

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



**UNIVERSITE MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTE DES SCIENCES EXACTES ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES



**THESE**

Présentée par :

*Leulmi Soumya*

**Pour obtenir le titre de Doctorat Es-Sciences en mathématiques**

OPTION

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

**THEME**

*APPLICATION DE LA MÉTHODE DÉCOMPOSITIONNELLE SUR*

*LE PROBLÈME DE STEFAN INVERSE AVEC OPTIMISATION*

**Soutenu Le : 11/04/2021**

**Devant le jury composé de :**

Président : Mokhtari Zohir      Professeur      Université Mohamed Khider . Biskra

Rapporteur : Ayadi Abdelhamid      Professeur      Université Larbi Ben M'hidi. Oum El Bouaghi

Examineur : khelil Nacer      Professeur      Université Mohamed Khider . Biskra

Examineur : Rezoug Imed      M. C. A      Université Larbi Ben M'hidi. Oum El Bouaghi

**Année 2020—2021**

# Remerciements

Je loue ALLAH le tout puissant de m'avoir donné la vie, la santé et d'avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui. C'est grâce à lui que ce présent travail a vu le jour.

Je suis très reconnaissant à mon directeur de thèse monsieur A. Ayadi professeur à l'université Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi pour son soutien permanent durant toute la période du travail. Merci infiniment pour votre disponibilité et vos conseils qui m'ont beaucoup aidé pour mener à bien ce présent travail. Qu'il veuille bien croire à l'expression de ma haute considération.

J'adresse mes plus sincères remerciements et ma grande reconnaissance à monsieur Z. Mokhtari professeur à l'université Mohamed Khider Biskra, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Mes remerciements vont également aux messieurs N. Khalil maître de conférence classe A à l'université Mohamed Biskra et à I. Rezzoug maître de conférence classe A à l'université Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi, d'avoir accepté d'examiner ce travail de thèse qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens également à remercier vivement ma sœur Assma maître de conférence classe A à l'université de Sétif pour son aide, soutien, conseils et suivi.

Je tiens également à remercier vivement ma sœur Sara maître de conférence classe B à l'université de Constantine pour son aide, soutien, conseils et suivi.

Je remercie également mes enseignants depuis la maternelle jusqu'à l'université.

Je tiens à remercier vivement mon mari, mes parents, ma famille et mes amies qui ont su me soutenir et me supporter tout au long de mes études.

Finalement, je veux remercier tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin dans l'élaboration et la finalisation de ce travail.

# Dédicace

Je dédie ce modeste travail à

Mes très chers parents,

A mon père « Salah », le noble, l'homme sacrificiant et guerrier pour sa famille. Il est mon exemplaire dans la vie et il le restera à vie, je lui dédie avec fierté ce mémoire qui reflète le fruit de l'éducation et l'attention qu'il m'a tant réservé, je suis très reconnaissante et j'aurai tant aimé partager la joie de ma réussite avec lui.

Ma mère « Fatima », quoi que je fasse ou que je dise je ne saurai point te remercier comme se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différences obstacles

A ma chère grande mère maternelle « Baya », qu'Allah vous protège et vous donne de la santé, sans oublier ma grande mère paternelle « Khadîdja » qu'Allah bénisse son âme et fait son lieu de repos El Ferdows.

A mon mari, « Ahcen » et mes enfants, « Naoufel », « Hamza », « Mouad » et Takoua pour son soutien, sa compréhension et son sacrifice durant l'élaboration de cette thèse.

A mes chers et adorables sœurs et frères qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité. En témoignage de mon affection fraternelle, de ma profonde tendresse et reconnaissance, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de succès et que Dieu, le tout puissant, vous protège et vous garde.

A les familles « Leulmi », « Abed », « Boukadoum » et « Tourche Trouba ».

A tous mes collègues au niveau de l'université 20 aout 1955 skikda.

A tous ceux qui m'aiment, A tous ceux que j'aime, Je dédie le fruit de ma thèse de DOCTORAT.

# TABLE DES MATIÈRES

Résumé en anglais	v
Résumé en français	vii
Résumé en Arabe	ix
Acronymes	x
Introduction générale	1
<b>I Résolution du problème inverse de Stefan à deux phases</b>	<b>5</b>
<b>1 Méthode Décompositionnelle</b>	<b>6</b>
1.1 Concepts de base de la théorie décompositionnelle . . . . .	7
1.2 Convergence des schémas décompositionnels . . . . .	9
1.3 Schéma décompositionnel de base . . . . .	10
1.4 Présentation de la méthode décompositionnelle . . . . .	11
1.5 Méthode d'Adomian . . . . .	13

1.5.1	Description de la méthode . . . . .	13
1.5.2	Les polynômes d'Adomian . . . . .	15
1.5.3	Convergence de la méthode d'Adomian . . . . .	15
1.6	Méthode d'Adomian améliorée . . . . .	16
1.7	Méthode analytique d'homotopie . . . . .	17
1.7.1	Description de la méthode . . . . .	17
1.7.2	Analyse de convergence . . . . .	20
1.8	Méthode de perturbation d'homotopie . . . . .	21
1.8.1	Principe de la méthode . . . . .	22
1.8.2	Convergence de la méthode . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Application d'une méthode décompositionnelle sur le problème inverse de Stefan à deux phases</b>	<b>27</b>
2.1	Position du problème . . . . .	28
2.2	Résolution du problème inverse de Stefan par une méthode hybride avec optimisation . . . . .	31
2.3	Résolution du problème inverse de Stefan par la méthode analytique d'homotopie avec optimisation . . . . .	35
2.4	Méthode du gradient conjugué spectral modifiée de type Dai-Yuan . . . . .	38
2.4.1	Préliminaire . . . . .	38
2.4.2	Principe de la méthode . . . . .	41
2.4.3	Algorithme de la méthode MSDYCG . . . . .	41
2.4.4	Analyse de Convergence . . . . .	43
2.5	Simulation numérique . . . . .	45
2.6	Conclusion . . . . .	51

<b>II</b>	<b>Méthode projective de type Karmarkar en programmation linéaire via les fonctions minorantes</b>	<b>53</b>
<b>3</b>	<b>Généralités sur la programmation mathématique</b>	<b>54</b>
3.1	Notions préliminaires . . . . .	55
3.1.1	Ensemble et application affine . . . . .	55
3.1.2	Ensembles convexes . . . . .	55
3.1.3	Cônes convexes . . . . .	56
3.1.4	Cône de récession . . . . .	56
3.1.5	Fonctions convexes . . . . .	57
3.2	Programme mathématique . . . . .	58
3.2.1	Qualification des contraintes . . . . .	60
3.2.2	Conditions nécessaires d'optimalité . . . . .	60
3.2.3	Existence et unicité d'une solution d'un $(PM)$ . . . . .	62
3.2.4	Fonction de Lagrange et dualité lagrangienne . . . . .	62
3.3	Programmation linéaire . . . . .	63
3.3.1	Formes usuelles d'un programme linéaire . . . . .	64
3.3.2	Dualité en programmation linéaire . . . . .	65
3.3.3	Résolution d'un programme linéaire . . . . .	67
3.4	Méthode projective de Karmarkar . . . . .	70
3.4.1	Problème linéaire traité par Karmarkar . . . . .	70
3.4.2	Algorithme de Karmarkar . . . . .	71
3.4.3	Fonction potentiel & convergence . . . . .	74
3.5	Etude des performances de l'algorithme de Karmarkar (calcul de la projection $p_k$ ) . . . . .	74
3.5.1	Généralisation de l'algorithme de Karmarkar . . . . .	76
3.6	Calcul d'une solution initiale strictement réalisable . . . . .	77

<b>4</b>	<b>Adaptation des fonctions minorantes dans la méthode projective de Karmarkar en programmation linéaire</b>	<b>79</b>
4.1	Position du problème . . . . .	82
4.2	Généralisation du problème de base . . . . .	83
4.3	Calcul du pas de déplacement par la technique des fonctions minorantes . . . . .	84
4.3.1	La fonction potentiel . . . . .	84
4.3.2	Description de l'algorithme : . . . . .	85
4.3.3	Calcul du pas de déplacement . . . . .	89
4.3.4	Description de l'algorithme . . . . .	92
4.4	La convergence de l'algorithme . . . . .	93
4.5	Tests numériques . . . . .	94
4.5.1	Exemples de tailles fixes . . . . .	94
4.5.2	Exemple de taille variable . . . . .	99
4.6	Conclusion . . . . .	99
	<b>Conclusion générale et Perspectives</b>	<b>101</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>104</b>

---

## Résumé en anglais

This work is divided in two essential parts : The first is the resolution of two-phase Stefan inverse problem where the displacement interface is unknown. We apply two methods :The hybrid one which combine the homotopy perturbation method with the improved Adomian one. the second one is the homotopy analysis method. With both methods, we got to an optimization problem.

In the second part, we are interested in the interior point method which solves the problem of linear programming. Indeed, the calculation cost of the displacement step plays an important role in the behavior of the algorithm. In this sense, we propose in this thesis an approach in which, we introduce an original procedure for the computation of the displacement step based on the minor functions : We obtain an explicit approximation leading to a significant reduction of in calculation cost, moreover it is economical and robust, unlike Karmarkar's methods.

The numerical experiments we have carried out are encouraging and highlight the performance of our approach.

---

**Keywords** : Decompositional method, homotopy analysis method, homo-



## Abstract

---

topy perturbation method, improved Adomian method, interior point method, Karmarkar method, linear programming, minorante function, Stefan inverse problem.

Le travail que nous présentons dans cette thèse est divisé en deux parties essentielles : La première est la résolution par les méthodes décompositives du problème inverse de Stefan à deux phases où l'interface de déplacement est inconnue. Deux approches sont appliquées : Une méthode hybride combinant la méthode de perturbation d'homotopie et la méthode d'Adomian améliorée, la seconde est une méthode analytique d'homotopie. Pour les deux méthodes nous aboutissons à un problème d'optimisation.

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons en particulier aux performances d'une méthode de points intérieurs qui résout le problème de programmation linéaire. En effet, le calcul économique du pas de déplacement joue un rôle important dans le comportement des algorithmes. Dans cette optique, Nous proposons dans cette thèse une approche dans laquelle, nous introduisons une procédure originale pour le calcul du pas de déplacement basée sur les fonctions minorantes, et qui nous permet d'obtenir une approximation explicite entraînant une décroissance significative de l'objectif. De plus, cette approche est économique et robuste, contrairement aux méthodes de Karmarkar.

---

## Résumé

---

**Mots clés :** Fonction minorante, méthode analytique d'homotopie, méthodes décompositionnelles, méthode d'Adomian améliorée, méthode de Karmarkar, méthode de perturbation d'homotopie, méthode de points intérieurs, problème inverse de Stefan, programmation Linéaire.

### المخلص:

ينقسم عملنا إلى جزأين أساسيين: في الجزء الأول قمنا بحل المسألة العكسية لستيفان ذات واجهتين باستعمال طرق التفكير حيث أن واجهة الانتقال مجهولة. من أجل ذلك طبقنا طريقتين هما: الأولى طريقة هجينة تجمع بين طريقة الاضطراب المتماثل أو الاضطراب الهوموطوبي والثانية طريقة الهوموطوبيا التحليلية. وفي كلتا الطريقتين حصلنا على مسألة الأمثلية أو التحسين.

في الجزء الثاني، اهتمنا بشكل خاص بتطبيق طريقة النقاط الداخلية التي تحل مسألة البرمجة الخطية. في الواقع، يلعب الحساب الاقتصادي لخطوة الانتقال دورا مهما في سلوك الخوارزميات. من هذا المنظور، اقترحنا في أطروحتنا هذه تقنية جديدة لحساب خطوة الانتقال بالاعتماد على تقنية الدوال الحدية السفلى واستعمالها في إحد بالطرق لحل مسائل البرمجة الخطية وقد نتج عن هذا انخفاض معتبر في عدد الخطوات. علاوة على ذلك، تعتبر هذه التقنية اقتصادية وقوية على عكس أساليب كارماركار. عززنا دراستنا هذه بتجارب عديدة مختلفة هامة.

### الكلمات المفتاحية:

طريقة الهوموطوبي التحليلية، طريقة الاضطراب الهوموطوبي، طرق التفكير، طريقة ادوميان المعدلة، مسألة العكسية لستيفان، البرمجة الخطية، الدوال الحدية السفلية، طريقة كارماركار، خطوة الانتقال.

**Acronymes**

<b>Abréviation</b>	<b>Signification</b>
ADM	Méthode d'Adomian
HAM	Méthode analytique d'homotopie
HPM	Méthode de perturbation d'homotopie
IADM	Méthode d'Adomian améliorée
PM	Programmation mathématique
PL	Programmation linéaire
MSDYCG	Méthode du gradient conjugué spectral modifiée de type Dai-Yuan

---

## Introduction générale

Les phénomènes de changement de phase sont fréquemment présents dans les processus naturels et dans un grand nombre d'applications industrielles tels que le traitement des matériaux, la croissance des cristaux, le stockage de l'énergie, la production et le stockage de la glace, la conservation et la congélation des aliments.

Ces phénomènes se caractérisent par l'apparition d'une interface mobile qui sépare les deux phases (liquide et solide). On les appelle problèmes à frontière libre. Ces derniers possèdent une frontière mobile au cours du temps qui est connue ou bien à déterminer.

En 1889, Josef Stefan [1835 – 1893] étudia pour la première fois ce problème désigné également par le problème à frontières libres ou mobiles. Depuis, il s'est connu sous le nom du problème de Stefan. Sa modélisation se fait par un processus mathématique à changement de phase, comme la solidification des métaux, la congélation du sol et de l'eau, la fonte de la glace, la croissance des cristaux, etc., dans lequel la chaleur de transition de phase est émise ou absorbée.

Il y a deux types de problème de Stefan. Le premier est le problème de Stefan direct qui consiste à trouver la distribution de température dans le

domaine et la position de l'interface mobile [17, 1984], [65, 1980]. Alors que le deuxième est le problème de Stefan inverse basant sur la reconstruction de la fonction qui décrit la distribution de la température à la frontière, lorsque la position des interfaces mobiles est connue. Ce type de problème devient un problème de conception inverse. (Les conditions d'existence et d'unicité de la solution à ces deux types de problème se trouvent dans la référence [30, 1997]).

De nombreuses recherches se sont concentrées sur la résolution des problèmes de Stefan [34, 2000]. Grzymkowski et Slota [32, 2005], [33, 2006] ont appliqué la méthode de décomposition d'Adomien (ADM) combinée à l'optimisation pour le cas direct et inverse monophasé [71, 2010], [41, 2015]. E. Hetmaniok et al. [39, 2011] ont utilisé la méthode de décomposition d'Adomien (ADM) et la méthode d'itération variationnelle pour les problèmes de Stefan avec limites de déplacement en une phase. Les recherches sur les problèmes de Stefan à deux phases sont beaucoup plus rares. Slota [72, 2011] a appliqué la méthode de perturbation de l'homotopie (HPM) pour résoudre le problème inverse de Stefan à deux phases. E. Hetmaniok et al. [38, 2010] ont résolu le problème de Stefan inverse à deux phases par la méthode analytique d'homotopie. Cependant, dans leur formulation, les problèmes de Stefan inverses à deux phases peuvent être résolus si la position de l'interface mobile est connue. Cependant, dans le cas où la position de l'interface mobile est inconnue ou dans le cas où aucune condition aux limites de température ou de flux de chaleur n'est spécifiée sur une partie de la frontière, le problème de Stefan inverse à deux phases est très intéressant. En effet, il devient proche du problème qui se produit dans la coulée continue. Yang Yu et al. [78, 2015] se sont concentrés sur la résolution du problème par une méthode hybride avec optimisation qui combine la méthode de pertur-

bation de l'homotopie (HPM) avec la méthode de décomposition d'Adomien améliorée (IADM).

Notre travail est divisé en deux parties :

Dans la première partie, nous résolvons le problème inverse de Stefan à deux phases lorsque la position de l'interface mobile est inconnue, nous appliquons les deux méthodes suivantes :

1) La méthode hybride avec optimisation qui combine la méthode de perturbation de l'homotopie (HPM) avec la méthode de décomposition d'Adomien améliorée (IADM) dans un espace de dimension infinie.

2) La méthode analytique d'homotopie avec optimisation qui joue un rôle très important. En effet, nous avons utilisé la méthode du gradient conjugué modifiée à cause de sa convergence bien connue. Nous a donné de bons résultats qu'on a publiés dans notre premier article édité par la revue internationale " Indian Journal of Mathematics " [50, 2020].

Dans la deuxième partie intitulée " Méthode barrière logarithmique via les fonctions minorantes " nous avons donné une nouvelle approche de la méthode projective de type Karmarkar en programmation linéaire. L'objectif de cette méthode est de remédier la difficulté de l'opération la plus coûteuse, dans les méthodes projectives de type Karmarkar, qui est le calcul de la projection. et réduire le coût d'itérations. Ainsi, nous proposons dans cette partie une approche pour laquelle, on introduit une procédure originale pour trouver la solution optimale (le calcul du pas de déplacement) basée sur les fonctions minorantes, et ceci en s'inspirant des travaux de A. Leulmi et al. [48, 2018] en programmation semi-définie linéaire, les résultats obtenus ont été publiés dans notre deuxième article dans la revue " East Asian Mathematical Journal " [51, 2019].

Le contenu de la thèse est organisé comme suit :



Nous débutons avec une introduction générale présentant les objectifs ainsi que le plan sommaire de la thèse. Le manuscrit s'achève par une conclusion générale et une liste de références établie à l'issue d'une recherche bibliographique.

Deux parties suivront l'introduction générale. La première se compose de deux chapitres : Le premier est consacré à la présentation des méthodes de décomposition, notamment, la méthode d'Adomian améliorée, la méthode analytique d'Homotopie et la méthode d'Homotopie perturbée. L'application des méthodes précédentes pour la résolution du problème inverse de Stefan à deux phases d'interface inconnue est présentée dans le deuxième chapitre.

La deuxième partie de la thèse contient les deux chapitres qui suivent :

Le troisième chapitre donne un bref rappel sur l'analyse convexe ainsi que l'optimisation. Les propriétés fondamentales de la programmation linéaire y sont présentées ainsi avec un aperçu sur la méthode projective de Karmarkar considérée comme exemple de référence des méthodes de points intérieurs et qui servira d'appui pédagogique dans tout le contenu de la thèse.

Au quatrième chapitre, on propose une procédure originale basée sur l'idée des fonctions minorantes pour le calcul du pas de déplacement. Nous avons présenté à la fin de ce chapitre des tests numériques d'ordre comparatif entre notre approche (fonction minorante) afin de confirmer les propos théoriques.

Notre étude ouvre la voie à des perspectives intéressantes pour la généralisation de l'algorithme à d'autres classes de problèmes.

# Première partie

## Résolution du problème inverse de Stefan à deux phases

# CHAPITRE 1

## Méthode Décompositionnelle

### Sommaire

---

1.1	Concepts de base de la théorie décompositionnelle	7
1.2	Convergence des schémas décompositionnels . .	9
1.3	Schéma décompositionnel de base . . . . .	10
1.4	Présentation de la méthode décompositionnelle	11
1.5	Méthode d'Adomian . . . . .	13
1.6	Méthode d'Adomian améliorée . . . . .	16
1.7	Méthode analytique d'homotopie . . . . .	17
1.8	Méthode de perturbation d'homotopie . . . . .	21

---

La méthode décompositionnelle d'Adomian permet de résoudre des problèmes fonctionnels de différents types : équations algébriques, différentielles, intégrales, intégrales différentielles et aux dérivées partielles. La méthode s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires qu'aux problèmes non linéaires.

## 1.1 Concepts de base de la théorie décompositionnelle

Dans cette section, nous allons donner les notions fondamentales qui permettent de définir la méthode décompositionnelle et de solutionner tous types d'équations.

Soit  $E$  un espace de Banach.

**Définition 1.1** (*Série décompositionnelle*) On appelle série décompositionnelle toute série de fonctions  $\sum C_k$ , où chaque  $C_k$  est une fonction de  $(k + 1)$  variables de  $E : X_0, \dots, X_k$  à valeurs dans  $E$ .

**Définition 1.2** (*Convergence faible des séries décompositionnelles*) Une série décompositionnelle est dite faiblement convergente si pour toute série convergente  $\sum u_n$  d'éléments de  $E$ , la série  $\sum C_k(u_0, \dots, u_k)$  d'éléments de  $E$  converge.

**Définition 1.3** (*Somme d'une série décompositionnelle convergente*) La somme  $S$  d'une série décompositionnelle convergente est une application de l'ensemble des séries convergentes d'éléments de  $E$  dans  $E$  :

$$S\left(\sum u_n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(u_0, \dots, u_k).$$

**Définition 1.4** (*Convergence forte des séries décompositionnelles*) On appelle série décompositionnelle fortement convergente toute série décompositionnelle faiblement convergente dont la valeur de la somme ne dépend que de la somme de la série considérée, c'est-à-dire telle que :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n\right) \implies \left(S\left(\sum u_n\right) = S\left(\sum v_n\right)\right).$$

**Théorème 1.1** [27] *L'ensemble des séries décompositionnelles fortement convergentes possède une structure d'espace vectoriel.*

**Proposition 1.1** [27] *(Opérateur de  $E$  défini par une série décompositionnelle fortement convergente) On peut définir, à partir de la somme  $S$  d'une série décompositionnelle fortement convergente, un opérateur  $S^*$  dans  $E$  que l'on peut confondre avec  $S$ .*

**Justification :** Soit  $S$  la somme d'une série décompositionnelle fortement convergente. Alors, pour tout élément  $u$  de  $E$ , on peut définir  $S^*(u)$  par  $S(\sum u_i)$  avec  $\sum u_i$  série quelconque d'éléments de  $E$  ayant  $u$  pour somme. Comme série convergente de ce type, on peut prendre celle se réduisant à un seul terme égal à  $u$ . On a donc  $S^*(u) = S(u)$ .

