

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider– BISKRA
Faculté des sciences et de la Technologie
Département de génie mécanique
Réf :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم الهندسة الميكانيكية
المرجع :

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Magister en génie mécanique

Option : Dynamique des structures et contrôles des systèmes

**CONTRIBUTION A LA MODELISATION PAR
ELEMENTS FINIS DANS L'ANALYSE
DYNAMIQUE DES STRUCTURES PLANES**

Présenté par :

OUCHENE Hamza

Soutenu publiquement le : 11/11/2015

Devant le jury composé de :

| | | | |
|--------------|-------------------------|------|-----------------------|
| Président: | Mr BENMEBARK Sadok | Prof | Université de Biskra. |
| Rapporteur : | Mr BELOUNAR Lamine | Prof | Université de Biskra. |
| Examineur: | Mr AMRANE Mohamed Nadir | Prof | Université de Biskra. |
| Examineur: | Mr BRIMA Abdelhafid | MCA | Université de Biskra. |

Résumé

La robustesse des éléments finis à champ de déformation a été démontrée pour l'analyse statique des structures membranaires contrairement aux éléments classiques correspondants qui nécessitent un maillage très raffiné.

Ces éléments obtenus de l'interpolation directe des déformations a permis d'enrichir le champ de déplacement par des termes d'ordre élevé.

La validation des éléments finis basée sur l'approche en déformation pour l'analyse dynamique va permettre d'étendre l'efficacité de cette approche. Le modèle vibration libre d'une structure non amortie donne des informations importantes sur son comportement dynamique.

Le présent travail porte sur la formulation et l'évaluation des éléments finis à champ de déformation (élément de SBRIE et DRILING) et l'élément plan des codes ANSYS et ABAQUS pour l'analyse dynamique et particulièrement les vibrations libres des structures non amorties en contrainte plane.

Mots clés : l'approche en déformation, élasticité plane, interpolation, membrane, vibration libre, amortissement.

Abstract

The robustness of the finite elements based on the strain approach was shown for the static analysis of the membrane structures contrary to the corresponding traditional elements which require a very refined grid.

These elements obtained of the direct interpolation of the deformations made it possible to enrich the displacement approach by terms of a high nature.

The validation of the finite elements based on the approach in deformation for the dynamic analysis will make it possible to extend the effectiveness of this approach. The free model vibration of a not damping structure gives important information of its dynamic behavior.

This work concerns the formulation and the evaluation of the finite elements to approach of deformation (SBRIE and DRILING finite element) and the plane element of ANSYS and ABAQUS code for the dynamic analysis and particularly the free vibrations of the structures not damping in plane stress.

Key words: strain based approach, plan elasticity, interpolation, membrane, free vibration, and damping

ملخص

آلية العناصر المتناهية ذات التقريب في التشوه قد وجدت للتحليل السكوني للهياكل ذات السلوك الغشائي عكس العناصر المتناهية الكلاسيكية التي تتطلب تجزئة جد متناهية.

هذه العناصر وجدت مباشرة بعد تحويل التقريب في التشوه الذي يستخرج منه مباشرة التقريب في الانتقال بواسطة وسائط جد عالية.

تطبيقات هذه العناصر المتناهية بالتقريب في التشوه من اجل التحليل التحريكي يسمح بتبيان فعالية هذا التقريب. صنف التحريك الحر الغير المتخامد للهياكل يعطي معلومات جد هامة في التعاطي التحريكي.

هذا العمل المختص في تحليل و تقييم العناصر المتناهية ذو التقريب في التشوه عنصر SBRIE/ Driling و العناصر المستوية الموجودة في برنامج ABAQUS/ANSYS من اجل التحليل الديناميكي خصيصا للاهتزازات الحرة الغير المتخامدة للهياكل المرنة تحت الاجهادات المستوية.

الكلمات المفتاحية: التقريب في التشوه- مرونة مستوية- غشاء- اهتزاز حر- التخامد

Remerciements :

En préambule de ce mémoire, je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

*En second lieu, je tiens aussi à remercier mon encadreur **Mr L. BELOUNAR**, professeur à l'université de Biskra pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail et pour l'orientation, la confiance, qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port.*

*Mes remerciements s'étendent également à **Mr : Ch. REBIAI** pour ses bonnes explications qui m'ont éclairé le chemin de la recherche et sa collaboration dans l'accomplissement de ce mémoire malgré ses occupations.*

*Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury : **Mr BENMEBARK Sadok, Mr AMRANE Mohamed Nadir** et **Mr BRIMA Abdelhafid** pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.*

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail, qui se sont montrés compréhensives à l'égard de mon objectif.

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A la mémoire de mon cher père

A ma chère mère, A mes frères et sœurs

A ma fille(Aya), ma femme et sa famille.

A mes nièces et mes neveux.

A tous mes collègues.

A mes amis...

NOTATIONS

| | |
|---|--|
| $\frac{\partial}{\partial x}$ | Dérivée partielle par rapport à x |
| { } | Vecteur colonne |
| ⟨ ⟩ | Vecteur ligne |
| [] | Matrice |
| [] ^T | Matrice transposé |
| DDL | Degré de liberté |
| x,y,z | Coordonnées cartésiennes du repère global |
| U,V,W | Déplacements suivant les directions x, y et z respectivement |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ | Déformations directs suivant les directions x, y et z respectivement |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ | Contraintes normales suivant les directions x, y et z respectivement |
| $\gamma_{xy}, \gamma_{zy}, \gamma_{xz}$ | Déformations tangentielles |
| $\tau_{xy}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$ | Contraintes tangentielles |
| λ et μ | Les constantes de Lamé |
| ν | coefficient de Poisson |
| E | Module de Young |
| V | Volume d'un corps |
| ρ | La masse volumique de matériau |
| α_i | Paramètres généraux de l'approximation |
| [B] | Matrice de déformation |
| [D] | Matrice d'élasticité |
| [Der] | Matrice des dérivées |
| [N] | Matrice des fonctions de forme |
| [Kv] | Matrice de rigidité globale |
| [Ke] | Matrice de rigidité élémentaire |
| {F} | Vecteur des forces |
| {u} | Vecteur de déplacement |
| w_i | Les Pulsations propres |
| λ_i | Les Modes propres |

ABREVIATIONS

| | |
|-----|-----------------------------------|
| 1-D | Uni-Dimensionnel |
| 2-D | Bi-Dimensionnel |
| 3-D | Tri-Dimensionnel |
| CAO | Conception Assisté par Ordinateur |
| DDL | Degré De Liberté |
| MCR | Mouvement de Corps Rigide |
| MMC | Mécanique des Milieux Continus |
| MEF | Méthode des Eléments finis |

LISTE DES FIGURES

| N° | Figure | Page |
|---------------------|--|------|
| CHAPITRE II | | |
| II.1 | relation entre déplacement, déformation-contrainte | 14 |
| II.2 | vecteur déplacement d'un solide bidimensionnel | 15 |
| II.3 | composantes des contraintes dans un corps bidimensionnel | 17 |
| II.4 | corps quelconque en équilibre et en déformé | 21 |
| II.5 | élément iso paramétrique quadrilatère-bidimensionnel | 31 |
| II.6 | Schéma d'intégration numérique | 34 |
| CHAPITRE III | | |
| III.1 | passage de l'élément physique à l'élément de référence | 49 |
| III.2a | épaisseur (t) et le système | 51 |
| III.2b | montre les huit déplacements inconnus. | 51 |
| III.2c | montre les forces nodales correspondantes | 51 |
| III.3 | les fonctions d'interpolation pour les nœuds de l'élément Q4 | 53 |
| III.4 | L'élément rectangulaire à quatre nœuds | 54 |
| III.5 | élément quadrilatère Q8 | 60 |
| III.5 | système de coordonnées global | 65 |
| CHAPITRE IV | | |
| IV.1 | Géométrie et maillage de la console | 80 |
| IV. 2 | Les deux premiers modes fondamentaux M3x1 | 81 |
| IV. 3 | Les deux premiers modes fondamentaux M5x1 | 81 |
| IV.4 | schéma de la plaque étudiée encastée dans un côté | 83 |
| IV.5 | 1er mode propre de la plaque étudiée avec ANSYS/ABAQUS | 84 |
| IV.6 | schéma de la plaque étudiée simplement appuyée | 85 |
| IV.7 | Les quatre modes propres de la plaque étudiée | 85 |

| | | |
|-------|---|----|
| IV.8 | Schéma de la plaque étudiée encastree dans les quatre côtés | 86 |
| IV.9 | Les quatre modes propres de la plaque étudiée | 86 |
| IV.10 | Présentation de la plaque étudiée | 87 |
| IV.11 | Géométrie et maillage de la poutre cantilever soumise à une vibration forcée | 89 |
| IV.12 | La variation de force sinusoïdale en fonction du temps $F(t)=\cos\omega t$ | 89 |
| IV.13 | la variation du déplacement en fonction de la force utilisant l'élément Q8 et avec la méthode de la superposition modal. | 91 |
| IV.14 | la variation du déplacement en fonction de la force utilisant l'élément SBRIE et avec la méthode de la superposition modal. | 91 |
| IV.15 | la variation du déplacement en fonction de la force utilisant l'élément Q8 et avec la méthode de Wilson (θ méthode). | 92 |
| IV.16 | la variation du déplacement en fonction de la force utilisant l'élément SBRIE et avec la méthode de Wilson (θ méthode). | 92 |
| IV.17 | Modélisation de la poutre élancée par ANSYS | 93 |
| IV.18 | Modélisation de la membrane par ANSYS | 95 |
| IV.19 | Modélisation d'une plaque console par ANSYS | 96 |
| IV.20 | Modélisation d'un mur en terre par ANSYS | 98 |

LISTE DES TABLEAUX

| N° | Tableau | Page |
|---------------------|--|------|
| CHAPITRE III | | |
| III.1 | Fonctions de forme de l'élément Q4 | 57 |
| III.2 | Composantes de la matrice [B] de l'élément Q4 | 58 |
| III.3 | Fonctions de forme de l'élément Q8 | 64 |
| III.4 | Fonctions de forme de l'élément SBRIE | 69 |
| III.5 | Composantes de la matrice [B] de l'élément SBRIE | 70 |
| CHAPITRE IV | | |
| IV.1 | Caractéristiques Mécaniques constitutifs du model analytique de consol | 81 |
| VI. 2 | Valeurs propres de la poutre cantilever ''déformation plane'' | 82 |
| | Cas d'une poutre discrétisé en 3et 5 éléments finis | |
| IV.3 | Valeurs propres de la poutre cantilever'' contrainte plane'' | 82 |
| IV. 4 | Les modes propres de la plaque encastree | 84 |
| IV.5 | Les modes propres de la plaque | 85 |
| IV. 6 | Les modes propres de la plaque | 86 |
| IV. 7 | Les 6 pulsations propres de la plaque | 89 |
| IV.8 | Déplacements au nœud 18 | 90 |
| IV.9 | les résultats des valeurs propres obtenus de la poutre élancée par ANSYS | 94 |
| IV.10 | les résultats des valeurs propres obtenus de l'aile d'avion par ANSYS | 95 |
| IV.11 | les résultats des valeurs propres obtenus d'une plaque console par ANSYS | 97 |
| IV.12 | les résultats des valeurs propres obtenus d'un mur de barrage par ANSYS | 98 |

SOMMAIRE

Résumé

Remerciements

Notations

Liste des Figures

Liste des Tableaux

Sommaire

INTRODUCTION GENERALE

page

| | |
|------------------------|----|
| 1. introduction | 01 |
| 3. Objectif du mémoire | 02 |
| 4. Plan du mémoire | 03 |

CHAPITRE I

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

| | |
|--|----|
| I.1 Méthode des éléments finis | 04 |
| I.2 Approche en déformation | 04 |
| I.2.1 Etude bibliographique sur les éléments finis basés sur l'approche en déformation | 06 |
| I.3 L'utilisation de la méthode des éléments finis en dynamique | 09 |

CHAPITRE II

FONDEMENTS THEORIQUES

| | |
|--|----|
| II.1 Elasticité bidimensionnelle | 14 |
| II.1.1 équations d'élasticité | 14 |
| II.1.2 déplacements | 15 |
| II.1.3 déformations | 16 |
| II.1.4 contraintes | 17 |
| II.1.5 les relations de compatibilité | 18 |
| II.1.6 Méthodes de construction des fonctions de forme | 26 |

| | |
|---|----|
| II.2 L'Intégration numérique | 33 |
| II.3 ANALYSE DYNAMIQUE VIBRATOIRE ET METHODE UTILISER | 35 |

CHAPITRE III

FORMULATION ISOPARAMETRIQUE DE QUELQUES ELEMENT FINIS

| | |
|--|----|
| III.1 INTRODUCTION | 48 |
| III.2 Description de l'élément membranaire | 48 |
| III.3 Transformation géométrique | 49 |
| III.4 Formulation iso paramétrique | 49 |
| III.5 Elément fini pour les structures bidimensionnelles | 50 |
| III.5.1 Formulation de l'élément fini rectangulaire d'élasticité plane (élément quadrilatère Q4) | 50 |
| III.5.2 La formulation iso paramétrique de l'élément fini d'élasticité plane Q8 | 60 |
| III.5.3 Elément fini rectangulaire (SBRIE) 2ddl par nœud | 65 |
| III.8 Conclusion | 71 |

CHAPITRE IV

VALIDATIONS ET APPLICATIONS

| | |
|---|----|
| IV.1 Introduction | 71 |
| IV.2 Modes propres et Fréquences propres | 72 |
| IV.3 Résolution du problème aux valeurs propres | 74 |
| IV.4 Présentation des modèles d'étude | 75 |
| IV.4.1 Les systèmes libres | 75 |
| IV.4.1.1 Les structures membranaires | 75 |
| IV.4.1.1 Stratégie pour une analyse qualitative et quantitative du comportement dynamique des poutres libres non amortie | 75 |
| IV.4.1.2 Valeurs propres en vibration libre d'un solide rectangulaire | 79 |
| IV.4.2.3 Poutre console libre non amortie avec des charges réparties sur les nœuds (contrainte plane et déformation plane). | 80 |
| IV.4.1.2 La flexion des plaques | 83 |

| | |
|---|----|
| IV.4.1.2.1 Les vibrations d'une plaque mince carrée encastree sur un cote | 83 |
| IV.4.1.2.2 Plaque simplement appuyee sur ces quatre cotes | 85 |
| IV.4.1.2.3 Plaque encastree dans les quatre cotes | 86 |
| IV.4.1.2.4 Plaque mince, carrée et encastree sur un cote | 87 |
| IV.4.2 Les systemes forces | 88 |
| IV.4.2.1 Vibration forcee d'un solide rectangulaire | 89 |
| IV.5 Comparaison entre les methodes utilisees dans la resolution dynamique d'un systeme amorti soumis a une force sinusoïdale | 91 |
| IV.6 quelques exemples traites par la methode des elements finis en vibrations libres non amorties | 93 |
| IV.6.1 Exemple d'une barre elastique bidimensionnel | 93 |
| IV.6.2 Exemple d'une plaque libre en membrane | 94 |
| IV.6.3 Exemple d'un consol libre en membrane (10X10) m | 96 |
| IV.6.4 Exemple d'un mur de barrage (15.24X60.96) m | 97 |
| Conclusion | 99 |

CONCLUSION GENERALE
REFERENCE BIBLIOGRAPHIE

INTRODUCTION GENERALE

1. Introduction

Le calcul des structures par éléments finis est une discipline née il y a plus de 50 ans, où se mêlent étroitement les mathématiques, la mécanique et l'analyse numérique, d'où sa complexité et les différentes approches que l'on peut y trouver.

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique de résolution approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie, une extension fantastique, qui va de pair avec le développement et l'accroissement de la puissance des ordinateurs. Elle est devenue un outil de travail, calcul et conception quotidienne, voire familière, de l'ingénieur, dans des domaines aussi variés que l'analyse des structures, le transfert de chaleur, la mécanique des fluides, l'électromagnétisme, les écoulements souterrains, la combustion ou encore la diffusion des polluants.

C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

Pour un problème dynamique, l'efficacité des calculs repose premièrement sur une bonne description du comportement cyclique des matériaux constitutifs.

Deuxièmement, une bonne modélisation doit intégrer une représentation précise et efficace des distributions des masses, des modes de vibrations importants de la structure et

des conditions aux limites. La multitude des phénomènes à prendre en compte semble indiquer la difficulté de tout calcul de prédiction, quelque soit le degré de complexité du modèle de comportement utilisé.

2. *Objectif du mémoire*

Notre travail consiste à déterminer les modes propres d'une console rectangulaire, avec différentes méthodes utilisées. Les différentes combinaisons possibles de conditions aux limites standards sur les bords. Le seul cas qui se prête à une résolution analytique exacte est présenté (poutre encasté sur un coté). Pour tous les autres cas, les solutions sont déterminées par la méthode de Rayleigh-Ritz en utilisant les fonctions poutres comme fonctions d'approximation.

Notre objectif est d'utiliser les éléments finis iso paramétrique (Q4, Q8 et SBRIE) à champ de déformation et les éléments du code ANSYS et ABAQUS pour l'analyse dynamique dans les problèmes de type membranaire et pratiquement la vibration libre des structures non amorties.

3. *Plan du mémoire* : Notre travail est divisé en quatre chapitres :

- **Introduction générale** On y trouve plusieurs parties d'intéressement général, il est question de présenter les fondements et l'histoire de la méthode des éléments finis, ses différentes formulations, en particulier celles basées sur le modèle de déformation, les caractéristiques d'un élément fini.

- **Chapitre I**

Dans ce chapitre on a fait une recherche bibliographique sur les éléments à champ de déformation et ces utilisations dans le domaine dynamique.

- **Chapitre II**

Le second chapitre est purement théorique, il contient un rappel de l'élasticité bidimensionnelle, des principes variationnels de la mécanique, de la formulation des équations de l'équilibre statique et dynamique dans la MEF et la notion de matrice de rigidité, des méthodes de construction des fonctions de forme, de la formulation iso paramétrique, des notions de l'intégration numérique et la formulation de quelques éléments finis membranaires en dynamique.

Dans la deuxième partie, une présentation sur l'analyse dynamique vibratoire et les différentes méthodes utilisées, suivie par un enchaînement général du programme utilisé dans le calcul, et une présentation du code ANSYS et leur capacité d'analyser le comportement des structures bidimensionnelles en dynamique.

- **Chapitre III et Chapitre IV**

Nous montrons dans le troisième chapitre, les approches en formulations iso paramétrique de quelques éléments finis, éléments à champ de déformation (l'élément SBRIE). Le quatrième chapitre est réservé aux tests de validation et à l'application relative aux éléments finis utilisés, l'analyse de la réponse totale de la structure à l'état dynamique, cette analyse permet de mieux comprendre la réponse des structures membranaires libres et non amorties, suivie par des conclusions et des perspectives.

Finalement, une conclusion générale ainsi que des recommandations envisagées seront présentées.

CHAPITRE I

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1 Méthode des éléments finis

Le principe de base de la MEF est que le domaine peut être remplacé par un ensemble d'éléments discrets. Puisque ses éléments peuvent être réunis de plusieurs manières, ils peuvent donc être employés pour représenter les formes les plus complexes.

En 1851, Schellbach décrit la solution d'un problème de surface minimale. Cette solution est extrêmement proche de la méthode des éléments finis. Plus tard, en 1909 et 1915, Ritz et Galerkin publient des articles qui seront les fondements de la méthode.

La MEF, avec l'apparition des ordinateurs, devient pour la première fois en 1956, une formulation générale d'approximation de la mécanique des structures, lorsqu'elle fut utilisée chez Boeing par Turner, Clough, Martin, et Topp [Turn 56] pour calculer des parties de la structure d'un avion. Ces travaux marquèrent la naissance de la méthode des éléments finis comme on la connaît aujourd'hui.

I.2 Approche en déformation

Une recherche a été faite à ' Cardiff ' sur l'efficacité des éléments finis disponibles pour l'étude des structures planes, a montré que pour obtenir une convergence satisfaisante, les éléments dérivant à l'approche en déplacement exige un maillage très grossi que les éléments basés sur l'approche en déformation ont été développés [DJO 90], pour les éléments courbés, aussi que pour les structures plane.

L'approche en déformation qui consiste à supposer les déformations de telle sorte que les équations de compatibilité soient satisfaites, ce modèle présente certaines facilités par rapports aux autres formulations, à savoir que deux critères de convergence principaux sont directement reliés aux déformations qu'avec les suppositions des fonctions de déplacements.

D'autre part les éléments finis basés sur le modèle en déformation possèdent des degrés de liberté externes, essentiels qui permettent d'éviter les difficultés associées aux degrés de liberté internes [ASH 72], au contraire les éléments liés à un grand nombre de degrés de liberté mènent à un grand nombre d'inconnus. Contrairement aux éléments ordinaires, les composantes du champ des déplacements, pour les éléments basés sur l'approche en déformation ne sont pas indépendantes. En outre, le champ de déplacements des éléments basés sur l'approche en déformation est représenté par des polynômes d'ordre supérieur (polynômes quadratiques), qui permet d'avoir une convergence rapide aussi bien pour le déplacement que pour les contraintes, quand les résultats sont comparés avec les éléments basés sur le modèle en déplacement correspondants, c'est-à-dire, éléments du déplacement qui ont le même nombre total de degrés de liberté [DJO 04].

L'approche est basée sur le calcul des termes exacts qui représentent tous les modes du corps rigide, les autres composantes des fonctions de déplacement sont basées sur la forme des fonctions de déformations indépendantes, au fur et à mesure qu'on vérifie les équations de compatibilité. Ce modèle permet de proposer des champs de déformation en fonction de paramètres propres à la structure (coefficient de poisson par exemple), tout en vérifiant les équations d'équilibre.

Cette approche mène, généralement, à la représentation des déplacements par un polynôme d'ordre élevé sans avoir besoin de degrés de liberté additionnels (internes et inutiles).

L'opportunité a été saisie pour développer un élément fini d'ordre supérieur, qui ne nécessite que les degrés de liberté essentiels. Par ailleurs, un autre élément fini membranaire a été développé par Sabir et Sfenjji [SAB 95], les résultats obtenus ont montré une convergence rapide aussi bien pour les déplacements que pour les contraintes.

I.2.1 Etude bibliographique sur les éléments finis basés sur l'approche en déformation

Une approche différente au développement des fonctions de formes a été établie par Sabir et son groupe (1971-1995). Cette approche en déformation a été d'avantage appliquée par Sabir [SAB 83] pour développer une nouvelle classe d'éléments pour les problèmes d'élasticité générale en coordonnées cartésiennes. L'élément en question est rectangulaire, ayant uniquement les degrés de liberté essentiels (au nombre de huit), et satisfaisant aux conditions de modes libres du corps rigide et des équations de compatibilité au sein de l'élément.

De nombreux éléments basés sur les hypothèses de type Mindlin ont été développés permettant ainsi de traiter les plaques épaisses. Par contre certains auteurs utilisent des éléments tridimensionnels (avec maintien des constantes tridimensionnelles), citons par exemple la brique à vingt nœuds B20 [ZIE 77], [GAL 76] et les briques sans nœuds intermédiaires suivant leur épaisseur pour le calcul des plaques et coques épaisses.

Ces chercheurs expliquent cela par le fait que le mode de représentation de l'énergie de déformation a une rigidité excessive. Ils proposent alors l'utilisation des schémas d'intégration numérique réduite pour assouplir la matrice de rigidité.

D'autres auteurs [ACH 78] ont formulés une série d'éléments tridimensionnels iso-paramétriques compatibles aux nombres de nœuds et de formes variables hexaédriques (B16,

B24) et prismatiques (P12, P18), leurs nœuds intermédiaires suivent l'épaisseur, en introduisant une méthode qui est d'ailleurs sous-jacente dans l'élément d'Ahmad [AHM 70].

Cette méthode consiste à modifier les constantes de rigidité de façon à représenter de plus près le comportement réel des plaques et des coques, qu'elles soient minces ou épaisses. L'inconvénient majeur dans l'utilisation de ce type d'éléments d'ordre supérieur est d'un coût élevé, en raison du grand nombre des points d'intégration numérique nécessaire à l'évaluation exacte des matrices élémentaires. Les calculs deviennent encore plus coûteux lorsque l'on traite des problèmes non linéaires.

Le succès de l'application du modèle en déformation pour le développement des éléments, nous a poussés à les programmer. La technique adoptée, dans cette programmation, est l'intégration exacte. Le langage utilisé est le Fortran étant donné sa large utilisation dans le domaine du calcul numérique par l'industrie, le monde de la recherche, les milliers de bibliothèques qui ont été développées, testées et validées depuis plus de 30 ans.

Maintenant qu'est ce qu'il va se passer si on soumet quelques éléments basés d'un côté sur le modèle en déformation à différents tests ? Tels que l'élément de [ASH 72], qui est un élément de coque cylindrique rectangulaire à 4 nœuds, ayant 5 degrés de liberté pour chaque nœud, de l'autre côté l'élément de [CHA 82] formulé en hypothèses de Koiter-Sander au lieu des hypothèses de Love-Kirchhoff utilisées dans l'élément précédemment cité, en gardant les mêmes représentations géométriques. Quelle est ensuite la performance des variantes de [BUL 84] qui introduit des modifications sur le champ de déformation de l'élément de [ASH 72] pour produire des éléments surtout en flexion, des éléments membranaires et en flexion.

Ces éléments sont basés sur les hypothèses des coques profondes. Or dans le cas des éléments basés sur les hypothèses des coques surbaissées, ils ont choisis l'élément récent de [DJO 03], c'est un élément rectangulaire à quatre nœuds, ayant cinq degrés de liberté dans chaque nœud.

Les éléments finis basés sur l'approche en déformation sont : l'élément coque ACM-SBQ4, l'élément R4BM-ACM. [BEL 00], élément de coque cylindrique [CHA 82] et les éléments Q4 γ 24, DKQ24 [BAT 90].

Djoudi (1990) [DJO 90] a montré que, pour obtenir une convergence satisfaisante, les éléments dérivants de l'approche en déplacement exigent un maillage très grossi que les éléments basés sur l'approche en déformation, pas seulement pour les éléments courbés mais aussi pour les structures planes.

Des auteurs [BEL.98a] se sont vus éblouit par ce modèle, ils ont amélioré des éléments secteurs déjà existants, en incorporant des rotations dans le plan avec 12ddl/élément. Dans la même année et pour la première fois dans les annales de ce modèle, Belarbi et Charif [BEL.98c], ont pût tester des éléments 3D basés sur la déformation, de très bonnes performances ont été enregistrées avec l'utilisation du principe de changement de la loi du comportement dû à Ahmad [AHMA.70].

La machine a pris de la vitesse par le développement et l'amélioration de plusieurs éléments de différents types, pour l'analyse des problèmes de l'élasticité linéaire et même dans le domaine non linéaire [BEL.98b], [BEL.99] et [BEL.00].

Un retour sur les éléments rectangulaires avec rotations sur le plan [MOUS.02], dans le but de les améliorer.

Belouar et Guenfoud [BELO.05], ont développé de nouveaux éléments modélisant la flexion des plaques, tout récemment [BOUR.06] s'est intéressé au développement des éléments secteurs de Belarbi [BEL.05].

Dernièrement Rebiai et Belouar [REB .13], ont développée un élément à champ de déformation, chaque nœuds a trois degrés de liberté, deux translations et une rotation, cet élément est utilisé dans l'analyse des structures linéaires et non-linéaires, et pour l'analyse des matériaux dans le domaine élasto-plastique.

I.3 Utilisation de la méthode des éléments finis en dynamique

L'étude des vibrations d'une structure a pour objectif de déterminer son comportement aux chargements dynamiques, pour comprendre et contrôler les problèmes typiques liés aux mouvements vibratoires (fatigue, résonance, bruit..).

