RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mohamed Khider, Biskra
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**
OPTION : **ANALYSE**
Intitulé :

OPÉRATEURS DE TOEPLITZ TRONQUÉS.

Présenté par : **YAGOUB Ameur**

Devant le jury composé de :

MOKHTARI Zouhir	Professeur	Université de Biskra	Président
BENDAOUD Zohra	Maître de conférence	Université de Laghouat	Encadreur
ZARRABI Mohamed	Maître de conférence	Université de Bordeaux	Co-Encadreur
ALLAOUI Salah Eddine	Professeur	Université de Laghouat	Examinateur
MOKHTARI Abdelkader	Professeur	Université de Laghouat	Examinateur
KHELIL Nasser	Maître de conférence	Université de Biskra	Examinateur

Année Universitaire : 2018-2019

Remerciements.

Cette thèse est le fruit d'un travail qui a été réalisé au *Laboratoire des Mathématiques Pures et Appliquées* (*LMPA*), université de *Amar Telidji de Laghouat*, sous la direction du Dr ***BENDAOUD Zohra***, et dans *l'institut de mathématiques de Bordeaux (IMB)*, sous la codirection du Dr ***ZARRABI Mohamed***, et *l'université Mohamed Khider de Biskra.* Une grande partie de ce travail a été réalisée grâce au projet de coopération Algéro-Français Egide-CMEP PHC-TASSILI 30875XC, sous le responsable français le Pr ***KELLAY Karim***, *L'IMB-Bordeaux I*, et le responsable algérien le Dr ***BENDAOUD Zohra***.

Je tiens avant tout à exprimer ma profonde reconnaissance à ***BENDAOUD Zohra*** pour avoir acceptée de diriger cette thèse. Sa disponibilité et ses précieux conseils m'ont étés d'une grande aide, en particulier dans mes moments de doutes. Je l'en remercie vivement.

Je remercie profondément ***ZARRABI Mohamed*** d'avoir accepté de me coencadrer et me diriger, surtout pour sa convivialité, son dynamisme et ses conseils précieux m'ont guidé et motivé tout au long de mes séjours à l'*IMB*-Université de *Bordeaux I.*

Un grand merci à ***KELLAY Karim*** pour avoir mis ses idées géniales et sa gentillesse au service de ce travail de thèse. Malgré la distance, merci d'avoir été là à chaque fois que j'en avais besoin tout au long de ces années de recherche.

Tous mes remerciements vont également à monsieur ***MOKHTARI Zouhir***, Professeur à l'université *Mohamed Khider de Biskra*, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse me faisant ainsi un grand honneur. Je tiens aussi à remercier les membres du jury : monsieur ***KHELIL Nasser*** Maître de conférence à l'université *Mohamed Khider de Biskra*, monsieur ***ALLAOUI Salah Eddine*** Professeur à l'université de *Amar Telidji de Laghouat*, et monsieur ***MOKHTARI Abdelkader*** Professeur à l'université de *Amar Telidji de Laghouat.*

J'adresse également mes remerciements à ***STROUSE Elizabeth*** pour sa hospitalité et précieux conseils pendant mes séjours à Bordeaux.

Merci à mes amis ***MERGHNI Lobna*** et ***KORRICHI Fatima*** pour notre fructueuse collaboration.

Je tiens particulièrement à remercier les membres de mon Laboratoire, *LMPA*, au sein de l'université de *Amar Telidji de Laghouat*, à commencer par son directeur, ***BENDAOUD Zohra***, qui a mis à notre disposition tous les moyens possibles pour qu'on puisse avancer.

Je remercie tous les membres du laboratoire *IMB-Bordeaux* et se personnel chercheurs, enseignants, doctorants, informaticiens, secrétaires et techniciens. Ils ont tous contribué de façon directe ou indirecte au bon déroulement de ma thèse, je les remercie pour leur pré-

sence à mes cotés et pour la bonne ambiance qu'ils ont fait régner autour de moi.
Je remercie, particulièrement, mes collègues enseignants avec qui j'ai eu le plaisir d'enseigner les mathématiques dans les différentes facultés de l'université *Amar Telidji de Laghouat.*
Enfin, je remercie également mes amis et ma famille, et plus généralement tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont entouré pendant ces années pour le soutien très précieux qu'ils m'ont apporté.

YAGOUB Ameur.

Table des matières

Notations.

$\mathbb{D}$	le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$.
$\overline{\mathbb{D}}$	le disque unité fermé du plan complexe $\mathbb{C}$.
$\mathbb{T}$	le cercle unité.
$\widehat{\mathbb{C}}$	$= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
$A \lesssim B$	signifie qu'il existe une constante C absolue que $A \leq CB$.
$A \asymp B$	signifie que $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.
dm	la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité.
dA	la mesure planaire de Lebesgue normalisé sur le disque unité $\mathbb{D}$.
$dA_\alpha(z)$	$= (1+\alpha)(1-\lvert z\rvert^2)^\alpha dA(z)$.
μ_α	mesure de Clark sur $\mathbb{T}$.
$W(\zeta, \delta)$	L'ensemble de Carleson sur $\mathbb{D}$
$E_\varphi(s)$	$= \{\zeta \in \mathbb{T} : \lvert\varphi(\zeta)\rvert \geq s\}$, l'ensemble de niveau du symbole φ.
K	l'ensemble de Cantor généralisé associée à la suite $(a_n)_n$.
$\mathcal{L}(E, F)$	l'ensemble des opérateurs linéaires borné de E dans F.
$\mathcal{L}(E)$	l'ensemble des opérateurs linéaires borné sur l'espace E.
$L^2(\mathbb{T})$	l'espace de Lebesgue usuel.
$L^\infty(\mathbb{T})$	l'espace des fonctions bornées sur $\mathbb{T}$.
$\langle , \rangle$	produit scalaire de $L^2(\mathbb{T})$.
$\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$	espace des fonctions holomorphe sur $\mathbb{D}$.
H^2	l'espace de Hardy.
H^∞	l'espace des fonctions analytiques bornées.
u	fonction intérieure.
K_u	l'espace modèle.
K_u^∞	$= K_u \cap H^\infty$ est dense dans K_u.
$\mathcal{D}_\alpha$	l'espace de Dirichlet.
$\mathcal{D}$	l'espace de Dirichlet classique.
$span\{x_i, i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$	le sous-espace vectoriel fermé engendré par x_i.

P	projection orthogonale de L^2 sur H^2.
P_u	projection orthogonale de L^2 sur K_u.
$\widehat{f}(n)$	n-ème coefficient de Fourier de f.
f^*	la limite radiale de f sur $\mathbb{T}$.
k_λ	noyau reproduisant de H^2.
k_λ^u	noyau reproduisant de K_u.
ADC	dérivée angulaire au sens de Carathéodory.
$N_{\varphi,1}$	fonction de comptage de Nevanlinna de H^2.
$N_{\varphi,\alpha}$	fonction de comptage de Nevanlinna de $\mathcal{D}_\alpha$.
n_φ	fonction de comptage de Nevanlinna de $\mathcal{D}$.
$\mathcal{D}_\alpha(f)$	$= \int_{\mathbb{D}} \lvert f'(z)\rvert^2 dA_\alpha(z)$.
S	opérateur de Shift sur H^2.
S_u	opérateur de Shift sur K_u.
S_u^α	opérateur de Shift généralisé sur K_u, pour $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$.
U_α	opérateur unitaire de Clark sur K_u, pour $\alpha \in \mathbb{T}$.
M_φ	opérateur de multiplication de symbole φ.
T_φ	opérateur de Toeplitz sur H^2 de symbole φ.
C_φ	opérateur de composition de symbole φ.
A_φ^u	opérateur de Toeplitz tronqué sur K_u de symbole φ.
$\varphi \overset{\mathrm{A}}{\equiv} \psi$	$\Leftrightarrow A_\varphi^u = A_\psi^u$.
C	opérateur de conjugaison sur un espace de Hilbert.
$\widetilde{f}$	$= Cf$.
$f \otimes g$	opérateur de de rang 1 sur un espace de Hilbert (produit tensoriel).
T_α	la transformation de Crofoot pour $\alpha \in \mathbb{D}$.
$\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$	la classe de Schatten sur $\mathcal{H}$.
$\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$	la classe de Schatten sur $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$.
$\mathcal{S}_2(\mathcal{H})$	la classe des opérateurs de Hilbert Schmidt sur $\mathcal{H}$.
$\mathbf{B}(H)$	l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans H.
$R(\lambda, A)$	la résolvante de l'opérateur linéaire A.
$\{e_n\}_n$	base orthonormée du espace de Hilbert.
$\mathcal{T}_u$	l'ensemble de tous les opérateurs de Toeplitz tronqués bornés sur K_u.
$\mathcal{B}_u^\alpha$	l'ensemble de tous les opérateurs de Toeplitz tronqués de type α sur K_u.
$\rho(A)$	l'ensemble résolvant de l'opérateur A.

Introduction.

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la théorie des opérateurs qui consiste en l'étude des quelques propriétés spectrales et algébriques d'opérateurs sur divers espaces de fonctions analytiques. Cette étude comporte deux parties, partie sur les opérateurs de Toeplitz tronqués, et l'autre sur les opérateurs de composition.

Soit $L^2(\mathbb{T})$ l'espace de Lebesgue de fonctions carrées intégrables sur le cercle unité $\mathbb{T}$ et soient H^2, H^∞ les espaces de Hardy classiques sur le disque unité $\mathbb{D}$. Les espaces modèles sont les sous-espaces fermés invariants par l'adjoint du shift, $S^* : f \mapsto \frac{f-f(0)}{z}$ sur H^2. D'après le théorème de Beurling [12], ces espaces sont de la forme $K_u = (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2$, où u est une fonction intérieure (pour plus de détails voir [27, 29, 39, 51]). Chaque espace modèle est équipé d'un opérateur de conjugaison C défini par $C[f](\zeta) = u(\zeta)\overline{\zeta f(\zeta)} := \widetilde{f}$, pour tout $f \in K_u$ et $\zeta \in \mathbb{T}$ (voir [27, 28, 30]), et possède un noyau reproduisant $k^u_\lambda(z) = \frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{(1-\bar{\lambda}z)}, \lambda \in \overline{\mathbb{D}}, z \in \mathbb{T}$ (voir [29, 39]). Les opérateurs de Toeplitz tronqués sont des compressions des opérateurs de multiplication sur l'espace modèle K_u. Soit P_u la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u. L'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole φ, noté A^u_φ est défini sur le sous-espace dense $K_u \cap H^\infty$ de K_u par

$$A^u_\varphi(f) = P_u(\varphi f).$$

Le symbole φ n'est pas unique (c'est à dire : d'après [51], $A^u_{\varphi_1} = A^u_{\varphi_2}$ n'implique pas $\varphi_1 = \varphi_2$). Une étude systématique des opérateurs Toeplitz tronqués avec des symboles dans $L^2(\mathbb{T})$ a été commencée récemment par Sarason ([51]). Cet article a jeté les bases de la théorie et inspiré une grande partie des travaux sur ces opérateurs, ainsi qu'un énorme intérêt pour cette classe d'opérateurs (voir [6, 10, 14, 49, 50]).

Le but de ce travail est consacré aux semi-groupes d'opérateurs de Toeplitz tronqués et leurs générateurs. Notre intérêt pour ce sujet vient des travaux de Suárez ([61]), Seubert ([58, 57, 56]) et Sarason ([54, 55]). Soit S_u la compression de shift sur K_u défini par $S_u(f) = P_u(zf)$. Dans [61], Suárez a caractérisé les opérateurs fermés densément définis dans K_u qui commute avec S^*_u. Sarason a complété le résultat de Suárez dans [54], en montrant que les opérateurs fermés densément définis sur K_u commutant avec S_u sont les opérateurs Toeplitz tronqués avec des symboles dans une certaine classe de Smirnov locale liée à u, $\mathcal{N}_u^+$ (voir sous-chapitre 3.4).

Seubert a caractérisé dans [56], les opérateurs dissipatifs fermés et densément définis sur K_u qui commutent avec S_u^*. ces opérateurs sont les générateurs de semi-groupes de contractions commutant avec S_u^* qui sont également, en fait décrits par Seubert dans [56]. Il est montré que tous ces opérateurs sont des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Dans la présente thèse, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille d'opérateurs de Toeplitz tronqués soit un semi-groupe, puis un semi-groupe uniformément continu, et finalement un C_0-semi-groupe de contractions ([62]). On pose $\mathcal{T}(K_u), \mathcal{B}_u^\alpha$ l'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués bornés et leur algèbre de Banach, respectivement. Soient $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{T}(K_u)$. Les principaux résultats de la première partie de la thèse sont les suivants :

1. $\{T_t\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe sur K_u si et seulement s'il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que $T_t \in \mathcal{B}_u^\alpha, \forall t \geq 0$, une des conditions suivantes est satisfaite
   (a) Si $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, alors $\forall t, s \geq 0$, $T_{t+s}k_0^u = T_tT_sk_0^u$ et $T_0k_0^u = k_0^u$.
   (b) Si $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, alors $\forall t, s \geq 0$, $T_{t+s}\widetilde{k_0^u} = T_tT_s\widetilde{k_0^u}$ et $T_0\widetilde{k_0^u} = \widetilde{k_0^u}$.
2. Soient $(T_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe sur K_u, alors $(T_t)_{t\geq 0}$ est uniformément continu si et seulement s'il existe $\Psi \in K_u$ et $c \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{A} = A^u_{\Psi+\alpha S_u\overline{\widetilde{\Psi}}+c} \in \mathcal{B}_u^\alpha$, le générateur infinitésimal de T_t, et l'une des conditions suivantes est satisfaite
   (a) Si $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{T_tK_0^u - K_0^u}{t} = (1 - \alpha\overline{u(0)})\Psi$ et $c = 0$.
   (b) Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{S_uT_t\widetilde{k_0^u} - S_u\widetilde{k_0^u}}{t} = (\alpha - u(0))\Psi$ et $c = \frac{\alpha}{(\alpha - u(0))} \lim_{t\to 0^+} < \frac{T_t\widetilde{k_0^u} - \widetilde{k_0^u}}{t}, \widetilde{k_0^u} >$.
   (c) Si $\alpha = \infty$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{S_uT_t\widetilde{k_0^u} - S_u\widetilde{k_0^u}}{t} = \Psi$ et $c = \lim_{t\to 0^+} < \frac{T_t\widetilde{k_0^u} - \widetilde{k_0^u}}{t}, \widetilde{k_0^u} >$.
3. $(T_t)_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz tronqués de contraction si et seulement s'il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$, tel qu'une des conditions suivantes est satisfaite
   (a) $|\alpha| < 1$ et il existe une fonction analytique C, avec $Re(C(z)) \leq 0, \forall z \in \mathbb{D}$, tel que $T_t = A^u_{\frac{e^{tC}}{1-\alpha\overline{u}}}$.
   (b) $1 < |\alpha| < +\infty$ et il existe une fonction analytique C, avec $Re(C(z)) \leq 0, \forall z \in \mathbb{D}$, tel que $T_t = A^u_{\frac{\alpha e^{t\overline{C}}}{\alpha - u}}$.
   (c) $\alpha = \infty$, et il existe une fonction analytique C, avec $Re(C(z)) \leq 0, \forall z \in \mathbb{D}$, tel que $T_t = A^u_{e^{t\overline{C}}}$.

(d) $|\alpha| = 1$ et il existe une fonction mesurable q tel que $\underset{\zeta \in \mathbb{T}}{esssup} Re(q(\zeta)) \leq 0$ et $T_t = e^{tq}(S_u^\alpha)$.

Les démonstrations impliquent les classes de Sedlock, $\mathcal{B}_u^\alpha$, introduites en 2010 dans [49, 50], le résultat de Seubert cité plus haut et la transformée de Crofoot (un opérateur unitaire entre différents espaces modèles [17]).

Ensuite, nous étudions les opérateurs de composition sur les espaces de Dirichlet.
Soit $\alpha \in [0,1]$, l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$, est l'ensemble des fonctions $f \in H^2$, tel que

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dA(z) < \infty$$

Notons que $\mathcal{D}_1 = H^2$ et $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ est l'espace de Dirichlet classique. L'opérateur de composition à symbole φ est donné par

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \qquad f \in \mathcal{D}_\alpha,$$

où $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ est une fonction holomorphe.
Contrairement à l'espace de Hardy, où l'opérateur de composition est toujours borné, grâce au théorème de Littlewood(1925 [36]), l'opérateur de composition n'est pas toujours borné dons $\mathcal{D}_\alpha, \alpha \in (0,1)$. Dons ce travail, nous nous intéressons à la bornitude, la compacité et à l'appartenance de la classe de Schatten.
La fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée à $\mathcal{D}_\alpha$, d'un symbole holomorphe dans $\mathbb{D}$, φ, est donnée par :

$$N_{\varphi,\alpha}(z) := \sum_{z=\varphi(w), w\in\mathbb{D}} (1-|w|)^\alpha, \qquad\qquad z \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\},$$

et $N_{\varphi,\alpha} = 0$ sur $\mathbb{D} \setminus \varphi(\mathbb{D})$. Lorsque $\alpha = 1$, $N_{\varphi,1}$ est comparable à la fonction de comptage de Nevanlinna classique, et lorsque $\alpha = 0$, la fonction de comptage associée à Dirichlet classique est donné par $n_\varphi(z) = N_{\varphi,0}(z) = \text{card}\{w : \varphi(w) = z\}$.
Il y a une caractérisation complète pour la bornitude, la compacité et les classe de Schatten en terme de la fonction de comptage, en-effet : soit la fonction holomorphe $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$
1) dans [60], Shapiro a été montré que

$$C_\varphi \text{ est borné dans } \mathcal{D}_\alpha \iff N_{\varphi,1} = o(1-|z|), \quad |z| \to 1^-.$$

2) en 2012, Kellay et Lefèvre ont montré dans leur article [33] que, pour $0 < \alpha \leq 1$,

1. C_φ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha \iff N_{\varphi,\alpha} = O(1-|z|)^\alpha, \quad |z| \to 1^-$.

