REPUBLIQUE ALGERIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Khider-Biskra

**Faculté des sciences exactes et
des sciences de la nature et de la vie**

Une thèse présentée pour le diplôme de

Docteur en Sciences Mathématiques

Dans le domaine des Mathématiques Appliquées

TITRE

Problème de Transmission entre deux Fluides de Herschel-Bulkley dans une Couche Mince avec frottement

Présentée par: Salim Saf

Membres du jury :

MEMBRE	Grade & Etablissement	Qualité
Dr. Mokhtar Hafayed	**Prof. Univ. M. K., Biskra**	**Président du Jury**
Dr. Farid Messelmi	**Prof. Univ. Z. A., Djelfa**	**Rapporteur**
Dr. Elhadj Dahia	**Prof. ENS de Bou-Saada**	**Examinateur**
Dr. Tidjani Menacer	**Prof. Univ. M. K., Biskra**	**Examinateur**
Dr. Abdelbaki Merouani	**Prof. Univ. sétif1., Sétif**	**Examinateur**
Dr. Mohamed Berbiche	**Prof. Univ. M. K., Biskra**	**Examinateur**

Soutenue publiquement le: 29/09/2022

ملخص

اَلهَدف مِن هَاته الّرسَالة هو درَاسة نظرية لمشكلة الاِنتقَال بين سَائلين من نوع هيرشيل ـ بِلكلي Herschel Bulkley غير قَابلين لّلضغط، صَلبين و لزجين في طبَقة رقيقة ثنَائية الّابعَاد في نظَام ثَابت، و علَى افترَاض ان المعَاملَات المُميزة لّلمَائعين مختلِفة، و من خلَال فرض شروط التلَامس بين سَائِل ـ سَائِل في حدود الاِنتقَال الطبيعي، أي بعبَارة اخرَى استمرَارية السرعَات و استمرَارية القيود، و كذلّك الشروّط علَى احد حَافتي الطبقة الرقيقة. اَلنتَائِج المتحصل عليهَا لِاجل هَاته المسَائِل متعلقة بِالوجود و الوحدَانية و السلوّك المقَارب. تَتكون هَاته الاِطروحة من ثلَاث فصوّل. اَلفصل الّاول نقدم فيه النتَائِج الاِسَاسية لمكَانيكَا الوسَائِط المستمِرة بِالاِظَافة الَى المعَادلَات المختلِفة و الّادوَات الريَاضيَاتية. في الفصل الثَاني برهنَا وجود و و حدَانية الحل الضعيف لمشكِلة الاِنتِقَال بين السَائِلين. درَاسة السلوك المقَارب لمشكِلة الاِنتقَال المِكَانيكي هو محور الفصل الثَالث.

كلمَات مفتَاحية : سَائِل هيرشيل ـ بِلكلي Herschel-Bulkley ، اِنتقَال ، طبقة رقيقة ، سلوك مقَارب.

Résumé

Cette thèse vise à proposer une contribution à l'étude d'un problème de transmission entre deux fluides de Herschel-Bulkley incompressibles, rigides et viscoplastiques dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire, en supposant que les coefficients caractéristiques des deux fluides sont différents et en imposant à l'interface de contact fluide-fluide des conditions aux limites de transmission naturelle, c'est-à-dire continuité des vitesses et continuité des contraintes, ainsi que des conditions sur l'un des deux bords de la couche mince. La thèse comporte trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons les notions générales de la mécanique des milieux continus, ainsi que diverses équations et outils mathématiques. Dans le deuxième chapitre, nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution faible à ce problème de transmission. Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à l'étude du comportement asymptotique d'un problème mécanique de transmission.

Mots - clés : fluide de Herschel-Bulkley ; transmission ; couche mince ; comportement asymptotique.

Abstract

This thesis aims to propose a contribution to the study of a transmission problem between two incompressible, rigid, and viscoplastic Herschel-Bulkley fluids in a two-dimensional thin layer in a stationary regime, assuming that the characteristic coefficients of the two fluids are different and by imposing on the interface of fluid-fluid contact conditions at the limits of natural transmission, in other words, continuity of speeds and continuity of stresses, as well as conditions on one of the two edges of the layer thin. The thesis has three chapters. In the first chapter, we introduce general notations of the mechanics of continuous mediums, as well as various equations and mathematical tools In the second chapter, we showed the existence and the uniqueness of a weak solution to this transmission problem. In the third chapter, we are interested in the study of the asymptotic behavior of a mechanical problem of transmission.

Key words and phrases : Herschel-Bulkley fluid ; transmission ; thin layer ; asymptotic behavior.

**

Dédicaces

A ceux qui ont fait de moi ce que je suis et qui sont toujours présents pour me soutenir à tout moment. A tout ceux qui m'ont toujours porté dans leurs coeurs. Je dédie le fruit de mon modeste travail à toute ma famille Saf et leurs enfants, à mon père, à ma mère, tous mes frères et mes soeurs, à tous mes professeurs qui m'ont appris, tous mes professeurs qui ont travaillé avec moi, tous mes amis et collègues qui ont étudié avec moi, à tous ceux qui m'encourageaient, à tout le personnel, les travailleurs et les professeurs de l'Université Mohamed Khider de Biskra, l'Université Ferhat Abbas de Sétif et l'Université Amar Telidji de Laghouat.

***

Remerciements

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance et mes remerciements les plus profonds à mon encadreur Monsieur Messelmi Farid professeur à l'Université de Ziane Achour de Djelfa qui m'a proposé le sujet de ce travail son aide et ses conseils ont été pour moi un soutien très précieux.

Je tiens plus à le remercier pour sa compétence, sa rigueur, ainsi que pour le caractère novateur de ses idées,et sa compétence m'ont encouragé à pour suivre mes travaux de recherche.

Comme je tiens à remercier vivement, Monsieur Mokhtar Hafayed professeur à l'Université de Biskra, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury à ce thèse. Je tiens à remercier Monsieur Elhadj Dahia professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Bou-Saada, Monsieur Tidjani Menacer professeur à l'Université de Biskra, Monsieur Abdelbaki Merouani professeur à l'Université de Sétif 1 et Monsieur Mohamed Berbiche professeur à l'Université de Biskra, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à ma thèse en acceptant de participer

au jury en tant qu'examinateurs.

Je remercie spécialement Monsieur Abita Rahmoune Maître de Conférences à l'Université Amar Telidji de Laghouat.

Salim Saf

TABLE DES MATIÈRES

NOTATIONS

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ et $1 \leq p < +\infty$ on note par :

$\overline{\Omega}$	l'athérencede Ω.
Γ	la frontièrede Ω, supposée souvent réguliére.
$\Gamma_i\,(i = 1, 2)$	une partie de la frontière Γ.
$mes\,(\Gamma_i)$	la mesure de Lebesgue superficielle de Γ_i.
ν	la normale unitaire sortante à Γ.
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v sur $\overline{\Omega}$.
$C\left(\overline{\Omega}\right)$	l'espace des fonctionsréelles continue sur m.
$H_1 =$	$\left\{ \sigma \in L^2\,(\Omega)_s^{n\times n} \;\;/\;\; \mathrm{Div}\,(\sigma) \in L^2\,(\Omega)^n \right\}$.
$W^{m\,,\,p}\,(\Omega)$	l'espace de Sobolev de paramétres m et p.
$H^m\,(\Omega)$	l'espace de Sobolev de paramétres m et $p = 2$; $H^m\,(\Omega) = W^{m,\,2}\,(\Omega)$.
$W^{1-\frac{1}{p}\,,\,p}\,(\Gamma)$	l'espace de traces d'ordre p.
$W_\Gamma^{'}$	le dual topologique de l'espace W_Γ ; $W_\Gamma^{'} = W^{\,-1+\frac{1}{p},\,p'}\,(\Gamma)^n$.
γ	l'application trace.

Si H est un espace de Banach réel, on utilise les notations :

$H^{'}$	le dual topologiquede l'espace H.
$H^{\,n} \quad =$	$\{\ x = (x_i) \;\;/\;\; x_i \in H,\ i = \overline{1, ..., n}\ \}$.
$H_s^{n\times n} \;\; =$	$\{\ x = (x_{ij}) \;\;/\;\; x_{ij} \;=\; x_{ji} \in H \;\;,\;\; i\ ,\ j = \overline{1, ..., n}\ \}$
$(.\ ,\ .)_{H'\times\,H}$	le produit de dualité entre l'espace $H^{'}$etl'espace H.
$\Vert . \Vert_H$	la normede l'espace H.
2^H	l'ensemble de toutes les parties de H.
$x_n \;\to x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans H.
$x_n \;\rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans H.

Pour une fonction f, on note :

$\mathrm{dom}\,(f)$	le domaine de f.
$epi\,(f)$	l'epigraphe de f.
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	la dérivée de f par rapport à la i-éme composante x_i.
$f^{'}$	la dérivée de f par rapport au temps.
$\frac{Df}{Dt}$	la dérivée particulaire de f.
∇f	le gradient de f.
$D\,(f)$	la partie symétrique du gradient de f, $D\,(f) = \frac{1}{2}\left(\nabla f \ + \ \nabla^T f\right)$
$\mathrm{div}\,(f)$	la divergence de f.
∂f	le sous-différenciel de f.

Autres notations :

$\liminf$	la limite in férieure.
S_n	l'espace des tenseurs symétriques d'ordre 2 sur$\mathbb{R}^n$.
$Div\,(\sigma)$	la divergence du tenseur $\sigma \in S_n$.
$\widetilde{\sigma}$	le déviateur du tenseur $\sigma \in S_n$.
$tr\,(\sigma)$	la trace du tenseur $\sigma \in S_n$.
δ	le tenseur identique.
$p.p$	presque partout.
$\mid . \mid$	la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et S_n.
$'' . ''$	le produit scalaire Euclidiende $\mathbb{R}^n$ et S_n.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans la mécanique des fluides, la rhéologie est l'étude de l'écoulement des fluides. La mesure de la résistance d'un fluide à la déformation sous contrainte de cisaillement est donnée par sa viscosité qui peut être perçue comme l'épaisseur du fluide. Certains fluides présentent une viscosité constante, ce sont les fluides Newtoniens comme de nombreux fluides courants, tels que l'eau, le lait et l'éthanol [41]. Un groupe beaucoup plus large de matériaux montre une viscosité qui varie avec la contrainte de cisaillement, c'est le cas des fluides non Newtoniens. Trois catégories de fluides non Newtoniens existent, dont le comportement diffère de celui d'un écoulement Newtonien :

– Fluides dilatants,
– Fluides rhéofluidifiants ou pseudo-plastiques,
– Fluides viscoplastiques.

Pour les fluides dilatants, la viscosité augmente à mesure que la contrainte de cisaillement augmente en magnitude. Le matériau devient plus épais sous la contrainte. Un exemple de fluides dilatants est la solution d'amidon de maïs [48]. C'est un exemple populaire d'un fluide non-Newtonien souvent utilisé. L'effet du comportement non-Newtonien est montré en faisant passer une personne sur une baignoire remplie d'une solution d'amidon de maïs. On remarque que tant que la personne applique une quantité insuffisante de force à la surface de la baignoire (passage rapide), elle peut parcourir le fluide sans y pénétrer. Une fois que cette personne augmente la force en restant dans un point précis, la viscosité du fluide n'est plus suffisamment élevée pour porter le poids de la personne, ce qui l'amène à plonger.

D'autre part, les Fluides rhéofluidifiants présentent une viscosité décroissante à mesure que le taux de cisaillement augmente. En d'autres termes, ils deviennent (plus minces) lorsque la contrainte appliquée augmente. Des exemples des fluides rhéofluidifiants sont des concentrés des fruits tels que le concentré de jus d'orange ou la sauce aux pommes [48].

Certains matériaux montrent un taux de déformation seulement si la contrainte appliquée dépasse un certain seuil. Si la contrainte appliquée est inférieure à cette valeur critique, le matériau à un taux de déformation nul et il se comporte comme un corps rigide. Ce type de matériaux sont appelés les fluides viscoplastiques et la valeur critique, qui doit âtre dépassée pour se comporter comme un fluide, est appelée la limite de plasticité ou bien la contrainte seuil [38]. Dans la littérature, trois types de fluides viscoplastiques sont caractérisés par leurs relations reliant la contrainte et le taux de cisaillement. Les modèles les plus utilisés dans la littérature sont :

– Fluides de Casson ;

– Fluides de Herschel-Bulkley ;

– Fluides de Bingham.

L'écoulement de nombreux matériaux peut être décrit par le modèle de Herschel-Bulkley. On cite à titre d'exemples : l'écoulement du magma, l'écoulement de la boue (glissement du terrain), l'écoulement du sang dans les artères, l'écoulement du pétrole,...etc.

Les fluides de Herschel-Bulkley attirent maintenant une grande attention dans l'étude des matériaux viscoplastiques. L'écoulement des matériaux de type de Herschel-Bulkley se produit dans divers domaines de la recherche moderne, allant de la géologie, la géophysique à la médecine et de nombreuses autres applications industrielles. Le modèle de Herschel-Bulkley est utilisé, entre autres, pour décrire l'écoulement des matières pétrolières, de boues, du béton, du mortier durant le collage, du magma, du sang ainsi que certains mélanges de poudres. Un matériau souvent associé aux fluides de Herschel-Bulkley est la dentifrice. Une certaine quantité minimale de force doit être appliquée sur le tube avant que la dentifrice ne se déverse du tube [40].

Dans les écoulements de faible épaisseur, lorsque l'épaisseur diminue, l'influence relative des effets de surface par rapport aux effets de volume augmente. Il convient alors d'accorder une importance particulière à ce qui se passe à l'interface fluide solide et qui induit les conditions aux limites à imposer aux équations décrivant l'écoulement.

Usuellement, la plupart des travaux mathématiques concernant les équations de Navier-Stokes supposent des conditions d'adhérence aux parois, plus rarement des conditions de glissement ou des conditions en pression. Dans le cas des écoulements de faible épaisseur, on sait justifier [6, 2, 22] par des techniques asymptotiques l'approximation des équations de Navier-Stokes par une équation dite de Reynolds [8, 27, 43], laquelle prend en compte implicitement les conditions limites aux parois.

L'étude du comportement asymptotique a déjà été faite et des résultats ont été obtenus pour plusieurs fluides. Le premier résultat, dû à Bayada et Chambat [5], justifie l'équation de Reynolds, obtenue à partir des équations de Stokes considérées dans un domaine mince. L'écoulement du type Navier-Stokes est traité par Assemien, Bayada et Chambat [4], ainsi que par Nazarov [39], pour différentes conditions aux limites du domaine d'étude.

Pour les problèmes non linéaires, plusieurs résultats sont connus, mais aucun n'englobe le cas du fluide de Bingham. Ainsi, l'écoulement d'un fluide dont la viscosité est donnée par une loi de puissance a été traité par Mikelic et Tapiéro [36] et par Bourgeat, Mikelic et Tapiéro [10]. Par ailleurs, Taous [49] a étudié une classe des fluides à viscosité non linéaire, le modéle de viscosité étant celui de Litvinov [29]. En fin Bunoiu et Saint Jean Paulin [14] ont étudié une classe des fluides à viscosité non linéaire, parmi lesquels ont trouve les fluides du type Cross, Carreau et Williamson. Les auteurs de [13] ont étudié le même problème, dans lequel seules les conditions de Dirichlet sur la frontière ont été considérées.

Cette thèse a pour objet l'étude d'un problème de transmission entre deux fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Herschel-Bulkley dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire, en supposant que les coefficients caractéristiques des deux fluides sont différents et en imposant sur l'interface de contact fluide-fluide des conditions aux limites de transmission naturelles, autrement dit continuité des vitesses et continuité des contraintes, ainsi que des conditions sur l'un des deux bords de la couche mince.

Cependant, nous abordons ici un problème de transmission entre deux domaines bidimensionnels Ω_1^ε et Ω_2^ε en couche mince (les épaisseurs relatives au paramètre ε), et nous supposons qu'il n'y a pas de séparation entre les domaines pendant le processus, c'est-à-dire que le contact est bilatéral. Nous avons donc la même difficulté induite par l'absence des hypothèses de symétrie que dans le problème du revêtement. On cherche à connaitre le comportement asymptotique des fluides lorsque ε tend vers zéro.

Cette thèse se subdivise en trois chapitres. Elle est structurée de la manière suivante :

Le premier chapitre, aborde brièvement des notions générales pour faciliter la lecture de cette thèse. Aussi bien que pour la bonne compréhension des problèmes traités dans la suite. Nous commençons par un rappel des notions générales de la mécanique de milieux continus : on introduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posé sur un domaine de $\mathbb{R}^2$. Ce système comprend la loi de comportement du fluide, l'équation du mouvement et du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis. La loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley traitée dans cette thèse donnée par :

$$\left.\begin{array}{ll} \widetilde{\sigma} = \mu\varepsilon^p \left|D\ (u)\right|^{p-2} D(u) + g\varepsilon \frac{D(u)}{|D(u)|} & \text{si } \ |D(u)| \neq 0 \\ \widetilde{\sigma} \leq g\varepsilon & \text{si } \ |D(u)| = 0 \end{array}\right\} \text{ sur } \Omega,$$

où $\widetilde{\sigma}$ désigne le déviateur du tenseur des contraintes σ, u représente le champ des vitesses, $D(u)$ désigne le tenseur taux de déformation, $\mu\varepsilon^p$, $g\varepsilon > 0$ sont les coefficients qui caractérisent le modèle de Herschel-Bulkley et qui représentent respectivement : la consistance (la viscosité) et le seuil de plasticité, le paramètre p, $1 < p \leq 2$, est l'exposant de loi de puissance du matériaux (représentant l'indice de rhéofluidification, indice d'écoulement, de viscosité).

Ce modèle est une mixture du modèle de Bingham et du modèle en loi de puissance (proposé par Herschel et Bulkley en 1923). Lorsque $p = 2$, on retrouve les fluides de Bingham, lorsque $g = 0$, on retrouve une loi de puissance (rhéofluidifiant), et lorsque $p = 2$ et $g = 0$, on retrouve le modèle de Navier-Stokes (Newtonien).

Nous présentons ensuite quelques résultats classiques de l'analyse fonctionnelle non linéaire : on introduit les fonctions convexes, les opérateurs fortement monotone, les inéquations variationnelles elliptiques. Pour finir nous rappelons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude d'un problème de transmission entre deux fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Herschel-Bulkley dans une couche mince qui occupent deux domaines bornés Ω_1^ε et Ω_2^ε en dimension deux avec contact bilatéral et des conditions aux limites de transmission naturelles, en supposant que les coefficients caractéristiques des deux fluides sont différents. Dans ce cadre, on décrit la position du problème et les conditions aux limites, concernant le champ de vitesse, et le champ des contraintes qui nous permettent de faire la formulation variationnelle du problème mécanique de départ, puis nous étudions l'existence et l'unicité de solution faible du problème.