La maîtrise du problème inverse [KOO 96] permet de développer des techniques efficaces et rapides de caractérisation élastique ou viscoélastique, de contrôle de qualité, d'inspection et de diagnostic des structures, basées sur les mesures des vibrations.

Dans les deux cas, la première étape consiste à évaluer la réponse de la structure en fonction de tous les paramètres influants sur cette réponse. Selon les hypothèses retenues, la formulation permet de tenir compte du comportement du matériau, des défauts et des endommagements, de la nature du chargement et éventuellement de l'amortissement externe et de l'effet du milieu, en exprimant la relation entre ces paramètres et les inconnues du problème, champ des contraintes (approche contraintes) ou des déplacements (approche déplacements), sous forme d'équations aux dérivées partielles.

Pour une approche en déplacement, la modélisation peut être discrète (masses concentrées), analytique (déplacements généralisés) ou par éléments finis. Elle permet, dans le domaine des vibrations linéaires, la résolution du problème par superposition modale (ou intégration modale).

Le problème de vibration des plaques a été initialement traité par Sirinivas [SRNVS 70], Jones [ATJ 70] et Noor [AKN 73], où ils ont développé une solution exacte basée sur la théorie d'élasticité tridimensionnelle, permettant de déterminer les fréquences fondamentales de vibration d'une plaque rectangulaire, épaisse, en appuis simple, qui est constituée d'un stratifié croisé. L'effet du cisaillement transverse sur les fréquences propres de vibration de ces plaques a été étudié par Bert et Chen [CWB .78]. Ces derniers ont présenté une solution approchée basée sur la théorie de Yang, Norris et Stavsky [PCY.66] en vue de déterminer les

fréquences propres de vibration d'une plaque rectangulaire simplement appuyée, constituée d'un stratifié équilibre antisymétrique.

La méthode des éléments finis a été utilisée par Kant et Mallikarjuna [**KANT.89**] pour analyser les vibrations des plaques, ils ont développé un schéma de déplacement d'ordre élevé dans le but d'examiner l'effet des déformations en cisaillement transverse sur les fréquences de vibration les plus élevées. Leur théorie a été utilisée sans l'introduction des facteurs de correction en cisaillement transverse, Jing et Liao [**JING.90**] ont effectué leur étude sur un élément avec un champ de déformation hybride; les déformations en cisaillement transverse ont été traitées indépendamment des autres déformations, ils ont utilisé un élément hexaèdre à 20 nœuds. Les recherches de Shiao et Chang [chung91] ont été effectuées sans l'introduction de l'effet de l'inertie de rotation, un nombre élevé d'éléments triangulaires à 36 degrés de liberté a été utilisé dans le but d'examiner l'effet des déformations en cisaillement transverse sur les fréquences propres de vibration.

Quelle est ensuite la performance des variantes de [**BUL 84**] qui a introduit des modifications sur le champ de déformation de l'élément de [**ASH 72**] pour produire des éléments surtout en flexion, des éléments membranaires et en flexion. Ces éléments sont basés sur les hypothèses des coques profondes.

En 1995, Zaho et Steven [**ZHAO 95**], ont déterminé comment les formules asymptotiques peuvent être employées pour corriger et évaluer les fréquences normales prévues par l'élément fini dans les barrages de pesanteur et ceux du remblai.

Leung et son groupe [**LEUNG.03**], ont utilisé l'analyse trapézoïdale de Fourier p-élément pour des problèmes vibratoires libres des structures planes.

Kultu et Nahit en 2006 [**KL TU.06**], dans leur travail ont développé un nouvel élément quadrilatéral à huit nœuds, la formulation est basée sur le principe de variation de Hellinger-Reissner. L'élément proposé à six degrés de liberté par nœud, permet un raccordement facile à

d'autres types d'éléments finis. Des exemples numériques sont présentés pour montrer la validité et l'efficacité de l'élément actuel pour l'analyse de vibration libre.

Houmat [Houmat 06], a travaillé sur l'analyse de vibration libre des membranes en utilisant la méthode des éléments finis p-version. De nouvelles fonctions de forme sont exprimées en termes de fonctions trigonométriques de sinus. Ces fonctions sont numériquement plus stables que des polynômes orthogonaux à mesure que l'ordre est augmenté.

Des valeurs de fréquences sont également trouvées pour une membrane sectorielle ouverte, des comparaisons sont faites avec des valeurs exactes et avec des valeurs des éléments finis quadrilatérales, quadratiques linéaires et iso paramétriques. En outre, des valeurs fortement précises de fréquence sont trouvées pour une membrane carrée avec une ouverture circulaire centrale. Elle a d'abord prouvé que la méthode converge rapidement en bas à mesure que l'ordre trigonométrique est augmenté.

Paknahad et son groupe en 2007 [PAK07], utilisent l'élément triangulaire dans l'analyse des structures membranaires en dynamique. Dans cette étude une formulation alternative, utilisant les éléments optimaux du triangle membranaire dans la programmation par élément fini, ils ont été mis en application. La formulation a prouvé qu'un calcul plus efficace a été réalisé et l'exactitude du programme de MEF a été établie en utilisant quelques exemples standards dans l'analyse vibratoire.

L'élément développé par Djoudi et Bahai [DJO 03] est un élément de coque surbaissée, cylindrique basé sur le modèle en déformation désigné pour l'analyse géométrique linéaire et non linéaire des coques cylindriques. C'est un élément rectangulaire dans le plan, ayant seulement les 5 degrés de liberté essentiels dans chaque nœud. Le champ des déplacements de l'élément satisfait les conditions du mode du corps rigide. L'efficacité de l'élément est

démontrée dans l'analyse linéaire et non linéaire géométrique des structures coques, cet élément a été aussi utilisé dans le calcul des fréquences naturelles des coques cylindriques.

En outre le champ de déplacements des éléments basés sur l'approche en déformation est représenté par des polynômes d'ordre supérieur (polynômes quadratiques), qui permettent d'avoir une convergence rapide aussi bien pour le déplacement que pour les contraintes, quand les résultats sont comparés avec les éléments basés sur le modèle en déplacement correspondants, c'est-à-dire, les éléments à champ de déplacement qui ont le même nombre total de degrés de liberté. [DJO 04], ils sont ensuite intéressés à l'analyse des vibrations des panneaux cylindriques avec ouvertures et à l'influence de ces derniers sur le comportement dynamique des structures citées.

CHAPITRE II

FONDEMENT THEORIQUE

II.1 Elasticité bidimensionnelle

Trois modèles permettent de passer de l'étude d'un problème élastique en trois dimensions à un problème plan qui sont : Les deux modèles d'élasticité plane et le modèle axisymétrique. Nous rappelons dans un premier temps les principales hypothèses de modélisation et l'expression de la loi de comportement pour les problèmes d'élasticité plane.

II.1.1 Equations d'élasticité :

La résolution d'un problème de structure consiste à étudier trois champs vectoriels ainsi que leur relation :

- le champ des déplacements.
- le champ des déformations.
- le champ des contraintes.

Les différentes relations entre ces quantités peuvent être schématisées par la figure suivante :

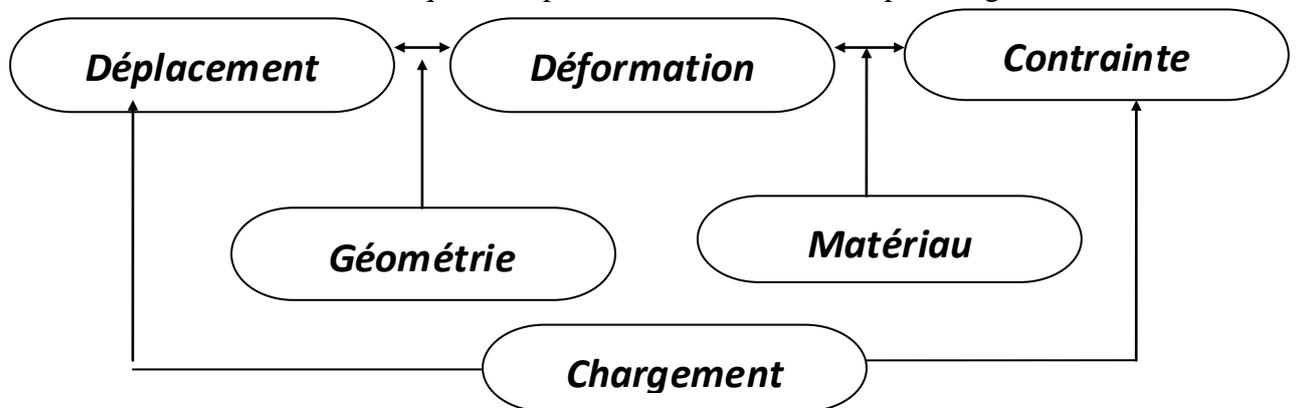


Figure II.1 : La relation entre déplacement, déformation-contrainte

Pour trouver la solution d'un problème d'élasticité bidimensionnelle où le matériau est supposé continu, homogène et isotrope, il suffit de connaître le champ de déplacement $\mu(x, y)$ (deux fonctions inconnues), le champ de tenseur des petites déformations $\zeta(x, y)$ (trois fonctions inconnues) et le champ du tenseur des contraintes $\sigma(x, y)$ (trois fonction inconnues).

La détermination de ces huit inconnus implique l'établissement de huit équations sont :

- deux relations d'équilibre ;
- trois relations déformation-déplacement (relations de compatibilités) ;
- trois relations contrainte-déformations (relations rhéologiques).

II.1.2 Les déplacements :

Pour un solide bidimensionnel, le mouvement d'un point solide dans l'espace est parfaitement défini par les deux composantes de vecteur du déplacement ;

$$\boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu} \quad \boldsymbol{v}]^T \quad (\text{II.1})$$

Où μ , v sont les déplacements du point suivant la direction des axes cartésiens x et y respectivement.

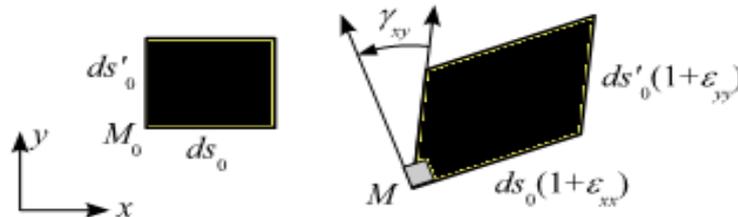


Figure II.2 : Le vecteur de déplacement d'un solide bidimensionnel

À l'intérieur de l'élément, le champ de déplacements $u(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$ est défini comme étant une interpolation linéaire des déplacements nodaux ;

$$\begin{cases} u(x, y) = N_1^e(x, y)u_i + N_2^e(x, y)u_j + \dots + N_n^e(x, y)u_k \\ v(x, y) = N_1^e(x, y)v_i + N_2^e(x, y)v_j \dots + N_n^e(x, y)v_k \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Les fonctions $N_i^e(x, y)$ sont des fonctions d'interpolation. On appelle matrice d'interpolation :

$$[A] = \begin{bmatrix} N_1^e(x, y) & 0 & \dots & N_n^e(x, y)u_i & 0 \\ 0 & N_1^e(x, y) & \dots & 0 & N_n^e(x, y)u_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

Avec cette notation, le champ de déplacement s'écrit comme suit :

$$[u(x, y)] = [A]\{u^e(x, y)\} \quad (\text{II.4})$$

II.1.3 Les déformations :

Un solide est en état de déformation planes par rapport au plan $\{o, x, y\}$, s'il existe un repère $\{o, x, y, z\}$ lié au solide, le champ de déplacements est :

$$\begin{cases} u(x, y) \\ v(x, y) \\ 0 \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Le tenseur des déformations se réduit à :

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

$\{\zeta\}$: est le vecteur des déformations

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

(II.7)

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$: Sont les déformations d'extension

γ_{xy} : Déformation de distorsion

Le tenseur des déformations ζ est symétrique, il est défini positif (il a des valeurs propres réelles), ses directions principales sont orthogonales.

II.1.4 Les contraintes :

Un solide est en état de contrainte planes par rapport au plan (o,x,y), s'il existe un repère (o,x,y,z), tout point M du solide, le tenseur des contraintes est :

Composantes sur :

$$\begin{cases} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

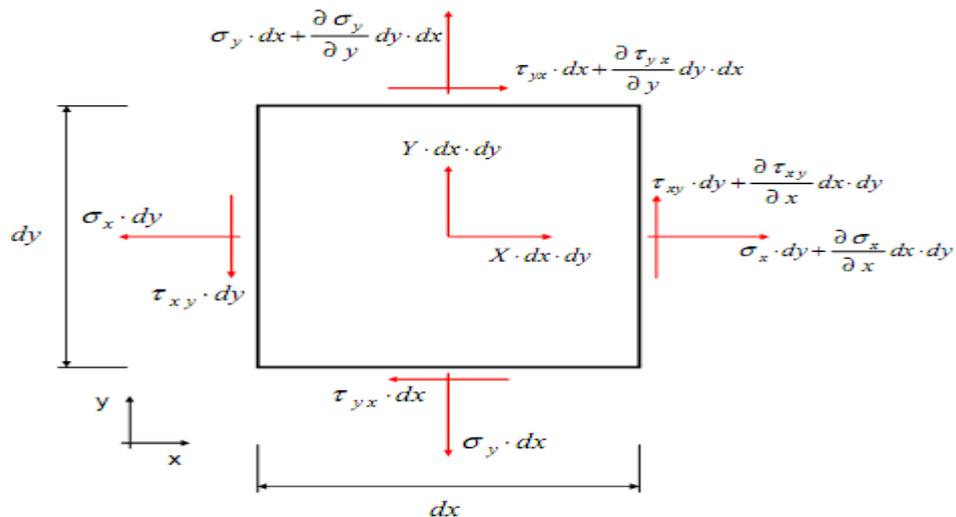


Figure II.3 : Les composantes des contraintes dans un corps bidimensionnel

Les contraintes n'ont pas de sens que par rapport à une facette que l'on oriente par sa normale, dans le cas où le vecteur normal est colinéaire à un vecteur de base.

On a: σ_{ij} où i correspond à la direction de la normale et j à la composante dans le plan de la facette (figure II.3).

σ_{xx}, σ_{yy} : Les contraintes normales.

ζ_{xy} : Les contraintes tangentielles.

II.1.5 Les relations de compatibilité :

L'objet de ce paragraphe est de montrer que l'on peut établir directement n'importe quelle équation de compatibilité à l'aide du théorème de la force unité. Nous souhaitons établir directement l'équation de compatibilité relative à la i coupure. L'équation de compatibilité dont il est question doit simplement exprimer l'existence d'un déplacement imposé $\delta_{i\Sigma p}^n$, au droit de cet appui dans le système hyperstatique de départ soumis aux charges extérieures. Ce déplacement imposé $\delta_{i\Sigma p}^n$ est généralement nul. Quand on connaît les déplacements, il est simple de déterminer les déformations, mais le problème inverse n'est pas aussi simple.

Il existe des relations de compatibilité pour soulever ces indéterminations qui sont :

$$\begin{cases} \frac{\sigma_{e_{ii}}^2}{\sigma_j \sigma_k} = \frac{\partial}{\partial i} \left(-\frac{\partial e_{jk}}{\partial i} + \frac{\partial e_{ik}}{\partial j} + \frac{\partial e_{ij}}{\partial k} \right) \\ \frac{2\sigma_{e_{ii}}^2}{\sigma_i \sigma_j} = \left(\frac{\sigma_{e_{ii}}^2}{\sigma_i \sigma_i} + \frac{\sigma_{e_{ij}}^2}{\sigma_j \sigma_j} \right) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Ces formules données sans sommation de l'indice répété.

II.1.5.1 Les relations rhéologiques :

Elles sont données par les lois physiques des matériaux qui expriment les relations entre les contraintes et les déformations. Les relations rhéologiques ou constitutives sont classées en trois groupes : Élasticité (linéaire ou non), élasto-plasticité et élasto-visco-plasticité. Pour ce qui est de l'élasticité, elle caractérise un comportement réversible ;

$$\sigma = [D] \cdot \varepsilon \quad (\text{II.9})$$

[D] : est la matrice constitutive élastique du matériau, elle est symétrique à cause de la symétrie de $\sigma \varepsilon$;

Un matériau homogène et isotrope est caractérisé par : le module de Yong E et le coefficient de poisson ν ;

On a:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Les équations des contraintes normales et des contraintes tangentielles sont données par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} + \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} \\ \sigma_{yy} = \mu\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} + \tau_{zy} = \mu\gamma_{zy} \\ \sigma_{xx} = \lambda\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{zz} + \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

On peut aussi exprimer ces relations en fonction du module de compressibilité K défini par :

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

Remarque : si $\nu = 0,5$, le module de compressibilité tend vers l'infini $K \rightarrow \infty$, le matériau devient alors incompressible.

II.1.5.2 Les relations d'équilibre :

Si on considère le petit élément rectangulaire dans la (figure II.2), cet élément est soumis, en plus de la distribution des contraintes, à une force de volume b de composantes b_x, b_y , en faisant l'équilibre statique des forces suivantes des deux axes, on aura les équations différentielles d'équilibre en équations de Navier.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + b_x = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0$$

II.1.5.3 Forme différentielle aux fortes équations de la mécanique des solides

La solution d'un problème statique de mécanique des solides est gouvernée par des équations aux dérivées partielles accompagnées de conditions aux limites, dont l'ensemble s'appelle la forme différentielle ou forte du problème aux limites.

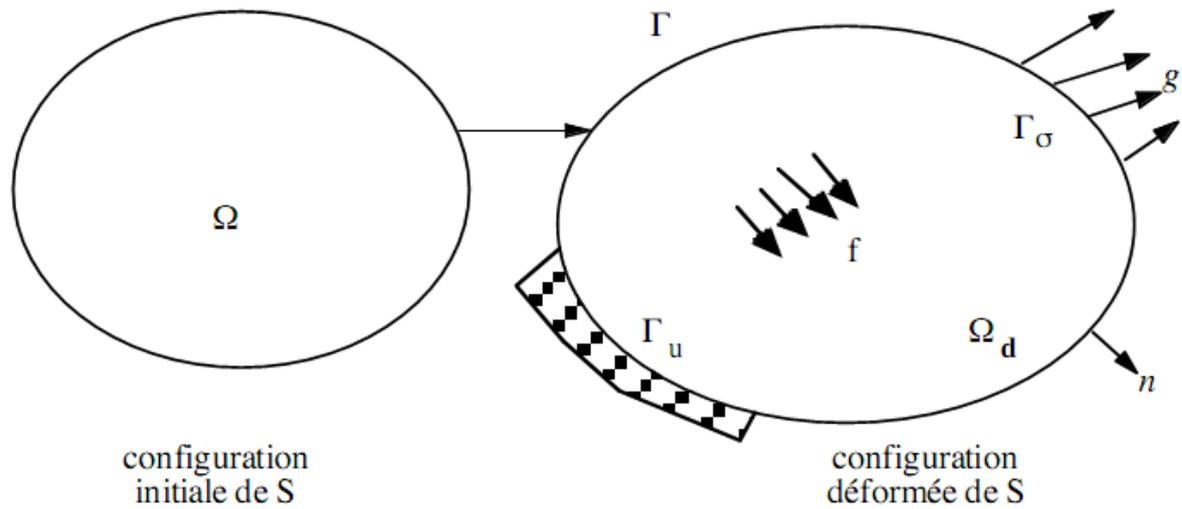


Figure II.4 Un corps quelconque en équilibre et en déformation

Ω : domaine étudié. Ces relations sont données ci-après sous forme indicielle :

Équilibre statique dans Ω :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j = 0 \quad (\text{II.14})$$

σ_{ij} Est le tenseur des contraintes, b_j est le vecteur des forces de surface

- Loi constitutive de Hook

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{Dans } \Omega) \quad (\text{II.15})$$

D_{ijkl} Est la matrice des propriétés du matériau

- équations cinématiques

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.16})$$

ε_{ij} : Est le tenseur des déformations

- conditions aux limites statiques ou naturelles

Un champ de forces statiques imposé sur la frontière Γ . $n_i \sigma_{ij} = t_j$ (Sur Γ)

Où : t_j est la force surfacique, éventuellement nulle, s'exerçant sur certaines parties de la frontière, et n sa normale extérieure.

- conditions aux limites cinématiques ou essentielles.

Un champ de déplacement imposé sur la frontière Γ_u . $U_i = \bar{U}_i$ (Sur Γ_u)

Des déplacements sur cette frontière sont imposés et peuvent être nuls, dans ces équations, la connaissance du seul champ des déplacements $u(x)$ entraîne celle des champs des déformations par les formules (II.16), puis les contraintes par (II.15), on obtient les équations de Navier, exprimant l'équilibre en fonction des déplacements (inconnus), c'est-à-dire exactement ce qu'on recherche, en introduisant (II.15) dans (II.16) et injectant par la suite (II.15) dans (II.14).

$$D_{ijkl} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_i \partial x_j} + b_j = 0 \quad (\text{dans } \Omega) \quad (\text{II.17})$$

Cette relation montre que le problème aux limites est du second ordre, on désigne par la notion $2m$ l'ordre maximal dans la forme différentielle, pour notre cas (élasticité), $2m=2$.

II.1.5.4 La forme Intégrale aux faibles équations de l'équilibre :

La résolution analytique des problèmes d'élasticité avec quinze équations différentielles à quinze inconnues, est une tâche extrêmement difficile et n'est possible que dans certains cas simples, pour résoudre le système différentiel, il faut le mettre sous une forme intégrale, appelée aussi forme variationnelle ou encore forme faible.

On est obligé de faire appel à des méthodes approchées, comme par exemple la méthode des résidus pondérés. Nous allons voir que les équations d'équilibre peuvent être générées à partir des principes variationnels, comme par exemple le principe des travaux virtuels. Pour ce qui suit, toutes les relations sont données sous forme indicielle puis sous forme matricielle.

Partant de la forme forte, fonction du champ de déplacement, on forme l'expression suivante (II.7), qui découle de l'application de la méthode des résidus pondérés.

$$\int \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j \right) w_j dV = 0 ; \quad \int w^T (L^T \sigma + b) dV = 0 \quad (\text{II.18})$$

$w_j(x_k)$ ou $W(x)$: Est la fonction poids, elle est à priori arbitraire. La forme faible où la formulation variationnel est obtenue en utilisant une intégration par partie :

$$\int \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_j \right) w_j dV + \int b_j w_j dV = \int \sigma_{ij} w_j n_i dA - \int \sigma_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dV + \int b_j w_j dV = 0$$

$$\int w^T L^T \sigma dV + \int w^T b dV = \int w^T C \sigma dA - \int L^T w \sigma dV + \int w^T b dV = 0 \quad (\text{II.19})$$

(Selon la loi de MMC). Avec L : matrice d'opérateurs différentiels

C : matrice des cosinus directeurs de la normale extérieure.

L'intégration par partie à mais un terme aux limites (II.18), qui permet d'englober une partie des conditions aux limites dans l'intégrale.

$$\int (n_i \sigma_j) w_j dA ; \quad \int w^T C \sigma dA \quad (\text{II.20})$$

L'équation (II.8) devient alors :

$$\int \sigma_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dV = \int t_j w_j dA + \int b_j w_j dV$$

$$\int L^T w \sigma dV = \int w^T t dA + \int w^T b dV \quad (\text{II.21})$$

Le contenu de l'intégrale gauche peut être transformé en produit de deux termes symétriques :

$$\int \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) dV = \int t_j w_j dA + \int b_j w_j dV \quad (\text{II. 22})$$

En interprétant la fonction poids comme un champ de déplacement virtuel ($w_j = \delta u_j$), on aura l'application des déformations virtuelles $\delta \varepsilon_{ij}$ dans l'intégrale de gauche :

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) ; \delta \varepsilon = L \delta u \quad (\text{II. 23})$$

Alors (II.22) devient :

$$\int \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int t_i \delta u_i dA + \int b_i \delta u_i dV ; \int \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int \delta u^T t dA + \int \delta u^T b dV \quad (\text{II. 24})$$

C'est la forme intégrale de l'équilibre qui traduit aussi le principe des travaux virtuels.

II.1.5.5 Le principe des travaux virtuels :

Le principe stipule que pour un champ de déplacement virtuel admissible (vérifiant la compatibilité et les conditions limites), l'énergie virtuelle de déformation interne est égale au travail extérieur virtuel. Elle représente le produit des contraintes et des déformations virtuelles, la variation (petite) de cette quantité est donnée ainsi:

$$\delta w_{\text{int}} = \int \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (\text{II. 25})$$

De la même façon, la variation du travail extérieur virtuel (produit des forces par les déplacements virtuels) s'écrit :

$$\delta w_{\text{ext}} = \int t_i \delta u_i dA + \int b_i \delta u_i dV \quad (\text{II. 26})$$

On a : $\delta w_{\text{int}} = \delta w_{\text{ext}}$

Cette relation traduit aussi le principe de l'énergie potentielle minimale.

II.1.5.6 L'énergie potentielle totale :

L'énergie potentielle totale d'une structure est égale à :

$$\Pi = U - P \quad (\text{II.27})$$

U : est l'énergie de déformation, elle correspond au travail de toutes les forces internes ;

P : est le travail des forces externes appliquées à la structure qui peuvent être de nature volumiques et/ou surfaciques ;

Lorsqu'une structure passe d'une configuration d'équilibre à une configuration infiniment voisine quelconque, la première variation de l'énergie potentielle totale est nulle, on dit que cette énergie est stationnaire.

$$\delta\Pi = \delta U - \delta P = 0 \quad (\text{II.28})$$

$$\delta U = \delta P$$

La variation de l'énergie potentielle intérieure est définie comme suit :

$$\delta U = \int (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy})$$

$$\delta U = \int (\delta \varepsilon^T) \sigma dV \quad (\text{II.29})$$

La variation du travail appliquée au système est :

$$\delta P = \int (b_x \delta u + b_y \delta v) dV + \int (t_x \delta u + t_y \delta v) dA$$

$$\delta P = \int (\delta u)^T b dV + \int (\delta u)^T t dA \quad (\text{II.30})$$

L'équation suivante donne le principe d'énergie potentielle minimale :

$$\int (\delta \varepsilon)^T \sigma dV = \int (\delta u)^T b dV + \int (\delta u)^T t dA \quad (\text{II.31})$$

Elle est analogue à l'équation (I.25) qui exprime l'équilibre.

II.1.6 Les méthodes de construction des fonctions de forme :

II.1.6.1 Introduction

On utilise une variante de la méthode des résidus pondérés dite *méthode de Galarkin* pour faire une approximation (interpolation) du champ des déplacements inconnus $u(x, y, z)$. dans cette méthode, on choisit pour le champ une combinaison de n fonctions, par exemple dans un cas bidimensionnel.

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i N_i(x, y) \quad (\text{II.32})$$

Les fonctions $N_i(x, y)$ sont des fonctions d'interpolation (connues, choisies) qui doivent être dérivables et dans une combinaison linéairement indépendantes (polynomiales en général). Les paramètres a_i sont de nature cinématique, ils représentent, le plus souvent, les valeurs du champ aux nœuds ; ceux sont alors les degrés de liberté d_i , n représente le nombre de degrés de liberté par élément. On peut écrire la relation (I.29) sous forme matricielle, ou N_u étant une matrice ligne de fonction d'interpolation :

$$u(x, y) = [N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad \dots \quad N_n(x, y)] \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} = N_u(x, y) d \quad (\text{II.33})$$

Si toutes les d_j sont nuls, sauf $d_i = 1$, on a :

$$u(x, y) = N_i(x, y) \quad (\text{II.34})$$

Ce qui signifie que toute fonction d'interpolation $N_i(x, y)$ représente le champ des déplacements induit dans l'élément par un déplacement unique et unité $d_i = 1$, c'est l'une des plus importantes propriétés des fonctions d'interpolation, elle s'écrit :

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{II. 35})$$

Quand le champ inconnu est vectoriel, on groupe ses composantes dans le vecteur U et ses matrices lignes de fonction d'interpolation dans la matrice des fonctions d'interpolation N .

$$U(x, y) = N(x, y)d \quad (\text{II. 36})$$

On peut construire l'interpolation de plusieurs manières.

