r^{-z})\right] \\ &= r^m \sum_{j=0}^{p-1} \left[\frac{(p-1)(p-2)\cdots(j+1)m^j}{j!(p-1-j)!} \cdot (\log r)^j\right] \\ &= r^m \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_{j,m}(\log r)^j,\end{aligned}$$

où $\alpha_{j,m} = \frac{(p-1)(p-2)\cdots(j+1)m^j}{j!(p-1-j)!}$. Finalement, il est facile de voir que ϕ est une fonction presque bornée et donc T_ϕ est un opérateur de Toeplitz.

Nous concluons par une conséquence simple mais intéressante de notre principale résultats.

Corollaire 2.5.15.

Soient $s \in \mathbb{N}^*$ et $\psi(r) = \sum_{i=1}^{m} a_i r^{k_i}$ une fonction polynomiale non nulle. Alors, il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $T_{e^{is\theta}\psi}$ admet une $T-p^{\text{ième}}$ puissances pour tous les nombres entiers $1 \leq p \leq N$.

Preuve.

Puisque $\psi(r) = \sum_{i=1}^{m} a_i r^{k_i}$, nous pouvons écrire $\widehat{\psi}(z) = \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{m}(z+k_i)}$, où le numérateur f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $m-1$. Évidemment, si ψ satisfait les conditions du Corollaire 2.5.10, alors N peut être n'importe quel entier dans $\mathbb{N}$.
Maintenant, supposons que l'hypothèse du Corollaire 2.5.10 ne soit pas valable. On veut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier aléatoire p entre 1 et N il existe une fonction radiale φ satisfaisant

$$\left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p = T_{e^{ips\theta}\varphi},$$

Si tel est le cas, alors en utilisant le Lemme 2.5.3 et on pose $z = 2n + ps + 2$, nous devons avoir cela pour tous les entiers $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\left(T_{e^{is\theta}\psi}\right)^p(\xi^n)(z) &= \Big[\prod_{j=0}^{p-1} 2(n+js+s+1)\widehat{\psi}(2n+2js+s+2)\Big] z^{n+ps} \\
&= \left[\frac{\prod_{j=0}^{p-1}(z-ps+2js+2s)f(z-ps+2js+s)}{\prod_{(i,j)=(1,0)}^{(m,p-1)}(z-ps+k_i+2js+s)}\right] z^{n+ps} \\
&= (z+ps)\widehat{\varphi}(z).
\end{aligned}$$

De même, et comme dans la preuve du Théorème 2.5.5, on en déduit que φ doit être de

$$\varphi(r) = \sum_{(i,j)=(1,0)}^{(m,p-1)} \alpha_{i,j} r^{k_i - ps + 2js + s}.$$

tel que $\alpha_{i,j}$ sont des constantes. De plus, puisque $k_1 - ps + s \leq k_i - ps + 2js + s$ pour tout $(i,j) = (1,0) \cdots (m, p-1)$, la fonction φ sera dans $L^2([0,1], rdr)$ si $k_1 - ps + s \geq 0$. Sinon $T_{e^{ips\theta}\varphi}$ ne sera pas borné et donc pas un opérateur de Toeplitz. Par conséquent, il suffit de prendre $N = \lfloor \frac{s+k_1}{s} \rfloor$. $\square$

Chapitre 3

Semi-Groupes des Opérateurs de Toeplitz Tronqués

Dans ce chapitre, nous rappelons l'essentiel et les résultats classiques qui nous avons besoin pour présenter les résultats des semi-groupes des opérateurs de Toeplitz. D'abord, nous rappelons quelques définitions et résultats sur la théorie des opérateurs de Toeplitz tronqué dans l'espace Modèle. Ensuite nous rappelons les résultats de N.A. Sedlock sur ces opérateurs.

3.1 Opérateurs de Toeplitz Tronqués

On définit l'opérateur de Toeplitz tronqué sur l'espace K_u^2 comme suit :

$$\begin{aligned} A_\varphi^u : K_u^2 &\to K_u^2 \\ f &\to A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f). \end{aligned}$$

pour un certain symbole $\varphi \in L^2$.
On observe que l'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\overline{\varphi}$ et l'adjoint de l'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole φ.
De plus, les opérateurs A_φ^u, S_u et S_u^* est la compression sur K_u^2 des opérateurs T_φ, S et S^* (respectivement) défini sur l'espace H^2.
Dans [38], l'auteur donne une condition nécessaire et suffisante tel que l'opérateur dans l'espace Modèle soit un opérateur de Toeplitz tronqué.

Théorème 3.1.1.
Un opérateur borné A sur K_u^2 est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement s'il existent deux fonctions ψ, χ appartient à K_u^2 telle que

$$A - S_u A S_u^* = (\psi \otimes k_0^u) + (k_0^u \otimes \chi),$$

dans ce cas $A = A^u_{\psi+\overline{\chi}}$.

Le point 2 dans la Remarque 1.3.6 dit que le symbole de l'opérateur de Toeplitz dans l'espace de Hardy est unique. Naturellement, nous avons la question suivante ; est ce que sa reste vrai dans l'espace Modèle ? une réponse de cette question donne dans le théorème suivant.

Théorème 3.1.2.
Soient u une fonction intérieure et φ dans L^2. Alors, on a

$$A_\varphi^u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}.$$

Preuve.

($\Leftarrow$) Supposons que $\varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}$, donc il existe deux fonctions ψ et χ dans H^2 telles que :

$$\varphi = u\psi + \overline{u\chi}.$$

Pour tout $f \in K_u^\infty = K_u^2 \cap H^\infty$ on a :

$$\varphi f = u\psi f + \overline{u\chi} f,$$

qui est orthogonale à K_u^2 car $uK_u^\infty \subset uH^\infty$ et $\overline{uK_u^\infty} \subset \overline{uH^\infty}$.
Ainsi, $A_\varphi^u = 0$ pour tout $f \in K_u^\infty$, et comme K_u^∞ est dense dans K_u^2 achève la preuve.

($\Rightarrow$) On suppose que $A_\varphi^u = 0$ et on pose $\varphi = \psi + \overline{\chi}$ avec $\psi, \chi \in H^2$. Donc,

$$A_\psi^u = -A_{\overline{\chi}}^u.$$

D'une part, (voir [38], Lemme 2.4) on a

$$I - S_u S_u^* = k_0^u \otimes k_0^u.$$

où $\otimes$ le produit tensoriel défini sur l'espace de Hilbert H par :

$$\forall x, y \in H, \quad x \otimes y : z \in H \to \langle z, y\rangle . x \in H.$$

Donc ;

$$\begin{aligned} A_\psi^u (I - S_u S_u^*) k_0^u &= A_\psi^u (k_0^u \otimes k_0^u) k_0^u \\ &= \Big[(A_\psi^u k_0^u) \otimes k_0^u \Big] k_0^u \\ &= \langle k_0^u, k_0^u \rangle A_\psi^u k_0^u. \end{aligned}$$

De la même façon on a ;

$$\begin{aligned} (I - S_u S_u^*) A_\psi^u k_0^u &= (k_0^u \otimes k_0^u) A_\psi^u k_0^u \\ &= \langle A_\psi^u k_0^u, k_0^u \rangle k_0^u. \end{aligned}$$

D'autre part, $A^u_{\overline{\chi}}$ et S^*_u commutent et l'opérateur A^u_ψ commute avec S_u, ainsi puisque $A^u_\psi = -A^u_{\overline{\chi}}$ donc A^u_ψ commutent avec S_u et S^*_u. Alors

$$\langle k^u_0, k^u_0\rangle A^u_\psi k^u_0 = \langle A^u_\psi k^u_0, k^u_0\rangle k^u_0.$$

Autrement dit, il existe une constante $c \in \mathbb{C}$ vérifiée :

$$A^u_\psi = ck^u_0.$$

par conséquent

$$\begin{aligned} 0 = (A^u_\psi - cI)k^u_0 &= P_u\Big[(\psi - c)(1 - \overline{u(0)}u)\Big] \\ &= P_u(\psi - c). \end{aligned}$$

est équivalent à

$$\psi - c \in uH^2.$$

Alors, $A^u_\psi = cI$ et de plus $A^u_\psi = -A^u_{\overline{\chi}}$ donc$A^u_{\overline{\chi}} = -cI$.
Comme précédemment ci-dessus on peut montrer que

$$\overline{\chi} + c \in \overline{uH^2}.$$

D'où

$$\varphi = \psi - c + \overline{\chi} + c \in uH^2 + \overline{uH^2}.$$

□

Exemples 3.1.3.
Soit u une fonction intérieure. Pour tout f dans K^2_u on a :

$$\begin{aligned} A_1(f) - A_{k^u_0}(f) &= A_{1-1+\overline{u(0)}u}(f) \\ &= A_{\overline{u(0)}u}(f) \\ &= P_u\Big(\overline{u(0)}uf\Big) \\ &= \overline{u(0)}P_u(uf) = 0. \qquad \Big(\text{car} \quad uf \in uH^2 = (K^2_u)^\perp\Big) \end{aligned}$$

Alors $A_1 = A_{k^u_0}$, et comme A_1 est auto-adjoint, donc

$$A_1 = A_{k^u_0} = A^*_{k^u_0} = A_{\overline{k^u_0}}.$$

Définition 3.1.4.
On dit que la fonction u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point $\eta \in \mathbb{T}$ si pour tout $\theta > 0$ et tout z telle que $|z - w| < \theta(1 - \theta)$, on a

$$\lim_{z\to\eta} \frac{u(z) - u(\eta)}{z - \eta} = u^{'}(\eta).$$

On sait que u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point η si et seulement si chaque fonction dans K_u^2 possédé une limite non-tangentielle η.
Autrement dit, k_η^u est la limite de k_λ^u en faisant tendre λ vers η non-tangentielle dans le disque et donc

$$k_\eta^u(z) = \frac{1-\overline{u(\eta)}u(z)}{1-\overline{\eta}z}, \qquad z \in \mathbb{T}.$$

Nous rappelons aussi que pour toute fonction intérieure u l'espace K_u^2 admet un opérateur de conjugaison [1] définit pour tout $z \in \mathbb{T}$ par

$$K_u^2 \ni f \to C[f](z) = \widetilde{f}(z) = u(z)\overline{zf(z)} \in K_u^2.$$

Nous pouvons maintenant déterminer rapidement la conjugaison de noyau reproduisant dans le lemme suivant :

Lemme 3.1.5.
Pour tout le couple (λ, z) *dans* $(\mathbb{D}, \mathbb{T})$ *et pour tout* $f \in K_u^2$ *on a :*

1. $\widetilde{k_\lambda^u}(z) = \frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda}$.
2. $\widetilde{f}(\lambda) = \langle \widetilde{k_\lambda^u}, f\rangle$.