Dans le troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique d'un problème de transmission lié par les fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Herschel-Bulkley en régime stationnaire avec des viscosités différentes μ_1 et μ_2, dans des domaines Ω_1^ε, Ω_2^ε supposés minces, avec des conditions aux limites de transmission naturelles à l'interface de contact entre deux domaines. Nous commençons par décrire le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler, et la formulation variationnelle du problème concernant le champ de vitesse et le champ de la pression. Ensuite, nous utilisons les différentes inégalités de Poincaré, Korn, Cauchy-Schwartz, Young et Hôldre pour obtenir des estimations à priori. Ce qui nous permet de faire un passage à la limite afin d'obtenir le problème limite [42, 18].

Dans ce cas nous avons obtenu [44] :

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\begin{array}{c} \frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}}\left|\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1 sign\left(\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)+\frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}}\left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y} \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}g_2 sign\left(\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right) \end{array}\right)$$

$$=\widehat{f_{11}}-\frac{d\widehat{p_1}}{dx}+\widehat{f_{21}}-\frac{d\widehat{p_2}}{dx} \text{ in } W^{-1,p'}(\Omega_1\cup\Omega_2).$$

Où μ_1 et μ_2 sont les consistances de milieux Ω_1 et Ω_2 respectivement, g_1 et g_2 sont le seuil de plasticité de milieux Ω_1 et Ω_2 respectivement, $\widehat{f_{i1}}$ est la première composante de la fonction $\widehat{f_i}$ qui représente une densité massique des forces extérieures de milieux Ω_i $(i=1,\ 2)$, $\widehat{u_{i1}}$ est la première composante de la fonction $\widehat{u_i}$ $(i=1,\ 2)$ et $((\widehat{u_{11}},0),(\widehat{u_{21}},0))$, $(\widehat{p_1},\widehat{p_2})$ sont le champ de vitesse et la pression des problèmes limites dans $\Omega_1\cup\Omega_2$.

CHAPITRE 1

MODÉLISATION ET OUTILS MATHÉMATIQUES

Le but de ce chapitre est d'introduire les outils mathématiques et mécaniques nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités. Il comporte deux parties.

Dans la première partie, nous commençons par un rappel des résultats essentiels de la théorie des milieux continus et la loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley, puis, nous présentons le système d'équations aux dérivées partielles qui modélisent quelques problèmes aux limites modélisant le comportement fluide dans le cas stationnaire et ce dans un domaine borné en dimension deux, ensuite nous décrivons les différentes conditions de contact qui interviennent dans tout le document.

La deuxième partie comprend des rappels sur les résultats classiques de l'analyse fonctionnelle non linéaire, on y présente ici quelques résultats fondamentaux concernant les fonctions convexes, les inéquations variationneles elliptiques. Pour finir, nous rappelons les notions de bases ainsi que quelques résultats sur les espaces de Sobolev.

1.1 Modélisation

L'objet de cette section est d'établir le cadre physique et mathématique décrivant des problèmes de contact en mécanique des solides et des fluides utilisés dans cette thèse en suivant [7], [15], [19], [23], [45] et [47]. Ceci se traduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posé sur un domaine de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2,\ 3)$. Ce système comprend la loi de comportement du matériau ou fluide, l'équation du mouvement du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

1.1.1 Les équations de conservation

Considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$ pendant un intervalle de temps $]0,T[$. Lorsque l'hypothése des milieux continus est vérifiée, nous considérons un milieu continu qui occupe un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^2$ pendant un intervalle de temps $]0,T[$ régi par les principes de la thermomécanique des milieux continus qui permettent d'établir les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Nous allons préciser ici l'ensemble des équations correspondantes, dans Ω, on a :

1. **L'équation de conservation de la quantité de mouvement.** Soit $u(x,t)$ le champ des vecteurs vitesse à l'instant $t \in \,]0,T[$ des points $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ du milieu continu en mouvement par rapport au repère (ox) , $\sigma(x,t)$ de composantes σ_{lm} $(l,m = 1,2)$, est le tenseur des contraintes. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre le tenseur des forces extérieures et le tenseur des accélérations pour un système matériel quelconque, conduit à l'équation du mouvement suivante :
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u.\nabla u\right) = Div\ \sigma + f\ , \tag{1.1}$$

où le vecteur f, de composantes f_l $(l = 1, 2)$, représente une densité massique des forces extérieures, $\rho = \rho(x, t)$ est la densité du milieu au point $x \in \Omega$ et Div désigne l'opérateur divergence, c'est-à-dire

$$Div\ \sigma = \frac{\partial \sigma_{lm}}{\partial x_m}, \quad (l = 1, 2) \tag{1.2}$$

2. **L'équation de conservation de la masse.** La forme locale de la conservation de la masse s'applique seulement sur un point $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ de l'élément de volume $d\Omega$ du milieu. L'expression générale de l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u.\nabla \rho + \rho \operatorname{div}(u) = 0 \tag{1.3}$$

Le processus d'évolution modélisé par (1.1) contient un terme non linéaire par rapport aux composantes de la vitesse, dans certaines situations l'équation (1.1) peut se simplifier. S'il s'agit d'un problème statique le premier membre des équations (1.1) est identiquement nul et on les appelle équations d'équilibre

$$Div\ \sigma + f = 0 \tag{1.4}$$

Elles sont alors linéaires par rapport aux composantes σ_{lm} du tenseur des contraintes. Cette situation s'applique également lorsque le champ de vitesse u varie trés lentement par rapport au temps dans le cas où les deux termes $\rho\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\rho u.\nabla u$ sont négligeables (processus quasi-statique).

3. **L'hypothèse d'incompressibilité du volume pour les milieux fluides.** Un fluide est dit incompressible lorsque son volume demeure constant sous l'action d'une pression externe. L'hypothèse d'incompressibilité très réaliste physiquement, se traduit par

$$TrD(u) = 0$$

où $D(u)$ est le tenseur des taux de déformation, de composantes

$$D_{lm}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_l}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_l}),\ 1 \leq l,\ m \leq 2 \tag{1.5}$$

Le milieu est dit homogène, si sa densité est indépendante de x. Donc l'équation de conservation de la masse se réduit à

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

ρ constante indépendante de x et t. Il est même possible de poser $\rho = 1$, ce qui est fait dans la suite, et revient simplement à choisir l'unité de densité de la masse.

Dans le cas du milieu non-isotherme, l'équation de conservation de l'énergie du premier principe de la thermodynamique. Cependant, nous considérerons toujours que la température milieu sera constante dans tous les problèmes posés dans cette thèse.

D'un point de vue mathématique, nous disposons trop d'inconnues par rapport au nombre d'équations. Il est facile de voir que les fonctions inconnues sont au nombre de cinq, représentées par les composantes σ_{lm} $(l, m = 1, 2)$ du tenseur des contraintes (symétrique) et les composantes u_l $(l = 1, 2)$ de la vitesse. Donc les équations précédentes sont insuffisantes pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations que l'on appelle lois de comportement, qui sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement de ces lois. Nous présentons ci-dessous la loi de comportement viscoplastique du fluide de Herschel-Bulkley traitée dans cette thèse.

1.1.2 Loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley

Les lois de comportement caractérisent le comportement de chaque type de milieu continu. Bien quelles doivent respecter certaines propriétés d'invariance, leur origine est souvent expérimentale et c'est toute une série d'essais physiques qu'il faut réaliser pour obtenir une loi de comportement. On présente ici une description de la loi de comportement viscoplastique du fluide de Herschel-Bulkley traité dans cette thèse en suivant [19], [25] et [46]. Le modèle de Herschel-Bulkley est caractérisé par la propriété suivante : le matériau commence à s'écouler seulement si les forces appliquées dépassent une certaine limite, dit seuil de plasticité. Pour décrire ce modèle, on a besoin de certaines notations.

Soient u le champ des vitesses et D le tenseur taux de déformation défini par :

$$D\ (u) = \frac{1}{2}\left(\nabla u + \nabla^t u\right). \tag{1.6}$$

On considère aussi son déviateur

$$\widetilde{D} = D - \frac{1}{n} tr\ (D)\delta, \tag{1.7}$$

où $tr(D)$ représente la trace de D et δ le tenseur identique. On note par σ le tenseur des contraintes de Cauchy et son déviateur

$$\widetilde{\sigma} = \sigma + p\delta. \tag{1.8}$$

Dans l'équation (1.8), le scalaire $-p = \frac{1}{n} tr\ (\sigma)$ représente la partie sphérique du tenseur des contraintes. On peut identifier p avec la pression. En plus des déviateurs $\widetilde{D}$ et $\widetilde{\sigma}$, un autre tenseur S est introduit comme étant la partie des contraintes qui correspond aux propriétés plastiques du matériau. Pour décrire un tel processus, on utilise une collection de fonctions réguliéres $t \longmapsto \left(\widetilde{D}(t), \widetilde{\sigma}(t), S(t)\right)$ pour $t \in [0,\ T]$ où $T > 0$ est la durée du processus. Le modèle rigide viscoplastique de Herschel-Bulkley supposé que

$$\widetilde{\sigma} = S + \mu \left|D\ (u)\right|^{p-2} \widetilde{D}, \tag{1.9}$$

$$f(S) = |S|^2 - g^2 \leq 0, \tag{1.10}$$

$$\widetilde{D} = \lambda 2S, \tag{1.11}$$

où μ est le coefficient de viscosité, $\frac{g}{\sqrt{2}}$ est le seuil de plasticité pour le cisaillement pur et λ est une fonction telle que

$$\begin{cases} \lambda(t) = 0 \text{ si } f\ (S) < 0 \text{ ou } f(S) = 0 \text{ et } f\ '(S) < 0, \\ \lambda(t) > 0 \text{ si } f\ (S) = 0 \text{ et } f\ '(S) = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Dans (1.12), $f\ '(S)$ désigne la dérivée par rapport au temps de la fonction $t \longmapsto f\ (S(t))$ et (1.10) est la condition de Von Mises. En tenant compte de (1.10), l'invariant $S_{II} = \frac{1}{2}\left|S\right|^2$ ne doit pas dépasser la carré du seuil de plasticité pour le cisaillement pur $\frac{g}{\sqrt{2}}$.

D'après (1.11) et (1.12), il vient que le déviateur du tenseur taux de déformation peut varier seulemet si S reste sur la surface $f\ (S) = 0$, en se déplaçant le long de cette dernière. Pour tout autre processus, $\widetilde{D}$ est nul. C'est la raison pour laquelle $|S| = g$ est appelé condition d'écoulement.

Dans le modèle de Herschel-Bulkley, on suppose toujours l'incompressibilité du volume, c'est-à-dire

$$tr(D) = 0,$$

pour n'importe quel processus de n'importe quelle durée $T > 0$.

Le modèle de Herschel-Bulkley peut être considéré en utilisant seulement les tenseurs D et $\widetilde{D}$. En effet, de (1.9) et (1.11), on a

$$\widetilde{\sigma} = \left(1 + 2\mu \left|D\ (u)\right|^{p-2} \lambda\right) S, \tag{1.13}$$

$$|\widetilde{\sigma}| = \left(1 + 2\mu \left|D\ (u)\right|^{p-2} \lambda\right) |S|\,. \tag{1.14}$$

Si $|\widetilde{\sigma}| > g$, alors de (1.10) et (1.14) on déduit que $\lambda > 0$ et de (1.12) on a $|S| = g > 0$.

L'équation (1.14) entraîne que

$$\lambda = \frac{1}{2\mu \left| D\ (u) \right|^{p-2}} \left(\frac{|\widetilde{\sigma}|}{g} - 1 \right).$$

De (1.11) et (1.13), on a

$$\widetilde{D} = \frac{2\lambda}{1 + 2\mu \left| D\ (u) \right|^{p-2} \lambda} \widetilde{\sigma} = \frac{1}{\mu \left| D\ (u) \right|^{p-2}} \left(1 - \frac{g}{|\widetilde{\sigma}|} \right) \widetilde{\sigma}.$$

Comme $tr\ (D) = 0$, on aura d'après (1.7) que $\widetilde{D} = D$. Par conséquent

$$D = \frac{1}{\mu \left| D\ (u) \right|^{p-2}} \left(1 - \frac{g}{|\widetilde{\sigma}|} \right) \widetilde{\sigma}.$$

Supposons maintenant que $|\widetilde{\sigma}| \leq g$. Alors si $|S| = g$, de (1.14) on obtient $\lambda = 0$, et si $|S| < g$, de (1.12) on aura aussi $\lambda = 0$. D'où finalement $D = 0$. Ainsi, on obtient la loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley suivante :

$$\begin{cases} \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{g}{|\widetilde{\sigma}|} \right) \widetilde{\sigma} & \text{si} \quad |\widetilde{\sigma}| > g, \\ 0 & \text{si} \quad |\widetilde{\sigma}| \leq g. \end{cases} \tag{1.15}$$

On peut aussi inverser l'équation constitutive (1.15). Si $|D| = 0$, d'après (1.15), on a $|\widetilde{\sigma}| \leq g$ et si $|D| \neq 0$, on a $|\widetilde{\sigma}| > g$.

Par ailleurs, on sait que $|\widetilde{\sigma}| = 2\mu \left| D\ (u) \right|^{p-2} |D| + g$, donc si on combine cette formule avec (3) l'équation constitutive (1.15) s'écrit :

$$\begin{cases} \widetilde{\sigma} = \mu \left| D\ (u) \right|^{p-2} D + g \frac{D}{|D|} & \text{si} \ \ |D| \neq 0, \\ |\widetilde{\sigma}| \leq g & \text{si} \ \ |D| = 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Il facile de voir que les deux lois constitutives (1.15) et (1.16) sont équivalentes. Par conséquent, on considère (1.16) comme étant la loi de comportement du fluide de

Herschel-Bulkley. Par ailleurs, les expériences physiques ont montré que les coefficients qui caractérisent le modèle mécanique de Herschel-Bulkley, autrement dit la viscosité μ et le seuil de plasticité g, dépendent de la température, ce qui explique le comportement thermique de fluide de Herschel-Bulkley.

Remarque 1.1. *Si dans la loi de comportement (1.16), on prend $g = 0$ et $p = 2$, on obtient la loi de comportement d'un fluide visqueux incompressible Newtonien. Par conséquent, pour g suffisamment petit, le fluide de Herschel-Bulkley peut être considérer comme un modèle voisin des fluides visqueux Newtoniens. Si g est strictement positif, on obtient la loi de comportement du fluide de Bingham, on observe des zones rigides au sein de l'écoulement. Quand g croit, ces zones rigides augmentent et peuvent bloquer complètement l'écoulement. Cette propriété s'appelle propriété de blocage. le fluide de Herschel-Bulkley posséde la particularité supplémentaire, mise en évidence par la loi de comportement (1.16) :tant que le seuil g n'est pas atteint, le fluide se déforme comme un milieu rigide sans couler. On explique physiquement ce phénomène par le fait que ces fluides sont pour la plupart des suspensions de particules quasi sphériques dans un solvant. Quand les particules sont faiblement concentrées, le seul effet de leur présence est d'augmenter la viscosité proportionnellement à la concentration des particules. Si on augmente toujours la concentraction, les particules finissent par se toucher. Le solvants n'occupe plus que les interstices. Le liquide devient pâteux à cause des forces entre les particules en contact. Pour provoquer son écoulement, il faut vaincre toutes ces forces, ce qui permet d'expliquer l'existence du seuil g.*

Un tel comportement s'observe dans le cas de certaines huiles ou de certaines boues, utilisées dans la technique des forages pétroliers ainsi que dans certaines peintures. On l'utilise aussi pour décrire l'écoulement à haute température de certains corps solides, par exemple le processus de moulage de métaux. Pour plus d'exemples, on revoit aux ouvrages [3], [21] et

[24].

1.1.3 Conditions aux limites de contact

Nous présenterons les différentes conditions aux limites utilisées pour la fermeture du problème que nous utilisons par la suite dans cette thèse. Supposons dans cette section que le milieu occupe un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < h(x)\right\},$$

de frontière régulière notée $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, où Γ_1 est la frontière inférieure d'équation $y = 0$, Γ_2 est la frontière supérieure d'équation $y = h(x)$. On suppose que

$h :]0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$,est une fonction de classe C^1.

– Γ, la surface où on a des conditions imposées en vitesse (condition de Dirichlet) :

$$u = 0.$$

Contact bilatéral entre deux domaines. Supposons dans ce paragraphe que le milieu occupant deux domaines Ω_1 et Ω_2 de $\mathbb{R}^2$ où les deux domaines sont en contact bilatéral, i.e. il n'y a pas de séparation entre deux corps pendant le processus, il s'agit d'un contact bilatéral. En posant $\Omega_1 =]0,\ 1[\times]0,\ h_1(x)[$ et $\Omega_2 =]0,\ 1[\times]h_1(x),\ h_2(x)[$, où $h_i :]0,\ 1[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, est une fonction de classe C^1 , $i = 1, 2$.

Les frontières des Ω_1, Ω_2 seront notées $\partial\Omega_1 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ et $\partial\Omega_2 = \Gamma_0 \cup \Gamma_2$ respectivement. Γ_0 est la surface bilatérale définie par $y = h_1(x)$. Γ_1 est la surface inférieure définie par $y = 0$ et Γ_2 est la surface supérieure définie par $y = h_2(x)$. On note par $\mathbf{n}$ le vecteur normal extérieur unitaire sur la frontière Γ_0 orientée vers l'extérieur de Ω_1 et vers l'intérieur de Ω_2.

– Sur la surface inférieure et supérieure, nous supposons

$$u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_i, i = 1, 2.$$

– Sur la frontière bilatérale entre deux domaines, nous supposons

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ \sigma_1 n - \sigma_2 n &= 0 \text{ sur } \Gamma_0, \end{aligned}$$

autrement dit continuité des vitesses et continuité des contraintes.

1.2 Outils mathématiques

1.2.1 Elément d'analyse non linéaire

Dans la première partie de cette section, $\mathbf{H}$ désigne un espace de Banach réflexif muni de la norme $\|.\|_{\mathbf{H}}$. On note aussi par $\mathbf{H}'$ l'espace dual de $\mathbf{H}$ et par $\langle .,. \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}$ le produit de dualité entre $\mathbf{H}'$ et $\mathbf{H}$.

1.2.1.1 Propriétés générales

On dit que la suite $(x_n)_n \in \mathbf{H}$ converge faiblement vers $x \in \mathbf{H}$ et on note $x_n \rightharpoonup x$ si

$$\langle l,\ x_n \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \longrightarrow \langle l,\ x \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \qquad \forall l \in \mathbf{H}'.$$

Dans ce cas, x s'appelle limite faible de la suite $(x_n)_n$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte que si $x_n \longrightarrow x$, alors $x_n \rightharpoonup x$. La réciproque n'est pas toujours vraie. De plus puisque l'espace de Banach est réflexif on a le résultat suivant :

Théorème 1.1. *(de Bolzano-Weiertrass). Soit $(x_n)_n$ une suite bornée de $\mathbf{H}$, il existe alors un élément $x \in \mathbf{H}$ et une sous-suite de $(x_n)_n$ notée $(x_\mu)_\mu$ telle que $x_\mu \rightharpoonup x$.*

1.2.1.2 Fonctions convexes et sous-différentiabilité

Nous commençons ici par quelques préliminaires sur les fonctions convexes et les fonctions semi-continues inférieurement, ensuite nous donnons une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes, voir pour plus détails [11, 20].