II.1.6.2 Les fonctions de forme en coordonnées généralisées :

Le travail se fait dans le plan physique (réel), on écrit le champ inconnu sous forme d'un polynôme ordinaire :

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i m_i(x, y) \quad (\text{II. 37})$$

Où $m_i(x, y)$ représentent les monômes connus, appelés modes et a_i sont des paramètres inconnus ou bien des coordonnées généralisées. On peut écrire (II.34) sous forme matricielle,

$$u(x, y) = [m_1(x, y) \quad m_2(x, y) \quad \dots \quad m_n(x, y)] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = P_u(x, y)P \quad (\text{II. 38})$$

Où P_u est une matrice ligne de modes ou bien base polynomiale de l'interpolation et p est le vecteur des paramètres. Le nombre de terme de la base polynomiale doit être égal au nombre de degrés de liberté de l'élément. On utilise, le plus souvent, une base polynomiale complète,

ceci n'est possible que pour certaines valeurs de n . quand le champ inconnu est vectoriel, on aura :

$$U(x) = P(x)p \quad (\text{II.39})$$

Si l'on introduit, dans le membre de droite des relations (II.34) ou (II.35), les coordonnées d'un quelconque nœud de l'élément fini, on obtient à gauche le déplacement associé au nœud, par exemple, au nœud j , on a :

$$u_i = m_1(x_j, y_j)a_1 + m_2(x_j, y_j)a_2 + \dots + m_n(x_j, y_j)a_n \quad (\text{II.40})$$

Pour tous les nœuds, on peut écrire :

$$d = Cp \quad (\text{II.41})$$

C'est une matrice carrée, si elle n'est pas singulière, on peut résoudre (II.39), d'où

$$p = C^{-1}d \quad (\text{II.42})$$

En remplaçant (II.39) dans (II.36), on aura

$$U(x) = P(x)C^{-1}d \quad (\text{II.43})$$

Et en remplaçant (II.41) avec (II.33), on aura :

$$N(x) = P(x)C^{-1}d \quad (\text{II.44})$$

Dans cette méthode les fonctions de forme dépendent des coordonnées des nœuds de l'élément et sont donc différents pour chaque élément, c'est pourquoi, elle n'est utilisée que pour les éléments simples. En effet, l'obtention des fonctions de forme pour des éléments d'ordre ou de dimensions élevées (quadratique, cubiques, tridimensionnels) est plus délicate, car, l'inverse de la matrice C peut ne pas exister du tout.

On préfère, actuellement, utiliser des méthodes d'obtention directe des fonctions de forme en coordonnées naturelles ou intrinsèques, on citera, par exemple, les éléments de Serendip qui ont été développés par intuition, les éléments de Lagrange et les éléments de Hermite.

II.1.6.3 Les fonctions de forme en coordonnées naturelles-éléments de Serendip - Lagrange :

Les coordonnées naturelles permettent de définir une transformation du domaine physique (réel) de l'élément en un domaine géométrique simple admissible (imaginaire) dans lequel on peut construire plus aisément les fonctions de forme. On peut appliquer la méthode précédente (II.42) pour l'obtention des fonctions de forme qui sont indépendantes de la géométrie de l'élément réel, Les mêmes fonctions peuvent donc être utilisées pour tous les éléments qui possèdent le même élément de référence. Par ailleurs, il est plus facile d'obtenir les fonctions de forme en utilisant la méthode de Serendip ou les polynômes de Lagrange.

Famille de Lagrange

La construction systématique de fonctions de forme, en utilisant des coordonnées naturelles, peut se faire avec les polynômes de Lagrange qui vérifient la condition (II.35).

Pour p points, on peut définir p polynômes de Lagrange de degré $p-1$:

$$L_k^{p-1}(\epsilon) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p \frac{(\epsilon - \epsilon_i)}{(\epsilon_k - \epsilon_i)} = \frac{(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2) \dots (\epsilon - \epsilon_{k-1})(\epsilon - \epsilon_{k+1}) \dots (\epsilon - \epsilon_{p-1})(\epsilon - \epsilon_p)}{(\epsilon_k - \epsilon_1)(\epsilon_k - \epsilon_2) \dots (\epsilon_k - \epsilon_{k-1})(\epsilon_k - \epsilon_{k+1}) \dots (\epsilon_k - \epsilon_{p-1})(\epsilon_k - \epsilon_p)} \quad (\text{II.45})$$

Le cas tridimensionnel se déduit du cas bidimensionnel, qui lui-même se déduit du cas unidimensionnel. Il s'agit, en fait de faire le produit des polynômes de Lagrange selon les directions considérées (ϵ, η et ξ). L'inconvénient des éléments de Lagrange, réside en la présence systématique de nœuds internes, qu'il faut ultérieurement éliminer par condensation.

Famille de Serendip

Les éléments sont construits sans nœuds internes. Ils sont donc plus simples que les précédents et, souvent préférés. La famille de Serendip est basée sur le principe suivant : on se donne des nœuds additionnels d'interface de façon à pouvoir définir une variation quadratique ou cubique, etc.... des déplacements aux interfaces, par la suite, on obtient les fonctions de forme par inspection et récurrence. Il n'existe pas d'expression générale des fonctions de forme, il faut réellement les « découvrir ».

Il faut noter que les éléments à champ linéaire des deux familles Serendip et Lagrange sont identiques.

II.1.6.4 La formulation iso-paramétrique

Les éléments iso-paramétriques furent proposés pour la première fois par Taig et Irons. L'idée initiale fut de projeter des éléments de forme complexe à partir d'élément de référence de forme plus simple ayant des coordonnées naturelles (adimensionnelles) en utilisant des interpolations pour le passage entre deux systèmes de coordonnées (naturelles et réelles).

Les fonctions d'interpolation sont définies dans un repère naturel avec des coordonnées adimensionnelles ε, η liées aux coordonnées géométriques x, y et variant le plus souvent entre +1 et -1.

$$x, y = f(\varepsilon, \eta) \quad \text{et} \quad \varepsilon, \eta = g(x, y) \quad (\text{II.46})$$

Si, pour la géométrie et le champ des déplacements, on utilise les mêmes fonctions d'interpolations et les mêmes nœuds. L'élément obtenu est dit isoparamétrique. On peut donc écrire pour tel élément les relations d'interpolation sous la forme suivante :

$$x = \sum_{i=1}^m N_i(\varepsilon, \eta) x_i \quad y = \sum_{i=1}^m N_i(\varepsilon, \eta) y_i \quad (\text{II.47})$$

$$u = \sum_{i=1}^m N_i(\varepsilon, \eta) u_i \quad v = \sum_{i=1}^m N_i(\varepsilon, \eta) v_i \quad (\text{II.48})$$

Où m : est le nombre de nœuds de l'élément. On démontre facilement que les critères de convergence sont satisfaits pour les éléments iso-paramétriques si la condition :

$$\sum_{i=1}^m N_i = 1 \quad (\text{II.49})$$

Est vérifiée. En fait, si les critères sont remplis pour les éléments d'origines, ils le sont aussi pour les éléments iso-paramétriques.

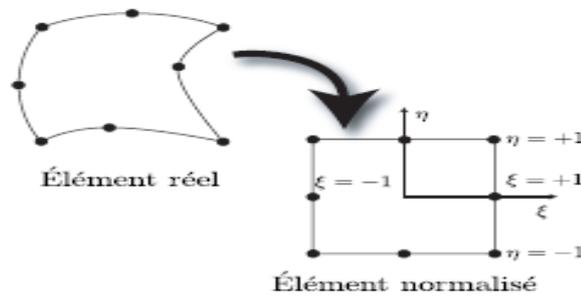


Figure II.5 l'élément iso paramétrique quadrilatère-bidimensionnel

Pour établir les caractéristiques de la matrice de rigidité et le vecteur force. Il faut opérer la transformation des axes (x, y, z) aux axes (ε, η) , ainsi, les relations entre les dérivées des deux systèmes de variables peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{II.50})$$

$$\text{Sous forme matricielle : } \frac{\partial}{\partial \varepsilon} = J \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{II.51})$$

$$\text{Ou encore : } \frac{\partial}{\partial x} = J^{-1} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \quad (\text{II.52})$$

L'opérateur J de l'équation (II.50) et son inverse J^{-1} sont obtenus à partir des relations d'interpolations géométriques (II.47). Le déterminant de J est appelé Jacobien, il est égal au rapport de deux éléments de surface correspondant dS_{xyt} dans (x, y, t) et $dS_{\varepsilon\eta t}$ dans (ε, η, t) . cette interpolation permet de dire que le Jacobien de la transformation iso-paramétrique doit être positif $J > 0$.

Sinon la distorsion produite est inadmissible. La matrice de rigidité de l'élément dans le repère naturel est :

$$K = \int B_{\xi\eta}^T DB_{\xi\eta} dV \quad (\text{II.53})$$

La matrice B dépend des coordonnées naturelles, il faut donc exprimer dA dans ce repère,

$$dV = t \det J d\xi d\eta \quad (\text{II.54})$$

La matrice de rigidité élémentaire est donc :

$$K = t \int B_{\xi\eta}^T DB_{\xi\eta} \det J d\xi d\eta \quad (\text{II.55})$$

L'intégration est en général effectuée de manière numérique avec la méthode de Gauss-Legendre, on pose :

$$F(\xi, \eta) = B_{\xi\eta}^T DB_{\xi\eta} \quad \text{et} \quad K = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F d\xi d\eta \quad (\text{II.56})$$

K est évalué avec la formule suivante :

$$K = \sum_i \sum_j w_i w_j F(\xi, \eta) \quad (\text{II.57})$$

w_i, w_j : Sont les coefficients des pondérations au point d'intégration (ξ, η) , qui doivent être choisis de manière à assurer une précision. On obtient de la même façon, les autres caractéristiques élémentaires, pour le vecteur des forces de volume, on a :

$$f = \int N_{\xi\eta}^T b \det J d\xi d\eta \quad (\text{II.58})$$

Les éléments iso-paramétriques sont devenus très populaires. Leur emploi tend à se généraliser au détriment des autres éléments. Ils constituent, dans bien des cas, la classe d'élément la plus utile pour la pratique.

II.2 L'Intégration numérique :

II.2.1 Introduction

Pour les éléments de degré élevé, pour les éléments courbes, ou encore à cause de la transformation iso-paramétrique, les expressions conduisant au calcul des caractéristiques des éléments ($K, f \dots$) peuvent se compliquer considérablement ; si l'intégration analytique devient difficile, lourde ou impossible, on procède par une intégration numérique. Celle de Gauss est la plus pratique, car elle minimise le volume des calculs.

L'intégration numérique consiste à calculer des valeurs pondérées (coefficients de pondération ou poids) de l'intégrale en un certain nombre de points remarquables (points d'intégration) appartenant à des éléments de référence, les valeurs de l'intégration sur un élément quelconque sont ensuite déduites par transformation mathématique.

Il s'agit de choisir, en fonction de la forme et du degré de l'interpolation de l'élément fini, une formule d'intégration et de définir, dans l'élément, un réseau de points d'intégration (figure II.6) qui constitue le schéma d'intégration



Figure II.6 Le schéma d'intégration numérique

II.2.2 L'ordre d'intégration numérique :

Les éléments, dans la formulation dans lesquels n'apparaissent que des expressions polynomiales, peuvent être intégrés exactement. En effet, l'intégration numérique de Gauss d'ordre n_G (n_G points dans une direction) intègre exactement un polynôme de degré $2n_G - 1$ (éléments exprimés en coordonnées cartésiennes).

II.2.3 L'intégration réduite :

L'expérimentation numérique, appuyée sur une considération théorique, montre que l'ordre d'intégration d'une unité inférieure à celui nécessaire à l'intégration exacte, il peut être utilisé avec profit : c'est l'intégration réduite. Elle présente deux avantages : elle tend à assouplir la réponse de l'élément, en réduisant l'excès de rigidité inhérent au modèle de déplacement, et elle diminue le volume des calculs. Mais elle peut aussi représenter un danger, celui d'abaisser le rang de la matrice de rigidité (apparition de mécanisme).

En dépit du risque, l'intégration réduite est très couramment utilisée en pratique car elle permet d'améliorer les performances des éléments. Néanmoins ce problème reste délicat et doit être étudié avec le plus grand soin (test des valeurs propres, *single élément test*).

II.2.4 L'intégration sélective :

On peut améliorer certains éléments (exemple : élément plaque Q4) dont le comportement est de type flexion (présence d'une énergie de cisaillement) en utilisant une technique

d'intégration numérique sélective. En effet, la matrice de rigidité peut être considérée comme la somme d'une matrice de type extension et d'une matrice de type cisaillement, le choix d'une intégration réduite à un point pour les termes de cisaillement alors que les termes d'extension sont intégrés avec (2*2) points de Gauss, améliore sensiblement l'élément.

Les techniques d'intégration réduites et sélectives sont aujourd'hui appliquées aux éléments de plaque avec cisaillement transverse CT car elles permettent d'éviter le phénomène du *verrouillage* ou *Locking* qui caractérise les plaques minces.

II.3 L'analyse dynamique vibratoire et méthodes utilisées :

II.3.1 Introduction

Pour prévoir et comprendre le comportement d'une structure, la connaissance de ses paramètres modaux (extraction modale), à savoir **ses fréquences et modes propres** ainsi qu'éventuellement ses coefficients modaux d'amortissement, est essentielle. Ces informations modales sont également indispensables en identification des structures lors de validation d'un modèle numérique par rapport au modèle expérimental équivalent. La comparaison des approches numériques et expérimentale est en effet réalisée habituellement au niveau modal, étant donné que les modèles modaux respectifs sont plus compacts que les modèles spaciaux. Fréquentiels ou temporels associés. Qu'ils sont aisément accessibles par les deux voies d'analyse et que les fréquences propres, contrairement aux réponses temporelles, sont en règles générales peu influencées par les amortissements. De plus, si les caractéristiques modales d'une structure sont disponibles, il est possible de résoudre les équations différentielles régissant son comportement dynamique dans la base modale des modes propres préalablement extraits.

II.3.2 La définition du problème aux valeurs propres généralisées :

En admettant que le système discrétisé soit immobile (coïncidence des référentiels lié et fixe) et en négligeant les amortissements de type visqueux, l'équation matricielle associée pour un régime libre, prend la forme suivante :

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \quad (\text{II.59})$$

Dans laquelle, selon les conventions adoptées, M et K désignent les matrices globales ($n \times n$) de masse et de rigidité et q représente le vecteur des n déplacements nodaux généralisées, dépendant du temps t. cette équation matricielle des petites oscillations libres du système est en fait identique à l'expression après l'annulation des forces d'excitation.

Compte tenu de cette expression, l'équation matricielle associée au régime libre du système devient : $(K - \omega^2 M)p = (K - \lambda M)p = 0$

(II.60)

Où la variable $\lambda = \omega^2$, introduite par convention d'écriture, est un scalaire réel positif.

Vu la nature des matrices structurelles, ce système homogène de n équations linéaires admet n solutions non triviales $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ telles que soient vérifiées les équations

$$(K - \omega^2 M)p_i = (K - \lambda_i M)p_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (\text{II.61})$$

II.3.3 L'orthogonalité des modes propres de vibration :

L'orthogonalité des vecteurs modaux et des modes propres d'une structure constitue une propriété fondamentale, puisqu'elle permet de montrer leur indépendance linéaire et qu'elle revêt une grande importance dans la formulation générale de la solution du régime libre ou forcé du système.

Afin de démontrer cette propriété, considérant d'abord le cas de deux pulsations propres distinctes. ω_i et ω_j , correspondant aux vecteurs modaux respectifs p_i et p_j , et écrivons les deux relations :

$$Kp_i = \omega_i^2 Mp_i \quad (\text{II.62})$$

$$Kp_j = \omega_j^2 Mp_j$$

$$\begin{aligned} p_j^T K p_i &= \omega_i^2 p_j^T M p_i \\ p_i^T K p_j &= \omega_j^2 p_i^T M p_j \end{aligned} \quad (\text{II.63})$$

Après transposition de cette dernière conduit, conformément à la symétrie des matrices structurelles, à l'égalité suivante :

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) p_i^T M p_j = 0 \quad (\text{II.64})$$

II.3.4 Les méthodes numériques d'extraction modale :

II.3.4.1 La classification des méthodes :

Comme nous avons pu le voir dans des exemples pourtant fort simple, la recherche analytique des paramètres modaux d'un système vibratoire n'est guère envisageable d'un point de vue pratique, le recours à une procédure numérique constituant la règle usuelle.

La nature même du problème dynamique entraîne cependant que la résolution par voie numérique de l'équation aux valeurs propres est nettement plus coûteuse que celle d'un problème statique, étant donné que la solution ne peut être trouvée que de manière itérative et non plus en un seul pas. D'importants efforts ont dès lors été consacrés à l'extraction numérique des caractéristiques modales d'une structure, donnant ainsi jour à de nombreux algorithmes performants, adaptées au départ exclusivement au problème aux valeurs propres standard.

Parmi les techniques courantes, rappelons tout d'abord les méthodes **d'itération** sur les vecteurs et les valeurs propres, comme la méthode de la puissance, l'itération inverse avec ou sans translation spectrale et l'itération inverse de **Rayleigh**, basées sur les problèmes aux matrices éparées ou à faible largeur de bande. Elles ne sont toutefois efficaces que lorsque le nombre de paires propres à extraire n'est pas trop élevé, et peuvent connaître certaines difficultés en présence de fréquences propres multiples.

Les extracteurs modaux, alliant différentes techniques de base et sachant exploiter efficacement leurs avantages respectifs lorsque la taille des matrices structurelles est importante, ne sont malheureusement pas abondants. Des rares stratégies performantes de résolution modale, nous retiendrons ici *la méthode de sous espaces* et la *méthode de Lanczos*, qui sont bien adaptées à la recherche des fréquences propres les plus basses de grands systèmes, à ces deux techniques d'extraction directe sera ajoutée, étant donné qu'elle ouvre la voie aux techniques de sous-structuration et de système en analyse modale, la méthode de réduction *de Guyan-Irons*, qui s'appuie sur la condensation de la taille du problème aux valeurs propres.

II.3.4.2 La méthode d'itération d'un sous espace :

La méthode d'itération d'un sous espace ou méthode des sous espace constitue un outil particulièrement puissant de résolution modale, surtout si seul un nombre limité d'éléments propres correspondant à un domaine spectral étroit est à extraire de systèmes algébriques de grande taille et à matrices associées symétriques.

Principe général de la méthode

Dérivée de la technique de l'itération inverse, la méthode de sous-espaces combine l'itération inverse, appliquée simultanément à un ensemble de vecteurs, et un processus d'orthogonalité basé sur la propriété de stationnarité du quotient de Rayleigh.

Permettant le calcul des p paramètres solutions propres $\{\lambda_i, p_i\} (i = 1, 2, \dots, p \ll n)$ du problème généralisé d'ordre n , cette procédure comporte étapes fondamentales consistant à :

- Choisir un ensemble de q vecteurs d'itération de départ ($q > p$), engendrant le sous-espace initial $S_{(0)}$.
- Générer, par l'itération inverse appliquée simultanément aux q vecteurs d'itération, une suite de sous espace $S_{(k)} (k = 1, 2, \dots)$ convergeant vers le sous espace S engendré par les vecteurs propres associés aux q premières valeurs propres ;

- Orthogonalisé les q itérés par une analyse classique de Ritz à la fin de chaque itération, afin d'extraire les p valeurs propres approchées de plus faible amplitude.

II.3.4.3 La méthode de Lanczos :

Elle a été longtemps considérée à tort comme une technique de résolution modale peu robuste, voire même comme un simple procédé de tri-diagonalisation matricielle-de surcroît moins efficace que les procédés de Givens et de Householder-, la méthode de Lanczos est maintenant reconnue, depuis la maîtrise des principales instabilités numériques, en tant que technique performante d'extraction des solutions propres de systèmes de très grande taille.

Principe général de la méthode

Permettant l'estimation des p paramètres propres $\{\lambda_i, p_i\} (i = 1, 2, \dots, p \ll n)$ du problème aux valeurs propres généralisées d'ordre n , la méthode de **Lanczos**, associant la procédure traditionnelle de **Rayleigh Ritz** à une séquence classique de Krylov obtenue par la technique de l'itération inverse, se distingue par trois phases principales revenant à :

- Choisir un vecteur arbitraire, orthonormé dans la métrique de la matrice de masse et engendrant le sous-espace de Krylov initial $\kappa_{(0)}$
- Construire, par la méthode de l'itération inverse, une suite de sous-espaces de Krylov $\kappa_{(k)} (k = 1, 2, \dots)$ convergeant vers les sous-espaces S engendré par les vecteurs propres correspondant aux $k+1$ valeurs propres de plus faible module ;
- Orthogonalité par une analyse de Ritz les $k+1$ vecteurs de la séquence courante de Krylov à la fin d'un cycle, afin d'extraire les p valeurs propres approchées les plus faibles en amplitude ($p \leq k+1$).

Il est à remarquer que, similairement à la méthode des sous-espaces, l'information contenue dans l'ensemble des vecteurs du sous-espace est mise à profit, à chacune des itérations, pour obtenir grâce à la propriété de stationnarité du quotient de Rayleigh, les meilleures approximations des paires propres recherchées.

Le principe de base de la méthode de **Lanczos** se différencie toutefois de la démarche caractérisant la technique d'itération d'un sous-espace par le fait que le sous-espace itéré n'est plus de taille fixe durant le déroulement de processus, mais est enrichi d'un nouveau vecteur à chaque itération.

II.3.4.4 La méthode de réduction de Guyan Irons :

Utilisées à l'origine pour simplement réduire la taille d'un problème aux valeurs propres et rendre ainsi possible une résolution en mémoire centrale à une époque où les capacités et performances des ordinateurs étaient peu développées, les méthodes de réduction ou de condensation connaissent aujourd'hui encore un succès important en raison de leur faible coût lié à leur nature par essence non itérative. Leur popularité s'explique aussi par le fait qu'elles sont à la base de plusieurs procédés de sous-structuration et de synthèse modale (décomposition d'un système en sous-domaines, suivie de l'assemblage approprié des modes des sous-structures), comme la méthode de condensation à plusieurs niveaux. De plus, ces techniques sont souvent indispensables en identification des structures pour réduire la taille des matrices structurelles d'un modèle numérique dans le but d'en assurer la compatibilité dimensionnelle avec la modélisation expérimentale correspondante, le nombre de degrés de liberté de la discrétisation étant toujours nettement plus élevé que le nombre de points de mesure définissant le modèle d'essais.

Principe général de la méthode

S'appuyant sur la condensation parallèle et cohérente des rigidités et des masses relatives à des déplacements généralisées probablement choisis et sur la procédure classique de projection de **Rayleigh Ritz**, la méthode de réduction de **Guyan Irons** permis l'extraction aisée des p paramètres solutions propres $\{\lambda_i, p_i\} (i = 1, 2, \dots, p \ll n)$

du problèmes aux valeurs propres généralisées d'ordre n après diminution directe de la dimension des matrices structurelles associées. Cette procédure comporte trois phases essentielles consistant à :

- Définir un sous ensemble de q degrés de liberté principaux ($q > p$), susceptibles de caractériser seuls le comportement vibratoire de la structure, les $n-q$ degrés de libertés complémentaires formant les coordonnées généralisées à éliminer.
- Construire les q modes de déformations statique correspondant aux degrés de libertés primaires et générant une approximation du sous espace S engendré par les vecteurs propres associés aux q premières valeurs propres.
- Orthogonalité les q modes de déformation statique grâce à une analyse de Ritz, afin d'extraire les p valeurs propres approchées les plus faibles en module.

II.3.4.5 La méthode de Muller :

Le traitement en éléments finis du problème aux valeurs propres permet l'écriture de l'équation variationnel sous la forme :

$$(K - \omega_i^2 M)x_i = 0 \quad (\text{II.65})$$

C'est-à-dire sous la forme des problèmes algébriques aux valeurs propres avec :

K : est la matrice de rigidité

M : est la matrice de masse

ω_i : Est la pulsation propre, s'exprime en radiant par seconde (rad/s).

Le problème admet une solution non triviale si le déterminant du système (II.20) est nul :

$$P(\lambda_i) = \det(D) = 0 \quad (\text{II.66})$$

Avec : $D = (K - \lambda_i M)$ Ou : $\lambda_i = \omega_i^2$

λ_i : est la valeur propre associée au vecteur propre x_i .

Les racines de l'équation (II.21) sont déterminées en utilisant la méthode de Muller, basée sur les méthodes itératives et une interpolation parabolique de l'équation caractéristique.

L'avantage de cette méthode est la possibilité de déterminer le nombre nécessaire de fréquences sans déterminer les coefficients du polynôme caractéristique sous forme explicite.

Donc, il suffit de calculer le polynôme pour des valeurs λ_i fixes.

La première étape est de décomposer la matrice **D** en produit de deux matrices triangulaires par l'algorithme de *Cholesky*.

$$D = \overline{D}^T \overline{D} \tag{II.67}$$

\overline{D}^T et \overline{D} sont respectivement des matrices triangulaires inférieure et supérieure.

$$\overline{D} = \begin{bmatrix} \overline{d}_{11} & \overline{d}_{12} & \dots & \overline{d}_{1n} \\ 0 & \overline{d}_{22} & \dots & \overline{d}_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \dots \overline{d}_{nn} \end{bmatrix}; \quad \overline{D}^T = \begin{bmatrix} \overline{d}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \overline{d}_{21} & \overline{d}_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{d}_{n1} & \overline{d}_{n2} & \dots & 0 \dots \overline{d}_{nn} \end{bmatrix} \tag{II.68}$$

Avec :

$$\overline{d}_{11} = \sqrt{d_{11}}; \overline{d}_{ij} = \frac{d_{ij}}{\overline{d}_{11}} \quad \overline{d}_{ii} = \frac{1}{\overline{d}_{ii}} \left(d_{ij} - \sum_{e=1}^{i-1} \overline{d}_{ei} \overline{d}_{ej} \right); i > j$$

$$\overline{d}_{ii} = \sqrt{d_{ii} - \sum_{e=1}^{i-1} \overline{d}_{ei}^2}; i > 1$$

Le déterminant de la matrice D est déterminé comme suit : $\det(D) = \prod_{i=1}^n \overline{d}_{ii}^2$

1) pour les trois valeurs arbitraires λ_0, λ_1 et λ_2 , on calcule les valeurs du polynôme caractéristique $P(\lambda_i)$:

$$\begin{cases} t_0 = P(\lambda_0) \\ t_1 = P(\lambda_1) \\ t_2 = P(\lambda_2) \end{cases} \tag{II.69}$$

2) on construit un système de fonctions d'interpolations de second ordre :

$$\begin{cases} b_0\lambda_0^2 + b_1\lambda_0 + b_2 = t_0 \\ b_0\lambda_1^2 + b_1\lambda_1 + b_2 = t_1 \\ b_0\lambda_2^2 + b_1\lambda_2 + b_2 = t_2 \end{cases} \quad (\text{II.70})$$

3) en résolvant le système (II.70), on obtient les coefficients b_0, b_1 et b_2 .

4) on construit l'équation d'interpolation suivante :

$$b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0 \quad (\text{II.71})$$

Les racines de l'équation (II.71), dont la valeur absolue est proche de λ_2 est prise pour valeur approchée suivante et toute la procédure se fait pour les valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, on obtient λ_4 , etc.

Le critère d'arrêt du processus itératif est la vérification de la condition suivante :

$$\left| \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \right| < \varepsilon \quad (\text{II.72})$$

ε : Précision de convergence.

si $\lambda_0 = -1, \lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$ La suite $\{\lambda_m\}$ converge vers la racine minimale de l'équation (II.73).