**Définition 1.5** *(Schéma décompositionnel) Soit une série décompositionnelle fortement convergente  $\sum C_k(X_0, \dots, X_k)$ . On appelle schéma décompositionnel associé à  $\sum C_k$  schéma récurrent :*

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = C_n(u_0, \dots, u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

*qui permet de construire une série  $\sum u_n$  d'éléments de  $E$ .*

**Définition 1.6** *(Méthode décompositionnelle) On appelle méthode décompositionnelle la méthode consistant à construire la solution d'une équation à l'aide d'un schéma décompositionnel quelconque.*

## 1.2 Convergence des schémas décompositionnels

Soit  $\sum C_k(X_0, \dots, X_k)$  une série décompositionnelle quelconque fortement convergente vers  $S$ . L. Gabet prouve que la série  $\sum u_n$  définie par le schéma décompositionnel associé  $\sum C_k$  c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_1 = C_0(u_0) \\ u_2 = C_1(u_0, u_1) \\ \vdots \\ u_{n+1} = C_n(u_0, \dots, u_n), \end{array} \right.$$

soit convergente et sa limite est une solution de l'équation  $u = S(u)$  (en confondant  $S$  et  $S^*$ ).

**Théorème 1.2 [27]** (*Convergence des schémas décompositionnels*) *Le schéma décompositionnel, associé à une série décompositionnelle fortement convergente de somme  $S$ , converge vers  $U$  vérifiant  $U = S(U)$ , lorsque  $S$  est contractant.*

Notons au passage que :

**Proposition 1.2 [27]** *Les termes d'une série décompositionnelle convergente vérifient toujours les égalités de Cherruault :*

$$u_{n+1} = S_n(U_n) - S_{n-1}(U_{n-1}).$$

**Preuve.** On a en effet :

$$u_{n+1} = U_{n+1} - U_n = S_n(U_n) - S_{n-1}(U_{n-1}).$$

Ces relations constituent une extension de la définition des  $B_k$  (les  $S_n$  remplacent  $S$ ). ■

D'après ce qui précède, pour résoudre une équation  $u = G(u)$  avec  $G$  donné, il suffit de trouver une série décompositionnelle fortement convergente dont la somme est  $G$ . La solution  $U$  est alors obtenue par application du schéma décompositionnel associé à cette série.

### 1.3 Schéma décompositionnel de base

La méthode classique d'approximations successives résout les équations sous la forme :

$$u = G(u),$$

lorsque  $G$  satisfait les hypothèses du théorème de point fixe, elle constitue à réaliser l'itération :

$$U_{n+1} = G(U_n),$$

à partir d'un  $U_0$  quelconque. La suite  $(U_n)_n$  converge vers  $U$ , solution de :

$$u = G(u).$$

On va maintenant exprimer cette méthode sous une forme équivalente faisant appel aux séries décompositionnelles.

**Définition 1.7** (*Série décompositionnelle de base*) On appelle série décompositionnelle de base associée à l'opérateur  $G$ , la série  $\sum B_n$  dont les termes sont définis par :

$$\begin{aligned} B_0 &= G(X_0), \\ B_n &= G\left(\sum_{i=0}^n X_i\right) - G\left(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\right). \end{aligned}$$

**Théorème 1.3** [27](Convergence de la série décompositionnelle de base) La série décompositionnelle de base  $\sum B_n$  associée à l'opérateur continu  $G$  est une série décompositionnelle fortement convergente vers  $G$ .

**Théorème 1.4** [27](Équivalence décompositionnelle de base) Le schéma décompositionnel de base associé à l'opérateur  $G$  est équivalent au schéma d'approximations successives :

$$\begin{cases} U_0 = 0, \\ U_{n+1} = G(U_n). \end{cases}$$

Si  $G$  vérifie les hypothèses d'un théorème de point fixe, la suite  $(U_n)_n$  converge vers  $U$ , solution de notre équation, et donc la série  $\sum u_n$  converge et a pour somme ce même  $U$ . On a donc le théorème de convergence du schéma décompositionnel de base :

**Théorème 1.5** [27](Convergence du schéma décompositionnel de base) Le schéma décompositionnel de base associé à l'opérateur  $G$  converge si  $G$  vérifie les hypothèses du théorème de point fixe de Banach.

Il faut noter que, si  $G$  est non linéaire, le schéma décompositionnel de base ne présente aucun intérêt pratique puisqu'il nécessite alors deux fois plus de calculs que la méthode d'approximations successives.

## 1.4 Présentation de la méthode décompositionnelle

La méthode décompositionnelle a été développée par G.Adomian [3]. Elle est utilisée pour trouver des solutions des équations linéaires ou non linéaires qui ont la forme :

$$F(u) = g(t), \tag{1.1}$$



où  $F$  représente un opérateur non linéaire,  $g$  est une fonction connue et  $u$  est un élément à rechercher.

On peut écrire l'opérateur  $F$  comme suit :

$$F(u) = L(u) + R(u) + N(u), \quad (1.2)$$

Car, il possède des termes linéaires et non linéaires.

avec  $L$  est un opérateur linéaire inversible, on note  $L^{-1}$  son inverse

$R$  est le reste de l'opérateur linéaire

$N$  est un opérateur non linéaire

Pratiquement, on choisit pour  $L$  l'opérateur d'ordre le plus élevé et qui soit facilement inversible.

L'équation (1.1) devient :

$$Lu + Ru + Nu = g. \quad (1.3)$$

Comme, L'opérateur  $L$  est inversible, on a

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu, \quad (1.4)$$

Et l'expression équivalente sera :

$$u = \gamma + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (1.5)$$

où  $\gamma$  est la fonction qui satisfait  $L\gamma = 0$ . Si l'équation (1.5) correspond à un problème de valeur initiale, l'opérateur  $L^{-1}$  est l'intégrale de 0 à  $t$ . Si  $L$  est un opérateur d'ordre deux, alors  $L^{-1}$  est l'opérateur d'intégration double défini par :

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^z \left( \int_0^s (\cdot) dv \right) ds,$$

et

$$L^{-1}Lu = u - u(0) - tu'(0).$$

A partir des conditions initiales connues, l'équation (1.4) devient :

$$u = u(0) + zu'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu. \quad (1.6)$$

On peut écrire le terme  $\gamma$  sous la forme générale

$$\gamma = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{w_i z^i}{i!} \text{ avec } w_i = \left. \frac{d^i x}{dz^i} \right|_{t=0}.$$

Lorsque  $L$  est un opérateur d'ordre  $r$  et les conditions initiales sont fixées.

Il y a plusieurs méthodes décompositionnelles. On s'intéresse dans ce travail aux méthodes suivantes :

- La méthode d'Adomian améliorée.
- La méthode d' Homotopie analytique.
- La méthode de perturbation d' Homotopie.

## 1.5 Méthode d'Adomian

La méthode décompositionnelle d'Adomian est une méthode semi analytique qui a été développée par G. Adomian [3]. Elle consiste à trouver la solution sous forme d'une série. Cette méthode est utilisée pour résoudre des équations linéaires ou non linéaires.

### 1.5.1 Description de la méthode

On considère l'équation fonctionnelle (1.1) où  $F : H \rightarrow G$  est un opérateur non linéaire,  $g$  est un élément connu de l'espace de Hilbert  $G$  et  $u$  est l'élément recherché de l'espace de Hilbert  $H$ . L'opérateur  $F$  peut être écrit sous la forme (1.2). D'après la section précédente, l'équation (1.5) est vérifiée.

On va chercher la solution de l'équation (1.1) sous forme d'une série infinie comme suit :

$$u = \sum_{n \geq 0} g_n. \quad (1.7)$$

Le terme non linéaire  $N$  est assimilé à une série infinie :

$$N(u) = \sum_{n \geq 0} A_n. \quad (1.8)$$

Où les termes  $A_n$  sont appelés les polynômes d'Adomian, qui peuvent être déterminés grâce à la relation suivante :

$$\begin{cases} A_0 = N(g_0)_0, \\ A_n = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n}{d\lambda^n} N \left( \sum_{i \geq 0} \lambda^i g_i \right) \right], \quad n \geq 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

Tel que  $\lambda$  est un paramètre réel introduit par convenance.

En substituant (1.7) et (1.8) dans l'équation d'opérateur (1.5) et en utilisant l'opérateur inverse  $L^{-1}$ , on obtient :

$$\sum_{n \geq 0} g_n = \gamma + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1} \sum_{n \geq 0} A_n. \quad (1.10)$$

D'où on déduit :

$$\begin{cases} g_0 = \gamma + L^{-1}(g). \\ g_1 = -L^{-1}Rg_0 - L^{-1}RA_0. \\ g_2 = -L^{-1}Rg_1 - L^{-1}RA_1. \\ \vdots \\ g_{n+1} = -L^{-1}Rg_n - L^{-1}RA_n. \end{cases} \quad (1.11)$$

La relation (1.11) permet de calculer tous les termes de la série sans ambiguïté car les  $A_n$  ne dépendent que de  $u_0, u_1, \dots, u_n$ . En pratique, il est presque impossible de calculer la somme de la série  $\sum_{n \geq 0} g_n$ .

### 1.5.2 Les polynômes d'Adomian

**Définition 1.8** Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule :

$$\begin{cases} A_0 = N(g_0)_0, \\ A_n (g_0, g_1, \dots, g_n) = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^n}{d\lambda^n} N \left( \sum_{i \geq 0} \lambda^i g_i \right) \right], \quad n \geq 1. \end{cases}$$

La formule proposée par G. Adomian pour le calcul des polynômes d'Adomian  $(A_n)_{n \geq 0}$  est la suivante [2] :

$$\begin{aligned} A_0 (g_0) &= N(g_0), \\ A_1 (g_0, g_1) &= g_1 \frac{\partial}{\partial u} N(g_0), \\ A_2 (g_0, g_1, g_2) &= g_2 \frac{\partial}{\partial u} N(g_0) + \frac{1}{2!} g_1^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(g_0), \\ A_3 (g_0, g_1, g_2, g_3) &= g_3 \frac{\partial}{\partial u} N(g_0) + g_1 g_2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} N(g_0) + \frac{1}{3!} g_1^3 \frac{\partial^3}{\partial u^3} N(g_0), \end{aligned}$$

Cette formule s'écrit sous la forme :

$$A_n = \sum_{\nu=0}^n c(\nu, n) N^{(\nu)}(g_0), \quad n \geq 1,$$

où  $c(\nu, n)$  représente la somme de tous les produits (divisées par  $m!$ ) des  $n$  termes  $g_i$  dont la somme des indices  $i$  est égales à  $n$ ,  $m$  étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

### 1.5.3 Convergence de la méthode d'Adomian

Dans les travaux de G. Adomian rien n'est justifié quant à la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} g_n$  ou, ce qui revient au même, à celle de  $\sum_{n \geq 0} A_n$ . Les premiers résultats de convergence sont basées sur la méthode du point fixe. Ils ont été cités par Yves Cherruault.

**Théorème 1.6** [14] *Si*

$$\sum_{n \geq 0} A_n < +\infty \text{ alors } \sum_{n \geq 0} g_n < +\infty,$$

*et réciproquement.*

On a le resultat de convergence suivant :

**Théorème 1.7** [14] *Si l'opérateur  $N$  est une contraction (c'est-à-dire qui vérifie  $\|N\| < \delta < 1$ ) alors la suite  $(S_n)_n$  satisfaisant la relation de récurrence*

$$S_{n+1} = N(u_0 + S_n), \quad n \geq 0 \text{ avec } S_0 = 0,$$

*converge vers  $S$  solution de  $S = N(u_0 + S)$ .*

Le théorème (1.7) montre que la série  $\sum_{n \geq 0} g_n$  converge, donc, on a le résultat suivant :

**Corollaire 1.1** *Si  $N$  est une contraction alors les séries des  $g_n$  et des  $A_n$  sont convergentes. De plus,  $\sum_{n \geq 0} g_n$  est solution de l'équation*

$$Fu = g.$$

## 1.6 Méthode d'Adomian améliorée

La méthode de décomposition d'Adomian a été présentée par Adomian [3]. Elle a été utilisée pour résoudre une grande variété de problèmes linéaires et non linéaires. Plusieurs autres chercheurs ont mis au point une modification de l'ADM [4]. La modification est généralement légère et vise à améliorer la précision de la solution en série.

On a toujours dans le cas de résolution de l'équation (1.1) d'opérateurs non linéaires [53] qui a la forme :

$$F(u) = g.$$

La méthode de décomposition d'Adomian améliorée [4] est basée sur l'hypothèse que la fonction

$$y = \gamma + L^{-1}(g),$$

peut être divisée en deux parties, à savoir,  $y_1$  et  $y_2$ .

Sous cette hypothèse, l'équation suivante peut être obtenue :

$$y = y_1 + y_2. \quad (1.12)$$

En conséquence, une légère variation est proposée sur les composants  $g_0$  et  $g_1$ . On suggère que seule la partie  $y_1$  soit affectée au composant  $g_0$ , tandis que la partie restante  $y_2$  est combinée à d'autres termes donnés dans (1.12) pour définir  $g_1$ .

Par conséquent, la relation récursive s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} g_0 &= y_1. \\ g_1 &= y_2 - L^{-1}(R(g_0)) - L^{-1}(A_0). \\ g_{n+2} &= -L^{-1}(R(g_{n+1})) - L^{-1}(A_{n+1}), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

## 1.7 Méthode analytique d'homotopie

La méthode analytique d'homotopie a été développée dans les années 90, son auteur est Shijun Liao [54], [56] et elle appartient au groupe de méthodes analytiques. Elle a été appliquée pour résoudre de nombreux problèmes formulés à l'aide des équations différentielles ordinaires et partielles, y compris les problèmes de conduction thermique [41].

### 1.7.1 Description de la méthode

Pour illustrer le concept de base de cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$N(v(z)) = 0, \quad z \in \Omega, \quad (1.13)$$

avec  $N$  est un opérateur et  $v$  exprime la fonction recherchée.

Au début, On construit une homotopie  $\phi : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , qui satisfait

$$H(\phi, p) = (1 - p)L(\phi(z, p) - v_0(z)) - phN(\phi(z, p)) = 0, \quad (1.14)$$

où  $p \in [0, 1]$  est le paramètre d'intégration,  $h \neq 0$  dénote le paramètre de contrôle de convergence,  $v_0$  décrit l'approximation initiale de la solution du problème (1.13) et  $L$  est l'opérateur auxiliaire linéaire qui vérifie la propriété  $L(0) = 0$ .

En considérant l'équation  $H(\phi, p) = 0$ , on obtient l'équation de déformation d'ordre-zéro suivante :

$$(1 - p)L(\phi(z, p) - v_0(z)) = phN(\phi(z, p)) \quad (1.15)$$

D'après l'équation (1.14) on a :

$$H(\phi, 0) = L(\phi(z, 0) - v_0(z)) = 0, \quad (1.16)$$

$$H(\phi, 1) = hN(\phi(z, 1)) = 0. \quad (1.17)$$

Comme l'opérateur  $L$  est linéaire, on peut trouver selon l'équation (1.16) que :

$$\phi(z, 0) = v_0(z).$$

Or, de l'équation (1.17) on aura :

$$\phi(z, 1) = v(z),$$

Le changement de  $p$  de zéro à l'unité correspond au changement de problème de la forme triviale à la forme donnée à l'origine (ce qui signifie la transformation de la solution de  $v_0(z)$  à  $v(z)$ ). En topologie avec cette dernière propriété, la fonction  $\phi(z, p)$  est appelée homotopie. Selon la méthode

HAM, on peut utiliser le paramètre  $p$  comme un petit paramètre et on suppose que la solution de l'équation (1.14) peut être écrite comme une série de puissances de  $p$ .

On développe la fonction  $\phi$  en série de Maclaurin par rapport au paramètre  $p$ , alors

$$\phi(z, p) = \phi(z, 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(z, p)}{\partial p^m} \right|_{p=0} p^m. \quad (1.18)$$

On introduit la notation

$$v_m(z) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(z, p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1.19)$$

La relation précédente peut être décrite de la manière suivante :

$$\phi(z, p) = v_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} v_m(z) p^m \quad (1.20)$$

Si la série ci-dessus est convergente dans la région appropriée, alors pour  $p = 1$  on obtient la solution souhaitée :

$$v(z) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(z) \quad (1.21)$$

Afin de déterminer la fonction  $v_m$ , on dérive  $m$  fois le côté gauche et le côté droit de la relation (1.15) par rapport au paramètre  $p$ . Le résultat obtenu est divisé par  $m!$  et ensuite, en remplaçant par  $p = 0$ , nous obtenons l'équation de déformation dite d'ordre  $m$  ( $m > 0$ ) :

$$L(v_m(z) - \chi_m v_{m-1}(z)) = hR_m(\bar{v}_{m-1}, z), \quad (1.22)$$

avec

$$\bar{v}_{m-1} = \{v_0(z), v_1(z), \dots, v_{m-1}(z)\},$$

$$\chi_m = \begin{cases} 1 & m > 1 \\ 0 & m \leq 1 \end{cases}$$



et

$$R_m(\bar{v}_{m-1}, z) = \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}} N \left( \sum_{i=0}^{\infty} v_i(z) p^i \right) \right) \Big|_{p=0}. \quad (1.23)$$

En cas où la somme de séries (1.21) est difficile ou impossible à déterminer, nous pratiquons à l'utilisation de la solution approchée de l'équation considérée sous la forme de somme partielle de série (1.21) :

$$\hat{v}_n(z) = \sum_{m=0}^n v_m(z). \quad (1.24)$$

La solution approximative de l'équation (1.13) devient

$$v = \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{v}_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(z). \quad (1.25)$$

Dans la plupart des cas, la série donnée par (1.25) est convergente, mais le taux de convergence dépend de l'opérateur non linéaire.

Le choix de la valeur du paramètre de contrôle de convergence  $h$  est basé sur la méthode d'optimisation. Pour cela, nous définissons le résidu carré suivant :

$$E_n(h) = \int_{\Omega} (N(\hat{v}_n(z)))^2 dz. \quad (1.26)$$

La minimisation du résidu carré ci-dessus dans la région définie par :

$$R_h = \left\{ h : \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(h) = 0 \right\},$$

donne la valeur optimale de  $h$ .

Il existe de nombreuses méthodes pour déterminer la valeur du paramètre de contrôle de convergence  $h$ . Dans notre travail, nous avons utilisé la méthode d'optimisation.

### 1.7.2 Analyse de convergence

M. Turkyilmazoglu [73] et Zaid M. Odibat [64] ont étudié la convergence de la méthode HAM.

**Théorème 1.8** [73] *Soit  $A$  un espace de Banach muni de la norme  $\|\cdot\|$ , sur laquelle la suite  $(v_k(t))_k$  soit définie, pour une valeur prescrite de  $h$ . On suppose également que l'approximation initiale  $u_0(t)$  reste à l'intérieur de la boule de la solution  $u(t)$ .*

1. *S'il existe un  $\gamma_h \in ]0, 1[$  tel que*

$$\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \|v_{k+1}(t)\| \leq \gamma_h \|v_k(t)\|,$$

*alors, la série  $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$  est absolument convergente sur le domaine de définition de  $t$ .*

2. *Si  $\|v_{k+1}(t)\| \geq \gamma_h \|v_k(t)\|$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et certains  $\gamma_h \geq 1$  alors, la série  $\sum_{k=0}^{\infty} v_k(t)$  diverge sur le domaine de définition de  $t$ .*

**Théorème 1.9** [73] *Si la série définie dans (1.25) est convergente, alors il converge vers la solution exacte du non-linéaire problème (1.1).*

**Théorème 1.10** [64] *Si le paramètre  $h$  est sélectionnée de manière à ce que la série définie dans (5) est convergente et sa somme partielle  $\sum_{k=0}^M v_k(t)$  est utilisée comme approximation de la solution  $u(t)$  du problème (1.13), alors l'estimation de l'erreur est donnée par*

$$E_M(t) \leq \frac{\gamma_h^{M+1}}{1 - \gamma_h} \|v_0(t)\|.$$

## 1.8 Méthode de perturbation d'homotopie

La méthode de perturbation d'homotopie est une proposition du mathématicien Ji-Haun-He en 1999 [35] et c'est toujours lui qui l'a ensuite développée en 2004 [36] puis en 2006 [37]. Cette méthode est largement utilisée pour la résolution des problèmes de frontière non-linéaire et à valeur initiale.

Elle résulte de la combinaison de la théorie de l'homotopie dans la topologie avec la théorie de la perturbation. La méthode de perturbation d'homotopie est un outil mathématique puissant pour l'étude d'une grande variété de problèmes apparaissant dans différents domaines. La caractéristique importante de la méthode de perturbation d'homotopie est qu'elle fournit une solution presque exacte à un large éventail de problèmes linéaires et non-linéaires, sans la nécessité d'hypothèses irréalistes, la linéarisation, la discrétisation et le calcul des polynômes Adomian en 2008 [40].

### 1.8.1 Principe de la méthode

La méthode de perturbation d'homotopie est utilisée pour trouver des solutions exactes ou approximatives des équations linéaires ou non linéaires, les équation intégro différentielles et les équations intégrales. Cette méthode permet de rechercher une solution des équations qui ont la forme (1.1) c'est à dire :

$$F(u) - g(z) = 0, \quad z \in \Omega. \quad (1.27)$$

L'opérateur  $F$  se présente sous la forme suivante :

$$F(u) = L(u) + N(u), \quad (1.28)$$

où  $L$  définit l'opérateur linéaire et  $N$  est la partie restante de l'opérateur  $F$ .

Donc l'équation (1.27) peut s'écrire :

$$L(u) + N(u) - g(z) = 0, \quad z \in \Omega. \quad (1.29)$$

Maintenant, on définit un nouvel opérateur  $H$ , qui s'appelle l'opérateur d'homotopie, par :

$$H(v, p) = (1 - p)(L(v) - L(u_0)) + p(F(v) - g(z)) = 0, \quad (1.30)$$

avec  $z \in \Omega$ ,  $p \in [0, 1]$  un paramètre d'intégration,  $v : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u_0$  est l'approximation initiale de la solution de l'équation (1.1).