Soit φ une fonction définie sur un espace vectoriel réel $\mathbf{E}$ et à valeur dans $]-\infty, +\infty]$.

La fonction φ est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à ∞, c'est-à-dire s'il existe $x \in \mathbf{E}$ tel que $\varphi(x) < \infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \qquad \forall x,\ y \in \mathbf{E},\ \ t \in [0,\ 1]$$

La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout x, $y \in \mathbf{E}$ et tels que $x \neq y$.

On définit le domaine et l'épigraphe de φ, respectivement, par :

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(\varphi) &= \{x \in \mathbf{E} \text{ tel que } \varphi(x) < \infty\}, \\ \mathrm{epi}(\varphi) &= \{(x, \alpha) \in \mathbf{E} \times \mathbb{R} \text{ tel que } \varphi(x) \leq \alpha\}. \end{aligned}$$

Il clair qu'on peut établir les résultats suivants :

(i) φ est propre si et seulement si $\mathrm{dom}(\varphi) \neq \phi$.

(ii) Le domaine de φ est un convexe de $\mathbf{E}$ si φ est convexe.

(iii) φ est convexe si et seulement si $\mathrm{epi}(\varphi)$ est un ensemble convexe dans $\mathbf{E} \times \mathbb{R}$.

Une fonction φ définie sur un espace topologique $\mathbf{E}$ et à valeur dans $]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement si :

$\forall \varphi \in \mathbb{R}$, l'esemble $\{x \in \mathbf{E} \text{ tel que } \varphi(x) \leq \alpha\ \}$ est fermé.

Nous donnons ici quelques propriétés des fonctions semi-continues inférieurement.

Lemme 1.1. *soit* $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Alors*

(i) φ est semi-continue inférieurement si et seulement si $\text{epi}(\varphi)$ est fermé dans $\mathbf{H} \times \mathbb{R}$.

(ii) φ est semi-continue inférieurement si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{H}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V_x de x dans $\mathbf{H}$ tel que $\varphi(u) \geq \varphi(x) - \varepsilon$ pour tout $u \in V_x$.

Il en résulte en particulier que si φ est semi-continue inférieurement et si $x_n \longrightarrow x$, alors

$$\liminf \varphi(x_n) \geq \varphi(x).$$

Ce lemme nous conduit au résultat suivant :

Théorème 1.2. *Soit* $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction convexe et propre. Alors* φ *est semi-continue inférieurement si et seulement si elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de* $\mathbf{H}$.

Une fonction $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ *est dite Gâteaux-différentiable en un point* $u \in \mathbf{H}$ *s'il existe un élément* $\nabla\varphi(u) \in \mathbf{H}'$ *tel que*

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = \langle \nabla\varphi(u), v \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall v \in \mathbf{H}. \tag{1.17}$$

L'élément $\nabla\varphi(u)$ *est appelé la différentielle au sens de Gâteaux de* φ *au point* u.

La fonction φ *est dite Gâteaux-différentiable si elle Gâteaux-différentiable en tout point de* $\mathbf{H}$, *dans ce cas l'opérateur* $u \longrightarrow \nabla\varphi(u) : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}'$ *s'appelle le gradient de la fonction* φ.

La convexité des fonctions Gâteaux-différentiables peut être caractérisée de la façon suivante :

Lemme 1.2. *Soit* $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ *une fonction Gâteaux-différentiable. Alors* φ *est convexe si et seulement si*

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle \nabla\varphi(u), v - u \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall u, v \in \mathbf{H}. \tag{1.18}$$

L'inégalité (1.18) suggère une généralisation de la notion de gradient aux fonctions convexes.

On dit que la fonction $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ est sous-différentiable en un point $u \in \mathbf{H}$ s'il existe $f \in \mathbf{H}'$ tel que

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall v \in \mathbf{H}. \tag{1.19}$$

L'élément f est appelé sous-gradient de φ au point u et l'ensemble des sous-gradients de φ en u est appelé le sous-différentiel de φ en u et est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \left\{ f \in \mathbf{H}' : \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle f, v-u \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall v \in \mathbf{H} \right\} \tag{1.20}$$

On note par dom$(\partial\varphi)$ l'ensemble défini par :

$$dom\,(\partial\varphi) = \{u \in \mathbf{H} : \partial\varphi(u) \neq \phi\}\,. \tag{1.21}$$

En utilisant (1.20), (1.21) et la définition du domaine d'une fonction, il résulte :

$$dom\,(\partial\varphi) \subset dom\,(\varphi)\,. \tag{1.22}$$

La fonction φ est dite sous-différentiable si elle sous-différentiable en tout point de H, c'est-à-dire dom$(\partial\varphi) = H$.

Lemme 1.3. *Soit $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction sous-différentiable. Alors φ est convexe, propre et semi-continue inférieurement.*

Dans le cas d'une fonction convexe, le lien entre l'opérateur gradient et sous-différentiel est donné par :

Lemme 1.4. *Soit $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et Gâteaux-différentiable. Alors φ est sous-différentiable et on a*

$$\partial\varphi(\mathbf{u}) = \{\nabla\varphi(\mathbf{u})\} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}.$$

1.2.1.3 Opérateurs fortement monotones et inéquations variationnelles

Soient $\mathbf{H}$ un espace de Banach réflexif et séparable, $\mathbf{A} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H}'$ un opérateur non linéaire, $\varphi : \mathbf{H} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $\mathbf{f} \in \mathbf{H}'$. Un nombre considérable et problèmes aux limites en mécanique des milieux continus ont un lieu avec les problèmes suivants.

Trouver $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ tel que

$$\langle \mathbf{Au}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} + \varphi(v) - \varphi(u) \geq \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \tag{1.23}$$

où $\langle ., . \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}$ est le produit de dualité entré $\mathbf{H}'$ et $\mathbf{H}$.

Le probème (1.23) est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur $\mathbf{H}$.

L'opérateur $\mathbf{A}$ est dit :

(i) Strictement monotone si

$$\begin{cases} \langle \mathbf{Au} - \mathbf{Av}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} > 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \\ \langle \mathbf{Au} - \mathbf{Av}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}} = 0 \Longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{u}. \end{cases} \tag{1.24}$$

(ii) coercif si

$$\lim \frac{\langle \mathbf{Au}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}}} = +\infty \text{ si } \lim \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}} = +\infty. \tag{1.25}$$

(iii) Hémi-continu si la fonction réelle $t \longrightarrow \langle \mathbf{A}(\mathbf{u} + tv), \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{H}' \times \mathbf{H}}$ est continue pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En ce qui concerne le problème (1.23), on a le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 1.3. *[11, 28] Soit $A : H \longrightarrow H'$ un opérateur Strictement monotone, borné, hémi-continu et coercif et soit φ une fonction convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible de H. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce (1.23) admet une solution unique.*

1.2.2 Espaces fonctionnels et opérateurs divergence et déformation

On introduit ici des notions générales sur les espaces de Sobolev. On présente en plus leurs principales, notamment les injections de Sobolev, le théorème de trace et les différents résultats de compacité. On rappelle ensuite les espaces de Sobolev utilisés en mécanique des milieux continus et liés aux opérateurs divergence et déformation. Pour plus de détails sur cette partie, on revoit aux ouvrages [1], [16], [17], [25], [26] et [46].

1.2.2.1 Espaces de Sobolev

Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{R}$ est un domaine borné, $1 \leq p \leq \infty$ et $m \in \mathbb{N}$. On rappelle que $\mathbf{W}^{m,\,p}(\Omega)$ est l'espace

$$\mathbf{W}^{m,\,p}(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega) : D^\alpha \mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega), \quad 0 \leq |\alpha| \leq m\right\},$$

où $D^\alpha \mathbf{u}$ désigne la dérivée d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de $\mathbf{u}$ au sens des distributions.

Si $1 \leq p < \infty$, alors $\mathbf{W}^{m,\,p}(\Omega)$ est un espace de Banach réel pour la norme

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{m,\,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha \mathbf{u}\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m,\,p}(\Omega).$$

On note aussi par $(\mathbf{W}^{m,\,p}(\Omega))'$ l'espace dual de $\mathbf{W}^{m,\,p}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Pour $m = 1$, on définit l'espace de Sobolev $\mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega)$

$$\mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega) = \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega) : \forall i, \ 1 \leq i \leq n, \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbf{L}^p(\Omega)\right\},$$

muni de la norme induite,

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{m,\,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si} \ \ 1 \leq p < \infty.$$

En particulier, l'espace $\mathbf{H}^m(\Omega) = \mathbf{W}^{m,\,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire et la norme induite, respectivement,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u},\ \mathbf{v})_{\mathbf{H}^m(\Omega)} &= \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} (D^\alpha \mathbf{u},\ D^\alpha \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \qquad \forall \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^m(\Omega), \\
\|u\|_{\mathbf{H}^m(\Omega)} &= \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha \mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^m(\Omega).
\end{aligned}$$

Pour s réel positif quelconque, on définit l'espace de Sobolev $\mathbf{H}^s(\Omega)$ comme étant l'espace intermédiaire d'ordre θ entre $\mathbf{H}^m(\Omega)$ et $\mathbf{H}^0(\Omega) = \mathbf{L}^2(\Omega)$

$$\mathbf{H}^s(\Omega) = \Big[\mathbf{H}^m(\Omega),\ \mathbf{L}^2(\Omega)\Big]_\theta, \quad (1-\theta)m = s \text{ et } 0 \leq \theta \leq 1.$$

D'autre part, $\mathbf{W}^{m,\,\infty}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\mathbf{W}^{m,\,\infty}(\Omega)} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} (\sup ess\ \ |D^\alpha \mathbf{u}|) \qquad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{m,\,\infty}(\Omega).$$

Nous utiliserons très souvent dans les raisonnements, les théorèmes de compacité et en particulier celui de Rellich, les injections de Sobolev et le théorème de trace de Sobolev.

Théorème 1.4. *(Injections de Sobolev). Soit Ω un ouvert Lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < \infty$.*

(i) Si $p \in [1,\ n[$, alors $\mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega)$ s'injecte continuement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ avec $q \in \left[1,\ \frac{np}{n-p}\right]$.

(ii) Si $p = n$, alors $\mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega)$ s'injecte continuement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ ceci $\forall q \in [n,\ +\infty[$.

(iii) Si $p \in]n,\ +\infty[$, alors $\mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega)$ s'injecte continuement dans $C(\overline{\Omega})$.

Théorème 1.5 (Théroème de compacité de Rellich)**.** *Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ et $p \in [1,\ +\infty[$. Aors $\mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$.*

Théorème 1.6 (Compacité $\mathbf{L}^p - \mathbf{L}^q$)**.** *Soit Ω un ensemble de mesure finie de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq q < p < \infty$. Si $(\mathbf{u}_\mu)_{\mu\geq 1}$ est une suite qui converge presque partout vers u et qui est bornée dans $\mathbf{L}^p$, alors $\mathbf{u}_\mu \longrightarrow \mathbf{u}$ dans $\mathbf{L}^q$.*

Lemme 1.5. *Soit* Θ *un ouvert borné de* $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$ *et* $\mathbf{g}_\mu$, $\mathbf{g}$ *des fonctions de* $\mathbf{L}^q(\Theta)$, $1 < q < \infty$ *telles que*

$$\|\mathbf{g}_\mu\|_{\mathbf{L}^q(\Theta)} \leq c \quad et \quad \mathbf{g}_\mu \longrightarrow \mathbf{g} \quad p.p. \ dans \ \Theta.$$

Alors

$$\mathbf{g}_\mu \longrightarrow \mathbf{g} \ dans \ \Theta \ faible.$$

Théorème 1.7 (Théorème de trace de Sobolev)**.** *Soit* Ω *un ouvert borné et Lipschitzien de* $\mathbb{R}^n$*. Alors l'application*

$$D\ (\overline{\Omega}) \longrightarrow D\ (\mathbf{\Gamma}) : \mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{u}\ /_{\Gamma},$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue

$$\mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{L}^p\ (\mathbf{\Gamma}) : \mathbf{u} \longrightarrow \gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\ /_{\Gamma},$$

γ *est appelée application trace sur* $\mathbf{W}^{1,\,p}(\mathbf{\Omega})$.

Soit $1 \leq p < \infty$*. On appelle espace de traces, l'espace vectoriel*

$$\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},\,p}(\mathbf{\Gamma}) = \gamma\left(\mathbf{W}^{1,\,p}(\mathbf{\Omega})\right) = \left\{\gamma(\mathbf{u}),\ \mathbf{u} \in \mathbf{W}^{1,\,p}(\mathbf{\Omega})\right\},$$

quie l'on munit de la norme

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},\,p}(\mathbf{\Gamma})} = \inf\left\{\|u\|_{\mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega)}\ /\ \gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{f}\right\}.$$

L'espace $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},\,p}(\mathbf{\Gamma})$ *est un sous-espace de* $\mathbf{L}^p\ (\mathbf{\Gamma})$*, de plus c'est un Banach, qui est réflexif lorsque* $1 < p < \infty$*. On constate aisément que l'application*

$$\gamma : \mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},\,p}(\mathbf{\Gamma}).$$

est continue de norme inférieure à 1.

Théorème 1.8. *(Injections de Sobolev pour les espaces de traces). Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq p < \infty$.*

(i) Si $p \in [1,\ n[$, alors $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},\,p}(\mathbf{\Gamma})$ s'injecte continuement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ avec $q \in \left[1,\ \frac{(n-1)p}{n-p}\right]$ et compactement dans $\mathbf{L}^p(\mathbf{\Gamma})$.

(ii) Si $p = n$, alors $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},\,p}(\mathbf{\Gamma})$ s'injecte continuement dans $\mathbf{L}^q(\Omega)$ ceci $\forall q \in [1,\ +\infty[$.

(iii) Si $p \in]n,\ +\infty[$, alors $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},\,p}(\mathbf{\Gamma})$ s'injecte continuement dans $C\ (\mathbf{\Gamma})$.

1.2.2.2 Opérateurs divergence et déformation

Nous désignons S_n l'espace des tenseurs d'ordre deux sur $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,\,3)$, et par "." et $|.|$ représentent respectivement, le produit scalaire et la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et S_n.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}.\mathbf{v} &= \sum_{l=1}^{n} u_l v_l, \quad |\mathbf{u}| = (\mathbf{u}.\mathbf{u})^{\frac{1}{2}} \qquad \forall \mathbf{u},\,\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \\ \sigma.\tau &= \sum_{l,\,m=1}^{n} \sigma_{lm}\tau_{ml}, \quad |\sigma| = (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma,\,\tau \in S_n. \end{aligned}$$

On utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^p\,(\Omega)_s^{n\times n} &= \left\{\sigma = (\sigma_{lm})\ /\ \sigma_{lm} = \sigma_{ml} \in \mathbf{L}^p\,(\Omega)\ \ /\ l,m = \overline{1,\ n}\right\}, \\ \mathbf{W}^{1,\,p}\,(\Omega)^n &= \left\{\mathbf{u} = (u_l)\ /\ u_l \in \mathbf{W}^{1,\,p}\,(\Omega)\ \ /\ l = \overline{1,\ n}\right\}, \\ &= \left\{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p\,(\Omega)^n\ \ /\ D\ (\mathbf{u}) \in \mathbf{L}^p\,(\Omega)_s^{n\times n}\right\}, \\ H_1 &= \left\{\sigma \in \mathbf{L}^p\,(\Omega)_s^{n\times n}\ \ /\ Div\ (\sigma) \in \mathbf{L}^p\,(\Omega)^n\ \right\}, \end{aligned}$$

où $D : \mathbf{W}^{1,\,p}\,(\Omega)^n \longrightarrow \mathbf{L}^p\,(\Omega)_s^{n\times n}$ et $Div : H_1 \longrightarrow \mathbf{L}^p\,(\Omega)^n$ sont les opérateurs de déformation et de divergence définis par

$$D\ (\mathbf{u}) = (D_{lm}\ (\mathbf{u})) : D_{lm}\ (\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{l,\,m} + u_{m,\,l}) \text{ et } Div\ (\sigma) = (\sigma_{lm,\,m}\ ). \tag{1.26}$$

Comme la frontière $\mathbf{\Gamma}$ est Lipschitzienne, le vecteur normale sortant ν à la frontière est défini p.p.

Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega)^n$, nous conservons la notation $\mathbf{v}$ pour désigner la trace de $\mathbf{v}$ sur $\mathbf{\Gamma}$ et on note par $\mathbf{v}_\nu$ et $\mathbf{v}_\tau$ les composantes normale et tangentielle de $\mathbf{v}$ sur la frontière, données par les formules :

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{v}.\nu, \;\; \mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\nu \nu \tag{1.27}$$

Désignons par γ l'application trace

$$\gamma : \mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega)^n \longrightarrow \mathbf{L}^{\,p}(\mathbf{\Gamma})^n,$$

et faisons introduire les notations

$$\mathbf{W}_\Gamma = \mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},\,p}(\mathbf{\Gamma})^n = \gamma(\mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega)^n) \;\text{ et } \mathbf{W}'_\Gamma = \mathbf{W}^{-1+\frac{1}{p},\,p\prime}(\mathbf{\Gamma})^n,$$

et par $\langle .,\ .\rangle_{\mathbf{W}'_\Gamma \times \mathbf{W}_\Gamma}$ le produit de dualité entre $\mathbf{W}'_\Gamma$ et $\mathbf{W}_\Gamma$. Pour tout $\sigma \in H_1$, il existe un élément noté $\sigma\nu \in \mathbf{W}'_\Gamma$ tel que la formule de Green suivante soit satisfaite :

$$\langle \sigma\nu,\ \gamma\nu\rangle_{\mathbf{W}'_\Gamma \times \mathbf{W}_\Gamma} = \langle \sigma,\ \mathbf{D}(\mathbf{v})\rangle_{\mathbf{L}^p(\mathbf{\Omega})^{n\times n}_s} + \langle \mathbf{Div}(\sigma),\ \mathbf{v}\rangle_{\mathbf{L}^p(\mathbf{\Omega})^n} \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega)^n.$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons

$$\langle \sigma\nu,\ \gamma\nu\rangle_{\mathbf{W}'_\Gamma \times \mathbf{W}_\Gamma} = \int_{\mathbf{\Gamma}} \sigma\nu.\mathbf{v}\mathbf{d}\gamma \;\; \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega)^n,$$

où $\mathbf{d}\gamma$ représente l'élément de surface. Nous définissons de façon analogue les composantes normale et tangentielle de σ sur la frontière $\mathbf{\Gamma}$ par les formule :

$$\sigma_\nu = \sigma\nu.\nu, \;\; \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu.$$

Tout au long de cette thèse, dans les problèmes mécaniques, $\mathbf{\Gamma}$ est partitionnée en deux parties mesurables $\mathbf{\Gamma}_1$ et $\mathbf{\Gamma}_2$, telles que $mes(\mathbf{\Gamma}_1)$, $mes(\mathbf{\Gamma}_2) > 0$.