Après le calcul de la première valeur propre $\lambda = \lambda_1$, le polynôme caractéristique est réécrit sous la forme suivante :

$$P(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \lambda_1} |K - \lambda M| \quad (\text{II.73})$$

En suite, la racine du nouveau polynôme caractéristique est calculée par l'algorithme donné précédemment pour les mêmes valeurs λ_0, λ_1 et λ_2 .

Notons que, si les matrices, \mathbf{K} et \mathbf{M} sont symétriques à coefficients réels, il en résulte que toutes les valeurs propres du système sont réelles. Si le système comporte N degré de libertés (d.d.l), il existe N valeurs propres réelles, dont seul un petit nombre n a un sens physique, les $N-n$ autres ne sont que des valeurs numériques.

Une fois que le mode fondamental est déterminé, celui-ci est généralement éliminé à partir des équations gouvernantes du problème aux valeurs propres par le processus de déflation.

L'utilisation de cette contrainte nodale dans les équations gouvernantes du mouvement permet de réduire la taille du système d'équations matricielles de \mathbf{N} à $\mathbf{N}-1$. Dans le système d'équations ainsi réduit, le deuxième mode devient dominant et peut être calculé de la même manière que le premier. Cette séquence d'itération-déflation, est répétée à fin d'extraire le nombre de modes utiles. Toutefois, à fin de préserver la précision dans chaque itération, il est nécessaire d'orthogonaliser par rapport à la matrice \mathbf{M} chaque nouveau vecteur propre avec ceux déterminés précédemment.

L'orthogonalité des vecteurs propres x_1 et x_2 est exprimée par rapport à la matrice masse \mathbf{M} comme suit : $x_1^T M x_2 = 0$ (II.74)

II.3.5 Le choix d'une méthode d'itération :

Tant les techniques des sous-espaces, de **Lanczos** et de **Guyan-Irons** consacrées à la résolution des grands problèmes aux valeurs propres que les méthodes traditionnelles d'itération sur un vecteur propre, de transformation des matrices structurelles ou de localisation des racines du polynôme caractéristique adaptées aux problèmes d'analyse dynamique de taille modeste comme par exemple le problème d'interaction dérivé de la procédure classique de **Rayleigh-Ritz** possèdent toutes des qualités intrinsèques indéniables, mais aucune d'entre elles n'a malheureusement le mérite d'être universelle.

En effet, chacun des algorithmes précités présente inévitablement des désavantages, même de gravité toute relative, de sorte qu'espérer allier sous une seule méthode des caractéristiques aussi difficilement conciliables, voire même contradictoires, que sont *la généralité, la robustesse, la fiabilité, la facilité de mise en œuvre et l'efficacité numérique* tient presque de la gageure. Il faut par conséquent accepter un compromis, en sélectionnant dans la large gamme disponible la technique d'extraction modale la plus appropriée au problème à résoudre. Afin de faciliter ce choix les avantages et inconvénients respectifs des algorithmes des *sous-espaces, de Lanczos et de Guyan-Irons*.

Remarquons que les comparaisons seront limitées volontairement aux techniques destinées aux problèmes aux valeurs propres de grande taille, tels qu'ils apparaissent couramment en dynamique des structures, les méthodes traditionnelles n'étant évoquées que dans la mesure où elles interviennent au niveau des problèmes d'interaction.

- **Taille du problème aux valeurs propres**

Si le nombre de coordonnées généralisées n'est pas trop grand ($n < 20000$), les paires propres cherchées peuvent, pourvu que la largeur de bande des matrices structurelles soit suffisamment faible, être extraites au moyen de la méthode des sous espaces ou de Lanczos.

Au cas où la complexité du problème à traiter ou la finesse désirée de la discrétisation en éléments finis entraîne un nombre de degrés de liberté plus élevé ($n > 20000$) ou si les matrices de masse et de rigidité sont fort peuplées, il est nécessaire de recourir à l'algorithme de condensation pour réduire la quantité totale d'inconnues.

- **Nombre de paires propres désirées**

Bien qu'en règle générale seule une quantité restreinte de valeurs propres ($p < 20$), de surcroît les plus basses en amplitude, revête un intérêt particulier en dynamique des structures, il arrive à cause de la forte densité modale du système étudié que l'extraction d'un nombre plus élevé d'éléments propres soit préconisée. Une telle situation, qui est également transitoire d'une structure soumise à une excitation à large contenu spectral, ne constitue pas un obstacle aux méthodes itératives comme les algorithmes des *sous-espaces* et *de Lanczos*. L'application de la méthode de *Guyan-Irons* pose par contre davantage problème lorsque la quantité des paires propres voulues s'accroît, dès lors que la précision des solutions se dégrade assez rapidement avec l'ordre des valeurs propres.

- **Dispersion du spectre fréquentiel**

Les méthodes itératives des *sous-espaces* et de *Lanczos* sont d'autant plus efficaces que les fréquences propres sont distribuées uniformément dans le domaine spectral d'intérêt et qu'elles sont bien séparées des valeurs restantes, une concentration du spectre dégradant notablement le taux de convergence des algorithmes.

On peut cependant montrer que la méthode de *Lanczos* est moins affectée par une distribution spectrale irrégulière que la technique de *sous-espace*, et qu'une concentration des valeurs propres permet même de retarder la dégénérescence de l'orthogonalité naturelle des vecteurs de *Lanczos* liés au processus, le procédé de *Guyan-Irons* est quand à lui peu sensible à la répartition spectrale.

Nous remarquons enfin qu'en cas de fréquences multiples nulles correspondant à des modes flottants ou non nulles provenant des symétries de la structure, la méthode de *Lanczos* présente, contrairement aux techniques des sous-espaces et de *Guyan-Irons*, certaines difficultés pour extraire rapidement toutes les copies des valeurs propres confondues.

- **Degrés d'approximation des paires propres cherchées**

Il est parfois nécessaire de connaître avec une précision assez fine les fréquences propres d'intérêt, ainsi que les modes correspondants. Indispensable en identification des structures pour une comparaison fidèle des modèles numériques et expérimentaux d'un système, cette exigence ne constitue nullement un obstacle pour la méthode itérative des *sous-espaces* ou de *Lanczos*. Les algorithmes de *Lanczos* et des *sous-espaces*, la précision des éléments propres trouvés par la méthode de *Guyan-Irons* est figée puisqu'elle est déterminée par la sélection des degrés de libertés primaires. Les résultats obtenus risquant donc d'être imprécis si le choix de ces coordonnées est inapproprié.

II.3.6 Conclusion :

Reposant chacune d'elles sur une analyse traditionnelle de **Ritz**, les techniques de **Guyan-Irons**, des *sous-espaces*, **Muller** et de **Lanczos** sont intimement liées, même si la dernière se distingue des deux autres par son caractère non itératif.

En effet, le cycle initial de la méthode d'itération d'un sous-espace peut être interprété comme un procédé de réduction s'appuyant sur les modes de déformation correspondant aux différentes distributions de charges inertielles.

De même l'algorithme de **Lanczos** est équivalent à une procédure de condensation automatique conduisant à un problème d'interaction à matrice tri diagonale. Vu la relation étroite entre ces quatre méthodes d'extraction, il est possible par exemple d'accélérer la convergence de la technique des *sous-espaces* en choisissant, comme vecteurs de départ, les vecteurs propres résultant d'une condensation appropriée de **Guyan-Irons** ou, à l'inverse, d'accroître la précision des paires propres extraites à partir de la procédure de réduction en complétant l'analyse par un cycle de la méthode d'itération d'un sous-espace.

CHAPITRE III

FORMULATION ISOPARAMETRIQUE DE QUELQUES ELEMENTS FINIS

III.1 INTRODUCTION

Jusqu'à maintenant on continue toujours à proposer des nouveaux modèles, les auteurs se voient, obliger d'assumer une lourde tâche qui est choisir parmi les formulations celles qui satisferont un certain nombre d'exigences, souvent réclamées par l'ingénieur, et procéder par la suite à une sélection finale.

Selon les recherches bibliographiques nous constatons l'ampleur de la MEF grâce à l'invention de la nouvelle approche 'déformation' qu'elle a obéit à une croissance rapide comme une alternative aux autres modèles.

Dans ce chapitre on va présenter quelques éléments membranaires rectangulaires, qui sont basés sur la formulation en déformation, ils ont des différents DDL par nœud.

III.2 Description de l'élément membranaire :

Les éléments membranaires sont parmi les éléments les plus simples à les développés.

Ces éléments sont employés pour analyser des structures soumises aux forces dans le plan.

Supposant que la structure est dans le plan (x, y) , les déplacements d'un point quelconque de la structure sont u : la translation suivant la direction x et v : la translation suivant la direction y . Les efforts internes sont des contraintes normales σ_x et σ_y et la contrainte de cisaillement

τ_{xy} . Les éléments de membrane, sont employés pour modéliser le comportement des structures en 2D, le mur de cisaillement et l'action de membrane dans les coques.

III.3 Transformation Géométrique :

La transformation géométrique permet de définir la forme de l'élément réel à partir d'un certain nombre de points dans l'élément, appelés "points géométriques"

Les transformations géométriques sont tout simplement des fonctions d'interpolation de la géométrie figure (III.1).

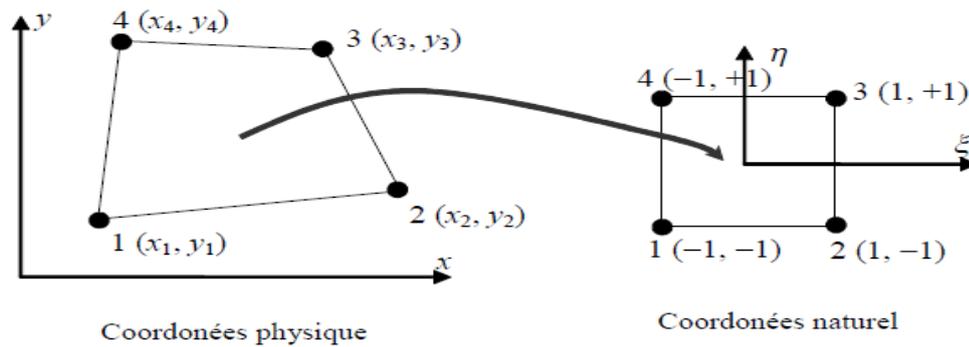


Figure III.1 Le passage de l'élément physique à l'élément de référence

III.4 Formulation iso paramétrique :

Pour une mise en œuvre pratique de l'isoparamétrie, il faut passer par plusieurs étapes spécifiques:

1. La construction des fonctions de forme de l'élément formulé.
2. Calculs des dérivées des fonctions de forme pour former la matrice de contrainte-déplacement.
3. L'intégration numérique sur l'élément (avec quadrature de Gauss).

L'élément SBRIE a deux degrés de liberté dans chacun des quatre nœuds du coin et il est représenté schématiquement sur la figure (III.6). Les longueurs a et b sont respectivement les dimensions de l'élément dans les directions x et y .

III.5 L'élément fini pour les structures bidimensionnelles

III.5.1 La formulation isoparamétrique de l'élément Q4 :

Dans cette section, nous considérons la formulation d'un élément fini rectangulaire pour l'étude d'élasticité plane.

Nous suivons la procédure générale pour établir la matrice de rigidité :

- Identifier les degrés de liberté nodaux appropriés $\{q\}$,
- Assumer la solution appropriée pour le champ de déplacement de l'élément $u(x, y); v(x, y)$.

- Obtenir les fonctions de forme correspondantes $\{N(x, y)\}$ pour $\{q^e\}$ de sorte que :

$$u(x, y) = \{N(x, y)\}^T \{q^e\}, v(x, y) = \{N(x, y)\}^T \{q^e\}$$

- Ecrire les déformations en termes de degré de liberté (ddl) nodal $\{q^e\} \{\varepsilon\} = [B] \{q^e\}$,

$[B]$ Contient des dérivés des fonctions de forme,

- La matrice de rigidité élémentaire prend la forme habituelle de $[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$

or: $[D]$ est la matrice des propriétés élastiques dans la relation contrainte-déformation

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

III.5.1.1 Calcul de la matrice de rigidité de l'élément Q4 :

Pour élaborer la matrice de rigidité on doit passer par des étapes :

a) On choisit un système de coordonnées convenable et numéroter les nœuds, on suppose que l'élément rectangulaire a des côtés de longueur a et b et une épaisseur (t) et le système de numérotation des nœuds comme il est montré dans la **Figure III.2a**.

Pour un problème d'élasticité plane, l'élément a deux degrés de liberté en chaque nœud, chaque élément à huit degrés de liberté.

La **Figure III.2b** montre les huit déplacements inconnus.

La **Figure III.2c** montre les forces nodales correspondantes.

En utilisant la notation matricielle, on peut écrire les faces au nœud I de la façon suivante :

$$\{F_1\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{Bmatrix}$$

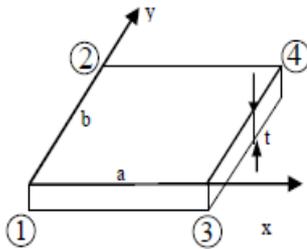


Figure III.2a

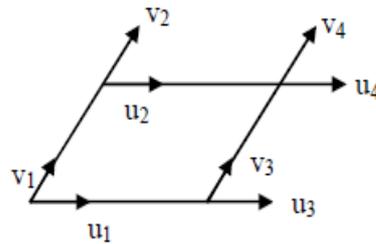


Figure III.2b

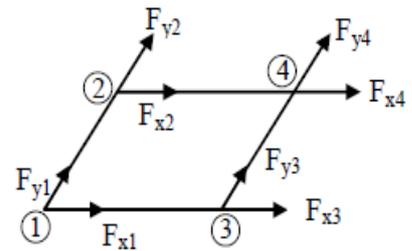


Figure III.2c

Et de même pour les forces au nœud I on a :

Les équations (1) et (2) donnent les vecteurs des déplacements et des forces complets pour l'élément :

$$\{q^e\} = \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \\ \{q_3\} \\ \{q_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \dots \\ u_2 \\ v_2 \\ \dots \\ u_3 \\ v_3 \\ \dots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (III.1)$$

$$\{F^e\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \\ \{F_3\} \\ \{F_4\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \dots \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ \dots \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ \dots \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} \quad (III.2)$$

Chacun d'eux contient huit termes de telle sorte que le matrice de rigidité de l'élément

$$[K^e] \text{ est carrée d'ordre } 8: \{F^e\} = [K^e]\{q^e\}.$$

b) choisir la fonction de déplacement $\{\delta(x, y)\}$ en chaque point de l'élément.

Pour un problème d'élasticité plane, l'état du déplacement en tout point (x, y) de l'élément

peut être représenté par deux composantes, c'est-à-dire : $\{\delta(x, y)\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$

III.5.1.2 L'élaboration de la matrice de rigidité élémentaire et du vecteur force nodale :

La construction d'un élément fait intervenir deux types d'interpolations : l'interpolation géométrique et l'interpolation des déplacements.

Un élément est dit iso paramétrique si les interpolations de la géométrie et des déplacements sont identiques.

Le modèle déplacement pour l'élément Q4 est donnée par

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

On utilisera un système de coordonnées naturelles (ξ, η) permettant de définir la géométrie de l'élément iso-paramétrique par transformation d'un élément parent de forme simple qui est le prisme montré en Figure III.1, la formulation de l'élément est basée sur les relations (III.5) et (III.6).

On peut relier les systèmes globaux et locaux avec les équations :

$$\begin{cases} x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \\ y = a_5 + a_6\xi + a_7\eta + a_8\xi\eta \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Les coefficients $(a_1 - a_8)$ peuvent être déterminés à partir des coordonnées x et y des quatre points en utilisant les conditions : $x = x_i, y = y_i$ Aux nœuds i , où : $\xi = \xi_i, \eta = \eta_i$

Substituant les valeurs trouvées pour $(a_1 - a_8)$ dans l'équation précédente on obtient :

$$x = N_1(\xi, \eta)x_1 + N_2(\xi, \eta)x_2 + N_3(\xi, \eta)x_3 + N_4(\xi, \eta)x_4 = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \quad (\text{III.5})$$

$$y = N_1(\xi, \eta)y_1 + N_2(\xi, \eta)y_2 + N_3(\xi, \eta)y_3 + N_4(\xi, \eta)y_4 = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \quad (\text{III.6})$$

Pour la détermination des fonctions de forme de l'élément Q4, nous allons utiliser la méthode numérique générale en coordonnées naturelles, la base polynomiale de l'interpolation est déterminée selon le principe suivant : elle doit contenir le terme constant et le terme linéaire pour pouvoir représenter l'état de déformation constante, les termes du second plan de la pyramide de *Pascal*. La base polynomiale s'écrit donc :

$$P(\zeta, \eta) = [1 \quad \zeta \quad \eta \quad \zeta \eta]$$

$$\text{Où : } N_i = N_i(\zeta, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \zeta \zeta_i)(1 + \eta \eta_i) \tag{III.7}$$

ζ, η prenant les valeurs +1 ou -1 suivant le nœud considéré. On remarque que les conditions de l'influence mutuelle et le mouvement du corps rigide, sont satisfaites ;

$$N_i(\zeta_j, \eta_j) = \begin{cases} 1 / i = j \\ 0 / i \neq j \end{cases} \text{ Donc } \sum N_i(\zeta_j, \eta_j) = 1$$

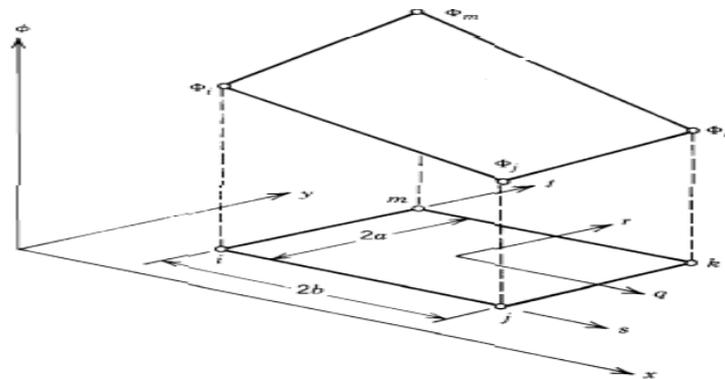


Figure III.3 les fonctions d'interpolation pour les nœuds de l'élément Q4

Le choix de cette fonction assure ainsi la pleine continuité des déplacements.

On peut écrire cette équation sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_8 \end{Bmatrix} \tag{III.8}$$

$$\{\delta_e(x, y)\} = [\varphi(x, y)]\{a_e\}$$

$$[\varphi(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

La relation déformations-déplacement est donnée ainsi :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

On peut l'écrire sous forme matricielle :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

- **Détermination des déplacements élémentaires**

En remplaçant les valeurs de (ζ, η) par les coordonnées naturelles $(-1, -1), (-1, +1), (1, 1), (1, -1)$.

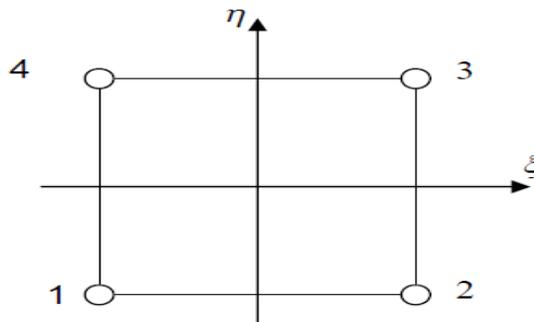


Figure III.4 L'élément rectangulaire à quatre nœuds

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

$$\{q_e\} = [\phi_e] \{a_e\}, \quad \{a_e\} = [\phi_e]^{-1} \{q_e\}$$

$$\text{D'où : } \{\delta_e(x, y)\} = [\varphi(x, y)] [\phi_e]^{-1} \{q_e\}$$

$$\{\delta_e(x, y)\} = [N_e(x, y)] \{q_e\}$$

$$[N_e(x, y)] = [\varphi(x, y)] [\phi_e]^{-1} ; \text{ Les fonctions de forme de l'élément Q4}$$

Avec la matrice de déformation Q donnée ainsi :

$$[Q(x, y)] = [L] [\varphi(x, y)] \quad (\text{III.12})$$

Où $[L]$ est l'opérateur différentiel défini ainsi :

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Ainsi l'équation (III.13) devient :

$$[Q(x, y)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & y & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Et le champ de déplacement sera exprimé ainsi :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\varphi(x, y)] \{a\} \quad (\text{III.15})$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

L'élément parent est un élément Lagrangien ou Serindip du premier ordre.

Dans la formulation iso-paramétrique l'interpolation du champ de déplacements peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^U(\xi, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N_{2i}^U(\xi, \eta) v_i \\ v &= \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^V(\xi, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N_{2i}^V(\xi, \eta) v_i \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Où : $N_i(\xi, \eta)$ sont identiques à celles définies pour les coordonnées, par conséquent la géométrie de l'élément et ses déplacements sont interpolés sous la même forme paramétrique c'est pourquoi cet élément est dit iso paramétrique.

Et les fonctions de forme données par l'équation (III.7) peuvent être écrites sous la forme :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1^u & 0 & N_2^u & 0 & N_3^u & 0 & N_4^u & 0 \\ 0 & N_1^v & 0 & N_2^v & 0 & N_3^v & 0 & N_4^v \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Les fonctions de forme obtenues de l'élément Q4 en coordonnées naturelles sont données dans le tableau (III.1), ainsi que les composantes de la matrice de déformation [B] qui sont données dans le tableau (III.2).

| | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| $N_1 = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta)$ | 0 |
| 0 | $N_1 = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta)$ |
| $N_2 = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta)$ | 0 |
| 0 | $N_2 = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta)$ |
| $N_3 = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta)$ | 0 |
| 0 | $N_3 = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta)$ |
| $N_4 = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)$ | 0 |
| 0 | $N_4 = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)$ |

Tableau III.1 : Fonctions de forme de l'élément Q4

III.5.1.3 Calcul de la matrice [B] et de la matrice [K_e]

Le calcul de la matrice [B] sera utilisé dans le calcul de la matrice [K_e]. Ces calculs sont au sein d'une boucle sur les éléments, car nous calculons ces matrices pour chaque élément. De plus, la matrice [B] contient des termes qui, en états plans (de contraintes ou de déformations) sont des dérivées des fonctions de forme par rapport aux coordonnées x ou y . Or, les fonctions de forme sont maintenant exprimées en fonction des coordonnées locales ζ et η de l'élément parent. On devra donc passer par le Jacobien de la transformation.

Pour calculer la matrice [B], nous avons donc dû calculer les fonctions de forme ainsi que les dérivées des fonctions de forme.

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

Où : $\{\varepsilon\} = [B]\{q^e\}$; $[B]$: La matrice qui relie les déformations à l'intérieur de l'élément et les déplacements aux nœuds.

| | | |
|----------------------|----------------------|----------------------------------|
| $B_{11} = N_{1,x}^u$ | 0 | $B_{31} = N_{1,y}^u + N_{1,x}^v$ |
| 0 | $B_{22} = N_{2,y}^v$ | $B_{32} = N_{2,y}^u + N_{2,x}^v$ |
| $B_{13} = N_{3,x}^u$ | 0 | $B_{33} = N_{3,y}^u + N_{3,x}^v$ |
| 0 | $B_{24} = N_{4,y}^v$ | $B_{34} = N_{4,y}^u + N_{4,x}^v$ |
| $B_{15} = N_{5,x}^u$ | 0 | $B_{35} = N_{5,y}^u + N_{5,x}^v$ |
| 0 | $B_{26} = N_{6,y}^v$ | $B_{36} = N_{6,y}^u + N_{6,x}^v$ |
| $B_{17} = N_{7,x}^u$ | 0 | $B_{37} = N_{7,y}^u + N_{7,x}^v$ |
| 0 | $B_{28} = N_{8,y}^v$ | $B_{38} = N_{8,y}^u + N_{8,x}^v$ |

Tableau III.2 : Composantes de la matrice $[B]$ de l'élément Q4

La transformation de l'élément réel à l'élément de référence est assurée par la transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.20})$$

La transformation inverse est assurée par la matrice Jacobéenne inverse J^{-1} telle que :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

En passant en variables local nous aurons :

$$\iint dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \det |J| d\xi d\eta \quad (\text{III.22})$$

L'équation (III.22) est évaluée numériquement, en utilisant la quadrature de Gauss.

$[D]$ Est la matrice constitutive élastique du matériau, elle symétrique à cause de la symétrie de σ et ε , pour un matériau homogène et isotrope caractérisé par le module de Young E et le coefficient de poisson ν , on a :

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.23})$$

On constate que les conditions de l'influence mutuelle et du mouvement de corps rigide sont satisfaisantes ($\sum N_i(\xi_j, \eta_j) = 1$), le calcul des caractéristiques élémentaires de l'élément Q4 est effectué avec intégration numérique de la forme suivante :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

D'où la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ est calculée d'après l'équation :

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B(\zeta, \eta)]^T [D][B(\zeta, \eta)] e |dét[J(\zeta, \eta)]| d\zeta d\eta \quad (\text{III.24})$$

La méthode d'intégration numérique choisie est celle de Gauss-Legendre à (2X2) points d'intégrations.

Cette matrice de rigidité est alors calculée en utilisant la formule suivante :

$$[K^e] = \sum_{i,j} W_{ij} e_{ij} [B_{ij}]^T [D][B_{ij}] (dét[J])_{ij} \quad (\text{III.25})$$

Avec :

$$\begin{aligned} [B_{ij}] &= [B(\zeta_i, \eta_i)] \\ e_{ij} &= e(\zeta_i, \eta_i) \\ (dét[J])_{ij} &= (dét[J])_{\zeta_i, \eta_i} \end{aligned}$$

W_{ij} : Le coefficient de pondération au point d'interpolations (ζ_i, η_j)

e_{ij} : L'épaisseur de l'élément à étudier

III.5.2 La formulation iso paramétrique de l'élément Q8 :

Dans la MEF il est intéressant d'utiliser à la place du système de coordonnées physiques, un système de coordonnées naturelles ou intrinsèques. Ceci permet de définir une transformation du domaine physique de l'élément en un domaine géométrique simple sans dimension. Ce système est défini par des axes parallèles aux cotés de l'élément, les coordonnées des nœuds de sommets prennent des valeurs unitaires (+1 ou -1), les nœuds d'interfaces prennent les valeurs (0 et +1 ou -1).

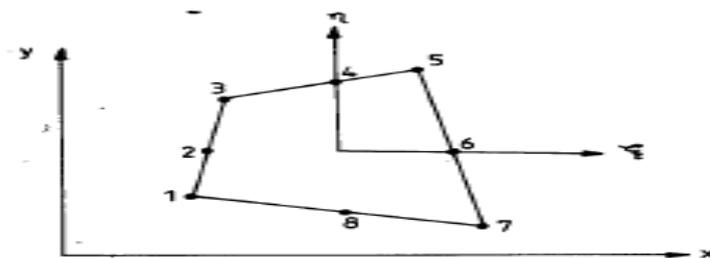


Figure III.5 L'élément quadrilatère Q8

Nous avons 8 degrés de liberté pour l'élément rectangulaire de plaque, il est nécessaire de choisir seulement les 8 termes les plus appropriés pour $u(x, y)$ et $v(x, y)$.

Les deux composantes du champ de déplacement s'écrivent :

$$\begin{cases} u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6x^2y + a_7y^2 + a_8y^2x \\ v = a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}xy + a_{13}x^2 + a_{14}x^2y + a_{15}y^2 + a_{16}y^2x \end{cases} \quad (\text{III.26})$$

Le choix de cette fonction assure ainsi la pleine continuité des déplacements.