Preuve.

1. Soit $(\lambda, z) \in (\mathbb{D}, \mathbb{T})$. Alors

$$\begin{aligned}\widetilde{k_\lambda^u}(z) &= u(z)\overline{zk_\lambda^u} \\ &= u(z)\overline{z}\frac{1-u(\lambda)\overline{u(z)}}{1-\lambda\overline{z}} \\ &= \overline{z}\frac{u(z)-u(\lambda)}{1-\lambda\overline{z}}, \qquad (\text{Car} \quad |u| = 1 \quad \text{p.p sur} \quad \mathbb{T}) \\ &= \frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda}.\end{aligned}$$

2. Soit $f \in K_u^2$. Donc, on a

$$\langle \widetilde{k_\lambda^u}, f\rangle = \langle Ck_\lambda^u, f\rangle = \langle Ck_\lambda^u, C^2 f\rangle = \langle Cf, k_\lambda^u\rangle = \langle \widetilde{f}, k_\lambda^u\rangle = \widetilde{f}(\lambda).$$

1. Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$. Un opérateur de conjugaison sur H est un opérateur $C : H \to H$ vérifiant
   - $\langle Cx, Cy\rangle = \langle y, x\rangle$.
   - $C^2 = Id_H$.

□

Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs de Toeplitz tronqué de rang 1.

Théorème 3.1.6. *[38]*

(a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$ les opérateurs $A^u_{\frac{u}{z-\lambda}} = \widetilde{k^u_\lambda} \otimes k^u_\lambda$ et $A^u_{\frac{\overline{u}}{\overline{z}-\overline{\lambda}}} = k^u_\lambda \otimes \widetilde{k^u_\lambda}$ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1.

(b) Si u admet une dérivée angulaire au sens Carathéodory au point $\eta \in \mathbb{T}$ alors $A^u_{k^u_\eta + \overline{k^u_\eta} - 1} = k^u_\eta \otimes k^u_\eta$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de rang 1.

(c) Les seuls opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1 sont des multiples des opérateurs définis dans (a) et (b).

Terminons cette section par le lemme suivant :

Lemme 3.1.7.

Les opérateurs de Toeplitz tronqués sur K^2_u sont C-symétriques (i.e : $CA^u_\varphi C = (A^u_\varphi)^*$) par l'opérateur de conjugaison C.

Preuve.

Soit $\varphi \in L^2$ telle que A^u_φ est un opérateur de Toeplitz tronqué.
Alors, pour tout $f \in K^\infty_u$ et pour tout $g \in K^2_u$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle CA^u_\varphi Cf, g\rangle &= \langle Cg, A^u_\varphi Cf\rangle \\
&= \int_{\mathbb{T}} u(\zeta)\overline{\zeta g(\zeta)\varphi(\zeta)u(\zeta)}\zeta f(\zeta)dm(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(\zeta)} f(\zeta)\overline{g(\zeta)}dm(\zeta) \\
&= \langle A^u_{\overline{\varphi}} f, g\rangle = \langle (A^u_\varphi)^* f, g\rangle.
\end{aligned}$$

□

On appellera shift généralisé noté par S^α_u avec $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, l'opérateur définit par

$$S^\alpha_u = S_u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} k^u_0 \otimes \widetilde{k^u_0}.$$

D. Sarason dans [38] étude les opérateurs bornés dans l'espace K_u^2 qui commute avec l'opérateur S_u^α. Le travail de D. Sarason a été étendu par N.A. Sedlock dans [41] qui donne la proposition suivante.

Proposition 3.1.8.
Soient $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ et A un opérateur borné sur K_u^2.
(1) Si A commute avec S_u^α. Alors, A un opérateur de Toeplitz tronqué et de plus on a

$$A = A^u_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}},$$

ou $\varphi = Ak_0^u(1 - \alpha\overline{u(0)})^{-1}$.
(2) Si A commute avec $(S_u^\alpha)^*$. Alors, A un opérateur de Toeplitz tronqué et son symbole à sous la forme $\overline{\alpha}\psi + \overline{S_u\widetilde{\psi}} + c$, pour $\psi \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$.

***Preuve**.*
Supposons que A commuté avec S_u^α. Nous allons faire ici quelques calculation par l'utilisation de définition de l'opérateur S_u^α.

$$\begin{aligned} AS_u &= AS_u^\alpha - \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} Ak_0^u \otimes \widetilde{k_0^u} \\ &= S_u^\alpha A - \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} Ak_0^u \otimes \widetilde{k_0^u} \\ &= S_u A + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} k_0^u \otimes (\widetilde{Ak_0^u}) - \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} Ak_0^u \otimes \widetilde{k_0^u}. \end{aligned}$$

On va appliquer le Théorème 3.1.1, donc

$$\begin{aligned} A - S_u A S_u^* &= A - AS_u S_u^* + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} k_0^u \otimes S_u(\widetilde{Ak_0^u}) \\ &\quad - \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} Ak_0^u \otimes S_u\widetilde{k_0^u} \\ &= Ak_0^u \otimes k_0^u + \frac{\overline{u(0)}\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} Ak_0^u \otimes k_0^u \\ &\quad + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} k_0^u \otimes S_u\widetilde{Ak_0^u} \\ &= \frac{Ak_0^u}{1-\alpha\overline{u(0)}} \otimes k_0^u + k_0^u \otimes \overline{\alpha} S_u\Big(\frac{\widetilde{Ak_0^u}}{1-\alpha\overline{u(0)}}\Big). \end{aligned}$$

grâce au relation $I - S_u S_u^* = k_0^u \otimes k_0^u$, voir [38, Lemma 2.4].
Pour le deuxième point, soit A^* commuté avec l'opérateur S_u^α. Ainsi, par le point (1) l'opérateur A^* est de Toeplitz tronqué avec symbole $\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}$,

ou $\varphi = A^*k_0^u(1-\alpha\overline{u(0)})^{-1}$.
Par conséquent,

$$A = A^u_{\overline{\varphi}+\overline{\alpha}S_u\widetilde{\varphi}},$$

Si on pose $\psi = S_u\widetilde{\varphi}$, nous obtenons

$$S_u\widetilde{\psi} = S_u\widetilde{S_u\widetilde{\varphi}} = S_uS_u^*\varphi = \varphi - \varphi(0)k_0^u.$$

implique que le symbole de l'opérateur A est $\overline{\alpha}\psi + \overline{S_u\widetilde{\psi}} + \overline{\varphi(0)}$. □

3.2 Opérateurs de Toeplitz Tronqués de Type α

L'objectif de cette section est de présenter quelques résultats de N.A. Sedlock [41] qui donne une condition nécessaire et suffisaient pour le produit des opérateurs de Toeplitz tronqués est un opérateur de Toeplitz tronqué, et aussi défini l'algèbre de ces opérateurs, qui joue un rôle important en théorie des semi-groupes des opérateurs de Toeplitz.

Définition 3.2.1.
Un opérateur de Toeplitz tronqué A est à appartient $\mathcal{B}_u^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, si

$$A = A_{\varphi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}+c},$$

avec φ une fonction dans K_u^2 et $c \in \mathbb{C}$, et aussi A_ϕ^u dans $\mathcal{B}_u^0$ si le symbole ϕ est holomorphe et si ϕ est anti-holomorphe donc $A_\phi^u \in \mathcal{B}_u^\infty$.
Où $\mathcal{B}_u^\alpha$ est l'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α.

Tout d'abord, nous commençons par le lemme suivant :

Lemme 3.2.2.
- *Pour tout λ dans $\mathbb{D}$ on a :*

$$S_u^*k_\lambda^u = \overline{\lambda}k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)}\widetilde{k_0^u}.$$
$$S_u\widetilde{k_\lambda^u} = \lambda\widetilde{k_\lambda^u} - u(\lambda)k_0^u.$$

- *Pour $\lambda \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$ nous avons :*

$$S_uk_\lambda^u = \frac{1}{\overline{\lambda}}(k_\lambda^u - k_0^u).$$
$$S_u^*\widetilde{k_\lambda^u} = \frac{1}{\lambda}(\widetilde{k_\lambda^u} - \widetilde{k_0^u}).$$

avec u une fonction intérieure.