Nous aurons besoin de l'espace des déplacements admissibles

$$\mathbf{W}_\Gamma = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,\,p}\left(\Omega\right)^n : \mathbf{v} = 0 \;\; \text{sur } \mathbf{\Gamma} \right\}.$$

L'inégalité de Korn généralisée s'applique sur $\mathbf{W}_\Gamma$: il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\mathbf{\Omega}$ et $\mathbf{\Gamma}$, telle que

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{\Omega})_s^{n\times n}} \geq C \;\; \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{1,\,p}(\Omega)^n} \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{W}^{1,\,p}\left(\Omega\right)^n.$$

CHAPITRE 2

PROBLÈME DE TRANSMISSION GOUVERNÉ PAR LE FLUIDE DE HERSCHEL-BULKLEY

Dans ce travail, on a montré l'existence et l'unicité d'une solution faible de ce problème de transmission. Ce chapitre est organisé de la manière suivante.

Dans la sous-section 1, nous présentons le problème mécanique de transmission en régime permanent pour les deux fluides de Herschel-Bulkley. En outre, nous introduisons quelques notations et le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler. Dans la sous-section 2, nous obtenons la formulation variationnele du problème. Nous montrons dans la sous-section 3 l'existence et l'unicité d'une solution faible de ce problème de transmission.

2.1 Position du problème

Nous considérons deux fluides de Herschel-Bulkley rigides, viscoplastiques et incompressibles occupant deux domaines bornés Ω_1^ε et Ω_2^ε de $\mathbb{R}^2$. On note par ε $(0 < \varepsilon < 1)$ est un petit paramètre qui tend vers zéro, avec ses frontières $\partial\Omega_1^\varepsilon$ et $\partial\Omega_2^\varepsilon$ de classe C^1 et sont divisées en trois parties Γ_0^ε, Γ_1^ε et Γ_2^ε mesurables, telles que $mes\left(\Gamma_1^\varepsilon\right), mes\left(\Gamma_2^\varepsilon\right) > 0$, données par

$$\partial\Omega_1^\varepsilon = \Gamma_0^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon \text{ et } \partial\Omega_2^\varepsilon = \Gamma_0^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon,$$

où

- Γ_0^ε est l'interface de contact fluide-fluide définie par $x_2 = \varepsilon h_1(x_1)$.
- Γ_1^ε est la surface inférieure définie par $x_2 = 0$.
- Γ_2^ε est la surface supérieure définie par $x_2 = \varepsilon h_2(x_1)$.

Telle que $h_i :]0,\ 1[\longmapsto \mathbb{R}_+^*$ $(i = 1, 2)$ est une fonction de classe $C^1\left(]0,\ 1[\right)$.

On désigne par Ω^ε le domaine $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$ et on suppose que :

$$\Omega_1^\varepsilon = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 0 < x_1 < 1 \ \text{ et } 0 < x_2 < \varepsilon h_1(x_1)\right\}$$

et

$$\Omega_2^\varepsilon = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 0 < x_1 < 1 \text{ et } \varepsilon h_1(x_1) < x_2 < \varepsilon h_2(x_1)\right\}.$$

Les fluides sont soumis à des forces volumiques données de densités f_1^ε, f_2^ε respectivement.

On note par S_2 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^2$, et par "." et $|.|$ respectivement, le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ et S_2. Ainsi, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2$, $u.v = u_l v_l$, $|u| = (u.u)^{\frac{1}{2}}$, et pour tout $\sigma, \tau \in S_2$, $\sigma.\tau = \sigma_{lm}\tau_{lm}$, $|\sigma| = (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}}$. Ici et ci-dessous, les indices l et m sont compris entre 1 et 2 et la convention de sommation sur des indices répétés est adoptée.

On désigne par $\widetilde{\sigma_i^\varepsilon}$ le déviateur du tenseur des contraintes $\sigma_i^\varepsilon = ((\sigma_i^\varepsilon)_{lm})$, donné par

$$\widetilde{\sigma_i^\varepsilon} = ((\widetilde{\sigma_i^\varepsilon})_{lm}),\ (\widetilde{\sigma_i^\varepsilon})_{lm} = (\sigma_i^\varepsilon)_{lm} - \frac{tr(\sigma_i^\varepsilon)}{2}\delta_{lm}\ ,\ i = 1, 2.$$

Où $\delta = (\delta_{lm})$ est le tenseur identique.

Soit $1 < p \leq 2$. Nous considérons les tenseurs de taux déformations défini pour chaque $u_i^\varepsilon \in W^{1,\,p}(\Omega_i^\varepsilon)^2$ par

$$D(u_i^\varepsilon) = (D_{lm}(u_i^\varepsilon)),\ D_{lm}(u_i^\varepsilon) = \frac{1}{2}((u_i^\varepsilon)_{l,m} + (u_i^\varepsilon)_{m,l}),\ i = 1, 2.$$

On note par $\mathbf{n}$ le vecteur normal extérieur unitaire sur la frontière Γ_0 orientée vers l'extérieur de Ω_1^ε et vers l'intérieur de Ω_2^ε.

Pour chaque champ des vecteurs $v \in W^{1,\,p}(\Omega_i^\varepsilon)^2$ on écrite aussi v pour sa trace sur $\partial\Omega_i^\varepsilon$, $i = 1, 2$.

Le problème de transmission en régime permanent pour les deux fluides de Herschel-Bulkley est donné par le problème mécanique suivant :

Problème (P.2.1). Trouver le champ des vitesses $\mathbf{u}_i^\varepsilon = (u_{i1}^\varepsilon, u_{i2}^\varepsilon) : \Omega_i^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^2$, le champ des contraintes $\sigma_i^\varepsilon = (\sigma_{i1}^\varepsilon, \sigma_{i2}^\varepsilon) : \Omega_i^\varepsilon \longrightarrow S_2$, $i = 1, 2$ tels que

$$Div\ \sigma_1^\varepsilon + f_1^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_1^\varepsilon, \tag{2.1}$$

$$Div\ \sigma_2^\varepsilon + f_2^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_2^\varepsilon, \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \widetilde{\sigma_1^\varepsilon} = \mu_1\varepsilon^p \left|D\ (u_1^\varepsilon)\right|^{p-2} D\ (u_1^\varepsilon) + g_1\varepsilon\frac{D\ (u_1^\varepsilon)}{|D\ (u_1^\varepsilon)|} & \text{si } |D\ (u_1^\varepsilon)| \neq 0 \\ \widetilde{\sigma_1^\varepsilon} \leq g_1\varepsilon & \text{si } |D\ (u_1^\varepsilon)| = 0 \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega_1^\varepsilon, \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \widetilde{\sigma_2^\varepsilon} = \mu_2\varepsilon^p \left|D\ (u_2^\varepsilon)\right|^{p-2} D\ (u_2^\varepsilon) + g_1\varepsilon\frac{D\ (u_2^\varepsilon)}{|D\ (u_2^\varepsilon)|} & \text{si } |D\ (u_2^\varepsilon)| \neq 0 \\ \widetilde{\sigma_2^\varepsilon} \leq g_2\varepsilon & \text{si } |D\ (u_2^\varepsilon)| = 0 \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega_2^\varepsilon, \tag{2.4}$$

$$\operatorname{div} u_1^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_1^\varepsilon, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{div} u_2^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_2^\varepsilon, \tag{2.6}$$

$$u_1^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon, \tag{2.7}$$

$$u_2^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_2^\varepsilon, \tag{2.8}$$

$$u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon, \tag{2.9}$$

$$\sigma_1^\varepsilon.\mathbf{n} - \sigma_2^\varepsilon.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon. \tag{2.10}$$

Ici, l'écoulement dans les domaines Ω_1^ε et Ω_2^ε sont respectivement données par (2.1) et (2.2) où les densités sont supposées égales a un pour les deux fluides. les équations (2.3) et (2.4) représentent, respectivement, la loi de comportement des deux fluides de Herschel-Bulkley où $\mu_1\varepsilon^p$, $\mu_2\varepsilon^p > 0$ et $g_1\varepsilon$, $g_2\varepsilon > 0$ sont respectivement la viscosité et le seuil de plasticité du fluide de Herschel-Bulkley. Le paramètre p tel que $1 < p \leq 2$ est l'indice de puissance du fluide. (2.5) et (2.6) représentent la condition d'incompressibilité pour deux fluides respectivement. (2.7) et (2.8) représentent la condition sur la vitesse sur les frontières Γ_1^ε et Γ_2^ε respectivement. Enfin sur la frontière Γ_0^ε, (2.9) et (2.10) représentent la condition de transmission pour l'interface liquide-liquide.

On introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$V(\Omega_i^\varepsilon) = \left\{ v_i \in W^{1,\,p}(\Omega_i^\varepsilon)^2 : \operatorname{div} v_i = 0 \text{ dans } \Omega_i^\varepsilon \text{ et } v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_i^\varepsilon \right\}, \ i = 1, 2.$$

$$V^\varepsilon = \{(v_1, v_2) \in V(\Omega_1^\varepsilon) \times V(\Omega_2^\varepsilon) : v_1 - v_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\}.$$

$V(\Omega_i^\varepsilon)$, $i = 1, 2$ qui est un espace de Banach pour la norme induite

$$\|v\|_{V(\Omega_i^\varepsilon)} = \|v\|_{W^{1,\,p}(\Omega_i^\varepsilon)^2},$$

et V^ε devient un espace de Banach pour la norme suivante :

$$\|(v_1, v_2)\|_{V^\varepsilon} = \|v_1\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)} + \|v_2\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)},$$

où

$$\|v\|_{W^{1,\,p}(\Omega^\varepsilon)} = \left(\|v\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)} + \sum_{1\leq l,\; m\leq 2} \left\|\frac{\partial v_m}{\partial x_l}\right\|^p_{L^p(\Omega^\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On désigne par $\langle .,\ . \rangle_{V^{\varepsilon\prime}\times V^\varepsilon}$ le produit de dualité entre $V^{\varepsilon\prime}$ et V^ε.

Dans toute la suite, on désignera par c des constantes positives diverses (probablement différentes) dépendant seulement des données du problème. Notons par p' le conjugué p c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

2.2 Formulation variationnelle du problème

Nous allons dériver dans cette section une formulation variationnelle du problème mécanique (2.1)-(2.10).

Lemme 2.1. *Supposons que $(f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon) \in V^{\varepsilon\prime}$.*

Soit $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$ solution de (2.1)-(2.10), alors elle vérifie le problème variationnel suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{Trouver } (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \textit{ dans } V^\varepsilon, \textit{ telle que} \\ \langle \phi\left(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon\right), \left(v_1 - u_1^\varepsilon, v_2 - u_2^\varepsilon\right)\rangle_{V^{\varepsilon\prime}\times V^\varepsilon} + J(v_1, v_2) - J\left(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon\right) \geq \\ \geq \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon.(v_1 - u_1^\varepsilon)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon.(v_2 - u_2^\varepsilon)dx_1dx_2 \quad \forall (v_1, v_2) \in V^\varepsilon, \end{array}\right. \tag{2.11}$$

où

$$\begin{aligned}
\phi &: V^{\varepsilon} \longrightarrow V^{\varepsilon\prime},\ (u_1^{\varepsilon}, u_2^{\varepsilon}) \longmapsto \phi\left(u_1^{\varepsilon}, u_2^{\varepsilon}\right) : \forall (v_1, v_2) \in V^{\varepsilon} \\
\left\langle \phi\left(u_1^{\varepsilon}, u_2^{\varepsilon}\right), (v_1, v_2)\right\rangle_{V^{\varepsilon\prime} \times V^{\varepsilon}} &= \mu_1 \varepsilon^p \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} \left|D(u_1^{\varepsilon})\right|^{p-2} D(u_1^{\varepsilon}).D(v_1) dx_1 dx_2 + \\
& \mu_2 \varepsilon^p \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} \left|D(u_2^{\varepsilon})\right|^{p-2} D(u_2^{\varepsilon}).D(v_2) dx_1 dx_2, \\
j &: V^{\varepsilon} \longrightarrow \mathbb{R}, \\
j\left(v_1, v_2\right) &= g_1 \varepsilon \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} \left|D(v_1)\right| dx_1 dx_2 + g_2 \varepsilon \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} \left|D(v_2)\right| dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Démonstration. Supposons que $(u_1^{\varepsilon}, u_2^{\varepsilon})$ solution de (2.1)-(2.10) soit suffisamment régulière. En multipliant l'équation (2.1) par $v_1 - u_1^{\varepsilon}$, et l'équation (2.2) par $v_2 - u_2^{\varepsilon}$, où $(v_1, v_2) \in V^{\varepsilon}$, et en utilisant la formule de Green sur chaque sous domaine Ω_i^{ε}, $i = 1, 2$ on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} \sigma_1^{\varepsilon} D(v_1 - u_1^{\varepsilon}) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} \sigma_2^{\varepsilon} D(v_2 - u_2^{\varepsilon}) dx_1 dx_2 \\
& - \int_{\partial\Omega_1^{\varepsilon}} \sigma_1^{\varepsilon} n_1 (v_1 - u_1^{\varepsilon}) ds - \int_{\partial\Omega_2^{\varepsilon}} \sigma_2^{\varepsilon} n_2 (v_2 - u_2^{\varepsilon}) ds \\
= & \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} f_1^{\varepsilon} (v_1 - u_1^{\varepsilon}) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} f_2^{\varepsilon} (v_2 - u_2^{\varepsilon}) dx_1 dx_2,\ \forall (v_1, v_2) \in V^{\varepsilon}. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

En utilisant maintenant les conditions aux limites (2.7)-(2.10), on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega_1^{\varepsilon}} \sigma_1^{\varepsilon} n_1 (v_1 - u_1^{\varepsilon}) ds + \int_{\partial\Omega_2^{\varepsilon}} \sigma_2^{\varepsilon} n_2 (v_2 - u_2^{\varepsilon}) ds \\
= & \int_{\Gamma_1^{\varepsilon}} \sigma_1^{\varepsilon} n_1 (v_1 - u_1^{\varepsilon}) ds + \int_{\Gamma_0^{\varepsilon}} \sigma_1^{\varepsilon} n_1 (v_1 - u_1^{\varepsilon}) ds \\
& + \int_{\Gamma_2^{\varepsilon}} \sigma_2^{\varepsilon} n_2 (v_2 - u_2^{\varepsilon}) ds + \int_{\Gamma_0^{\varepsilon}} \sigma_2^{\varepsilon} n_2 (v_2 - u_2^{\varepsilon}) ds \\
= & \int_{\Gamma_0^{\varepsilon}} \sigma_1^{\varepsilon} \mathbf{n} (v_1 - u_1^{\varepsilon}) ds - \int_{\Gamma_0^{\varepsilon}} \sigma_2^{\varepsilon} \mathbf{n} (v_2 - u_2^{\varepsilon}) ds \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

Donc (2.12) devient comme suit

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon D(v_1 - u_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon D(v_2 - u_2^\varepsilon) dx_1 dx_2 \\
= & \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon (v_1 - u_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon (v_2 - u_2^\varepsilon) dx_1 dx_2, \quad \forall (v_1, v_2) \in V^\varepsilon.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on aura, en utilisant la définition de $\widetilde{\sigma_i^\varepsilon}$, $i = 1, 2$ et les conditions d'incompressibilité (2.5) et (2.6)

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \widetilde{\sigma_1^\varepsilon} D(v_1 - u_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \widetilde{\sigma_2^\varepsilon} D(v_2 - u_2^\varepsilon) dx_1 dx_2 \\
= & \int_{\Omega_1^\varepsilon} (\sigma_1^\varepsilon - \frac{tr(\sigma_1^\varepsilon)}{2} \delta) D(v_1 - u_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \\
& \int_{\Omega_2^\varepsilon} (\sigma_2^\varepsilon - \frac{tr(\sigma_2^\varepsilon)}{2} \delta) D(v_2 - u_2^\varepsilon) dx_1 dx \\
= & \int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon D(v_1 - u_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon D(v_2 - u_2^\varepsilon) dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon D(v_1 - u_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon D(v_2 - u_2^\varepsilon) dx_1 dx_2 \\
\leq & \; \mu_1 \varepsilon^p \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|^{p-2} D(u_1^\varepsilon) D(v_1 - u_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \\
& \mu_2 \varepsilon^p \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)|^{p-2} D(u_2^\varepsilon) D(v_2 - u_2^\varepsilon) dx_1 dx_2 + g_1 \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1)| \, dx_1 dx_2 \\
& - g_1 \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)| \, dx_1 dx_2 + g_2 \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2)| \, dx_1 dx_2 - g_2 \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)| \, dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\langle \phi \left(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon\right), \left(v_1 - u_1^\varepsilon, v_2 - u_2^\varepsilon\right) \rangle_{V^{\varepsilon\prime} \times V^\varepsilon} + J(v_1, v_2) - J\left(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon\right) \\
\geq & \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon . (v_1 - u_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon . (v_2 - u_2^\varepsilon) dx_1 dx_2 \quad \forall (v_1, v_2) \in V^\varepsilon.
\end{aligned}$$

La preuve est terminée. $\square$

2.3 Résultats d'existence et d'unicité

Théorème 2.1. *Supposons que* $(f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon) \in V^{\varepsilon\prime}$. *Alors il existe un unique* $u^\varepsilon = (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in V^\varepsilon$ *solution du problème variationnel* (2.11).

Démonstration. On peut facilement prouver que l'opérateur ϕ peut s'ecrire

$$\begin{aligned}\langle \phi\left(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon\right), (v_1, v_2)\rangle_{V^{\varepsilon\prime}\times V^\varepsilon} &= \langle dJ_1(D(u_1^\varepsilon)), D(v_1)\rangle_{L^{p'}(\Omega_1^\varepsilon)_s^4\times L^p(\Omega_1^\varepsilon)_s^4} + \\ &\quad \langle dJ_2(D(u_2^\varepsilon)), D(v_2)\rangle_{L^{p'}(\Omega_2^\varepsilon)_s^4\times L^p(\Omega_2^\varepsilon)_s^4},\end{aligned}$$

où la fonctionnelle J_i, $i = 1, 2$ est défini par

$$J_i : L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \subset S_2 \longrightarrow \mathbb{R},\ \sigma \longmapsto J_i(\sigma) = \frac{\mu_i \varepsilon^p}{p}\int_{\Omega_i} |\sigma|^p\, dx_1 dx_2,\ i = 1, 2,$$

et d représente le dérivée au sens de Gâteaux.