L'équation (1.30) prendra alors la forme suivante :

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) - pL(u_0) + p(N(v) - g(z)) = 0. \quad (1.31)$$

Donc

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0. \quad (1.32)$$

$$H(v, 1) = L(v) + N(v) - g(z) = 0.$$

Le changement de  $p$  de zéro à l'unité transforme  $u_0(z)$  en  $u(z)$ . En topologie avec cette dernière propriété, la fonction  $w(r, p)$  est appelée homotopie. Selon la méthode HPM, on peut utiliser le paramètre  $p$  comme un petit paramètre, et supposer que les solutions des équations (1.30) et (1.31) peuvent être écrites comme une série de puissance de  $p$  :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i. \quad (1.33)$$

Pour  $p = 1$ , la solution approximative de l'équation (1.1) devient :

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} v_i. \quad (1.34)$$

### 1.8.2 Convergence de la méthode

Dans ce paragraphe, nous étudions la convergence de la méthode HPM [10], [5]. On peut réécrire la relation (1.31) comme suit :

$$L(v) - L(u_0) = p[g(z) - L(u_0) - N(v)]. \quad (1.35)$$

En remplaçant (1.33) dans (1.35), on obtient :

$$L\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) - L(u_0) = p\left[g(z) - L(u_0) - N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right)\right]. \quad (1.36)$$

Ainsi

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(v_i) - L(u_0) = p \left[ g(z) - L(u_0) - N \left( \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i \right) \right]. \quad (1.37)$$

Selon le développement de Maclaurin de  $N(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i)$  par rapport à  $p$ ,

on a :

$$N \left( \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i \right) = \sum_{i=n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N \left( \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i \right) \right) p^i, \quad (1.38)$$

et d'après [31], on a :

$$\left( \frac{\partial^n}{\partial p^n} N \left( \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i \right) \right)_{p=0} = \left( \frac{\partial^n}{\partial p^n} N \left( \sum_{i=0}^n p^i v_i \right) \right)_{p=0}.$$

Alors

$$N \left( \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N \left( \sum_{i=0}^n p^i v_i \right) \right) p^i.$$

Posons :

$$H_n(v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[ N \left( \sum_{i=0}^n p^i v_i \right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.39)$$

où  $H_n$  sont appelés polynômes de He [31].

Alors

$$N \left( \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i. \quad (1.40)$$

En remplaçant (1.40) dans (1.37), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(v_i) - L(u_0) = p \left[ g(z) - L(u_0) - \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i \right]. \quad (1.41)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de  $p$ , on trouve :

$$\begin{aligned}
 p^0 & : L(v_0) - L(u_0) = 0, \\
 p^1 & : L(v_1) = g(z) - L(u_0) - H_0, \\
 p^2 & : L(v_2) = -H_1, \\
 p^3 & : L(v_3) = -H_2, \\
 & \vdots \\
 p^{n+1} & : L(v_{n+1}) = -H_n.
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Donc, en conclusion, on aura :

$$\begin{aligned}
 p^0 & : v_0 = u_0, \\
 p^1 & : v_1 = L^{-1}(g(z)) - u_0 - L^{-1}(H_0), \\
 p^2 & : v_2 = -L^{-1}(H_1), \\
 p^3 & : v_3 = -L^{-1}(H_2), \\
 & \vdots \\
 p^{n+1} & : v_{n+1} = -L^{-1}(H_n). \\
 & \vdots
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

**Théorème 1.11** *La solution de l'équation (1.1) obtenue par la méthode de perturbation d'homotopie est équivalente à la détermination de  $S_n$  donnée par :*

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n, \quad S_0 = 0. \tag{1.44}$$

*En utilisant le schéma itératif*

$$S_{n+1} = -L^{-1}N_n(S_n + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)), \tag{1.45}$$

où

$$N_n \left( \sum_{i=0}^n v_i \right) = \sum_{i=0}^n H_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Théorème 1.12** *Soit  $B$  un espace de Banach.*

1.  $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$  converge vers  $S \in B$ , si

$$\exists (0 \leq \lambda < 1) \text{ tel que } (\forall n \in \mathbb{N} \implies \|v_n\| \leq \lambda \|v_{n-1}\|). \quad (1.46)$$

2.  $S = \sum_{i=1}^{\infty} v_i$  vérifie

$$S = -L^{-1}N(S + v_0) - u_0 + L^{-1}(g(z)). \quad (1.47)$$

**Lemme 1.1** *L'équation (1.47) est équivalente à :*

$$L(u) + N(u) - g(z) = 0. \quad (1.48)$$

**Définition 1.9** Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on définit :

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{\|v_{i+1}\|}{\|v_i\|}, & \|v_i\| \neq 0 \\ 0, & \|v_i\| = 0. \end{cases}$$

Dans le Théorème 1.12,  $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$  converge vers la solution exacte, lorsque  $0 \leq \lambda_i < 1$ .

Si  $v_i$  et  $v'_i$  sont obtenus par deux différentes homotopies, et  $\lambda_i < \lambda'_i$  pour chaque  $i \in \mathbb{N}$ , le taux de convergence de  $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$  est supérieure à  $\sum_{i=0}^{\infty} v'_i$ .

**Remarque 1.1** En réalité la méthode de perturbation d'homotopie est un cas particulier de la méthode analytique d'homotopie en prenant  $h = 1$ .

## CHAPITRE 2

Application d'une méthode décompositionnelle sur le  
problème inverse de Stefan à deux phases

### Sommaire

---

2.1	Position du problème . . . . .	28
2.2	Résolution du problème inverse de Stefan par une méthode hybride avec optimisation . . . . .	31
2.3	Résolution du problème inverse de Stefan par la méthode analytique d'homotopie avec optimisa- tion . . . . .	35
2.4	Méthode du gradient conjugué spectral modifiée de type Dai-Yuan . . . . .	38
2.5	Simulation numérique . . . . .	45
2.6	Conclusion . . . . .	51

---

Ce chapitre est consacré à la résolution d'un problème inverse de Stefan



à deux phases tel que la position de l'interface solide-liquide (front de fusion ou de solidification), est à priori inconnue. Cette interface doit être déterminée comme une partie de la solution.

Nous utilisons deux méthodes de résolution :

1. La première est une méthode hybride avec optimisation qui combine la méthode de perturbation d'homotopie (HPM) avec la méthode de décomposition d'Adomian améliorée (IADM). Nous avons écrit l'interface sous forme d'une série infinie pour inclure le plus grand nombre de problèmes réels.
2. La deuxième est la méthode analytique d'homotopie avec optimisation.

## 2.1 Position du problème

Le problème inverse de Stefan à deux phases est décrit par deux équations aux dérivées partielles paraboliques régissant la conduction thermique dans les deux phases.

On considère le problème inverse de Stefan à deux phases [78] suivant :

Soit le rectangle  $D$  définie par :

$$D = \{(x, t) : x \in [0, d], t \in [0, t^*]\}. \quad (2.1)$$

On divise  $D$  en deux régions  $D_1$  et  $D_2$  tels que  $D_1$  désignant la région prise par la phase liquide et  $D_2$  décrivant la région prise par la phase solide.

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, t); x \in [0, \xi(t)], t \in [0, t^*]\}, \\ D_2 &= \{(x, t); x \in [\xi(t), d], t \in [0, t^*]\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

et leurs frontières sont :

$$\Gamma_1 = \{(x, 0); x \in (0, s), s = \xi(0)\}, \quad (2.3)$$

$$\Gamma_2 = \{(x, 0); x \in (s, d), s = \xi(0)\}, \quad (2.4)$$

$$\Gamma_3 = \{(0, t); t \in [0, t^*]\}, \quad (2.5)$$

$$\Gamma_4 = \{(d, t); t \in [0, t^*]\}, \quad (2.6)$$

$$\Gamma_5 = \{(x, t); t \in [0, t^*], x = \xi(t)\}, \quad (2.7)$$

$$\Gamma_6 = \{(x, t^*); x \in [0, \xi(t^*)]\}, \quad (2.8)$$

où  $\xi$  est une fonction inconnue définit l'endroit de l'interface.

Le modèle mathématique du problème inverse de Stefan à deux phases est décrit par deux équations de diffusion unidimensionnelles dans un domaine limité par une frontière dont la position est inconnue a priori. Ce modèle est gouverné par deux équations paraboliques de la chaleur caractérisant l'évolution de la température dans un corps solide ou liquide en fonction de deux variables, le temps  $t$  et l'espace  $x$ , ces équations sont décrites par :

– Dans la phase liquide

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2} \text{ dans } D_1, \quad (2.9)$$

– Dans la phase solide

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = \alpha_2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2} \text{ dans } D_2, \quad (2.10)$$

Telle que  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2$ ) désigne la diffusivité thermique. Les indices  $k = 1$  et  $k = 2$ ; représentent les phases liquide et solide respectivement.

On dispose par ailleurs des conditions aux limites ou aux frontières du domaine spatial considéré. Ces conditions peuvent être soit des températures imposées, soit des flux spécifiés. Dans notre cas, on a :

## Chapitre 2. Application d'une méthode décompositionnelle sur le problème inverse de Stefan à deux phases

---

Sur la frontière  $\Gamma_3$ , la fonction  $u_1$  satisfait la condition de Dirichlet :

$$u_1(0, t) = \theta_1(t) \text{ sur } \Gamma_3, \quad (2.11)$$

et sur la frontière  $\Gamma_4$ , la fonction  $u_2$  satisfait la condition de Dirichlet :

$$u_2(d, t) = \theta(t) \text{ sur } \Gamma_4. \quad (2.12)$$

Pour les conditions initiales, c'est à dire la distribution des températures à l'instant  $t = 0$ , on a :

Sur les frontières  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , les fonctions à déterminer sont vérifiées les conditions initiales :

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x) \text{ sur } \Gamma_1, \quad (2.13)$$

$$u_2(x, 0) = \varphi_2(x) \text{ sur } \Gamma_2, \quad (2.14)$$

$$\xi(0) = s. \quad (2.15)$$

L'application du bilan énergétique à la position de l'interface liquide-solide donne la condition de Stefan par l'équation suivante :

$$k \frac{d\xi(t)}{dt} = K_2 \left. \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\xi(t)} - K_1 \left. \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\xi(t)}, \quad (2.16)$$

qui décrit le déplacement de la limite de la frontière mobile  $x = \xi(t)$  ou la position de l'interface liquide-solide.

Où  $k$  est la chaleur latente de fusion par unité de volume et  $K_1, K_2$  sont les conductivités thermiques dans les phases solide et liquide respectivement.

Sur l'interface mobile  $\Gamma_5$ , on a la condition de continuité de la température suivante :

$$u_1(\xi(t), t) = u_2(\xi(t), t) = u^*, \quad (2.17)$$

où  $u^*$  est la température de changement de phase.

La température interne de temps final sur la frontière  $\Gamma_6$  satisfait :

$$u_1(x, t^*) = u_1^T \text{ sur } \Gamma_6. \quad (2.18)$$

Le problème inverse de Stefan à deux phases [34] consiste à trouver la température et la position de l'interface décrite au moyen de la fonction  $x = \xi(t)$  entre les deux phases solide-liquide.

## 2.2 Résolution du problème inverse de Stefan par une méthode hybride avec optimisation

La solution du problème inverse de Stefan à deux phases nécessite de le diviser en deux problèmes. : Le premier est la détermination de  $u_1(x, t)$  dans le domaine  $D_1$  et de l'interface mobile  $\xi(t)$  qui est vérifié (2.8), (2.9), (2.13), et (2.11). Une fois que la limite  $x = \xi(t)$  et le flux thermique  $(\partial u_2(x, t) / \partial x)|_{x=\xi(t)}$  ont été obtenus, on passe au deuxième problème qui est la détermination de la température  $u_2(x, t)$  dans le domaine  $D_2$ .

**La solution de  $u_1(x, t)$  basée sur HPM avec optimisation :** Dans ce cas, les opérateurs  $N_1$  et  $L_1$  peuvent être définis comme suit :

$$N_1(v) = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

et

$$L_1(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{ avec } L(0) = 0.$$

## Chapitre 2. Application d'une méthode décompositionnelle sur le problème inverse de Stefan à deux phases

---

Pour le problème étudié, on prend (en supposant que la série est convergente) :

$$H_{1,m}(\bar{u}_{m-1}, x, t) = \frac{1}{m!} \left( \frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i \geq 0} u_{1,i}(x, t) p^i \right) \right) \Big|_{p=0}, \text{ pour } m = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

En substituant la relation (2.19) dans (1.43), on trouve pour  $m = 1$  l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u_{1,1}(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial u_{1,0}(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_{1,0}(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.20)$$

sinon, pour  $m \geq 2$ , il prend la forme :

$$\frac{\partial^2 u_{1,m}(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial u_{1,m-1}(x, t)}{\partial t}. \quad (2.21)$$

Pour obtenir une solution unique, on doit compléter les équations ci-dessus avec certaines conditions supplémentaires. En utilisant la condition limite de Dirichlet (2.11) et la condition de continuité de la température (2.17) et la condition de Stefan (2.16), la première des équations ci-dessus sera complétée par les conditions suivantes :

$$u_{1,0}(0, t) + u_{1,1}(0, t) = \theta_1(t), \quad (2.22)$$

$$u_{1,0}(\xi(t), t) + u_{1,1}(\xi(t), t) = u^*, \quad (2.23)$$

sinon, pour ( $m \geq 2$ ), les équations vérifient les conditions homogènes suivantes :

$$u_{1,m}(0, t) = 0, \quad (2.24)$$

$$u_{1,m}(\xi(t), t) = 0. \quad (2.25)$$

On donne la solution approximative :

$$\hat{u}_{1,n}(z) = \sum_{m \geq 0} u_{1,m}(z).$$

Puisque  $u_{1,m}$  est déterminé par la fonction inconnue  $\xi(t)$ . Cette fonction est dérivée sous la forme :

$$\xi(t) = \sum_{m \geq 0} c_m \psi_m(t).$$

Ainsi, on définit la fonction de coût  $J_1$  selon (2.13) et de (2.18) :

$$J_1(c_1, \dots, c_m, \dots) = \frac{1}{2} \int_0^{\xi(0)} \{\widehat{u}_{1,n}(x, 0) - \varphi_1(x)\}^2 dx + \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\xi(0)} \{\widehat{u}_{1,n}(x, t^*) - u_1^T(x)\}^2 dx + \frac{1}{2} \|c\|^2, \quad (2.27)$$

avec :  $c = (c_1, \dots, c_m, \dots) = (c_m)_{m \geq 0}$ .

Par conséquent, les  $c_m$  sont choisis selon le minimum de (2.26). L'interface mobile  $\xi(t)$  et la solution de  $u_1$  dans le domaine  $D_1$  peuvent être obtenues.

La condition au limite (2.11) sur la frontière  $\Gamma_3$  et la condition de la continuité de la température (2.17) doivent être remplies pour  $n \geq 1$ . Ainsi, en cherchant la solution de ce problème dans le domaine  $D_1$ , l'approximation initiale  $u_{1,0}$  sera trouvée en résolvant l'équation (2.20) avec les conditions (2.22) et (2.23). Inversement, les fonctions  $u_{1,m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$  sont déterminées par la solution récurrente (2.21) avec les conditions (2.23) et (2.25). Par conséquent, l'interface mobile  $\xi(t)$  et la solution de  $u_1$  dans le domaine  $D_1$  peuvent être obtenues par la méthode de perturbation d'homotopie avec optimisation. Selon la condition de Stefan (2.16) sur l'interface mobile de changement de phase  $\Gamma_3$ , la température  $u_2(x, t)$  dans le domaine  $D_2$  peut être récupérée par IADM avec la méthode d'optimisation.

**La solution de  $u_2(x, t)$  basée sur IADM avec optimisation :** dans

Chapitre 2. Application d'une méthode décompositionnelle sur le problème inverse de Stefan à deux phases

---

ce problème, on considère les équations de l'opérateur (1.2), où :

$$\begin{aligned}
 L(u_2) &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}. \\
 R(u_2) &= -\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial u_2}{\partial t}. \\
 N(u_2) &= 0. \\
 \eta &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

L'opérateur inverse  $L^{-1}$  est donné par l'équation suivante :

$$L^{-1}(u_2) = \int_x^d \int_{\xi(t)}^x u_2(x, t) dx dx.$$

La condition aux limites et la condition de Stefan de (2.14) sont utilisées pour obtenir l'équation suivante :

$$L^{-1}L\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) = u_2(x, t) - \theta(t) - \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} (x - d).$$

Par conséquent :

$$\gamma = \theta(t) + \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} (x - d).$$

Ensuite, la relation récursive suivante peut être obtenue :

$$\begin{aligned}
 g_0 &= u_2(d, t) = \theta(t), \\
 g_1 &= \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} (x - d) + \frac{1}{\alpha_2} \int_d^x \int_{\xi(t)}^x \frac{\partial g_0}{\partial t} dx dx, \\
 g_{n+2} &= \frac{1}{\alpha_2} \int_d^x \int_{\xi(t)}^x \frac{\partial g_{n-1}}{\partial t} dx dx, \quad n \geq 0.
 \end{aligned}$$

Puisque  $u_1(x, t)$  et  $\xi(t)$  sont déterminés par la méthode HPM ci-dessus avec la méthode d'optimisation,  $\partial u_2(x, t) / \partial x|_{x=\xi(t)}$  peut être obtenu par l'équation (2.16). Une solution d'approximation est exprimée sous la forme :

$$\hat{u}_{2,n} = \sum_{i=0}^n g_i, \quad n \in N, \tag{2.29}$$

et dans ce problème de Stefan inverse,  $\theta(t)$  est inconnu à la frontière  $\Gamma_4$  et on l'écrit sous la forme suivante :

$$\theta(t) = \sum_{i=1}^m q_i \phi_i(t). \quad (2.30)$$

Où  $q_i \in \mathbb{R}$  et  $\phi_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  sont les fonctions de base. Les coefficients  $q_i$  sont sélectionnés pour afficher la déviation minimale de la fonction (2.31) à partir des conditions (2.14) et (2.17). Ainsi, les coefficients  $q_i$  sont choisis selon le minimum de la fonction suivante :

$$J_2(q_1, \dots, q_m, \dots) = \frac{1}{2} \int_0^{t^*} \{\hat{u}_{2,n}(\xi(t), t) - u^*\}^2 dt + \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\xi(0)}^d \{\hat{u}_{2,n}(x, 0) - \varphi_2(x)\}^2 dx + \frac{1}{2} \|q\|^2, \quad (2.32)$$

où  $J_2(q_1, \dots, q_m, \dots)$  est une fonction non linéaire. La méthode d'optimisation joue un rôle très important dans la résolution du problème inverse de Stefan inverse à deux phases.

## 2.3 Résolution du problème inverse de Stefan par la méthode analytique d'homotopie avec optimisation

Dans cette section, on applique la méthode analytique d'homotopie pour résoudre le problème précédent. On choisit les opérateurs  $N_k$  et  $L_k$  ( $k = 1, 2$ ) comme suit :

$$N_k(v(z)) = \frac{\partial v(z)}{\partial t} - \alpha_k \frac{\partial^2 v(z)}{\partial x^2},$$

et

$$L_k(v(z)) = \frac{\partial^2 v(z)}{\partial x^2}.$$



Chapitre 2. Application d'une méthode décompositionnelle sur le problème inverse de Stefan à deux phases

---

où  $v = (u_k)_{k=1,2}$  et  $z = (x, t)$ .

D'après la relation (1.23) et si on suppose que la série  $\sum_{m=0}^{\infty} v_m(z)$  est convergente, on a :

$$\begin{aligned} R_{k,m}(\bar{u}_{k,m-1}, x, t) &= \frac{1}{(m-1)!} N_k \left( (m-1)! u_{k,m-1}(x, t) + \sum_{i=m}^{\infty} u_{k,i}(x, t) w_k(i) p^{i-m+1} \right) \Big|_{p=0} \quad \text{où } k = 1, 2 \\ &= N_k (u_{k,m-1}(x, t)), \end{aligned} \quad (2.33)$$

pour  $m = 1, 2, \dots$ , tel que  $w_k(i) \in \mathbb{N}$  et  $i = m, m+1, \dots$

En utilisant les conditions (2.17)-(2.11) et (2.16), on a trouvé deux systèmes d'équations aux dérivées partielles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{h} \frac{\partial^2 u_{k,1}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u_{k,0}(x,t)}{\partial t} - \alpha_k \frac{\partial^2 u_{k,0}(x,t)}{\partial x^2}. \\ u_{1,0}(0, t) + u_{1,1}(0, t) = \theta_1(t). \\ u_{k,0}(\xi(t), t) + u_{k,1}(\xi(t), t) = u^*. \\ k \frac{d\xi(t)}{dt} = K_2 \frac{\partial(u_{2,0}+u_{2,1})(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} - K_1 \frac{\partial(u_{1,0}+u_{1,1})(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)}. \end{array} \right. \quad (2.34)$$

Pour  $m = 1$  et  $k = 1, 2$ .

Alors que pour  $m \geq 2$ , on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{h} \frac{\partial^2 u_{k,m}(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{h} \frac{\partial^2 u_{k,m-1}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u_{k,m-1}(x,t)}{\partial t} - \alpha_k \frac{\partial^2 u_{k,m-1}(x,t)}{\partial x^2}. \\ u_{1,m}(0, t) = 0. \\ u_{k,m}(\xi(t), t) = 0. \\ K_2 \frac{\partial u_{2,m}(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} - K_1 \frac{\partial u_{1,m}(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} = 0. \end{array} \right. \quad (2.35)$$

On donne la solution approximative

$$\hat{u}_{k,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n u_{k,m}(x, t), \quad (2.36)$$

puisque  $u_{1,m}$  et  $u_{2,m}$  sont déterminés par les fonctions inconnues  $\xi(t)$  et

## Chapitre 2. Application d'une méthode décompositionnelle sur le problème inverse de Stefan à deux phases

---

$\theta(t)$  respectivement. Ces fonctions sont écrites sous la forme :

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \sum_{i=1}^m a_i \psi_i(t). \\ \theta(t) &= \sum_{i=1}^m b_i \phi_i(t).\end{aligned}\tag{2.37}$$

Où  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $\psi_i(t)$  et  $\phi_i(t)$  sont les fonctions de base, pour  $i = 1, \dots, m$ .