***Preuve*.**

- Soit $\lambda \in \mathbb{D}$, alors

$$\begin{aligned}
S_u^* k_\lambda^u &= S^*((1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda) \\
&= \frac{(1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda - (1-\overline{u(\lambda)}u(0))k_\lambda(0)}{z} \\
&= \frac{(1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda - (1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda(0)}{z} \\
&+ \frac{(1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda(0) - (1-\overline{u(\lambda)}u(0))k_\lambda(0)}{z} \\
&= (1-\overline{u(\lambda)}u)\frac{k_\lambda - k_\lambda(0)}{z} + k_\lambda(0)\frac{(1-\overline{u(\lambda)}u) - (1-\overline{u(\lambda)}u(0))}{z} \\
&= (1-\overline{u(\lambda)}u)\frac{\frac{1}{1-\overline{\lambda}z} - 1}{z} - \overline{u(\lambda)}\frac{u-u(0)}{z} \\
&= (1-\overline{u(\lambda)}u)\overline{\lambda}k_\lambda - \overline{u(\lambda)}\widetilde{k_0^u} \\
&= \overline{\lambda}k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)}\widetilde{k_0^u}.
\end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur de conjugaison C à la première égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
S_u\widetilde{k_\lambda^u} &= CS_u^*CCk_\lambda^u \\
&= CS_u^*k_\lambda^u \\
&= C(\overline{\lambda}k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)}\widetilde{k_0^u}) \\
&= \lambda\widetilde{k_\lambda^u} - u(\lambda)k_0^u.
\end{aligned}$$

- Nous supposons que $\lambda \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$, donc on a :

$$\begin{aligned}
S_u k_\lambda^u &= P_u S k_\lambda^u \\
&= P_u S\Big((1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda\Big) \\
&= P_u S k_\lambda \qquad \Big(\text{car} \quad P_u S\overline{u(\lambda)}uk_\lambda = 0\Big) \\
&= P_u\Big(zk_\lambda(z)\Big) \\
&= P_u\Big(\frac{z}{1-\overline{\lambda}z}\Big)
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} S_u k_\lambda^u &= \frac{1}{\overline{\lambda}} P_u\Big(\frac{1-1+z\overline{\lambda}}{1-\overline{\lambda}z}\Big) \\ &= \frac{1}{\overline{\lambda}} P_u\Big(\frac{1}{1-\overline{\lambda}z}-1\Big) \\ &= \frac{1}{\overline{\lambda}} P_u\Big(k_\lambda(z)-1\Big) \\ &= \frac{1}{\overline{\lambda}}(k_\lambda^u - k_0^u). \end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire à celui de la preuve du point précédent, on voit que

$$\begin{aligned} S_u^* \widetilde{k_\lambda^u} &= C S_u C C k_\lambda^u \\ &= C S_u k_\lambda^u \\ &= C\Big(\frac{1}{\overline{\lambda}}(k_\lambda^u - k_0^u)\Big) \\ &= \frac{1}{\lambda}(\widetilde{k_\lambda^u} - \widetilde{k_0^u}) \end{aligned}$$

.

□

Remarque 3.2.3.

Plus généralement, si u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point $\lambda \in \mathbb{T}$. Alors, les égalités dans le Lemme 3.2.2 restent vraies pour tout λ dans $\mathbb{T}$.

Proposition 3.2.4.

Tout opérateur de Toeplitz tronqué de type $\alpha \in \mathbb{C}$ a un symbole de la forme $\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + ck_0^u$ où $\varphi(0) = 0$ et $c \in \mathbb{C}$, et aussi tout opérateur de type l'infini a un symbole de la forme $\overline{\varphi} + ck_0^u$ avec $\varphi(0) = 0$.

Preuve.

Premièrement, soit A un opérateur de Toeplitz tronqué de type $\alpha \in \mathbb{C}$. Donc, le symbole de A écrit comme suit

$$\phi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\phi}} + ck_0^u,$$

où $\phi \in K_u^2$ et $c \in \mathbb{C}$.
On définit la fonction φ par

$$\varphi = \phi - \frac{\langle \phi, k_0^u\rangle}{\langle k_0^u, k_0^u\rangle} k_0^u.$$

Il est facile de voir que $\varphi(0)=0$. De plus, par le Lemme 3.2.2 on a $S_u\widetilde{k_0^u}=-u(0)k_0^u$, ainsi

$$\begin{aligned} A_{\phi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\phi}}+ck_0^u} &= A_{\varphi+\frac{\langle\phi,k_0^u\rangle}{\langle k_0^u,k_0^u\rangle}k_0^u+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}+\alpha\frac{\overline{\langle\phi,k_0^u\rangle}}{\langle k_0^u,k_0^u\rangle}\overline{\widetilde{k_0^u}}+ck_0^u} \\ &= A_{\varphi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}+c_1k_0^u}. \end{aligned}$$

avec $c_1\in\mathbb{C}$.
Pour la deuxième, considérons $A=A_{\overline{\phi}}$ et soit $\varphi=\phi-\dfrac{\langle\phi,k_0^u\rangle}{\langle k_0^u,k_0^u\rangle}k_0^u$. Alors,

$$A=A_{\overline{\varphi}+\frac{\langle k_0^u,\phi\rangle}{\langle k_0^u,k_0^u\rangle}k_0^u}.$$

ce qui finit la preuve. □

Le corollaire suivant établit le lien entre les opérateurs de Toeplitz tronqué de rang 1 et du type α.

Corollaire 3.2.5.
Tout opérateur de Toeplitz tronqué de rang 1 *appartenant à* $\mathcal{B}_u^\alpha$*, avec* $\alpha=u(\lambda)$ *pour un certain* $\lambda\in\mathbb{C}$.

Preuve.

- D'après le Lemme 3.1.5 on a

$$\frac{u(z)}{z-\lambda}=\frac{u(z)-u(\lambda)+u(\lambda)}{z-\lambda}=\widetilde{k_\lambda^u}(z)+\frac{u(\lambda)}{z-\lambda}.$$

  Du point (a) dans le Théorème 3.1.6, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{k_\lambda^u}\otimes k_\lambda^u &= A_{\frac{u}{z-\lambda}} = A_{\widetilde{k_\lambda^u}+\frac{u(\lambda)}{z-\lambda}} \\ &= A_{\widetilde{k_\lambda^u}+u(\lambda)\overline{zk_\lambda}}, \qquad (A_{S_uk_\lambda^u}=A_{Sk_\lambda}) \\ &= A_{\widetilde{k_\lambda^u}+u(\lambda)\overline{S_uk_\lambda^u}}. \end{aligned}$$

  donc $\widetilde{k_\lambda^u}\otimes k_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type $u(\lambda)$.
- Pour tout $\lambda\in\mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} S_u\widetilde{k_\lambda^u} &= \lambda\widetilde{k_\lambda^u}-u(\lambda)k_0^u, \qquad \text{(voir Lemme 3.2.2)} \\ &= \lambda\frac{u(z)-u(\lambda)}{z-\lambda}-u(\lambda)k_0^u \\ &= \lambda\frac{u(\lambda)\Big(1-\overline{u(\lambda)}u(z)\Big)}{\lambda(1-\overline{\lambda}z)}-u(\lambda)k_0^u \\ &= \lambda\overline{\lambda}u(\lambda)k_\lambda^u-u(\lambda)k_0^u=u(\lambda)(k_\lambda^u-k_0^u), \end{aligned}$$

Ensuite,

$$A_{\overline{S_u \widetilde{k_\lambda^u}}} = A_{\overline{u(\lambda)(k_\lambda^u - k_0^u)}} = A_{\overline{u(\lambda)}(\overline{k_\lambda^u} - 1)},$$

donc

$$A_{\overline{k_\lambda^u}-1} = A_{\overline{k_\lambda^u - k_0^u}} = A_{u(\lambda)\overline{S_u \widetilde{k_\lambda^u}}}.$$

Maintenant, si u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory au point λ et nous utilisons le Théorème 3.1.6 point (b), nous obtenons

$$k_\lambda^u \otimes k_\lambda^u = A_{k_\lambda^u + \overline{k_\lambda^u} - 1} = A_{k_\lambda^u + u(\lambda)\overline{S_u \widetilde{k_\lambda^u}}}.$$

Par conséquent, $k_\lambda^u \otimes k_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type $u(\lambda)$.

- Il suffit de remarquer que si A un opérateur de Toeplitz tronqué de rang 1, encore le Théorème 3.1.6 point (c) et la démonstration ci-dessus terminée la preuve.

□

Le lemme suivant peut se révéler forte utile dans la détermination des opérateurs de Toeplitz tronqué du type α.

Lemme 3.2.6.
Soit α dans $\overline{\mathbb{D}}$. Alors, on a

$$S_u^\alpha = S_u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} k_0^u \otimes \widetilde{k_0^u} = \frac{1}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{S_u k_0^u + \alpha \overline{\widetilde{k_0^u}}}.$$

Preuve.
Pour tout $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
S_u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} k_0^u \otimes \widetilde{k_0^u} &= S_u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{\frac{\overline{u}}{\overline{z}}} \\
&= S_u + A^u_{\frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}}\frac{\overline{u}}{\overline{z}}} \\
&= S_u + A^u_{\alpha \frac{\overline{u} - \overline{u(0)} + \overline{u(0)}}{\overline{z}(1-\alpha\overline{u(0)})}} \\
&= S_u + A^u_{\frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}}(\overline{\widetilde{k_0^u}} + \overline{u(0)}z)} \\
&= S_u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{\overline{\widetilde{k_0^u}}} + \frac{\alpha\overline{u(0)}}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_z
\end{aligned}$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
S_u^\alpha &= S_u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{\overline{\widetilde{k_0^u}}} + \frac{\alpha\overline{u(0)}}{1-\alpha\overline{u(0)}} S_u \\
&= \frac{1}{1-\alpha\overline{u(0)}} S_u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{\overline{\widetilde{k_0^u}}} \\
&= \frac{1}{1-\alpha\overline{u(0)}} P_u S_u k_0^u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{\overline{\widetilde{k_0^u}}} \\
&= \frac{1}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{S_u k_0^u} + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{\overline{\widetilde{k_0^u}}} = \frac{1}{1-\alpha\overline{u(0)}} A^u_{S_u k_0^u + \alpha\overline{\widetilde{k_0^u}}}.
\end{aligned}$$

$\square$

Regroupons dans le théorème suivant quelques propriétés importantes des opérateurs de Toeplitz tronqué du type α que soumis par N.A. Sedlock.

Théorème 3.2.7. *[41]*
Pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Nous avons les assertions suivantes :

(1) $\mathcal{B}_u^\alpha = \{S_u^\alpha\}'$, le commutant de S_u^α. De plus, le symbole d'un opérateur A_ϕ^u dans $\{S_u^\alpha\}'$ écrire sous la forme :
Si $|\alpha| \leq 1$ alors, $\phi = \varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}$ avec

$$\varphi = \frac{Ak_0^u}{1-\alpha\overline{u(0)}}.$$

Si $|\alpha| > 1$ alors, $\phi = \varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + c$ avec

$$\varphi = \frac{1}{\alpha - u(0)} S_u A\widetilde{k_0^u}, \quad \text{et} \quad c = \frac{\alpha}{\alpha - u(0)} \langle A\widetilde{k_0^u}, \widetilde{k_0^u}\rangle.$$

Si $\alpha = \infty$ alors, $\phi = \overline{S_u\widetilde{\varphi}} + c$ avec

$$\varphi = S_u A\widetilde{k_0^u}, \quad \text{et} \quad c = \langle A\widetilde{k_0^u}, \widetilde{k_0^u}\rangle.$$

(2) $\mathcal{B}_u^\alpha$ est une algèbre commutative fermée.