2. C_φ est compact dans $\mathcal{D}_\alpha \iff N_{\varphi,\alpha} = o(1-|z|)^\alpha, \quad |z| \to 1^-$.

3) Pau et Paleaz dans [42] montre que pour $p \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}^{p/2}(z)}{(1-|z|^2)^{2+\alpha p/2}} dA(z) < \infty \iff C_\varphi \text{ dans la classe de Shatten, } \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha).$$

L'estimation de $N_{\varphi,\alpha}$ s'avère compliqué en général, dans ce travail nous donnons une majoration de $N_{\varphi,\alpha}$ par la norme des itérées du symbole φ ([8]). Ensuite, on donne des exemples de symbole tel que C_φ, est borné ou compact. En-effet : on pose $\mathcal{D}_\alpha(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z)$. Soit la fonction holomorphe $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Ce qui nous permet d'avoir les résultats suivants :

1. Soit $0 < \alpha \leq 1$,

$$N_{\varphi,\alpha}(z) \lesssim \mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}), \qquad \frac{1}{n} \leq 1-|z| \leq \frac{1}{n-1}. \tag{1}$$

2.
$$\int_{1-\frac{1}{m} \leq |z| \leq 1} n_\varphi(z) dA(z) \lesssim \frac{\mathcal{D}_0(\varphi^{m+1})}{(1+m)^2}, \quad m \geq 2. \tag{2}$$

Finalement, dans ce travail, nous étudions la propriété de certains opérateurs de composition dans les espaces de Dirichlet aux classes de Schatten en fonction de la taille des ensembles de niveau du symbole $E_\varphi(s)$, à l'aide des majorations (1) et (2) ([9]), tel que $E_\varphi(s)$ de φ est donnée par

$$E_\varphi(s) = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\varphi(\zeta)| \geq s\}, s \in (0,1).$$

Les principaux résultats sont les suivants : pour $p \geq 0$

1. Soit φ est une fonction injective. Si l'une des deux conditions est satisfaite
   (a) Si $\alpha p/2 \leq 1$ et $\int_0^1 \frac{|E_\varphi(r)|^{\alpha p/2}}{(1-r)^2} dr < \infty$.
   (b) Si $\alpha p/2 \geq 1$ et $\int_0^1 \frac{|E_\varphi(r)|^{\alpha p/2}}{(1-r)^{1+\alpha p/2}} dr < \infty$.

   alors $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$.
2. Soit $\alpha \in (0,1]$. Si $\sum_n \Big(n^\beta \mathcal{D}_\beta(\varphi^n)^{1-\alpha+\beta} |E_\varphi(1-\frac{1}{n})|^{\alpha-\beta}\Big)^{p/2} < \infty$ pour certains $\beta \in [0,\alpha]$ et $(\alpha-\beta)p/2 \leq 1$, alors $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$.
3. Soit $p \leq 2/(1-\alpha)$, si $\sum_n \Big(n|E_\varphi(1-1/3n)|\Big)^{\frac{p}{2}-1} \frac{\mathcal{D}(\varphi^n)}{n} < \infty$, alors $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$.

Cette approche permet de donner des résultats analogue pour l'opérateur de composition C_φ dans un espace de type Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$ à un autre espace de type Dirichlet $\mathcal{D}_\beta$, avec $\alpha \neq \beta$, dans la classes de Schatten ($\mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta)$), et des exemples explicites de l'opérateur de composition appartenant à la classe Schatten.

La thèse est divisée en 5 chapitres.

Nous commençons par rappeler les définitions et propriétés concernant l'espace de Hardy H^2, les opérateurs de multiplication, opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy, Opérateurs de composition sur l'espace de Hardy, et Lien entre opérateurs de Toeplitz et opérateurs de composition dans le chapitre 1. Nous en profitons pour donner un Lien entre les trois opérateurs multiplication, Toeplitz et composition.
Le chapitre 2 est entièrement consacré aux opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle K_u. Dans ce chapitre, nous rappelons les outils de base nécessaires pour s'initier 'à notre sujet. On y définit les espaces modèles, et on y expose certaines propriétés qui nous seront utiles pour la suite. Ensuite, on introduit les opérateurs de Toeplitz tronqués ($\mathcal{T}_u$) et les opérateurs de Toeplitz tronqués de type α ou du type Sedlock ($\mathcal{B}_u^\alpha \subset \mathcal{T}_u$), On terminera ce chapitre par des exemples de représentation matricielle des opérateurs de Toeplitz tronqués pour $u(z) = z^n$.

Dans le chapitre 3, (les résultats de l'article [62]), on commence par un bref de théorie des semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés, ensuite nous donnons une condition nécessaire et suffisante d'opérateurs de Toeplitz tronqués soit un semi-groupes avec un exemple matriciel, et après on caractérisons les semi-groupes uniformément continus d'opérateurs de Toepliz tronqués avec exemple. Dans le cas de semi-groupes fortement continus (C_0-semi-groupes), nous commençons par Préliminaires sur les espaces qui nous seront utiles, et les opérateurs non-bornés, ensuite nous présenterons quelques conditions nécessaires pour qu'un opérateur non-bornés commutes avec le Shift généralisé S_u^α, condition nécessaire aux générateurs de semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz tronqués.

Le chapitre 4 présente les résultats de l'article [8], il est entièrement consacré aux opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet. Dans ce chapitre, on va définir les espaces de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$, et les opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$ avec quelque propriété élémentaire, et Nous étudions la relation entre la fonction de comptage de Nevanlinna généralisée associée à φ et les normes de φ^n dans les espaces de Dirichlet. Nous donnons des exemples d'opérateurs de composition de Hilbert-Schmidt sur les espaces de Dirichlet.
Dans le dernier chapitre 5, (les résultats de l'article [9]), nous rappelons la définition les classes des Schatten , et nous étudierons l'appartenance dans les classes de Schatten dans l'espace $\mathcal{D}_\alpha$ des opérateurs de composition en terme des ensembles de niveau et de la norme de φ^n, enfin, on donne des exemples sur les principaux résultats obtenus dans ce chapitre.

Chapitre 1

Opérateurs de Toeplitz et de composition.

1.1 Espace de Hardy.

Soient $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ le disque unité du plan complexe $\mathbb{C}$, $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ le cercle unité, $dm := dm(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée sur le cercle unité, $dA(z) = dxdy/\pi = rdrd\theta/\pi$, avec $z = x + iy = re^{i\theta}$, la mesure planaire de Lebesgue normalisé sur le disque unité $\mathbb{D}$ et par $L^2(\mathbb{T}) := L^2(\mathbb{T}, dm), L^\infty(\mathbb{T}) := L^\infty(\mathbb{T}, dm)$ les espaces de Lebesgue usuels, il est bien connu que $L^2(\mathbb{T})$ muni de produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\overline{g}dm.$$

On désigne par $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ l'ensemble de toutes les fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$.
L'espace de Hardy H^2 est l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{T})$ tel le coefficient de Fourier négatives sont nulles.

$$H^2 = \{f \in L^2(\mathbb{T}), \widehat{f}(n) = 0, n < 0\}.$$

et

$$H^\infty = \{f \in L^\infty(\mathbb{T}), \widehat{f}(n) = 0, n < 0\},$$

où,

$$\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

est le n-ème coefficient de Fourier de f.

On identifie H^2 sur $\mathbb{T}$ à sous espace des fonctions holomorphes $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ sur $\mathbb{D}$ par

$$H^2 = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|^2 = \sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} < \infty\}.$$

et

$$H^\infty = \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}), \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty\}.$$

L'identité classique de Littlewood-Paley (voir[60]), donne par

$$\|f - f(0)\|_{H^2}^2 = 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) < \infty.$$

Le théorème de Fatou donne que toute fonction $f \in H^2$ admet une unique limite radiale :

$$f^*(\zeta) = \lim_{r \longrightarrow 1^-} f(r\zeta), \qquad m - p.p, \quad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Aussi puisque $f \in H^2$ on a $f^* \in L^2(\mathbb{T})$ et $\widehat{f^*}(n) = 0$, $\forall n < 0$ et $\log |f^*| \in L^1(\mathbb{T})$ (voir [18], Theorem 2.7).
Un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ des fonctions analytiques sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, est un espace de Hilbert à noyau reproduisant si pour chaque $\lambda \in \Omega$, il existe une fonction $k_\lambda \in \mathcal{H}$ tel que $f(\lambda) =< f, k_\lambda >_{\mathcal{H}}$ pour tout $f \in \mathcal{H}$. Touts les espaces classiques de Hilbert des fonctions analytiques sur le disque (par exemple Hardy, Bergman, et Dirichlet.) admettent le noyau reproduisant (pour plus de détails voir [1, 4, 43]).
L'espace de Hardy H^2 admet le noyau reproduisant donné par la formule :

$$k_\lambda(z) = \frac{1}{1 - \overline{\lambda} z}, \quad \lambda, z \in \overline{\mathbb{D}},$$

et

$$f(z) = \langle f, k_z \rangle, \qquad f \in H^2.$$

Donc la projection orthogonale P de L^2 sur H^2 est donnée par :

$$Pf = \langle f, k_\lambda \rangle, \qquad f \in L^2(\mathbb{T}), \quad \lambda \in \mathbb{D}.$$

L'opérateur P est donné par l'intégrale de Cauchy :

$$(Pf)(z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{1 - \overline{\zeta} z} dm(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

De plus $P(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta}) = \sum_0^{+\infty} a_n e^{in\theta}$. Clairement, $\|Pf\| \le \|f\|$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$.
L'opérateur de shift sur H^2 est défini par :

$$S[f](z) = zf(z), \qquad f \in H^2,$$

avec son adjoint $S^* : H^2 \to H^2$ défini par :

$$S^*[f](z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}, \qquad f \in H^2.$$

Soit $M \in H^2$, M est dit sous-espace invariant par S, lorsque M fermé et $SM \subset M$, et il dit que M non trivial lorsque $\{0\} \subsetneq M \subsetneq H^2$.
Une fonction $u \in H^\infty$ est dit intérieure lorsque $|u^*| = 1$, sur $\mathbb{T}$.
Le théorème classique de Beurling (voir [18]) donne une caractérisée complète des sous-espaces invariants non triviaux , sont tous de la forme $M = uH^2$, où u est une fonction intérieure (Pour plus d'informations, voir Sous-section 2.1.1).

Factorisation dans H^2.

Toute fonction $f \in H^2$ s'écrit comme $f = BSF$, où

$$B(z) = \prod_n \frac{|z_n|}{z_n} \left(\frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} \right)$$

est le produit de Blaschke avec des zéros (z_n) vérifi la condition de Blaschke

$$\sum_n (1 - |z|_n) < \infty,$$

$$S(z) = \exp\left(- \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\sigma(\zeta) \right)$$

est une fonction intérieure singulière, qui ne s'annulent pas dans $\mathbb{D}$, avec σ est une mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{T}$, singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Notons que BS est intérieure. Et

$$F(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log \varphi(\zeta) |d\zeta| \right)$$

une fonction éxtérieure, où φ est une fonction positive mésurable tel que $\log \varphi \in L^1(\mathbb{T})$.
Il existe une description complète des fonctions intérieures. En effet, toute fonction intérieure u (la réciproque restante vraie) peut se mettre sous la forme

$$u(z) = cB(z)S(z)$$

où c est un nombre complexe de module 1. Cette écriture permet notamment d'en déduire que tout produit de Blaschke est une fonction intérieure.

1.2 Opérateurs de multiplication.

Définition 1.1. *Soient E et F deux espaces de Hilbert. Soient $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires borné de E dans F, et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs linéaires borné sur l'espace E.*

(a) *$U \in \mathcal{L}(E,F)$ est appelé unitaire si $U^*U = I_E$ et $UU^* = I_F$.*

(b) *$U \in \mathcal{L}(E,F)$ est appelé isométrique (co-isométrique) si $U^*U = I_E$ ($UU^* = I_F$).*

(c) *$N \in \mathcal{L}(E)$ est appelé normal si $NN^* = N^*N$.*

(d) *$U \in \mathcal{L}(E)$ est appelé hermitien ou auto-adjoint si $U^* = U$.*

(e) *$P \in \mathcal{L}(E)$ est appelé positif (notation : $P \geq 0$) si P est auto-adjoint et si pour tout $x \in E, \langle P(x), x\rangle \geq 0$.*

(f) *Deux opérateurs $A : E \to E$ et $B : F \to F$ sont unitairement équivalents s'il existe un opérateur unitaire $U : E \to F$ tel que $A = U^*BU$.*

(g) *$U \in \mathcal{L}(E)$ est appelé opérateur cyclique s'il existe $x \in E$ (appelée vecteur cyclique pour U) tel que $E = span\{U^n x, n \geq 0\}$.*

Définition 1.2. *Soient $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ et $D(M_\varphi) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \varphi f \in L^2(\mathbb{T})\}$. On appelle opérateur de multiplication, de symbole φ sur $L^2(\mathbb{T})$ l'opérateur défini par*

$$\begin{aligned} M_\varphi : D(M_\varphi) \subseteq L^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{T}) \\ f &\longmapsto M_\varphi f = \varphi f. \end{aligned}$$

Il est clair que $D(M_\varphi)$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ puisqu'il contient l'espace des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{T}$ qui lui est dense dans $L^2(\mathbb{T})$. De plus, si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ alors M_φ est borné et $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$ en fait le théorème suivant, exposé par Arlen Brown et P. R. Halmos dans [13], montre que les seuls symboles φ pour lesquels M_φ est borné sont les fonctions bornées sur $\mathbb{T}$.

Théorème 1.1. *[13] Soient $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ et M_φ opérateur de multiplication. Alors les assertions suivantes sont satisfaites*

(i) *Les assertions suivantes sont équivalentes*

  (a) $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$

  (b) $D(M_\varphi) = L^2(\mathbb{T})$

  (c) *M_φ est borné sur $L^2(\mathbb{T})$, et $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.*

(ii) $M_\varphi^* = M_{\overline{\varphi}}$.

(iii) M_φ *est normal.*

Le théorème suivant donne la première caractérisation de l'opérateur de multiplication.

Théorème 1.2 (Brown, Halmos [13])**.** *Un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{T})$ est un opérateur de multiplication si et seulement s'il commute avec l'opérateur shift bilatère (l'opérateur de multiplication de symbole z).*

Matrices de l'opérateur de multiplication.

Chaque opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert séparable a une représentation matricielle par rapport à chaque base orthonormée de l'espace.

Définition 1.3. *[5] Si A est un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et $\{e_n\}_n$ est une base orthonormée pour $\mathcal{H}$, alors la matrice de A par rapport à la base donnée est la matrice dont la position (m,n), est $\langle Ae_n, e_m\rangle$.*

Soit φ une fonction dans $L^2(\mathbb{T})$ et notons par $\widehat{\varphi}(n)$ le n-ème coefficient de Fourier de φ tell que :

$$\widehat{\varphi}(n) = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

Théorème 1.3. *[5]. Soit φ une fonction dans $L^\infty(\mathbb{T})$ avec série de Fourier*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(n)e^{in\theta},$$

alors la matrice de M_φ par rapport à la base orthonormée $\{e^{in\theta}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ de $L^2(\mathbb{T})$ est :

$$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \widehat{\varphi}(-2) & & \\ \ddots & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \widehat{\varphi}(-2) & \\ \ddots & \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \ddots \\ & & \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

Démonstration. Pour chaque paire de nombres entiers (m,n),

$$\langle M_\varphi e_n, e_m\rangle = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})e^{in\theta}\overline{e^{im\theta}}\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})e^{-(m-n)i\theta}\frac{d\theta}{2\pi} = \widehat{\varphi}(m-n).$$

Par conséquent, la matrice de M_φ en position (m,n) est $\widehat{\varphi}(m-n)$. $\square$

Une deuxième caractérisation des opérateurs de multiplication à l'aide de leurs matrices, est donnée par le théorème suivent

Théorème 1.4 (Brown, Halmos [13])**.** *Un opérateur borné M de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui-même est un opérateur de multiplication si et seulement si sa matrice relativement à la base orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$ est une matrice de multiplication.*

1.3 Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy.

Les opérateurs de Toeplitz sont les compressions des opérateurs de multiplication au l'espace de Hardy H^2, définie comme suit.

Définition 1.4. *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, l'opérateur de Toeplitz avec le symbole φ est l'opérateur T_φ défini par*

$$\begin{aligned} T_\varphi : H^2 &\longrightarrow H^2 \\ f &\longmapsto T_\varphi f = P(\varphi f), \end{aligned}$$

où P est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2.

L'opérateur de shift S (resp. adjoint de shift S^*) est un opérateur de Toeplitz de symbole z (resp. $\overline{z}$), $S = T_z$ (resp. $S^* = T_{\overline{z}}$).
Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs de Toeplitz à l'aide de l'opérateur shift

Théorème 1.5. *[13]. Soit T un opérateur borné sur H^2, alors T est un opérateur de Toeplitz si est seulement si $S^*TS = T$.*

Le résultat suivant indique qu'il n'y a pas d'opérateur de Toeplitz compact sur l'espace Hardy sauf le cas trivial. Ceci est l'une des principales différences entre les opérateurs de Toeplitz et les opérateurs de Toeplitz tronqués (voir chapitre 2).

Proposition. 1.1. *Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors T_φ est compact si et seulement si $\varphi = 0$.*

Quelques propriétés des opérateurs de Toeplitz qui nous seront utiles sont regroupées dans la proposition suivante :

Proposition. 1.2. *Soient $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors,*

1. *Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a : $T_{\alpha\varphi+\beta\psi} = \alpha T_\varphi + \beta T_\psi$.*

2. $T_\varphi = 0$ *si et seulement si* $\varphi = 0$.
3. *L'opérateur identité* I *de* H^2 *est l'opérateur de Toeplitz de symbole* $\varphi = 1$, *et l'opérateur nul est l'opérateur de Toeplitz de symbole 0.*
4. $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$.
5. *Pour tous* $f, g \in H^2$, *on a :* $\langle M_\varphi f, g\rangle = \langle T_\varphi f, g\rangle$.
6. T_φ *est positif si et seulement si* M_φ *est positif.*
7. T_φ *est auto-adjoint si et seulement si son symbole est à valeur réelle presque partout sur* $\mathbb{T}$.

1.3.1 Produit d'opérateurs de Toeplitz dans l'espace de Hardy.

Dans cette section, nous allons donner quelque résultat sur le produit de deux opérateurs de Toeplitz. Le problème sur le produit d'opérateurs de Toeplitz a été étudié par A. Brown et P. R. Halmos dans [13].