Par conséquent,  $a_i$  (resp.  $b_i$ ) ( $i = 1, \dots, m$ ) sont choisis selon le minimum de (2.38) (resp. (2.39)) qui est défini par (2.13) et (2.18) (resp. (2.14) et (2.17))

$$\begin{aligned}J_1(a_1, \dots, a_m) &= \int_0^{\xi(0)} \{\widehat{u}_{1,n}(x, 0) - \varphi_1(x)\}^2 dx + \\ &+ \int_0^{\xi(0)} \{\widehat{u}_{1,n}(x, t^*) - u_1^T(x)\}^2 dx.\end{aligned}\tag{2.38}$$

$$\begin{aligned}J_2(b_1, \dots, b_m) &= \int_0^{t^*} \{u_{2,n}(\xi(t), t) - u^*\}^2 dt + \\ &+ \int_{\xi(0)}^d \{u_{2,n}(x, 0) - \varphi_2(x)\}^2 dx.\end{aligned}\tag{2.39}$$

Où  $(J_k)_{k=1,2}$  sont des fonctions non linéaires. La méthode d'optimisation joue un rôle très important dans la résolution du problème de Stefan inverse à deux phases. De ce fait, on présente une méthode du gradient conjugué spectral modifiée de type Dai-Yuan dans les sections suivantes. Cette méthode d'optimisation est introduite accompagné d'un exemple de problème inverse de Stefan à deux phases pour illustrer l'efficacité de la méthode analytique d'homotopie avec optimisation.

**Théorème 2.1** [38] *Soient les fonctions  $u_{k,m}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $m \geq 1$ , déterminées à partir des système (2.34) et (2.35), respectivement. Si les séries  $\sum_{m=0}^{\infty} u_{k,m}(x, t)$ , pour  $k = 1, 2$ , sont convergentes alors leurs sommes sont les solutions des équations considérées.*

**Théorème 2.2** [38] *Soient les fonctions  $u_{k,m}$ ,  $k = 1, 2$ ,  $m \geq 1$ , déterminées à partir des système (2.34) et (2.35), respectivement. Si le paramètre  $h$  est*

sélectionné de manière à ce qu'il existe des constantes  $\gamma_h \in (0, 1)$  et  $m_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $m \geq m_0$  et  $k = 1, 2$  l'inégalité suivante :

$$\|u_{k,m+1}\| \leq \gamma_h \|u_{k,m}\|,$$

est satisfaite, alors

(i) Les series  $\sum_{m=0}^{\infty} u_{k,m}(x, t)$  sont uniformément convergentes et leurs sommes sont les solutions des équations considérées.

(ii) L'estimation de l'erreur de la solution approximative est donnée par

$$\|u_k - \hat{u}_{k,n}\| \leq \frac{\gamma_h^{n+1-m_0}}{1 - \gamma_h} \|u_{k,m_0}\|, \quad \forall n \geq m_0.$$

## 2.4 Méthode du gradient conjugué spectral modifiée de type Dai-Yuan

On donne la méthode de gradient conjugué spectral basée sur la méthode du gradient conjugué de type Dai-Yuan en fournissant un nouveau paramètre spectral.

### 2.4.1 Préliminaire

Un problème d'optimisation sans contrainte est généralement exprimé comme suit :

$$\min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2.40)$$

La fonction non linéaire  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est continuellement différentiable; le gradient de  $f$  est noté  $g(x) = \nabla f(x)$ . Nous imposons généralement les propriétés suivantes à la fonction  $f$ .

(P1) La fonction  $f$  est bornée inférieurement et continuellement différentiable dans un voisinage  $N$  de l'ensemble des niveaux

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\},$$

où  $x_0$  est le point de départ.

(P2) Le gradient  $g(x)$  de  $f$  est continuellement Lipschitzien dans  $N$ , c'est à dire, il existe une constante  $L > 0$ , tel que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L \|x - y\| \text{ pour tout } x, y \in N.$$

Généralement, une suite  $\{x_k\}$  est obtenu dans un algorithme pour résoudre (2.40) et a le format suivant :

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \tag{2.41}$$

où  $d_k$  est une direction de recherche et  $\alpha_k$  est la taille du pas. A chaque point d'itération  $x_k$ , nous déterminons généralement  $d_k$  d'abord puis nous calculons  $\alpha_k$  par quelques principes.

Il existe différentes façons de déterminer la direction  $d_k$ . Dans la méthode classique de la descente rapide,  $d_k = -g_k$ . Dans la méthode du gradient conjugué (CG),  $d_k$  a la forme

$$\begin{cases} d_0 = -g_0 \\ d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k \quad \text{si } k \geq 0, \end{cases} \tag{2.42}$$

où la taille du pas  $\alpha_k$  est positive,  $g_k = \nabla f(x_k)$  et  $\beta_k$  est un scalaire. De plus,  $\alpha_k$  est la longueur du pas qui est calculée par la ligne de recherche.

Le scalaire  $\beta_k$  est un facteur très important dans les méthodes du gradient conjugué ; Les expressions les plus connues de  $\beta_k$  sont les formules de Hestenes-Stiefel (HS), Fletcher-Reeves (FR), Polak-Ribiere-Polyak (PRP) et Dai-Yuan (DY) [11]. Parmi eux, la méthode de DY est considérée comme

l'une des méthodes efficaces de gradient conjugué. Le scalaire  $\beta_k$  est donné par :

$$\beta_k^{DY} = \frac{\|g_{k+1}\|^2}{d_k^T y_k}, \quad (2.43)$$

tel que  $\|\cdot\|$  est la norme Euclidienne et

$$y_k = g_{k+1} - g_k.$$

Leur algorithme a la forme

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k g_k. \quad (2.44)$$

Où  $\alpha_k = s_k^T s_k / s_k^T y_k$  or  $\alpha_k = s_k^T y_k / y_k^T y_k$  avec  $s_k = x_{k+1} - x_k$ . De nombreux algorithmes se sont avérés convergents sous la condition de Wolfe ; c'est-à-dire la taille du pas  $\alpha_k$  satisfait :

$$f(x_k) - f(x_k + \alpha_k d_k) \geq -\delta \alpha_k g_k^T d_k, \quad (2.45)$$

$$g(x_k + \alpha_k d_k)^T \geq \sigma g_k^T d_k, \quad (2.46)$$

tel que  $0 < \sigma < \delta < 1$ .

Ces dernières années, certains chercheurs ont développé une nouvelle méthode, appelée méthode du gradient conjugué spectral (SCG), pour résoudre l'équation (2.40). Par exemple, Raydan a introduit la méthode du gradient spectral pour une optimisation sans contrainte à grande échelle.

Il a combiné une stratégie d'une ligne de recherche non monotone qui garantit une convergence globale avec la méthode de Barzilai et Borwein. En utilisant des idées de gradient spectral et de gradient conjugué, Birgin et Martinez ont proposé une méthode de gradient conjugué spectral. Dans leur algorithme, la direction de recherche a la forme :

$$\begin{cases} d_0 = -g_0. \\ d_{k+1} = -\theta_{k+1} g_{k+1} + \beta_k d_k \quad \text{si } k \geq 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Sur la base de l'analyse ci-dessus, on utilise, dans cette section, une nouvelle méthode MSDYCG basée sur celle du gradient conjugué de type Dai-Yuan. Une nouvelle sélection de  $\theta_{k+1}$  est introduite dans l'algorithme de telle sorte que la condition de descente suffisante soit vérifiée.

### 2.4.2 Principe de la méthode

La nouvelle méthode est introduite par

$$d_k = \begin{cases} d_0 = -g_0, \\ d_{k+1} = -\theta_{k+1}g_{k+1} + \beta_k^{DY} d_k \quad \text{si } k \geq 0, \end{cases} \quad (2.48)$$

où

$$\theta_{k+1} = \max \left\{ \frac{2 |g_k^T d_k|}{|d_k^T y_k|}, \frac{2g_{k+1}^T d_k - g_k^T d_k}{d_k^T y_k} \right\}, \quad (2.49)$$

et le paramètre scalaire  $\beta_k^{DY}$  est défini par (2.43). C'est une nouvelle méthode de gradient spectral conjugué pour résoudre le problème (2.40) parce que l'expression (2.49) du paramètre spectral  $\theta_{k+1}$  est complètement différent de ceux d'autres articles. La direction recherchée (2.48) est une combinaison du gradient spectral et du gradient conjugué Dai-Yuan.

Afin d'obtenir la convergence globale de la méthode, on suppose que la taille du pas satisfait la forte condition de Wolfe, c'est-à-dire la taille du pas  $\alpha_k$  satisfait (2.44) et

$$\left| g(x_k + \alpha_k d_k)^T d_k \right| \leq -\sigma g_k^T d_k, \quad (2.50)$$

avec  $0 < \delta < \sigma < 1$ . Il est facile de voir que l'inégalité (2.46) est obtenue si (2.50) est vérifiée. Celle-ci est une description détaillée de l'algorithme de gradient conjugué spectral de type Dai-Yuan modifié (MSDYCG).

### 2.4.3 Algorithme de la méthode MSDYCG

Il comprend les étapes suivantes :

**Étape 1** (Initialisation). Choisir  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , pose  $k = 0$ , l'étape d'itération maximale  $N_{\max}$  et prendre  $\varepsilon > 0$ .

**Étape 2** (Vérifiez la condition de convergence). calculer  $g_k$ ; si  $\|g_k\| \leq \varepsilon$ , alors arrêtez.

**Étape 3** (Former la direction de recherche). Si  $k = 0$ , alors  $d_0 = -g_0$ . Sinon, calculer  $\theta_{k+1}$  et  $\beta_k^{DY}$  par formules (2.49) et (2.43), respectivement; puis calculer  $d_k$  par (2.48) et (2.49).

**Étape 4** (Recherche de ligne). Trouver  $\alpha_k$  qui satisfait les conditions fortes de Wolfe (2.45) et (2.50).

**Étape 5** (Calculer le nouveau point). Pose  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$  et  $k = k + 1$  et passez à l'étape 2.

Le cadre de l'algorithme MSDYCG est similaire à d'autres algorithmes de gradient spectral conjugué. Cependant on choisit un paramètre spectral différent  $\theta_{k+1}$  (voir 2.49) qui est la principale différence entre MSDYCG et les autres algorithmes.

La convergence globale de l'algorithme MSDYCG sera donnée dans la sous-section suivante. Avant cela, on démontre que la direction de recherche (2.48) peut assurer la condition de descente suffisante.

**Proposition 2.1** [20] *Supposons que la suite  $\{d_k\}$  est générée par l'algorithme MSDYCG, alors*

$$g_k^T d_k \leq -\|g_k\|^2 \text{ pour tout } k \geq 0. \quad (2.51)$$

Cette proposition stipule que la direction  $d_k$  est une direction de descente. De plus,  $d_k$  possède la propriété suivante.

**Proposition 2.2** [20] *Supposons que l'algorithme MSDYCG soit implémenté avec la taille de pas  $\alpha_k$  satisfaisant les conditions fortes de Wolfe (2.45) et*

(2.50). Si  $g_k \neq 0$  pour tout  $k \geq 0$ , alors

$$\frac{(\beta_k^{DY})^2}{(g_{k+1}^T d_{k+1})^2} \leq \frac{1}{(g_k^T d_k)^2}. \quad (2.52)$$

L'inégalité (2.52) donne la relation étroite du produit scalaire du gradient et de la direction entre les deux itérations adjacentes. Il jouera un rôle important dans notre analyse de la convergence globale

#### 2.4.4 Analyse de Convergence

Dai et Yuan ont indiqué dans [20] que le résultat suivant avait été essentiellement prouvé par Zoutendijk et Wolfe.

**Proposition 2.3** [20] *Supposons que la fonction  $f(x)$  possède les propriétés (P1) et (P2), que  $d_k$  est une direction de descente et que  $\alpha_k$  est obtenu par les conditions de Wolfe (2.45) et (2.46). Alors*

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} < +\infty. \quad (2.53)$$

On appelle habituellement (2.53) la condition de Zoutendijk.

**Théorème 2.3** *Supposons que la fonction  $f(x)$  possède les propriétés (P1) et (P2). Les suites  $\{x_k\}$ ,  $\{g_k\}$  et  $\{d_k\}$  sont générées par l'algorithme MSDYCG. Alors soit  $g_k = 0$  pour un certain  $k$  soit*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0. \quad (2.54)$$

**Preuve.** On suppose que  $g_k \neq 0$  pour tout  $k$  et (2.54) n'est pas vérifiée. Alors il existe une constante  $c > 0$ , tel que

$$\|g_k\| \geq c, \quad (2.55)$$



Chapitre 2. Application d'une méthode décompositionnelle sur le problème inverse de Stefan à deux phases

---

pour tout  $k$  de l'itération. La deuxième égalité de (2.48) implique

$$d_{k+1} + \theta_{k+1}g_{k+1} = \beta_k^{DY} d_k,$$

on obtient

$$\|d_{k+1}\|^2 = (\beta_k^{DY})^2 \|d_k\|^2 - 2\theta_{k+1}g_{k+1}^T d_{k+1} + \theta_{k+1}^2 \|g_{k+1}\|^2.$$

En divisant les deux côtés par  $g_{k+1}^T d_{k+1}$ , on aura :

$$\begin{aligned} \frac{\|d_{k+1}\|^2}{(g_{k+1}^T d_{k+1})^2} &= \frac{(\beta_k^{DY})^2}{(g_{k+1}^T d_{k+1})^2} \|d_k\|^2 - \frac{2\theta_{k+1}}{g_{k+1}^T d_{k+1}} + \frac{\theta_{k+1}^2 \|g_{k+1}\|^2}{(g_{k+1}^T d_{k+1})^2} \\ &= \frac{(\beta_k^{DY})^2}{(g_{k+1}^T d_{k+1})^2} \|d_k\|^2 - \left( \frac{1}{\|g_{k+1}\|} + \frac{\theta_{k+1} \|g_{k+1}\|}{g_{k+1}^T d_{k+1}} \right)^2 + \frac{1}{\|g_{k+1}\|^2}. \end{aligned}$$

La combinaison de (2.52) dans la Proposition 2.2, nous donne :

$$\frac{\|d_{k+1}\|^2}{(g_{k+1}^T d_{k+1})^2} \leq \frac{\|d_k\|^2}{(g_k^T d_k)^2} + \frac{1}{\|g_{k+1}\|^2}.$$

En sommant les deux côtés, on obtient :

$$\sum_{i=0}^k \frac{\|d_{i+1}\|^2}{(g_{i+1}^T d_{i+1})^2} \leq \sum_{i=0}^k \frac{\|d_i\|^2}{(g_i^T d_i)^2} + \sum_{i=0}^k \frac{1}{\|g_{i+1}\|^2}. \quad (2.56)$$

Donc, à partir de (2.55) et (2.56), on donne :

$$\frac{\|d_{k+1}\|^2}{(g_{k+1}^T d_{k+1})^2} \leq \sum_{i=0}^k \frac{1}{\|g_i\|^2} \leq \frac{k+2}{c}.$$

Cette relation est équivalente à

$$\frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} \geq \frac{c}{k+2}.$$

En sommant sur  $k$ , on aura :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} = +\infty.$$

À partir de l'algorithme MSDYCG, la taille du pas satisfait la condition de Wolfe forte, donc la condition de Wolfe (2.46) est vérifiée et les directions obtenues par l'algorithme sont déduites de la proposition 2.1. Mais la dernière égalité contredit la condition de Zoutendijk (2.53). Par conséquent, notre assertion d'origine (2.55) doit être fausse, ce qui signifie que soit  $g_k = 0$  pour un certain  $k$ , soit (2.54) est vérifiée. ■

## 2.5 Simulation numérique

Afin d'illustrer la validité de la méthode analytique d'homotopie combinée avec la méthode d'optimisation proposée, on introduit le problème Stefan inverse à deux phases suivant :

**Exemple 2.1** Cet exemple est présenté pour illustrer l'efficacité de la méthode d'analyse d'homotopie avec la méthode d'optimisation, qui est présentée dans les sections précédentes. Ici, on considère un exemple du problème inverse de Stefan à deux phases [78], pour lequel

$$\alpha_1 = \frac{5}{2}, \alpha_2 = \frac{5}{4}, K_1 = 6, K_2 = 2, k = \frac{4}{5}, u^* = 1, t^* = 1, d = 3, s = \frac{3}{2},$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \exp\left(\frac{3-2x}{10}\right), \quad \varphi_2(x) = \exp\left(\frac{3-2x}{5}\right), \\ \theta_1(t) &= \exp\left(\frac{t+3}{10}\right) \quad \text{et} \quad u_1^T(x) = \exp\left(\frac{4-2x}{10}\right). \end{aligned}$$

La solution exacte du problème de Stefan inverse formulé est déterminée par les fonctions

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \exp\left(\frac{t-2x+3}{10}\right), \quad u_2(x, t) = \exp\left(\frac{t-2x+3}{10}\right), \\ \theta(t) &= \exp\left(\frac{t-3}{5}\right), \quad \xi(t) = \frac{t+3}{2}. \end{aligned}$$

**Solution** Tout d'abord, on utilise la méthode analytique d'homotopie avec une méthode d'optimisation pour résoudre  $u_1(x, t)$  et  $\xi(t)$ . on choisit l'approximation initiale  $u_{1,0}$  comme suit

$$u_{1,0}(x, t) = \exp\left(\frac{3-2x}{10}\right).$$

Par l'usage de la fonction  $u_{1,0}$  dans (2.34), l'équation suivante sera obtenue

$$\frac{\partial^2 u_{1,1}(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{5h}{2} \exp\left(\frac{3-2x}{10}\right).$$

Avec les conditions

$$\begin{aligned} u_{1,1}(0, t) &= \exp\left(\frac{3}{10}\right) \exp\left(\frac{t}{10} - 1\right). \\ u_{1,1}(x, t)|_{x=\xi(t)} &= 1 - \exp\left(\frac{3-2\xi(t)}{10}\right). \end{aligned}$$

Ce système d'équations peut être résolu et la solution de ce système est donnée par :

$$\begin{aligned} u_{1,1}(x, t) &= \frac{x}{\xi(t)} \left( 1 + (5h-1) \exp\left(\frac{3-2\xi(t)}{10}\right) - \exp\left(\frac{t+3}{10}\right) + \left(\frac{5h}{2} - 1\right) \exp\left(\frac{3}{10}\right) \right) \\ &+ \exp\left(\frac{t+3}{10}\right) + \left(1 - \frac{5h}{2}\right) \exp\left(\frac{3}{10}\right) - \frac{5h}{2} \exp\left(\frac{3-2x}{10}\right). \end{aligned}$$

Pour  $m = 2$  et  $k = 1$ , la solution du système (2.35) est

$$u_{1,2}(x, t) = \alpha_1 h (\alpha_1 h - 1) [\varphi_1(x) - \varphi_1(0)] + \frac{h}{6} g(t) x^3 + \frac{h}{20} \theta_1(t) x^2 + k_3(t) x,$$

où

$$k_3(t) = \frac{1}{\xi(t)} \alpha_1 h (\alpha_1 h - 1) [\varphi_1(0) - \varphi_1(\xi(t))] + \frac{h}{2} g(t) \xi^2(t) + \frac{h}{20} \theta_1(t) \xi(t).$$

Ainsi, on obtient la solution approchée  $\hat{u}_{1,2}(x, t)$  tel que :

$$\hat{u}_{1,2}(x, t) = u_{1,0}(x, t) + u_{1,1}(x, t) + u_{1,2}(x, t).$$

Donc

$$\begin{aligned} \widehat{u}_{1,2}(x, t) = & (\alpha_1 h - 1)^2 [\varphi_1(x) - \varphi_1(0)] + \frac{h}{6} g(t) x^3 + \frac{h}{20} \theta_1(t) x^2 + \theta_1(t) + \\ & \left[ \frac{u^*}{\xi(t)} \left( \frac{1}{\xi(t)} + \frac{h}{20} \xi(t) \right) \theta_1(t) - \frac{1}{\xi(t)} \left( (\alpha_1 h - 1)^2 (\varphi_1(\xi(t)) - \varphi_1(0)) - \frac{h}{6} g(t) \xi^2(t) \right) \right] \end{aligned}$$

Maintenant, on pose :

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^m a_i \psi_i(t), \quad (2.57)$$

et on choisit les fonctions de base selon (2.57) par :

$$\psi_i(t) = t^{i-1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

On utilise la méthode de gradient conjugué spectral DY (MSDYCG) modifiée pour résoudre la fonction (2.38). On obtient la solution de déplacement de l'interface  $\xi(t)$ , de sorte que la température  $u_1(x, t)$  est donnée dans le domaine  $D_1$ . Les valeurs de l'erreur dans la reconstruction de la position de l'interface mobile  $\xi(t)$  et de la distribution de température  $u_1(x, t)$  sont indiquées au tableau 1.

Ensuite, On va déterminer les fonctions  $u_2(x, t)$  et  $\theta(t)$  par la méthode analytique d'homotopie avec optimisation.

On pose

$$u_{2,0}(x, t) = \exp\left(\frac{3-2x}{5}\right).$$

En substituant la fonction  $u_{2,0}$  dans le système (2.34), on trouve l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u_{2,1}(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{h}{5} \exp\left(\frac{3-2x}{5}\right),$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} u_{k,0}(\xi(t), t) + u_{k,1}(\xi(t), t) &= 1. \\ \frac{2}{5} \frac{d\xi(t)}{dt} &= \frac{\partial(u_{2,0}+u_{2,1})(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} - 3 \frac{\partial(u_{1,0}+u_{1,1})(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)}. \end{aligned}$$

Chapitre 2. Application d'une méthode décompositionnelle sur le problème inverse de Stefan à deux phases

---

Par la résolution du système précédent, on obtient la solution  $u_{2,1}(x, t)$  sous la forme :

$$u_{2,1}(x, t) = -\frac{5}{4}h\varphi_2(x) + f_1(t) \cdot x + f_2(t),$$

où

$$\begin{aligned} f_2(t) = & -2 - \left(\frac{5}{4}h - 1\right) \exp\left(\frac{3 - 2\xi(t)}{5}\right) + \\ & + \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\left(\frac{5h}{4} - 1\right) \exp\left(\frac{3 - 2\xi(t)}{5}\right) + \frac{3}{5}\left(\frac{5h}{2} - 1\right) \exp\left(\frac{3 - 2\xi(t)}{10}\right)\right] \xi(t) + \\ & + 3\left(\frac{5h}{2} - 1\right) \left(\exp\left(\frac{3 - 2\xi(t)}{10}\right) - \exp\left(\frac{3}{10}\right)\right) + 3 \exp\left(\frac{t+3}{10}\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_1(t) = & -\frac{2}{5}\xi'(t) - \frac{2}{5}\left(\frac{5h}{4} - 1\right) \varphi_2(\xi(t)) + \frac{3}{5}\left(\frac{5h}{2} - 1\right) \varphi_1(\xi(t)) + \\ & + \frac{3}{\xi(t)} \left[1 + \left(\frac{5h}{2} - 1\right) (\varphi_1(\xi(t)) - \varphi_1(0)) - \theta_1(t)\right]. \end{aligned}$$

Après cela, on calcule  $u_{2,m}$  pour  $m \geq 2$  par la résolution du système (2.35).