(3) $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$ si et seulement si $A^* \in \mathcal{B}_u^{\frac{1}{\overline{\alpha}}}$, en utilisant la convention $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$.

(4) Si $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$ est inversible alors $A^{-1} \in \mathcal{B}_u^\alpha$.

(5) Soient ϕ, ψ dans $L^2(\mathbb{T})$ telle que A_ϕ et A_ψ sont des opérateurs de Toeplitz tronqué. Alors, le produit $A_\phi A_\psi$ est aussi un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement si l'un d'eux est égal à cI avec $c \in \mathbb{C}$, où les deux sont du type α pour un certain α, dans ce cas le produit $A_\phi A_\psi \in \mathcal{B}_u^\alpha$.

(6) Si $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Alors $\mathcal{B}_u^{\alpha_1} \cap \mathcal{B}_u^{\alpha_2} = cI$ où $c \in \mathbb{C}$.

3.3 Semi-Groupes des Opérateurs de Toeplitz Tronqués

En 2018, A. Yagoub et M. Zarrabi donnent le premier travail sur les semi-groupes des opérateurs de Toeplitz. Le but de cette partie est des présenté leur travail, et nous renvoyons à [47] pour tous les résultats et les démonstrations.
Tout d'abord, nous avons besoin de rappeler les résultats suivants :

Théorème 3.3.1. *[41]*
Soit A un opérateur borné sur K_u^2 et soit $\alpha \in \mathbb{D}$. Alors, A est un opérateur de Toeplitz tronqué de type α si et seulement s'il existe une fonction $\phi \in H^2$ tel que $A = A^u_{\frac{\phi}{1-\alpha\overline{u}}}$. Si A est de type α alors il existe une fonction $\psi \in H^\infty$ telle que $\|\psi\|_\infty = \|A\|$ et $A = A^u_{\frac{\psi}{1-\alpha\overline{u}}}$ et donc tout opérateur de type α a un symbole borné. De plus, si ϕ, ψ sont dans H^∞, alors

$$A^u_{\frac{\phi}{1-\alpha\overline{u}}} A^u_{\frac{\psi}{1-\alpha\overline{u}}} = A^u_{\frac{\phi\psi}{1-\alpha\overline{u}}}.$$

Proposition 3.3.2.
Soit A un opérateur de Toeplitz tronqué et borné sur K_u^2. Alors, A est unitaire si et seulement s'il est égal à $\Phi(S_u^\alpha)$ pour certains $\alpha \in \mathbb{T}$ et $\Phi \in L^\infty(\mathbb{T}, \mu_\alpha)$ tel que $\|\Phi\| = 1$ $\mu_\alpha-$ presque partout.

Preuve.
Si A un opérateur unitaire i.e ; $AA^* = I$ et comme A un opérateur de Toeplitz tronqué et borné sur K_u^2, du Théorème 3.2.7 le point (5), les opérateurs A, A^* sont de type α, le même théorème (point (3)) affirmer que $\alpha = \frac{1}{\overline{\alpha}}$ c'est-à-dire $\alpha \in \mathbb{T}$.
D'autre part, un opérateur est de type α si et seulement s'il commute avec S_u^α, dans ce cas A est unitairement équivalent à M_z sur l'espace $L^2(\mathbb{T}, \mu_\alpha)$, où μ_α est la mesure de Clark.
En particulier, $\{M_z\}'$ est l'espace des opérateurs de multiplication induits par $L^\infty(\mu_\alpha)$ et donc A égal à $\Phi(S_u^\alpha)$ avec $\Phi \in L^\infty(\mu_\alpha)$.
Par conséquent, on a

$$I = AA^* = \Phi(S_u^\alpha)\overline{\Phi}(S_u^\alpha) = |\Phi|^2(S_u^\alpha).$$

ce implique que $|\Phi| = 1$, $\mu_\alpha-$ presque partout. L'autre direction est évidente. □

Avant de commencer, nous noterons $\mathcal{T}_u$ l'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués et borné sur l'espace K_u^2.

Proposition 3.3.3.
Soit $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{T}_u$. Alors, $(T_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe si et seulement s'il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $T_t \in \mathcal{B}_u^\alpha$ et l'un des cas suivants est satisfait :

Cas 1 : *Si* $|\alpha| = 1$*, alors pour tout* $t \geq 0$*, il existe* $\Phi_t \in L^\infty(\mu_\alpha)$ *tel que* $T_t = \Phi_t(S_u^\alpha)$*, et pour tout* $t, s \geq 0$*,* $\Phi_t\Phi_s = \Phi_{t+s}\ \mu_\alpha -$ *p.p et* $\Phi_0 = 1\ \mu_\alpha -$ *p.p.*

Cas 2 : *Si* $|\alpha| < 1$*, donc pour tout* $t \geq 0$*, il existe* $\Phi_t \in H^\infty$ *tel que* $T_t = \Phi_t(S_u^\alpha)$*, et pour tout* $t, s \geq 0$*, la fonction intérieur* u_α *divise* $\Phi_t\Phi_s - \Phi_{t+s}$ *et* $\Phi_0 - 1$*.*

Cas 3 : *Si* $|\alpha| > 1$*, donc pour tout* $t \geq 0$*, il existe* $\Phi_t \in H^\infty$ *tel que* $T_t = \Phi_t(S_u^{\frac{1}{\overline{\alpha}}})^*$*, et la fonction intérieur* $u_{\frac{1}{\overline{\alpha}}}$ *divise* $\Phi_t\Phi_s - \Phi_{t+s}$ *et* $\Phi_0 - 1$*.*

Preuve.

On vérifie facilement que la nécessaire condition est vraie.

Pour la suffisaient condition, puisque pour tout $t, s \geq 0$, $T_tT_s = T_{t+s} \in \mathcal{T}_u$, (voir Théorème 3.2.7 le point (5)) il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $T_t \in \mathcal{B}_u^\alpha$. Ensuite, nous avons les cas suivants :

Cas 1 : Soit $\alpha \in \mathbb{T}$. D'après la Proposition 3.3.2, pour tout $t \geq 0$ on a

$$T_t = \Phi_t(S_u^\alpha),$$

avec $\Phi_t \in L^\infty(\mu_\alpha)$. De plus, la propriété de semi- groupe donne :

$$\Phi_t\Phi_s(S_u^\alpha) = \Phi_t(S_u^\alpha)\Phi_s(S_u^\alpha) = \Phi_{t+s}(S_u^\alpha).$$

ce qui implique que $\Phi_t\Phi_s = \Phi_{t+s}\ \mu_\alpha -$ p.p. Aussi, on a $T_0 = \Phi_0(S_u^\alpha) = I$ de sorte que $\Phi_0 = 1\ \mu_\alpha -$ p.p.

Cas 2 : Si $|\alpha| < 1$ et grâce au Théorème 3.3.1 on a :

$$T_t = \Phi_t(S_u^\alpha), \quad \forall t \geq 0.$$

avec $\Phi_t \in H^\infty$ pour tout $t \geq 0$.
Comme $(\Phi_t\Phi_s - \Phi_{t+s})(S_u^\alpha) = 0$. En effet, $(\Phi_t\Phi_s - \Phi_{t+s}) \in H^\infty$ si et seulement si u_α divise $\Phi_t\Phi_s - \Phi_{t+s}$.
De la même manière $\Phi_0 - 1 \in H^\infty$ on obtient u_α divise $\Phi_0 - 1$.

Cas 3 : Si $|\alpha| > 1$, en considérant l'opérateur adjoint et par argument similaire comme le cas 2 on obtient le résultat désiré.

□

Le corollaire suivant est une conséquence simple de la Proposition 3.1.8.

Corollaire 3.3.4.

Soient A, B *deux opérateurs de Toeplitz tronqués de type* $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$*. Donc on a,*

- *Si* $|\alpha| \leq 1$*, alors* $A = B$ *si et seulement si* $Ak_0^u = Bk_0^u$*.*
- *Si* $|\alpha| > 1$*, alors* $A = B$ *si et seulement si* $A\widetilde{k_0^u} = B\widetilde{k_0^u}$*.*

Comme application directe du corollaire ci-dessus, on obtient la caractérisation suivante des semi-groupes.

Théorème 3.3.5.

Soit $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{T}_u$. *Alors,* $(T_t)_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe si et seulement s'il existe* $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ *tel que pour tout* $t \geq 0$, $T_t \in \mathcal{B}_u^\alpha$ *et l'une des conditions suivantes est satisfaite ;*

(1) $|\alpha| \leq 1$ *et pour tout* $t, s \geq 0$ *on a,*

$$T_t T_s k_0^u = T_{t+s} k_0^u \quad et \quad T_0 k_0^u = k_0^u.$$

(2) $|\alpha| > 1$ *et pour tout* $t, s \geq 0$ *on a,*

$$T_t T_s \widetilde{k_0^u} = T_{t+s} \widetilde{k_0^u} \quad et \quad T_0 \widetilde{k_0^u} = \widetilde{k_0^u}.$$

3.3.1 Semi-Groupes Uniformément Continus

Maintenant, on s'intéressera au générateur de semi-groupes des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Proposition 3.3.6.

Un opérateur borné A *sur l'espace* K_u^2 *est un générateur d'un semi-groupe uniformément continu des opérateurs de Toeplitz tronqués si et seulement s'il existe* $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ *tel que* $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$.

Preuve.

($\Rightarrow$) Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu des opérateurs de Toeplitz tronqués et A son générateur.
On a d'une part, de Théorème 3.2.7(5) il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $T_t \in \mathcal{B}_u^\alpha$. D'autre part, comme $A = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{T_t - I}{t}$ dans la norme de l'opérateur, et puisque $\mathcal{B}_u^\alpha$ est un algèbre fermée (Théorème 3.2.7(2)), on obtient que $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$.