Cette fonctionnelle est convexe et semi-continue inférieurement sur $L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4$ et Gâteaux-différentiable et sa dérivée au sens de Gâteaux au point $\sigma \in L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4$ est

$$\begin{aligned}\langle dJ_i(\sigma), \tau\rangle_{L^{p'}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4\times L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} &= \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^p |\sigma|^{p-2} \sigma.\tau dx_1 dx_2, \\ \forall\tau &\in L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4,\ i = 1, 2.\end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}\langle dJ_i(\sigma), \tau\rangle_{L^{p'}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4\times L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} &= \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^p |\sigma|^{p-2} \sigma.\tau dx_1 dx_2 \\ &\le \int_{\Omega_i^\varepsilon} |\mu_i \varepsilon^p| |\sigma|^{p-1} |\tau|\, dx_1 dx_2 \\ &\le c\left(\int_{\Omega_i^\varepsilon} |\sigma|^{p'(p-1)} dx_1 dx_2\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega_i^\varepsilon} |\tau|^p\, dx_1 dx_2\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Or on sait que $1 < p < 2 \Longrightarrow 0 < p-1 < 1$, de plus il existe une constante strictement positive δ de sorte que

$$\delta\,|\sigma| > 1,\ \forall \sigma \in L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \setminus \{0\}\,,\ i = 1,2.$$

Cela entraîne l'existence d'une constante $C(p,\delta)$ vérifiant l'inégalité

$$\|dJ_i(\sigma)\|_{L^{p'}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} \leq C(p,\delta)\,\|\sigma\|_{L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4}\,, \forall \sigma \in L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4,\ i = 1,2.$$

D'aprés le lemme (1.2) et la propriétés (1.18), $J_i(\sigma)$ est convexe si et seulement si

$$\langle dJ_i(\sigma_1),\ \sigma_2 - \sigma_1\rangle_{L^{p'}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \times L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} \leq J_i(\sigma_2) - J_i(\sigma_1)\,, \forall \sigma_1, \sigma_2 \in L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4,\ i = 1,2.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on aura

$$\begin{aligned}
\langle dJ_i(\sigma_1), \sigma_2 - \sigma_1\rangle_{L^{p'}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \times L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} &\leq \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^p\,|\sigma_1|^{p-1}\,|\sigma_2|\,dx_1dx_2 - \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^p\,|\sigma_1|^p\,dx_1dx_2 \\
&\leq \frac{p-1}{p}\int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^p\,|\sigma_1|^p\,dx_1dx_2 + \\
&\quad \frac{1}{p}\int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^p\,|\sigma_2|^p\,dx_1dx_2 - \int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^p\,|\sigma_1|^p\,dx_1dx_2 \\
&\leq \frac{1}{p}\int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^p\,|\sigma_2|^p\,dx_1dx_2 - \frac{1}{p}\int_{\Omega_i^\varepsilon} \mu_i \varepsilon^p\,|\sigma_1|^p\,dx_1dx_2 \\
&\leq J_i(\sigma_2) - J_i(\sigma_1),\ \forall \sigma_1, \sigma_2 \in L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4, i = 1,2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, dJ_i, est semi-continue et monotone, de plus dJ_i est strictement monotone et bornée, $i = 1,2$.

A cette fin, on a

$$\begin{aligned}
&\langle dJ_i(\sigma_1) - dJ_i(\sigma_2), \sigma_1 - \sigma_2\rangle_{L^{p'}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \times L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} \\
&\geq\ \mu_i \varepsilon^p \int_{\Omega_i^\varepsilon} (|\sigma_1| - |\sigma_2|)(|\sigma_1|^{p-1} - |\sigma_2|^{p-1})dx_1dx_2\ , \\
&\forall \sigma_1, \sigma_2\ \in\ L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4,\ i = 1,2.
\end{aligned}$$

Donc si $\sigma_1 \neq \sigma_2$, nous avons $\langle dJ_i(\sigma_1) - dJ_i(\sigma_2), \sigma_1 - \sigma_2 \rangle_{L^{p'}(\Omega_i^\varepsilon)_s^4 \times L^p(\Omega_i^\varepsilon)_s^4} > 0$, ce qui signifie que dJ_i, est strictement monotone, $i = 1, 2$.

D'autre part, pour tout $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1, v_2) \in V^\varepsilon$, nous avons

$$\begin{aligned}
|\langle \Phi(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1, v_2) \rangle_{V^{\varepsilon\prime} \times V^\varepsilon}| &\leq \mu_1 \varepsilon^p (\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|^{p'(p-1)} dx_1 dx_2)^{\frac{1}{p'}} (\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1)|^p dx_1 dx_2)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \mu_2 \varepsilon^p (\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)|^{p'(p-1)} dx_1 dx_2)^{\frac{1}{p'}} (\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2)|^p dx_1 dx_2)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \mu_1 \varepsilon^p ((\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|^p dx_1 dx_2)^{\frac{1}{p}})^{\frac{p}{p'}} (\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1)|^p dx_1 dx_2)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \mu_2 \varepsilon^p ((\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)|^p dx_1 dx_2)^{\frac{1}{p}})^{\frac{p}{p'}} (\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2)|^p dx_1 dx_2)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \mu_1 \varepsilon^p \|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}^{\frac{p}{p'}} \|v_1\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)} + \mu_2 \varepsilon^p \|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}^{\frac{p}{p'}} \|v_2\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)} \\
&\leq \mu_1 \varepsilon^p \|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}^{\frac{p}{p'}} \|(v_1, v_2)\|_{V^\varepsilon} + \mu_2 \varepsilon^p \|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}^{\frac{p}{p'}} \|(v_1, v_2)\|_{V^\varepsilon} \\
&\leq (\mu_1 \varepsilon^p \|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}^{\frac{p}{p'}} + \mu_2 \varepsilon^p \|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}^{\frac{p}{p'}}) \|(v_1, v_2)\|_{V^\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\|\phi(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\|_{V^{\varepsilon\prime}} \leq \mu_1 \varepsilon^p \|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}^{\frac{p}{p'}} + \mu_2 \varepsilon^p \|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}^{\frac{p}{p'}}.$$

Ce qui prouve que l'opérateur ϕ est bornée sur V^ε.

Maintenant, d'après l'inégalité généralisée de Korn, qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\langle \phi(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \rangle_{V^{\varepsilon\prime} \times V^\varepsilon} \geq c(\|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}^p + \|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}^p), \ \forall (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in V^\varepsilon.$$

Alors

$$\frac{\langle \phi(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \rangle_{V^{\varepsilon\prime} \times V^\varepsilon}}{\|(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon}} \geq c \frac{\|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)}^p + \|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}^p}{\|u_1^\varepsilon\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)} + \|u_2^\varepsilon\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}}, \ \forall (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in V^\varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $\|(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon} \longrightarrow +\infty$ nous trouvons

$$\frac{\langle \phi\left(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon\right), \left(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon\right)\rangle_{V^{\varepsilon\prime}\times V^\varepsilon}}{\|(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)\|_{V^\varepsilon}} \geq c \lim_{r\to+\infty, \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \frac{r^p\cos^p\theta + r^p\sin^p\theta}{r\cos\theta + r\sin\theta} = +\infty$$

il s'en suit que l'opérateur ϕ est coercif sur V^ε.

Par ailleurs, la fonctionnelle

$$\begin{array}{rcl} j & : & V^\varepsilon \to \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) & \mapsto & j\left(v_1, v_2\right) = g_1\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} \left|D(v_1)\right| dx_1dx_2 + g_2\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} \left|D(v_2)\right| dx_1dx_2, \end{array}$$

est continue et convexe sur V^ε, elle est donc semi-continue inférieurement sur V^ε.

En effet, pour montrer la continuité de j il suffit de considérer une suite $(v_{1n}, v_{2n}) \in V^\varepsilon$ qui converge vers (v_1, v_2) dans V^ε, et utiliser l'inégalité de Hôlder et la continuité de g_1, g_2 sur V^ε pour obtenir

$$\begin{aligned} \left|j\left(v_{1n}, v_{2n}\right) - j\left(v_1, v_2\right)\right| &\leq \left|\varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1 \left|D(v_{1n})\right| dx_1dx_2 - \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1 \left|D(v_1)\right| dx_1dx_2\right| \\ &\quad + \left|\varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2 \left|D(v_{2n})\right| dx_1dx_2 - \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2 \left|D(v_2)\right| dx_1dx_2\right| \\ &\leq g_1\varepsilon mes(\Omega_1^\varepsilon)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} \left|D(v_{1n} - v_1)\right|^p dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + g_2\varepsilon mes(\Omega_2^\varepsilon)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} \left|D(v_{2n} - v_2)\right|^p dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c\left(\|v_{1n} - v_1\|_{V(\Omega_1^\varepsilon)} + \|v_{2n} - v_2\|_{V(\Omega_2^\varepsilon)}\right) \\ &\leq c\left\|(v_{1n} - v_1, v_{2n} - v_2)\right\|_{V^\varepsilon}. \end{aligned}$$

De plus, pour la convexité, on a pour toute $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)$, $(v_1, v_2) \in V^\varepsilon$, $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
& j\left(tu_1^\varepsilon + (1-t)v_1, tu_2^\varepsilon + (1-t)v_2\right) = \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1\varepsilon \left|D(tu_1^\varepsilon + (1-t)v_1)\right| dx_1dx_2 \\
& + \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2\varepsilon \left|D(tu_2^\varepsilon + (1-t)v_2)\right| dx_1dx_2 \\
\leq \; & \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1\varepsilon \left|D(tu_1^\varepsilon)\right| dx_1dx_2 + \int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1\varepsilon \left|D((1-t)v_1)\right| dx_1dx_2 \\
& + \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2\varepsilon \left|D(tu_2^\varepsilon)\right| dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2\varepsilon \left|D((1-t)v_2)\right| dx_1dx_2 \\
\leq \; & t\left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1\varepsilon \left|D(u_1^\varepsilon)\right| dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2\varepsilon \left|D(u_2^\varepsilon)\right| dx_1dx_2\right) + \\
& (1-t)\left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} g_1\varepsilon \left|D(v_1)\right| dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} g_2\varepsilon \left|D(v_2)\right| dx_1dx_2\right) \\
\leq \; & tj\left(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon\right) + (1-t)j\left(v_1, v_2\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent le résultat d'existence et d'unicité de la solution résulte des théorèmes classiques, sur les inéquations variationnelles avec opérateurs monotones et fonctionnelles convexes, voir [11]. □

CHAPITRE 3

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UN PROBLÈME DE TRANSMISSION ENTRE DEUX FLUIDES DE HERSCHEL-BULKLEY DANS UNE COUCHE MINCE

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de comportement asymptotique d'un problème mécanique de transmission entre deux fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Herschel-Bulkley dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire avec des viscosités différentes, et les conditions aux limites de transmission naturelles à l'interface de contact. Ce chapitre est organisé de la manière suivante :

Dans la section 1, nous introduisons quelques notations et le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler. Dans la section 2, nous présentons le problème mécanique et sa formulation variationnelle. Dans la section 3, nous nous intéressons au comportement asymptotique, pour cela nous prouvons quelques résultats de convergence concernant la vitesse et la pression lorsque l'épaisseur tend vers zéro. En outre, l'unicité d'une solution limite a également été établie.

3.1 Introduction et cadre fonctionnel du problème

On note I l'intervalle ouvert $I =]0,1[$. On introduit la fonction $h_i : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que $h_i \in C^1(I)$, $i = 1,2$.

Nous considérons les domaines suivants :

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \in I \ \text{ et } 0 < y < h_1(x)\Big\}, \\
\Omega_1^\varepsilon &= \Big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / \ x_1 \in I \quad \text{et } 0 < x_2 < \varepsilon h_1(x_1)\Big\}, \\
\Omega_2 &= \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \in I \ \text{ et } h_1(x) < y < h_2(x)\Big\}, \\
\Omega_2^\varepsilon &= \Big\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 / \ x_1 \in I \ \text{ et } \varepsilon h_1(x_1) < x_2 < \varepsilon h_2(x_1)\Big\},
\end{aligned}$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre qui tendra vers zéro. Remarquez que si $(x_1,x_2) \in \Omega_i^\varepsilon$, alors on a $(x,y) = (x_1, \frac{x_2}{\varepsilon}) \in \Omega_i$, $i = 1,2$.

Cela nous permet de définir, pour chaque fonction $\varphi_i^\varepsilon : \Omega_i^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction $\widehat{\varphi_i^\varepsilon} : \Omega_i \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\widehat{\varphi_i^\varepsilon}(x,y) = \varphi_i^\varepsilon(x_1,x_2)$, $i = 1,2$.

Pour $1 < p \leq 2$, notons par p' le conjugué p c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et $f_i = (f_{i1}, f_{i2}) \in L^{p'}(\Omega_i)^2$ une fonction donnée. Nous définissons la fonction $f_i^\varepsilon \in L^{p'}(\Omega_i^\varepsilon)^2$ tel que $\widehat{f_i^\varepsilon} = f_i$, $i = 1,2$.

Pour chaque domaine Ω_i^ε, nous supposons que sa frontière $\partial\Omega_i^\varepsilon$ est de classe C^1, $i = 1,2$ et est divisée en trois parties Γ_0^ε, Γ_1^ε et Γ_2^ε mesurables, telles que $mes\,(\Gamma_1^\varepsilon)$, $mes\,(\Gamma_2^\varepsilon) > 0$, données par $\partial\Omega_1^\varepsilon = \Gamma_0^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon$ et $\partial\Omega_2^\varepsilon = \Gamma_0^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon$, où Γ_0^ε est la frontière bilatérale définie par $x_2 = \varepsilon h_1(x_1)$. La surface inférieure Γ_1^ε est définie par $x_2 = 0$, la surface supérieure Γ_2^ε est définie par $x_2 = \varepsilon h_2(x_1)$. Nous désignons par Ω^ε le domaine $\Omega_1^\varepsilon \cup \Omega_2^\varepsilon$.

On note S_2 l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^2$ et par "." et $|.|$ respectivement, le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ et S_2. Ainsi, pour tout

$u, v \in \mathbb{R}^2$, $u.v = u_l v_l$, $|u| = (u.u)^{\frac{1}{2}}$, et pour tout $\sigma, \tau \in S_2$, $\sigma.\tau = \sigma_{lm}\tau_{lm}$, $|\sigma| = (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}}$. Ici, les indices l et m sont compris entre 1 et 2 et la convention de sommation sur des indices répétés est adoptée.

On introduit le cadre fonctionnel suivant :

$$\begin{aligned}
W^{1,\,p}_{\Gamma_i}(\Omega_i^\varepsilon) &= \left\{v_i \in W^{1,\,p}(\Omega_i^\varepsilon) : v_i = 0 \text{ sur } \Gamma_i^\varepsilon\right\},\\
W^{p,\,\varepsilon}_{\mathrm{div}}(\Omega_i^\varepsilon) &= \left\{v_i \in W^{1,\,p}(\Omega_i^\varepsilon)^2 : \mathrm{div}(v_i) = 0 \text{ dans } \Omega_i^\varepsilon\right\},\\
W^{p}_{\mathrm{div}}(\Omega_i) &= \left\{v_i \in W^{1,\,p}(\Omega_i)^2 : \mathrm{div}(v_i) = 0 \text{ dans } \Omega_i\right\},\\
L^p_0(\Omega_i^\varepsilon) &= \left\{\varphi_i^\varepsilon \in L^p(\Omega_i^\varepsilon) : \int_{\Omega_i^\varepsilon} \varphi_i^\varepsilon(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 0\right\},\\
L^p_0(\Omega_i) &= \left\{\varphi_i \in L^p(\Omega_i) : \int_{\Omega_i} \varphi_i(x, y)dxdy = 0\right\},\\
W_p\left(\Omega_i\right) &= \left\{\varphi_i \in L^p\left(\Omega_i\right) : \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \in L^p\left(\Omega_i\right)\right\},\ i = 1, 2. \qquad (3.1)\\
W_p &= W_p\left(\Omega_1\right) \times W_p\left(\Omega_2\right),\\
W^\varepsilon_{\mathrm{div}} &= \left\{\begin{array}{c} (v_1, v_2) \in W^{p,\,\varepsilon}_{\mathrm{div}}(\Omega_1^\varepsilon) \times W^{p,\,\varepsilon}_{\mathrm{div}}(\Omega_2^\varepsilon) : v_1 = v_2 \\ \text{sur } \Gamma_0^\varepsilon,\ v_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \text{ et } v_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_2^\varepsilon \end{array}\right\},\\
W^\varepsilon &= \left\{(v_1, v_2) \in W^{1,\,p}_{\Gamma_1}(\Omega_1^\varepsilon)^2 \times W^{1,\,p}_{\Gamma_2}(\Omega_2^\varepsilon)^2 : v_1 = v_2 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon\right\}.
\end{aligned}$$

Tous ces espaces sont des espaces de Banach.

On désigne par $\langle .,\ . \rangle_{W^{\varepsilon\prime} \times W^\varepsilon}$ le produit de dualité entre $W^{\varepsilon\prime}$ et W^ε et par $\|.\|_{W^{1,\,p}_{\Gamma_i}(\Omega_i^\varepsilon)}$ la norme de l'espace $W^{1,\,p}_{\Gamma_i}(\Omega_i^\varepsilon)$, $i = 1, 2$.

3.2 Le modèle et sa formulation variationnelle

Nous considérons deux fluides de Herschel-Bulkley rigides, viscoplastiques et incompressibles qui occupent les domaines Ω_1^ε et Ω_2^ε. Les deux fluides sont en contact bilatéral, le long de la partie commune Γ_0.

On note par $u_i^\varepsilon = (u_{i1}^\varepsilon, u_{i2}^\varepsilon)$ le champ de vitesse, par $\sigma_i^\varepsilon = (\sigma_{i1}^\varepsilon, \sigma_{i2}^\varepsilon)$ les tenseurs des contraintes et par $D(u_i^\varepsilon)$ les tenseurs de déformations linéarisées, $i = 1, 2$.

Nous modélisons les matériaux avec le tenseur de contrainte total de Cauchy

$$\sigma_i^\varepsilon(u_i^\varepsilon) = -p_i^\varepsilon I_2 + \widetilde{\sigma_i^\varepsilon}(u_i^\varepsilon),$$

où $\widetilde{\sigma_i^\varepsilon}$ désigne la partie déviateur, et p_i^ε la pression, $i = 1, 2$. Le fluide est supposé être incompressible, rigide et viscoplastique, et la relation entre $\widetilde{\sigma_i^\varepsilon}$ et $D(u_i^\varepsilon)$ est donnée par le modèle de Herschel-Bulkley :

$$\begin{cases} \widetilde{\sigma_i^\varepsilon} = \mu_i \varepsilon^p \left|D(u_i^\varepsilon)\right|^{p-2} D(u_i^\varepsilon) + g_i \varepsilon \frac{D(u_i^\varepsilon)}{|D(u_i^\varepsilon)|} & \text{si } |D(u_i^\varepsilon)| \neq 0, \\ \left|\widetilde{\sigma_i^\varepsilon}\right| \leq g_i \varepsilon & \text{si } |D(u_i^\varepsilon)| = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

où $g_i\varepsilon$ est le seuil de plasticité, $\mu_i\varepsilon^p$ est la viscosité ($g_i > 0$ et $\mu_i > 0$ sont des constantes indépendantes de ε), p représente l'indice de loi de puissance, u_i^ε est le champ de vitesse et $D(u_i^\varepsilon) = \frac{1}{2}(\nabla u_i^\varepsilon + (\nabla u_i^\varepsilon)^T)$, $i = 1, 2$.

On note par $\mathbf{n}$ le vecteur normal extérieur unitaire sur la frontière Γ_0 orientée vers l'extérieur de Ω_1^ε et vers l'intérieur de Ω_2^ε.

– L'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$Div\ \sigma_i^\varepsilon + f_i^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_i^\varepsilon, i = 1, 2$$

où le vecteur f_i^ε, $i = 1, 2$ de composantes f_{ij}^ε $(j = 1, 2)$, représente une densité massique des forces extérieures.