Définition 1.5. *On dit qu'un opérateur de Toeplitz* T_φ *est analytique (respectivement anti-analytique) si* φ *est analytique bornée (respectivement anti-analytique bornée) dans* $\mathbb{D}$.

Théorème 1.6. *Soit* T_φ *est un opérateur de Toeplitz sur* H^2. T_φ *est analytique (respectivement anti-analytique) si et seulement s'il commute avec* S *(respectivement* S^**).*

Le théorème suivant dû à A. Brown et P. R. Halmos dans [13], donne une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz sur H^2 soit un opérateur de Toeplitz.

Théorème 1.7. *Soient* φ *et* ψ *deux fonctions bornées sur* $\mathbb{T}$. *Le produit* $T_\varphi T_\psi$ *est un opérateur de Toeplitz si et seulement si* φ *est anti-analytique ou si* ψ *est analytique. Si cette condition est satisfaite alors* $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$.

Quelques propriétés qui nous seront utiles sont regroupées dans la proposition suivante :

Proposition. 1.3. *Soient* φ *et* ψ *deux fonctions bornées sur* $\mathbb{T}$. *Alors,*

1. *Le produit de deux opérateurs de Toeplitz sur* H^2, *est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.*
2. *Si* T_φ *est un opérateur de Toeplitz inversible sur* H^2, *alors son inverse est un opérateur de Toeplitz si et seulement si* φ *est anti-analytique ou si* φ *est analytique.*

3. *T_φ est un opérateur de Toeplitz isométrie si et seulement si φ est analytique et de module 1.*

4. *Les seuls opérateurs de Toeplitz unitaires sont les opérateurs de multiplication par un scalaire de module 1.*

Le théorème suivant résume les résultats sur la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz dans H^2.

Théorème 1.8. *[5]. Soient $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Alors $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$ si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vraie :*

1. *φ et ψ sont toutes les deux analytiques,*

2. *φ et ψ sont toutes les deux anti-analytiques,*

3. *il existe deux constantes a et b, non tous nuls tels que $a\varphi + b\psi$ est une fonction constante.*

Le corollaire suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour les opérateurs normaux sur H^2.

Corollaire 1.4. *Les seuls opérateurs de Toeplitz normaux sont les combinaisons linéaires finies d'opérateurs de Toeplitz auto-adjoints.*

1.3.2 Matrices de Toeplitz.

Théorème 1.9. *[5]. La matrice de l'opérateur de Toeplitz avec le symbole φ par rapport à la base orthonormée $\{e^{in\theta}\}_{n=0}^{+\infty}$ de H^2 est :*

$$\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \widehat{\varphi}(-2) & \dots \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \dots \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

Le théorème suivant [13] montre que si la matrice d'un opérateur borné sur H^2 est une matrice de Toeplitz alors nécessairement cet opérateur est un opérateur de Toeplitz.

Théorème 1.10. *Tout opérateur borné sur H^2, dont la matrice dans la base orthonormée de H^2 est une matrice de Toeplitz, est un opérateur de Toeplitz.*

Exemple 1.1. *. La matrice de l'opérateur de Toeplitz analytique par rapport à la base orthonormée* $\{e^{in\theta}\}_{n=0}^{+\infty}$ *de* H^2 *donné par :*

$$\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & 0 & 0 & \dots \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & 0 & \dots \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Et pour le symbole est anti-analytique :

$$\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \widehat{\varphi}(-2) & \dots \\ 0 & \widehat{\varphi}(0) & \widehat{\varphi}(-1) & \dots \\ 0 & 0 & \widehat{\varphi}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1.4 Opérateurs de composition sur l'espace de Hardy.

Pour une fonction holomorphe φ à partir de disque unité de lui-même, $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, que nous appelons le symbole, on définit l'opérateur de composition sur H^2 par :

$$\begin{aligned} C_\varphi : H^2 &\longrightarrow H^2 \\ f &\longmapsto f \circ \varphi. \end{aligned}$$

Dans cette partie nous rappelons quelques résultats sur les opérateurs de composition sur l'espace de Hardy H^2. Le résultat suivant est de Littlewood (1925 [36]).

Théorème 1.11. *Soit* φ *une fonction holomorphe dans* $\mathbb{D}$*, alors* C_φ *est un opérateur borné dans* H^2*, et*

$$\|C_\varphi f\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}\|f\|$$

pour tout $f \in H^2$*.*

La fonction de comptage de Nevanlinna classique $N_{\varphi,1}$ de H^2 de la manière suivante :

$$N_{\varphi,1}(z) = \sum_{z=\varphi(w)} \log(1/|w|), \qquad z \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}.$$

Nous avons le lemme suivant.

Lemme 1.5. *([60]) Soit*
$$\Upsilon_s(z) = \frac{s-z}{1-\overline{s}z}$$
transforme de Möbius de $\mathbb{D}$, pour tout $s \in \mathbb{D}$, on a

$$N_{\varphi,1}(\Upsilon_s(w)) = N_{\Upsilon_s \circ \varphi,1}(w)$$

pour tout $w \in \mathbb{D}$.

La fonction de comptage classique $N_{\varphi,1}$ vérifie l'inégalité de la moyenne (voir [60]), plus précisément, nous avons :

Lemme 1.6. *Soit $\psi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ holomorphe avec $\psi(0) \neq 0$, si $0 < R < |\psi(0)|$ alors*
$$N_{\psi,1}(0) \leq \frac{1}{R^2} \int_{r\mathbb{D}} N_{\psi,1}(z) dA(z)$$

Démonstration. Supposons f une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ avec $f(0) \neq 0$. Soit (a_n) la suite des zéros de f, la formule de Jensen est
$$\sum_{n=1}^{n(r)} \log \frac{r}{|a_n|} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|, \quad 0 \leq r < 1.$$
Les termes de la somme du premier membre du l'équation sont tous positifs, alors
$$\log |f(0)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta.$$
D'où si $w \in \mathbb{D}$, alors pour $f(z) = z - w$ l'inégalité précédente devient

$$\log |w| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |re^{i\theta} - w| d\theta,$$
pour tout $0 \leq r < 1$. Par intégration sur l'intervalle $[0, R]$ par rapport à la mesure $2R^{-2}rdr$, on obtient
$$\log |z| \leq \frac{1}{R^2} \int_{R\mathbb{D}} \log |z - w| dA(w). \tag{1.1}$$
Soit
$$N_{\psi,r,1}(w) := \sum \log \frac{r}{|z_j(w)|},$$
pour tout $0 \leq r < 1$, avec $\{z_j\}$ est l'ensemble des zéros de ψ. Ensuite, la formule de Jensen pour $f = \psi - w$ est
$$N_{\psi,r,1}(w) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \log |\psi(re^{i\theta})| d\theta - \log |\psi(0)|, \quad 0 \leq r < 1.$$

Intégrons les deux membres de cette identité par rapport à la mesure de probabilité $R^{-2}dA(w)$ on obtient

$$\frac{1}{R^2}\int_{R\mathbb{D}} N_{\psi,r,1}(w)dA(w) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{R^2}\int_{R\mathbb{D}} \log|\psi(re^{i\theta})-w|dA(w)\right)d\theta - \log|\psi(0)|,$$

Utilisons l'équation 1.1 avec $z=\psi(re^{i\theta})$, on trouve pour tout $0\leq r<1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{R^2}\int_{R\mathbb{D}} N_{\psi,r,1}(w)dA(w) &\geq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\log|\psi(re^{i\theta})|d\theta - \log|\psi(0)|\\ &= N_{\psi,r,1}(0)\end{aligned}$$

La preuve est terminée en remarquant que, pour tout $w\in\mathbb{D}$

$$N_{\psi,r,1}(w)\to N_{\psi,1}(w) \quad \text{quand} \quad r\to 1.$$

$\square$

Lemme 1.7. *Soit $\varphi:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}$ holomorphe avec $\varphi(0)=0$, alors*

$$N_{\varphi,1}(z)\leq\frac{1}{R^2}\int_{D(z,R)} N_{\varphi,1}(w)dA(w)$$

pour tout disque $D(z,R)$ de centre z et de rayon R et telle que $D(z,R)\subset\mathbb{D}\setminus D(0,\frac{1}{2})$.

Démonstration. D'après le lemme 2.13 et le lemme 1.5 on a

$$\begin{aligned}N_{\varphi,1}(z)=N_{\Upsilon_z\circ\varphi,1}(0) &\leq \frac{1}{R^2}\int_{D(0,R)} N_{\Upsilon_z\circ\varphi,1}(w)dA(w)\\ &= \frac{1}{R^2}\int_{D(0,R)} N_{\varphi,1}(\Upsilon_z(w))dA(w)\end{aligned}$$

avec

$$\Upsilon_z(\varphi(0))=\frac{z-\varphi(0)}{1-\overline{z}\varphi(0)}=z$$

et $0<R<|\Upsilon_z(\varphi(0))|=|z|<1$.
On pose $\zeta=\Upsilon_z(w)$, alors $w=\Upsilon_z(\zeta)$,

$$\begin{aligned}dA(w) &= |\Upsilon_z'(\zeta)|^2dA(\zeta)\\ &= \left[\frac{(1-|z|^2)}{|1-\overline{z}\zeta|^2}\right]^2 dA(\zeta).\end{aligned}$$

Notons aussi que si $w\in D(0,R)$ alors $\zeta\in\Upsilon_z\big(D(0,R)\big)\subset D(z,R)$.
Donc

$$N_{\varphi,1}(z)\leq\frac{1}{R^2}\int_{D(z,R)} N_{\varphi,1}(\zeta)\left[\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}\zeta|^4}\right]dA(\zeta)$$

Si$|z| > 1/2 > R$ d'après Lemma 4.3.3 dans [63] on a

$$N_{\varphi,1}(z) \leq \frac{2}{R^2} \int_{D(z,R)} N_{\varphi,1}(\zeta) dA(\zeta)$$

□

On va donner le théorème de Shapiro ([60]) qui donne la condition nécessaire et suffisante sur la compacité de l'opérateur de composition sur H^2.

Théorème 1.12. *Soit φ une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$, alors C_φ est compact si et seulement si*

$$\lim_{|w|\to 1^-} \frac{N_{\varphi,1}(w)}{\log \dfrac{1}{|w|}} = 0.$$

Démonstration. 1) On suppose que

$$\lim_{|w|\to 1^-} \frac{N_{\varphi,1}(w)}{\log \frac{1}{|w|}} = 0.$$

Soit (f_n) une suite des fonctions dans H^2 qui converge uniformément vers 0 sur tout compact de $\mathbb{D}$. Il suffit de montrer que $\|C_\varphi f_n\| \to 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{|w|\to 1^-} \dfrac{N_{\varphi,1}(w)}{\log \frac{1}{|w|}} = 0$ alors il existe $0 < r < 1$ tel que

$$N_{\varphi,1}(w) < \varepsilon log \frac{1}{|w|}, \qquad r \leq |w| < 1.$$

Comme $f_n \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$, on peut choisir n_ε tel que $|f_n| < \sqrt{\varepsilon}$ sur $r\mathbb{D} \cup \{\varphi(0)\}$, chaque fois que $\forall n > n_\varepsilon$. Ainsi, pour chaque n, par la formule de changement de variable sur H^2 suivante :

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f\|^2_{H^2} &= |f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi'(z))|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) \\ &= |f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(w))|^2 N_{\varphi,1}(w) dA(w). \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f_n\|^2 &= |f_n(\varphi(0))|^2 + \int_{r\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 N_{\varphi,1}(w) dA(w) + \int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 N_{\varphi,1}(w) dA(w) \\ &< \varepsilon + \varepsilon \int_{r\mathbb{D}} N_{\varphi,1}(w) dA(w) + \int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 log \frac{1}{|w|} dA(w) \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon \int_{r\mathbb{D}} N_{\varphi,1}(w) dA(w) + \int_{\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 log \frac{1}{|w|} dA(w) \\ &= \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \|z\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} (\|f_n\|^2 - |f_n(\varphi(0))|^2) \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\|C_\varphi f_n\| \to 0$ qui montrent la compacité de C_φ sur H^2.

2) On suppose que C_φ est compact sur H^2, et on montre que $N_{\varphi,1}(w) = o(\log 1/|w|)$ quand $|w| \to 1^-$ qu'est équivalent à :

$$\lim_{|w|\to 1^-} \frac{N_{\varphi,1}(w)}{1-|w|} = 0.$$

Pour $s \in \mathbb{D}$, soit

$$f_s(z) = \frac{\sqrt{1-|s|^2}}{1-\overline{s}z}$$

le noyau reproduisant normalisé de H^2, comme $\|f_s\| = 1, \quad \forall s$, et $f_s \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$ quand $|s| \to 1^-$, on a :

$$\lim_{|s|\to 1^-} \|C_\varphi f_s\| = 0.$$

Appliquant la formule de changement de variable sur l'espace H^2 et l'inégalité de la moyenne (Lemme 4.4), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f_s\|^2 &\geq 2\int_{\mathbb{D}} |f_s'(w)|^2 N_{\varphi,1}(w)dA(w) \\
&= 2\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|s|^2)|s|^2}{|1-\overline{s}w|^4} N_{\varphi,1}(w)dA(w) \\
&= \frac{2|s|^2}{1-|s|^2}\int_{\mathbb{D}} |\Upsilon_s'(w)|^2 N_{\varphi,1}(w)dA(w).
\end{aligned}$$

Par le changement $W = \Upsilon_s(w)$ de variable et le lemme 1.5 :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f_s\|^2 &\geq \frac{2|s|^2}{1-|s|^2}\int_{\mathbb{D}} N_{\varphi,1}(\Upsilon_s(W))dA(W) \\
&= \frac{2|s|^2}{1-|s|^2}\int_{\mathbb{D}} N_{\Upsilon_s\circ\varphi,1}(W))dA(W) \\
&\geq \frac{2|s|^2}{1-|s|^2}\int_{\frac{1}{2}\mathbb{D}} N_{\Upsilon_p\circ\varphi,1}(W))dA(W).
\end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité de la moyenne, avec $\psi = \Upsilon_s \circ \varphi$ et on utilise le lemme 1.5 pour terminer l'éstimation :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi f_s\|^2 &\geq 4\frac{2|s|^2}{1-|s|^2} N_{\Upsilon_p\circ\varphi,1}(0) \\
&= \frac{8|s|^2}{1+|s|}.\frac{N_{\varphi,1}(s)}{1-|s|}.
\end{aligned}$$

On notera que dans la première ligne de l'équation précédente, l'application de l'inégalité de la moyenne le disque nécessite que $|\Upsilon_s(\varphi(0))| > \frac{1}{2}$. Mais $|\Upsilon_s(\varphi(0)| \to 1$ qaund $|s| \to 1^-$,alors cela reste vrai pour tout s Par conséquent, pour toutes ces s,

$$\|C_\varphi f_s\|^2 \geq const. \frac{N_{\varphi,1}(s)}{1-|s|}.$$

Comme la compacité de C_φ implique que $\|C_\varphi f_s\| \to 0$ quand $|s| \to 1^-$, alors la dernière inégalité donne l'estimation souhaitée de la fonction $N_{\varphi,1}$.

$\square$

1.5 Lien entre opérateurs de Toeplitz et opérateurs de composition.

Pour avoir un lien entre les opérateurs de composition et les opérateurs de Toeplitz sur H^2, nous avons besoin de la notion de mesures pull-back (voir par exemple [7, 38]).
Soit μ est une mesure de Borel sur $\mathbb{D}$, et soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est une fonction analytique. alors on peut définir une autre mesure borélienne ν sur $\mathbb{D}$ par

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \mu(\varphi^{-1}(E)), \\ &= \int_E N_{\varphi,1}(z)dA(z), \quad E \subset \mathbb{D}. \end{aligned}$$

On note cette nouvelle mesure ν par $\mu \circ \varphi^{-1}$ et on appelle la mesure pull-back de μ induite par φ.
Un opérateur naturel est défini sur H^2 par

$$T_\mu f(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z)d\mu(z)}{1-\overline{z}w} \tag{1.2}$$

Soit C_φ est un opérateur de composition sur H^2, alors $C_\varphi^* C_\varphi$ est un opérateur sur H^2, et nous avons

$$\begin{aligned} C_\varphi^* C_\varphi f(w) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\varphi(z))}{1-\overline{\varphi(z)}w} d\nu(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z)d\mu(z)}{1-\overline{z}w} \\ &= T_\mu f(w). \end{aligned}$$

En d'autres termes, C_φ est borné (ou compact) sur H^2 si et seulement si T_μ est borné (ou compact) sur H^2.

Chapitre 2

Opérateurs de Toeplitz tronqués.

2.1 Préliminaires.

2.1.1 Espaces modèles.

Le but premier de cette section est de rappeler la définition et les propriétés de l'espace modèle (voir par exemple [39, 29]). On utilise ce théorème de Beurling (en 1948 dans [12]) pour décrire les sous-espaces invariants par le shift S, et l'adjoint de shift S^*.

Théorème 2.1. *1. Un sous-espace fermé M de H^2 tels que $M \subsetneqq H^2$ est invariant par le shift S si et seulement si M est de la forme :*

$$M := uH^2 = \{uf, f \in H^2\}.$$

où u est une fonction intérieure.

2. Les sous-espaces fermés Y de H^2 tels que $Y \subsetneqq H2$ invariants par S^* sont de la forme

$$Y = (uH^2)^\perp = H^2 \ominus uH^2 = \{f \in H^2, \langle f, ug\rangle, \forall g \in H^2\} \tag{2.1}$$

où u est une fonction intérieure. Réciproquement tous les espaces de la forme (2.1) sont S^*-invariants.

Dans la suite de cette thèse on désignera par K_u le sous espace modèle $H^2 \ominus uH^2$.

Proposition. 2.1. *Pour chaque fonction intérieure u, l'espace modèle K_u c'est l'ensemble des fonctions $f \in H^2$ telles que $f = u\overline{zg}$ presque partout sur $\mathbb{T}$, pour quelque $g \in H^2$. Autrement dit, on a :*

$$K_u = H^2 \cap u\overline{zH^2}. \tag{2.2}$$

où le côté droit est considéré comme un ensemble de fonctions sur $\mathbb{T}$.