($\Leftarrow$) Supposons que $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$ pour certains $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. Encore une fois, puisque $\mathcal{B}_u^\alpha$ est une algèbre fermée, donc pour tout $t \geq 0$, $e^{tA} \in \mathcal{B}_u^\alpha$.
Ainsi, A est le générateur de semi-groupe uniformément continu (voir Théorème 1.4.8) des opérateurs de Toeplitz tronqués donne par $(e^{tA})_{t\geq 0}$.

$\square$

Le résultat suivant fournit une description de générateur de semi-groupes des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Théorème 3.3.7.
Soit $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{T}_u$ un semi-groupe et soit A sont générateur. Alors, $(T_t)_{t\geq 0}$ est uniformément continue si et seulement s'il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $T_t \in \mathcal{B}_u^\alpha$ et l'une des conditions suivantes est satisfaite :

(i) Si $|\alpha| \leq 1$, alors l'opérateur $A = A^u_{\Psi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\Psi}}}$ est borné, avec

$$\Psi := \frac{1}{1-\alpha\overline{u(0)}} \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)k_0^u - k_0^u}{t},$$

existe dans la norme de l'espace K_u^2.

(ii) Si $|\alpha| > 1$, alors l'opérateur $A = A^u_{\Psi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\Psi}}+c}$ est borné, avec

$$\Psi = S_u\Psi_0 \quad et \quad \frac{\alpha}{\alpha - u(0)} \lim_{t\to 0^+} \Big\langle \frac{T(t)\widetilde{k_0^u} - \widetilde{k_0^u}}{t}, \widetilde{k_0^u} \Big\rangle.$$

où $\Psi_0 := \frac{1}{\alpha-u(0)} \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)\widetilde{k_0^u}-\widetilde{k_0^u}}{t}$ existe dans la norme de K_u^2.

(iii) Si $\alpha = \infty$, $\Psi_0 := \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)\widetilde{k_0^u}-\widetilde{k_0^u}}{t}$ existe dans la norme de K_u^2 et l'opérateur $A = A^u_{\overline{S_u\widetilde{\Psi}}+c}$ est borné, tel que

$$\Psi = S_u\Psi_0 \quad et \quad \lim_{t\to 0^+} \Big\langle \frac{T(t)\widetilde{k_0^u} - \widetilde{k_0^u}}{t}, \widetilde{k_0^u} \Big\rangle.$$

***Preuve*.**
Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe des opérateurs de Toeplitz tronqués et bornés. Alors, d'après le Théorème 3.3.5 il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $T_t \in \mathcal{B}_u^\alpha$. De plus, supposons que $(T_t)_{t\geq 0}$ soit uniformément continue avec générateur $B = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{T_t - I}{t}$ du la Proposition 3.3.6 $B \in \mathcal{B}_u^\alpha$. Ensuite, on a les trois cas suivants :

(i) Si $|\alpha| \leq 1$ et comme $B \in \mathcal{B}_u^\alpha$ (voir Théorème 3.2.7 (1)) nous avons

$$B = A^u_{\Psi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\Psi}}},$$

avec $\Psi = \frac{BK_0^u}{1-\alpha\overline{u(0)}}$. Ainsi, B est le générateur de $(T_t)_{t\geq 0}$ est grâce au Corollaire 3.3.4 on a ;

$$Bk_0^u = \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t k_0^u - k_0^u}{t} = (1-\alpha\overline{u(0)})\Psi,$$

Finalement,

$$\Psi = \frac{1}{(1-\alpha\overline{u(0)})} \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t k_0^u - k_0^u}{t}.$$

et l'opérateur $A^u_{\Psi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\Psi}}}$ est borné.

(ii) De même pour $|\alpha| > 1$, $B \in \mathcal{B}_u^\alpha$ et encore par le Théorème 3.2.7(1),$\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + c'$ est un symbole de B, où

$$\varphi = \frac{1}{\alpha - u(0)} S_u B\widetilde{k_0^u} \quad \text{et} \quad c' = \frac{\alpha}{\alpha - u(0)} \langle B\widetilde{k_0^u}, \widetilde{k_0^u} \rangle.$$

Puisque $B\widetilde{k_0^u} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{T_t\widetilde{k_0^u} - \widetilde{k_0^u}}{t}$, par conséquence $\Psi = \varphi$, $c = c'$ et $A^u_{\Psi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\Psi}}}$ un opérateur borné.

(iii) $\alpha = \infty$. La preuve de ce cas est similaire à celle ci-dessus.

Pour l'inverse, supposons que $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}_u^\alpha$ et que les hypothèses dans le point (i) est vrai. Nous posons

$$\varphi_t = \frac{1}{1 - \alpha\overline{u(0)}} \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)k_0^u - k_0^u}{t}.$$

D'après le Théorème 3.2.7(1), la fonction $\varphi_t + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_t}}$ est un symbole de l'opérateur $\frac{T(t)-I}{t}$. Donc pour toute fonction $f \in K_u^\infty$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t) - I}{t} f &= \lim_{t\to 0^+} P_u\Big((\varphi_t + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_t}})f\Big) \\ &= P_u\Big((\Psi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\Psi}})f\Big) \\ &= A^u_{\Psi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\Psi}}} f. \end{aligned}$$

Comme K_u^∞ est dense dans K_u^2, alors l'opérateur borné $A^u_{\Psi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\Psi}}}$ est le générateur du semi-groupe uniformément continu $(T_t)_{t\geq 0}$.

Les cas (ii) et (iii) se traitent d'une façon similaire. □

Comme nous avons vu dans l'Exemple 1.2.6 pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'espace Modèle $K_{z^n}^2$ est de dimension finie, et formé par les polynômes de degré $n - 1$. Le théorème suivant décrire tous les semi-groupes uniformément continus des opérateurs de Toeplitz tronqués dans $K_{z^n}^2$.

Théorème 3.3.8.

Les semi-groupes uniformément continus des opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace $K_{z^n}^2$ sont :

1.

$$T_t = I + \frac{1}{nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta}} \sum_{j=0}^{n-1} w^j (e^{tc_j} - 1) \widetilde{k^u_{re^{i\theta}w^j}} \otimes k^u_{re^{i\theta}w^j}.$$

2.

$$T_t = I + \frac{1}{nr^{n-1}e^{i(1-n)\theta}} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{w}^j (e^{tc_j} - 1) k^u_{re^{i\theta}w^j} \otimes \widetilde{k^u_{re^{i\theta}w^j}}.$$

3.

$$T_t = I + \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(e^{tc_j} - 1)k^u_{e^{i\theta}w^j} \otimes k^u_{e^{i\theta}w^j}.$$

4.

$$T_t = A^u_{e^{t\varphi}}.$$

5.

$$T_t = A^u_{e^{t\overline{\varphi}}}.$$

tel que $0 < r < 1$, $\theta \in \mathbb{R}$, $(c_j)_{j=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$, $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ *et* φ *un polynôme de degré* $n-1$.

Preuve.

Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu des opérateurs de Toeplitz tronqués sur $K^2_{z^n}$ et soit A son générateur. On a d'une part, par le Théorème 3.3.7, il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que pour tout $t \geq 0$ l'opérateur T_t et A sont dans $\mathcal{B}^\alpha_u$.
D'autre part, nous avons l'un des cas suivants :

1. Pour $0 < |\alpha| < 1$, nous savons que la famille $\{\widetilde{k^{z^n}_{\lambda_j}}, \quad j = 1, \cdots, n\}$ est une base de l'espace $K^2_{z^n}$ (voir [38]), où $\lambda_j = re^{i\theta}w^{j-1}$, $j = 1, \cdots, n$ les solutions de l'équation $z^n = \alpha$ avec $\alpha = (re^{i\theta})^n$ et $0 < r < 1$.
   Ainsi, $A = A^u_{\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}}$ avec $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j\widetilde{k^{z^n}_{\lambda_j}}$ et $(a_j)_{j=1}^n \subset \mathbb{C}$. Donc

$$A = A^u_{\varphi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}} = \sum_{j=1}^{n} a_j A^u_{\widetilde{k^u_{\lambda_j}} + u(\lambda_j)\overline{S_u k^u_{\lambda_j}}}.$$

   Par le Théorème 3.1.6 et Corollaire 3.2.5, les opérateurs $\widetilde{k^u_{\lambda_j}} \otimes k^u_{\lambda_j}$ sont de type $u(\lambda_j) = \alpha$, et pour tout j, s on a

$$(\widetilde{k^u_{\lambda_j}} \otimes k^u_{\lambda_j})(\widetilde{k^u_{\lambda_s}} \otimes k^u_{\lambda_s}) = \delta_{js}u'(\lambda_j)\widetilde{k^u_{\lambda_j}} \otimes k^u_{\lambda_j},$$

   où δ le symbole de Kronecker. Alors

$$\begin{aligned}
T_t = e^{tA} &= \prod_{j=1}^{n} e^{ta_j\widetilde{k^u_{\lambda_j}}\otimes k^u_{\lambda_j}} \\
&= \prod_{j=1}^{n}\Big[I + \frac{e^{ta_j u'(\lambda_j)} - 1}{u'(\lambda_j)}(\widetilde{k^u_{\lambda_j}} \otimes k^u_{\lambda_j})\Big] \\
&= I + \sum_{j=1}^{n}\Big[\frac{e^{ta_j u'(\lambda_j)} - 1}{u'(\lambda_j)}(\widetilde{k^u_{\lambda_j}} \otimes k^u_{\lambda_j})\Big] \\
&= I + \frac{1}{nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta}}\sum_{j=0}^{n-1} w^j(e^{tc_j} - 1)\widetilde{k^u_{re^{i\theta}w^j}} \otimes k^u_{re^{i\theta}w^j}.
\end{aligned}$$

pour certains nombres complexes $c_0, \cdots, c_{n-1}$.