On peut écrire cette équation sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & x^2 & x^2y & y^2 & y^2x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & x^2 & x^2y & y^2 & y^2x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{16} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

$$\{\delta_e(x, y)\} = [\varphi(x, y)]\{a_e\}$$

Et la matrice des fonctions de forme peut être exprimée par :

$$[N] = [\varphi(x, y)][\phi_e]^{-1} \quad (\text{III.28})$$

Dont la matrice $[\varphi(x, y)]$ et la matrice des coordonnées $[\phi_e]$ sont données respectivement :

$$[\varphi(x, y)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 2x & 2xy & 0 & y^2 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & x^2 & 2y & 2xy \end{bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

Détermination des déplacements élémentaires :

En remplaçant les valeurs de (ζ, η) par les coordonnées naturelles représentées dans la Figure III.5 $(\zeta, \eta) = (-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (1, 0), (1, -1), (0, -1)$.

Pour un problème d'élasticité plane l'élément à deux degrés de liberté en chaque nœud, chaque élément à seize degrés de liberté. On montre les seize déplacements inconnus. En utilisant la notation matricielle

Avec la matrice de déformation Q donnée ainsi :

$$[Q(x, y)] = [L][\varphi(x, y)]$$

$$\{q_e\} = [\phi_e]\{a_e\} \text{ Donc :}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \\ a_{16} \end{Bmatrix} \quad (III.30)$$

Qui permet d'exprimer le déplacement en tout point de l'élément en fonction du déplacement des nœuds l'interpolation de la déformation en tous points de l'élément est :

$$D'où : \quad \{\delta_e(x, y)\} = [\varphi(x, y)][\phi_e]^{-1}\{q_e\}$$

$$\{\delta_e(x, y)\} = [N_e(x, y)]\{q_e\}$$

$$[N_e(\zeta, \eta)] = [\varphi(\zeta, \eta)][\phi_e]^{-1} ; \text{ Les fonctions de forme de l'élément Q8}$$

Ainsi la déformation assumée est donnée par :

$$\{\varepsilon\} = [Q(x, y)]\{A\} \quad (III.31)$$

Avec la matrice de déformation Q qui est donnée par :

$$[Q(x, y)] = [L][\varphi(x, y)] \quad (III.32)$$

Où $[L]$ est l'opérateur différentiel défini par :

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

Dans la formulation iso paramétrique l'interpolation du champ de déplacements peut être écrite comme suit :

$$u = \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^U(\xi, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N_{2i}^U(\xi, \eta) v_i \quad (\text{III.34})$$

$$v = \sum_{i=1}^n N_{2i-1}^V(\xi, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N_{2i}^V(\xi, \eta) v_i$$

Et les fonctions de forme données par l'équation (III.28) peuvent être écrites sous la forme :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (\text{III.35})$$

Les fonctions de forme obtenues de l'élément Q8 en coordonnées naturelles sont données dans le tableau (III.3), ainsi que les composantes de la matrice de déformation [B] sont données dans l'équation (III.37).

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta)(-\zeta-\eta-1)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1-\zeta)(1-\eta^2)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1+\eta)(-\zeta+\eta-1)$$

$$N_4 = \frac{1}{2}(1-\zeta^2)(1+\eta)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1+\eta)(\zeta+\eta-1)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1+\zeta)(1-\eta^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{4}(1+\zeta)(1-\eta)(\zeta-\eta-1)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\zeta^2)(1-\eta)$$

Tableau III.3 Les fonctions de forme de l'élément Q8

Représentation des déplacements principaux en fonction des déplacements nodaux et les fonctions de formes pour chaque nœud sous formes matricielles :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \zeta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} & \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} [N(\zeta, \eta)] \{q_e\} \quad (\text{III.36})$$

$\{\varepsilon\} = [B(\zeta, \eta)] \{q_e\}$ Le champ de déformation.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_6}{\partial y} & \frac{\partial N_6}{\partial x} & \frac{\partial N_7}{\partial y} & \frac{\partial N_7}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{III.37})$$

[B] représente la matrice d'interpolation des déformations, elle est donnée par l'expression précédente.

La matrice d'élasticité plane [D] est déterminée dans la relation (III.38)

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{III.38})$$

La matrice de rigidité :

La matrice de rigidité élémentaire prend la forme habituelle de : $[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$

La méthode d'intégration numérique choisie est celle de Gauss-Legendre à (3X3) points d'intégrations. Cette matrice de rigidité est alors calculée en utilisant la formule suivante :

$$[K^e] = \sum_{i,j} W_{ij} e_{ij} [B_{ij}]^T [D] [B_{ij}] (\det[J])_{ij}$$

III.5.3 La formulation iso paramétrique de l'élément à champ de déformation (SBRIE).

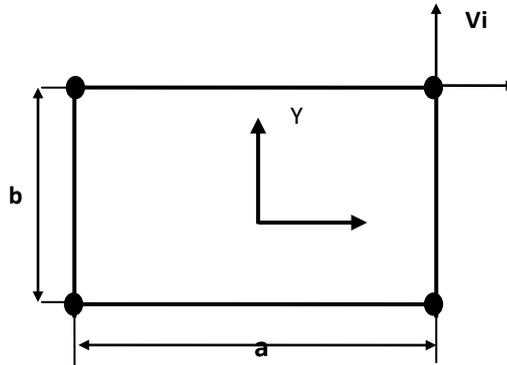


Figure III.6 Les coordonnées des nœuds de l'élément SBRIE

La procédure des éléments finis par laquelle, les champs du déplacement sont formulés suivant l'approche sur le modèle en déformation.

Dans un système des coordonnées cartésiennes x et y , les relations entre les déformations planes $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ et les déplacements u et v .

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{III.39}$$

Si on met les trois composantes de déformations qui valent à zéro et en intégrant cette équation, on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}u_R &= a_1 - a_3 y \\ v_R &= a_2 + a_3 x\end{aligned}\tag{III.40}$$

Les équations (III.40) représentent les champs de déplacement qui interprètent les mouvements d'un corps rigide de l'élément.

Pour l'élément rectangulaire à quatre nœuds aux sommets et à deux degrés de liberté par nœud, le dernier champ de déplacement devra contenir huit constantes. On a utilisé trois constantes pour la présentation des mouvements des corps rigides, il ne reste que cinq constantes qui peuvent être répartie entre les déformations de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_4 + a_5 y \\ \varepsilon_y &= a_6 + a_7 x \\ \varepsilon_{xy} &= a_8\end{aligned}\tag{III.41}$$

En substituant l'équation 3 dans l'équation 1 et après l'intégration nous obtenons :

$$\begin{aligned}u_s &= a_4 x + a_8 \frac{y}{2} + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} \\ v_s &= -a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2}\end{aligned}\tag{III.42}$$

En fin on prend la forme finale du champ de déplacement comme suit :

$$\begin{aligned}u &= u_R + u_s \\ v &= v_R + v_s\end{aligned}\tag{III.43}$$

En fin on prend la forme finale du champ du déplacement comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y) = \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_5 xy - \alpha_7 \frac{y^2}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} \\ v(x, y) = \alpha_2 + \alpha_3 x - \alpha_5 \frac{x^2}{2} + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2} \end{cases}\tag{III.44}$$

Sous une forme matricielle l'équation (III.44) s'écrit:

$$\{\delta_e(x, y)\} = [\varphi(x, y)]\{a_e\}$$

$$\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & -\frac{y^2}{2} & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & x & 0 & -\frac{x^2}{2} & y & xy & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.45})$$

$$\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = [\varphi(x,y)]\{q_e\} \quad (\text{III.46})$$

Remarque :

Nous remarquons que, les fonctions de déplacement finales contiennent des termes quadratiques permettant ainsi le changement de courbure.

Les coefficients $(\alpha_1 - \alpha_8)$ peuvent être déterminés à partir des coordonnées x et y des quatre points en utilisant les conditions $x = x_i, y = y_i$ Aux nœuds i , où : $\zeta = \zeta_i, \eta = \eta_i$

Substituant les valeurs trouvées pour $(\alpha_1 - \alpha_8)$ dans l'équation précédente on obtient :

$$x = N_1(\zeta, \eta)x_1 + N_2(\zeta, \eta)x_2 + N_3(\zeta, \eta)x_3 + N_4(\zeta, \eta)x_4 = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \quad (\text{III.47})$$

$$y = N_1(\zeta, \eta)y_1 + N_2(\zeta, \eta)y_2 + N_3(\zeta, \eta)y_3 + N_4(\zeta, \eta)y_4 = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$$

Pour la détermination des déplacements élémentaires : On remplace les valeurs de (ξ, η) par les coordonnées naturelles $(-1,-1); (-1,1); (1,1); (1,-1)$.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/2 & -1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1/2 & 1 & -1 & -1/2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.48})$$

$$\{q_e\} = [\phi_e]\{a_e\}, \quad \{a_e\} = [\phi_e]^{-1}\{q_e\}$$

$$D'où : \{\delta_e(x, y)\} = [\varphi(x, y)][\phi_e]^{-1}\{q_e\} \text{ donc : } [N_e(\zeta, \eta)] = [\varphi(\zeta, \eta)[\phi_e]^{-1}] \quad (\text{III.49})$$

Détermination des fonctions de forme :

Les fonctions d'interpolation sont obtenues par la méthode classique de *Serendip*, le principe de cette méthode est le suivant : en partant de l'élément SBRIE à quatre nœuds,

$[N_e(x, y)]$: sont les fonctions de forme de l'élément de (SBRIE) à champ de déformation

$$N(\zeta, \eta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\eta & \zeta & \zeta\eta & 0 & -\frac{\eta^2}{2} & \frac{\eta}{2} \\ 0 & 1 & \zeta & 0 & -\frac{\zeta^2}{2} & \eta & \zeta\eta & \frac{\zeta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (\text{III.50})$$

On peut déduire l'expression générale des fonctions de forme de tous les nœuds :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1^u & N_2^u & N_3^u & N_4^u & N_5^u & N_6^u & N_7^u & N_8^u \\ N_1^v & N_2^v & N_3^v & N_4^v & N_5^v & N_6^v & N_7^v & N_8^v \end{bmatrix} \quad (\text{III.51})$$

Les fonctions de forme obtenues de l'élément SBRIE en coordonnées naturelles sont (III.51)

données dans le tableau (III.4), ainsi que les composantes de la matrice de déformation [B]

sont données dans le tableau (III.5).

| | |
|------------------------------|------------------------------|
| $N_1^u = 1/4(1-\xi)(1-\eta)$ | $N_1^v = 1/8(1-\xi^2)(a/b)$ |
| $N_2^u = 1/8(1-\eta^2)(b/a)$ | $N_2^v = 1/4(1-\xi)(1-\eta)$ |
| $N_3^u = 1/4(1-\xi)(1+\eta)$ | $N_3^v = 1/8(\xi^2-1)(a/b)$ |
| $N_4^u = 1/8(\eta^2-1)(b/a)$ | $N_4^v = 1/4(1-\xi)(1+\eta)$ |
| $N_5^u = 1/4(1+\xi)(1+\eta)$ | $N_5^v = 1/8(1-\xi^2)(a/b)$ |
| $N_6^u = 1/8(1-\eta^2)(b/a)$ | $N_6^v = 1/4(1+\xi)(1+\eta)$ |
| $N_7^u = 1/4(1+\xi)(1-\eta)$ | $N_7^v = 1/8(\xi^2-1)(a/b)$ |
| $N_8^u = 1/8(\eta^2-1)(b/a)$ | $N_8^v = 1/4(1+\xi)(1-\eta)$ |

Tableau III.4 Les fonctions de forme de l'élément SBRIE

| | | |
|----------------------|----------------------|----------------------------------|
| $B_{11} = N_{1,x}^u$ | $B_{21} = N_{1,y}^v$ | $B_{31} = N_{1,y}^u + N_{1,x}^v$ |
| $B_{12} = N_{2,x}^u$ | $B_{22} = N_{2,y}^v$ | $B_{32} = N_{2,y}^u + N_{2,x}^v$ |
| $B_{13} = N_{3,x}^u$ | $B_{23} = N_{3,y}^v$ | $B_{33} = N_{3,y}^u + N_{3,x}^v$ |
| $B_{14} = N_{4,x}^u$ | $B_{24} = N_{4,y}^v$ | $B_{34} = N_{4,y}^u + N_{4,x}^v$ |
| $B_{15} = N_{5,x}^u$ | $B_{25} = N_{5,y}^v$ | $B_{35} = N_{5,y}^u + N_{5,x}^v$ |
| $B_{16} = N_{6,x}^u$ | $B_{26} = N_{6,y}^v$ | $B_{36} = N_{6,y}^u + N_{6,x}^v$ |
| $B_{17} = N_{7,x}^u$ | $B_{27} = N_{7,y}^v$ | $B_{37} = N_{7,y}^u + N_{7,x}^v$ |
| $B_{18} = N_{8,x}^u$ | $B_{28} = N_{8,y}^v$ | $B_{38} = N_{8,y}^u + N_{8,x}^v$ |

Tableau III.5 Les Composantes de la matrice $[B]$ de l'élément SBRIE

Donc la matrice [B] est donnée sous la forme matricielle suivante :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\eta - \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\eta - \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\eta + \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\eta + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\zeta - \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\zeta + \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4}\zeta + \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4}\zeta - \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (III.52)$$

Le calcul de la matrice de Rigidité [K] se fait comme suit :

[D] Est la matrice constitutive élastique du matériau, elle est symétrique à cause de la symétrie de σ et ϵ , pour un matériau homogène et isotrope caractérisé par le module de Young E et le coefficient de poisson ν , on a :

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (III.53)$$

On constate que les conditions de l'influence mutuelle et du mouvement de corps rigide sont satisfaisantes ($\sum N_i(\zeta_j, \eta_j) = 1$), le calcul des caractéristiques élémentaires de l'élément Q4 est effectué avec intégration numérique de la forme suivante :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\zeta, \eta) d\zeta d\eta$$

D'où la matrice de rigidité élémentaire $[K^e]$ est calculée d'après l'équation :

$$[K^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B(\zeta, \eta)]^T [D][B(\zeta, \eta)] |dét[J(\zeta, \eta)]| d\zeta d\eta \quad (III.54)$$

La méthode d'intégration numérique choisie est celle de Gauss-Legendre à (2X2) points d'intégrations.

Cette matrice de rigidité est alors calculée en utilisant la formule suivante :

$$[K^e] = \sum_{i,j} W_{ij} e_{ij} [B_{ij}]^T [D][B_{ij}] (dét[J])_{ij} \quad (III.55)$$

$$[B_{ij}] = [B(\zeta_i, \eta_i)]$$

Avec : $e_{ij} = e(\zeta_i, \eta_i)$

$$(\det [J])_{ij} = (\det [J])_{\zeta_i, \eta_i}$$

W_{ij} : Le coefficient de pondération au point d'interpolations (ζ_i, η_j)

e_{ij} : L'épaisseur de l'élément à étudier

III.6 Conclusion :

Dans ce chapitre nous avons pu faire la formulation iso paramétrique des éléments Q4 et Q8 qui sont basés sur le modèle en déplacement ainsi que la formulation iso paramétrique de l'élément SBRIE basé sur le modèle en déformation. Cette formulation permet de palier à plusieurs problèmes pour lesquels la modélisation des bords courbes et la distorsion.

CHAPITRE IV

VALIDATION NUMERIQUE

IV.1 Introduction

L'analyse modale d'une structure permet d'améliorer la connaissance physique et dans certains cas le comportement : le calcul de la base modale d'une structure est aujourd'hui une étape importante de son dimensionnement. Du fait de l'excitation forcée à laquelle est soumise la structure en fonctionnement, pour éviter le problème d'amplification dynamique souvent synonyme d'inconfort voire de rupture, on peut souhaiter lors de la définition de la structure qu'elle n'a pas de fréquence propre dans une bande donnée. La base modale doit donc être calculer et la conception de la structure doit être parfois modifiée. D'autre part, même si la notion n'a pas un physique immédiat car les modes propres calculés ont une amplitude indéterminée. Des outils particuliers permettent, à partir de ces informations, pour un matériau donné, de prédire la durée de vie de la structure en fatigue. Enfin, les problèmes de réponses dynamiques des structures sont souvent résolus par superposition modale, que se soit pour des analyses temporelles (réponse transitoire) ou fréquentielle (réponse harmonique). Il est donc nécessaire de disposer de la base modale pour le calcul de repense.

Le théorème de l'énergie potentielle totale utilisé dans l'approche cinématique (hypothèse sur le champ de déplacement) pour l'analyse statique a un équivalent pour l'analyse dynamique : il s'agit du principe de Hamilton dont le contenu et la démonstration ne sont pas abordés ici.

L'équation des vibrations libres des structures non dissipatives, sous une forme discrétisée, est : $M\ddot{q} + Kq = 0$ (IV.1)

M : la matrice de masse et K : la matrice de raideur

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad (\text{IV.2})$$

$$U = \frac{1}{2} q^T K q \quad (\text{IV.3})$$

U et T sont respectivement les énergies de déformation et cinétique, q est le vecteur des degrés de liberté.

IV.2 Les modes propres et Fréquences propres :

Les systèmes mécaniques sont toujours dissipatifs : les modes propres de vibration physique sont des vecteurs complexes au sens algébriques et les fréquences propres associées sont des nombres complexes, alors que les modes propres calculés par les programmes d'analyse modale traditionnels sont des vecteurs réels au sens algébrique, donc facilement manipulables et les fréquences associées sont des nombres réels. On les appelle *modes propres réels* bien qu'ils n'aient de réel que leur forme mathématique.

Les divers amortissements, généralement mal connus, sont souvent très faibles ; les structures sont alors dites *faiblement dissipative*. Dans ce cas, les modes propres réels sont peu différents des modes propres physiques. C'est pour cette raison que l'équation (IV.1) est utilisée en analyse modale, bien qu'elle suppose l'amortissement nul et ne fournisse que les modes propres réels.

Le vecteur des déplacements q est une fonction du temps et de l'espace. On cherche une solution de la forme :

$$q = x \varnothing(t) \quad (\text{IV.3})$$

Où x : est vecteur de constantes donnant la forme propre du mode $\varnothing(t)$ une fonction décrivant l'évolution temporelle de l'amplitude du mode.

En séparant les fonctions x et $\varnothing(t)$, on montre que la partie temporelle vérifie l'équation différentielle :

$$\varnothing(t) + w^2 \varnothing(t) = 0 \quad (\text{IV.4})$$

Dont la solution est une sinusoïde non amortie :

$$\varnothing(t) = \alpha e^{j(wt + \varphi)} \quad (\text{IV.5})$$

La partie spatiale vérifie l'équation :

$$Kx = w^2 Mx \quad (\text{IV.6})$$

Qui s'écrit sous une forme plus utilisée :

$$(K - w^2 M)x = 0 \quad (\text{IV.7})$$

Cherchant des vecteurs x non identiquement nuls, le déterminant du système doit être nul : ses solutions sont *les valeurs propres* du système. A chaque valeur propre w_i^2 correspond un mode propre réel, noté x_i , tel que :

$$(K - w_i^2 M)x_i = 0 \quad \text{avec } x_i \neq 0 \quad (\text{IV.8})$$

w_i Est *la pulsation propre* associée au vecteur propre x_i et s'exprime en radian par seconde (rd/s) ; *la valeur propre* w_i^2 vérifie l'équation temporelle.

$$\varnothing'' + w_i^2 \varnothing = 0 \quad (\text{IV.9})$$

$f_i = \frac{w_i}{2\pi}$: Est *la fréquence propre* associée au vecteur propre x_i , et s'exprime en *Hertz* (Hz).

Les matrices M et K sont symétriques à coefficients réels : il en résulte que toutes les valeurs propres du système $(K - w_i^2 M)$ sont réelles et ne sont donc pas regroupées par paires de valeurs complexes conjuguées. Si le système comporte N degrés de liberté indépendants, il

existe N valeurs propres réelles dont seul un petit nombre n a un sens physique. Les N-n sont « numériques ».

Des valeurs propres peuvent être éventuellement confondues elles sont rangées conventionnellement dans l'ordre croissant $w_1^2 \leq w_2^2 \leq \dots \dots \dots \leq w_N^2$

IV.3 La résolution du problème aux valeurs propres :

Les pulsations propres d'une structure non dissipative sont les solutions de l'équation aux valeurs propres

$$Kx = w^2 Mx \quad \text{ou encore} \quad (K - \lambda M)x = 0 \quad (\text{IV.10})$$

Ce qui revient à trouver les valeurs de λ telles que le déterminant de la matrice $(K - \lambda M)$ soit nul. Cette matrice a pour dimension le nombre de degrés de liberté indépendants du modèle : plusieurs milliers voire dizaines de milliers. Les techniques mathématiques classiques de calcul d'un déterminant ou de calcul des zéros du polynôme caractéristique ne sont pas applicables car elles nécessitent un nombre d'opérations et des ressources informatiques rédhibitoires. Un certain nombre de méthodes numériques ont été mises au point, permettant la résolution de problèmes aux valeurs propres de grande taille. Certaines méthodes utilisent la totalité des degrés de liberté du système, l'opération de condensation doit altérer le moins possible les fréquences recherchées.

Les différentes méthodes généralement utilisées dans les programmes d'analyse modale sont :

- développement de l'équation caractéristique,
- calcul du déterminant,
- diagonalisation par transformations successive (Jacobi),
- tri-diagonalisation par transformations successives (Lanczos),
- itération sur les vecteurs propres,

- itération sur vecteurs propres (puissance, multi-itération),
- méthodes « étagées ».

La taille du système, le nombre de valeurs propres à calculer, l'aptitude à bien séparer des valeurs propres proches ou confondues se font qu'en pratique, on utilise principalement soit la méthode de multi-itération, soit celle de *Lanczos*.

IV.4 La présentation des modèles d'étude :

IV.4.1 Les systèmes libres:

IV.4.1.1 Les structures membranaires :

IV.4.1.1.1 Stratégie pour une analyse qualitative et quantitative du comportement dynamique des poutres:

La problématique consiste à un besoin réel de développer une méthode qualitative et quantitative pour permettre aux ingénieurs et chercheurs d'avoir des conceptions, afin de les aider pendant leurs investigations lors de l'analyse vibratoire des structures complexes, ou lors du travail de pré- dimensionnement de la structure d'étude, ainsi que dans le cadre d'un travail d'expertise de la qualité des réponses dynamiques que l'on obtient aux moyens de codes de calcul sophistiqués. Le risque d'erreur pouvant affecter la qualité des réponses pendant une investigation dynamique peut se situer à différents niveaux:

- identification du modèle idéale (analytique) représentatif de la structure réelle (le niveau des hypothèses injectées dans le modèle analytique, varie suivant la phase de conception allant d'hypothèses simplifier permettant de développer une première impression du comportement pour des fins de pré dimensionnement, jusqu'à des modèles de plus en plus élaborés nécessitant des logiciels de plus en plus performant, faisant intervenir le recours à des experts hautement qualifiés).

- Pour chaque type de modèle analytique on obtient des modèles mathématiques correspondre plus ou moins sophistiqués :

Un modèle continu nécessite des équations différentielles partielles

Un modèle discret nécessite des équations différentielles ordinaires

Un modèle d'éléments finis

- Les solutions aux problèmes pour chaque type de modèle adopté et chaque équation correspondante, nécessitent une méthode spécifique :

(Méthodes exactes, méthodes numériques)

Les méthodes exactes nécessitent beaucoup d'effort de calcul parfois non justifiés par rapport à l'objectif, d'autre part les solutions restent limitées et accessibles seulement aux experts. Les méthodes numériques cumulent aussi des risques d'erreurs potentielles.

- La confrontation avec l'analyse expérimentale peut engendrer des dispersions par rapport aux réponses obtenues d'après la simulation numérique. Dans ce cas une expertise est nécessaire au niveau de chaque phase d'investigation précédemment d'écrite. L'inconvénient pour l'analyse expérimentale n'est toujours pas accessible, au commun des ingénieurs et cela en plus des coups excessifs de l'investigation expérimentale. D'autre part même si les moyens sont disponibles pour effectuer les tests, il est toujours raisonnable de s'assurer suffisamment par les calculs qualitatifs et quantitatifs préalable avant de s'engager dans la voie expérimentale.

Notre travail consiste alors à faire appel à une double stratégie pour l'analyse vibratoire des structures membranaires isotropes. Une analyse qualitative précédemment discutée, d'autre part une méthode approchée qui permet de donner les réponses dynamiques de la structure réelle avec un degré de précision suffisant.

Si K est inversible, alors $Kx = w^2 Mx$ est équivalent à $\frac{1}{w^2}x = K^{-1}Mx$ (IV.11)

Si une structure comporte des modes rigides, il est indispensable de commencer par les éliminer car la matrice K n'est alors plus inversible. La matrice $K^{-1}M$ est appelée « *matrice de flexibilité dynamique* » ou « *matrice d'itération* ». Cette matrice n'est pas symétrique.

En décomposant la matrice de masse M sous la forme LL^T où L est une matrice triangulaire inférieure (méthode de cholesky) et en faisant le changement de variable $y = L^T x$ on obtient :

$$K^{-1}LL^T x = \frac{1}{w^2} x \Leftrightarrow L^T K^{-1}LL^T x = \frac{1}{w^2} L^T x \Leftrightarrow Sy = \lambda y \quad (\text{IV.12})$$

La matrice S ainsi formée est symétrique. Les valeurs propres de ce nouveau système sont celles du système initial, le retour au vecteur propre x s'effectuant sans problème car L est une matrice triangulaire.

On montre que les méthodes utilisant cette technique donnent des valeurs propres décroissantes $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N$, ce qui fournit bien les plus petites valeurs propres du spectre car $\lambda_i = \frac{1}{w_i^2}$.

Une grande différence entre l'analyse statique linéaire et l'analyse modale et que l'analyse statique linéaire est non itérative alors que l'analyse dynamique l'est, ce qui doit être modulé par le fait que certains programmes utilisent la méthode des gradients conjugués (itérative) pour la résolution des problèmes statiques linéaires.

Pour un calcul statique linéaire, la solution au problème posé est formellement

$$q = K^{-1}g \quad (\text{IV.13})$$

Si la matrice de raideur est inversible bien que K^{-1} ne soit pas calculée dans la méthode de Gauss. Cette solution est mathématiquement exacte. Le déplacement q est obtenu par une triangularisation et une substitution inverse. En analyse modale, on utilise des méthodes numériques itératives qui convergent vers les valeurs propres et les vecteurs propres. Il faut

des outils spécifiques pour arrêter le processus puis pour contrôler la solution obtenue (*calcul de borne d'erreur, coefficient de mesure d'erreur...*). Les calculs modaux sont donc beaucoup plus longs que les calculs statiques, requièrent des ressources informatiques plus importantes, la précision demandée sur les valeurs propres ou les modes propres et leur nombre ayant une influence sensible sur le temps de calcul et l'espace disque nécessaire. Les méthodes d'analyse modale ne donnent que des *solutions numériques approchées*.

Les matrices K et M sont symétriques à coefficients réels, positives, mais parfois semi-définies positives :

- il peut exister des degrés de liberté non alimenté en masse,
- la structure peut avoir des mouvements d'ensemble, dits modes rigides.

Ces deux cas nécessitent des techniques particulières de résolution car les matrices K ou M présentent des singularités.

Des tests, réalisés sur la base de solutions de référence, doivent être envisagés par l'ingénieur d'études chaque fois qu'il y a lieu de valider l'emploi d'un élément dans un contexte inhabituel ou de comparer, les uns par rapport aux autres, les performances de plusieurs éléments. Les tests servent à vérifier la représentation correcte des mouvements de corps rigides et les problèmes de blocage (ou de verrouillage) en cisaillement et en membrane. Ces tests mettent en généralement en relief les critères suivants :

- L'homogénéité dans la formulation ou la représentation de l'élément.
- La stabilité.
- La convergence.
- La cohérence du maillage.

-La non-influence de la distorsion géométrique.

Ces critères sont primordiaux car ils permettent, s'ils sont vérifiés, de porter un jugement sur des éléments, sur un maillage ou sur le couplage d'élément – maillage en fonction de solutions simple et connues.