– L'équation d'incompressibilité

$$\operatorname{div} u_i^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_i^\varepsilon,\ i = 1, 2.$$

Nous décrivons les conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega_i^\varepsilon$. Nous supposons que

– Sur la surface inférieure et supérieure, on a

$$u_i^\varepsilon = 0,\ \ i = 1,2 \text{ sur } \Gamma_i^\varepsilon$$

– Sur la frontière bilatérale entre deux domaines, on a

$$\begin{aligned} u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon &= 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon, \\ \sigma_1^\varepsilon.\mathbf{n} - \sigma_2^\varepsilon.\mathbf{n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon, \end{aligned}$$

autrement dit, nous supposons la continuité des vitesses et la continuité des contraintes.

Le problème de transmission en régime stationnaire pour les fluides de Herschel-Bulkley en couche mince est donné par le problème mécanique suivant :

Problème (P.3.1). Trouver le champ des vitesses $\mathbf{u}_i^\varepsilon = (u_{i1}^\varepsilon, u_{i2}^\varepsilon) : \Omega_i^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^2$, le champ des contraintes $\sigma_i^\varepsilon = (\sigma_{i1}^\varepsilon, \sigma_{i2}^\varepsilon) : \Omega_i^\varepsilon \longrightarrow S_2$ et la pression $p_i^\varepsilon : \Omega_i^\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1,2$ tels que

$$\left.\begin{array}{c} Div\ \sigma_1^\varepsilon + f_1^\varepsilon = 0 \\ \operatorname{div} u_1^\varepsilon = 0 \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega_1^\varepsilon \tag{3.2}$$

$$\left.\begin{array}{c} Div\ \sigma_2^\varepsilon + f_2^\varepsilon = 0 \\ \operatorname{div} u_2^\varepsilon = 0 \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega_2^\varepsilon \tag{3.3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\widetilde{\sigma_1^\varepsilon}(u_1^\varepsilon) = \sigma_1^\varepsilon(u_1^\varepsilon) + p_1^\varepsilon I_2} \\ \widetilde{\sigma_1^\varepsilon} = \mu_1 \varepsilon^p \left|D(u_1^\varepsilon)\right|^{p-2} D(u_1^\varepsilon) + g_1\varepsilon \frac{D(u_1^\varepsilon)}{\left|D(u_1^\varepsilon)\right|} & \text{si } \ |D(u_1^\varepsilon)| \neq 0 \\ \left|\widetilde{\sigma_1^\varepsilon}\right| \leq g_1\varepsilon & \text{si } \ |D(u_1^\varepsilon)| = 0 \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega_1^\varepsilon \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{c}{\widetilde{\sigma_2^\varepsilon}(u_2^\varepsilon) = \sigma_2^\varepsilon(u_2^\varepsilon) + p_2^\varepsilon I_2} \\ \widetilde{\sigma_2^\varepsilon} = \mu_2 \varepsilon^p \left|D(u_2^\varepsilon)\right|^{p-2} D(u_2^\varepsilon) + g_2\varepsilon \frac{D(u_2^\varepsilon)}{\left|D(u_2^\varepsilon)\right|} & \text{si } \ |D(u_2^\varepsilon)| \neq 0 \\ \left|\widetilde{\sigma_2^\varepsilon}\right| \leq g_2\varepsilon & \text{si } \ |D(u_2^\varepsilon)| = 0 \end{array}\right\} \text{ dans } \Omega_2^\varepsilon \tag{3.5}$$

$$u_1^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\varepsilon \tag{3.6}$$

$$u_2^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_2^\varepsilon \tag{3.7}$$

$$u_1^\varepsilon - u_2^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon \tag{3.8}$$

$$\sigma_1^\varepsilon.\mathbf{n} - \sigma_2^\varepsilon.\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_0^\varepsilon. \tag{3.9}$$

Dans toute la suite, on désignera par c des constantes positives diverses (probablement différentes) dépendant seulement des données du problème. Notons par p' le conjugué p c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Formulation variationnelle

En multipliant l'équation (3.2) par $v_1 - u_1^\varepsilon$, et l'équation (3.3) par $v_2 - u_2^\varepsilon$, et en utilisant la formule de Green sur chaque sous domaine Ω_i^ε, $i = 1, 2$, et par addition, on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon D(v_1 - u_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon D(v_2 - u_2^\varepsilon) dx_1 dx_2 - \\
& \int_{\partial\Omega_1^\varepsilon} \sigma_1^\varepsilon n_1 (v_1 - u_1^\varepsilon) ds - \int_{\partial\Omega_2^\varepsilon} \sigma_2^\varepsilon n_2 (v_2 - u_2^\varepsilon) ds \\
= \; & \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon (v_1 - u_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon \left(v_2 - u_2^\varepsilon\right) dx_1 dx_2, \quad \forall (v_1, v_2) \in W^\varepsilon.
\end{aligned}$$

En tenant compte des conditions (3.2)-(3.9), on trouve la formulation faible.

$$\left\{ \begin{array}{c}
\text{Trouver } (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in W_{\text{div}}^\varepsilon \text{ et } (p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon) \in L_0^{p'}\left(\Omega_1^\varepsilon\right) \times L_0^{p'}\left(\Omega_2^\varepsilon\right) \text{ tel que} \\
\phi(\left(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon\right), (v_1 - u_1^\varepsilon, v_2 - u_2^\varepsilon)) - \sum\limits_{1 \le i \le 2} \langle p_i^\varepsilon, \operatorname{div}(v_i - u_i^\varepsilon) \rangle + J(v_1, v_2) - J\left(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon\right) \\
\ge \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon.(v_1 - u_1^\varepsilon) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon.(v_2 - u_2^\varepsilon) dx_1 dx_2, \quad \forall (v_1, v_2) \in W^\varepsilon,
\end{array} \right. \tag{3.10}$$

où

$$\begin{aligned}
\phi((u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon), (v_1, v_2)) &= \mu_1 \varepsilon^p \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|^{p-2} D(u_1^\varepsilon).D(v_1) dx_1 dx_2 + \\
&\quad \mu_2 \varepsilon^p \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)|^{p-2} D(u_2^\varepsilon).D(v_2) dx_1 dx_2, \\
\langle p_i^\varepsilon, \operatorname{div}(v_i) \rangle &= \int_{\Omega_i^\varepsilon} p_i^\varepsilon. \operatorname{div}(v_i) dx_1 dx_2, \ i = 1, 2, \\
j(v_1, v_2) &= g_1 \varepsilon \int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1)| \, dx_1 dx_2 + g_2 \varepsilon \int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2)| \, dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

On sait que ce problème variationnel a une solution unique $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in W_{\text{div}}^\varepsilon$ et $(p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon) \in L_0^{p'}(\Omega_1^\varepsilon) \times L_0^{p'}(\Omega_2^\varepsilon)$, voir pour plus détails [45, 5, 49, 32, 33].

3.3 Comportement asymptotique

Dans cette section, nous établissons quelques résultats concernant le comportement asymptotique de la solution lorsque ε tend vers zéro. Nous commençons par rappeler les lemmes suivants, voir [37, 9, 11, 20, 12].

Lemme 3.1.

1. *L'inégalité de Poincaré. Pour chaque $v_i \in W_{\Gamma i}^{1,\, p}(\Omega_i^\varepsilon)^2$ nous avons*

$$\|v_i^\varepsilon\|_{L^p(\Omega_i^\varepsilon)^2} \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x_2} \right\|_{L^p(\Omega_i^\varepsilon)^2}, \ i = 1, 2. \tag{3.11}$$

2. *L'inégalité de Korn. Pour chaque $v_i \in W_{\Gamma i}^{1,\, p}(\Omega_i^\varepsilon)^2$ il existe une constante positive C_0 indépendante de ε, tel que*

$$\|\nabla v_i^\varepsilon\|_{L^p(\Omega_i^\varepsilon)^4} \leq C_0 \|D(v_i^\varepsilon)\|_{L^p(\Omega_i^\varepsilon)^4}, \ i = 1, 2. \tag{3.12}$$

Lemme 3.2 (Minty). *Soit E un espace de Banach, $A : E \to E'$ un opérateur monotone et semi-continu, $J : E \to]-\infty, +\infty]$ une fonctionnelle propre et convexe. Soit $u \in E$ et $f \in E'$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

$$\begin{aligned} 1.\langle Au; v-u\rangle_{E'\times E} + J(v) - J(u) &\geq \langle f; v-u\rangle_{E'\times E} \quad \forall v \in E. \\ 2.\langle Av; v-u\rangle_{E'\times E} + J(v) - J(u) &\geq \langle f; v-u\rangle_{E'\times E} \quad \forall v \in E. \end{aligned}$$

Les principaux résultats de cette section sont énoncés par la proposition suivante.

Proposition 3.1. *Soit $(u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon) \in W_{\text{div}}^\varepsilon$ et $(p_1^\varepsilon, p_2^\varepsilon) \in L_0^{p'}(\Omega_1^\varepsilon) \times L_0^{p'}(\Omega_2^\varepsilon)$ la solution du problème variationnel (3.10). Alors, il existe $(\widehat{u_1}\ , \widehat{u_2}) \in W_p(\Omega_1)^2 \times W_p(\Omega_2)^2$ et $(\widehat{p_1}\ , \widehat{p_2}) \in L_0^{p'}(\Omega_1) \times L_0^{p'}(\Omega_2)$ tels que*

$$(\widehat{u_1^\varepsilon}, \widehat{u_2^\varepsilon}) \to (\widehat{u_1}\ , \widehat{u_2}) \text{ faiblement dans } W_p(\Omega_1)^2 \times W_p(\Omega_2)^2, \tag{3.13}$$

$$\left(\frac{\partial \widehat{u_{12}^\varepsilon}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_{22}^\varepsilon}}{\partial y}\right) \to (0,0) \text{ faiblement dans } L^p(\Omega_1) \times L^p(\Omega_2), \tag{3.14}$$

$$(\widehat{p_1^\varepsilon},\ \widehat{p_2^\varepsilon}) \to (\widehat{p_1}\ , \widehat{p_2}) \text{ faiblement dans } L_0^{p'}(\Omega_1) \times L_0^{p'}(\Omega_2). \tag{3.15}$$

Démonstration. En Choisissant $(v_1, v_2) = (0,0)$ comme fonction de test dans l'inégalité (3.10), on en déduit que

$$\begin{aligned} &\mu_1 \varepsilon^p \left\| D(u_1^\varepsilon) \right\|_{L^p(\Omega_1^\varepsilon)^4}^p + \mu_2 \varepsilon^p \left\| D(u_2^\varepsilon) \right\|_{L^p(\Omega_2^\varepsilon)^4}^p \\ \leq\ & \int_{\Omega_1^\varepsilon} f_1^\varepsilon . u_1^\varepsilon dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} f_2^\varepsilon . u_2^\varepsilon dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Poincaré, Korn et par passage aux variables x et y, on obtient

$$\left\| \widehat{u_1^\varepsilon} \right\|_{L^p(\Omega_1)^2} + \left\| \widehat{u_2^\varepsilon} \right\|_{L^p(\Omega_2)^2} \leq c, \tag{3.16}$$

$$\left\| \frac{\partial \widehat{u_1^\varepsilon}}{\partial y} \right\|_{L^p(\Omega_1)^2} + \left\| \frac{\partial \widehat{u_2^\varepsilon}}{\partial y} \right\|_{L^p(\Omega_2)^2} \leq c, \tag{3.17}$$

$$\left\| \frac{\partial \widehat{u_1^\varepsilon}}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega_1)^2} + \left\| \frac{\partial \widehat{u_2^\varepsilon}}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega_2)^2} \leq \frac{c}{\varepsilon}. \tag{3.18}$$

De plus, nous utilisons les conditions d'incompressibilité (3.2), (3.3) et la formule de Green, pour tout fonction $(\varphi_1^\varepsilon, \varphi_2^\varepsilon) \in W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega_1^\varepsilon) \times W^{1,p}_{\Gamma_2}(\Omega_2^\varepsilon)$

$$\int_{\Omega_1} \frac{\partial \widehat{u_{12}^\varepsilon}}{\partial y} \widehat{\varphi_1^\varepsilon} dxdy + \int_{\Omega_2} \frac{\partial \widehat{u_{22}^\varepsilon}}{\partial y} \widehat{\varphi_2^\varepsilon} dxdy$$

$$= \varepsilon \int_{\Omega_1} \widehat{u_{11}^\varepsilon} \frac{\partial \widehat{\varphi_1^\varepsilon}}{\partial x} dxdy + \varepsilon \int_{\Omega_2} \widehat{u_{21}^\varepsilon} \frac{\partial \widehat{\varphi_2^\varepsilon}}{\partial x} dxdy.$$

Ce qui donne, en faisant usage de (3.1)

$$\left\| \frac{\partial \widehat{u_{12}^\varepsilon}}{\partial y} \right\|_{W^{-1,p'}(\Omega_1)} + \left\| \frac{\partial \widehat{u_{22}^\varepsilon}}{\partial y} \right\|_{W^{-1,p'}(\Omega_2)} \leq c\varepsilon. \tag{3.19}$$

On peut alors extraire une sous-suite encore notée par $(\widehat{u_1^\varepsilon}, \widehat{u_2^\varepsilon})$ telle que

$$(\widehat{u_1^\varepsilon}, \widehat{u_2^\varepsilon}) \to (\widehat{u_1}, \widehat{u_2}) \text{ faiblement dans } L^p(\Omega_1)^2 \times L^p(\Omega_2)^2, \tag{3.20}$$

$$\left(\frac{\partial \widehat{u_1^\varepsilon}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_2^\varepsilon}}{\partial y} \right) \to \left(\frac{\partial \widehat{u_1}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_2}}{\partial y} \right) \text{ faiblement dans } L^p(\Omega_1)^2 \times L^p(\Omega_2)^2, \tag{3.21}$$

$$\left(\frac{\partial \widehat{u_{12}^\varepsilon}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_{22}^\varepsilon}}{\partial y} \right) \to (0,0) \text{ faiblement dans } L^p(\Omega_1) \times L^p(\Omega_2). \tag{3.22}$$

Soit maintenant $(v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon) \in W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega_1^\varepsilon)^2 \times W^{1,p}_{\Gamma_2}(\Omega_2^\varepsilon)^2$, en employant $(u_1^\varepsilon - v_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon - v_2^\varepsilon)$ comme fonction de test dans l'inégalité (3.10), en utilisant les conditions d'incompressibilité (3.2) et

(3.3) ainsi que la formule de Green et l'inégalité de Hôlder, on obtient

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} \nabla p_1^\varepsilon v_1^\varepsilon dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \nabla p_2^\varepsilon v_2^\varepsilon dx_1 dx_2$$

$$\leq \mu_1 \varepsilon^p \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(u_1^\varepsilon)|^p \, dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1^\varepsilon)|^p \, dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ g_1 \varepsilon^{\frac{1}{p'}+1} Meas(\Omega_1)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega_1^\varepsilon} |D(v_1^\varepsilon)|^p \, dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \varepsilon \left\| \widehat{f_1^\varepsilon} \right\|_{L^{p'}(\Omega_1)^2} \left\| \widehat{v_1^\varepsilon} \right\|_{W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega_1)^2} + \varepsilon \left\| \widehat{f_2^\varepsilon} \right\|_{L^{p'}(\Omega_2)^2} \left\| \widehat{v_2^\varepsilon} \right\|_{W^{1,p}_{\Gamma_2}(\Omega_2)^2}$$

$$+ \mu_2 \varepsilon^p \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(u_2^\varepsilon)|^p \, dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2^\varepsilon)|^p \, dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ g_2 \varepsilon^{\frac{1}{p'}+1} Meas(\Omega_2)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Omega_2^\varepsilon} |D(v_2^\varepsilon)|^p \, dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.23}$$

D'autre part, il est facile de vérifier que, après quelques manipulations algébriques, on trouve

$$\left(\int_{\Omega_i^\varepsilon} |D(v_i^\varepsilon)|^p \, dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon^{\frac{1}{p}-1} \left\| \widehat{v_i^\varepsilon} \right\|_{W^{1,p}_{\Gamma_i}(\Omega_i)^2}, \; i = 1, 2. \tag{3.24}$$

Par conséquent, de (3.17), (3.18), (3.23) et (3.24) il s'ensuit que

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} \nabla p_1^\varepsilon v_1^\varepsilon dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \nabla p_2^\varepsilon v_2^\varepsilon dx_1 dx_2$$

$$\leq \; c\varepsilon \left(\left\| \widehat{v_1^\varepsilon} \right\|_{W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega_1)^2} + \left\| \widehat{v_2^\varepsilon} \right\|_{W^{1,p}_{\Gamma_2}(\Omega_2)^2} . \right) \tag{3.25}$$

En passant aux variables x et y dans le côté gauche de (3.25), on retrouve les estimations suivantes :

$$\left\|\widehat{p_1^\varepsilon}\right\|_{L_0^{p'}(\Omega_1)} + \left\|\widehat{p_2^\varepsilon}\right\|_{L_0^{p'}(\Omega_2)} \leq c, \tag{3.26}$$

$$\left\|\frac{\partial \widehat{p_1^\varepsilon}}{\partial x}\right\|_{W^{-1,p'}(\Omega_1)} + \left\|\frac{\partial \widehat{p_2^\varepsilon}}{\partial x}\right\|_{W^{-1,p'}(\Omega_2)} \leq c, \tag{3.27}$$

$$\left\|\frac{\partial \widehat{p_1^\varepsilon}}{\partial y}\right\|_{W^{-1,p'}(\Omega_1)} + \left\|\frac{\partial \widehat{p_2^\varepsilon}}{\partial y}\right\|_{W^{-1,p'}(\Omega_2)} \leq \varepsilon c. \tag{3.28}$$

Par conséquent, nous pouvons extraire une sous-suite encore notée par $\left(\widehat{p_1^\varepsilon}, \widehat{p_2^\varepsilon}\right)$ telle que

$$\left(\widehat{p_1^\varepsilon}, \widehat{p_2^\varepsilon}\right) \to \left(\widehat{p_1}, \widehat{p_2}\right) \text{ faiblement dans } L_0^{p'}(\Omega_1) \times L_0^{p'}(\Omega_2), \tag{3.29}$$

La preuve est terminée. Cette preuve permet également de déduire que la pression limite vérifie $\left(\widehat{p_1}(x,y), \widehat{p_2}(x,y)\right) = \left(\widehat{p_1}(x), \widehat{p_2}(x)\right)$. □

Proposition 3.2. *La vitesse limite donnée par* (3.13) *vérifie*

$$\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}}(x,y)dy + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}}(x,y)dy = 0 \ \forall x \in I. \tag{3.30}$$

Démonstration. Nous savons des conditions d'incompressibilité (3.2) et (3.3) que

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} \operatorname{div} u_1^\varepsilon(x_1,x_2)\varphi_1(x_1)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \operatorname{div} u_2^\varepsilon(x_1,x_2)\varphi_2(x_1)dx_1dx_2$$

$$= 0 \quad \forall(\varphi_1,\varphi_2) \in D(I)^2.$$

Cela implique, en utilisant la formule de Green

$$\int_{\Omega_1^\varepsilon} u_{11}^\varepsilon(x_1,x_2)\frac{d\varphi_1}{dx_1}(x_1)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} u_{21}^\varepsilon(x_1,x_2)\frac{d\varphi_2}{dx_1}(x_1)dx_1dx_2$$

$$= \int_{\Omega_1^\varepsilon} \frac{\partial u_{12}^\varepsilon(x_1,x_2)}{\partial x_2}\varphi_1(x_1)dx_1dx_2 + \int_{\Omega_2^\varepsilon} \frac{\partial u_{22}^\varepsilon(x_1,x_2)}{\partial x_2}\varphi_2(x_1)dx_1dx_2.$$

Par conséquent, par passage aux variables x et y en utilisant le théorème de Fubini et la formule de Green, nous pouvons déduire

$$\int_0^1 \varphi_1(x)\left(\frac{d}{dx}\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}^{\varepsilon}}(x,y)dy\right)dx + \int_0^1 \varphi_2(x)\left(\frac{d}{dx}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}^{\varepsilon}}(x,y)dy\right)dx$$
$$= 0 \ \forall(\varphi_1,\varphi_2) \in D(I)^2.$$

Alors,

$$\int_0^1 \varphi(x)\left(\frac{d}{dx}\left(\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}^{\varepsilon}}(x,y)dy + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}^{\varepsilon}}(x,y)dy\right)\right)dx = 0 \ \forall\varphi \in D(I).$$

Alors,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}^{\varepsilon}}(x,y)dy + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}^{\varepsilon}}(x,y)dy\right) = 0.$$

De plus, le fait que $(\widehat{u_{11}^{\varepsilon}}, \widehat{u_{21}^{\varepsilon}}) \in L^p(\Omega_1)\times L^p(\Omega_2)$ et $(h_1,h_2) \in C^1(I)\times C^1(I)$ donne, en utilisant l'injection de Sobolev $W^{1,p}(I) \subset C^0(\overline{I})$

$$\int_0^{h_1(x)} \widehat{u_{11}^{\varepsilon}}(x,y)dy + \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \widehat{u_{21}^{\varepsilon}}(x,y)dy \in C^0(\overline{I}).$$

Ainsi, par passage à la limite lorsque ε tend vers zéro, en tenant compte des conditions aux limites (3.6), (3.7) et (3.8), la propriété (3.30) peut être déduite. $\square$

Nous extrayons dans la proposition ci-dessous l'équation vérifiée par la solution limite $(\widehat{u_1},\widehat{u_2}) \in W_p^2$ et $(\widehat{p_1},\widehat{p_2}) \in L_0^{p'}(\Omega_1)\times L_0^{p'}(\Omega_2)$.