2. Pour $1 < |\alpha| < \infty$, en appliquant le cas ci-dessus à $(T_t^*)_{t\geq 0}$, on obtient que T_t de la forme ;

$$T_t = I + \frac{1}{nr^{n-1}e^{i(1-n)\theta}} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{w}^j (e^{tc_j} - 1) k^u_{re^{i\theta}w^j} \otimes \widetilde{k^u_{re^{i\theta}w^j}}.$$

3. Si $|\alpha| = 1$, on pose $\alpha = e^{in\theta}$ et l'équation $u(z) = \alpha$ admet n solutions distinctes (car $u^{'}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$) sont $\zeta_j = e^{i\theta} w^{j-1}, j = 1, \cdots, n$ dans $\mathbb{T}$. Comme dans le cas ci-dessus, $\{k^{z^n}_{\zeta_j}, \quad 1 \leq j \leq n\}$ est une base orthogonale pour l'espace $K^2_{z^n}$.

   Maintenant, pour tout $\varphi \in K^2_{z^n}$, on a $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j k^u_{\zeta_j}$, où $a_j = \frac{\varphi(\zeta_j)}{|u^{'}(\zeta_j)|}$, aussi

$$A = A^u_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}} = \sum_{j=1}^{n} a_j A^u_{k^u_{\zeta_j} + u(\zeta_j) \overline{S_u \widetilde{k^u_{\zeta_j}}}} = \sum_{j=1}^{n} a_j k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}.$$

   Puisque les opérateurs $k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}$ sont de type α et pour tout j, s on a

$$(k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j})(k^u_{\zeta_s} \otimes k^u_{\zeta_s}) = \delta_{js} |u^{'}(\zeta_j)| k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}.$$

   L'opérateur A engendre un semi-groupe des opérateurs de Toeplitz tronqués, donc

$$\begin{aligned} T_t &= I + \sum_{j=1}^{n} \Big[\frac{e^{ta_j |u^{'}(\zeta_j)|} - 1}{|u^{'}(\zeta_j)|} (k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}) \Big] \\ &= I + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{tc_j} - 1) k^u_{e^{i\theta}w^j} \otimes k^u_{e^{i\theta}w^j}. \end{aligned}$$

   pour $c_0, \cdots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$.

4. Si $\alpha = 0$, alors il existe $\varphi \in K^2_{z^n}$ tel que $A = A^u_\varphi$. Notez que la fonction φ est holomorphe et borné, donc $T_t = e^{tA^u_\varphi} = A^u_{e^{t\varphi}}$.
5. Pour $|\alpha| = \infty$, on applique le cas 4. à $(T_t^*)_{t\geq 0}$, on obtient alors que $T_t = A^u_{e^{t\overline{\varphi}}}$.

□

3.3.2 Semi-Groupes Fortement Continus

Cette partie a été organisée comme suit : nous allons d'abord annoncer les résultats de [47] sur les semi-groupes fortement continus des opérateurs de Toeplitz tronqués, puis nous rappellerons quelques propriétés des opérateurs fermés et densément définis sur l'espace K_u^2 afin de prouver ces résultats, et enfin nous présenterons ces preuves.
Rappelons que la classe $\mathcal{N}$ de Nevanlinna est l'ensemble des fonctions holomorphes φ tel que $\varphi = \frac{\Psi}{\chi}$ où $\Psi, \chi \in H^\infty$ et χ ne sont pas identiques à zéro.
La classe de Smirnov $\mathcal{N}^+$ défini comme suit :

$$\mathcal{N}^+ = \{\frac{\Psi}{\chi} \in \mathcal{N}, \quad \chi \quad \text{une fonction extérieure}\}.$$

En particulier, si $\varphi = \frac{\Psi}{\chi}$ appartient à $\mathcal{N}$ et tel que u, χ sont relativement premiers, on dit alors que la fonction φ appartient à la classe locale de Smirnov désigne par $\mathcal{N}_u^+$.
La proposition suivante donne le symbole du générateur d'un C_0- semi-groupes des opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace K_u^2.

Proposition 3.3.9.
Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0- semi-groupes des opérateurs de Toeplitz tronqués sur K_u^2. Alors, l'opérateur A écrit sur l'une des formes suivantes :

1. *Pour $|\alpha| = 1$ on a*
$$A = \Phi(S_u^\alpha),$$
où Φ une fonction mesurable.
2. *Pour $|\alpha| < 1$;*
$$A = A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}},$$
avec $\varphi \in \mathcal{N}_{u_\alpha}^+$.
3. *Si $|\alpha| > 1$ nous avons*
$$A = A^u_{\frac{\alpha\overline{\varphi}}{\alpha-u}},$$
avec $\varphi \in \mathcal{N}^+_{u_{\frac{1}{\overline{\alpha}}}}$.
4. *$A = A^u_{\overline{\varphi}}$, pour un certain $\varphi \in \mathcal{N}_u^+$.*

L'auteur dans [43] fournit une condition nécessaire et suffisante pour un opérateur dissipative sur l'espace K_u^2 pour être commuté avec l'opérateur S_u^*. Le théorème en bas établit une caractérisation complète des C_0-semi-groupes de contractions sur K_u^2.

Théorème 3.3.10.

La famille $(T_t)_{t\geq 0} \subset K_u^2$ est un C_0- semi-groupes de contractions si et seulement s'il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$, une fonction analytique C sur $\mathbb{D}$ avec une partie réelle non positive et une fonction mesurable q sur $\mathbb{T}$, tel que l'une des affirmations suivantes est vérifié :

(1) $|\alpha| < 1$ *et* $T_t = A^u_{\frac{e^{tC}}{1-\alpha\overline{u}}}$.

(2) $|\alpha| > 1$ *et* $T_t = A^u_{\frac{\alpha e^{t\overline{C}}}{\alpha - u}}$.

(3) $\alpha = \infty$ *et* $T_t = A^u_{e^{t\overline{C}}}$.

(4) $|\alpha| = 1$, $ess\sup\limits_{\xi\in\mathbb{T}} \Re(q(\xi)) \leq 0$ *et* $T_t = e^{tq}(S_u^\alpha)$.

Pour $\alpha \in \mathbb{D}$, on doit ensuite un outil très important dite l'opérateur de Crofoot note par U_α et défini comme suit :

$$\begin{aligned} U_\alpha : K_u^2 &\to H^2 \\ f \to U_\alpha f &= \frac{\sqrt{1-|\alpha|^2}}{1-\overline{\alpha}u} f. \end{aligned}$$

R.B. Crofoot dans [13] montre que U_α est une isométrie de K_u^2 sur $K_{u_\alpha}^2$ avec $u_\alpha = \frac{u-\alpha}{1-\overline{\alpha}u}$. De plus, D. Sarason dans [38] preuve que la transformée de Crofoot d'un opérateur de Toeplitz tronqué est un opérateur de Toeplitz tronqué.
L'opérateur V_α est une isométrie de $L^2(\mu_\alpha)$ sur K_u^2 (voir [10]) défini par :

$$(V_\alpha f)(z) = (1-\overline{\alpha}u)\int_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{1-\overline{\xi}z} d\mu_\alpha(z).$$

Dans [44] D. Suarez caractérise les opérateurs fermés et densément défini sur K_u^2 qui commute avec l'opérateur de shift. Ce résultat a été complété par D. Sarason dans [40], par le théorème suivant.

Théorème 3.3.11. *[40]*

Un opérateur fermé A densément défini dans l'espace K_u^2 commute avec S_u si et seulement si $A = A^u_\varphi$ pour certains $\varphi \in \mathcal{N}_u^+$.

On utilisera alors le résultat ci-dessus et l'opérateur de Crofoot pour obtenir la proposition suivante qui donne une écriture simple de symboles d'un opérateur fermé densément défini dans l'espace K_u^2 commute avec S_u.

Proposition 3.3.12.

Soit A un opérateur fermé et densément défini sur K_u^2. Alors on a,

(i) Si $\alpha \in \mathbb{T}$, alors A commute avec S_u^α et $(S_u^\alpha)^*$ si et seulement si $A = \Phi(S_u^\alpha)$ pour une fonction mesurable $\Phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.

(ii) Si $\alpha \in \mathbb{D}$, nous avons $A = A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}$ avec $\varphi \in \mathcal{N}^+_{u_\alpha}$.

Revenons à la démonstration des résultats principales énoncer dans le début de cette section.

Preuve de Proposition 3.3.9.

Pour l'instant, nous avons juste besoin de démontrer le point 1. et 2. car si en considérant l'opérateur adjoint A^* qui est le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $(T_t^*)_{t\geq 0}$, nous allons montrer aisément les points 3. et 4.
Soit A le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ des opérateurs de Toeplitz troqués sur l'espace K_u^2. D'après la partie précédente, il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que pour tout $t \geq 0$ l'opérateur T_t appartient à $\mathcal{B}_u^\alpha$, de plus, grâce au Théorème 1.4.14 A un opérateur fermé et densément défini sur K_u^2.
Maintenant, on suppose que $|\alpha| \leq 1$. Donc, les opérateurs T_t commute avec S_u^α cela implique que A commute avec S_u^α, et la Proposition 3.3.12(ii) achevé la preuve de point 2.
Pour $|\alpha| = 1$, l'opérateur S_u^α est unitaire, d'où normal. Ainsi, par le théorème de Putnam-Fuglede T_t commute aussi avec $(S_u^\alpha)^*$, donc A commute avec $(S_u^\alpha)^*$, et encore en utilisant la Proposition 3.3.12(i), nous obtenons le point 1. □

Preuve du Théorème 3.3.10.

Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe de contractions des opérateurs de Toeplitz tronqués sur K_u^2. Donc, il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ telle que pour tout $t \geq 0$ on a $T_t \in \mathcal{B}_u^\alpha$.
De plus, nous avons les trois cas suivants :

(1) Pour $|\alpha| < 1$ alors la famille $\left(U_\alpha^{-1} T_t U_\alpha\right)_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe de contractions sur l'espace $K_{u_\alpha}^2$ est commute avec l'opérateur S_{u_α}. Par le Théorème 2 dans [42], il existe une fonction analytique C sur $\mathbb{D}$ avec une partie réelle non-positif telle que

$$U_\alpha^{-1} T_t U_\alpha = A^{u_\alpha}_{e^{tC}}, \qquad \forall t \geq 0.$$

Donc, pour tout $t \geq 0$, on a

$$T_t = U_\alpha A^{u_\alpha}_{e^{tC}} U_\alpha^{-1} = A^u_{\frac{e^{tC}}{1-\alpha\overline{u}}}.$$

dans ce cas le générateur de $\left(U_\alpha^{-1} T_t U_\alpha\right)_{t\geq 0}$ est l'opérateur A_C et enfin $A^u_{\frac{C}{1-\alpha\overline{u}}}$ est le générateur de $(T_t)_{t\geq 0}$.