Démonstration. Soit $f \in H^2$, alors

$$\begin{aligned} f \in H^2 \ominus uH^2 &\Leftrightarrow f \perp uH^2 \\ &\Leftrightarrow \overline{u}f \perp H^2 \quad \text{car } |u| = 1, \quad \text{p.p sur } \mathbb{T} \\ &\Leftrightarrow z\overline{u}f \perp zH^2 \\ &\Leftrightarrow z\overline{u}f \in \overline{H^2} \\ &\Leftrightarrow f \in u\overline{zH^2}, \end{aligned}$$

donc, il existe une fonction $g \in H^2$ tel que $f = u\overline{zg}$. □

Lemme 2.2. *[39] Soit u une fonction intérieure, alors $\dim K_u < \infty$ si est seulement si u est un produit de Blaschke d'ordre fini.*

2.1.2 Noyau reproduisant de K_u.

L'espace modèle est un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert à noyau reproduisant H^2 pour chaque fonction intérieure u non constante, l'espace modèle K_u possède un noyau reproduisant. Dans cette section, nous allons identifier ces noyaux et leurs propriétés de base. Dans [29, 39] contient plus d'informations sur le noyau reproduisant de K_u.
Rappelons que les noyaux $k_\lambda = (1-\overline{\lambda}z)^{-1}$ sont les noyaux reproduisant de l'espace de Hardy (voir chapitre 1).
Si $f = uh$ dans uH^2, alors

$$f(\lambda) = u(\lambda)h(\lambda) = u(\lambda)\langle h, k_\lambda\rangle = u(\lambda)\langle f\overline{u}, k_\lambda\rangle = \langle f, \overline{u(\lambda)}uk_\lambda\rangle$$

d'où il résulte que le noyau reproduisant pour uH^2 donné par

$$\overline{u(\lambda)}uk_\lambda(z) = \frac{\overline{u(\lambda)}u(z)}{(1-\overline{\lambda}z)}, \quad \lambda \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{T}.$$

Si $f \in K_u$, alors nous avons

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \langle f, k_\lambda\rangle \\ &= \langle f, k_\lambda\rangle - u(\lambda)\langle f, uk_\lambda\rangle \\ &= \langle f, (1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda\rangle. \end{aligned}$$

De plus, la fonction $(1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda$ dans K_u, puisque

$$\begin{aligned}\langle uh,(1-\overline{u(\lambda)}u)k_\lambda\rangle &= u(\lambda)h(\lambda)-u(\lambda)\langle uh,uk_\lambda\rangle\\ &= u(\lambda)h(\lambda)-u(\lambda)\langle h,k_\lambda\rangle\\ &= u(\lambda)h(\lambda)-u(\lambda)h(\lambda)\\ &= 0,\end{aligned}$$

pour toute $h\in H^2$, donc il existe dans K_u une unique fonction, notée k_λ^u telle que :

$$f(\lambda)=\langle f,k_\lambda^u\rangle,\qquad f\in K_u$$

où

$$k_\lambda^u(z)=\frac{1-\overline{u(\lambda)}u(z)}{(1-\overline{\lambda}z)},\quad \lambda\in\mathbb{D},z\in\mathbb{T}. \tag{2.3}$$

La fonction k_λ^u est appelée le noyau reproduisant pour K_u. Et on note h_λ^u le noyau reproduisant normalisé,

$$h_\lambda^u(z)=\sqrt{\frac{1-|\lambda|^2}{1-|u(\lambda)|^2}}k_\lambda^u(z). \tag{2.4}$$

En-effet : soit $\lambda\in\mathbb{D}$, on a

$$\|h_\lambda^u\|^2=\langle h_\lambda^u,h_\lambda^u\rangle=\frac{1-|\lambda|^2}{1-|u(\lambda)|^2}\langle k_\lambda^u,k_\lambda^u\rangle=\frac{1-|\lambda|^2}{1-|u(\lambda)|^2}k_\lambda^u(\lambda)=1.$$

Exemple 2.1. *Si $u(z)=z^n$, alors*

$$k_\lambda^u(z)=\frac{1-\overline{\lambda}^nz^n}{1-\overline{\lambda}z}=1+\overline{\lambda}z+\overline{\lambda}^2z^2+...+\overline{\lambda}^{n-1}z^{n-1}.$$

Soient M_u et $M_{\overline{u}}$ les opérateurs de multiplication par u et $\overline{u}$ respectivement, la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u^2, P_u donné par

$$P_u=P-M_uPM_{\overline{u}}. \tag{2.5}$$

Proposition. 2.3. *Soit $f\in L^2(\mathbb{T})$, alors*

$$P_uf(\lambda)=\langle f,k_\lambda^u\rangle,\quad \lambda\in\mathbb{D}. \tag{2.6}$$

Démonstration. Nous avons P_u est un auto-adjoint, alors

$$\langle f,k_\lambda^u\rangle=\langle f,P_uk_\lambda^u\rangle=\langle P_uf,k_\lambda^u\rangle=P_uf(\lambda).$$

□

D'après l'égalité (2.6), l'opérateur P_u est donné par l'intégrale

$$(P_uf)(\lambda)=\int_{\mathbb{T}}f(\zeta)\frac{1-u(\lambda)\overline{u(\zeta)}}{1-\overline{\zeta}\lambda}dm(\zeta),\quad z\in\mathbb{D},\quad f\in L^2(\mathbb{T}),$$

qui utilisé pour estimer ou à contrôler le comportement de P_u.

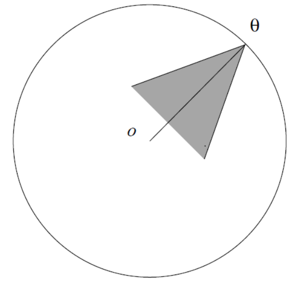

FIGURE 2.1 – Limites non-tangentielles.

Définition 2.1. 1. *(Théorème de convergence non-tangentielle de Fatou [25]). Une fonction f analytique sur $\mathbb{D}$ admet une limite non-tangentielle l au point $\omega \in \mathbb{T}$ si pour tout $\theta > 0$, $f(z) \to l$ quand $z \to \omega$ sur toute région non-tangentielle $\Gamma_\theta(\omega) = \{z \in \mathbb{D} : |z - \omega| < \theta(1 - |\theta|)\}$, on note cette limite par $z \xrightarrow{non-tangentielle} \omega$ (voir figure 2.1).*

2. *Pour une fonction intérieure u et un point $\eta \in \mathbb{T}$, on dit que u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory (ADC) en η, si les limites non-tangentielles de u et u' existe en η, et $|u(\eta)| = 1$.*

Le théorème suivant donne plusieurs caractérisations utiles de ADCs.

Théorème 2.2 (Ahern-Clark [2]). *Pour une fonction intérieure $u = b_\Lambda s_\mu$, avec b_Λ est un produit de Blaschke avec des zéros $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, répété selon multiplicité, s_μ est une fonction intérieure singulière avec mesure singulière correspondante μ, et $\eta \in \mathbb{T}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout $f \in K_u$ a une limite non-tangentielle en η.*
2. *Pour tout $f \in K_u$, $f(\lambda)$ est borné en $\lambda \to \eta$ non-tangentielle.*
3. *u a un ADC en η.*
4. *La fonction*

$$k_\eta^u(z) = \frac{1 - \overline{u(\eta)}u(z)}{1 - \overline{\eta} z}, \tag{2.7}$$

dans H^2.

5. *L'assertion suivante est satisfaite*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 - |\lambda_n|^2}{|\eta - \lambda_n|^2} + \int_{\mathbb{T}} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi - \eta|^2} < \infty. \tag{2.8}$$

2.1.3 Opérateurs complexes symétriques.

Nous rappelons d'abord quelques faits basiques qui sont issus de [27, 28, 30]. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert.

Définition 2.2 (Conjugaison)**.** *On dit qu'un opérateur C sur $\mathcal{H}$ est un opérateur de conjugaison (ou simplement une conjugaison) si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *C est opérateur antilinéaire, c'est-à-dire*

$$C(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha} Cf + \overline{\beta} Cg$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $f, g \in \mathcal{H}$.

2. *$\langle Cf, Cg \rangle = \langle g, f \rangle$, pour tout $f, g \in \mathcal{H}$.*
3. *C est involutif, c'est-à-dire $C^2 = Id$.*

Définition 2.3 (Opérateur complexe symétrique)**.** *Soit C un opérateur de conjugaison sur $\mathcal{H}$.*

1. *On dit qu'un opérateur linéaire A sur $\mathcal{H}$ est C-symétrique (resp. C-antisymétrique) si $A = CA^*C$ (resp. $-A = CA^*C$).*
2. *On dit qu'un opérateur linéaire A sur $\mathcal{H}$ est complexe-symétrique s'il existe une conjugaison C sur $\mathcal{H}$ telle que A est C-symétrique.*

L'espace modèle K_u possède une conjugaison naturelle C définie en terme de fonction au bord, c'est-à-dire $C : K_u \longrightarrow K_u$ tel que

$$[Cf](\zeta) := \overline{f(\zeta)\zeta} u(\zeta). \tag{2.9}$$

On note $\widetilde{f}$ le conjugué de f sur K_u, c'est-à-dire $\widetilde{f} = Cf$.

Proposition. 2.4. *1. Pour chaque $\lambda \in \mathbb{D}$ et $z \in \mathbb{T}$, on a*

$$\widetilde{k_\lambda^u}(z) = \frac{u(z) - u(\lambda)}{z - \lambda}. \tag{2.10}$$

En particulier,

$$\widetilde{k_0^u}(z) = \frac{u(z) - u(0)}{z} = S^* u.$$

2. Si u admet une ADC en un point $\eta \in \mathbb{T}$, alors

$$\widetilde{k_\eta^u}(z) = \frac{u(z) - u(\eta)}{z - \eta}. \tag{2.11}$$

Démonstration. (1). Soient $\lambda \in \mathbb{D}$ et $z \in \mathbb{T}$, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{k_\lambda^u}(z) &= u(z)\overline{z k_\lambda^u(z)} \\ &= \overline{z} u(z) \frac{1 - u(\lambda)\overline{u(z)}}{1 - \lambda \overline{z}} \\ &= \frac{u(z) - u(\lambda)}{z - \lambda}. \end{aligned}$$

(2). Soit u admet une ADC au point $\eta \in \mathbb{T}$, d'après Théorème 2.2, $\widetilde{k_\lambda^u}$ admet une limite non-tangentielle en η, donc pour $\lambda \xrightarrow{non-tangentielle} \eta$, on peut replacer λ par η dans la relation (2.10). $\square$

Exemple 2.2. *1. Si $u(z) = z^n$ alors*

$$K_{z^n} = span\{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\} = \{\sum_{k\geq 0}^{n-1} a_k z^k, a_k \in \mathbb{C}\}.$$

Alors la conjugaison C sur K_u prend la forme

$$C(\sum_{k\geq 0}^{n-1} a_k z^k) = \overline{a_0} z^{n-1} + \overline{a_1} z^{n-2} + ... + \overline{a_{n-1}}.$$

2. Si u est un produit de Blaschke avec les zéros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, comptés avec leur ordre de multiplicité,

$$u(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z - \lambda_j}{1 - \overline{\lambda_j} z},$$

alors $\dim K_u = n$ *et*

$$K_u = \left\{ \frac{\sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j}{\prod_{j=1}^{n}(1 - \overline{\lambda_j} z)} : a_j \in \mathbb{C} \right\}. \tag{2.12}$$

d'après (2.12), la conjugaison C, (2.9), sur K_u prend la forme

$$C\left(\frac{\sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j}{\prod_{j=1}^{n}(1 - \overline{\lambda_j} z)} \right) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \overline{a_{n-1-j}} z^j}{\prod_{j=1}^{n}(1 - \overline{\lambda_j} z)}.$$

2.1.4 Produit tensoriel.

Nous allons rappeler la définition et les propriétés élémentaires du produit tensoriel.

Définition 2.4. *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable, $f, g \in \mathcal{H}/\{0\}$ alors on définit l'opérateur borné de rang 1, $f \otimes g$ par :*

$$\begin{aligned} f \otimes g : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathcal{H} \\ h &\longmapsto f \otimes g(h) = \langle h, g \rangle f. \end{aligned}$$

L'image de $f \otimes g$ est le sous-espace de dimension 1, $\mathbb{C}f$.

On peut voir réciproquement que tout opérateur A de rang 1 a la forme $f \otimes g$ pour certains vecteurs $f, g \in \mathcal{H}$. En effet, comme ImA est de dimension 1, pour $f \in ImA$ non nul, $ImA = \mathbb{C}f$. Pour tout $h \in \mathcal{H}$, il existe $c_h \in \mathbb{C}$ tel que $Ah = c_h f$ et la forme linéaire $h \in \mathcal{H} \mapsto c_h$ est continue, par continuité de $f \otimes g$. Le Théorème de Riesz assure l'existence de $g \in \mathcal{H}$ tel que $c_h = \langle h, g \rangle$, et alors pour $h \in \mathcal{H}$, $Ah = \langle h, g \rangle f = f \otimes g(h)$.

Proposition. 2.5. *On a les propriétés suivantes : pour tout $f, f_1, g, g_1 \in \mathcal{H}$ éventuellement non nuls, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$,*

1. $A(f \otimes g) = (Af \otimes g)$ *et* $(f \otimes g)A = (f \otimes A^* g)$.
2. $(f \otimes g)(f_1 \otimes g_1) = \langle f_1, g\rangle (f \otimes g_1)$.
3. $(\alpha f + \beta f_1) \otimes g = \alpha(f \otimes g) + \beta(f_1 \otimes g)$ *et* $f \otimes (\alpha g + \beta g_1) = \overline{\alpha}(f \otimes g) + \overline{\beta}(f \otimes g_1)$.
4. $Ker(f \otimes g) = (\mathbb{C}g)^{\perp}$ *et* $Im(f \otimes g) = \mathbb{C}f$.
5. $(f \otimes g)^* = (g \otimes f)$.
6. $(f \otimes g) = (f_1 \otimes g_1)$ *avec* f, f_1, g, g_1 *tous non nuls, si et seulement si il existe* $\gamma, \lambda \in \mathbb{C}$ *tel que* $f = \gamma f_1, g = \lambda g_1$ *et* $\overline{\lambda}\gamma = 1$.

2.1.5 Calcul fonctionnel pour opérateurs bornés.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$. Pour une fonction entière $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

avec le rayon de convergence R, et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, puisque $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est complète par rapport à la norme de l'opérateur, l'opérateur $f(A)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est correctement définie par

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n.$$

La transformation $f \mapsto f(A)$, est appelle un calcul fonctionnel, induise un homomorphisme d'algèbre de l'algèbre des fonctions entières à l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. L'opérateur $f(A)$ défini précédemment possède les propriétés dans le théorème suivant :

Théorème 2.3. *Soit* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$

1. $\overline{f}(A) = f(A)^*$.
2. $1(A) = I$ *et* $(z)(A) = A$.
3. *l'opérateur* $f(A)$ *commute avec* A*, de plus il commute avec tout opérateur linéaire borné sur* $\mathcal{H}$ *qui commute avec* A.
4. $(af + bg)(A) = af(A) + bg(T)$ *pour* a, b *réels.*
5. $(fg)(A) = f(A)g(A) = g(A)f(A)$.
6. *pour tout* $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *unitaire, on a* $f(UAU^{-1}) = Uf(A)U^{-1}$.

2.2 Opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle.

Nous allons maintenant rappeler de nombreux résultats classiques sur les opérateurs de Toeplitz tronqués. Ils sont des compressions des opérateurs de multiplication sur l'espace modèle K_u. Les opérateurs de Toeplitz tronqués ont été formellement introduits par Sarason dans [51]. Récemment il y a deux thèses, F. Korrichi [34] et F. R. Randriamahaleo [48], concerne ces opérateurs. Dans toute la suite, on fixe u comme étant une fonction intérieure. les compressions de S et S^* sur K_u^2 sont notées respectivement par S_u et S_u^* c'est-à-dire.

$$S_u = S|_{K_u}, \quad S_u^* = S^*|_{K_u}.$$

Ces deux opérateurs jouent des rôles cruciaux dans la théorie des opérateurs de Toeplitz tronqués. Comme chaque noyau reproduisant de (2.3) est analytique borné et $span\{k_\lambda^u, \lambda \in \mathbb{D}\}$ (le sous-espace vectoriel fermé engendré par k_λ^u) est dense dans K_u, il s'ensuit que $K_u \cap H^\infty := K_u^\infty$ est dense dans K_u.

Définition 2.5. *L'opérateur de Toeplitz tronqué de symbole $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ sur K_u^∞ est défini par :*

$$\begin{aligned} A_\varphi^u : K_u^\infty &\longrightarrow K_u^\infty \\ f &\longmapsto A_\varphi^u(f) = P_u(\varphi f), \end{aligned}$$

avec P_u est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur K_u.

Pour $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ et $f \in K_u$, on définit par la densité $A_\varphi^u f = P_u(\varphi f)$ (ou peut-être prolongé en un opérateur borné sur K_u), c'est-à-dire si $f \in K_u$, on peut trouver $(f_n)_n \subset K_u^\infty$ tel que $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ et $P_u(\varphi f) = \lim_{n\to\infty} P_u(\varphi f_n)$.

Exemple 2.3. *Les opérateurs S_u et S_u^* sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole respectif z et $\overline{z}$. c'est-à-dit,*

$$S_u = A_z^u \quad et \qquad S_u^* = A_{\overline{z}}^u.$$

Définition 2.6. *$\mathcal{T}_u$ l'ensemble de tous les opérateurs de Toeplitz tronqués bornés sur K_u.*

Les opérateurs de Toeplitz tronqués vérifient les propriétés immédiates suivantes.

Proposition. 2.6. *Soient $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{T})$ telles que $A_\varphi^u, A_\psi^u \in \mathcal{T}_u$. Alors*

1. *Pour tous nombres complexes a et b, $A_{a\varphi+b\psi}^u = aA_\varphi^u + bA_\psi^u$.*
2. *$(A_\varphi^u)^* = A_{\overline{\varphi}}^u$.*

Le résultat suivant montre que les opérateurs de Toeplitz tronqués bornés ($\in \mathcal{T}_u$) sont C-symétriques.