Proposition 3.3. *Si* $\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}, \frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right) \neq (0,0)$, *alors le point limite* $(\widehat{u_{11}},\widehat{u_{21}})$ *et* $(\widehat{p_1},\widehat{p_2})$ *donné par* (3.13) *et* (3.15) *vérifie le probléme limite*

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\begin{array}{c} \frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y} + \frac{\sqrt{2}}{2}g_1 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right) + \frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y} \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}g_2 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right) \end{array}\right)$$
$$= \widehat{f_{11}} - \frac{d\widehat{p_1}}{dx} + \widehat{f_{21}} - \frac{d\widehat{p_2}}{dx} \ \ dans\ W^{-1,\,p'}(\Omega). \tag{3.31}$$

Démonstration. Introduisons l'opérateur Φ défini comme suit

$$\Phi : W^{\varepsilon} \to W^{\varepsilon\prime},$$

$$\langle \Phi(u_1^{\varepsilon}, u_2^{\varepsilon}), (v_1^{\varepsilon}, v_2^{\varepsilon}) \rangle_{W^{\varepsilon\prime} \times W^{\varepsilon}} = \mu_1 \varepsilon^p \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} |D(u_1^{\varepsilon})|^{p-2} D(u_1^{\varepsilon}) D(v_1^{\varepsilon}) dx_1 dx_2$$

$$+\mu_2 \varepsilon^p \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} |D(u_2^{\varepsilon})|^{p-2} D(u_2^{\varepsilon}) D(v_2^{\varepsilon}) dx_1 dx_2.$$

Il est facile de vérifier que Φ est monotone et semi-continu (pour plus de détails, voir les références [35, 12, 10]). De plus, nous savons que la fonctionnelle

$$(v_1^{\varepsilon}, v_2^{\varepsilon}) \in W^{\varepsilon} \to g_1 \varepsilon \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} |D(v_1^{\varepsilon})| \, dx_1 dx_2 + g_2 \varepsilon \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} |D(v_2^{\varepsilon})| \, dx_1 dx_2$$

est propre et convexe. Alors, l'utilisation du lemme de Minty permet d'affirmer que (3.10) équivalent à l'inégalité suivante

$$\mu_1 \varepsilon^p \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} |D(v_1^{\varepsilon})|^{p-2} D(v_1^{\varepsilon}) D(v_1^{\varepsilon} - u_1^{\varepsilon}) dx_1 dx_2 + g_1 \varepsilon \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} |D(v_1^{\varepsilon})| \, dx_1 dx_2$$

$$-g_1 \varepsilon \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} |D(u_1^{\varepsilon})| \, dx_1 dx_2 + \mu_2 \varepsilon^p \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} |D(v_2^{\varepsilon})|^{p-2} D(v_2^{\varepsilon}) D(v_2^{\varepsilon} - u_2^{\varepsilon}) dx_1 dx_2$$

$$+g_2 \varepsilon \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} |D(v_2^{\varepsilon})| \, dx_1 dx_2 - g_2 \varepsilon \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} |D(u_2^{\varepsilon})| \, dx_1 dx_2$$

$$\geq \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} f_1^{\varepsilon}.(v_1^{\varepsilon} - u_1^{\varepsilon}) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} p_1^{\varepsilon} \operatorname{div}(v_1^{\varepsilon} - u_1^{\varepsilon}) dx_1 dx_2$$

$$+ \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} f_2^{\varepsilon}.(v_2^{\varepsilon} - u_2^{\varepsilon}) dx_1 dx_2 + \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} p_2^{\varepsilon} \operatorname{div}(v_2^{\varepsilon} - u_2^{\varepsilon}) dx_1 dx_2, \ \forall (v_1^{\varepsilon}, v_2^{\varepsilon}) \in W^{\varepsilon}.$$

Notre but est maintenant de passer à la limite lorsque ε tend vers zéro. Pour cela, nous utilisons la proposition (3.1) et la faible semi-continuité inférieure de la fonctionnelle convexe et continue

$$(v_1^{\varepsilon}, v_2^{\varepsilon}) \in W^{\varepsilon} \to g_1 \varepsilon \int_{\Omega_1^{\varepsilon}} |D(v_1^{\varepsilon})| \, dx_1 dx_2 + g_2 \varepsilon \int_{\Omega_2^{\varepsilon}} |D(v_2^{\varepsilon})| \, dx_1 dx_2.$$

On trouve l'inégalité limite suivante

$$\mu_1 \int_{\Omega_1} \frac{1}{2^{\frac{p-2}{2}}} \left[\left| \frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \widehat{v_{12}}}{\partial y} \right|^2 \right]^{\frac{p-2}{2}} \times \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y} \frac{\partial (\widehat{v_{11}} - \widehat{u_{11}})}{\partial y} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \widehat{v_{12}}}{\partial y} \frac{\partial (\widehat{v_{12}} - \widehat{u_{12}})}{\partial y} \right] dxdy$$

$$+ g_1 \int_{\Omega_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| \frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \widehat{v_{12}}}{\partial y} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dxdy - g_1 \int_{\Omega_1} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| \frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \widehat{u_{12}}}{\partial y} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dxdy$$

$$+ \mu_2 \int_{\Omega_2} \frac{1}{2^{\frac{p-2}{2}}} \left[\left| \frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \widehat{v_{22}}}{\partial y} \right|^2 \right]^{\frac{p-2}{2}} \times \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y} \frac{\partial (\widehat{v_{21}} - \widehat{u_{21}})}{\partial y} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \widehat{v_{22}}}{\partial y} \frac{\partial (\widehat{v_{22}} - \widehat{u_{22}})}{\partial y} \right] dxdy$$

$$+ g_2 \int_{\Omega_2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| \frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \widehat{v_{22}}}{\partial y} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dxdy - g_2 \int_{\Omega_2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left| \frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \widehat{u_{22}}}{\partial y} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} dxdy$$

$$\geq \int_{\Omega_1} \widehat{f_1}.(\widehat{v_1} - \widehat{u_1}) dxdy + \int_{\Omega_1} \widehat{p_1} \operatorname{div}(\widehat{v_1} - \widehat{u_1}) dxdy + \int_{\Omega_2} \widehat{f_2}.(\widehat{v_2} - \widehat{u_2}) dxdy$$

$$+ \int_{\Omega_2} \widehat{p_2} \operatorname{div}(\widehat{v_2} - \widehat{u_2}) dxdy, \quad \forall (\widehat{v_1}, \widehat{v_2}) \in W_p (\Omega_1)^2 \times W_p (\Omega_2)^2 . \tag{3.32}$$

En outre, de (3.13) et (3.14) nous trouvons

$$\left(\frac{\partial \widehat{u_{12}}}{\partial y}, \frac{\partial \widehat{u_{22}}}{\partial y} \right) = (0,0) \text{ dans } \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Il suit, en gardant à l'esprit (3.30), que $\widehat{u_1}(x,y) = (\widehat{u_{11}}(x,y), 0)$ et , $\widehat{u_2}(x,y) = (\widehat{u_{21}}(x,y), 0)$. Cela permet également de choisir $(\widehat{v_{12}}, \widehat{v_{22}}) = (0,0)$ dans (3.32). Considérons maintenant l'opérateur Φ tel que

$$\Phi : W_p \rightarrow W_p' ,$$

$$\langle \Phi(\widehat{u_{11}}, \widehat{u_{21}}), (\widehat{v_{11}}, \widehat{v_{21}}) \rangle_{W_p' \times W_p}$$

$$= \frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y} \frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y} dxdy + \frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega_2} \left| \frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y} \frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y} dxdy.$$

Il est clair que l'opérateur Φ est monotone et semi-continu et la fonctionnelle

$$(\widehat{v_{11}}, \widehat{v_{21}}) \in W_p \ \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} g_1 \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y} \right| dxdy + \frac{\sqrt{2}}{2} g_2 \int_{\Omega_2} \left| \frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y} \right| dxdy$$

est propre et convexe.

Par conséquent, nous en déduisons en utilisant encore le lemme de Minty (3.2)

$$\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y} \frac{\partial (\widehat{v_{11}} - \partial \widehat{u_{11}})}{\partial y} dxdy + \frac{\sqrt{2}}{2} g_1 \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y} \right| dxdy$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{2} g_1 \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y} \right| dxdy + \frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega_2} \left| \frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y} \frac{\partial (\widehat{v_{21}} - \partial \widehat{u_{21}})}{\partial y} dxdy$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} g_2 \int_{\Omega_1} \left| \frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y} \right| dxdy - \frac{\sqrt{2}}{2} g_2 \int_{\Omega_2} \left| \frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y} \right| dxdy$$

$$\geq \int_{\Omega_1} \widehat{f_{11}}.(\widehat{v_{11}} - \widehat{u_{11}}) dxdy - \int_{\Omega_1} \frac{d\widehat{p_1}}{dx} (\widehat{v_{11}} - \widehat{u_{11}}) dxdy$$

$$+ \int_{\Omega_2} \widehat{f_{21}}.(\widehat{v_{21}} - \widehat{u_{21}}) dxdy - \int_{\Omega_2} \frac{d\widehat{p_2}}{dx} (\widehat{v_{21}} - \widehat{u_{21}}) dxdy \quad \forall (\widehat{v_{11}}, \widehat{v_{21}}) \in W_p \ . \tag{3.33}$$

Cela donne, via la formule de Green

$$-\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\,(\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y})(\widehat{v_{11}}-\widehat{u_{11}})dxdy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{v_{11}}}{\partial y}\right|dxdy$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\,(\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y})(\widehat{v_{21}}-\widehat{u_{21}})dxdy$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{v_{21}}}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|dxdy$$

$$\geq\int_{\Omega_1}\widehat{f_{11}}(\widehat{v_{11}}-\widehat{u_{11}})dxdy-\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}(\widehat{v_{11}}-\widehat{u_{11}})dxdy$$

$$+\int_{\Omega_2}\widehat{f_{21}}(\widehat{v_{21}}-\widehat{u_{21}})dxdy-\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}(\widehat{v_{21}}-\widehat{u_{21}})dxdy,\quad\forall\,(\widehat{v_{11}},\widehat{v_{21}})\in W_p. \tag{3.34}$$

à cause du fait que $W^{1,\,p}_{\Gamma_i}(\Omega_i)$ est dense dans $W_p(\Omega_i)$, voir [9, 14], on peut prendre $\widehat{v_{11}}=\widehat{u_{11}}\pm\varphi_1$ et $\widehat{v_{21}}=\widehat{u_{21}}\pm\varphi_2$ dans (3.34), où $(\varphi_1,\varphi_2)\in W^{1,\,p}_{\Gamma_1}(\Omega_1)\times W^{1,\,p}_{\Gamma_2}(\Omega_2)$ pour obtenir les inégalités suivantes :

$$-\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\varphi_1dxdy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial(\widehat{u_{11}}+\varphi_1)}{\partial y}\right|dxdy$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\varphi_2dxdy$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial(\widehat{u_{21}}+\varphi_2)}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|dxdy$$

$$\geq\int_{\Omega_1}\widehat{f_{11}}\varphi_1dxdy-\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\varphi_1dxdy+\int_{\Omega_2}\widehat{f_{21}}\varphi_2dxdy$$

$$-\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\varphi_2dxdy\quad\forall(\varphi_1,\varphi_2)\in W^{1,\,p}_{\Gamma_1}(\Omega_1)\times W^{1,\,p}_{\Gamma_2}(\Omega_2).$$

et

$$\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\varphi_1 dxdy+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial(\widehat{u_{11}}-\varphi_1)}{\partial y}\right|dxdy$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|dxdy+\frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\varphi_2 dxdy$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial(\widehat{u_{21}}-\varphi_2)}{\partial y}\right|dxdy-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|dxdy$$

$$\geq-\int_{\Omega_1}\widehat{f_{11}}\varphi_1 dxdy+\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\varphi_1 dxdy-\int_{\Omega_2}\widehat{f_{21}}\varphi_2 dxdy$$

$$+\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\varphi_2 dxdy\quad\forall(\varphi_1,\varphi_2)\in W^{1,\,p}_{\Gamma_1}(\Omega_1)\times W^{1,\,p}_{\Gamma_2}(\Omega_2).$$

Remplacer dans ces deux inégalités la fonction de test (φ_1,φ_2) par $(\lambda\varphi_1,\lambda\varphi_2)$, $\lambda>0$, en divisant les inégalités obtenues par λ. Le passage à la limite quand λ tend vers 0 implique, sous l'hypothése $\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y},\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\neq(0,0)$, que

$$-\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\varphi_1 dxdy$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1}sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)dxdy$$

$$-\frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\varphi_2 dxdy$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2}sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\geq\int_{\Omega_1}\widehat{f_{11}}\varphi_1 dxdy-\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\varphi_1 dxdy+\int_{\Omega_2}\widehat{f_{21}}\varphi_2 dxdy$$

$$-\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\varphi_2 dxdy\quad\forall(\varphi_1,\varphi_2)\in W^{1,\,p}_{\Gamma_1}(\Omega_1)\times W^{1,\,p}_{\Gamma_2}(\Omega_2).$$

et

$$+\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\varphi_1 dxdy$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}g_1\int_{\Omega_1} sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)dxdy$$

$$+\frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\varphi_2 dxdy$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}g_2\int_{\Omega_2} sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\geq -\int_{\Omega_1}\widehat{f_{11}}\varphi_1 dxdy+\int_{\Omega_1}\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\varphi_1 dxdy-\int_{\Omega_2}\widehat{f_{21}}\varphi_2 dxdy$$

$$+\int_{\Omega_2}\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\varphi_2 dxdy\quad \forall(\varphi_1,\varphi_2)\in W^{1,\,p}_{\Gamma_1}(\Omega_1)\times W^{1,\,p}_{\Gamma_2}(\Omega_2).$$

Par conséquent, on obtient en combinant ces deux inégalités et en utilisant une intégration simple par parties

$$-\int_{\Omega_1}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}}\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}g_1 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\right]\varphi_1 dxdy$$

$$-\int_{\Omega_2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}}\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}g_2 sign\left(\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\right]\varphi_2 dxdy$$

$$=\int_{\Omega_1}\left(\widehat{f_{11}}-\frac{d\widehat{p_1}}{dx}\right)\varphi_1 dxdy+\int_{\Omega_2}\left(\widehat{f_{21}}-\frac{d\widehat{p_2}}{dx}\right)\varphi_2 dxdy$$

$$\forall(\varphi_1,\varphi_2)\in W^{1,\,p}_{\Gamma_1}(\Omega_1)\times W^{1,\,p}_{\Gamma_2}(\Omega_2).$$

Considérons

$$\varphi\in W^{1,p}_0(\Omega):\varphi=\begin{cases}\varphi_1 \text{ dans } \Omega_1\\ \varphi_2 \text{ dans } \Omega_2\end{cases},$$

et

$$\widetilde{a_1} = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}}\left|\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}g_1 sign\left(\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\right] & \text{dans } \Omega_1 \\ 0 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases},$$

$$\widetilde{a_2} = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ -\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}}\left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}g_2 sign\left(\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\right] & \text{dans } \Omega_2 \end{cases},$$

$$\widetilde{b_1} = \begin{cases} \left(\widehat{f_{11}} - \frac{d\widehat{p_1}}{dx}\right) & \text{dans } \Omega_1 \\ 0 & \text{dans } \Omega_2 \end{cases},$$

$$\widetilde{b_2} = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ \left(\widehat{f_{21}} - \frac{d\widehat{p_2}}{dx}\right) & \text{dans } \Omega_2 \end{cases}.$$

Alors

$$\int_\Omega (\widetilde{a_1} + \widetilde{a_2})\varphi dxdy = \int_{\Omega_1} (\widetilde{a_1} + \widetilde{a_2})\varphi_1 dxdy + \int_{\Omega_2} (\widetilde{a_1} + \widetilde{a_2})\varphi_2 dxdy$$

$$= \int_{\Omega_1} \widetilde{a_1}\varphi_1 dxdy \ + \int_{\Omega_2} \widetilde{a_2}\varphi_2 dxdy$$

$$= \int_{\Omega_1} -\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}}\left|\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}g_1 sign\left(\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\right]\varphi_1 dxdy$$

$$+ \int_{\Omega_2} -\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}}\left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}g_2 sign\left(\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\right]\varphi_2 dxdy$$

$$= \int_{\Omega_1} \left(\widehat{f_{11}} - \frac{d\widehat{p_1}}{dx}\right)\varphi_1 dxdy \ + \int_{\Omega_2} \left(\widehat{f_{21}} - \frac{d\widehat{p_2}}{dx}\right)\varphi_2 dxdy$$

$$= \int_{\Omega_1} \widetilde{b_1}\varphi_1 dxdy \ + \int_{\Omega_2} \widetilde{b_2}\varphi_2 dxdy$$

$$= \int_\Omega (\widetilde{b_1} + \widetilde{b_2})\varphi dxdy \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Ce qui donne finalement (3.31).