Parmi les nombreux tests proposés, on a :

-Le test d'une poutre console libre non amortie en membrane soumise à son poids propre avec des charges concentrés sur les nœuds, ce test est plus connu sous le nom de test de la membrane de « **SMITH88** et **SMITH04** ».

-Le test d'une poutre console soumis à une force sinusoïdale non amortie en membrane soumise à son poids propre avec des charges concentrées sur les nœuds, ce test est plus connu sous le nom de test de la membrane de « **SMITH88** ».

Dans ce chapitre on présente les données et les résultats obtenus avec les éléments programmés (SBRIE, DRILLING) ainsi que les solutions de référence des problèmes considérés comme tests d'évaluation des éléments de membrane.

IV.4.1.1.2 Les Valeurs propres en vibration libre d'un solide rectangulaire

- Construction de la base fonctionnelle - Fonctions caractéristiques des vibrations des poutres

Nous utilisons dans ce travail les fonctions caractéristiques des vibrations des poutres comme fonctions admissibles. Cette méthode a été introduite par D. Young pour les plaques minces et depuis largement reprise pour l'étude de différents types de plaques.

Une poutre peut être considérée comme une plaque dont le rapport a/b est élevé (Figure IV.1).

La formulation de base reste donc inchangée.

IV.4.1.1.3 Poutre console avec des charges réparties sur les nœuds (contrainte plane et déformation plane):

Ce test traité par [Smith.88] représente un problème d'un solide élastique en porte à faux (Poutre cantilever) figure (IV.1).

Le Tableau (IV.1) qui suit présente, les propriétés géométriques et mécaniques de la console d'étude.

| Longueur (m) | a | Largeur b (m) | Epaisseur de pli h (m) | Masse volumique ρ (KN/m ³) | Module de Young E (KN/m ²) | Coefficient de Poisson ν |
|--------------|---|---------------|------------------------|---|--|------------------------------|
| 4.00 | | 1.00 | 0.10 | 1.00 | 1.00 | 0.3 |

Tableau IV.1 Les caractéristiques Mécaniques constitutives du model analytique de console
Il s'agit d'une console sollicitée à l'action dynamique libre transversale, où l'intérêt est porté essentiellement sur l'étude comparative des réponses propres (fréquences propres), obtenues d'après la méthode des éléments finis avec le code *ANSYS* et la méthode de (*Lanczos*) programmée par le code *FORTRAN* avec différents éléments finis utilisés.

La poutre étudiée discrétisée en 3 et 5 éléments finis respectivement de même épaisseur.

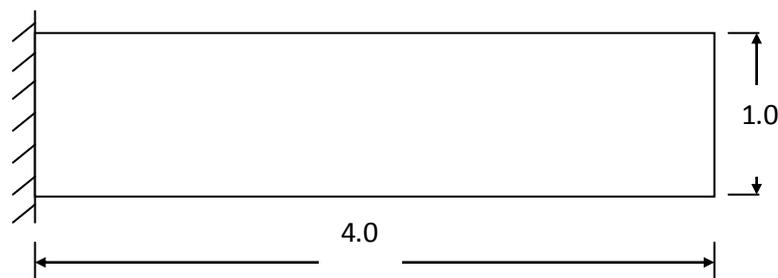


Figure IV.1 La géométrie et maillage de la console

La simulation numérique de la console par le logiciel ANSYS.

L'élément choisis pour faire les calculs est : plane 82 élément quadrilatère à 4 nœuds pour l'état plan.

Plusieurs essais sont envisagés pour la discrétisation de la console (maillage 3X1)

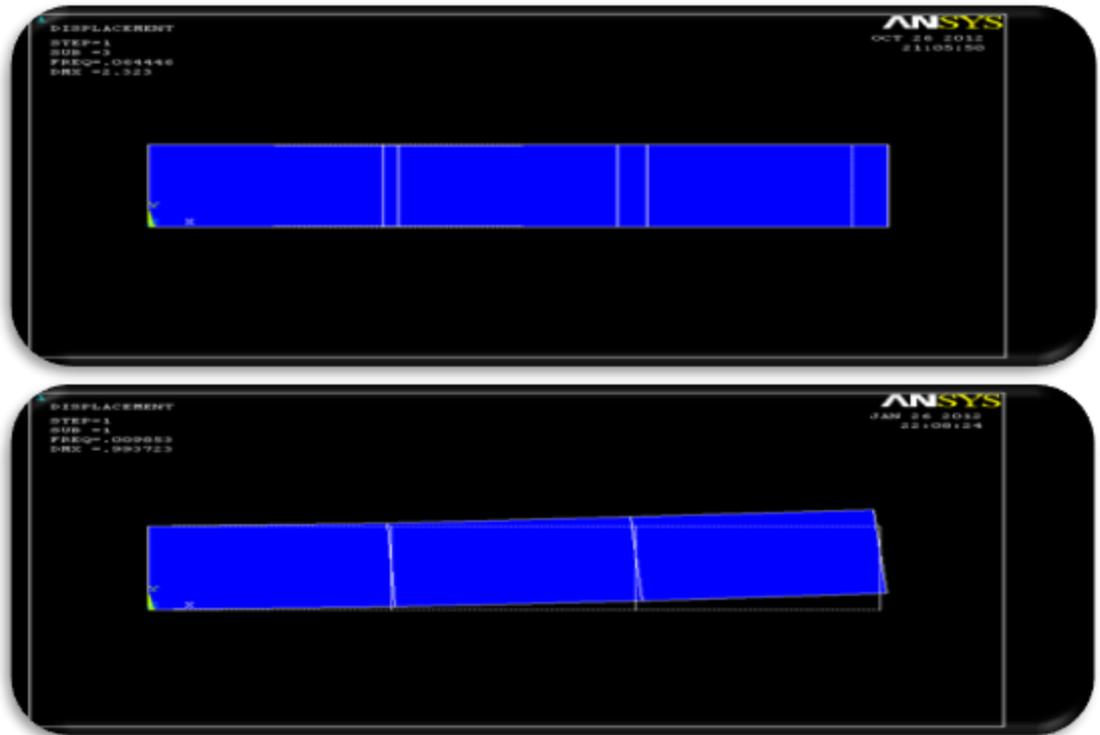


Figure IV.2 Les deux premiers modes fondamentaux

- L'utilisation de L'ANSYS avec maillage 5X1

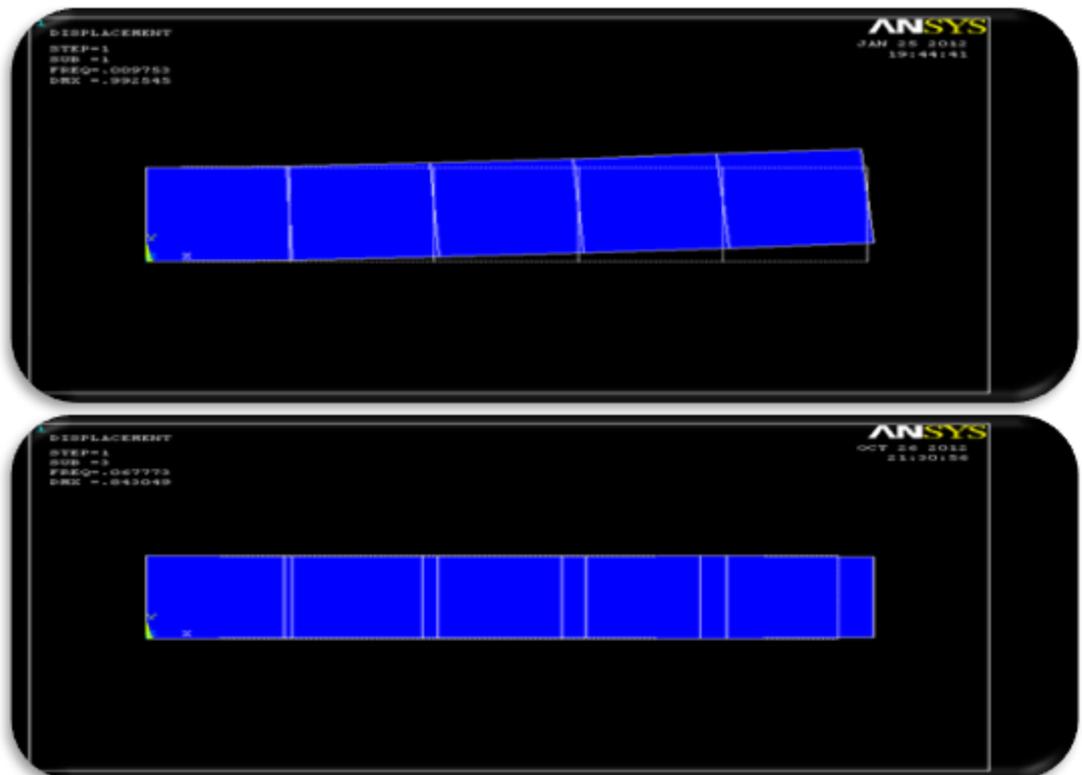


Figure IV.3 Les deux premiers modes fondamentaux

Analyse des résultats :

Sur le tableau (IV.2 et IV. 3) sont portées les valeurs des fréquences propres obtenues par l'utilisation des éléments à modèle en déformation SBRIE et DRILLING et les éléments à modèle en déplacement Q4 et Q8 ainsi que la solution numérique obtenue par ANSYS.

| Fréquences | | Q4 | Q8 | SBRIE | Driling | ANSYS |
|-------------|------------|--|-------|---------------|--------------|---------------|
| Maillage3×1 | ω_1 | 0.0805 | 0.064 | 0.065 | 0.066 | 0.0619 |
| | ω_2 | 0.353 | 0.413 | 0.414 | 0.417 | 0.401 |
| Maillage5X1 | ω_1 | 0.068 | 0.060 | 0.0593 | 0.061 | 0.0612 |
| | ω_2 | 0.391 | 0.391 | 0.391 | 0.392 | 0.420 |
| | | La solution exacte [SMITH88] $\omega_1 1.875^4 \times EI / \rho AL^4$ 0.063 $\omega_2 \pi / 2L\sqrt{E / \rho}$ 0.393 | | | | |

Tableau IV. 2 Les Valeurs propres de la poutre cantilever "déformation plane" cas d'une poutre discrétisée en 3et 5 éléments finis

| Fréquences | | Q4 | Q8 | SBRIE | Driling | ANSYS |
|-----------------|------------|-------|-------|--------------|--------------|---------------|
| Maillage 3×1 | ω_1 | 0.075 | 0.060 | 0.060 | 0.061 | 0.0616 |
| | ω_2 | 0.391 | 0.392 | 0.391 | 0.392 | 0.391 |
| Maillage 5×1 | ω_1 | 0.068 | 0.060 | 0.060 | 0.061 | 0.0616 |
| | ω_2 | 0.391 | 0.393 | 0.392 | 0.391 | 0.39 |

Tableau IV. 3 Les valeurs propres de la poutre cantilever "contrainte plane"

Les résultats des valeurs propres sont illustrés dans le tableau (IV.2) pour la déformation plane. La fréquence fondamentale ω_1 et la fréquence axiale ω_2 sont calculées avec les différents éléments Q4, Q8, SBRIE, DRILLING et PLANE82 du code ANSYS. Les résultats obtenus par l'élément SBRIE, DRILLING et code ANSYS montrent que les valeurs des fréquences sont en bon accord avec celles obtenues par l'élément Q8 et avec celles de la solution analytique. La fréquence fondamentale obtenue par l'élément Q4 est

considérablement plus grande que celle de la solution analytique, ainsi l'élément Q4 a une mauvaise représentation du solide, au moins dans les modes de flexion.

Pour le cas en contrainte plane tableau (IV.3), nous remarquons que les résultats des trois éléments SBRIE, DRILLING et Q8, pour un maillage simplement (3×1) convergent vers la solution de référence [SMITH.88] alors que celles de l'élément Q4 est surtout pour la fréquence fondamentale ω_1 , l'élément Q4 a une mauvaise représentation de la poutre.

IV.4.1.2 La flexion des plaques:

IV.4.1.2.1 Les vibrations d'une plaque mince carrée encadrée sur un côté :

L'exemple est celui d'une plaque mince carrée, de caractéristiques constantes, pour laquelle on souhaite calculer les premiers modes de vibrations transversales. La déformation due à l'effort tranchant est négligeable. La structure est en acier, de $L=1\text{m}$ de côté et de $t=1\text{cm}$ d'épaisseur, soient ($E=200000\text{MPa}$ / $\nu=0.3$), les caractéristiques élastiques du matériau et $\rho=7800\text{Kg/m}^3$ sa masse volumique.

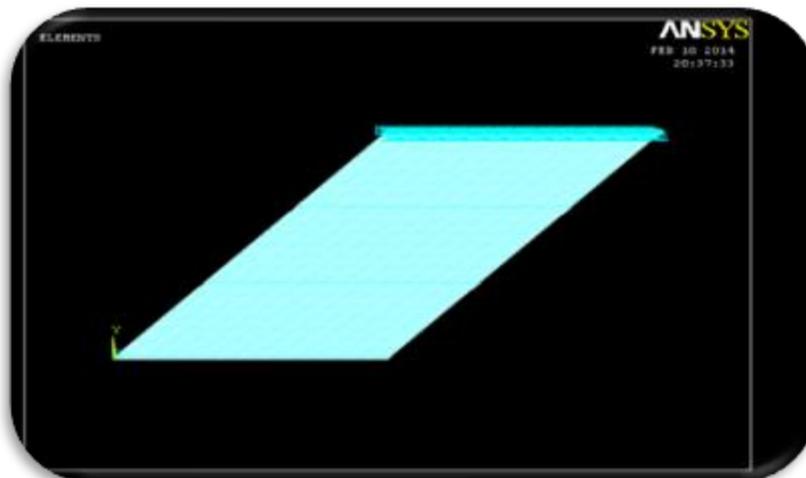


Figure IV.4 Le schéma de la plaque étudiée encadrée dans un côté

Les tableaux suivants regroupent les fréquences obtenues en fonction du maillage.

| MAIL | 3X3 | | | 5X5 | | | 10X10 | | | 20X20 | | |
|-----------|-------|---------------------|------------------|-------|--------------------|----------------|-------|---------------------|---------------|-------|----------------------|----------------|
| | réf | ANSY PLANE 82 | Abq CP4S R | Réf | ANS PLANE 82 | Abqus CP4SR | réf | ANSY PLANE 82 | ABAQ CP4SR | réf | ANSYS PLANE 82 | ABAQU CP4SR |
| <i>f1</i> | 8.65 | 8.46 | 8.79 | 8.66 | 8.47 | 10.47 | 8.66 | 8.57 | 11.001 | 8.67 | 8.51 | 11.080 |
| <i>f2</i> | 21.02 | 21.58 | 11.85 | 21.15 | 21.16 | 13.25 | 21.2 | 21.11 | 20.75 | 21.24 | 21.18 | 21.41 |
| <i>f3</i> | 54.64 | 57.65 | 53.44 | 53.61 | 59.94 | 62.47 | 53.3 | 59.5 | 63.78 | 53.18 | 61.87 | 63.925 |
| <i>f4</i> | 75.81 | 73.81 | 65.79 | 76.63 | 77.68 | 66.30 | 77.01 | 68.8 | 73.55 | 77.24 | 118.4 | 80.043 |

Tableau IV.4 : Modes propres de la plaque encadrée

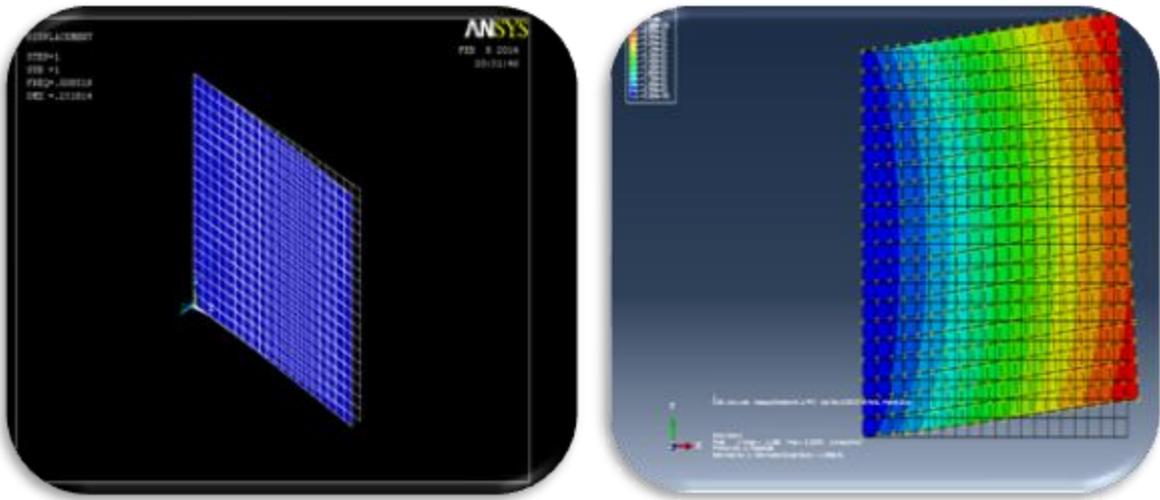


Figure IV.5 Le premier mode propre de la plaque étudiée avec ANSYS/ABAQUS

Nous remarquons que :

- Les résultats d'ANSYS convergent vers la solution exacte si le maillage est de (10X10), donc les éléments d'ANSYS ne dépendent pas à l'ordre de maillage.
- Les résultats d'ABAQUS dépendent de l'ordre de fréquence, si l'ordre de fréquence est grand, les résultats convergent vers la solution exacte.

IV.4.1.2.2 Plaque simplement appuyée sur ces quatre côtés :

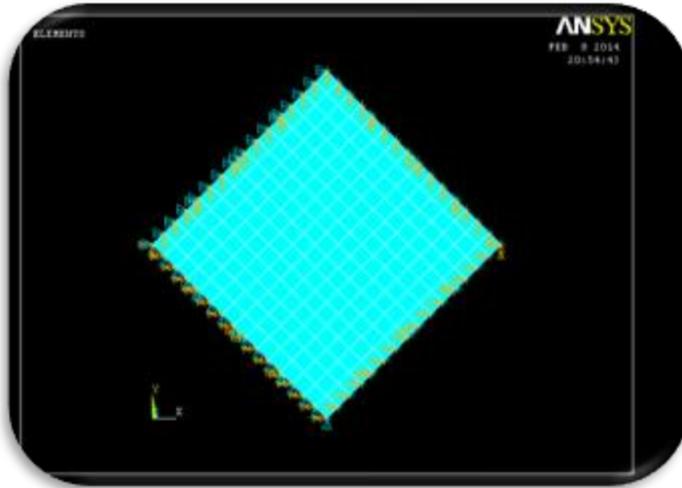


Figure IV.6 Le schéma de la plaque étudiée simplement appuyée

Le tableau suivant regroupe les fréquences obtenues en fonction du maillage.

| maillage/fréquence | | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 |
|--------------------|------------------|-------|-------|-------|-------|
| 3X3 | ANSYS (PLANE 82) | 12.15 | 38.16 | 41.65 | 85.27 |
| | Abaqus (CP4SR) | 14.4 | 44.02 | 74.33 | 77.17 |
| 5X5 | ANSYS (PLANE 82) | 13.58 | 42.81 | 47.90 | 85.84 |
| | Abaqus (CP4SR) | 16.21 | 47.04 | 77.68 | 85.71 |
| 10X10 | ANSYS (PLANE 82) | 15.35 | 55.41 | 77.12 | 95.89 |
| | Abaqus (CP4SR) | 16.71 | 48.26 | 79.19 | 95.23 |
| 20X20 | ANSYS (PLANE 82) | 16.34 | 55.54 | 79.00 | 95.25 |
| | Abaqus (CP4SR) | 16.56 | 53.32 | 79.57 | 95.36 |

Tableau IV.5 : Les modes propres de la plaque

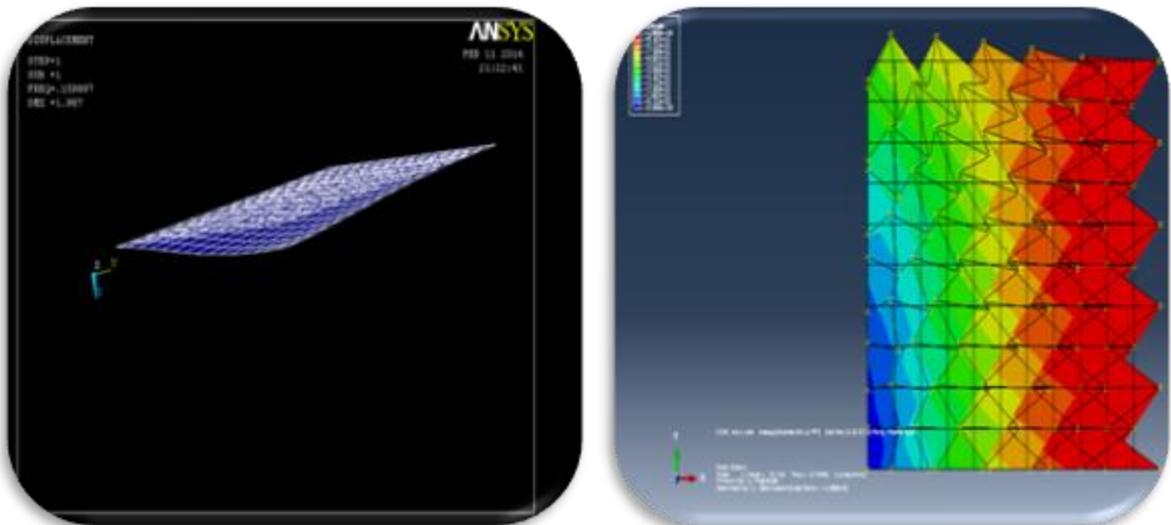


Figure IV.7 Les premiers modes propres de la plaque étudiée

IV.4.1.2.3 Plaque encadrée dans les quatre côtés :

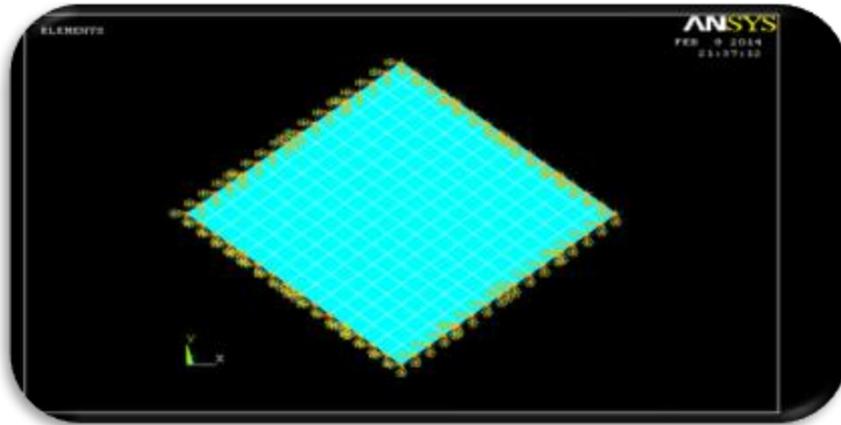


Figure IV.8 Le schéma de la plaque étudiée encadrée dans les quatre côtés

Le tableau suivant regroupe les fréquences obtenues en fonction du maillage.

| maillage/fréquence | | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 | f_5 |
|--------------------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 3X3 | ABAQUS | 79.56 | 161.02 | 204.73 | 317.01 | 353.17 |
| | ANSYS | 83.41 | 164.67 | 219.84 | 377.19 | 389.01 |
| 5X5 | ABAQUS | 81.09 | 183.09 | 215.83 | 317.05 | 370.54 |
| | ANSYS | 85.59 | 173.31 | 249.16 | 309.29 | 313.16 |
| 10X10 | ABAQUS | 89.20 | 183.78 | 222.06 | 351.71 | 370.61 |
| | ANSYS | 87.15 | 177.23 | 259.04 | 317.13 | 318.92 |
| 20X20 | ABAQUS | 81.79 | 184.03 | 298.25 | 392.1 | 370.09 |
| | ANSYS | 87.60 | 178.53 | 262.61 | 319.84 | 321.41 |

Tableau IV. 6 : Les modes propres de la plaque

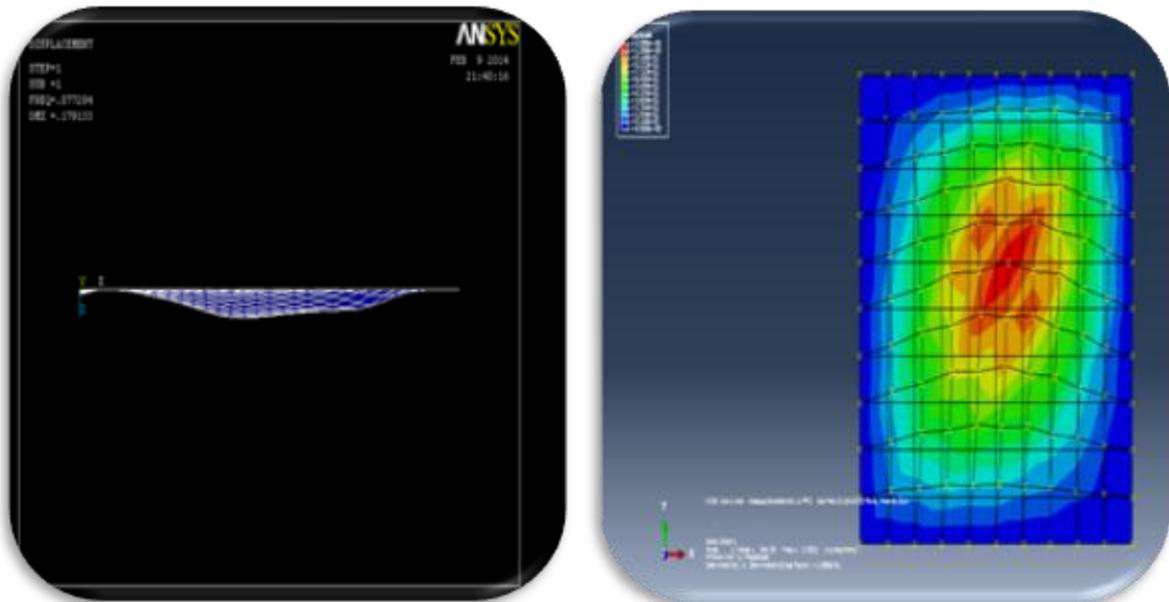


Figure IV.9 Le premier mode propre de la plaque étudiée

Pour les deux applications deux et trois, Nous remarquons que :

- Les résultats d'ANSYS sont égaux pour les deux premières fréquences si le maillage n'est pas d'ordre élevé, si le maillage est grossier donc les résultats des fréquences précédentes ne seront pas égaux.
- Les résultats d'ABAQUS dépendent de l'ordre de la fréquence, à partir de la deuxième fréquence le logiciel donne des résultats égaux, donc dans le cas d'ABAQUS les résultats ne dépendent pas de la taille du maillage.

IV.4.1.2.4 Plaque mince, carrée et encadrée sur un côté :

Nous considérons une plaque carrée de côté L , d'épaisseur t , encadrée sur l'un de ses côtés.

Soient E et ν les caractéristiques du matériau et R sa masse volumique

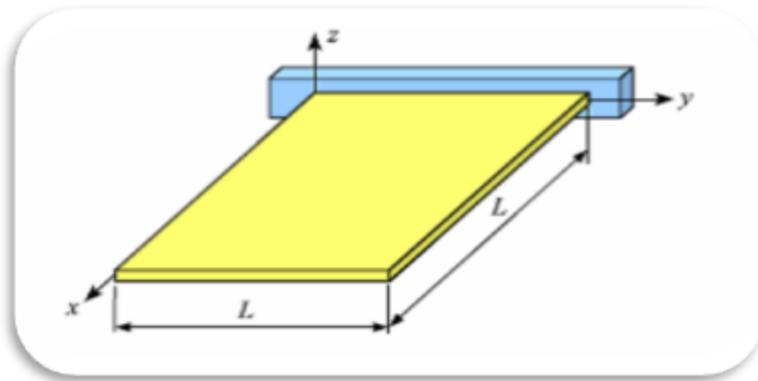


Figure IV.10 La présentation de la plaque étudiée

$L=1\text{ m}$, $t=10\text{ mm}$ / $E=200000\text{ MPa}$, $\nu=0.3$ / $R=8000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$

DKQ : l'élément quadrilatère de Kirchhoff, le cisaillement transversal est négligé (hypothèse de Kirchhoff).