Lemme 2.7. *[30]. Les opérateurs dans $\mathcal{T}_u$ sont C-symétriques.*

Démonstration. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ avec A^u_φ est borné. Pour $f \in K_u^\infty$ et $g \in K_u$ on a

$$\begin{aligned}
\langle CA^u_\varphi Cf, g\rangle &= \langle Cg, A^u_\varphi Cf\rangle \\
&= \int_{\mathbb{T}} u(\zeta)\overline{\zeta g(\zeta)\varphi(\zeta)u(\zeta)}\zeta f(\zeta)dm(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \overline{\varphi(\zeta)}f(\zeta)\overline{g(\zeta)}dm(\zeta) \\
&= \langle A^u_{\overline{\varphi}}f, g\rangle \\
&= \langle (A^u_\varphi)^* f, g\rangle.
\end{aligned}$$

Puisque K_u^∞ est dense dans K_u, on a le résultat. □

La réciproque de ce résultat est fausse en général. Par exemple, Sarason a montré dans [51] que si $\dim K_u > 2$, il y a des opérateurs de rang 1 sur K_u qui sont C-symétriques mais qui ne sont pas des opérateurs de Toeplitz tronqués.

Lemme 2.8. *[51].*

1. *Si $\lambda \in \mathbb{D}$, alors*

$$S_u^* k_\lambda^u = \overline{\lambda} k_\lambda^u - \overline{u(\lambda)}\widetilde{k_0^u}, \quad S_u\widetilde{k_\lambda^u} = \lambda\widetilde{k_\lambda^u} - u(\lambda)k_0^u. \tag{2.13}$$

2. *Si $\lambda \in \mathbb{D}/\{0\}$, alors*

$$S_u k_\lambda^u = \frac{1}{\overline{\lambda}}(k_\lambda^u - k_0^u), \quad S_u^*\widetilde{k_\lambda^u} = \frac{1}{\lambda}(\widetilde{k_\lambda^u} - \widetilde{k_0^u}). \tag{2.14}$$

3. *Si u admet une ADC au point $\eta \in \mathbb{T}$, les relations (2.13) et (2.14) sont vraies si on replace λ par η.*

Démonstration. (1). Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. Pour la première égalité, nous avons

$$\begin{aligned}
S_u^* k_\lambda^u &= P_u(S^* k_\lambda^u) \\
&= S^* k_\lambda^u \\
&= S^*(1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda \\
&= (1 - \overline{u(\lambda)}u)S^* k_\lambda + k_\lambda(0)S^*(1 - \overline{u(\lambda)}u),
\end{aligned}$$

puisque

$$S^*k_\lambda(z) = \frac{k_\lambda(z) - k_\lambda(0)}{z} = \overline{\lambda}k_\lambda(z),$$

et

$$S^*(1 - \overline{u(\lambda)}u(z)) = \frac{1 - \overline{u(\lambda)}u(z) - 1 + \overline{u(\lambda)}u(0)}{z} = -\overline{u(\lambda)}S^*u(z),$$

donc,

$$\begin{aligned} S_u^*k_\lambda^u &= \overline{\lambda}(1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda(z) - \overline{u(\lambda)}S^*u \\ &= \overline{\lambda}k_\lambda^u(z) - \overline{u(\lambda)}\widetilde{k_0^u}. \end{aligned}$$

Comme $S_u \in \mathcal{T}_u$ est C-symétrique, donc nous obtenons la deuxième égalité en appliquant l'opérateur C à la première égalité :

$$\begin{aligned} S_u\widetilde{k_\lambda^u} &= CS_u^*CCk_\lambda^u \\ &= CS_u^*k_\lambda^u \\ &= \lambda\widetilde{k_\lambda^u} - u(\lambda)k_0^u. \end{aligned}$$

(2). Soit $\lambda \in \mathbb{D}/\{0\}$, pour la première égalité, nous avons

$$S_uk_\lambda^u = P_uSk_\lambda^u = P_uS((1 - \overline{u(\lambda)}u)k_\lambda) = P_uSk_\lambda.$$

Comme

$$Sk_\lambda(z) = \frac{z}{1 - \overline{\lambda}z} = \frac{1}{\overline{\lambda}}(\frac{1}{1 - \overline{\lambda}z} - 1) = \frac{1}{\overline{\lambda}}(k_\lambda(z) - 1),$$

on a

$$S_uk_\lambda^u = \frac{1}{\overline{\lambda}}P_u(k_\lambda(z) - 1) = \frac{1}{\overline{\lambda}}(k_\lambda^u - k_0^u).$$

Pour la deuxième égalité, en appliquant l'opérateur C à la première égalité :

$$S_u^*\widetilde{k_\lambda^u} = CS_uk_\lambda^u = \frac{1}{\lambda}(\widetilde{k_\lambda^u} - \widetilde{k_0^u}).$$

(3). Soit u admet une ADC au point $\eta \in \mathbb{T}$, d'après Théorème 2.2, k_λ^u admet une limite non-tangentielle en η, donc pour $\lambda \xrightarrow{non-tangentielle} \eta$, on peut replacer λ par η dans les relations (2.13) et (2.14). □

Lemme 2.9. *[51].*

$$I - S_uS_u^* = k_0^u \otimes k_0^u, \tag{2.15}$$

et

$$I - S_u^*S_u = \widetilde{k_0^u} \otimes \widetilde{k_0^u} \tag{2.16}$$

Démonstration. Pour la première égalité, soit $f \in K_u \cap (k_0^u)^\perp$, c'est-à-dire $\langle f, k_0^u \rangle = f(0) = 0$, nous avons $S_u^* = S^*/K_u$, donc

$$(I - S_u S_u^*)f = f - S_u(\frac{f}{z}) = 0,$$

d'où $I - S_u S_u^*$ est un opérateur de rang 1 ($(I - S_u S_u^*)g = ck_0^u, \forall g \in K_u$), et comme $I - S_u S_u^*$ est un opérateur auto-adjoint alors $I - S_u S_u^* = c(k_0^u \otimes k_0^u)$. Pour déterminer le scalaire, on va appliquer le lemme 2.8 (avec $\lambda = 0$) :

$$\begin{aligned}(I - S_u S_u^*)k_0^u &= k_0^u + \overline{u(0)} S_u \widetilde{k_0^u} \\ &= (1 - |u(0)|^2)k_0^u \\ &= \|k_0^u\|^2 k_0^u \\ &= \langle k_0^u, k_0^u \rangle k_0^u \\ &= (k_0^u \otimes k_0^u)k_0^u.\end{aligned}$$

D'où le scalaire est 1.

Nous obtenons la deuxième égalité en appliquant l'opérateur C à la première égalité :

$$\begin{aligned}C(I - S_u S_u^*)C = k_0^u \otimes k_0^u \quad &\Leftrightarrow \quad C^2 - CS_u S_u^* C = Ck_0^u \otimes C^* k_0^u \\ &\Leftrightarrow \quad I - CS_u CCS_u^* C = \widetilde{k_0^u} \otimes \widetilde{k_0^u} \\ &\Leftrightarrow \quad I - S_u^* S_u = \widetilde{k_0^u} \otimes \widetilde{k_0^u}.\end{aligned}$$

□

En contraste avec l'opérateur de Toeplitz défini sur l'espace de Hardy, le symbole d'un opérateur de Toeplitz tronqué n'est pas unique. Dans le théorème suivant nous donnons un opérateur de Toeplitz tronqué qui a plus qu'un seul symbole.

Théorème 2.4. *[51]. Si $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, alors $A_\varphi^u = 0$ si et seulement si $\varphi \in uH^2 + \overline{uH^2}$.*

nous donnons un exemple très simple suivent, pour un opérateur de Toeplitz tronqué n'a pas un symbole unique.

Exemple 2.4. $I = A_1^u = A_{k_0^u}^u = A_{\overline{k_0^u}}^u$.

En effet, soit $f \in K_u$. Alors $A_1^u f = P_u f = f$. Et $A_1^u - A_{k_0^u}^u = A_{\overline{u(0)}u}^u = 0$ car $u(0)u \in uH^2$, et nous avons $A_{\overline{k_0^u}}^u = (A_{k_0^u}^u)^* = I$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur borné sur K_u est un opérateur de Toeplitz tronqué.

Théorème 2.5. *[51].*
Un opérateur A borné sur K_u appartient à $\mathcal{T}_u$ si, et seulement si, il existe $\varphi_1, \varphi_2 \in K_u$ tels que :

$$A - S_u A S_u^* = \varphi_1 \otimes k_0^u + k_0^u \otimes \varphi_2. \tag{2.17}$$

Dans ce cas, $A = A^u_{\varphi_1 + \overline{\varphi_2}}$.

Remarque 2.1. *En appliquant l'opérateur de conjugaison C à la relation (2.17), on a la caractérisation équivalente : un opérateur A borné sur K_u est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement s'il existe deux fonctions $\varphi_1, \varphi_2 \in K_u$ tels que*

$$A - S_u^* A S_u = \varphi_1 \otimes \widetilde{k_0^u} + \widetilde{k_0^u} \otimes \varphi_2. \tag{2.18}$$

Dans ce cas, $A = A^u_{\widetilde{\varphi_2} + \overline{\widetilde{\varphi_1}}}$.

Le lemme suivant donne les résultats sur la commutativité avec les opérateurs de Toeplitz tronqués et les shifts sur K_u.

Lemme 2.10. *Si $\varphi \in K_u$, alors A^u_φ commute avec S_u et $A^u_{\overline{\varphi}}$ commute avec S_u^*.*

Démonstration. Remarquons que l'opérateur de Toeplitz tronqué A^u_φ est la compression sur K_u de l'opérateur de Toeplitz usuel T_φ. On a deux cas à considérer :

1. Si T_φ est borné sur H^2, d'après le Théorème 1.6, T_φ commute avec S car $\varphi \in K_u \subset H^2$, donc A^u_φ commute avec S_u. Et en passant aux opérateurs adjoints, on vérifie de la même manière que $A^u_{\overline{\varphi}}$ commute avec S_u^*.
2. Si T_φ n'est pas borné sur H^2, on peut avoir la commutativité sur les noyaux reproduisant qui sont denses dans H^2.

$\square$

Définition 2.7. *Pour deux fonctions $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{T})$, on note $\varphi \overset{\mathrm{A}}{\equiv} \psi$ si $A^u_\varphi = A^u_\psi$.*

Proposition. 2.11. *Soient φ_1 et φ_2 dans K_u. Alors $A^u_{\varphi_2 + \overline{\varphi_1}} = 0$ si et seulement si $\varphi_1 = c k_0^u$ et $\varphi_2 = -\bar{c} k_0^u$ avec $c \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. Soient $\varphi_1 = c k_0^u$ et $\varphi_2 = -\bar{c} k_0^u$, alors

$$A^u_{\varphi_2 + \overline{\varphi_1}} = A^u_{c(k_0^u + \overline{k_0^u})} = A^u_{c(\overline{u(0)}u + u(0)\overline{u})}$$

Comme $c(\overline{u(0)}u + u(0)\overline{u}) \in uH^2 + \overline{uH^2}$, d'après le théorème (2.4) on a $A^u_{\varphi_2 + \overline{\varphi_1}} = 0$.
Supposons maintenant $A^u_{\varphi_2 + \overline{\varphi_1}} = 0$, d'après la relation (2.17), on a

$$A^u_{\varphi_2 + \overline{\varphi_1}} - S_u A^u_{\varphi_2 + \overline{\varphi_1}} S_u^* = 0 = \varphi_1 \otimes k_0^u + k_0^u \otimes \varphi_2.$$

C'est-à-dire $\varphi_1 \otimes k_0^u = -k_0^u \otimes \varphi_2$. Et par le (6). de la proposition (2.5), il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $\varphi_1 = ck_0^u$ et $\varphi_2 = -\bar{c}k_0^u$. □

Théorème 2.6. *[51]. Si* $\dim K_u = n$, *alors*

(i) $\dim \mathcal{T}_u = 2n - 1$.

(ii) Si $\lambda_1, ..., \lambda_{2n-1}$ *sont des points distincts de* $\mathbb{D}$, *alors les opérateurs* $k_{\lambda_j}^u \otimes \widetilde{k_{\lambda_j}^u}, j = 1, ..., 2n-1$ *est une base de* $\mathcal{T}_u$.

2.2.1 Opérateurs de Toeplitz tronqués de rang fini.

Le théorème suivant de Sarason [51], donne la caractérisation d'opérateurs de Toeplitz tronqué de rang 1.

Théorème 2.7. *(i) Pour tout* $\lambda \in \mathbb{D}$, *les opérateurs* $k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u}$ *et* $\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$ *sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole respectif* $\frac{\overline{u}}{\overline{z-\lambda}}, \frac{u}{z-\lambda}$.

(ii) Si $\eta \in \mathbb{T}$ *et* u *admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en* η, *l'opérateur* $k_\eta^u \otimes k_\eta^u$ *est un opérateur de Toeplitz tronqué de symbole* $k_\eta^u + \overline{k_\eta^u} + 1$.

(iii) Les seuls opérateurs de Toeplitz tronqués non nul de rang 1 sont des multiples des opérateurs dans (i) et (ii).

Pour $n \in \mathbb{N}$, Sarason ([51]) et Bessonov ([10]) ont donnés la caractérisation d'opérateurs de Toeplitz tronqué de rang n.

Théorème 2.8. *(i) [51]. Soient* $\lambda \in \mathbb{D}$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *les opérateurs*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{d^j \widetilde{k_\lambda^u}}{d\lambda^j} \otimes \frac{d^{n-j-1} k_\lambda^u}{d\overline{\lambda}^{n-j-1}} \right) \tag{2.19}$$

et

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{d^j k_\lambda^u}{d\overline{\lambda}^j} \otimes \frac{d^{n-j-1} \widetilde{k_\lambda^u}}{d\lambda^{n-j-1}} \right) \tag{2.20}$$

sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de rang n *avec symbole respectif* $\frac{(n-1)!u}{(z-\lambda)^n}, \frac{(n-1)!\overline{u}}{\overline{z-\lambda}^n}$.

(ii) [51]. Si $\eta \in \mathbb{T}$ *et* u *admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en* η, *l'opérateur*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{d^j \widetilde{k_\eta^u}}{d\eta^j} \otimes \frac{d^{n-j-1} k_\eta^u}{d\overline{\eta}^{n-j-1}} \right) \tag{2.21}$$

et son adjoint sont des opérateurs de Toeplitz tronqués de rang n.

(iii) [10]. Tout opérateur de Toeplitz tronqué de rang n *est une combinaison linéaire finie des opérateurs définis dans (2.19) et (2.20).*

2.2.2 Opérateurs et mesures de Clark.

En 1972, Clark [16] a introduit les opérateurs unitaires de Clark et mesures de Clark.

Définition 2.8. *Soit $\alpha \in \mathbb{T}$. L'opérateur de Clark sur K_u est défini par*

$$U_\alpha = S_u + \frac{\alpha}{1-\alpha\overline{u(0)}} k_0^u \otimes \widetilde{k_0^u}. \tag{2.22}$$

Un résultat de Clark [16] affirme que U_α est un opérateur cyclique unitaire. Réciproquement, chaque opérateur unitaire S_u qui perturbe par un opérateur de rang 1, est de la forme (2.22).

Mesures de Clark.

Voir [16, 46] pour plus de détails. Si $\alpha \in \mathbb{T}$, alors

$$Re(\frac{\alpha+u}{\alpha-u})$$

est une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$ et ainsi, par le théorème Herglotz [[18], p. 2], il existe une mesure positive finie μ_α sur $\mathbb{T}$ avec

$$Re\frac{1+\overline{\alpha}u(z)}{1-\overline{\alpha}u(z)} = \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\mu_\alpha(\zeta).$$

La famille de mesures $\{\mu_\alpha, \alpha \in \mathbb{T}\}$ obtenu de cette manière sont appelés les mesures de Clark pour u. La théorie de Clark donne aussi une représentation spectrale pour U_α via la mesure de Clark μ_α suivante.

Théorème 2.9. *(Clark [16]). Pour une fonction intérieure u avec $u(0) = 0$, Soit μ_α a unique mesure de Borel positive finie sur $\mathbb{T}$ satisfaisant*

$$\frac{1+\overline{\alpha}u(z)}{1-\overline{\alpha}u(z)} = \int \frac{\zeta+z}{\zeta-z} d\mu_\alpha(\zeta).$$

L'opérateur

$$(V_\alpha f)(z) = (1-\overline{\alpha}u(z)) \int \frac{f(\zeta)}{1-\overline{\zeta}z} d\mu_\alpha(\zeta)$$

est un opérateur unitaire de $L^2(\mu_\alpha)$ vers K_u. En outre, si

$$Z_\alpha : L^2(\mu_\alpha) \to L^2(\mu_\alpha), \quad (Z_\alpha f)(\zeta) = \zeta f(\zeta),$$

alors

$$V_\alpha Z_\alpha V_\alpha^{-1} = U_\alpha.$$

Remarque 2.2. *Si $u(0) \neq 0$, d'après Clark ([16]), on a*

$$V_\alpha Z_\alpha V_\alpha^{-1} = U_{\beta_\alpha}, \quad \beta_\alpha = \frac{\alpha - u(0)}{1-\alpha\overline{u(0)}}.$$

2.3 Opérateurs de Toeplitz tronqués de type Sedlock.

Nous allons maintenant rappeler de nombreux résultats d'opérateur de Toeplitz tronqué de type α qui introduit par Sedlock [50, 49] en 2010. On pose $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Définition 2.9. *Soit $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. Un opérateur de Toeplitz tronqué A est dit de type α (ou de type Sedlock) si et seulement s'il existe $\varphi \in K_u$ et $c \in \mathbb{C}$ telle que*

$$A = \begin{cases} A^u_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + c} & si\ \alpha \in \mathbb{C}, \\ A^u_{\varphi} & si\ \alpha = 0, \\ A^u_{\overline{\varphi}} & si\ \alpha = \infty. \end{cases}$$

Définition 2.10. *1. On note par $\mathcal{B}^\alpha_u$ l'ensemble des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α.*

2. Dans le cas où $\alpha = 0$, on dit que A^u_φ est un opérateur du type analytique, et si $\alpha = \infty$ on dit que $A^u_{\overline{\varphi}}$ est du type anti-analytique.