On a, pour  $m = 2$ , la solution  $u_{2,2}(x, t)$  qui s'écrit sous la forme suivante :

$$u_{2,2}(x, t) = \alpha_2 h (\alpha_2 h - 1) \varphi_2(x) + \frac{h}{6} g_1(t) x^3 + \frac{h}{2} g_2(t) x^2 + k_4(t) x + c_4.$$

Avec

$$c_4 = -\alpha_2 h (\alpha_2 h - 1) \varphi_2(\xi(t)) - \frac{h}{6} g_1(t) \xi^3(t) + \frac{h}{2} g_2(t) \xi^2(t) - k_4(t) \xi(t),$$

et

$$\begin{aligned} k_4(t) = & 3\alpha_1 h (\alpha_1 h - 1) \varphi_1'(\xi(t)) - \alpha_2 h (\alpha_2 h - 1) \varphi_2'(\xi(t)) + \\ & + \xi(t) \left[\frac{3}{10}\theta + \frac{3}{2}g(t) - g_1(t)\right] h - \frac{h}{2} g_1(t) \xi^2(t). \end{aligned}$$

La solution  $\hat{u}_{2,2}(x, t)$  est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{u}_{2,2}(x, t) = & u_{2,0}(x, t) + u_{2,1}(x, t) + u_{2,2}(x, t) \\ = & (\alpha_2 h - 1)^2 \varphi_2(x) + \frac{h}{6} g_1(t) x^3 + \frac{h}{2} g_2(t) x^2 + (k_2(t) + k_4(t)) x + c_2 + c_4. \end{aligned}$$

Tel que :

$$\begin{aligned} c_2 = & -2u^* - (\alpha_2 h - 1) \varphi_2(\xi(t)) + \\ & + \left( \frac{-2}{5} a_2 + \frac{2}{5} (\alpha_2 h - 1) \varphi_2(\xi(t)) - \frac{3}{5} (\alpha_1 h - 1) \varphi_1(\xi(t)) \right) \xi(t) + \\ & + 3(\alpha_1 h - 1) (\varphi_1(\xi(t)) - \varphi_1(0)) + 3\theta(t). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} k_2(t) = & -\frac{2}{5} a_2 - \frac{2}{5} (\alpha_2 h - 1) \varphi_2 \left( \xi(t) + \frac{3}{5} (\alpha_1 h - 1) \varphi_1(\xi(t)) + \frac{3}{\xi(t)} [u^* + (\alpha_1 h - 1) (\varphi_1(\xi(t)) \right. \\ g_1(t) = & \left. \frac{\partial c_2}{\partial t} \text{ et } g_2(t) = \frac{\partial k_2}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Ensuite, pour calculer la valeur optimale du paramètre de contrôle de convergence  $h$  on utilise méthode d'optimisation.

Dans notre cas, on va calculer le résidu carré (1.26) pour chacune des équations (2.9,2.10). On obtient le vecteur

$$E_n(h) = [E_{1,n}(h), E_{2,n}(h)].$$

Il est donc naturel de déterminer la valeur optimale du paramètre de contrôle de convergence  $h$  comme élément pour lequel nous obtenons la valeur minimale de la norme de carré résiduel  $E_n$

$$h_{opt} = \arg \min \|E_n(h)\|.$$

Dans le cas considéré, la valeur optimale calculée numériquement du paramètre de contrôle de convergence est égale à  $-1.23304$  ( $h = -1.23304$ ).

Afin de vérifier la validité de la méthode de gradient conjugué spectral DY (MSDYCG) modifiée, on choisit  $n = 2$ ,  $m = 2$  et  $\varepsilon = 10^{-6}$ , le point initial est  $a_0 = (2.2, 2.5)$  et le numéro d'étape max  $n_{\max} = 100$ . Les résultats de comparaison de DY et MSDYCG sont présentés au tableau 2. Comparativement à la méthode de gradient conjugué DY, la méthode de gradient conjugué

Chapitre 2. Application d'une méthode décompositionnelle sur le problème inverse de Stefan à deux phases

---

MSDYCG est légèrement meilleure. L'interface mobile  $\xi(t)$  et  $u_1(x, t)$  dans le domaine  $D_1$  sont obtenues par la méthode analytique d'homotopy avec optimisation.

HAM	$\delta_{\xi(t)}$	$\Delta_{\xi(t)}$	$\delta_{u_1(x,t)}$	$\Delta_{u_1(x,t)}$
$n = 2, m = 2$	0.106821541	0.596098413	0.120987681	0.112637992
$n = 2, m = 3$	0.200524923	1.185289145	0.300105151	0.290520311
$n = 2, m = 3$	0.013051824	0.095230516	0.102482151	0.089149258

Tableau 1 : Valeurs de l'erreur dans la reconstruction de la position de l'interface mobile et de la distribution de température  $u_1(x, t)$ .

HAM	nombre d'itération	valeur Optimale
DY	50	(1.52, 0.48)
MSDYCG	15	(1.509, 0.502)

Tableau 2 : Les résultats de comparaison de DY et MSDYCG avec  $\Delta$  l'erreur absolue et  $\delta$  est l'erreur relative

Ensuite, à l'aide de la condition (2.16), on peut déterminer la température  $u_2(x, t)$  dans le domaine  $D_2$  par la méthode analytique d'homotopie avec optimisation. Sans perte de généralité, on peut choisir les fonctions de base

$$\phi_i(t) = t^{i-1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

La distribution exacte reconstruite de la température sur la frontière  $\Gamma_4$  est indiquée pour un nombre différent de fonctions de base  $\phi_i(t)$ . En outre, les erreurs de reconstruction de la température  $\theta(t)$  (sur la frontière  $\Gamma_4$ ) et de la distribution de température  $u_2(x, t)$  sont présentées dans le tableau 3. Les résultats d'inversion de la fonction  $\theta(t)$  correspondent très bien à la valeur exacte. La température mesurée  $u_1^T(t)$  au temps final  $t^*$  sur la frontière  $\Gamma_6$  est perturbée par l'erreur aléatoire. Ainsi, dans la suite, nous considérons l'influence des erreurs de mesure sur les résultats. On définit la tempéra-

ture mesurée  $u_1^T(t)$  avec une erreur de 1% et 3%. On peut obtenir l'interface mobile  $\xi(t)$  et  $\theta(t)$ . Les erreurs de reconstruction de la fonction décrivant l'interface mobile et les conditions aux limites sont compilées dans le tableau 4. Les résultats de reconstruction obtenus montrent que les fonctions  $\xi(t)$  et  $\theta(t)$  sont très bien reconstruites. D'après ces résultats, la méthode analytique d'homotopie avec optimisation est stable avec les erreurs d'entrée. Lorsque les données d'entrée sont contaminées par les erreurs, l'erreur des conditions aux limites reconstruites ne dépasse pas l'erreur des données d'entrée.

HAM	$\delta_{\theta(t)}$	$\Delta_{\theta(t)}$	$\delta_{u_2(x,t)}$	$\Delta_{u_2(x,t)}$
$n = 2, m = 2$	0.011561001	0.102528115	0.343893109	0.455895191
$n = 2, m = 3$	0.000803491	0.009320514	0.600249105	0.522471429

Tableau 3 : Valeurs de l'erreur de reconstruction de la température  $\theta(t)$  sur la frontière  $\Gamma_4$  et de la distribution de température  $u_2(x, t)$

Perturbation error on the $u_1^T(x)$	$\delta_{\xi(t)}$	$\Delta_{\xi(t)}$	$\delta_{\theta(t)}$	$\Delta_{\theta(t)}$
1% error	0.079156091	0.652855151	0.024903126	0.576231932
3% error	0.121589053	1.090975439	0.059181123	1.296521121

Tableau 4 : Valeurs de l'erreur de reconstruction de l'interface mobile  $\xi(t)$  et la température  $\theta(t)$  sur la frontière  $\Gamma_4$ .

## 2.6 Conclusion

Dans cette partie, on a présenté le problème inverse de Stefan à deux phases avec des conditions aux limites, lorsque la frontière libre décrit par une équation différentielle ordinaire.

Des solutions du problème inverse de Stefan à deux phases ont été présentées. Ces solutions de ce problème sont basées sur les méthodes de dé-



## Chapitre 2. Application d'une méthode décompositionnelle sur le problème inverse de Stefan à deux phases

---

composition et d'optimisation dont la première est la méthode de perturbation d'homotopie associé avec la méthode d'Adomian amélioré alors que la deuxième est la méthode analytique d'homotopie. Après, on a présenté un exemple numérique qui montre l'efficacité de la deuxième méthode comme solution du problème inverse de Stefan à deux phases.

## Deuxième partie

# Méthode projective de type Karmarkar en programmation linéaire via les fonctions minorantes

## CHAPITRE 3

### Généralités sur la programmation mathématique

#### Sommaire

3.1	Notions préliminaires . . . . .	55
3.2	Programme mathématique . . . . .	58
3.3	Programmation linéaire . . . . .	63
3.4	Méthode projective de Karmarkar . . . . .	70
3.5	Etude des performances de l'algorithme de Kar- markar (calcul de la projection $p_k$ ) . . . . .	74
3.6	Calcul d'une solution initiale strictement réalisable	77

**A** cause de leur grande importance dans notre étude, ce chapitre introductif vise à présenter quelques notions de base nécessaires pour le développement ultérieur de cette thèse et on insistera en particulier sur l'analyse convexe, la programmation mathématique et la programmation linéaire.

## 3.1 Notions préliminaires

### 3.1.1 Ensemble et application affine

**Définition 3.1** Un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est dit affine si

$$\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (1 - \lambda)x + \lambda y \in F.$$

Autrement dit, un sous-ensemble affine  $F$  contient toujours la “droite” passant par deux de ses points  $x$  et  $y$ .

**Définition 3.2** On appelle hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  toute partie affine de dimension  $(n - 1)$ .

**Définition 3.3** Une application :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto Tx, \end{aligned}$$

est dite affine si :

$$T[(1 - \lambda)x + \lambda y] = (1 - \lambda)Tx + \lambda Ty, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

### 3.1.2 Ensembles convexes

**Définition 3.4** Un sous-ensemble  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit convexe si :

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)x + \lambda y \in C,$$

autrement dit, un sous-ensemble convexe contient toujours le “segment” joignant deux de ses points  $x$  et  $y$ . Sachant que :

$$[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

**Remarque 3.1** Tout ensemble affine est convexe. La réciproque, est fausse en général.

### 3.1.3 Cônes convexes

**Définition 3.5** Un sous-ensemble  $K$  est un cône si et seulement si :

$$\forall x \in K, \forall \lambda \geq 0, \lambda x \in K.$$

Un cône est donc une union de demi-droites fermées positives issues de l'origine, ce dernier peut (ou ne peut pas) appartenir à  $K$ .

Un cône est dit pointé ou saillant si et seulement si :

$$K \cap (-K) = \{0\}.$$

**Définition 3.6** 1- Tout ensemble de la forme :

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : b_i^T x \leq 0, i \in I \subseteq \mathbb{N}, b_i \in \mathbb{R}^n\},$$

est un cône convexe.

2- De même l'ensemble des solutions du système d'inégalités homogènes :

$$x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0,$$

où  $A$  est une  $m \times n$  matrice.

### 3.1.4 Cône de récession

Soit  $C$  un convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$ , et  $a \in C$ , on pose :

$$C_\infty(a) = \{d \in \mathbb{R}^n : a + \lambda d \in C, \forall \lambda > 0\}.$$

Alors,  $C_\infty(a)$  est un cône convexe non vide.

**Définition 3.7** On appelle cône de récession (ou asymptote) de  $C$  l'ensemble :

$$C_\infty = \bigcap_{a \in C} C_\infty(a).$$

Un élément  $d \in C_\infty$  est appelé direction de récession.

**Proposition 3.1** [44] Soit  $C$  un convexe fermé non vide de  $\mathbb{R}^n$ , alors :

$$(C \text{ est borné}) \iff (C_\infty = \{0\}).$$

### 3.1.5 Fonctions convexes

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} = ]-\infty, +\infty]$ .

**Définition 3.8** On dit que la fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est convexe si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

$$\begin{aligned} 1) & f[(1-\lambda)x + \lambda y] \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y), \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \\ 2) & f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i), \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda_i \geq 0 : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \quad \forall x_i \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

- Si l'inégalité (1) est stricte pour  $x \neq y$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ , alors  $f$  est dite **strictement convexe**.
- L'inégalité (2) est appelée **inégalité de Jensen**.

**Remarque 3.2** Soit  $f$  une fonction définie sur un sous-ensemble non vide  $C$  de  $\mathbb{R}^n$ , on la remplace par l'extension suivante :

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow ]-\infty, +\infty] = \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

tel que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

Alors, on a  $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est convexe sur  $C$  si et seulement si son extension  $\tilde{f}$  (définie précédemment) est convexe sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemme 3.1** [44] Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  alors,  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si  $\forall x, d \in \mathbb{R}^n$  la fonction d'une variable réelle,

$$\varphi_{x,d}(t) = f(x + td),$$

est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

## 3.2 Programme mathématique

La programmation mathématique constitue un domaine vaste et riche dans le domaine d'optimisation et dans l'analyse numérique, et elle traduit plusieurs problèmes pratiques importants.

**Définition 3.9 (Programme mathématique)** Un programme mathématique est en général défini comme suit :

$$(PM) \begin{cases} \min_{x \in \mathcal{F}} f(x) \\ \mathcal{F} = \{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : h_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, p \text{ et } g_i(x) = 0, i = 1, \dots, m\}, \end{cases}$$

où  $h_j, g_i$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et l'ensemble  $\mathcal{F}$  est appelé ensemble des contraintes (ou des solutions admissibles), dit aussi domaine de faisabilité.

La fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est appelé fonction objectif ou économique.

**Définition 3.10 (Solution réalisable)** On appelle solution réalisable de  $(PM)$  tout point  $x$  vérifiant les contraintes **i.e.**,  $x \in \mathcal{F}$ .

**Définition 3.11 (Solution optimale globale)** On appelle solution optimale globale de  $(PM)$  toute solution réalisable (notée  $x^*$ ) qui minimise  $f$  sur  $\mathcal{F}$ .

L'ensemble des solutions optimales globales est noté par :  $\arg \min_{\mathcal{F}} f(x)$ .

**Définition 3.12 (Solution optimale locale)** Un point  $x^* \in \mathcal{F}$  est une solution optimale locale de  $(PM)$  si :

$$\exists \vartheta \text{ (voisinage) de } x^* \text{ tel que } f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \vartheta.$$

L'ensemble des solutions optimales locales de  $(PM)$  est noté par :  $\text{locmin}_{\mathcal{F}} f(x)$ . Nous avons toujours :

$$\arg \min_{\mathcal{F}} f(x) \subseteq \text{locmin}_{\mathcal{F}} f(x).$$

- Une contrainte d'inégalité  $h_j(x) \leq 0, \forall j = 1, \dots, p$  est dite saturée (active) en  $x^* \in \mathcal{F}$ , si  $h_j(x^*) = 0$ . Une contrainte d'égalité est par définition saturée en tout point  $x$  de  $\mathcal{F}$ .
- La classification de  $(PM)$  et son traitement numérique sont établis à partir des propriétés fondamentales des fonctions  $f, g_i$  et  $h_j$  à savoir la convexité, la différentiabilité et la linéarité. Parmi les cas particuliers les plus étudiés on note :

-  $(PM)$  est un problème linéaire si  $f$  est linéaire,  $g_i, h_j$  sont affines et  $\mathcal{F}$  ortant positif.

-  $(PM)$  est un problème différentiable si les fonctions  $f, g_i, h_j$  sont toutes différentiables.

-  $(PM)$  est un problème convexe si  $f$  et  $h_j$  sont convexes et  $g_i$  affines.

La classe modèle des  $(PM)$  est celle des programmes convexes différentiables, les programmes non convexes ou non différentiables sont difficiles à traiter. Enfin, le cas le plus simple est celui de la programmation linéaire où  $f, g_i$  et  $h_j$  sont affines.

**Remarque 3.3** Le problème d'optimisation précédent consiste :

- Soit à chercher un point optimal.
- Soit, si un tel point n'existe pas, on cherche une borne inférieure à  $f$ .
- Soit à établir que  $f$  est non bornée inférieurement sur  $\mathcal{F}$ , auquel cas on adopte la convention :

$$\inf_{\mathcal{F}} f(x) = -\infty.$$

Lorsque  $\mathcal{F}$  est vide, on pose par convention :

$$\inf_{\mathcal{F}} f(x) = +\infty.$$



### 3.2.1 Qualification des contraintes

**Définition 3.13** On dit que la contrainte  $h_i(x) \leq 0$  est active ou saturée en  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  si  $h_i(\bar{x}) = 0$ . On introduit alors l'ensemble :

$$I(\bar{x}) = \{i : h_i(\bar{x}) = 0\}.$$

c-à-d. une contrainte d'égalité est saturée.

**Définition 3.14** Un point  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  est dit régulier (on dit également que les contraintes sont qualifiées en  $\bar{x}$ ) si les gradients des contraintes saturées en  $\bar{x}$  sont linéairement indépendants.

Il existe aussi deux critères usuels de qualification en tout point de  $\mathcal{F}$ , à savoir :

- Si toutes les contraintes sont affines, on a le critère de Karlin (1959) suivant : Si  $\mathcal{F}$  est un polyèdre convexe (**i.e.**,  $h_i, g_j$  sont affines), alors les contraintes sont qualifiées en tout point réalisable.
- Si  $\mathcal{F}$  est défini uniquement par des inégalités, on a le critère de Slater (1950) suivant : si  $g_i(\bar{x})$  est convexe pour tout  $i = \overline{1, n}$  et qu'il existe un point  $x^0 \in \mathcal{F}$  tel que  $g_i(x^0) < 0$ , ( $\text{int}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ ).

### 3.2.2 Conditions nécessaires d'optimalité

La théorie de **Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T)** permet d'écrire les conditions nécessaires d'optimalité pour tout problème d'optimisation avec contraintes possèdent une fonction objectif différentiable.

**Théorème 3.1** [44] (**Karush-Kuhn-Tucker**) Soit  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  satisfaisant l'une des conditions de qualification et supposons que  $f$ ,  $g_i$  et  $h_j$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\bar{x}$  est un minimum local du problème (PM) alors, il existe un vecteur  $\lambda \in \mathbb{R}_+^p$  et  $\mu \in \mathbb{R}^m$ , tel que :

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla h_j(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 & \text{(condition d'optimalité),} \\ \lambda_j h_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p & \text{(condition de complémentarité),} \\ g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Si de plus les fonctions  $f$ ,  $g_i$ ,  $h_j$  sont convexes, les conditions d'optimalité précédentes sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que  $\bar{x}$  soit un optimum global pour (PM).

**Remarque 3.4** 1- les  $\lambda_j$  et  $\mu_i$  sont appelés multiplicateurs de **Karush-Kuhn-Tucker**.

2- Si les contraintes ne sont pas qualifiées en  $\bar{x}$ , les conditions de **(K.K.T)** ne s'appliquent pas ( $\bar{x}$  peut être optimal sans vérifier ces conditions).

3- Les problèmes avec contraintes de type (PM) peuvent souvent être transformés en problèmes sans contraintes à l'aide des multiplicateurs de Karush Kuhn Tucker **(KKT)**. Cette méthode qui nous permet de trouver les point stationnaires  $\bar{x}$  de la fonction  $f$ , revient en effet à associer à chaque contrainte un scalaire inconnu  $\lambda_j$  et  $\mu_i$ .

4- Dans le cas particulier où  $p = 0$ , les conditions précédentes sont appelées les conditions de Lagrange et s'écrivent comme suit :

Si  $\bar{x}$  est un optimum local, alors il existe  $\mu_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = \overline{1, m}$  tel que :

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0 \\ g_i(\bar{x}) = 0 & i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

**Théorème 3.2** [44] Pour un programme convexe, tout optimum local est un optimum global.

### 3.2.3 Existence et unicité d'une solution d'un (PM)

**Théorème 3.3** [45] (*Weirstass*) Si  $f$  est une fonction continue sur  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{F}$  est compact (fermé et borné), alors (PM) admet au moins une solution optimale  $x^* \in \mathcal{F}$ .

**Corollaire 3.1** [45] Si  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$  est non vide et fermé et si  $f$  est continue et coercive sur  $\mathcal{F}$  (au sens que  $f(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ), alors (PM) admet au moins une solution optimale.

**Théorème 3.4** [45] Si  $f$  est strictement convexe et l'ensemble  $\mathcal{F}$  est convexe, alors (PM) admet une solution optimale unique.

**Remarque 3.5** La stricte convexité n'assure pas l'existence de la solution mais assure l'unicité.

#### Cas général

**Théorème 3.5** [45] Soit  $x \mapsto f(x)$  une fonction de  $\mathcal{F}$  vérifiant :

1.  $f(x) \rightarrow \infty$  si  $\|x\|_E \rightarrow \infty, v \in \mathcal{F}$ .
2.  $x \mapsto f(x)$  est s.c.i et convexe.

Alors, il existe un élément  $u \in \mathcal{F}$  tel que :

$$f(u) = \inf_{x \in \mathcal{F}} f(x).$$

Cet élément est unique si  $f$  est strictement convexe.

### 3.2.4 Fonction de Lagrange et dualité lagrangienne

La fonction Lagrangienne (ou lagrangien) associée au problème (PM) est défini par :

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^p \lambda h_j(x) + \sum_{i=1}^m \mu g_i(x).$$

Le dual de  $(PM)$  est le programme mathématique  $(DM)$  suivant :

$$(DM) \begin{cases} \sup_{\lambda, \mu} \inf_{x \in \mathcal{F}} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \\ \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = 0 \\ \lambda \in \mathbb{R}_+^p, \mu \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

La dualité joue un rôle fondamental dans l'étude et la résolution de  $(PM)$ . Entre autre, elle fournit des informations supplémentaires très utiles.