Désormais, nous désignerons par $(\widehat{u_{11}}, \widehat{u_{21}}) \in W_p$ et $(\widehat{p_1}, \widehat{p_2}) \in L_0^{p'}(\Omega_1) \times L_0^{p'}(\Omega_2)$ la solution du problème limite (3.31). □

La proposition suivante montre l'unicité de la solution limite $(\widehat{u_{11}}, \widehat{p_1})$ et $(\widehat{u_{21}}, \widehat{p_2})$.

Proposition 3.4. *Le problème limite* (3.31) *a une solution unique* $(\widehat{u_{11}}, \widehat{u_{21}}) \in W_p$ *et* $(\widehat{p_1}, \widehat{p_2}) \in L_0^{p'}(\Omega_1) \times L_0^{p'}(\Omega_2)$ *avec la condition* (3.30).

Démonstration. Supposons que le problème limite (3.31) a au moins deux solutions $(\widehat{u_{11}}, \widehat{u_{21}}) \in W_p$, $(\widehat{p_1}, \widehat{p_2}) \in L_0^{p'}(\Omega_1) \times L_0^{p'}(\Omega_2)$ et $(\overline{\widehat{u_{11}}}, \overline{\widehat{u_{21}}}) \in W_p$, $(\overline{\widehat{p_1}}, \overline{\widehat{p_2}}) \in L_0^{p'}(\Omega_1) \times L_0^{p'}(\Omega_2)$. En particulier, $(\widehat{u_{11}}, \widehat{u_{21}})$, $(\widehat{p_1}, \widehat{p_2})$ et $(\overline{\widehat{u_{11}}}, \overline{\widehat{u_{21}}})$, $(\overline{\widehat{p_1}}, \overline{\widehat{p_2}})$ sont solution de la formulation faible (3.33). Alors

$$\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega_1} \left|\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y} \frac{\partial(\widehat{v_{11}} - \partial \widehat{u_{11}})}{\partial y} dxdy + \frac{\sqrt{2}}{2} g_1 \int_{\Omega_1} \left|\frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y}\right| dxdy$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} g_1 \int_{\Omega_1} \left|\frac{\partial \widehat{u_{11}}}{\partial y}\right| dxdy + \frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega_2} \left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y} \frac{\partial(\widehat{v_{21}} - \partial \widehat{u_{21}})}{\partial y} dxdy$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2} g_2 \int_{\Omega_2} \left|\frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y}\right| dxdy - \frac{\sqrt{2}}{2} g_2 \int_{\Omega_2} \left|\frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y}\right| dxdy$$

$$\geq \int_{\Omega_1} \widehat{f_{11}}(\widehat{v_{11}} - \widehat{u_{11}}) dxdy - \int_{\Omega_1} \frac{d\widehat{p_1}}{dx}(\widehat{v_{11}} - \widehat{u_{11}}) dxdy$$

$$+\int_{\Omega_2} \widehat{f_{21}}(\widehat{v_{21}} - \widehat{u_{21}}) dxdy - \int_{\Omega_2} \frac{d\widehat{p_2}}{dx}(\widehat{v_{21}} - \widehat{u_{21}}) dxdy \quad \forall (\widehat{v_{11}}, \widehat{v_{21}}) \in W_p. \tag{3.35}$$

et

$$\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega_1} \left|\frac{\partial \overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}\right|^{p-2} \frac{\partial \overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y} \frac{\partial(\widehat{v_{11}} - \partial \overline{\widehat{u_{11}}})}{\partial y} dxdy + \frac{\sqrt{2}}{2} g_1 \int_{\Omega_1} \left|\frac{\partial \widehat{v_{11}}}{\partial y}\right| dxdy$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} g_1 \int_{\Omega_1} \left|\frac{\partial \overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}\right| dxdy + \frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}} \int_{\Omega_2} \left|\frac{\partial \overline{\widehat{u_{21}}}}{\partial y}\right|^{p-2} \frac{\partial \widehat{u_{21}}}{\partial y} \frac{\partial(\widehat{v_{21}} - \partial \overline{\widehat{u_{21}}})}{\partial y} dxdy$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2} g_2 \int_{\Omega_2} \left|\frac{\partial \widehat{v_{21}}}{\partial y}\right| dxdy - \frac{\sqrt{2}}{2} g_2 \int_{\Omega_2} \left|\frac{\partial \overline{\widehat{u_{21}}}}{\partial y}\right| dxdy$$

$$\geq \int_{\Omega_1} \widehat{f_{11}}(\widehat{v_{11}} - \overline{\widehat{u_{11}}}) dxdy - \int_{\Omega_1} \frac{d\overline{\widehat{p_1}}}{dx}(\widehat{v_{11}} - \overline{\widehat{u_{11}}}) dxdy$$

$$+\int_{\Omega_2} \widehat{f_{21}}(\widehat{v_{21}} - \overline{\widehat{u_{21}}}) dxdy - \int_{\Omega_2} \frac{d\overline{\widehat{p_2}}}{dx}(\widehat{v_{21}} - \overline{\widehat{u_{21}}}) dxdy \quad \forall (\widehat{v_{11}}, \widehat{v_{21}}) \in W_p. \tag{3.36}$$

En employant $\widehat{v_{11}} = \overline{\widehat{u_{11}}}$, $\widehat{v_{21}} = \overline{\widehat{u_{21}}}$ et $\widehat{v_{11}} = \widehat{u_{11}}$, $\widehat{v_{21}} = \widehat{u_{21}}$ comme fonctions de test dans (3.35) et (3.36), respectivement. En soustrayant les deux inégalités obtenues, on peut déduire

$$\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_1}\left(\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}-\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right)\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})}{\partial y}dxdy$$

$$+\frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_2}\left(\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{21}}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\overline{\widehat{u_{21}}}}{\partial y}-\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|^{p-2}\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right)\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})}{\partial y}dxdy$$

$$\leq\int_{\Omega_1}\frac{d(\widehat{p_1}-\overline{\widehat{p_1}})}{dx}(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})dxdy+\int_{\Omega_2}\frac{d(\widehat{p_2}-\overline{\widehat{p_2}})}{dx}(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})dxdy. \tag{3.37}$$

Observez que pour chaque x, $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(|x|^{p-2}x-|y|^{p-2}y\right)(x-y)\geq c\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}},\ 1<p\leq 2.$$

Cela conduit, en utilisant (3.37), à

$$\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\left|\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})}{\partial y}\right|^2}{\left(\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|\right)^{2-p}}dxdy+\frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\left|\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})}{\partial y}\right|^2}{\left(\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{21}}}}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|\right)^{2-p}}dxdy$$

$$\leq\int_{\Omega_1}\frac{d(\widehat{p_1}-\overline{\widehat{p_1}})}{dx}(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})dxdy+\int_{\Omega_2}\frac{d(\widehat{p_2}-\overline{\widehat{p_2}})}{dx}(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})dxdy$$

$$=\int_0^1\left[\frac{d(\widehat{p_1}-\overline{\widehat{p_1}})}{dx}\int_0^{h_1(x)}(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})dy\right]dx$$

$$+\int_0^1\left[\frac{d(\widehat{p_2}-\overline{\widehat{p_2}})}{dx}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)}(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})dy\right]dx.$$

L'utilisation de (3.30) donne

$$\frac{\mu_1}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_1}\frac{\left|\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{11}}}-\widehat{u_{11}})}{\partial y}\right|^2}{\left(\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{11}}}}{\partial y}\right|+\left|\frac{\partial\widehat{u_{11}}}{\partial y}\right|\right)^{2-p}}dxdy+\frac{\mu_2}{2^{\frac{p}{2}}}\int_{\Omega_2}\frac{\left|\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{21}}}-\widehat{u_{21}})}{\partial y}\right|^2}{\left(\left|\frac{\partial\overline{\widehat{u_{21}}}}{y}\right|+\left|\frac{\partial\widehat{u_{21}}}{\partial y}\right|\right)^{2-p}}dxdy=0. \tag{3.38}$$

Ce qui donne, en gardant à l'esprit (3.38)

$$\left(\frac{\partial(\overline{\widehat{u_{11}}} - \widehat{u_{11}})}{\partial y}, \frac{\partial(\overline{\widehat{u_{21}}} - \widehat{u_{21}})}{\partial y}\right) = (0, 0).$$

Depuis $\left(\overline{\widehat{u_{11}}}(x, h_1(x)), \overline{\widehat{u_{21}}}(x, h_2(x))\right) = (\widehat{u_{11}}(x, h_1(x)), \widehat{u_{21}}(x, h_2(x))) = (0, 0)$, on en déduit que $(\overline{\widehat{u_{11}}}, \overline{\widehat{u_{21}}}) = (\widehat{u_{11}}, \widehat{u_{21}})$ a.e. dans $\Omega_1\times\ \Omega_2$. Enfin, pour prouver l'unicité de la pression, nous utilisons l'équation (3.31), avec les deux pressions $(\widehat{p_1}\ , \overline{\widehat{p_1}}\ )$ et $(\widehat{p_2}\ , \overline{\widehat{p_2}}\ )$.

Nous trouvons

$$\frac{d(\widehat{p_1} - \overline{\widehat{p_1}})}{dx} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d(\widehat{p_2} - \overline{\widehat{p_2}})}{dx} = 0.$$

Ensuite, en raison du fait que $(\widehat{p_1}\ , \overline{\widehat{p_1}}\ ) \in L_0^{p'}(\Omega_1) \times L_0^{p'}(\Omega_1)$, $(\widehat{p_2}\ , \overline{\widehat{p_2}}\ ) \in L_0^{p'}(\Omega_2) \times L_0^{p'}(\Omega_2)$ le résultat peut être facilement déduit. $\square$

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

DAns cette thèse, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de transmission entre deux fluides de Herschel-Bulkley incompressibles, rigides et viscoplastiques dans une couche mince bidimensionnel en régime stationnaire, en supposant que les coefficients caractéristiques des deux fluides sont différents et en imposant à l'interface de contact fluide-fluide des conditions aux limites de transmission naturelle, c'est-à-dire continuité des vitesses et continuité des contraintes, ainsi que des conditions sur l'une des deux bords de la couche mince.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle (où l'inéquation de la formulation variationnelle), et on utilise les techniques sur les inéquations variationelles avec opérateurs monotones et fonctionnelles convexes introduir dans [11] pour obtenir l'existence et l'unicité d'une solution faible.

L'étude de comportement asymptotique d'un problème mécanique de transmission entre deux fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Herschel-Bulkley dans une couche mince bidimensionnelle en régime stationnaire avec des viscosités différentes, et les conditions aux limites de transmission naturelles à l'interface de contact fait une partie très imprortant dans cette thèse.

Travaux perspectives

1. En considérant le cas où les coefficients caractéristiques des deux fluides sont différents et variantes.
2. Donne une méthode dans laquelle nous pouvons trouver les paramètres de Herschel-Bulkley expérimentalement.
3. En considérant le phénomène péristaltique avec le fluide de Herschel-Bulkley.
4. L'étude d'un problème mécanique de transmission entre deux fluides incompressibles, rigides et viscoplastiques de Herschel-Bulkley dans une couche mince tridimensionnel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. S. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, 1975.

[2] G. Allaire. Homogenization of the navier-stokes equations with a slip boundary condition. *Comm. Pure Appl.Math.*, 44(6) :605–641, 1991.

[3] P. Apanastasiou. Flow of materials with yield. *J. of Rheology*, 31(5) :385–404, 1987.

[4] A. Assemien, Bayada G, and M. Chambat. Inertial effects in the asymptotic behaviour of a thin film flow. *Asymptotic Analysis*, (9) :117–208, 1994.

[5] G. Bayada and M. Chambat. The trannsition between the stokes equations and the reynolds equation : a mathematical proof. *Appl. Math. and Opt.*, 14 :73–93, 1986.

[6] G. Bayada, M. Chambat, and S.R. Gamouana. About thin film micropolar asymptotic equations. *Quart. Appl. Math.*, 59(3) :413–439, 2001.

[7] N. Benhaboucha. *Quelques problèmes mathématiques délatifs à la modélisation des conditions aux limites fluide-solide pour des écoulements de faible épaisseur.* PhD thesis, Université Claude Bernard, Lyon, 2003.

[8] H. Benseridi, Y. Letoufa, and M. Dilmi. On the asymptotic behavior of an interface

problem in a thin domain. *M. Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys.*, pages 1–10, 2019.

[9] F. Boughanim, M Boukrouche, and H. Smaoui. Asymptotic behavior of a non-newtonian flow with stick-slip condition. *Electronic Journal of Differential Equations*, conference 11 :17–80, 2004. 2004-Fez Conference on Differential Equations and Mechanics.

[10] A. Bourgeat and A. Mikelic. Tapiéro, r., dérivation des equations moyennées décrivant un ecoulement non newtonien dans un domaine de faible epaisseur. *C. R. Acad.*, 316(I) :965–970, 1993.

[11] H. Brezis. Equations et inéquations non linéaires dans les espaces en dualité. *Annale de l'Institut Fourier*, 30 :115–175, 1969.

[12] R. Bunoiu and S. Kesavan. Fluide de bingham dans une couche mince. *Annals of university of Craiova, Maths. Comp. Sci. Ser*, 30 :71–77, 2003.

[13] R. Bunoiu and S. Kesavan. Asymptotic behavior of a bingham fluid in thin layers. *J. Math. Anal. Appl.*, 293(2) :405–418, 2004.

[14] R. Bunoiu and J. Saint Jean Paulin. Nonlinear viscous flow through a thin slab in the lubrification case. *Rev. Roum. Math. Pures et Appliquées*, 45(4) :577–591, 2000.

[15] L. Chupin. *Modélisation et Analyse mathématique en films minces.* Institut Camille Jordan-INSA de Lyon, 2009.

[16] P. G. Ciarlet. *Elasticité Tridimensionnelle.* Paris, 1986.

[17] N. Cristescu. On the optimum die angle in fast wire drawing. *J. Mech. Work. Tech*, 3(3-4) :275–287, 1980.

[18] M. Dilmi and H. Benseridi. Variational formulation and asymptotic analysis of viscoelastic problem with riemann-liouville fractional derivatives. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(3) :1–20, 2021.

[19] G. Duvaut and J.L. Lions. *Les Inéquations en Mécanique et en physique*. Paris, 1976.

[20] I. Ekeland and R. Temam. *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*. Paris, 1974.

[21] M. Fortin. *Calcul Numérique des Ecoulement des Fluides de Bingham et des Fluides Newtoniens Incompressibles par la Méthode des Eléments Finis*. PhD thesis, University of paris VI, 1976.

[22] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element approximation of the Navier Stokes equation*. Springer-Verlag, 1979.

[23] N. Hemici and A. Matei. A frictionless contact problem with adhesion between two elastic bodies. *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, 30 :90–99, 2003.

[24] R. Ionescu and M. Sofonea. The blocking property in the study of the bingham fluid. *Int. J. Engn, Sci.*, 24(3) :289–297, 1986.

[25] R. Ionescu and M. Sofonea. *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*. Oxford University Press, 1993.

[26] Y. Kato. Variational ienqualities of bingham type in three dimensions. *Nagoya Math*, 129 :53–95, 1993.

[27] Y. Letoufa, H. Benseridi, and M. Dilmi. Asymptotic study of a frictionless contact problem between two elastic bodies. *J. Math. Computer Sci.*, 16 :336–350, 2016.

[28] J. L. Lions. *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*. Paris, 1966.

[29] W. G. Litvinov. *Models for Laminar and Turbulent Flows of Viscous and Nonlinear Viscous Fluids*, volume 291. Recent developments in theoretical fluid mechanic, Longman Scientific ad Technical, Galdi, J.P. et Necas, J. (éd.), 1992.

[30] K. F. Liu and C.C. Mei. Approximate equations for the slow spreading of a thin sheet of bingham plastic fluid, phys. *Fluids A*, 2(1) :30–36, 1990.

[31] J. Málek. Mathematical properties of flows of incompressible power-law-like fluids that are described by implicit constitutive relations. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 31 :110–125, 2008.

[32] J. Málek, M. Růžička, and V.V. Shelukhin. Herschel-bulkley fluids, existence and regularity of steady flows, maths. *Models Methods Appl. Sci.*, 15(12) :1845–1861, 2005.

[33] F. Messelmi. Effects of the yield limit on the behaviour of herschel-bulkley fluid. *Nonlinear Sci. Lett. A.*, 2(3) :137–142, 2011.

[34] F. Messelmi and B. Merouani. Flow of herschel-bulkley fluid through a two dimensional thin layer. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math*, 58(1) :119–130, 2013.

[35] F. Messelmi, B. Merouani, and F. Bouzeghaya. Steady-state thermal herschel-bulkley flow with tresca's friction law. *Electronic Journal of Differential Equations.*, 2010(46) :1–14, 2010.

[36] A. Mikelic and R. Tapiero. Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin slab. *M2 A.N.*, 29 :3–22, 1995.

[37] A. Mikelic and R. Tapiéro. Mathematical derivation of the power law describing polymer flow through a thin layer. *A*, 29 :3–22, 1995.

[38] E. Mitoulis. Flows of viscoplastic materials : models and computations. *Rheology Reviews, Freeman Press*, pages 135–178, 2007.

[39] S.A. Nazarov. Asymptotic solution of the navier-stokes problem on the flow of a thin layer of fluid. *Siberian Math. J.*, 31 :296–307, 1990.

[40] A. Perelomova. Acoustic heating produced in the thermoviscous bingham plastic. *Central European Journal of Physisc*, 19 :138–145, 2011.

[41] K. Raju. *Fluid Mechanics, Heat Transfer, and Mass Transfer*. Wiley, 2011.

[42] A. Saadallah, H. Benseridi, and M. Dilmi. Asymptotic convergence of a generalized non-newtonian fluid with tresca boundary conditions with tresca boundary conditions. *Acta Mathematica Scientia*, 40(3) :700–712, 2020.

[43] A. Saadallah, H. Benseridi, M. Dilmi, and S. Drabla. Estimates for asymptotic convergence of a non-isothermal linear elasticity with friction. *Georgian Math. J.*, 23(3) :435–446, 2016.

[44] S. Saf, F. Messelmi, and K. Mosbah. Transmission problme between two herschel-bulkley fluids in thin layer. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math*, Accepted paper, 2021.

[45] F. Saidi. *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes et incompressibles avec des conditions aux bords non linéaires*. PhD thesis, Université Jean Monnet-Saint-Etienne, 2004.

[46] M. Selmani. *Etude Mathématiques de Quelques Problèmes aux limites en Mécanique de Contact*. PhD thesis, Université de Sétif, 2012.

[47] M. Sofonea. Problèmes non linéaires dans la théorie de l'elasticité. Cours de magister de mathématiques appliquées, University de Sétif, 1993.

[48] J. Steffe. *Rheological Methods in Food Process Engineering*. East Lansing, 1996.

[49] K. Taous. Equations de reynolds pour une large classe de fluides non-newtoniens. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 322(I) :1213–1218, 1995.