3. On note par $\{A\}'$ l'ensemble des opérateurs bornés sur K_u qui commutent avec A.

Remarque 2.3.

$$\mathcal{B}^\alpha_u \subset \mathcal{T}_u.$$

Proposition. 2.12. *[50]. Si A^u_φ est de type α, alors il existe $\varphi_0 \in K^2_u$ et $c \in \mathbb{C}$ telle que $\varphi_0(0) = 0$ et $A^u_\varphi = A^u_{\varphi_0 + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi_0}} + c}$.*

Démonstration. Par définition A^u_Φ est de type α si $\Phi \overset{A}{\equiv} \varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + c_1$ avec $\varphi \in K_u$ et $c_1 \in \mathbb{C}$. Soit la fonction $\varphi_0 = \varphi - c_2 k^u_0$, avec $c_2 = \frac{\varphi(0)}{\|k^u_0\|^2}$, alors

$$\begin{aligned} \varphi_0 + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi_0}} + c &\overset{A}{\equiv} (\varphi - c_2 k^u_0) + \alpha \overline{S_u (\widetilde{\varphi - c_2 k^u_0})} + c \\ &\overset{A}{\equiv} \varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + c - (c_2 k^u_0 + c_2 \alpha \overline{S_u \widetilde{k^u_0}}) \\ &\overset{A}{\equiv} \varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + c - c_2 (k^u_0 - \alpha \overline{u(0)} \overline{k^u_0}), \quad (car, S_u \widetilde{k^u_0} = -u(0) k^u_0) \\ &\overset{A}{\equiv} \varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + c - c_2 (1 - \alpha \overline{u(0)}), \quad (car, \overline{k^u_0} \overset{A}{\equiv} k^u_0 \overset{A}{\equiv} 1). \end{aligned}$$

En prenant $c = c_1 + c_2(1 - \alpha \overline{u(0)})$, on a $\varphi_0 + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi_0}} + c \overset{A}{\equiv} \varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}} + c_1$, avec $\varphi_0(0) = 0$. □

définissons la notion d'un opérateur de shift généralisé.

Définition 2.11. *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, l'opérateur de shift généralisé est défini par*

$$S^\alpha_u := S_u + \frac{\alpha}{1 - \overline{u(0)}\alpha} k^u_0 \otimes \widetilde{k^u_0}. \tag{2.23}$$

Les opérateurs de shifts généralisés ont été définis par Sarason ([51]), ils sont la somme deux opérateurs de Toeplitz tronqués. Si $\alpha = 0$, alors $S_u^0 = S_u$, et si $\alpha \in \mathbb{T}$, alors $S_u^\alpha = U_\alpha$ est un opérateur unitaire de Clark. L'hypothèse $|\alpha| \leq 1$ assure que $1 - \overline{u(0)}\alpha \neq 0$.
Dans le lemme suivant, on a un exemple d'opérateurs de Toeplitz tronqués de type α.

Lemme 2.13 (Sedlock [50, 49])**.** *Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. L'opérateur S_u^α est un opérateur de type α, telle que*

$$S_u^\alpha = \frac{1}{1 - \alpha\overline{u(0)}} A^u_{S_u k_0^u + \alpha \overline{\widetilde{k_0^u}}}$$

Le lemme suivant caractérise les opérateurs de Toeplitz tronqués de rang 1 de type α.

Lemme 2.14. *(Sedlock [50])*

1. *Si $\lambda \in \mathbb{D}$, l'opérateur $\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type α, où $\alpha = u(\lambda)$, son symbole de la forme $\widetilde{k_\lambda^u} + u(\lambda)\overline{S_u k_\lambda^u}$*
2. *Si $\eta \in \mathbb{T}$ et u admet une dérivée angulaire au sens de Carathéodory en η, l'opérateur $k_\eta^u \otimes k_\eta^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué de type $u(\eta)$ et son symbole de la forme $k_\eta^u + u(\eta)\overline{S_u \widetilde{k_\eta^u}}$.*

Proposition. 2.15. *Soit $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. Alors*

$$A \in \mathcal{B}_u^\alpha \iff A^* \in \mathcal{B}_u^{1/\overline{\alpha}}. \tag{2.24}$$

Démonstration. Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = \infty$ c'est évident car $(A_\varphi^u)^* = A^u_{\overline{\varphi}}$.
Supposons que $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et soit $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$. Alors d'après la proposition 2.12, il existe $\varphi \in K_u$ avec $\varphi(0) = 0$ tel que $A = A^u_{\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + c}$, avec $c \in \mathbb{C}$, on a

$$A^* = A^u_{\overline{\varphi + c} + \overline{\alpha} S_u \widetilde{\varphi}}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} S_u \widetilde{\overline{\alpha} S_u \widetilde{\varphi}} &= \alpha S_u C S_u C \varphi = \alpha S_u S_u^* \varphi \\ &= \alpha(I - k_0^u \otimes k_0^u)\varphi = \alpha\varphi - \alpha\varphi(0) k_0^u \\ &= \alpha\varphi. \end{aligned}$$

on pose $\psi = \overline{\alpha} S_u \widetilde{\varphi}$, alors

$$A^* = A^u_{\overline{\varphi + c} + \overline{\alpha} S_u \widetilde{\varphi}} = A^u_{\psi + \frac{1}{\overline{\alpha}}\overline{S_u \widetilde{\psi}} + \overline{c}} \in \mathcal{B}_u^{1/\overline{\alpha}}.$$

□

Quelques propriétés des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α qui nous seront utiles sont regroupées dans la proposition suivante :

Proposition. 2.16. *Soit $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$.*

1. *Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, alors $\mathcal{B}_u^{\alpha_1} \cap \mathcal{B}_u^{\alpha_2} = \mathbb{C}I$.*
2. *Si $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, et $A_n \in \mathcal{B}_u^{\alpha}$ tels que A_n converge vers A pour la topologie faible des opérateurs. Alors $A \in \mathcal{B}_u^{\alpha}$.*
3. *Soient $\alpha, \alpha_n \in \mathbb{C}, \alpha_n \to \alpha$, et $A_n \in \mathcal{B}_u^{\alpha_n}$ tels que A_n converge vers A pour la topologie faible des opérateurs. Alors $A \in \mathcal{B}_u^{\alpha}$.*
4. *La classe $\mathcal{B}_u^{\alpha}$ est une sous-algèbre maximale de $\mathcal{T}_u$.*

Dans [50, 49], Sedlock donne plusieurs caractérisations d'un opérateur de Toeplitz tronqué de type α. On va résumer dans le lemme suivant :

Lemme 2.17. *Soient A un opérateur borné et $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A \in \mathcal{B}_u^{\alpha}$.*
2. *Il existe $\varphi \in K_u^2$ telle que*
$$A = A^u_{\varphi + \alpha\overline{u}(\varphi - \varphi(0))}.$$
3. *Il existe $\varphi \in K_u^2$ telle que*
$$A = A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}.$$

2.3.1 Transformation de Crofoot.

Soit u une fonction intérieure. Pour $\alpha \in \mathbb{D}$, on définit un automorphisme du disque $u_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ tel que
$$u_\alpha(z) = \frac{u(z) - \alpha}{1 - \overline{\alpha}u(z)} \quad \alpha, z \in \mathbb{D},$$
où u_a est une fonction intérieure. Maintenant, pour chaque $\alpha \in \mathbb{D}$, la transformation de Crofoot est l'application

$$\begin{array}{rcl} T_\alpha : K_u & \longrightarrow & K_{u_\alpha} \\ f & \longmapsto & T_\alpha(f) = \dfrac{(1-|\alpha|^2)^{1/2}}{1-\overline{\alpha}u} f. \end{array}$$

T_α est un opérateur unitaire ([17]). Il est prouvé dans [51], Theorem 13.2, que

$$T_\alpha \mathcal{T}_u T_\alpha^* = \mathcal{T}_{u_\alpha}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} T_\alpha^* = T_\alpha^{-1} : K_{u_\alpha} & \longrightarrow & K_u \\ f & \longmapsto & T_\alpha^*(f) = \dfrac{1-\overline{\alpha}u}{(1-|\alpha|^2)^{1/2}} f. \end{array}$$

Et il est prouvé dans [14] que, si $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$, Alors

$$T_\alpha \mathcal{B}_u^\alpha T_\alpha^* = \mathcal{B}_{u_a}^\beta, \qquad \textit{avec} \quad \beta = \frac{\alpha - a}{1-\overline{a}\alpha}.$$

2.3.2 Produit d'opérateurs de Toeplitz tronqués.

Dans cette section, nous étudions le produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués. Bien que la somme de deux opérateurs de Toeplitz tronqués soit toujours un opérateur de Toeplitz tronqué, le résultat n'est pas vrai pour le produit. Le problème sur le produit d'opérateurs de Toeplitz a été étudié par N. Sedlock dans [49, 50].

Proposition. 2.18. *Soient A et B deux opérateurs C-symétriques dans un espace de Hilbert. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *AB est un opérateur C-symétrique.*
2. *$AB = BA$.*
3. *$(AB)^* = A^*B^*$.*

Démonstration. Pour 1. $\Rightarrow$ 2.) on a $AB = CCABCC = C(AB)^*C = CB^*A^*C = BA$.
2. $\Rightarrow$ 3.) on a $(AB)^* = (BA)^* = A^*B^*$.
3. $\Rightarrow$ 1.) on a $C(AB)C = CACCBC = A^*B^* = (AB)^*$. $\square$

N. Sedlock [49, 50] donne une condition nécessaire et suffisante pour deux opérateurs de Toeplitz tronqués soit un opérateur de Toeplitz tronqué.

Lemme 2.19 (Sedlock [50, 49]). *Soient $\Phi = \varphi_1 + \overline{\varphi_2}$, $\Psi = \psi_1 + \overline{\psi_2}$ avec $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in K_u$, tels que $A_\Phi^u, A_\Psi^u \in \mathcal{T}_u$. Alors $A_\Phi^u A_\Psi^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement si*

$$\varphi_1 \otimes \psi_2 - S_u\widetilde{\varphi_2} \otimes S_u\widetilde{\psi_1} = \varphi_0 \otimes k_0^u + k_0^u \otimes \psi_0, \tag{2.25}$$

avec $\varphi_0, \psi_0 \in K_u$. Dans ce cas le symbole du produit donné par

$$A_\Phi^u \psi_1 - \langle \psi_1, \varphi_2 \rangle k_0^u + \overline{A_{\overline{\Psi}}^u \varphi_2} + \varphi_0 + \overline{\psi_0}. \tag{2.26}$$

Le théorème suivant donné par Sedlock qui montré dans [50, 49] que la seule classe d'opérateurs de Toeplitz tronqués qui est stable par la multiplication est la classe d'opérateurs de Toeplitz tronqués du type α.

Théorème 2.10. *Soient $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{T})$, tel que A^u_φ et A^u_ψ sont des opérateurs de Toeplitz tronqués. Alors $A^u_\varphi A^u_\psi$ est un opérateur de Toeplitz tronqué si et seulement si l'un des deux cas suivants est vérifié :*

1. *cas trivial : A^u_φ ou A^u_ψ est égal à cI avec $c \in \mathbb{C}$.*
2. *cas non trivial : il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ telle que A^u_φ et A^u_ψ sont tous les deux de type α. Dans ce cas $A^u_\varphi A^u_\psi$ est aussi de type α.*

Proposition. 2.20. *Soit A un opérateur borné dans K_u et soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. Alors $AS^\alpha_u = S^\alpha_u A$ si et seulement si A est de type α, dans ce cas, $A = A^u_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}}$, avec $\varphi = \frac{Ak^u_0}{1-\overline{u(0)}\alpha}$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. Si A est de type α et $S^\alpha_u \in \mathcal{B}^\alpha_u$ (Lemme (2.13)), d'après le théorème (2.10), on a AS^α_u de type α. Par la proposition 2.18, on a A commute avec S^α_u. Réciproquement, supposons $AS^\alpha_u = S^\alpha_u A$. Alors le premier corollaire du théorème 10.1 [51] implique que A est un opérateur de Toeplitz tronqué qui vérifier la relation (2.17). Comme $AS^\alpha_u = AS_u + \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(Ak^u_0 \otimes \widetilde{k^u_0})$ et $S^\alpha_u A = S_u A + \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(k^u_0 \otimes A^*\widetilde{k^u_0})$ on a

$$\begin{aligned}
A - S_u A S_u^* &= A - (S^\alpha_u A - \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(k^u_0 \otimes A^*\widetilde{k^u_0}))S^*_u \\
&= A - (AS^\alpha_u - \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(k^u_0 \otimes \widetilde{Ak^u_0}))S^*_u \quad (car\, AS^\alpha_u = S^\alpha_u A, A^*C = CA) \\
&= A - (AS_u + \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(Ak^u_0 \otimes \widetilde{k^u_0}) - \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(k^u_0 \otimes \widetilde{Ak^u_0}))S^*_u \\
&= A - AS_uS^*_u - \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(Ak^u_0 \otimes S_u\widetilde{k^u_0}) + \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(k^u_0 \otimes S_u\widetilde{Ak^u_0}) \\
&= Ak^u_0 \otimes k^u_0 + \frac{\overline{u(0)}\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(Ak^u_0 \otimes k^u_0) + \frac{\alpha}{1-\overline{u(0)}\alpha}(k^u_0 \otimes S_u\widetilde{Ak^u_0}) \\
&= \frac{Ak^u_0}{1-\overline{u(0)}\alpha} \otimes k^u_0 + k^u_0 \otimes \overline{\alpha} S_u \widetilde{\left(\frac{Ak^u_0}{1-\overline{u(0)}\alpha}\right)}.
\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.5, $A = A^u_{\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}}$, avec $\varphi = \frac{Ak^u_0}{1-\overline{u(0)}\alpha}$. D'où A est de type α. □

Présentons maintenant la proposition suivante

Proposition. 2.21. *Soit A un opérateur borné dans K_u. Alors*

1. *Si $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, si $A \in \{S^\alpha_u\}'$ alors $A \in \mathcal{T}_u$ et $\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}$ son symbole, avec $\varphi = (1 - \alpha\overline{u(0)})^{-1}Ak^u_0$.*

2. *Si* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, *si* $A \in \{(S_u^{1/\overline{\alpha}})^*\}'$ *alors* $A \in \mathcal{T}_u$ *et* $\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + c$ *son symbole, avec* $\varphi = \frac{1}{(\alpha-u(0))} S_u A\widetilde{k_0^u}$ *et* $c = \frac{\alpha}{(\alpha-u(0))} < A\widetilde{k_0^u}, \widetilde{k_0^u} >$.
3. *Si* $\alpha = \infty$, *si* $A \in \{(S_u^0)^*\}'$ *alors* $A \in \mathcal{T}_u$ *et* $\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + c$ *son symbole, avec* $\varphi = S_u A\widetilde{k_0^u}$ *et* $c =< A\widetilde{k_0^u}, \widetilde{k_0^u} >$.

Démonstration.

(1) Proposition 2.20.

(2) If $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Par proposition 2.15 $A^* \in \mathcal{B}_u^{1/\overline{\alpha}}$ et a donc le symbole $\psi + (1/\overline{\alpha})\overline{S_u\widetilde{\psi}}$ avec $\psi = (1 - (1/\overline{\alpha})\overline{u(0)})^{-1}A^*k_0^u$. Par conséquent : A a le symbole $(1/\alpha)S_u\widetilde{\psi} + \overline{\psi}$. On pose $\varphi = (1/\alpha)S_u\widetilde{\psi}$. Nous avons

$$S_u\widetilde{\varphi} = S_u\widetilde{(1/\alpha)S_u\widetilde{\psi}} = (1/\overline{\alpha})S_uS_u^*\psi = (1/\overline{\alpha})(\psi - < \psi, k_0^u > k_0^u)$$

d'où il vient :

$$\overline{\psi} = \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + < k_0^u, \psi > k_0^u.$$

Finalement on voit que

$$\begin{aligned}
\varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + < k_0^u, \psi > k_0^u &= \varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + < k_0^u, (1 - (1/\overline{\alpha})\overline{u(0)})^{-1}A^*k_0^u > k_0^u \\
&= \varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + \frac{\alpha}{(\alpha - u(0))} < Ak_0^u, k_0^u > k_0^u \\
&= \varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + \frac{\alpha}{(\alpha - u(0))} < A\widetilde{k_0^u}, \widetilde{k_0^u} > k_0^u \\
&= \varphi + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}} + ck_0^u.
\end{aligned}$$

Avec $\varphi = \frac{1}{(\alpha-u(0))} S_u A\widetilde{k_0^u}$ et $c = \frac{\alpha}{(\alpha-u(0))} < A\widetilde{k_0^u}, \widetilde{k_0^u} >$.

(3) Pour $\alpha = \infty$. Nous avons $A = A_{\overline{A^*k_0^u}}$ alors

$$A^*k_0^u \equiv^A S_u\widetilde{S_u\widetilde{A^*k_0^u}} + < k_0^u, Ak_0^u > k_0^u$$

par suite, on a

$$\begin{aligned}
\overline{A^*k_0^u} &\equiv^A \overline{S_u\widetilde{S_uA\widetilde{k_0^u}}} + < Ak_0^u, k_0^u > k_0^u \\
&\equiv^A \overline{S_u\widetilde{\varphi}} + ck_0^u.
\end{aligned}$$

Avec $\varphi = S_u A\widetilde{k_0^u}$ et $c =< A\widetilde{k_0^u}, \widetilde{k_0^u} >$.

$\square$

Présentons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour deux opérateurs de Toeplitz tronqués de classes Sedlock sont égaux.

Corollaire 2.22. *Soient* $A, B \in \mathcal{B}_u^\alpha, \alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. *Alors*

1. *Si* $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, *alors* $A = B$ *si est seulement si* $Ak_0^u = Bk_0^u$.
2. *Si* $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, *alors* $A = B$ *si est seulement si* $A\widetilde{k_0^u} = B\widetilde{k_0^u}$.

Démonstration. Soient $A, B \in \mathcal{B}_u^\alpha, \alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. Alors

1. Si $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. Soit $Ak_0^u = Bk_0^u$, par proposition 2.21, $A = A_{\varphi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}}$, $B = A_{\psi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\psi}}}$ avec
$$\varphi = (1-\alpha\overline{u(0)})^{-1}Ak_0^u = (1-\alpha\overline{u(0)})^{-1}Bk_0^u = \psi$$
d'où : $A = B$. L'autre direction est évidente.
2. Le deuxième point résulte du premier et de la proposition 2.21.