### 3.3 Programmation linéaire

La programmation linéaire est une branche de l'optimisation permettant de résoudre de nombreux problèmes économiques et industriels.

Dans cette section, nous étudions des problèmes de minimisation pour lesquels la fonction objectif et les contraintes sont linéaires.

**Définition 3.15** Un programme linéaire, c'est :

- Un ensemble de  $n$  variables réelles  $x_1, \dots, x_n$ .
- Un ensemble de  $m$  contraintes  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j (\leq, \geq, =) b_i$  pour  $i = 1, \dots, m$ .
- Une fonction d'optimisation  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$  à minimiser ou maximiser.

Un programme linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées 'contraintes' qui sont linéaires et à partir desquelles on doit optimiser une fonction également linéaire appelé 'objective' (économique) sous la forme :

$$(PL) \begin{cases} Opt \left( \sum_{j=1}^n c_j x_j \right) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, \geq, =) b_i & i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0. & j = 1, \dots, n, \end{cases}$$

ou sous la forme matricielle :

$$(PL) \begin{cases} Opt(c^t x) \\ Ax(\leq, \geq, =)b \\ x \geq 0. \end{cases}$$

tel que :

- $Opt = \max$  ou  $\min$ .
- $c^t x = \sum_{j=1}^n c_j x_j$  est la fonction à optimiser.
- $c^t x \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur coût.
- $b \in \mathbb{R}^n$  est le second membre.
- $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est la matrice des contraintes.

### 3.3.1 Formes usuelles d'un programme linéaire

Un programme linéaire est mis sous forme canonique si toutes les contraintes sont des inégalités, si ces dernières sont des égalités le programme est mis sous la forme standard.

#### a) Forme canonique :

Un programme linéaire  $(PL)$  est sous forme canonique si toutes les contraintes sont des inégalités, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme :

$$(PL) \begin{cases} \min c^t x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

où  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $c, x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

#### b) La forme standard :

Un programme linéaire  $(PL)$  est sous forme standard si toutes les contraintes

sont des égalités, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme :

$$(PL) \begin{cases} \min c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

où  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $c, x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

On peut toujours passer d'une forme à une autre en introduisant des variables d'écart comme suit :

1) Ramener  $(PL)$  de la forme standard à la forme canonique par l'équivalence suivante :

$$Ax = b \Leftrightarrow Ax \leq b \text{ et } Ax \geq b.$$

2) Ramener  $(PL)$  de la forme canonique à la forme standard se fait comme suit :

$$Ax \leq b \Rightarrow Ax + y = b \text{ avec } y \geq 0 \text{ ou } Ax \geq b \Rightarrow Ax - y = b \text{ avec } y \geq 0.$$

#### 3.3.2 Dualité en programmation linéaire

A chaque programme linéaire est associé un autre programme linéaire appelé dual.

Soit un programme linéaire  $(PL)$  standard, son programme dual  $(DL)$  est défini comme suit :

$$(DL) \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y \leq c \\ y \in \mathbb{R}^m, \end{cases}$$

ce qui est équivalent à :

$$(DL) \begin{cases} \max b^t y \\ A^t y + s = c \\ y \in \mathbb{R}^m, s \geq 0, \end{cases}$$

### Chapitre 3. Généralités sur la programmation mathématique

---

où  $s \in \mathbb{R}^n$  désigne une variable d'écart. Les ensembles des solutions réalisables et strictement réalisables de  $(PL)$  et  $(DL)$  seront notés respectivement  $F_P, F_P^0, F_D$  et  $F_D^0$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}F_P &= \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x \geq 0\} \\F_P^0 &= \{x \in \mathbb{R}^n, Ax = b, x > 0\},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}F_D &= \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, A^t y + s = c, s \geq 0\} \\F_D^0 &= \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, A^t y + s = c, s > 0\}.\end{aligned}$$

**Théorème 3.6** (*dualité faible*) Si  $x$  et  $y$  sont respectivement des solutions réalisables pour  $(PL)$  et  $(DL)$  alors :

$$b^t y \leq c^t x.$$

**Théorème 3.7** [43] (*dualité forte*) Si  $x$  et  $(y, s)$  sont respectivement des solutions réalisables pour  $(PL)$  et  $(DL)$  tel que :

$$b^t y = c^t x,$$

alors  $x$  et  $(y, s)$  sont des solutions optimales (respectivement) de  $(PL)$  et  $(DL)$ .

**Théorème 3.8** [43] Soient  $x$  et  $(y, s)$  respectivement des solutions réalisables pour  $(PL)$  et  $(DL)$ . On appelle **saut de dualité**, la quantité suivante :

$$c^t x - b^t y = c^t x - x^t A^t y = x^t (c - A^t y) = x^t s.$$

- Si l'un des problèmes  $(PL)$  et  $(DL)$  admet une solution optimale finie, il est de même pour l'autre, et les valeurs correspondantes des objectifs sont égales.

- Si l'objectif d'un problème (dual ou primal) n'est pas borné, l'autre problème n'admet pas de solution réalisable.

### 3.3.3 Résolution d'un programme linéaire

#### Méthode du simplexe

Cette méthode a été développée à la fin des années 40 par G.Dantzig. Elle tient compte systématiquement des résultats établis précédemment. Elle évolue sur la frontière du domaine réalisable de sommet en sommet adjacent, en réduisant la valeur de l'objectif jusqu'à l'optimum. Un critère d'optimalité simple permet de reconnaître le sommet optimal. Le nombre de sommet étant fini, l'algorithme ainsi défini converge en un nombre fini d'itérations n'excédant pas le nombre  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$  sous l'hypothèse que tous les sommets visités sont non dégénérés.

Dans le cas dégénéré l'algorithme risque de cycler, cependant il existe des techniques convenables pour éviter ce phénomène. En général, la méthode du simplexe possède un comportement numérique très satisfaisant confirmé par ses applications multiples dans la résolution d'une large classe de problèmes pratiques. En théorie, la méthode n'a pas autant de succès, elle est plutôt jugée inefficace à cause de sa complexité arithmétique exponentielle qui est de l'ordre de  $O(2^n)$  opérations.

#### Méthode de points intérieurs

Actuellement, les méthodes de points intérieurs sont devenues compétitives à la méthode du simplexe surtout pour les problèmes de grande taille (>10000 variables ou contraintes) [57].

On désigne par méthode de points intérieurs, toute procédure de résolution générant une suite de points appartenant à l'intérieur relatif du domaine réalisable et convergeant vers une solution optimale.

Ces méthodes ont été développées dans les années 60 dans le but de



résoudre des programmes mathématiques non linéaires. Leur utilisation pour la programmation linéaire n'a pas reçu autant d'enthousiasme à cause de la dominance quasi totale de la méthode du simplexe à cette époque. Après l'apparition de l'algorithme de Karmarkar en 1984 pour la programmation linéaire, les méthodes de points intérieurs ont connu une véritable révolution. On enregistre plus de 3000 publications en quelques années.

Il y a, principalement, trois grandes catégories de méthodes de points intérieurs à savoir :

- Méthodes affines.
- Méthodes de trajectoire centrale.
- Méthodes de réduction du potentiel.

La première *méthode affine* (affine methods) a été proposée par Dikin (1967), pour la programmation linéaire et la programmation quadratique. C'est une méthode primale, performante en pratique, quoique sensible au choix initial, il n'y a pas de démonstration de complexité polynomiale. Elle est simple et ne nécessite ni transformation projective, ni fonction potentiel, ni préparation du problème.

Les *méthodes de trajectoire centrale* (path-following methods) sont articulées autour du chemin central, leur principe revient à définir un certain voisinage autour du chemin central, et à faire évoluer les itérés à l'intérieur de ce voisinage tout en progressant vers la solution.

La complexité polynomiale est garantie (le terme barrière joue le rôle d'un potentiel). Les performances numériques sont meilleures que celles des méthodes affines.

Les *méthodes de réduction de potentiel* (potential reduction methods) ne suivent pas explicitement le chemin central. Elles utilisent une fonction potentiel logarithmique. Ces méthodes n'est pas la simplicité des méthodes affines,

et n'ont pas reçu beaucoup d'attention au niveau des tests numériques. Ceci est peut être dû aux difficultés algorithmiques rencontrées au départ. Elles sont, cependant, plus attractives pour au moins les deux raisons suivantes :

- Leur complexité polynomiale est garantie.

- Elles peuvent devenir très efficace, avec une bonne recherche linéaire sur la fonction potentiel.

Ces méthodes jouent un rôle important dans l'étude et la résolution des programmes mathématiques à grandes dimensions. Elles sont développées lorsque Karmarkar (1984) a proposé un algorithme polynomial de complexité  $O(n^{3.5}L)$ , efficace en pratique, basé sur une méthode de points intérieurs. L'intérêt pour ces méthodes, principalement, développées depuis les années 60 par Dikin (1967) [22] et Fiacco et McCormick (1968) [24], a connu un renouveau pour les problèmes non linéaires et a ouvert un nouveau domaine pour les problèmes linéaires. La distinction entre la programmation linéaire et non linéaire n'était plus aussi nette.

Den Hertog (1994), a classé les méthodes de points intérieurs en quatre catégories :

- Méthodes affines.
- Méthodes de réduction du potentiel.
- Méthodes de trajectoire centrale.
- Méthodes projectives avec potentiel.

Dans la suite de ce travail, on s'intéresse à la résolution d'un programme linéaire en utilisant la méthode projective de Karmarkar .

## 3.4 Méthode projective de Karmarkar

En 1984, Karmarkar [42] ouvre un nouveau volet dans la programmation linéaire et les méthodes de points intérieurs. L'algorithme de Karmarkar est, donc certainement, l'un des progrès les plus significatifs dans le domaine de la programmation mathématique.

### 3.4.1 Problème linéaire traité par Karmarkar

La méthode de Karmarkar est destinée à résoudre les problèmes de la forme :

$$(PK) \begin{cases} \min c^t x = z^* = 0 \\ Ax = 0 \\ x \in S_n = \{x \in \mathbb{R}^n / e_n^t x = 1, x \geq 0\}, \end{cases}$$

où  $c \in \mathbb{R}^n$  ( vecteur coût ),  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A$  est une matrice  $m \times n$  réelle de plein rang ( $rg A = m < n$ ) et  $e_n^t = (1, 1, \dots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$ .

Ayant comme solution strictement réalisable le centre du simplexe  $S_n$  :

$$x^0 = \frac{e_n}{n}.$$

**Remarque 3.6** 1 - Si le système des contraintes n'est pas homogène ( $Ax = b$ , et  $b \neq 0$ ), ou si la valeur optimale est connue et non nulle, l'égalité :

$$e_n^t x = 1,$$

permet de se ramener facilement à la forme (PK). En effet, il suffit d'écrire :

$$Ax = b,$$

sous la forme :

$$(Ax = be_n^t x) \Rightarrow (A - be_n^t) x = 0.$$

Ainsi l'opérateur précédent devient :

$$\tilde{A}x = 0 \text{ avec } \tilde{A} = A - be_n^t.$$

De la même manière, si :

$$c^t x = z^*.$$

Multiplions le 2<sup>ième</sup> membre de l'équation précédente par :

$$e_n^t x = 1,$$

pour obtenir :

$$(c^t x - z^* e_n^t x = 0) \Rightarrow ((c^t - z^* e_n^t) x = 0).$$

Posons :

$$(\tilde{c}^t = c^t - z^* e_n^t) \Rightarrow (\tilde{c}^t x = 0).$$

2 - L'ignorance de la valeur optimale, ne constitue pas une difficulté, car il existe plusieurs variantes qui approximent cette valeur.

3 - Le problème (*PK*) peut être vu comme suit :

Trouver  $x \geq 0$  tel que :

$$\begin{cases} c^t x = 0 \\ Ax = 0 \\ e_n^t x = 1 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

### 3.4.2 Algorithme de Karmarkar

#### Transformation projective de Karmakar

D'après plusieurs auteurs, la transformation projective joue un grand rôle pour comprendre les méthodes de points intérieurs en général. Pour cela,

Karmarkar utilise à chaque itération la transformation projective  $T_k$  :

$$T_k : S_n \longrightarrow S_n \\ x \longmapsto y = T_k (x),$$

où

$$T_k (x) = \frac{D_k^{-1}x}{e_n^t D_k^{-1}x},$$

et

$$x = T_k^{-1} (y) \text{ avec } T_k^{-1} (y) = \frac{D_k y}{e_n^t D_k y},$$

tel que :  $D_k = \text{diag} (x^k)$ .

$X = \text{diag} (x)$  est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les composantes du vecteur  $x$ , d'où  $X e_n = x$ .  $X^{-1}$  est la matrice inverse de  $X$ .

Le principe de l'algorithme de Karmarkar pour résoudre un problème de la forme  $(PK)$ , consiste à construire à partir d'un point initiale  $x^0$ , une suite de points intérieurs qui converge vers une solution optimale du problème  $(PK)$ .

Pour ramener l'objectif  $(c^t x)$  à zéro, on le projète par la projection  $P_k$  et on le minimise localement sur une sphère inscrite dans la région réalisable du problème  $(PK)$ .

A chaque itération  $k$ , l'itéré ( $x^k > 0$ ) est renvoyé au centre du simplexe  $S_n$  par la transformation  $T_k$  et ainsi de suite, jusqu'à ce que le test d'optimalité ( $c^t x \leq \varepsilon$ ) soit vérifié.

Pour plus de détails sur la description de la méthode, une présentation très détaillée de la méthode de Karmarkar est décrite dans [9] et [43].

#### Algorithme de Karmarkar

##### Début de l'algorithme

**Initialisation**

$$x^0 = \frac{e_n}{n}, \quad k = 0.$$

**Tant que**  $c^t x > \varepsilon$  **faire**

**Etape 0 :** (Construire la matrice des contraintes  $B_k$ )

$$D_k = \text{diag} (x_k)$$

$$A_k = AD_k$$

$$B_k = \begin{bmatrix} A_k \\ e_n^t \end{bmatrix}.$$

**Etape 1 :** (Calculer la projection  $p_k$ )

$$\begin{aligned} p_k &= \left[ I - B_k^t (B_k B_k^t)^{-1} B_k \right] D_k c \\ &= \left[ I - A_k^t (A_k A_k^t)^{-1} A_k - \frac{1}{n} e_n e_n^t \right] D_k c. \end{aligned}$$

**Etape 2 :** (Normaliser la projection  $p_k$ )

$$d^k = \frac{p_k}{\|p_k\|}.$$

**Etape 3 :** Calculer l'itéré suivant :

$$y^k = \frac{e_n}{n} - \alpha r d^k, \quad r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \text{ avec } 0 < \alpha < 1,$$

$\alpha$  est le pas de déplacement.

**Etape 4 :** (Revenir au problème initial par  $T_k^{-1}$ )

$$x^{k+1} = T_k^{-1} (y^k) = \frac{D_k y^k}{e_n^t D_k y^k}, \quad k = k + 1.$$

**Fin tant que.**

**Fin Algorithme.**

**Remarque 3.7** Le calcul de la projection  $p_k$  constitue l'opération la plus coûteuse dans l'algorithme. L'efficacité pratique de l'algorithme dépend, en grande partie, de la manière du calcul de  $p_k$ . De même, la vitesse de convergence de l'algorithme dépend du pas de déplacement. En effet, plus  $\alpha$  est grand ( $\alpha > 1$  tout en conservant la faisabilité stricte) plus l'algorithme converge vite.

### 3.4.3 Fonction potentiel & convergence

Pour établir la convergence de l'algorithme, il faut montrer que :

$$\frac{c^t x^{k+1}}{c^t x^k} < q_0,$$

où  $0 < q_0 < 1$  est indépendant de  $k$ .

Or, il est difficile de trouver directement  $q_0$ . Pour surmonter cette difficulté, Karmarkar associe à l'objectif linéaire  $c^t x$  la fonction potentielle logarithmique suivante :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \log \left[ \frac{c^t x}{x_i} \right],$$

définie sur l'ensemble de la stricte réalisabilité :

$$\overset{\circ}{F} = \{x \in \mathbb{R}^n, x > 0, Ax = 0, e_n^t x = 1\}.$$

## 3.5 Etude des performances de l'algorithme de Karmarkar (calcul de la projection $p_k$ )

On a :

$$p_k = \left[ I - A_k^t (A_k A_k^t)^{-1} A_k - \frac{1}{n} e_n e_n^t \right] D_k c.$$

Posons :

$$u = (A_k A_k^t)^{-1} A_k D_k c,$$

donc

$$A_k A_k^t u = A_k D_k c.$$

Par conséquent, le calcul de  $p_k$ , repose en grande partie sur la résolution du système d'équations linéaires précédent.

**Méthode de résolution du système** ( $A_k A_k^t u = A_k D_k c$ ) :

Les méthodes de résolution du système linéaire se divisent en deux catégories :

a- Les méthodes directes : factorisation, par exemple : méthode de Croût, élimination de Gauss, Cholesky..etc.

b- Les méthodes itératives : multiplication du type matrice - vecteur, par exemple : Jacobi, Gauss-Seidel...etc.

Propriété du système su-considéré : La matrice  $A_k A_k^t$  du système est symétrique, définie positive. Les méthodes les plus réputées dans ce cas sont :

a- La factorisation de Cholesky qui est une méthode directe, cas où la dimension du système su - considéré est petite.

b- Les méthodes du type gradient conjugué qui sont des méthodes itératives, ceci correspond au cas où la dimension du système étudié est importante.

**Propriétés de la méthode :**

a- Elle nécessite la préparation du problème dans le cas général sous la forme  $(PK)$ .

b- Son comportement numérique est significatif, surtout pour les grandes dimensions [57].

c- C'est une méthode polynomiale.

d- L'algorithme de Karmarkar est un algorithme du gradient projeté, avec dilatation d'espace à chaque itération.



### 3.5.1 Généralisation de l'algorithme de Karmarkar

Soit le programme linéaire générale écrit sous la forme standard suivante :

$$(PL) \quad \begin{cases} \min c^t x = z^* \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

où

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad b \in \mathbb{R}^m, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

La transformation projective de Karmarkar est définie par :

$$T_a : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}_+^{n+1} \\ x \longmapsto y = T_a(x),$$

tel que :

$$y = T_a(x) = \begin{cases} y_i = \frac{\frac{x_i}{a_i}}{1 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{a_i}\right)} \quad \text{avec } i = 1, \dots, n \\ y_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n y_i, \end{cases}$$

nous permet d'associer à (PL) le programme linéaire suivant :

$$P(z^*) \quad \begin{cases} \min (D_k c, -z^*)^t y = 0 \\ A^k y = 0 \\ y \in S_{n+1}. \end{cases}$$

où

$$A^k = (AD_k, -b) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}.$$

Nous avons donc deux possibilités :

a-  $z^*$  **connue** : On obtient la forme (PK), Par conséquent, on utilise la transformation projective de Karmarkar.

b-  $z^*$  **inconnue** : Karmarkar propose deux variantes :

- 1) La methode 'primale-duale'.
- 2) La "sliding objectif function method" qui consiste à localiser la valeur optimale dans un intervalle suffisamment petit.

### 3.6 Calcul d'une solution initiale strictement réalisable

Un point strictement réalisable de  $(PL)$  est une solution du problème :

$$(R) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } x \\ Ax = b, x > 0. \end{array} \right\}$$

En utilisant la technique de la variable artificielle, le problème  $(R)$  est équivalent au problème suivant :

$$(P_1) \left\{ \begin{array}{l} \min \lambda \\ Ax + \lambda(b - Aa) = b \\ x > 0, \lambda \geq 0. \end{array} \right.$$

Tel que  $a > 0$  est choisi arbitrairement dans l'orthant positif et  $\lambda$  est une variable artificielle. Posons  $y = (x, \lambda)$ ,  $(P_1)$  est équivalent au programme linéaire :

$$(P_2) \left\{ \begin{array}{l} \min c^t y = z^* = 0 \\ \bar{A}y = b \\ y \geq 0, \end{array} \right.$$

où  $c = (0, \dots, 0, 1)^t \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\bar{A} = (A, b - Aa) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$ .

$(P_2)$  vérifie les hypothèses de Karmarkar :

- 1-  $z^* = 0$ .
- 2-  $y = (a, 1)$  solution strictement réalisable de  $(P_1)$ .

3- La matrice  $\bar{A}$  est de plein rang,  $rg(\bar{A}) = m < n + 1$ .

La résolution de  $(R)$  se ramène à celle de  $(P_2)$ . Plus précisément Karmarkar démontre le théorème suivant :

**Théorème 3.9** [42] *Pour  $\varepsilon_0 > 0$  telles que : les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $x$  est une solution strictement réalisable de  $(R)$ .
- 2)  $(P_2)$  admet une solution optimale  $(x, \lambda)$  telle que  $\lambda \leq \varepsilon_0$ .

La solution optimale de  $(R)$  représente une solution réalisable de  $(P_1)$ , ce qui règle le problème d'initialisation posé, cette étape s'appelle la phase 1 de Karmarkar.

L'opération la plus coûteuse, dans l'algorithme de Karmarkar y compris ses variantes, est le calcul de la projection à chaque itération. L'objectif du troisième chapitre est de remédier à cette difficulté. A cet égard, notre travail consiste à introduire une fonction minorante qui remplace le calcul de la projection à chaque itération, cette fonction minorante est simple, d'une seule variable et elle facilite le calcul du pas de déplacement.

## CHAPITRE 4

# Adaptation des fonctions minorantes dans la méthode projective de Karmarkar en programmation linéaire

### Sommaire

---

4.1	Position du problème . . . . .	82
4.2	Généralisation du problème de base . . . . .	83
4.3	Calcul du pas de déplacement par la technique des fonctions minorantes . . . . .	84
4.4	La convergence de l'algorithme . . . . .	93
4.5	Tests numériques . . . . .	94
4.6	Conclusion . . . . .	99

---

La programmation linéaire est certainement l'un des plus beaux succès de la recherche opérationnelle. Ce succès provient d'une part, de la puissance de modélisation qu'elle offre, malgré la limite inhérente qu'impose la linéarité des fonctions impliquées, et d'autre part, de la richesse de la théorie qu'elle

a initié et qui a permis le développement d'un algorithme extrêmement efficace pour sa résolution.