(2) Pour $1 < |\alpha| \leq +\infty$ et pour tout $t \geq 0$ l'opérateur T_t^* commute avec $S_u^{\frac{1}{\overline{\alpha}}}$, et en utilisant le cas ci-dessus, on obtient

$$T_t = (T_t^*)^* = \left(A^u_{\frac{e^{tC}}{1-(\frac{\overline{u}}{\overline{\alpha}})}}\right)^* = A^u_{\frac{\alpha e^{t\overline{C}}}{\alpha - u}}.$$

avec générateur $A^u_{\frac{\alpha\overline{C}}{\alpha-u}}$.

(3) Si $\alpha \in \mathbb{T}$, alors pour tout $t \geq 0$ l'opérateur $V_\alpha^{-1}T_tV_\alpha$ est un opérateur de multiplication sur $L^2(\mu_\alpha)$, donc il est commuté avec l'opérateur de multiplication par z (voir [12, Corollary 6.9 p.286]).
D'après la Proposition 4.11 p.32 dans [16], il existe une fonction mesurable q sur $\mathbb{T}$ telle que $ess \sup\limits_{\xi\in\mathbb{T}} \Re(q(\xi)) \leq 0$, et

$$V_\alpha^{-1}T_tV_\alpha = M_{e^{tq}}.$$

Il s'ensuit que

$$T_t = V_\alpha M_{e^{tq}}V_\alpha^{-1} = e^{tq}(S_u^\alpha).$$

Puisque $(T_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contractions, on a

$$ess \sup_{\xi\in\mathbb{T}} \Re(q(\xi)) \leq 0.$$

De plus, $q(S_u^\alpha)$ est le générateur de $(T_t)_{t\geq 0}$.

□

3.3.3 Exemples

Avant de finir ce chapitre, nous allons présenter les exemples de semi-groupes des opérateurs de Toeplitz tronqués qui fournée dans [47].

Exemples 3.3.13.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $u(z) = z^n$, donc (voir l'Exemple 1.2.6) on a

$$K^2_{z^n} = span\{1, z, z^2, \cdots, z^{n-1}\}.$$

Notez que pour $\varphi(z) = \sum_{k\geq 0}^{n-1} \breve{\varphi}(k)z^k \in K^2_{z^n}$ on a, $S_{z^n}\widetilde{\varphi} = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{\breve{\varphi}(n-k)}z^k$, de plus $k_0^{z^n} = 1$ et $\widetilde{k_0^{z^n}} = z^{n-1}$.
D'après le Théorème 3.3.5 la famille $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{T}_u$ est un semi-groupes si et seulement s'il existe $\alpha \in \breve{\mathbb{C}}$ tel que, pour tout $t \geq 0$, T_t appartient à $\mathcal{B}_u^\alpha$ et l'un des deux cas suivants est vrai :

(1) Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tout $t \geq 0$ le symbole de l'opérateur T_t écrit comme suit :

$$\sum_{k\geq 0}^{n-1} \breve{\varphi}_t(k)z^k + \alpha \sum_{k=1}^{n-1} \breve{\varphi}_t(n-k)z^k.$$

puisque $T_0k_0^u = k_0^u$, alors

$$\breve{\varphi}_0(0) = 1, \quad \breve{\varphi}_0(1) = \cdots = \breve{\varphi}_0(n-1) = 0.$$

et aussi $T_tT_sk_0^u = k_0^u$. Donc, pour tout $t, s \geq 0$ et tout $0 \leq k \leq n-1$ on a

$$\breve{\varphi_{t+s}}(k) = \sum_{m=0}^{k} \breve{\varphi}_t(m)\breve{\varphi}_s(k-m) + \alpha \sum_{m=k+1}^{n-1} \breve{\varphi}_t(m)\breve{\varphi}_s(n-m+k).$$

(2) Si $\alpha = \infty$, alors T_t a un symbole de la forme suivante :

$$\sum_{k\geq 0}^{n-1} \overline{\breve{\varphi}_t(k)} z^{-k}.$$

Par le Théorème 3.3.5 on a $T_tT_s\widetilde{k_0^u} = T_{t+s}\widetilde{k_0^u}$ et $T_0\widetilde{k_0^u} = \widetilde{k_0^u}$ ainsi

$$\breve{\varphi}_0(0) = 1, \quad \breve{\varphi}_0(1) = \cdots = \breve{\varphi}_0(n-1) = 0,$$

et pour tout $t, s \geq 0$ et tout $0 \leq k \leq n-1$ on a

$$\breve{\varphi_{t+s}}(k) = \sum_{m=0}^{k} \breve{\varphi}_t(m)\breve{\varphi}_s(k-m).$$

Exemples 3.3.14.

(1) Dans [38] D. Sarason caractérisée tous les opérateurs de Toeplitz tronqué de rang un (voir Théorème 3.1.6). Puis, N.A. Sedlock preuve dans [41] que tous ces opérateurs sont de type α (voir Corollaire 3.2.5). En particulier, pour $\lambda \in \mathbb{D}$ l'opérateur $A = \widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$ est de type $u(\lambda)$ et par la Proposition 3.3.6 A engendre un semi-groupe uniformément continu des opérateurs de Toeplitz tronqués donne par

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I + t(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u) + \frac{t^2}{2!}(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u)^2 + \frac{t^3}{3!}(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u)^3 + \cdots \\ &= I + t(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u) + \frac{t^2}{2!}u^{'}(\lambda)(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u) + \frac{t^3}{3!}u^{'}(\lambda)^2(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u) + \cdots \end{aligned}$$

Si $u^{'}(\lambda) = 0$, alors

$$e^{tA} = I + t(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u).$$

et si $u^{'}(\lambda) \neq 0$, alors

$$e^{tA} = I + \frac{e^{tu^{'}(\lambda)} - 1}{u^{'}(\lambda)}(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u).$$

Remarquez que $k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u}$ est l'opérateur adjoint de $\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$. Donc $k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u}$ est le générateur du semi-groupe uniformément continu des opérateurs de Toeplitz tronqués comme suit :

$$\begin{aligned} T_t &= I + t(k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u}), && \text{si} \quad u^{'}(\lambda) = 0 \\ T_t &= I + \frac{e^{t\overline{u^{'}(\lambda)}} - 1}{\overline{u^{'}(\lambda)}}(k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u}), && \text{si} \quad u^{'}(\lambda) \neq 0 \end{aligned}$$

(2) Supposons que u admet une dérivée angulaire au sens de Caratheodory en $\zeta \in \mathbb{T}$, on considérons $A = k_\zeta^u \otimes k_\zeta^u$ l'opérateur de Toeplitz tronqué de type $u(\zeta)$ avec symbole $k_\zeta^u + u(\zeta)\overline{S_u \widetilde{k_\zeta^u}}$ (voir Théorème 3.1.6 et Corollaire 3.2.5). En effet, on a

$$A^2 = k_\zeta^u(\zeta)A \quad \text{et} \quad |u^{'}(\zeta)| = k_\zeta^u(\zeta) = \|k_\zeta^u\|^2 \neq 0,$$

comme dans (1) on voit

$$e^{tA} = I + \frac{e^{t|u^{'}(\zeta)|} - 1}{|u^{'}(\zeta)|}(k_\zeta^u \otimes k_\zeta^u).$$

(3) Soient $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont n solutions distinctes de l'équation $u(\lambda) = \alpha$.
Notez que si u est un produit de Blaschke fini d'ordre n alors l'espace Modèle K_u^2 de dimension fini (voir [34] p.33). De plus, la famille $\{\widetilde{k_{\lambda_j}^u}, \quad 1 \leq j \leq n\}$ est une base de K_u^2 et toute fonction φ dans K_u^2 peuvent être écrit sous la forme $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \widetilde{k_{\lambda_j}^u}$ où les a_j sont des nombres complexes.
Si A un opérateur de Toeplitz tronqué de type α, alors on a

$$A = A^u_{\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}} = \sum_{j=1}^{n} a_j A^u_{\widetilde{k_{\lambda_j}^u} + u(\lambda_j)\overline{S_u k_{\lambda_j}^u}}.$$

les opérateurs $\widetilde{k_{\lambda_j}^u} \otimes k_{\lambda_j}^u$ sont de type $u(\lambda_j) = \alpha$ et pour tout j, s nous avons

$$(\widetilde{k_{\lambda_j}^u} \otimes k_{\lambda_j}^u)(\widetilde{k_{\lambda_s}^u} \otimes k_{\lambda_s}^u) = \delta_{js} u^{'}(\lambda_j)\widetilde{k_{\lambda_j}^u} \otimes k_{\lambda_j}^u,$$

où δ le symbole de Kronecker.
Alors, A engendre un semi-groupe des opérateurs de Toeplitz tronqués donne par

$$\begin{aligned} T_t = e^{tA} &= \prod_{j=1}^{n} e^{ta_j \widetilde{k_{\lambda_j}^u} \otimes k_{\lambda_j}^u} \\ &= \prod_{j \in M} \Big[I + ta_j \widetilde{k_{\lambda_j}^u} \otimes k_{\lambda_j}^u\Big] \prod_{j \in N} \Big[I + \frac{e^{ta_j u^{'}(\lambda_j)} - 1}{u^{'}(\lambda_j)}(\widetilde{k_{\lambda_j}^u} \otimes k_{\lambda_j}^u)\Big] \\ &= I + t\sum_{j \in M} a_j \widetilde{k_{\lambda_j}^u} \otimes k_{\lambda_j}^u + \sum_{j \in N} \Big[\frac{e^{ta_j u^{'}(\lambda_j)} - 1}{u^{'}(\lambda_j)}(\widetilde{k_{\lambda_j}^u} \otimes k_{\lambda_j}^u)\Big]. \end{aligned}$$

où $M = \{j, \quad u^{'}(\lambda_j) = 0\}$ et $N = \{j, \quad u^{'}(\lambda_j) \neq 0\}$.