□

On va donner une méthode pour déterminer le symbole de produit de deux opérateurs de Toeplitz tronqués de type α.

Corollaire 2.23. *Soient* $A, B \in \mathcal{B}_u^\alpha$, $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. *Alors*

1. *Si* $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, *et* $A = A_{\varphi_1+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_1}}}, B = A_{\varphi_2+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_2}}}$ *alors* $AB = A_{\varphi_3+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_3}}}$ *avec* $\varphi_3 = (1-\alpha\overline{u(0)})^{-1}ABk_0^u = A\varphi_2 = B\varphi_1$.
2. *Si* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, *alors* $AB = A_{\varphi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}+c}$ *avec* $\varphi = \frac{1}{(\alpha-u(0))}S_uAB\widetilde{k_0^u}$ *and* $c = \frac{\alpha}{(\alpha-u(0))} < AB\widetilde{k_0^u}, \widetilde{k_0^u} >$.
3. *Si* $\alpha = \infty$, *alors* $AB = A_{\overline{S_u\widetilde{\varphi}}+c}$ *avec* $\varphi = S_uAB\widetilde{k_0^u}$ *et* $c =< AB\widetilde{k_0^u}, \widetilde{k_0^u} >$.

Démonstration. Soient $A, B \in \mathcal{B}_u^\alpha$, $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. Alors

(1) Si $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, et $A = A_{\varphi_1+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_1}}}, B = A_{\varphi_2+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_2}}}$ donc A, B commutes avec S_u^α, par Théorème 2.10 et Proposition 2.21, nous avons $AB = A_{\varphi_3+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_3}}} \in \mathcal{B}_u^\alpha$, where $\varphi_3 = (1-\alpha\overline{u(0)})^{-1}ABk_0^u = A\varphi_2 = B\varphi_1$.

Les troisième et deuxième points résulte du premier et de la proposition 2.21.

□

Proposition. 2.24. *Soit* $A \in \mathcal{T}_u$ *est inversible.* $A^{-1} \in \mathcal{T}_u$ *si est seulement si* $A \in \mathcal{B}_u^\alpha$. *De plus si* $A^{-1} \in \mathcal{T}_u$ *alors* $A^{-1} \in \mathcal{B}_u^\alpha$.

2.3.3 Symboles bornés de $\mathcal{B}_u^\alpha$.

Dans ce paragraphe, on va montrer que tout opérateur de type α a un symbole borné, Sarason [52] a donné la caractérisation suivante du commutant de $S_u = S_u^0$.

Théorème 2.11. *Soit A un opérateur borné qui commute avec S_u. Alors il existe une fonction $\varphi \in H^\infty$ telle que $A = A_\varphi^u$ et $\|A\| = \|\varphi\|_\infty$.*

Donc chaque opérateur de Toeplitz tronqué borné de type 0 a un symbole borné. Sedlock ([50, 49]) a été généralisé le résultat pour $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 2.25. *Soient $\varphi \in H^2$ et $\alpha \in \mathbb{D}$. Alors*

$$T_\alpha^{-1} A_\varphi^{u_\alpha} T_\alpha = A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}, \tag{2.27}$$

et

$$T_\alpha^{-1} A_{\overline{\varphi}}^{u_\alpha} T_\alpha = A^u_{\frac{\overline{\varphi}}{1-\overline{\alpha}u}}. \tag{2.28}$$

De plus, $A_\varphi^{u_\alpha}$ et $A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}$ (resp. $A_{\overline{\varphi}}^{u_\alpha}$ et $A^u_{\frac{\overline{\varphi}}{1-u\overline{\alpha}}}$) ont la même norme, et si $\psi \in H^2$, alors

$$A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}} = A^u_{\frac{\psi}{1-\alpha\overline{u}}} \Leftrightarrow (\varphi - \psi) \in u_\alpha H^2 + \overline{u_\alpha H^2}.$$

Démonstration. Soit $f \in K_u^\infty$, alors

$$A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}} f = P_u\left(\frac{\varphi f}{1-\alpha\overline{u}}\right) = P\left(\frac{\varphi f}{1-\alpha\overline{u}}\right) - uP\left(\frac{\overline{u}\varphi f}{1-\alpha\overline{u}}\right).$$

D'autre part, pour la transformation de Crofoot $T_\alpha = \frac{(1-|\alpha|^2)^{1/2}}{1-\overline{\alpha}u}$ avec son adjoint $T_\alpha^{-1} = \frac{1-\overline{\alpha}u}{(1-|\alpha|^2)^{1/2}}$, et $u_\alpha = \frac{u-\alpha}{1-\overline{\alpha}u}$, on a

$$\begin{aligned}
T_\alpha^{-1} A_\varphi^{u_\alpha} T_\alpha f &= (1-\overline{\alpha}u) P_{u_\alpha}\left(\frac{\varphi f}{1-\overline{\alpha}u}\right)\\
&= (1-\overline{\alpha}u)\left(P\left(\frac{\varphi f}{1-\overline{\alpha}u}\right) - u_\alpha P\left(\frac{\overline{u_\alpha}\varphi f}{1-\overline{\alpha}u}\right)\right)\\
&= (1-\overline{\alpha}u)\left(\left(\frac{\varphi f}{1-\overline{\alpha}u}\right) - \frac{u-\alpha}{1-\overline{\alpha}u} P\left(\frac{(\overline{u}-\overline{\alpha})\varphi f}{(1-\alpha\overline{u})(1-\overline{\alpha}u)}\right)\right), \quad \frac{\varphi f}{1-\overline{\alpha}u} \in H^2\\
&= \varphi f - (u-\alpha) P\left(\frac{\overline{u}\varphi f}{1-\alpha\overline{u}}\right)\\
&= \varphi f + \alpha P\left(\frac{\overline{u}\varphi f}{1-\alpha\overline{u}}\right) - uP\left(\frac{\overline{u}\varphi f}{1-\alpha\overline{u}}\right)\\
&= P\left(\frac{\varphi f}{1-\alpha\overline{u}}\right) - uP\left(\frac{\overline{u}\varphi f}{1-\alpha\overline{u}}\right).
\end{aligned}$$

Par la densité de K_u^∞, on a l'égalité.

Pour la seconde égalité, on utilise le fait que T_α est unitaire, on obtient

$$\begin{aligned} A^u_{\frac{\overline{\varphi}}{1-\overline{\alpha}u}} &= \left(A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}\right)^* \\ &= \left(T_\alpha^{-1}A^{u_\alpha}_\varphi T_\alpha\right)^* \\ &= T_\alpha^{-1}A^{u_\alpha}_{\overline{\varphi}}T_\alpha. \end{aligned}$$

D'après les égalités (2.27), (2.28), et T_α unitaire, on a $A^{u_\alpha}_\varphi$ et $A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}$ (resp. $A^{u_\alpha}_{\overline{\varphi}}$ et $A^u_{\frac{\overline{\varphi}}{1-u\overline{\alpha}}}$) ont la même norme. De plus, si $\varphi, \psi \in H^2$ on a

$$\begin{aligned} A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}} = A^u_{\frac{\psi}{1-\alpha\overline{u}}} &\Leftrightarrow A^{u_\alpha}_\varphi = A^{u_\alpha}_\psi \\ &\Leftrightarrow A^{u_\alpha}_{(\varphi-\psi)} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\varphi-\psi) \in u_\alpha H^2 + \overline{u_\alpha H^2}, \quad \text{d'après théorème 2.4.} \end{aligned}$$

□

Le théorème suivant donne l'existence d'un symbole borné dans le cas $\alpha \in \mathbb{D}$.

Théorème 2.12. *Soit A un opérateur borné dans K_u et soit $\alpha \in \mathbb{D}$. Alors A est de type α si et seulement s'il existe une fonction $\varphi \in H^2$ telle que $A = A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}$. Dans ce cas, il existe une fonction $\psi \in H^\infty$ telle que $A = A^u_{\frac{\psi}{1-\alpha\overline{u}}}$ et $\|A\| = \|\psi\|_\infty$. Si $\varphi, \psi \in H^\infty$ alors*

$$A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}A^u_{\frac{\psi}{1-\alpha\overline{u}}} = A^u_{\frac{\varphi\psi}{1-\alpha\overline{u}}}.$$

Démonstration. Soient A un opérateur borné dans K_u, et $B = T_\alpha A T_\alpha^{-1}$. D'après la proposition 2.20 , on a

$$A \in \mathcal{B}_u^\alpha \Leftrightarrow AS_u^\alpha = S_u^\alpha A$$

si et seulement si

$$\begin{aligned} BS_{u_\alpha} &= T_\alpha A T_\alpha^{-1} T_\alpha S_u^\alpha T_\alpha^{-1} \\ &= T_\alpha A S_u^\alpha T_\alpha^{-1} \\ &= T_\alpha S_u^\alpha A T_\alpha^{-1} \\ &= S_{u_\alpha} B. \end{aligned}$$

Mais cela est vrai si et seulement s'il existe une fonction $\varphi \in H^2$ telle que $B = A^{u_\alpha}_\varphi$ ce qui est vrai si et seulement s'il existe une fonction $\varphi \in H^2$ telle que $A = A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}$ (égalité 2.27). Ainsi, on appliquons le théorème 2.11 sur l'opérateur $A_\varphi^{u_\alpha}$ on a il existe une fonction $\psi \in H^\infty$ telle que $A_\varphi^{u_\alpha} = A_\psi^{u_\alpha}$ et $\|A_\psi^{u_\alpha}\| = \|\psi\|_\infty$. Par égalité 2.27, il vient alors

$$A = T_\alpha^{-1} A_\varphi^{u_\alpha} T_\alpha = T_\alpha^{-1} A_\psi^{u_\alpha} T_\alpha = A^u_{\frac{\psi}{1-\alpha\overline{u}}}.$$

Comme T_α est unitaire, $\|A\| = \|\psi\|_\infty$.

Nous allons maintenant montrer le produit. Si $\varphi, \psi \in H^\infty$ alors

$$\begin{aligned} A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}} A^u_{\frac{\psi}{1-\alpha\overline{u}}} &= T_\alpha^{-1} A_\varphi^{u_\alpha} A_\psi^{u_\alpha} T_\alpha \\ &= T_\alpha^{-1} A_{\varphi\psi}^{u_\alpha} T_\alpha \\ &= A^u_{\frac{\varphi\psi}{1-\alpha\overline{u}}}. \end{aligned}$$

$\square$

Remarque 2.4. *Si $|\alpha| > 1$ et A est de type α, alors A^* est de type $1/\overline{\alpha} \in \mathbb{D}$. Donc les résultats ci-dessus s'appliquent à A^* pour obtenir des résultats similaires pour A. D'où pour tout $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}, |\alpha| \neq 1$, tout opérateur de type α a un symbole borné.*

Si $|\alpha| = 1$. Rappelons qu'un opérateur borné est de type α si et seulement s'il commute avec U_α. U_α est unitairement équivalent à Z_α dans l'espace $L^2(\mu_\alpha)$ avec μ_α est la mesure de Clark associée avec U_α (voir Théorème 2.9). Le commutant de Z_α est l'espace des opérateurs de multiplication M_Φ induit par $L^\infty(\mu_\alpha)$ (comme le théorème 1.2), et ainsi, en utilisant unitairement équivalence, par le calcul fonctionnel continu, chaque opérateur de type α est égal à $\Phi(S_u^\alpha)$ avec $\Phi \in L^\infty(\mu_\alpha)$.

Finalement, d'après le théorème 3.2 et la remarque 2.4, on a chaque opérateur de type α a un symbole borné.

Exemple d'un opérateur de Toeplitz tronqué borné a un symbole non borné.

Dans [6], sous certaines conditions sur la fonction intérieure u, il existe des opérateurs de Toeplitz tronqués bornés de rang un n'ont aucun symbole borné.

Théorème 2.13. *Supposons que u admet une ADC au point $\eta \in \mathbb{T}$. Soit $p \in (2, \infty)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur de Toeplitz tronqué borné $k_\eta^u \otimes k_\eta^u$ a un symbole borné $\psi \in L^p$,*
2. *$k_\eta^u \in L^p$.*

En particulier, si $k_\eta^u \notin L^p$ pour $p \in (2, \infty)$, alors $k_\eta^u \otimes k_\eta^u$ est un opérateur de Toeplitz tronqué borné a un symbole non borné.

2.3.4 Calcul fonctionnel pour $\mathcal{B}_u^\alpha$.

Comme les algèbres $\mathcal{B}_u^\alpha$ sont les commutant de shift généralisé S_u^α (proposition 3.10), Sedlock a donné en [49, 50], une description plus concrète à l'aide de calcul fonctionnel. Dans ce paragraphe, nous présentons ci-dessous un bref résumé des résultats qui s'y trouve. Il existe essentiellement deux types distincts de classes Sedlock, selon que $|\alpha| = 1$ ou non, et le cas $|\alpha| > 1$ est réduit à $|\alpha| < 1$ en prenant l'adjoint.

1. Si $|\alpha| = 1$, alors S_u^α est un opérateur unitaire de la multiplicité une, avec mesure spectrale singulière μ_α (la mesure de Clark associé à S_u^α). Ainsi $\mathcal{B}_u^\alpha = \{S_u^\alpha\}'$ est une sous-algèbre maximale de $\mathcal{L}(K_u)$, et ses éléments peuvent être décrits comme des fonctions $\Phi(S_u^\alpha)$ avec $\Phi \in L^\infty(\mu_\alpha)$.
2. Si $|\alpha| < 1$, alors S_u^α est une contraction totalement non-unitaire, qui a un calcul fonctionnel avec des fonctions de H^∞ [47]. Il est commutant $\mathcal{B}_u^\alpha$ est une algèbre faiblement fermée non auto-adjoint, ses éléments sont les fonctions $\Psi(S_u^\alpha)$ avec $\Psi \in H^\infty$, et nous pouvons identifier leurs symboles comme opérateurs de Toeplitz tronqués par la formule
$$\Psi(S_u^\alpha) = A^u_{\frac{\Psi}{1-\alpha\overline{u}}}.$$
3. Si $|\alpha| > 1$, Alors $S_u^{1/\overline{\alpha}}$ est une contraction totalement non-unitaire, et en utilisant la proposition 3.10, les éléments de $\mathcal{B}_u^\alpha$ peut être décrit comme
$$\Psi^*(S_u^{1/\overline{\alpha}})^* = A^u_{\frac{\alpha\overline{\Psi}}{\alpha-u}}, \quad \Psi \in H^\infty,$$
avec $\Psi^*(z) = \overline{\Psi(\overline{z})}$.

Récemment, Chalendar et Timotin ont continué l'étude des opérateurs de Toeplitz tronqués de type α ([14]).

Théorème 2.14. *Soit $A_\varphi^u \in \mathcal{T}_u$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A_φ^u est unitaire.*
2. *A_φ^u est isométrie.*
3. *A_φ^u est co-isométrie.*
4. *$(A_\varphi^u)^* A_\varphi^u - I \in \mathcal{T}_u$.*
5. *$A_\varphi^u (A_\varphi^u)^* - I \in \mathcal{T}_u$.*
6. *Il existe $\alpha \in \mathbb{T}$, tel que $A_\varphi^u \in \mathcal{B}_u^\alpha$ et $A_\varphi^u = \Phi(S_u^\alpha)$ avec $|\Phi| = 1$ μ_α-presque partout.*

2.4 Exemples : représentation matricielle des opérateurs de Toeplitz tronqués pour $u(z) = z^n$.

L'espace modèle K_u est de dimension finie si et seulement si u est un produit de Blaschke d'ordre fini. Si $u(z) = z^n$ alors

$$K_{z^n} = span\{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\} = \{\sum_{k\geq 0}^{n-1} a_k z^k, a_k \in \mathbb{C}\},$$

et

$$K_0^{z^n} = 1, \widetilde{K_0^{z^n}} = z^{n-1}.$$

Soit $f \in K_{z^n}$ donc

$$f(z) = \sum_{k\geq 0}^{n-1} \widehat{f}(k) z^k, \;\; et \; \widetilde{f}(z) = \sum_{k\geq 0}^{n-1} \overline{\widehat{f}(n-1-k)} z^k.$$

Dans ce cas, les opérateurs de Toeplitz tronqués sont bornés si et seulement si ils ont un symbole borné, et ils avoir une représentation matricielle naturelle comme : soit $\Phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, et soit $\widehat{\Phi}(n)$ les coefficients de Fourier de la fonction Φ, alors $M_{A_\Phi^{z^n}}$ la représentation matricielle de $A_\Phi^{z^n}$ par rapport à la base $\{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\}$ est

$$M_{A_\Phi^{z^n}} = \begin{pmatrix} \widehat{\Phi}(0) & \widehat{\Phi}(-1) & \cdots & \cdots & \widehat{\Phi}(-n+2) & \widehat{\Phi}(-n+1) \\ \widehat{\Phi}(1) & \widehat{\Phi}(0) & \widehat{\Phi}(-1) & \ddots & & \widehat{\Phi}(n-1) \\ \widehat{\Phi}(2) & \widehat{\Phi}(1) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \widehat{\Phi}(0) & \widehat{\Phi}(-1) \\ \widehat{\Phi}(n-1) & \cdots & \cdots & \widehat{\Phi}(2) & \widehat{\Phi}(1) & \widehat{\Phi}(0) \end{pmatrix}$$

Remarque 2.5. *La représentation matricielle des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole holomorphe sont des matrices triangulaires inférieurs, et la représentation matricielle des opérateurs de Toeplitz tronqués de symbole antiholomorphe sont des matrices triangulaires supérieures.*

Matrice de type Sedlock.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit $\varphi \in K_{z^n}$. Alors

$$\varphi(z) = \sum_{k\geq 0}^{n-1} \widehat{\varphi}(k) z^k$$

avec $\widehat{\varphi}(n)$ les coefficients de Fourier de la fonction φ, et

$$S_{z^n}\widetilde{\varphi} = z^n\overline{(\varphi(z) - \varphi(0))} = \sum_{k\geq 1}^{n-1}\overline{\widehat{\varphi}(n-k)}z^k$$

alors

$$\varphi + \alpha\overline{S_{z^n}\widetilde{\varphi}} = \sum_{k\geq 0}^{n-1}\widehat{\varphi}(k)z^k + \alpha\sum_{k\geq 1}^{n-1}\widehat{\varphi}(n-k)z^{-k}$$

donc M_A la représentation matricielle de $A^{z^n}_{\varphi+\alpha\overline{S_{z^n}\widetilde{\varphi}}}$ par rapport à la base $\{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\}$ est

$$M_A = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(0) & \alpha\widehat{\varphi}(n-1) & \cdots & \cdots & \alpha\widehat{\varphi}(2) & \alpha\widehat{\varphi}(1) \\ \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) & \alpha\widehat{\varphi}(n-1) & \ddots & & \alpha\widehat{\varphi}(2) \\ \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \widehat{\varphi}(0) & \alpha\widehat{\varphi}(n-1) \\ \widehat{\varphi}(n-1) & \cdots & \cdots & \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) & \widehat{\varphi}(0) \end{pmatrix}.$$

Pour $\alpha = \infty$, on a

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\varphi}(n-1) & \cdots & \cdots & \widehat{\varphi}(2) & \widehat{\varphi}(1) \\ 0 & 0 & \widehat{\varphi}(n-1) & \ddots & & \widehat{\varphi}(2) \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \widehat{\varphi}(n-1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 3

Semi-groupes d'opérateurs de Toeplitz tronqués.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux semi-groupes d'opérateurs de Toeplitz tronqués

3.1 Semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés.

Dans la suite, nous présenterons quelques problèmes concernant les semi-groupes uniformément continus et semi-groupe fortement continu (C_0-semi-groupe) d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$. Nous noterons par $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{H}$. Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ nous noterons par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A \textit{ est inversible dans } \mathbf{B}(\mathcal{H})\}$$

l'ensemble résolvant de A et par

$$\begin{aligned} R(.,A) \quad &: \quad \rho(A) \longrightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H}) \\ R(\lambda, A) \quad &= \quad (\lambda I - A)^{-1}, \end{aligned}$$

la résolvante de l'opérateur linéaire A.