Problème : étude des 6 modes propres de la plaque.

Référence : $w_n = B_n \sqrt{\frac{Et^2}{12\rho(1-\nu^2)}}$, dont n est le numéro de mode.

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| B_n | 3.492 | 8.525 | 21.43 | 27.33 | 31.11 | 54.44 |

| Mode | Solution Analyt | Méthode | 3X3 | 5X5 | 10X10 | 30X30 |
|------|-----------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 52.84 | DKQ | 51.94 | 52.32 | 52.46 | 52.51 |
| | | ANSYS | 54.46 | 53.50 | 52.50 | 51.91 |
| 2 | 128.99 | DKQ | 126.47 | 127.86 | 128.47 | 128.67 |
| | | ANSYS | 172.56 | 172.79 | 175.95 | 185.86 |
| 3 | 324.25 | DKQ | 346.30 | 334.08 | 325.27 | 322.35 |
| | | ANSYS | 410.75 | 427.25 | 587.83 | 377.37 |
| 4 | 413.52 | DKQ | 431.53 | 422.30 | 414.47 | 411.79 |
| | | ANSYS | 546.95 | 549.95 | 951.11 | 953.32 |
| 5 | 470.72 | DKQ | 489.78 | 479.28 | 471.24 | 468.60 |
| | | ANSYS | 1018.30 | 1096.50 | 1866.4 | 3168.70 |
| 6 | 823.71 | DKQ | 860.53 | 837.57 | 824.64 | 820.16 |
| | | ANSYS | 1462.7 | 1678.83 | 4894.20 | 8766.10 |

Tableau IV. 7 : Pulsations propres de la plaque

On constate avec les éléments finis utilisés pour ce calcul que les fréquences augmentent avec le nombre d'éléments du maillage mais qu'il n'est pas nécessaire d'en avoir un grand nombre pour estimer correctement les fréquences. Un calcul d'analyse modale peut ne comporter que quelques éléments et fournir une bonne approximation de la solution. Il n'est pas indispensable de raffiner localement les maillages car seul le champ de déplacement est calculé, alors qu'en statique, on calcul aussi le champ de contrainte discontinu d'un élément à l'autre, ce qui impose une grande densité de maillage là où il varie fortement. On peut montrer que les conditions aux limites ont une influence plus ou moins grande sur les fréquences. D'autre part, on constate que les modes associés ne sont pas rangés dans le même ordre quand on change les conditions aux limites.

IV.4.2 Les systèmes forcés:

IV.4.2.1 Vibration forcée d'un solide rectangulaire

Dans l'étude des vibrations forcées en analyse dynamique des structures, généralement on cherche à calculer la réponse du système à une perturbation dépendante du temps imposé. Pour valider l'emploi de l'élément SBRIE en vibration forcée on a proposé deux tests qui ont

été traités par [SMITH.88]. Pour le premier test figure (IV.4) dans l'analyse vibratoire forcée on utilise la méthode de la réponse complexe décrite dans la référence [SMITH.88]. La poutre cantilever est soumise à une force verticale harmonique $F(t) = \cos \omega t$ au nœud 8 (ddl 12). Le taux d'amortissement γ est de 0,005 soit 5 % appliqué à tous les modes du système, le module de Young est $E=1$, le coefficient de Poisson $\nu=0.3$, fréquence forcée $\omega=0.3$ et la masse par unité de surface est $\rho=1$. Ici le pas de temps est pris égal à $1/20$ de la période ($2\pi/\omega$) soit disant 1.047. Le problème est en déformation plane.

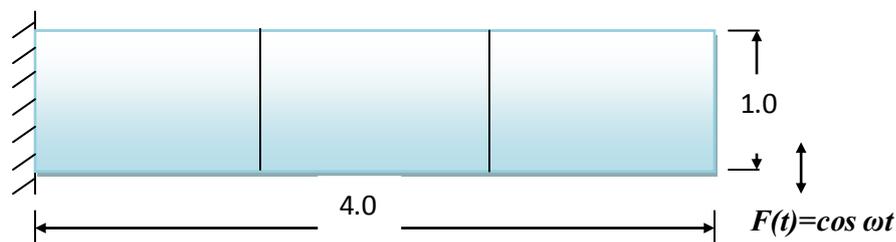


Figure IV.11 La géométrie et maillage de la poutre cantilever soumise à une vibration forcée

Les courbes illustrées dans les figures ci-après montrent les déplacements à l'extrémité de la poutre par rapport au pas de temps imposé, par l'utilisation des deux éléments Q8, SBRIE et ANSYS. Nous pouvons voir que le comportement de l'élément SBRIE est strictement similaire à celui de l'élément Q8 en analyse vibratoire forcée.

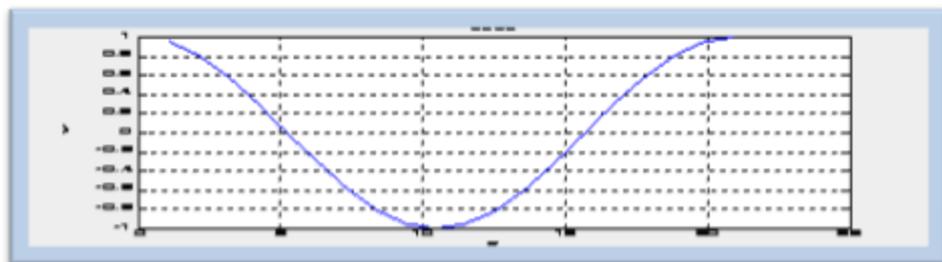


Figure IV.12 La variation de force sinusoïdale en fonction du temps $F(t) = \cos \omega t$

Le tableau suivant représente les déplacements des nœuds 18 dans la poutre forcée en fonction des temps et de la force.

| TEMPS(S) | Q8 | SBRIE | ANSYS |
|----------|-------------|-------------|-------------|
| 1.047 | 0.2734E+02 | 0.2302E+02 | 0.2721E+02 |
| 2.049 | 0.3628E+02 | 0.3104E+02 | 0.3668E+02 |
| 3.142 | 0.4184E+02 | 0.3602E+02 | 0.4255E+02 |
| 4.149 | 0.4322E+02 | 0.3747E+02 | 0.4426E+02 |
| 5.236 | 0.4037E+02 | 0.3526E+02 | 0.4164E+02 |
| 6.283 | 0.3357E+02 | 0.2959E+02 | 0.3494E+02 |
| 7.330 | 0.2348E+02 | 0.2103E+02 | 0.2482E+02 |
| 8.378 | 0.1110E+02 | 0.1041E+02 | 0.1227E+02 |
| 9.425 | -0.2373E+01 | -0.1230E+01 | -0.1480E+01 |
| 10.47 | -0.1561E+02 | -0.1275E+02 | -0.1509E+02 |
| 11.52 | -0.2732E+02 | -0.2302E+02 | -0.2721E+02 |
| 12.57 | -0.3636E+02 | -0.3104E+02 | -0.3668E+02 |
| 13.61 | -0.4184E+02 | -0.3602E+02 | -0.4255E+02 |
| 14.66 | -0.4322E+02 | -0.3747E+02 | -0.4426E+02 |
| 15.71 | -0.4037E+02 | -0.3526E+02 | -0.4164E+02 |
| 16.76 | -0.3357E+02 | -0.2959E+02 | -0.3494E+02 |
| 17.80 | -0.2348E+02 | -0.2103E+02 | -0.2482E+02 |
| 18.85 | -0.1110E+02 | -0.1041E+02 | -0.1227E+02 |
| 19.90 | 0.2373E+01 | 0.1230E+01 | 0.1480E+01 |
| 20.94 | 0.1561E+01 | 0.1275E+01 | 0.1509E+01 |

Tableau IV.8 : Les déplacements au nœud 18

Les résultats des déplacements au nœud18 sont illustrés dans le tableau (IV.4) pour la déformation plane. Les résultats obtenus par l'élément SBRIE et code ANSYS montrent que les valeurs des déplacements sont en bon accord avec celles obtenues par l'élément Q8.

Ces résultats montrent bien que le comportement de l'élément SBRIE est similaire à l'élément Q8 et à l'élément de l'ANSYS dans l'analyse dynamique forcée.

IV.5 Comparaison entre les méthodes utilisées dans la résolution dynamique d'un système amortie soumis à une force sinusoïdale :

Soit une console sollicitée à l'action dynamique forcée, où l'intérêt est porté essentiellement sur l'étude comparative des déplacements au nœud18, obtenue d'après la méthode de (*la superposition modale, Wilson θ*), utilisant les éléments de Q8 et SBRIE.

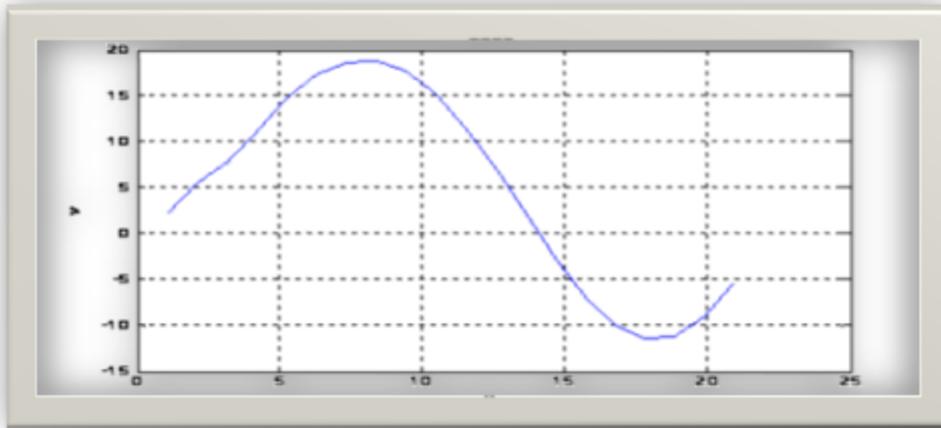


Figure IV.13 La variation du déplacement en fonction de la force en utilisant l'élément Q8 (méthode de la superposition modale).

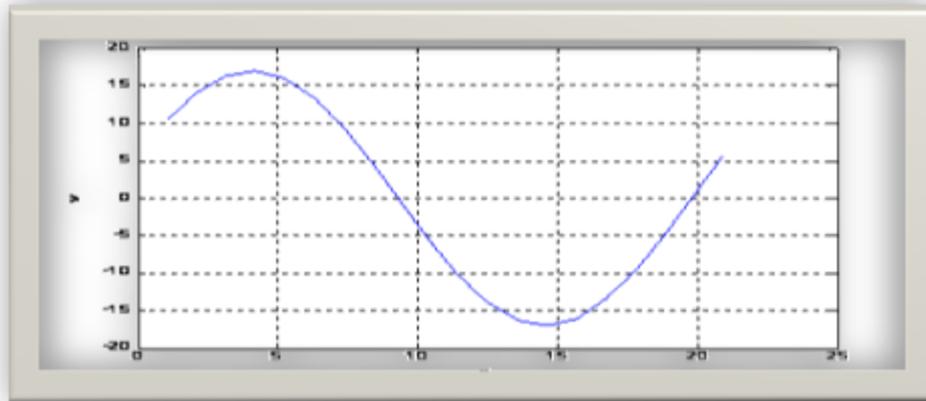


Figure IV.14 La variation du déplacement en fonction de la force en utilisant l'élément SBRIE (Méthode de la superposition modale).

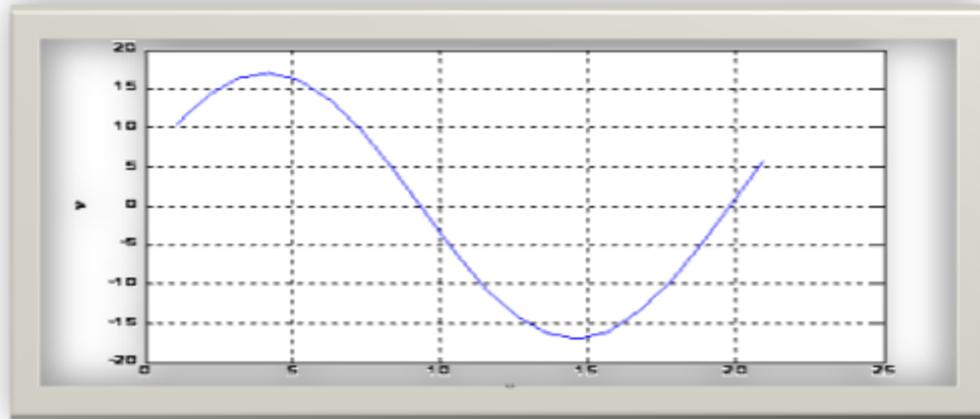


Figure IV.15 La variation du déplacement en fonction de la force en utilisant l'élément Q8 et (Méthode de Wilson (θ méthode)).

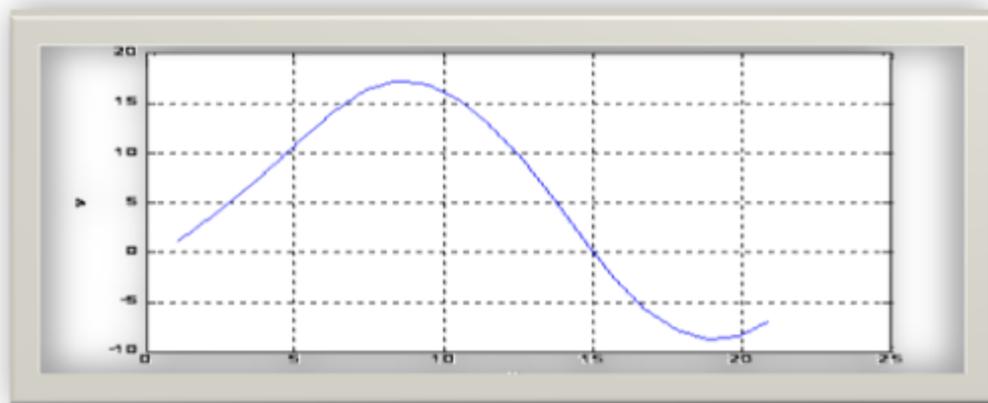


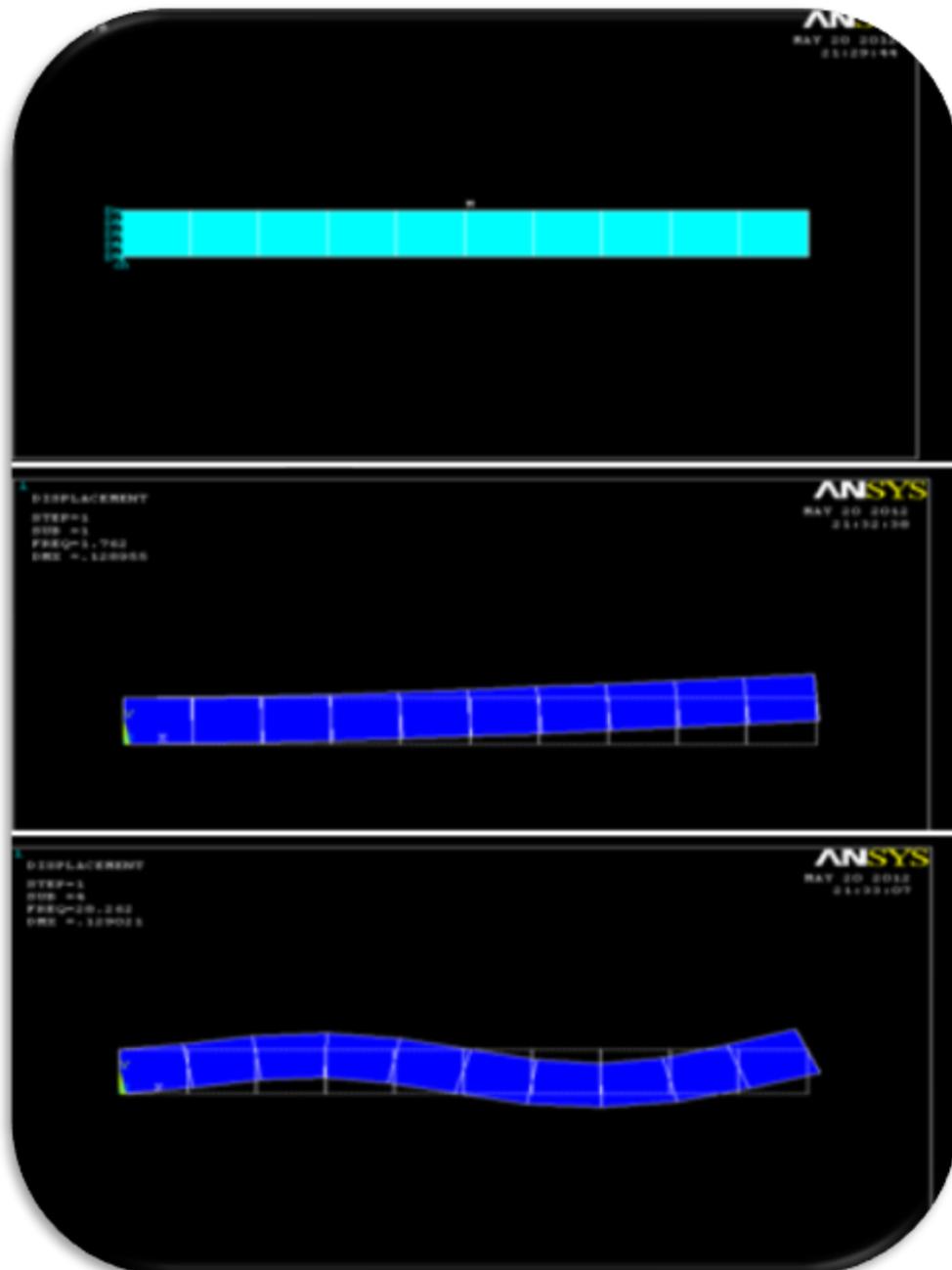
Figure IV.16 La variation du déplacement en fonction de la force en utilisant l'élément SBRIE et (Méthode de Wilson (θ méthode)).

Les résultats des déplacements sont illustrés dans les figures IV (6,7,8,9). Ces résultats montrent bien que le comportement de l'élément SBRIE est similaire à l'élément Q8 avec l'utilisation de la méthode de superposition modale ou bien la méthode de Wilson.

IV.6 quelques exemples traités par la méthode des éléments finis en vibrations libres

IV.6.1 Exemple d'une barre élastique bidimensionnel:

La poutre cantilever est de dimension (10X1) m², le module de Young est $E=1$ KN/m², le coefficient de Poisson $\nu=0$. Et la masse par unité de surface est $\rho = 1$.



FigureIV.17 La modélisation de la poutre élancée par ANSYS

Sur le tableau (IV.9) sont rapportées les valeurs des fréquences propres obtenues par deux méthodes considérées, analytique et calcul de structure par éléments finis.

| λ_i | SOLUTION EXACT | Q4 | Q8 | SBRIE | ANSYS |
|-------------|-------------------|--------|--------|--------|--------|
| λ_1 | 0.1571 | 0.1828 | 0.1316 | 0.1338 | 0.1224 |
| λ_2 | 0.4712 | 0.6259 | 0.4535 | 0.4657 | 0.4463 |

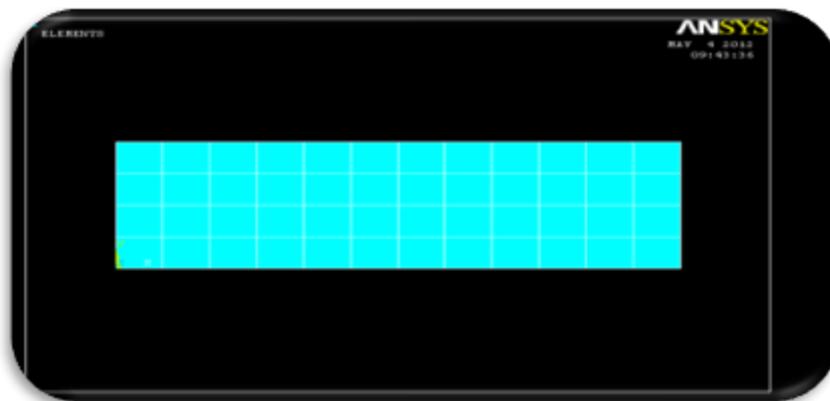
Tableau IV.9: Les résultats des valeurs propres obtenus

Les résultats des modes propres sont illustrés dans le tableau (IV.9).

Les résultats obtenus par l'élément SBRIE, Q8 et code ANSYS montrent que les valeurs des modes propres sont en bon accord avec la solution analytique. Les modes obtenus par l'élément Q4 est considérablement plus grande que celle de la solution analytique, ainsi, l'élément Q4 a une mauvaise représentation de la poutre (la poutre élancée).

IV.6.2 Exemple d'une plaque membrane:

L'exemple est celui d'une membrane rectangulaire, de caractéristiques constantes, pour laquelle on souhaite calculer les premiers modes de vibrations transversales. La déformation due à l'effort tranchant est négligeable. La structure, de **L= 0.42m**, **A=0.14m**, et de **t=0.25cm** d'épaisseur, soient (**E=3.8GPa/ $\nu=0.3$**), les caractéristiques élastiques du matériau et **$\rho=1400\text{Kg/m}^3$** sa masse volumique.



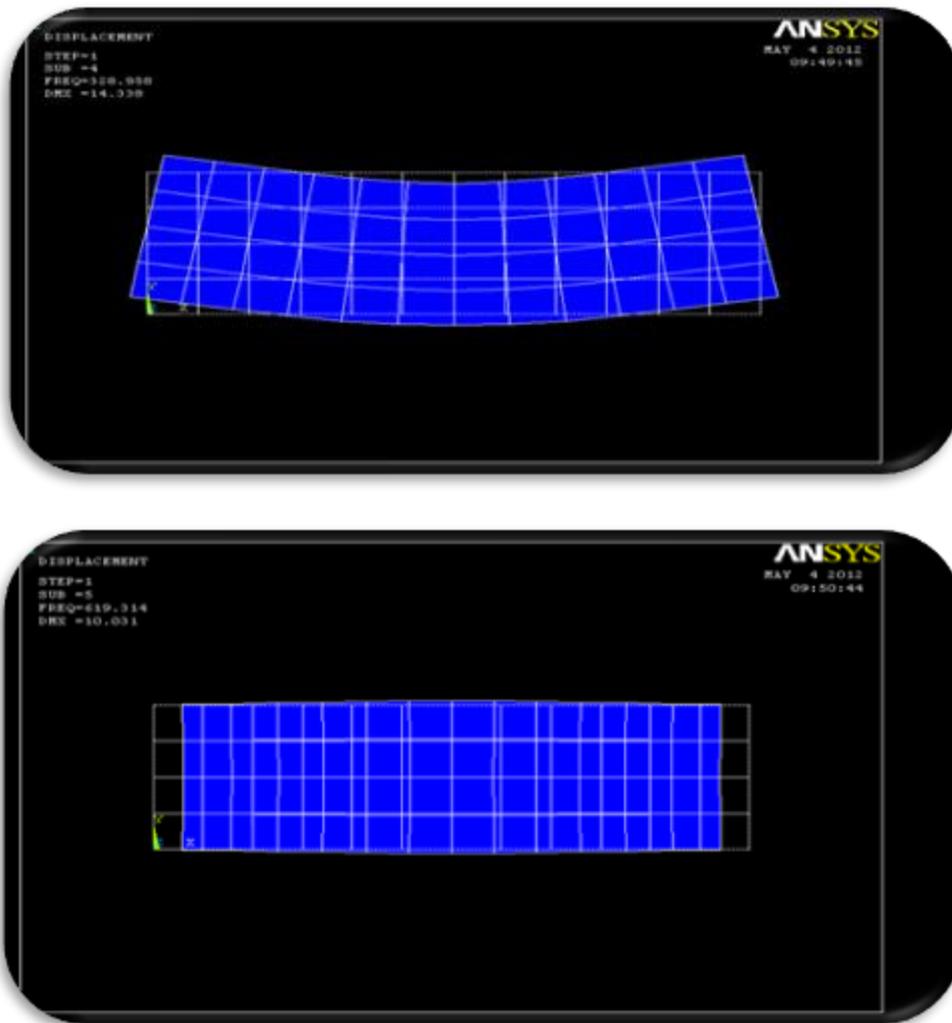


Figure IV.18 La modélisation de la membrane par ANSYS

Le tableau suivant représente les résultats des deux modes fondamentaux

| λ_i | SOLEXACT | Q4 | Q8 | SBRIE | ANSYS |
|-------------|----------|---------|-------|-------|--------|
| λ_1 | 3.2863 | 3.6875 | 3.230 | 3.59 | 3.2896 |
| λ_2 | 6.4807 | 16.3757 | 4.062 | 4.024 | 6.1931 |

Tableau IV.10 : Résultats des valeurs propres obtenus

Les résultats des modes propres sont illustrés dans le tableau (IV.10).

Les résultats du premier mode pour les éléments SBRIE, Q8 et code ANSYS montrent que, les valeurs des modes propres sont en bon accord avec celles obtenues par l'élément Q4 et la solution exacte.

Le deuxième mode obtenu par l'élément Q4 est considérablement plus grande que celui de la solution analytique, ainsi, l'élément Q4 a une mauvaise représentation dans des trucs membranaires.

IV.6.3 Exemple d'une plaque encastree dans un seul cote:

Nous considérons une plaque carrée de cote $L=10\text{m}$, d'épaisseur t , encastree sur l'un de ses cotés. Soient: $E=1\text{Kn/m}^2$ et $\nu=0.3$, les caractéristiques du matériau et $R=1\text{Kg/m}^3$ sa masse volumique.