(4) Soient u un produit fini de Blaschke d'ordre n et $|\alpha| = 1$. En utilisant le fait que $u^{'}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$. Donc, l'équation $u(\zeta) = \alpha$ admet n solutions distinctes $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ qui sont dans $\mathbb{T}$.
La famille $\{k^u_{\zeta_j}, \quad 1 \leq j \leq n\}$ est une base orthogonale de K^2_u et pour tout $\varphi \in K^2_u$, $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j k^u_{\zeta_j}$, où $a_j = \frac{\varphi(\zeta_j)}{|u^{'}(\zeta_j)|}$, et nous avons

$$A = A^u_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}} = \sum_{j=1}^{n} a_j A^u_{k^u_{\zeta_j} + u(\zeta_j)\overline{S_u \widetilde{k^u_{\zeta_j}}}} = \sum_{j=1}^{n} a_j k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}.$$

Puisque les opérateurs $k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}$ sont de type α et pour tout j, s on a

$$(k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j})(k^u_{\zeta_s} \otimes k^u_{\zeta_s}) = \delta_{js}|u^{'}(\zeta_j)| k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}.$$

Comme dans le cas ci-dessus, on obtient

$$T_t = I + \sum_{j=1}^{n} \Big[\frac{e^{t a_j |u^{'}(\zeta_j)|} - 1}{|u^{'}(\zeta_j)|} (k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}) \Big].$$

Conclusion

L'objectif présenté dans l'introduction de la thèse est étude le produit et la commutativité des opérateurs de Toeplitz. Nous résumons ici les résultats que nous avons obtenus dans le cadre de cette thèse, et nous présentons quelques pistes de recherches possibles à partir de ces résultats.

Dans le cadre de cette étude, nous en avons étudié les propriétés des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α. Nous avons ensuite présenté les travaux de Yagoub et Zarrabi qui sont donné une caractérisation complète sur les semi groupes des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Le cas de l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman est un plus différent à celui de Hardy. Grâce à notion de puissance d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène, on peut déduire quelques résultats importants sur la commutativité et le produit de ces opérateurs.

Arrivé au terme de ce thèse, il est temps pour moi de récapituler les principaux résultats obtenus. Ces travaux, effectués en collaboration avec Issam Louhichi. En 2007, Louhichi donne un exemple d'un opérateur de Toeplitz quasihomogène admet toujours un puissance.

Nous avons utilisé la transformation inverse de Mellin et l'analyse complexe pour fournée des conditions suffisantes telles que la puissance de l'opérateur de Toeplitz quasihomogène avec la partie radiale soit une fonction polynomiale restée toujours un opérateur de Toeplitz quasihomogène.

Pour la perspectives une première piste de recherche serait de déterminer si les conditions dans notre résultat sont nécessaires. Une autre piste consiste à s'intéresser aux autres fonctions radiales.

Bibliographie

[1] P. Ahern and Ž. Čučković, *A Theorem of Brown–Halmos Type for Bergman Space Toeplitz Operators*, Journal of Functional Analysis, Vol.187, p.200-210, 2001.

[2] H. Al Sabi and I. Louhichi, *On The Commutativity of Toeplitz Operators with Harmonic Symbols*, Operators and Matrices, Vol.12 No.4, p.1159-1176, 2018.

[3] S. Axler and Ž. Čučković, *Commuting Toeplitz Operators with Harmonic Symbols*, Integral Equations and Operator Theory, Vol.14, p.1-12, 1991.

[4] S. Axler, Ž. Čučković and N.V. Rao, *Commutants of Analytic Toeplitz Operators on the Bergman Space*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.128, p.1951-1953, 2000.

[5] A. Baranov, I. Chalendar, E. Fricain, J. Mashreghi, D. Timotin, *Bounded Symbols and Reproducing Kernel Thesis for Truncated Toeplitz Operators* Journal of Functional Analysis, Vol.259, p.2673-2701, 2010.

[6] R. Bessonov, *Truncated Toeplitz Operators of Finite Rank*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.142 No.4, p.1301-1313, 2014.

[7] A. Bouhali, Z. Bendaoud and I. Louhichi, *On the Powers of Quasihomogenous Toeplitz Operators*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol.71, p.1049-1061, 2021.

[8] A. Brown and P.R. Halmos, *Algebraic Properties of Toeplitz Operators*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol.213, p.89-102, 1964.

[9] I. Chalendar and D. Timotin, *Commutation Relations for Truncated Toeplitz Operators*, Opearators and Matrices, Vol.8 No.3, p.877-888, 2014.

[10] D.N. Clark, *One Dimensional Perturbations of Restricted Shifts*, Journal d'Analyse Mathématique, Vol.25, p.169-191, 1972.

[11] A.M. Cohen, *Numerical Methods for Laplace Transform Inversion*, Springer, New York, 2007.

[12] J.B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second Edition, Graduate Text in Mathematics 96, Springer-Verlag, New York, 1990.

[13] R.B. Crofoot, *Multipliers Between Invariant Subspaces of the Backward Shift*, Pacific Journal of Mathematics, Vol.166 No.2, p.225–246, 1994.

[14] Ž. Čučković and N. V. Rao, *Mellin Transform, Monomial Symbols, and Commuting Toeplitz Operators*, Journal of Functional Analysis, Vol.154, p.195-214, 1998.

[15] P.L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Pure and Applied Mathematics 38, Academic Press, New York, 1970.

[16] K.J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematics 194, Springer-Verlag, New York, 2000.

[17] S.R. Garcia, *Conjugation, The Backward Shift, and Toeplitz Kernels*, Journal of Operator Theory, Vol.54 No.2, p.239-250, 2005.

[18] S.R. Garcia, *Conjugation and Clark Operators*, Contemporary Mathematics, Vol.393, p.67-112, 2006.

[19] S.R. Garcia and M. Putinar, *Complex Symmetric Operators and Applications*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.358, p.1285–1315, 2006.

[20] S.R. Garcia and W.T. Ross, *Model Spaces : a Survey*, Invariant subspaces of the shift operator, Vol.638, p.197-245, 2015.

[21] R. Godement, *Analyse Mathématique III; Fonctions Analytiques, Différentielles et Variétés, Surfaces de Riemann*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[22] I. Gohberg and S. Goldberg, *Basic Operator Theory*, Birkhauser, Boston, 1980.

[23] J.A. Goldstein, *Semigroupe of Linear Operators and Applications*, Oxford University Press, New York, 1985.

[24] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces*, Graduate Texts in Mathematics 199, Springer-Verlag, New York, 2000.

[25] I. Louhichi, *Powers and Roots of Toeplitz Operators*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.135 No.5, p.1465-1475, 2007.

[26] I. Louhichi and N. V. Rao, *Roots of Toeplitz Operators on the Bergman Space*, Pacific Journal of Mathematics, Vol.252 No.1, p.127-144, 2011.

[27] I. Louhichi, N.V. Rao, and A. Yousef, *Two Questions on Products of Toeplitz Operators on the Bergman Space*, Complex Analysis and Operator Theory, Vol.3 No.4, p.881-889, 2009.

[28] I. Louhichi, E. Strouse, and L. Zakariasy, *Products of Toeplitz Operators on the Bergman Space*, Integral Equations and Operator Theory, Vol.54 No.4, p.525-539, 2006.

[29] I. Louhichi and L. Zakariasy, *On Toeplitz Operators with Quasihomogeneous Symbols*, Archiv der Mathematik, Vol.85 No.3, p.248-257, 2005.

[30] S. Lubkin, *C_0- Semigroups and Applications*, Mathemhtics Studies 191, North Holland, Amsterdam, 2003.

[31] R.A. Martinez-Avendano, P. Rosenthal, *An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space*, Graduate Texts in Mathematics 237, Springer-Verlag, New York, 2007.

[32] R. Nagel, *One-Parameter Semigroups of Positive Operators*, Lecture Notes in Mathematics 1184, Springer-Verlag, Berlin Heidlberg, 1988.

[33] N.K. Nikol'skiĭ, *Operators, Functions and Systems : An Easy Reading*, Volume.1, Mathematical Surveys and Monographs 92, American Mathematical Society, USA, 2002.

[34] N.K. Nikol'skiĭ, *Treatise on the Shift Operator : Spectral Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[35] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[36] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Graduate Texts in Mathematics 172, Springer-Verlag, New York, 1998.

[37] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1987.

[38] D. Sarason, *Algebraic Properties of Truncated Toeplitz Operators*, Operators and Matrices, Vol.1 No.4, p.491-526, 2007.

[39] D. Sarason, *Unbounded Operators Commuting with Restricted Backwards Shifts*, Operators and Matrices, Vol.2 No.4, p.583–601, 2008.

[40] D. Sarason, *Unbounded Toeplitz Operators*, Integral Equations Operators Theory, Vol.61 No.2, p.281–298, 2008.

[41] N.A. Sedlock, *Algebras of Truncated Toeplitz Operators*, Operators and Matrices, Vol.5 No.2, p.309-326, 2011.

[42] S.M. Seubert, *Semigroups of Operators on Quotient Spaces of H^2*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.167 No.1, p.289-298, 1992.

[43] S.M. Seubert, *Unbounded Dissipative Compressed Toeplitz Operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.290 No.1, p.132-146, 2004.

[44] D. Suarez, *Closed Commutants of the Backwards Shift Operator*, Pacific Journal of Mathematics, Vol.179 No.2, p.371–396, 1997.

[45] L. Trieu and Akaki Tikaradze, *Commutants of Toeplitz Operators with Harmonic Symbols*, New York Journal of Mathematics, Vol.23, p.1723-1731, 2017.

[46] R. Wong, *Asymptotic Approximations of Integrals*, Classics in Applied Mathematics 34, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2001.

[47] A. Yagoub and M. Zarrabi, *Semiqroups of Truncated Toeplitz Operators*, Operators and Matrices, Vol.12 No.3, p.603-618, 2018.

[48] K. Zhu, *Operator Theory in Functions Spaces*, Second Edition, Mathematical Surveys and Monographs 138, American Mathematical Society, USA, 2007.