Vers les années quarantes, G. Dantzig présenta l'algorithme de la méthode du simplexe. Ce dernier, très utilisé dans la résolution des problèmes réels, présente, cependant, des comportements théoriques de ceux rencontrés en réalité. Dès le début de son emploi, les mathématiciens n'ont cessé à chercher des algorithmes meilleurs et plus efficaces, capables d'évoluer en parcourant les sommets adjacents d'un polyèdre jusqu'à concourir la solution optimale [45].

Toutefois, beaucoup de techniques ont été développées (par exemple, la programmation non linéaire) sans avoir arrivé à concurrencer la célèbre méthode du simplexe [29]. Cette dernière est considérée, jusqu'à la fin des années soixante, la plus avantageuse en programmation linéaire.

A partir des années soixante dix, on soupçonnait de son efficacité. Ainsi, plusieurs chantiers ouvrent leur porte vers les possibilités d'utilisation des algorithmes du type polynomial avec un nombre minimal d'itérations. Vers 1979, Khachiyan a clarifié la différence entre le comportement pratique de la méthode du simplexe et de son plus mauvais comportement.

A partir des débuts des années quatre vingt, Karmarkar développa un algorithme polynomial et donna suite à des études très importantes relatives à la programmation linéaire [9, 42].

Dès lors, les problèmes de programmation linéaire et non linéaire sont devenus des thèmes de recherche très convoités depuis la relance des méthodes de points intérieurs issues des nouvelles investigations apportées par Karmarkar et autres. En effet, ces méthodes avec leurs éléments nouveaux s'avèrent très intéressantes pour un traitement descend de la programmation linéaire allant de l'aspect théorique pur à l'aspect numérique proprement dit. Les

méthodes de points intérieurs s'avèrent efficaces pour les problèmes d'optimisation à grande taille à cause de leur caractère polynomial. Den Hertog (1994) a classé les méthodes points intérieurs en trois catégories : méthodes affines, méthodes de réduction de potentiel et les méthodes de trajectoire centrale [76]. Les méthodes de points intérieurs ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche, effectués par Den Hertog [21], Nesterov et Nemirovski [63], Roos, Terlaky et Vial [67], Wright [76], Ye [77],...etc. Plusieurs algorithmes ont été proposés pour résoudre les problèmes de programmation linéaire, par les méthodes projectives et leurs variantes [16, 62], les méthodes de trajectoire centrale [6, 8] et les méthodes barrières logarithmiques [18, 47].

De même, depuis les années 90, les méthodes de points intérieurs sont devenues intéressantes après leurs lancements par Karmarkar en 1984. Aujourd'hui, les méthodes de point intérieur sont des vrais concurrents pour la méthode du simplexe surtout pour les problèmes de grandes dimensions [57].

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer l'idée de A. Leulmi et al. [48] des fonctions minorantes dans la Programmation Semi Définie Linéaire SDP au niveau de la phase 2 pour trouver une solution optimale de  $(PL)$ . Cette nouvelle technique basée sur une fonction minorante introduite pour le calcul du pas de déplacement, et ce dans le but de réduire le coût calculatoire de l'algorithme de Karmarkar.

## 4.1 Position du problème

Dans tout ce qui suit, on adopte les conventions suivantes : Le vecteur  $e \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1, étant donné un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $X$  est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les composantes de  $x$  (*i.e.*,  $X = \text{diag}\{x\}$ ). L'algorithme de Karmarkar s'applique au problème suivant :

$$(ka) \left\{ \begin{array}{l} \min \langle c, x \rangle = 0 \\ Ax = 0 \\ x \geq 0 \\ x \neq 0, \end{array} \right.$$

où  $c \in \mathbb{R}^n$  et  $A$  est une matrice  $m \times n$  de rang  $m$ .

Les hypothèses suivantes sont assumées :

1.  $Ax = 0$  et  $x \geq 0 \Rightarrow \langle c, x \rangle \geq 0$ .
2. On connaît un point  $x > 0$  tel que  $Ax = 0$  et  $\langle c, x \rangle > 0$ .
3. On sait que le problème  $(ka)$  a des solutions.

On pose :

$$C = \{x : Ax = 0, x \geq 0, x \neq 0\}.$$

Si  $\bar{x}$  est solution de  $(ka)$  alors  $k\bar{x}$  avec  $k > 0$  est aussi solution.

On peut ainsi procéder à une normalisation de  $x$  et considérer par exemple le problème linéaire suivant :

$$(pk) \left\{ \begin{array}{l} \min c^t x = 0 \\ Ax = 0 \\ \langle e, x \rangle = n \\ x \geq 0. \end{array} \right.$$

On note que l'ensemble des solutions optimales de ce problème est un

polyèdre convexe contenu dans la frontière relative de l'ensemble des points réalisables.

## 4.2 Généralisation du problème de base

Soit le programme linéaire générale écrit sous la forme standard suivante :

$$(PL) \begin{cases} \min c^t x = z^* \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases}$$

où  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $c, x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ .

Si la valeur optimale est connue à priori mais non nulle, et si le système de contraintes est de la forme :

$$Ax = b, b \neq 0,$$

on peut ramener ce problème au problème de base en introduisant le changement de variable :

$$x = \frac{y[i]}{y_{n+1}} \text{ avec } i = 1, \dots, n \text{ et } y \geq 0,$$

La transformation projective de Karmarkar est définie par :

$$T_a : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow S_{n+1} \\ x \longmapsto y = T_a(x),$$

tel que :

$$y = T_a(x) = \begin{cases} y_i = \frac{\frac{x_i}{a_i}}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i}} \text{ avec } i = 1, \dots, n \\ y_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n y_i, \end{cases}$$



donc  $(PL)$  se transforme à :

$$(PL1) \begin{cases} \min c^t \frac{y[i]}{y_{n+1}} = z^* \\ A \frac{y[i]}{y_{n+1}} = b \\ \frac{y[i]}{y_{n+1}} \geq 0, i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

alors les problème :

$$(PL1) \begin{cases} \min c^t y [i] = z^* y_{n+1} \\ Ay [i] = by_{n+1} \\ \frac{y[i]}{y_{n+1}} \geq 0, i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

$$(PL1) \begin{cases} \min c^t y [i] - z^* y_{n+1} = 0 \\ Ay [i] - by_{n+1} = 0 \\ \frac{y[i]}{y_{n+1}} \geq 0, i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

$$(PL1) \begin{cases} \min c^t y = 0 \\ A'y = 0 \\ y \geq 0, \end{cases}$$

sont équivalents, avec :  $c' = (c, -z^*)$  et  $A' = (A, -b)$ .

## 4.3 Calcul du pas de déplacement par la technique des fonctions minorantes

### 4.3.1 La fonction potentiel

La convergence de l'algorithme est basée sur la fonction suivante, appelée " fonction potentiel multiplicative ", définie pour tout  $x \in C$  et  $x > 0$ , par :

$$f(x) = \frac{\langle c, x \rangle^n}{\prod_{i=1}^n x_i}$$

que l'on prolonge par semi-continuité sur  $C$ .

On peut aussi considérer la fonction " fonction potentiel logarithmique ", définie par :

$$q(x) = \ln f(x) = n \ln (\langle c, x \rangle) - \sum_{i=1}^n \ln (x_i),$$

La fonction  $f$  vérifie les propriétés suivantes :

- 1)  $0 < f(x) < +\infty$  si  $x > 0$  et  $Ax = 0$ .
- 2)  $f(x) = +\infty$  si  $x$  appartient à la frontière relative de  $C$  sans être solution de  $(ka)$ .
- 3)  $f(x) = 0$  si  $x$  est solution de  $(ka)$  ou si  $x = 0$ .
- 4)  $f(kx) = f(x)$  pour tout  $x \in C$  et tout  $k > 0$ .

**Preuve.** 2) Il est clair que  $f(x) = +\infty$  si  $x$  appartient à la frontière relative de  $C$  (un au moins de  $x_i$  est nul) et si on a  $\langle e, x \rangle > 0$ .

3) Supposons maintenant que  $x$  est solution de  $(Ka)$ , considérons la fonction :

$$\theta(t) = f(x + t(\hat{x} - x)) = \frac{t^n \langle a, x \rangle^n}{\prod_{i=1}^n x_i + t(\hat{x}_i - x_i)}$$

Un des  $x_i$  au moins étant non nul,  $\theta(t)$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers 0. ■

Ainsi, le problème  $(ka)$  consiste à trouver les solutions optimales du problème :

$$(km) \begin{cases} \min f(x) = 0 \\ Ax = 0 \\ x \geq 0 \\ x \neq 0. \end{cases}$$

### 4.3.2 Description de l'algorithme :

Partant du point  $x \in C$  qui est connu, l'algorithme de Karmarkar est une méthode de descente qui génère, en raison du caractère barrière de la

## Chapitre 4. Adaptation des fonctions minorantes dans la méthode projective de Karmarkar en programmation linéaire

---

fonction objectif  $f$ , une suite de points tous contenus dans l'intérieur relatif de  $C$ , d'où la dénomination de méthode de points intérieurs. Nous allons décrire le passage de l'itéré initial  $x$  à l'itéré suivant  $\tilde{x}$ .

On suppose que l'itéré  $\tilde{x}$  vérifie  $\tilde{x} > 0$  et  $A\tilde{x} = 0$ .

### Normalisation :

On normalise  $x$  par la relation :

$$x = \sqrt{\frac{n}{\langle x, x \rangle}} x,$$

de manière à avoir  $\langle x, x \rangle = n$ .

### Direction de descente :

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au calcul de la direction de descente. Il est facile de voir que :

$$\frac{f(\tilde{x})}{f(x)} = g(z),$$

avec :

$$z = X^{-1}\tilde{x}, g(z) = \frac{\langle b, z \rangle^n}{\prod_{i=1}^n z_i} \text{ et } b = \frac{1}{\langle c, x \rangle} Xc.$$

Les conditions  $A\tilde{x} = 0, \tilde{x} \geq 0$  et  $\tilde{x} \neq 0$  se transposent en :

$$AXz = 0, z \geq 0 \text{ et } z \neq 0.$$

Posons  $B = AX$ .

Le problème  $(km)$  est équivalent au problème :

$$(kmz) \left\{ \begin{array}{l} \min g(z) = 0 \\ Bz = 0 \\ z \geq 0 \\ z \neq 0, \end{array} \right.$$

## Chapitre 4. Adaptation des fonctions minorantes dans la méthode projective de Karmarkar en programmation linéaire

---

$e$  est solution réalisable de ce problème et on a  $g(e) = \langle b, e \rangle = 1$ .

Puisque on a  $g(kz) = g(z)$  pour tout  $z \geq 0$  et tout  $k > 0$ , on travaillera sur le problème normalisé suivant :

$$(kz) \begin{cases} \min g(z) = 0 \\ Bz = 0 \\ \langle e, z \rangle = n \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Il est facile de voir que la matrice  $(A^t, x)$  est de rang  $m + 1$ , il en est de même de la matrice  $(B^t, e)$ . L'obtention d'une direction de descente de Newton au point  $e$  pour le problème  $(kz)$  s'obtient en résolvant le problème quadratique :

$$(PQ) \begin{cases} \min \frac{1}{2} \langle \nabla^2 g(e) d, d \rangle + \langle \nabla g(e), d \rangle \\ Bd = 0 \\ \langle e, d \rangle = 0. \end{cases}$$

Pour cela, introduisons la matrice :

$$P = I - (B^t, e) \left[ (B^t, e)^t (B^t, e) \right]^{-1} (B^t, e)^t,$$

qui correspond à la projection sur le sous espace linéaire :

$$E = \{d : Bd = 0, \langle e, d \rangle = 0\},$$

on a :

$$P^2 = P = P^t, PB^t = 0 \text{ et } Pe = 0.$$

Il est facile de voir que :

$$P\nabla g(e) = Pb \text{ et } P\nabla^2 g(e)P = I + n(n-1)Pbb^tP,$$

le problème quadratique est équivalent au problème :

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2} \langle \nabla^2 g(e) d, d \rangle + \langle \nabla g(e), d \rangle \\ Pd = d, \end{cases}$$

dont la solution optimale est colinéaire à :

$$d = -Pb = -P\nabla g(e).$$

La direction  $d$  coïncide donc avec la direction donnée par le gradient projeté. Nous nous intéressons maintenant à quelques propriétés de  $d$ .

Tout d'abord on a :

$$\langle d, e \rangle = -\langle Pb, e \rangle = -\langle b, Pe \rangle = 0,$$

on observe ensuite que l'on a d'une part :

$$\left\{ \begin{array}{l} z : \langle e, z \rangle = n \\ \|z - e\|^2 \leq \frac{n}{n-1} \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{l} z : \langle e, z \rangle = n \\ z \geq 0 \end{array} \right\} \subset \left\{ \begin{array}{l} z : \langle e, z \rangle = n \\ \|z - e\|^2 \leq n(n-1) \end{array} \right\}$$

et d'autre part :

$$\begin{cases} \min \langle b, z - e \rangle = -1 \\ Bz = 0 \\ \langle e, z \rangle = n \\ z \geq 0, \end{cases}$$

et puisque  $P(e - \bar{z}) = e - \bar{z}$  :

$$\langle b, z - e \rangle = \langle Pb, z - e \rangle,$$

on obtient :

$$\|Pb\| \sqrt{\frac{n}{n-1}} \leq 1 \leq \|Pb\| \sqrt{n(n-1)},$$

donc en résumé :

$$\langle d, b \rangle = -\|d\|^2 = -\|Pb\|^2, \langle d, e \rangle = 0$$

et

$$\frac{1}{n(n-1)} \leq \|d\|^2 \leq \frac{n-1}{n}.$$

Dans ce qui suit, on dénote par  $\bar{d}$  et  $\sigma$  la moyenne et l'écart type du  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ . On a :

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = 0 \text{ et } \frac{1}{n^2(n-1)} \leq \sigma^2 = \frac{\|d\|^2}{n} - \bar{d}^2 \leq \frac{n-1}{n^2}.$$

### 4.3.3 Calcul du pas de déplacement

Il consiste à obtenir une valeur  $\alpha > 0$  telle que l'on ait  $(e + \alpha d) > 0$  et qui donne une décroissance significative de  $\varphi_0(\alpha) = \ln(g(e + \alpha d))$ . Puisque l'équation  $\varphi_0'(\alpha) = 0$  ne peut pas être résolue explicitement, dans une grande classe de problème d'optimisation, donc il est normal de penser à des méthodes itératives de résolution. On peut aussi appliquer à  $\varphi_0$  une méthode de recherche linéaire classique. Dans les deux cas, cela nécessite plusieurs évaluations de la fonction  $\varphi_0$  et de sa dérivée et donc c'est coûteux. Notre démarche consiste à minimiser une minorante  $\varphi$  de la fonction  $\varphi_0$  dont on peut obtenir le minimum de façon explicite. Rappelons que :

$$\varphi_0(\alpha) = n \ln(1 - \alpha \|d\|^2) - \sum_{i=1}^n \ln(1 + \alpha d_i),$$

il est clair que  $\varphi_0(0) = 0$ .

On a besoin du théorème suivant pour trouver la fonction minorante de  $\varphi(\alpha)$ .

**Théorème 4.1** [18] *Supposons que les  $x_i > 0$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$  alors :*

$$n \ln(\bar{x} - \sigma_x \sqrt{n-1}) \leq A \leq \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \leq B \leq n \ln(\bar{x}),$$

avec :

$$A = (n-1) \ln\left(\bar{x} + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}}\right) + \ln(\bar{x} - \sigma_x \sqrt{n-1})$$

et

$$B = \ln(\bar{x} + \sigma_x \sqrt{n-1}) + (n-1) \ln\left(\bar{x} - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n-1}}\right),$$

tels que  $\bar{x}$  et  $\sigma_x$  sont respectivement, la moyenne et l'écart type d'une série statistique  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de  $n$  nombres réels. Ces quantités sont définies comme suit :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Dans ce qui suit, on prend  $x_i = 1 + \alpha d_i, i = 1, \dots, n$ , on a  $\bar{x} = 1 + \alpha \bar{d}$  et  $\sigma_x = \alpha \sigma_d$ . En raison de ce théorème on a :

$$\sum_{i=1}^n \ln(1 + \alpha d_i) \geq (n-1) \ln\left(1 - \frac{\sigma \alpha}{\sqrt{n-1}}\right) + \ln(1 + \sigma \alpha \sqrt{n-1}),$$

et donc

$$n \ln(1 - n\sigma^2) - \sum_{i=1}^n \ln(1 + d_i t) \geq n \ln(1 - n\sigma^2) - (n-1) \ln\left(1 - \frac{\sigma \alpha}{\sqrt{n-1}}\right) - \ln(1 + \sigma \alpha \sqrt{n-1}).$$

Alors on obtient la fonction minorante suivante :

$$\varphi(\alpha) = n \ln(1 - n\alpha\sigma^2) - (n-1) \ln\left(1 - \frac{\sigma \alpha}{\sqrt{n-1}}\right) - \ln(1 + \sigma \alpha \sqrt{n-1}).$$

$\varphi$  vérifie les propriétés suivantes :

$$\varphi''(0) = -\varphi'(0) = \|d\|^2 \quad \text{et} \quad \varphi(0) = 0.$$

En outre :

$$\varphi(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in [0, \hat{\alpha}_1[ ,$$

$\varphi$  est convexe et admet un minimum unique sur  $[0, \hat{\alpha}_1[$  avec  $\hat{\alpha}_1 = \frac{\sqrt{n-1}}{\sigma}$ , qui est obtenu en résolvant l'équation :

$$\varphi'(\alpha) = -\frac{n^2\sigma^2}{1 - n\alpha\sigma^2} + \frac{(n-1)\sigma}{\sqrt{n-1} - \sigma\alpha} - \frac{\sigma\sqrt{n-1}}{1 + \sigma\alpha\sqrt{n-1}} = 0.$$

On en déduit que la fonction  $\varphi$  atteint son minimum au point :

$$\bar{\alpha} = \frac{n\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1} - n(n-2)\sigma}.$$

On prend pour nouvel itéré :

$$\tilde{x} = X(e + \bar{\alpha}d) = x + \bar{\alpha}Xd.$$

Par construction on a  $\tilde{x} > 0$  et  $A\tilde{x} = 0$ .

### La décroissance

En remplaçant  $\bar{\alpha}$  par sa valeur on obtient :

$$\begin{aligned} 1 - n\bar{\alpha}\sigma^2 &= \frac{\sqrt{n-1} - n(n-2)\sigma - n^2\sigma^2\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1} + n(n-2)\sigma} \\ 1 + \frac{\sigma\bar{\alpha}}{\sqrt{n-1}} &= \frac{\sqrt{n-1} - n(n-1)\sigma}{\sqrt{n-1} + n(n-2)\sigma} \\ 1 - \sigma\bar{\alpha}\sqrt{n-1} &= \frac{\sqrt{n-1} - n\sigma}{\sqrt{n-1} + n(n-2)\sigma}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\alpha}) &= (n-1) \ln \left( 1 - \frac{\sqrt{n-1}\sigma - n(n-2)\sigma - n^2\sigma^2\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1} + n(n-2)\sigma} \right) \\ &\quad + \ln \left( \frac{\sqrt{n-1} - n(n-2)\sigma - n^2\sigma^2\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1} - n\sigma} \right). \end{aligned}$$

Finalement on a :

$$\varphi(\bar{\alpha}) = (n-1) \ln \left( 1 + \frac{n\sigma}{\sqrt{n-1}} \right) + \ln (1 - n\sigma\sqrt{n-1}).$$

La quantité  $\varphi(\bar{\alpha}) - \varphi(0) = \varphi(\bar{\alpha})$  dépend de  $\sigma$ . On pose :

$$u = n\sigma\sqrt{n-1},$$

on obtient :  $1 \leq u \leq n-1$  et

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\alpha}) &= (n-1) \ln \left( 1 + \frac{n\sigma}{\sqrt{n-1}} \right) + \ln (1 - n\sigma\sqrt{n-1}) \\ &= (n-1) \ln \left( 1 + \frac{u}{n-1} \right) + \ln (1 - u) = \xi(u). \end{aligned}$$



On en déduit :

$$\varphi(\bar{\alpha}) = \xi(u) > \ln(2) - 1 + \frac{n}{2(n-1)}(u+1) \geq \ln\left(\frac{2}{e}\right) \simeq -0.307.$$

On conclut que dans le pire des cas (celui où  $u = 1$ ), on a :

$$f(\tilde{x}) > \frac{2}{e}f(x) = 0.735f(x).$$

Rappelons que la fonction  $\varphi$  atteint son minimum sur un point unique  $\bar{\alpha}$  qui est la racine de  $\varphi'(\alpha)$ .

Alors, la valeur de  $\bar{\alpha}$  est explicitement calculée, donc on prend  $\bar{\alpha} \in [0, \alpha^* - \varepsilon[$  et  $\varphi'(\alpha) < 0$  avec  $\varepsilon$  une précision donnée.

**Remarque 4.1** Le calcul de  $\bar{\alpha}$  est approximativement calculé par une procédure dichotomique, dans le cas où  $\bar{\alpha} \notin [0, \alpha^*[$  et  $\varphi'(\alpha) > 0$ , alors, prendre,  $a = 0$  et  $b = \alpha^* - \varepsilon$ .

Tant que  $|b - a| > 10^{-4}$  faire

Si  $\varphi'(\frac{a+b}{2}) < 0$  alors  $b = \frac{a+b}{2}$

Sinon  $a = \frac{a+b}{2}$ ,  $b = \alpha^* - \varepsilon$

Fin tant que.

Ce calcul garantit une meilleure approximation de la minimisation de  $\varphi(\alpha)$  tout en restant dans le domaine de  $\varphi$ .