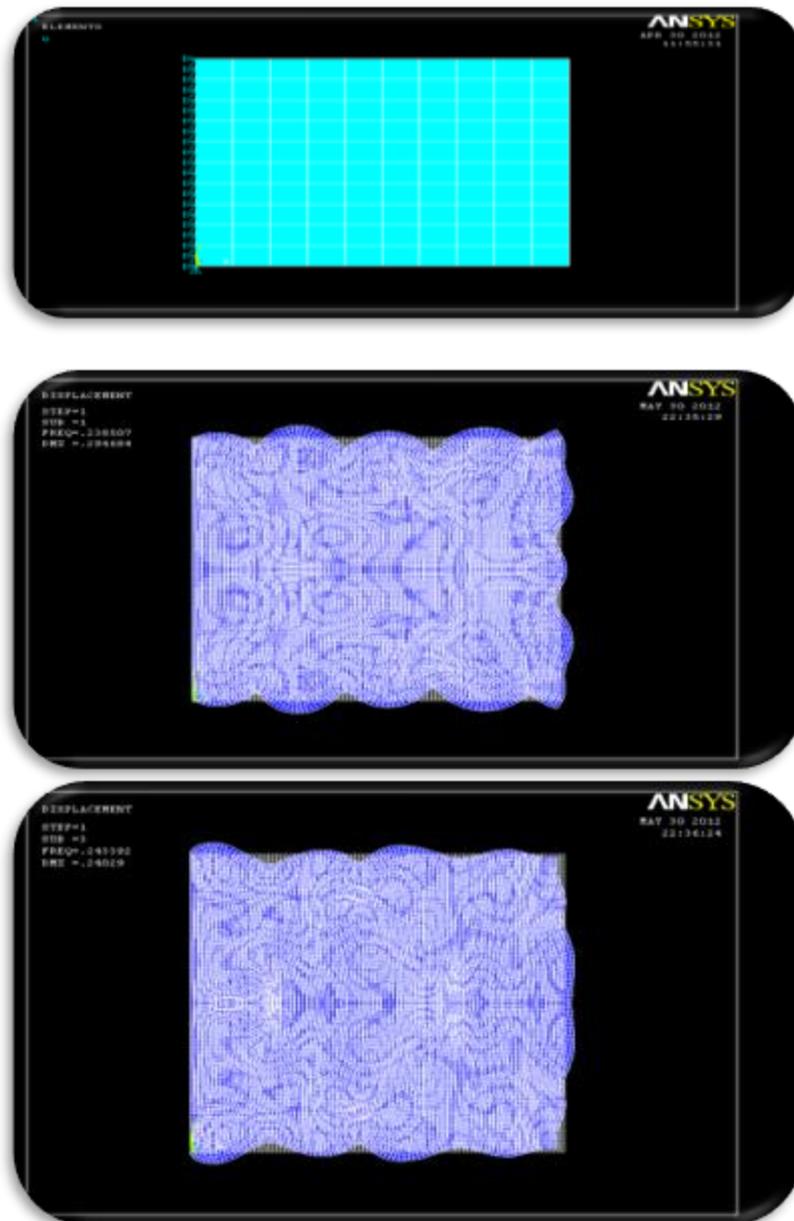


Figure IV.19 La modélisation d'une plaque console par ANSYS

Le tableau suivant représente les résultats des deux modes fondamentaux de la plaque

| λ_i | Solution exacte | Q4 | Q8 | SBRIE | ANSYS |
|-------------|-----------------|--------|--------|--------|--------|
| λ_1 | 0.0684 | 0.0462 | 0.0658 | 0.0498 | 0.0679 |
| λ_2 | 0.1587 | 0.0276 | 0.1580 | 0.1431 | 0.1592 |

Tableau IV.11 : Résultats des valeurs propres obtenus.

Les résultats des modes propres sont illustrés dans le tableau (IV.11).

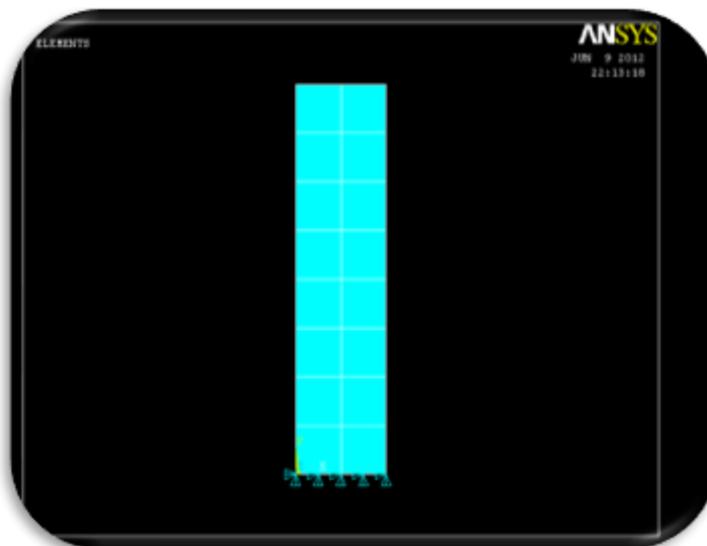
Les résultats du premier mode obtenus par l'élément Q8 et code ANSYS sont en bon accord avec celles obtenues par la méthode analytique.

Les résultats du deuxième mode obtenus avec les éléments Q8, SBRIE et code ANSYS sont en bon accord avec celles obtenues par la méthode analytique

Les modes obtenus par l'élément Q4 est considérablement plus grande que celle de la solution analytique, ainsi, l'élément Q4 a une mauvaise représentation dans l'analyse des plaques.

IV.6.4 Exemple d'un mur de barrage en terre:

L'exemple est celui d'un mur, de caractéristiques constantes, pour lequel on souhaite calculer les premiers modes de vibrations. La déformation due à l'effort tranchant est négligeable. La structure est en terre, de $H= 60.96\text{m}$, $L=15.24\text{m}$, soient ($E=3.4474*10^{10}\text{N/m}^2$ / $\nu=0.11$), les caractéristiques élastiques du matériau et $\rho=568.7\text{Kg/m}^3$ sa masse volumique.



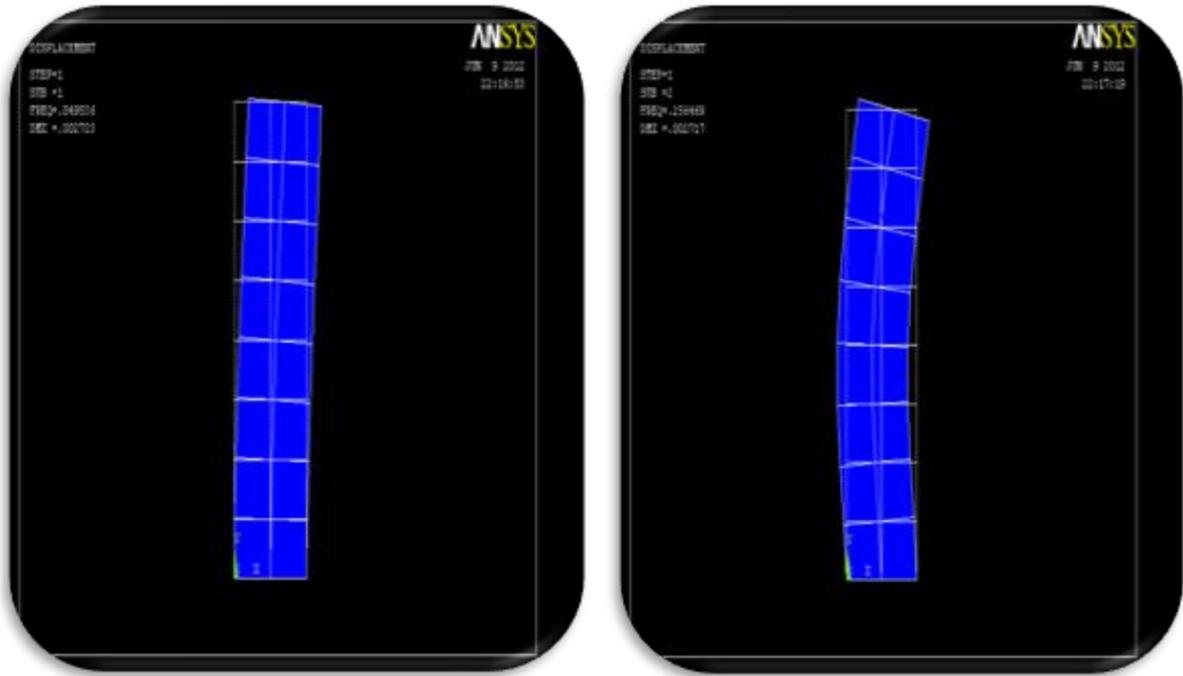


Figure IV.20 La modélisation d'un mur en terre par ANSYS

Le tableau suivant représente les résultats des deux modes de mur

| λ_i | SOL EXACT | Q4 | Q8 | SBRIE | ANSYS |
|-------------|-----------|--------|--------|-------|--------|
| λ_1 | 31.24 | 32.98 | 31.32 | 31.33 | 31.49 |
| λ_2 | 165.82 | 175.87 | 165.41 | 160.7 | 159.49 |

Tableau IV.12 : Résultats des valeurs propres obtenus

Les résultats des modes propres sont illustrés dans le tableau (IV.12).

Les résultats de premier mode obtenus avec les éléments Q4, Q8, SBRIE et code ANSYS sont en bon accord avec celles obtenues par la méthode analytique.

Le deuxième mode obtenu par l'élément Q4 est considérablement plus grand que celui de la solution analytique, ainsi, l'élément Q4 est une mauvaise représentation dans cet exemple des murs.

Commentaires :

D'après les résultats représentés dans les tableaux IV.2 et IV.3, on a constaté que l'utilisation des quadrilatères sous une tension membranaire, ces éléments montrent des meilleurs comportements soit-disons exacte, sauf le Q4 pour la 1ère fréquence fondamentale pour M1 et M2, la deuxième fréquence avec maillage (M2), nous remarquons aussi que les éléments de Q8, SBRIE, DRILLING et ANSYS donnent des résultats acceptables pour la 1ère fréquence fondamentale.

Donc il est clair dans ce test, que l'élément Q8 a montré une meilleure stabilité pour les deux fréquences fondamentales, aussi les éléments SBRIE et DRILLING ont montré une bonne convergence vers la solution exacte pour la 1ère et 2ème fréquence fondamentale.

Constatations :

1. Les éléments SBRIE, DRILLING et Q8 ont un comportement stable en dynamique.
2. L'élément SBRIE et DRILLING à champ de déformation donnent de mauvais résultats pour un maillage grossier.
3. La géométrie ou bien la densité du maillage influe sur le comportement de la réponse dynamique des éléments membranaires, mais pour l'élément SBRIE et DRILLING ce n'est pas le cas.

Conclusion :

D'après les tests effectués dans les problèmes des vibrations libres non amortie à l'élasticité plane, soit en contrainte plane, la performance des éléments est acceptable dans les tests de contrainte plane, mais insuffisante pour dire que l'élément est toujours performant dans tous les cas d'application. Alors il est important de faire un grand nombre de tests qui pourraient confirmer que l'élément soit performant ou limité.

L'élément à champ de déformation montre son intérêt dans les tests des contraintes planes en dynamique et donne une convergence plus importante que les éléments conformes d'ANSYS.

- Nous avons présenté dans cette contribution l'évaluation d'éléments finis basés sur l'approche en déformation (SBRIE et DRILLING) pour la modélisation des poutres ainsi pour les éléments du logiciel ANSYS (PLANE 82) et ABAQUS pour la modélisation des poutres libres non amorties.
- L'intégration numérique est utilisée pour le calcul de la matrice de rigidité élémentaire pour les éléments à champs de déformation.
- De très bons résultats sont obtenus par l'élément SBRIE, DRILLING et l'élément Q8. Ces éléments sont numériquement plus performants que ceux basés sur le modèle en déplacement. Sa précision a été évaluée à travers une série de cas-tests standard (les modes propres) relatif aux problèmes vibratoires libres non amorties.
- La disponibilité du logiciel de calcul puissant et « intelligent » se fait parfois au détriment du jugement. Le choix juste du modèle ainsi que le type d'éléments finis n'est pas aisé, il existe peu de publications qui permettent de guider les concepteurs dans l'élaboration de leurs modèles d'analyse, de choisir les types d'éléments finis appropriés.
- Lorsqu'une modélisation par éléments finis est réalisée, la sélection du type d'élément et la finesse de maillage nécessitent des choix judicieux. Bien que les éléments finis représentent plus justement les systèmes structuraux, l'interprétation des résultats est souvent problématique due au très grand nombre de résultats. C'est à ce titre que le présent travail tente d'établir une investigation sur l'utilisation et le choix des éléments de la bibliothèque du code de calcul (ANSYS, ABAQUS) pour la modélisation des systèmes forcés.

- L'utilisation d'élément de solide recommandé pour représenter les éléments plans que des éléments de poutre, de plaque ou de coque sont recommandés pour la modélisation de pièces élancées. Le choix du type d'élément est dicté par l'expérience sans nécessairement faire des études de sensibilité sur la finesse de maillage. Cependant, il faut faire des études de sensibilité sur la taille et le type d'élément avant de s'attaquer à des problèmes de grande envergure. Lorsqu'une modélisation par éléments finis est réalisée.
- Les éléments utilisés dans cette étude incluent des éléments d'usage universels (Q8, SBRIE, DRILLING) et un élément plan, Ont donné de très bons résultats lors des différents tests effectués comparativement aux autres éléments.
- PLANE42, PLANE82 et SHELL63 sont les éléments d'usage universel de plaque/coque du logiciel commercial, ANSYS. Ces éléments sont employés couramment pour des applications industrielles parce qu'ils conviennent à la modélisation des poutres et plaques/coques épaisses et minces.
- Finalement, nous pouvons dire que les nombreuses applications numériques étudiées prouvent la validité et l'efficacité du modèle en déformation; ainsi que pour les éléments d'ANSYS étudiés. Ces derniers ont montré plus de précision, performance et de robustesse.
- Les résultats des éléments basés sur le modèle en déformation sont forts encourageants, permettent d'augurer sur les possibilités réelles d'élargir cette technique à l'étude dynamique des structures forcés et amorties ainsi que la non linéarité géométrique des plaques et coques.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Aujourd'hui la méthode des éléments finis est une technique récente à caractère pluridisciplinaire, car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base, la mécanique des structures, l'analyse numérique et l'informatique appliquée. Notre objet est représenté par des fonctions définies sur chaque élément, qui ont l'avantage d'être plus simples que celles que l'on pourrait éventuellement utiliser pour représenter la totalité de l'objet.

Dans notre travail c'est le modèle en déformation qui donne la possibilité de modéliser les structures planes, avec l'application des éléments membranaires.

Alors dans ce travail nous avons présenté les éléments finis membranaires à champs de déformation, tous ses possédants soit quatre soit huit nœuds, et qui sont fondés sur la théorie linéaire de l'élasticité bidimensionnelle.

Les éléments présentés avec deux degré de liberté Q4, Q8 et SBRIE qui est formulé à champ de déformation pour la représentation du solide de révolution dans quelque test et applications sont présentés dans le dernier chapitre pour le test des fréquences fondamentales. Ainsi l'utilisation des éléments intégrés dans le code ANSYS, permet de faire la comparaison avec les éléments à champ de déformation ou bien avec la solution exacte.

Cette étude consiste à décrire le comportement vibratoire d'une poutre console utilisant la méthode des éléments finis, les fréquences propres qui caractérisent les modes de vibrations dépend des matrices de rigidité du console et l'élément fini utiliser dans la modélisation.

L'objectif assigné à ce travail est l'étude du comportement vibratoire, Analytique et numérique de la poutre console.

Pour atteindre cet objectif nous avons commencé par une étude bibliographique détaillée sur les éléments à champ de déformation et l'analyse dynamique vibratoire des poutres.

De nombreux travaux sont consacrés à l'étude du comportement dynamique des structures dans le souci d'une meilleure compréhension et maîtrise des problèmes vibratoires.

Les structures étudiées sont de types membranaires et la formulation à champ de déformation est largement adaptée à de telles analyses.

La résolution du problème est essentiellement basée sur l'approche modale consistant à déterminer les caractéristiques modales des structures, Analytique ou numérique. Un grand intérêt est accordé aux performances de l'élément utilisé.

L'approximation par la théorie classique des poutres permet une application aisée de la méthode analytique de Rayleigh-Ritz basée sur la modélisation du déplacement transversal de la plaque par les fonctions caractéristiques de vibrations des poutres homogènes. Cette approximation a permis de traiter la totalité des combinaisons de conditions aux limites standards sur les bords d'une poutre.

La programmation de la méthode sous FORTRAN a permis d'obtenir les fréquences et de déformations propres de ces poutres, elle est validée en calcul de structures par éléments finis sous code de calcul ANSYS.

La formulation analytique permet d'envisager des études de conception et optimisation ainsi que des analyses de sensibilité.

La comparaison des résultats obtenus par le programme de calcul élaboré avec ceux issus du calcul de structures pour une poutre console a permis de valider l'approche en déformation pour l'élément de SABIR et L'analytique utilisée et a mis en évidence l'avantage de ces éléments en terme de rapidité de convergence.

D'après les tests d'application effectués dans le domaine d'élasticité plane, nous montrons l'intérêt de l'élément membranaire dans le calcul des structures, dans les problèmes de contrainte plane en dynamique.

Mais toujours notre travail reste modeste pour les validations des éléments fini dans les problèmes en déformation ou en contrainte plane dans les systèmes libres non amorti. Alors il est nécessaire de faire une démonstration ou une validation numérique de ces éléments dans le calcul des systèmes amortis et forcés, pour compléter les applications les plus récents.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [ANSYS] **ANSYS Modeling and Meshing Guide. ANSYS Release 9.0**
ANSYS, Inc. Southpointe /275 Technology Drive/Canonsburg, PA 15317
- [ASH 72] Ashwell ,D.G. .et Sabir A. B A new cylindrical shell finite element based on single independent strain functions. Int. J .Mech.Sci.14, 171-183 (1972).
- [ACH 78] Acharhabi A.Le calcul des plaques épaisses par les éléments finis tridimensionnels à nombre de nœuds et forme variables, Thèse de Doctorat 3ème cycle, Université de Technologie de Compiègne, Juin 1978
- [AHMA.70] Ahmed S, Irons BM, Zienkiewicz OC. Analysis of thick and thin shell structures by curved elements, IJNME, Vol.2, pp. 419-451, 1970.
- [AKN 73] A.K.Noor, Free vibrations of multilayered plates, AIAA. J. 11, 1938-1939 (1973).
- [AYT03] Analytic trapezoidal Fourier p-element for vibrating plane problemsA.Y.T. Leung*, Bin Zhu, Jianjin Zheng, Hao Yang
- [BAT 90] Batoz JL, Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis. Vol.1 : Solides élastiques, Eds Hermés, Paris, 1990
- [BEL.98a] Belarbi M.T. et Charif A., nouvel élément secteur basé sur le modèle en déformation avec rotation dans le plan, Revue Européenne de éléments finis. VOL.7, N°4, pp. 439-458, juin 1998.
- [BEL.98c] Belarbi M.T. et Charif A., nouveau quadrilatère «SBQ4 » avec drilling rotation, conférence internationale sur les mathématiques appliquées et les sciences de l'ingénieur CIMASI 98, 27-29 octobre 1998, Casablanca, Vol. 2, pp. 136-141.
- [BEL.98b] Belarbi M.T. et Charif A., nouvel hexaédre simple « SBH8 » pour l'étude des plaques minces et épaisses, les annales Maghrébines de l'ingénieur, Vol. 12, N° Hors série, extrait de l'acte du 6ème colloque Maghrébin sur les modèles numériques de l'ingénieurs CMMNI6, Tunis 24-26 Nov. 8, N°2, pp. 632-627

- [BEL.99]** Belarbi MT, Charif A . Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses .Revue Européenne des éléments finis 1999 ;8(2),135-57.
- [BEL.00]** Belarbi MT. Développement de nouveaux éléments finis à modèle en déformation, application linéaire et non linéaire. Thèse de Doctorat, Université de Constanatine, Février 2000, 235 pages.
- [BELO.05]** Belouar L , Guenfoud M, A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending, Thin-Walled Structures 43(2005) 47-63.
- [BOUR.06]** Bourezane M. Utilisation of strain model in the analysis of structures. Thèse de Doctorat, université de Biskra, Juillet 2006.
- [C DDS]** cour dynamique des structures 2009/2010, université de BISKRA
- [C MEF]** cour méthodes des éléments finis 2009/2010, université de BISKRA
- [CHA 82]** Charchafchi T.A.Sabir A.B, Curved rectangular and general quadrilateral shell element for cylindrical shells. The mathematics of finite elements and application. IV .Editor J.R. Whiteman 231-239(1982), Academic Press
- [CHUNG91]** Le-Chung Shiau and Jing- Tang Chang, Transverse shear effect on vibration of laminated plate using higher-order plate element, Comput. Struct. 25(2), 735-740 (1991).
- [CHNGB95]** A -POSTERIORI ERROR ESTIMATORS/CORRECTORS FOR NATURAL FREQUENCIES OF MEMBRANE VIBRATION PROBLEMS
Chongbin Zhao and G. P. Steven/ Finite Element Analysis Research Centre, Building 507, Engineering Faculty, University of Sydney,N.S.W. 2006, Australia
(Received 22 February 1995
- [CHNGH03]** Free in-plane vibration of an axially moving membrane Changho Shina, Wonsuk Kimb, Jintai Chungc,*a Department of Precision Mechanical Engineering, Hanyang University, 17 Haengdang-dong, Seongdong-gu, Seoul 133-791, South Korea :bBK21 Division for Research and Education in Mechanical Engineering, Hanyang University, 17 Haengdang-dong, Seongdong-gu, Seoul 133-791, South Korea,c Department of Mechanical Engineering, Hanyang University, 1271 Sa-1-dong, Ansan, Kyunggi-do 425-791, South Korea/ Received 10 September 2002; accepted 20 March 2003

- [DJO.90]** M.S. Djoudi, strain based finite elements in the linear and geometrical non linear analysis of structure, PhD. Thesis of university of Wales college of Cardiff (U.K). 1990.
- [DJO 03]** M.S. Djoudi, H. Bahai, A shallow shell finite element for the linear and Non linear analysis of cylindrical shells, *Engineering Structures* 25 (2003) 769–778.
- [DJO 04]** Djoudi M .S., H. Bahai, Strain based finite element for the vibration of cylindrical panels with opening. *Thin-Walled structures* 42 (2004) 575 – 588.
- [FRE 01]** Frey F, Jirousek J. Analyse des structures et milieux continus, Méthode des éléments finis Vol. 6, Eds Press Polyt Univ Romandes, 1ére Edition, Lausanne, 2001.
- [Houmat.06]** A. Houmat. Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using the trigonometric p-version of the finite-element method. Faculty of Engineering, University of Tlemcen, B.P. 230, Tlemcen 13000, Algeria. 2006
- [IMB 84]** Imbert JF. Analyse des structures par elements finis. Cepadues Editions, Deuxième Edition, 1984.
- [JING.90]** H. –S. Jing and M. –L. Liao, Partial hybrid stress element for vibrations of thick laminated composite plates, *Comput. Struct.* 36(1), 57-64 (1990)
- [JCH-CR]** Modélisation des structures (calcul par éléments finis avec problèmes corrigés) 2ème cycle école d'ingénieurs
- [MOUS.02]** Moussa A. Tayah S., a rectangular finite element for plane elasticity with in-Plane rotation, proceeding of the six conf with computational structures technology. Civil-comp. press Edinbourgth 2002.
- [PCY66]** P.C.Yang, C.H.Norris and Y.Stavsky, Elastic Wave propagation in heterogeneous plates. *J.Solids Struct* ; 2, 665-684 (1966)
- [PRA95]** Prat Michel, La modélisation des ouvrages .Hermes, Paris 1995.
- [REB .13]** C. Rebiai, L.Belouar, A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and non linear analysis. *J.Elsever*; p 72-81(2013).
- [SAB.95]** A.B. Sabir, M.S. Djoudi, Shallow shell finite element for the large deflection geometrically non linear analysis of shells and plates, *Thin-Walled Structures.* 21 (1995) 253–267.
- [SAB 83a]** Sabir A.B a new class of finite elements for plane elasticity problems, *CAFEM 7th* , int, conf, stru, mech. In reactor technology, Chicago, 1983.

- [SAB 83b] Sabir A.B and Chow F. Y, Elastic buckling of plates panels containing circular and square holes., int, conf, instability and plastic collapse of steel structure, Manchester university 1983.
- [SAB 85a] Sabir A.B, a rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom, chapter 9 in proceeding of the second int conf on variation methods in engineering, Southampton university, sprenger-verlag, Berlin pp. 17- 25, 1985
- [SAB 85b] Sabir A.B, and Ramdhani F. a shallow shell finite element for general shell analysis variational methods in engineering, proceeding of 2nd int conf. Southampton university, England, 1985
- [SAB 86] Sabir A.B, and Salhi Y.H, a strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, Res Mechanical 19, pp 1-16, 1986
- [SAB 95] Sabir A . B. et A . Sfeudji , Triangular and Rectangular plane elasticity finite Elements. Thin-Walled Structures 21.pp 255-232. 1995
- [SRNVS 70] S.Sirinivas, C.V.Joga Rao and A.K. Rao, An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates, J.Sound Vib. 12, 187-199 (1970).
- [SMITH88] I.M. Smith, D.V. Griffith, Programming the Finite Element Method, second ed., John Wiley & Sons, UK, 1988.
- [SMITH04] I.M. Smith, D.V. Griffith, Programming the Finite Element Method, 4th ed., John Wiley & Sons, Ltd, UK, 2004.
- [TGMUR] Dynamique des structures (Analyse modale numérique)
THOMAS GMUR (presses polytechniques et universitaires romandes)
- [YVD09] RDM Elements Fnis/ Manuel d'exercices
Yves Debard/ Institut Universitaire de Technologie du Mans Département
Genie Mecanique et Productique/ 26 juin 2006 { 16 decembre 2009
- [ZIE 77] Zienkiewicz O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, 2nd ed., McGraw-Hill, 1971.
- [ZIE 77] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L., The Finite Element Method, troisième édition, Mc Greaw-Hill, 1977.
- [ZIEN.00] Zienkiewicz, O. C. and R.L. Taylor, The Finite Element Method, vol 1, fifth edn, Butterworth-Heinemann. 2000.
- [ZHAO 95] Chongbin Zhao & G. P. Steven. Asymptotic formulae for correcting finite

element predicted natural frequencies of gravity and embankment dams. *Finite Element Analysis Research Centre, Building ,107, Engineering Faculty, University of Sydney, N.S.W., 2006, Australia* (Received 4 January 1995; accepted 19 September 1995)

Résumé

La robuste des éléments finis à champ de déformation a été démontrée pour l'analyse statique des structures membranaires contrairement aux éléments classiques correspondants qui nécessitent un maillage très raffiné.

Ces éléments obtenus de l'interpolation directe des déformations a permis d'enrichir le champ de déplacement par des termes d'ordre élevé.

La validation des éléments finis basée sur l'approche en déformation pour l'analyse dynamique va permettre d'étendre l'efficacité de cette approche. Le modèle vibration libre d'une structure non amortie donne des informations importantes sur son comportement dynamique.

Le présent travail porte sur la formulation et l'évaluation des éléments finis à champ de déformation (élément de SBRIE et DRILING) et l'élément plan du code ANSYS et ABAQUS pour l'analyse dynamique et particulièrement les vibrations libres des structures non amorties en contrainte plane.

Mots clés : l'approche en déformation, élasticité plane, interpolation, membrane, vibration libre, amortissement.

Abstract

The robust of the finite elements based on the strain approach was shown for the static analysis of the membrane structures contrary to the corresponding traditional elements which require a very refined grid.

These elements obtained of the direct interpolation of the deformations made it possible to enrich the displacement approach by terms of a high nature.

The validation of the finite elements based on the approach in deformation for the dynamic analysis will make it possible to extend the effectiveness of this approach. The free model vibration of a not damping structure gives important information of its dynamic behavior.

This work concerns the formulation and the evaluation of the finite elements to approach of deformation (SBRIE and DRILING finite element) and the plane element of ANSYS and ABAQUS code for the dynamic analysis and particularly the free vibrations of the structures not damping in plane stress.

Key words: strain based approach, plan elasticity, interpolation, membrane, free vibration, and damping

ملخص

آلية العناصر المنتهية ذات التقريب في التشوه قد وجدت للتحليل النيكول للهيكل ذات السلوك الغشائي عكس العناصر المنتهية الكلاسيكية التي تتطلب تجزئة جد متناهية. هذه العناصر وجدت مباشرة بعد تحويل التقريب في التشوه الذي يستخرج منه مباشرة التقريب في الانتقال بواسطة وسائط جد عالية.

تطبيقات هذه العناصر المنتهية بالتقريب في التشوه من اجل التحليل التحريكي يسمح بتبيان فعالية هذا التقريب. صنف التحريك الحر الغير المتخامد للهيكل يعطي معلومات جد هامة في التعاطي التحريكي.

هذا العمل المختص في تحليل و تقييم العناصر المنتهية ذو التقريب في التشوه عن SBRIE/Driling و العناصر المستوية الموجودة في برنامج ABAQUS/ANSYS من اجل التحليل الديناميكي خصيصا للاهتزازات الحرة الغير المتخامدة للهيكل المرنة تحت الاجهادات المستوية.

الكلمات المفتاحية: التقريب في التشوه- مرونة مستوية- غشاء- اهتزاز حر- التخامد