#### 4.3.4 Description de l'algorithme

**Initialisation :** On part de  $x > 0$  tel que  $Ax = 0$ ,  $\epsilon$  précision donnée.

**Itération :**

**Tant que  $c^t x > \epsilon$  faire :**

**1- Normalisation :**

$$x = \sqrt{\frac{n}{\langle x, x \rangle}} x.$$

**2- Direction de descente :** On prend  $b$  et  $B$  comme suit :

$$b = \frac{1}{\langle c, x \rangle} Xc, B = AX.$$

On détermine  $d$  projection de  $b$  sur le sous espace linéaire :

$$\{d : B_k d = 0, \langle e, d \rangle = 0\}.$$

Finalement la direction de descente est

$$\delta = Xd.$$

**3- Pas de déplacement :** On calcule :

$$\sigma = \frac{\|d\|}{\sqrt{n}}, \bar{\alpha} = \frac{n\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-1} - n(n-2)\sigma}.$$

**4- Le nouvel itéré :** est  $x^{k+1} = x^k + \alpha_k d_k$ .

**5- Prenant**  $k = k + 1$  et retourner à (1).

**Fin tant que.**

**Fin d'algorithme.**

## 4.4 La convergence de l'algorithme

**Lemme 4.1** [49] *A la  $k^{\text{ème}}$  itération on a :*

$$f(x_k) < 0.735^k f(x_0).$$

*Donc  $f(x_k)$  converge linéairement vers 0. On en déduit que toute valeur d'adhérence de la suite  $(x_k)$  est solution optimale du problème (ka).*

## 4.5 Tests numériques

Les exemples suivants sont tirés de la littérature voir par exemple [9, 45, 62] et sont mis en œuvre dans MATLAB R2013a sur Pentium (R). Nous avons pris  $\varepsilon = 1.0e - 007$ .

Dans le tableau des résultats, (Itrat) représente le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une solution optimale, (Temp) représente le temps de calcul en secondes (s), (Algkarm) représente la méthode projective de Karmarkar et (St) représente notre stratégie qui utilise la fonction de minoration  $\varphi$ .

### 4.5.1 Exemples de tailles fixes

**Exemple 1 :**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad c = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}^t.$$

**Tableau comparatif :**

Méthode	Itrat	Temp
St	03	0.0016
AlgKarm	08	0.018

**Exemple 2 :**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t.$$

**Tableau comparatif :**

Méthode	Itrat	Temp
St	03	0.0016
AlgKarm	04	0.031

**Exemple 3 :**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et } c = [2 \quad 1 \quad 0]^t.$$

**Tableau comparatif :**

Méthode	Itrat	Temp
St	02	0.001
AlgKarm	05	0.042

**Exemple 4 :**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et } c = [4 \quad 1 \quad 2 \quad 0]^t.$$

**Tableau comparatif :**

Méthode	Itrat	Temp
St	04	0.0028
AlgKarm	07	0.067

**Exemple 5 :**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et } c = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 0]^t.$$

**Tableau comparatif :**

Méthode	Itrat	Temp
St	03	0.0023
AlgKarm	13	0.032

**Exemple 6 :**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{et } c = [3 \quad 2 \quad 1 \quad 3]^t.$$

**Tableau comparatif :**

Méthode	Itrat	Temp
St	05	0.0046
AlgKarm	10	0.032

**Exemple 7 :**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et } c = [1 \ 2 \ 3 \ 5 \ 4]^t.$$

**Tableau comparatif :**

Méthode	Itrat	Temp
St	01	0.001
AlgKarm	16	0.059

**Exemple 8 :**

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et } c = [-3 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0]^t.$$

**Tableau comparatif :**

Méthode	Itrat	Temp
St	04	0.024
AlgKarm	15	0.062

**Exemple 9 :**

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.6 \\ 2 \\ 1.7 \end{bmatrix} \quad \text{et } c = [10 \ 4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t.$$

**Tableau comparatif :**

Méthode	Itrat	Temp
St	02	0.011
AlgKarm	16	0.053

**Exemple 10 :**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{et } c = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ -2]^t.$$

**Tableau comparatif :**

Méthode	Itrat	Temp
St	03	0.013
AlgKarm	10	0.078

**Exemple 11 :**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et } c = [1 \ 0 \ -2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t.$$

**Tableau comparatif :**

Méthode	Itrat	Temp
St	04	0.035
AlgKarm	12	0.110

**Exemple 12 :**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -3 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & -1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

et  $c = \begin{bmatrix} -4 & -5 & -1 & -3 & 5 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$ .

**Tableau comparatif :**

Méthode	Itrat	Temp
St	06	0.055
AlgKarm	19	0.092

**Exemple 13 :**

La matrice  $A$  est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -7 & -8 & -9 & -10 & -5 & -2 & -8 & -3 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & -12 & -13 & -14 & -15 & -6 & -7 & -80 & -90 & -10 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -10 & -20 & -30 & -40 & -50 & -60 & -80 & -90 & -10 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -9 & -27 & -60 & -45 & -60 & -75 & -8 & -9 & -46 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$b = -10^4, i = 1, \dots, 5$  et  $c = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$ .

**Tableau comparatif :**

Méthode	Itrat	Temp
St	07	0.068
AlgKarm	22	0.106

### 4.5.2 Exemple de taille variable

**Exemple cube :**

$$(PR) \begin{cases} \min_x \sum_{i=1}^m 2x_i = z^* = 0 \\ x_i - 1 \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \text{ and } n = 2m. \end{cases}$$

**Tableau comparatif :**

Taille	Méthode	itér	temps
100 × 200	St	1	0.014
	AlgKarm	60	68.99
100 × 200	St	1	0.023
	AlgKarm	75	116.55
150 × 300	St	1	0.051
	AlgKarm	100	500.59
170 × 340	St	2	0.069
	AlgKarm	102	1452.98

#### Commentaires

Ces tests montrent clairement l'impact de notre modification sur le comportement numérique de l'algorithme, exprimé par la réduction du nombre d'itération et du temps de calcul.

## 4.6 Conclusion

Comme attendu, la technique des fonction minorantes pour le calcul du pas de déplacement prouve son efficacité, et ce en réduisant le coût calculatoire dans l'algorithme projectif de Karmarkar, cette efficacité est due à la nature des dites fonctions.



## Chapitre 4. Adaptation des fonctions minorantes dans la méthode projective de Karmarkar en programmation linéaire

---

Les tests numériques effectués sur différents exemples fixe et variable, montrent l'efficacité de la technique des fonctions minorantes en termes de temps d'exécution relative.

L'utilisation des fonctions minorantes nous a permis de calculer le pas de déplacement d'une façon simple et ce est dû aux caractéristiques de ces dernières.

Cette alternative ouvre plusieurs perspectives de recherche scientifique dans le domaine de programmation mathématique.

---

## Conclusion générale et Perspectives

Nous avons traité le problème de Stefan inverse à deux phases où l'interface mobile est inconnue par quelques méthodes de décompositions. D'abord, nous avons appliqué la méthode de perturbation d'homotopie (HPM) couplé à la méthode de décomposition d'Adomian améliorée (IADM) avec optimisation. Ce problème est plus réaliste du point de vue pratique, nous avons écrit l'interface sous la forme d'une série inachevée. Dans la méthode de perturbation d'homotopie, nous créons une série dont les termes satisfont à l'équation différentielle résultant de la tâche considérée est plus facile à résoudre en comparaison avec l'équation d'origine, lorsque la solution de l'équation étudiée est la somme des séries convergentes.

Deuxièmement, nous avons appliqué la méthode analytique d'homotopie où on a trouvé de bons résultats par rapport aux travaux de Y. Yu et al. [78].

Nous avons également utilisé dans ce travail la méthode d'optimisation du gradient conjugué spectral modifiée de type Dai-Yuan. L'exemple illustre la validité de cette méthode d'optimisation.

Enfin, ce travail a été achevé par l'application de la méthode des points intérieurs de Karmarkar qui a vécu une si longue et si fructueuse série de

recherches et de découvertes dans un domaine, si étudié, de l'optimisation mathématique.

Par ce modeste travail, nous comptons :

- avoir découvert le domaine, et qu'il est très passionnant,
- avoir dépassé le stade de la simple présentation descriptive,
- avoir apporté une compréhension plus ou moins profonde de la méthode proprement dite, de sa justification et des concepts qu'ils lui sont sous-jacents.

Nous avons constaté que le domaine a beaucoup évolué. Les méthodes, les plus efficaces et les plus récentes, dépassent de loin celles développées au début des années quatre-vingt.

L'emploi des méthodes de points intérieurs, développées en 1997, non admissibles au départ, combinée d'une technique dite de Mehrotra, est considéré comme innovation dans ce domaine par Karmarkar et autres.

Cependant, certains auteurs préfèrent construire leur théorie sur d'autres formes que le couple primal-dual présenté dans notre travail.

Actuellement, la méthode de points intérieurs peut être considérée qu'elle commence à atteindre sa maturité et cela à cause de l'apparition des références faisant suite aux innombrables publications de recherche.

Sur la base des travaux de A. Leulmi et al. [48], nous sommes arrivés à proposer la technique de fonction minorante au niveau de la phase 2 de l'algorithme originel de Karmarkar.

Cette approche a permis de réduire, considérablement, le nombre et le temps de calcul des itérations. Les tests numériques effectués confirment l'efficacité de cette approche.

L'utilisation des fonctions minorantes nous a permis de calculer le pas de déplacement d'une façon simple et cela est dû aux caractéristiques de ces

dernières.

La technique des fonctions minorantes pour déterminer le pas de déplacement dans la direction de descente est une alternative très fiable qui est confirmée comme la technique de choix pour la programmation linéaire.

Ces premiers résultats encourageants nous permettent à présent d'envisager un certain nombre de perspectives parmi lesquelles nous citons :

- L'étude théorique et numérique de cette approche peut être élargie à d'autres problèmes tels que la programmation conique (*CP*) et la programmation non linéaire (*PNL*).
- L'application de la programmation linéaire nous aide à résoudre le problème inverse de Stefan.
- Ce travail peut être généralisé sur le problème inverse de Stefan à plusieurs phases et dans les cas des dimensions supérieures ou égales à deux.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Adomian, *A review of the decomposition method in applied mathematics*. J. Math. Anal. Appl., 135(2) :501–544, 1988.
- [2] G. Adomian, *Solving Frontier Problem of Physics : The Decomposition Method*. Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [3] G. Adomian, *Stochastic Systems*, vol. 169 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, NY, USA, 1983.
- [4] M. Almazmumy, F. A. Hendi, H. O. Bakodah, and H. Alzumi, *Recent modifications of Adomian decomposition method for initial value problem in ordinary differential equations*, American Journal of Computational Mathematics, vol. 2, no. 3, pp. 228–234, 2012.
- [5] Z. Ayatia et J. Biazar, *On the convergence of homotopy perturbation method*. J. Egyp. Math. Soc., 23 :424–428, 2015.
- [6] Y. Q. Bai and C. Roos, *A primal-dual interior point method based a new kernel function with linear growth rate*, in Proceedings of the 9<sup>th</sup> Australian Optimization Day, Perth, Australia, (2002).

- [7] Y. Q. Bai, M. El. Ghami, C. Roos, *A new efficient large-update primal-dual interior point method based on a finite barrier*. SIAM. J. Optim. 13 (3), 766–782 (2003).
- [8] Y.Q. Bai, G. Lesaja, C. Roos, G.Q. Wang, M. El Ghami, *A class of large-update and small-update primal-dual interior point algorithms for linear optimization*. J. Optim. Theory Appl. 138 (2008), 341–359.
- [9] D. Benterki, *L'étude des performances de l'algorithme de Karmarkar*. Thèse de magister, Université de annaba, Algérie, (1992).
- [10] J. Biazara et H. Ghazvini, *Convergence of the homotopy perturbation method for partial differential equations*, Nonlinear Anal. Real World Appl., 10(5) :2633–2640, 2009.
- [11] E. G. Birgin and J. M. Martnez, *A spectral conjugate gradient method for unconstrained optimization*, Applied Mathematics and Optimization, vol. 43, no. 2, pp. 117–128, 2001.
- [12] M. Bouafia, D. Benterki, A. Yassine, *An efficient primal-dual interior point method for linear programming problems based on a new kernel function with a trigonometric barrier term*, J. Optim. Theory Appl. 170 (2) (2016) 528—545.
- [13] W. Cao, K. R. Wang, and Y. L. Wang, *Global convergence of a modified spectral CD conjugate gradient method*, Journal of Mathematical Research & Exposition, vol. 31, pp. 261–268, 2011.
- [14] Y. Cherruault, *Convergence of Adomian's method*, Kybernet, 1989, 18(2), pp31-38.
- [15] C. Chun, H. Jafari, and Y.-I. Kim, *Numerical method for the wave and nonlinear diffusion equations with the homotopy perturbation method*,

## Bibliographie

---

- Computers & Mathematics with Applications, vol. 57, no. 7, pp. 1226–1231, 2009.
- [16] A. Coulibaly, *Méthode de point intérieurs en programmation linéaire*, Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, 1994.
- [17] J. Crank, *Free and Moving Boundary Problems*, Clarendon Press, Oxford, 1984.
- [18] J. P. Crouzeix, B. Merikhi, *A logarithm barrier method for semidefinite programming*, RAIRO-Oper. Res. 42 (2008), 123–139.
- [19] J. P. Crouzeix, A. Seeger, *New bounds for the extreme values of a finite sample of real numbers*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 197 (1996), 411–426.
- [20] Y. H. Dai and Y. Yuan, *A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property*, SIAM Journal on Optimization, vol. 10, no. 1, pp. 177–182, 1999
- [21] D. Den Hertog, *Interior point approach to linear quadratic and convex programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [22] I. Dikin, *Iterative solution of problems of linear and quadratic programming*. Doklady Akademii Nauk SSSR. vol. 174, pp.747-748, (1967).
- [23] M. El Ghami, I.D. Ivanov, C. Roos, T. Steihaug, *A polynomial time algorithm for LO based on generalized logarithmic barrier functions*. Int. J. Appl. Math. 21, 99 –115 (2008).
- [24] A.V. Fiacco, G.P. McCormick, *Nonlinear programming : Sequential unconstrained minimization techniques*. SIAM Classics in Applied Mathematics, Philadelphia, 1990 (1968).

## Bibliographie

---

- [25] A. Fic, A. J. Nowak, and R. Bialecki, *Heat transfer analysis of the continuous casting process by the front tracking BEM*, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 24, no. 3, pp. 215–223, 2000.
- [26] R.M. Freund, S. Mizuno, *Interior point methods : Current status and futur directions*. Mathematical Programming, N°51, Optima (1996).L. Jin. Homotopy perturbation method for solving partial differential.
- [27] L. Gabet, *Esquisse d'une théorie décompositionnelle*, Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 30, no 7 (1996), p. 799-814
- [28] M. Ghasemi, M. Tavassoli Kajani, E. Babolian, *Application of He's homotopy perturbation method to nonlinear integro-differential equations*, Applied Mathematics and Computation 188 (2007) 538–548.
- [29] F. Glineur , *Etudes des méthodes de points intérieurs appliquées à la programmation linéaire et à la programmation semi-définie*. Cours, (1997).
- [30] N.L. Goldman, *Inverse Stefan Problem*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [31] A. Ghorbani. *Beyond Adomian polynomials : He polynomials*. *Chaos Solitons Fractals*, 39 :1486–1492, 2009.
- [32] R. Grzymkowski and D. Slota, *Stefan problem solved by Adomian decomposition method*, International Journal of Computer Mathematics, vol. 82, no. 7, pp. 851–856, 2005.
- [33] R. Grzymkowski and D. Slota, *One-phase inverse Stefan problem solved by adomian decomposition method*, Computers & Mathematics with Applications, vol. 51, no. 1, pp. 33–40, 2006.
- [34] S.C. Gupta, *The Classical Stefan Problem*. Basic Concepts, Modelling and Analysis, Elsevier, Amsterdam, 2003.
- [35] J. H. He, *Homotopy perturbation technique*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 178, no. 3-4, pp. 257–262, 1999.



- [36] J. H. He. *Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method*. Appl. Math. Comput., 156(2) :527–539, 2004.
- [37] J. H. He Addendum. *New interpretation of homotopy perturbation method*. Internat. J. Modern Phys. B., 20(18) :2561–2568, 2006.
- [38] E. Hetmaniok, D. Słota, R. Wiltula and A. Zielonka, *An analytical method for solving the two-phase inverse Stefan problem*, Institute of Mathematics, Silesian University of Technology, 23 Kaszubska St., 44-100 Gliwice, Poland, 2010.
- [39] E. Hetmaniok, D. Słota, R. Witula and A. Zielonka, *Comparison of the Adomian decomposition method and the variational iteration method in solving the moving boundary problem*, Computers & Mathematics with Applications, vol. 61, no. 8, pp.1931–1934, 2011.
- [40] L. Jin, *Homotopy perturbation method for solving partial differential equations with variable coefficients*. Int. J. Contemp. Math. Sci., 3(28), 1395–1407, 2008.
- [41] E. Hetmaniok, D. Słota, R. Witula, and A. Zielonka, *Solution of the one-phase inverse Stefan problem by using the homotopy analysis method*, Appl. Math. Modelling (2015).
- [42] N. Karmarkar, *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, Combinatorica 4 (1984) 373–395.
- [43] A. Keraghel, *Etude Adaptative Et Comparative Des Principales Variantes Dans L’Algorithme de Karmarkar* (Dissertation thesis), Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1989.
- [44] A. Keraghel, *Analyse convexe théorie fondamentale et exercices*, Edition elhouda Ain Mlila, Algérie, Avril 2001.

- [45] A. Keraghel, D. Benterki, *Sur les performances de l'algorithme de Karmarkar pour la programmation linéaire*, Rev. Roumaine Sci. Tech. Méc. Appl. 46 (1) (2001) 87–96.
- [46] A. Khalouta, *Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques. Extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire*, Thèse de Doctorat, Département de Mathématiques, Université Ferhat Abbas, Sétif-1, 2019.
- [47] M. Kojima, N. Megiddo, and S. Mizuno, A primal-dual infeasible interior point algorithm for linear programming, Math. Programming, 61 (1993), 263–280.
- [48] A. Leulmi, B. Merikhi, D. Benterki, *Study of a Logarithmic Barrier Approach for Linear Semidefinite Programming*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2018, 11(3), 1–13.
- [49] A. Leulmi, S. Leulmi, *Logarithmic Barrier Method Via Minorant Function for Linear Programming*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics (2019), 12(2), 191–201.
- [50] S. Leulmi, A. Ayadi, *The application of the homotopy analysis method for solving the two phase inverse Stefan problem with optimisation*, Indian Journal of Mathematics, Volume 62, No. 2, (2020).
- [51] S. Leulmi, A. Leulmi, *Adaptation of the Minorant Function for Linear Programming*, East Asian Mathematical Journal, v.35, no.5, 597-612, (2019).
- [52] S. Leulmi, A. Leulmi and B. Merikhi, *Adaptation of the minorant function in Karmarkar's projective method for linear optimization*, Indian Journal of Mathematics, Volume 62, No. 3, (2020).

## Bibliographie

---

- [53] D. Lesnic, *Convergence of Adomian's decomposition method : periodic temperatures*, Computers & Mathematics with Applications, vol. 44, no. 1-2, pp. 13–24, 2002.
- [54] S. Liao, *Homotopy analysis method : a new analytic method for nonlinear problems*, Appl. Math. Mech. – Engl. Ed. 19,957–962 (1998).
- [55] S. Liao, *Beyond Perturbation : Introduction to the Homotopy Analysis Method*, Chapman and Hall – CRC Press, Boca Raton, 2003.
- [56] S. Liao, *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*, Springer Education Press, Berlin, 2012.
- [57] I. J. Lustig, R. E. Marsten and D. F. Shanno, *Interior point method for linear programming*. Computational state of art, ORSA, Journal on Computing, 6(1), pp. 1-14. (1994).
- [58] B. Merikhi, *Extension de quelques méthodes de points intérieurs pour la programmation semi-définie*, Thèse de Doctorat, Département de Mathématiques, Université Ferhat Abbas, Sétif-1, 2007.
- [59] M. Minoux, *Programmation mathématique : théorie et algorithmes*. Tome 1, Dunod, Paris (1983).
- [60] R. D. C. Monteiro, I. Adler, M. G. C. Resende, A polynomial–time primal–dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension, Mathematics of Operations Research. 15 (1990) 191–214.
- [61] B. Mohar, S. Poljak, D. F. Shanno, *Interior point methods for linear programming : Computational state of the art*, ORSA J. Comput. 6 (1994) 1–14.

## Bibliographie

---

- [62] R. Naseri, A. Valinejad, *An extended variant of Karmarkar's interior point algorithm*, applied Mathematics and Computation Elsevier 184 (2007) 737–742.
- [63] Y. E. Nesterov and A. S. Nemirovskii, *Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming : Theory and Applications*, SIAM, Philadelphia, PA, (1994).
- [64] Z. Odibat, *A study on the convergence of homotopy analysis method*, Appl. Math. Comput. 217 (2010) 782–789.
- [65] M.N. Özisik, *Heat Conduction*, Wiley, New York, 1980.
- [66] G. Opris, *Programation linéaire*. OPU, Algérie, (1983).
- [67] C. Roos, T. Terlaky, J.P. Vial, *Theory and algorithms for linear optimization : An interior point approach*, W. John & Sons, 1997.
- [68] M. Padberg, *A Different Convergence Proof of the Projective Method for Linear Programming*, New York University, 1985.
- [69] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, New Jerzy, 1970.
- [70] L.I. Rubinstein, *The Stefan Problem*, AMS, Providence, 1971.
- [71] D. Slota, *The application of the homotopy perturbation method to one-phase inverse Stefan problem*, Int. Comm. Heat & Mass Transf. 37 (2010) 587–592.
- [72] D. Slota, *Homotopy perturbation method for solving the two-phase inverse Stefan problem*, Numer. Heat Transfer A 59 (2011) 755–768.
- [73] M. Turkyilmazoglu, *Convergence of the homotopy analysis method*, arXiv (2010) 1006.4460v1.

## Bibliographie

---

- [74] L. Vandenberghe, S. Boyd, *Primal-dual potential reduction method for problems involving matrix inequalities*, Math. Programming, Series B, 69 (1995) 205-236.
- [75] H. Wolkowicz, G. P. H. Styan, *Bounds for eigenvalues using traces*, Linear Algebra and Appl.29 (1980), 471–506.
- [76] S. Wright, *Primal-dual interior point methods*, SIAM, Philadelphia, USA, 1997.
- [77] Y. Ye, *Interior point algorithms : Theory and analysis*, John wiley & Sons, New York, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics Optimization, 1997.
- [78] Y. Yu, X. Luo, and H. Cui, *The Solution of Two-Phase Inverse Stefan Problem Based on a Hybrid Method with Optimization*, Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering, Volume 2015.