Définition 3.1. *[44] On appelle semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$ une famille $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathbf{B}(\mathcal{H})$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$T_0 = I$, où I est l'opérateur d'identité de $\mathcal{H}$.*

2. $T_{t+s} = T_t T_s$, $\forall t, s \in [0, \infty)$.

Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés, T_t est uniformément continu si

$$\lim_{t \to 0^+} \|T_t - I\| = 0.$$

Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés, T_t est fortement continu (C_0-semi-groupe) si

$$\lim_{t \to 0^+} T_t f = f \qquad \forall f \in \mathcal{H}.$$

L'opérateur linéaire A défini par

$$D(A) = \{f \in \mathcal{H}, \lim_{t \to 0^+} \frac{T_t f - f}{t} \quad \textit{existe}\}$$

et

$$A = \lim_{t \to 0^+} \frac{T_t f - f}{t} = \frac{dT_t f}{dt}|_{t=0} \qquad f \in D(A)$$

est un générateur infinitésimal du semi-groupe T_t, $D(A)$ est le domaine de A.

Remarque 3.1. 1. *Les semi-groupes uniformément continus sont C_0-semi-groupes. Puisque :*

$$\|T_t(f) - f\| \leq \|T_t - I\| \|f\|$$

pour tout $f \in \mathcal{H}$ et tout $t \geq 0$.

2. *Un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés, T_t est scalaire si $\forall t \geq 0, T_t = c_t I, c_t \in \mathbb{C}$.*

Théorème 3.1. *[44] Soit $\{T_t\}_{t \geq 0}$ est un C_0-semi-groupe. Alors*

1. *il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\|T_t\| \leq M e^{t\omega}$, pour tout $t \geq 0$.*
2. *$\|T_t\| \leq e^{t\omega}$ si est seulement si $\|S_t\| \leq 1$, avec*

$$S_t = e^{-t\omega} T_t$$

est un semi-groupe avec son générateur $A - \omega I$, et A est un générateur de T_t.

Théorème 3.2. *[44] Un opérateur $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $(T_t)_{t \geq 0}$, si et seulement si A est un opérateur linéaire borné. Dans ce cas,*

$$T_t = e^{tA} = \sum_{n \geq 0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

Une caractérisation très intéressante des C_0-semi-groupes de contractions est donnée par le fameux théorème de Lumer-Phillips, dans lequel interviennent les opérateurs m-dissipatifs.

Définition 3.2. *Soit $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un opérateur linéaire.*

1. *L'opérateur A est dissipatif sur un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$ si*

$$Im\langle Af, f\rangle \geq 0 \text{ (ou } Re\langle Af, f\rangle \leq 0), \text{ pour tout } f \in D(A).$$

2. *L'opérateur A est m-dissipatifs si*
   (a) *A est dissipatif.*
   (b) *$\forall g \in \mathcal{H}$, $\forall \lambda > 0$, $\exists f \in D(A)$ tel que $\lambda f - Af = g$.*

Théorème 3.3. *(Lumer-Phillips 1961). Soit A un opérateur linéaire tel que $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(T_t)_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{H}$.*
2. *A est un opérateur m-dissipatif.*

Théorème 3.4. *Soit A un opérateur dissipatif et de domaine dense dans $\mathcal{H}$. Alors A est m-dissipatif si et seulement si A est fermé et A^* est dissipatif.*

3.2 Semi-groupes d'opérateurs de Toeplitz tronqués.

Nous donnons le cas trivial de semi-groupes scalaire.

Proposition. 3.1. *Soit $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{T}_u(K_u)$. Alors*

$T_t = c_t I$ est un semi-groupe uniformément continu (C_0-semi-groupes) sur K_u si et seulement si c_t est un semi-groupe uniformément continu (C_0-semi-groupes) sur $\mathbb{C}$. Dans ce cas $\mathcal{A} = aI$, avec $\mathcal{A}$ et a sont les générateurs de T_t et c_t, respectivement.

Démonstration. Évidant, puisque $\|T_t f - f\| = |c_t - 1|\|f\|$. □

Le théorème suivant donne la première caractérisation de semi-groupes d'opérateurs de Toeplitz tronqués.

Théorème 3.5. *Soient $T_t \in \mathcal{T}(K_u), \forall t \geq 0$. Alors $\{T_t\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur K_u si et seulement s'il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que $T_t \in \mathcal{B}_u^{\alpha}, \forall t \geq 0$, l'une des conditions suivantes est satisfaite*

1. *Si $|\alpha| = 1$, alors $T_t = \Phi_t(S_u^{\alpha}), t \geq 0$, avec $\Phi_t \in L^{\infty}(\mu_\alpha)$ et $\Phi_t\Phi_s = \Phi_{t+s}, \mu_\alpha - p.p$ et $\Phi_0 = 1, \mu_\alpha - p.p.$*

2. *si* $|\alpha| < 1$, *alors* $T_t = \Phi_t(S_u^\alpha), t \geq 0$, *avec* $\Phi_t \in H^\infty$ *et la fonction intérieure* u_α *divise* $\Phi_t\Phi_s - \Phi_{t+s}$ *et* $\Phi_0 - 1$.
3. *Si* $|\alpha| > 1$, *alors* $T_t = \Psi_t^*(S_u^{1/\overline{\alpha}})^*, t \geq 0$ *avec* $\Phi_t \in H^\infty$ *et la fonction intérieure* $u_{1/\overline{\alpha}} = \frac{1-\overline{\alpha}u}{u-\alpha}$ *divise* $\Phi_t\Phi_s - \Phi_{t+s}$ *et* $\Phi_0 - 1$.

Démonstration. Soit $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{T}(K_u)$ une famille de semi-groupe, alors, pour tous $t, s \geq 0$,

$$T_tT_s = T_{t+s} \in \mathcal{T}(K_u),$$

d'après le théorème 2.10, il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$, tel que pour chaque $t \geq 0$, $T_t \in \mathcal{B}_u^\alpha$. Nous avons les cas suivants :(voir la partie calcul fonctionnel pour $\mathcal{B}_u^\alpha$ du chapitre 2)

1. Si $|\alpha| = 1$, alors $T_t = \Phi_t(S_u^\alpha), t \geq 0$, avec $\Phi_t \in L^\infty(\mu_\alpha)$ et

   $$\Phi_t\Phi_s(S_u^\alpha) = \Phi_t(S_u^\alpha)\Phi_s(S_u^\alpha) = \Phi_{t+s}(S_u^\alpha)$$

   ce qui signifie que $\Phi_t\Phi_s = \Phi_{t+s}, \mu_\alpha - p.p$, aussi $T_0 = \Phi_0(S_u^\alpha) = I$ implique que $\Phi_0 = 1, \mu_\alpha - p.p.$
2. Si $|\alpha| < 1$, on a

   $$T_t = \Phi_t(S_u^\alpha), t \geq 0,$$

   avec $\Phi_t \in H^\infty$, et on a

   $$(\Phi_t\Phi_s - \Phi_{t+s})(S_u^\alpha) = 0$$

   avec $(\Phi_t\Phi_s - \Phi_{t+s}) \in H^\infty$, si et seulement si u_α divise $\Phi_t\Phi_s - \Phi_{t+s}$, aussi

   $$T_0 - I = (\Phi_0 - 1)(S_u^\alpha) = 0$$

   implique que u_α divise $\Phi_0 - 1$.
3. $|\alpha| > 1$, alors $T_t = \Psi_t^*(S_u^{1/\overline{\alpha}})^*, \Psi_t \in H^\infty$, avec $\Psi_t^*(z) = \overline{\Psi_t(\overline{z})}$. De même, comme le point 2, $u_{1/\overline{\alpha}} = \frac{1-\overline{\alpha}u}{u-\alpha}$ divise $\Phi_t\Phi_s - \Phi_{t+s}$ et $\Phi_0 - 1$.

L'autre direction est évidant.

□

Nous avons le théorème suivant

Théorème 3.6. *Soient* $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{T}(K_u)$. *Alors* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur* K_u *si et seulement s'il existe* $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ *tel que* $T_t \in \mathcal{B}_u^\alpha, \forall t \geq 0$, *une des conditions suivantes est satisfaite*

1. *Si* $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, *alors* $\forall t, s \geq 0$, $T_{t+s}k_0^u = T_tT_sk_0^u$ *et* $T_0k_0^u = k_0^u$.

2. *Si* $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, *alors* $\forall t, s \geq 0$, $T_{t+s}\widetilde{k_0^u} = T_t T_s \widetilde{k_0^u}$ *et* $T_0 \widetilde{k_0^u} = \widetilde{k_0^u}$.

Démonstration. Soient $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{T}(K_u)$. Supposons que $(T_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe alors $\forall t, s \geq 0$, $T_{t+s} = T_t T_s$ est un opérateur de Toeplitz tronqué, aussi par théorème 2.10, il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$, tel que pour chaque $t \geq 0$, $T_t \in \mathcal{B}_u^{\alpha}$, et par corollaire 2.22 les conditions (1) et (2) sont clairement satisfaites.

Pour l'autre direction, supposons qu'il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que $T_t \in \mathcal{B}_u^{\alpha}, \forall t \geq 0$ d'après le théorème 2.10 $(T_t T_s) \in \mathcal{B}_u^{\alpha}$. Supposons aussi la condition (1) est satisfait, par corollaire 2.22, on a

$$T_{t+s} = T_t T_s = T_s T_t.$$

De même, si la condition (2) est satisfaite, on obtient pour corollaire 2.22 que $T_{t+s} = T_t T_s = T_s T_t$. □

Exemple 3.1. *Soit* $u(z) = z^n$. *Soient* $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{T}_{z^n}(K_{z^n})$. *alors* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur* K_{z^n} *si et seulement s'il existe* $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ *tel que* $T_t \in \mathcal{B}_{z^n}^{\alpha}, \forall t \geq 0$. *D'où d'après la matrice de Sedlock (voir section 2.4),* M_{T_t} *la représentation matricielle de* $T_t = A^{z^n}_{\varphi_t + \alpha \overline{S_{z^n}\widehat{\varphi}_t}}$ *par rapport à la base* $\{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\}$ *est*

$$M_{T_t} = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_t(0) & \alpha\widehat{\varphi}_t(n-1) & \cdots & \cdots & \alpha\widehat{\varphi}_t(2) & \alpha\widehat{\varphi}_t(1) \\ \widehat{\varphi}_t(1) & \widehat{\varphi}_t(0) & \alpha\widehat{\varphi}_t(n-1) & \ddots & & \alpha\widehat{\varphi}_t(2) \\ \widehat{\varphi}_t(2) & \widehat{\varphi}_t(1) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \widehat{\varphi}_t(0) & \alpha\widehat{\varphi}_t(n-1) \\ \widehat{\varphi}_t(n-1) & \cdots & \cdots & \widehat{\varphi}_t(2) & \widehat{\varphi}_t(1) & \widehat{\varphi}_t(0) \end{pmatrix}$$

avec l'une des conditions suivantes sont satisfaites

(1). $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ *et* $\forall t, s \geq 0$, $T_{t+s}1 = T_t T_s 1$. *alors*

$$M_{T_{t+s}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = M_{T_t} M_{T_s} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_{t+s}(0) \\ \widehat{\varphi}_{t+s}(1) \\ \widehat{\varphi}_{t+s}(2) \\ \vdots \\ \widehat{\varphi}_{t+s}(n-1) \end{pmatrix} = M_{T_t} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_s(0) \\ \widehat{\varphi}_s(1) \\ \widehat{\varphi}_s(2) \\ \vdots \\ \widehat{\varphi}_s(n-1) \end{pmatrix}$$

alors

$$\widehat{\varphi}_{t+s}(k) = \sum_{m=0}^{k} \widehat{\varphi}_t(m)\widehat{\varphi}_s(k-m) + \alpha \sum_{l=k+1}^{n-1} \widehat{\varphi}_t(l)\widehat{\varphi}_s(n-l+k), \quad k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

(2). $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, *et* $\forall t, s \geq 0$, $T_{t+s}z^{n-1} = T_tT_sz^{n-1}$. *alors*

$$M_{T_{t+s}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{T_t}M_{T_s} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha\widehat{\varphi}_{t+s}(1) \\ \alpha\widehat{\varphi}_{t+s}(2) \\ \vdots \\ \alpha\widehat{\varphi}_{t+s}(n-1) \\ \widehat{\varphi}_{t+s}(0) \end{pmatrix} = M_{T_t} \begin{pmatrix} \alpha\widehat{\varphi}_s(1) \\ \alpha\widehat{\varphi}_s(2) \\ \vdots \\ \alpha\widehat{\varphi}_s(n-1) \\ \widehat{\varphi}_s(0) \end{pmatrix}$$

nous obtenons

$$\widehat{\varphi}_{t+s}(k) = \sum_{m=0}^{k} \widehat{\varphi}_t(m)\widehat{\varphi}_s(k-m) + \alpha \sum_{l=k+1}^{n-1} \widehat{\varphi}_t(l)\widehat{\varphi}_s(n-l+k), \quad k \in \{0, 1, ..., n-1\}.$$

(3) $\alpha = \infty$, *nous avons*

$$\overline{S_{z^n}\widetilde{\varphi}_t} = \sum_{k\geq 1}^{n-1} \widehat{\varphi}_t(n-k)z^{-k}$$

alors M_A *la représentation matricielle de* $A^{z^n}_{\overline{S_{z^n}\widetilde{\varphi_t}}}$ *par rapport à la base* $\{1, z, z^2, ..., z^{n-1}\}$ *est*

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\varphi}_t(n-1) & \widehat{\varphi}_t(n-2) & \cdots & \widehat{\varphi}_t(1) \\ 0 & 0 & \widehat{\varphi}_t(n-1) & & \widehat{\varphi}_t(2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & 0 & \widehat{\varphi}_t(n-1) \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\forall t, s \geq 0$, $T_{t+s}z^{n-1} = T_tT_sz^{n-1}$. *alors*

$$M_{T_{t+s}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{T_t}M_{T_s} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_{t+s}(1) \\ \widehat{\varphi}_{t+s}(2) \\ \vdots \\ \widehat{\varphi}_{t+s}(n-1) \\ 0 \end{pmatrix} = M_{T_t} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_s(1) \\ \widehat{\varphi}_s(2) \\ \vdots \\ \widehat{\varphi}_s(n-1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\widehat{\varphi}_{t+s}(k) = \sum_{l=k+1}^{n-1} \widehat{\varphi}_t(l)\widehat{\varphi}_s(n-l+k), \quad k \in \{1, 2, ..., n-2\}, \widehat{\varphi}_{t+s}(n-1) = 0.$$

3.3 Semi-groupes uniformément continus d'opérateurs de Toeplitz tronqués.

Nous commençons cette section avec un résultat élémentaire qui caractérise le générateur d'un semi-groupe de d'opérateurs de Toepliz tronqués.

Proposition. 3.2. *Un opérateur $\mathcal{A}$ borné sur K_u, est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_u^\alpha$, pour certain $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. Soient $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{T}(K_u)$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur K_u, et $\mathcal{A}$ son générateur. Alors il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que $(T_t) \in \mathcal{B}_u^\alpha, \forall t \geq 0$. Puisque $\mathcal{B}_u^\alpha$ est une algèbre fermé et

$$\mathcal{A} = \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t - I}{t},$$

dans la norme de opérateur, alors $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_u^\alpha$.
Pour l'autre direction. Supposons que $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_u^\alpha$ pour certain $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. Encore, puisque $\mathcal{B}_u^\alpha$ est une algèbre fermé, $e^{t\mathcal{A}} \in \mathcal{B}_u^\alpha, \forall t \geq 0$, donc $\mathcal{A}$ est générateur infinitésimal de $e^{t\mathcal{A}}$. □

Le théorème suivant caractérise les semi-groupe uniformément continus d'opérateurs de Toepliz tronqués. Il donne aussi la relation entre les symboles des éléments du semi-groupe et le symbole de son générateur.

Théorème 3.7. *Soit $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{T}(K_u)$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur K_u. alors $(T_t)_{t\geq 0}$ est uniformément continu si et seulement s'il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que $(T_t) \in \mathcal{B}_u^\alpha, \forall t \geq 0$, et l'une des conditions suivantes est satisfaite*

1. *Si $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$,*
$$\Psi := \frac{1}{(1 - \alpha\overline{u(0)})} \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t k_0^u - k_0^u}{t}$$
existe dans la norme de K_u et l'opérateur $\mathcal{A} = A^u_{\Psi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\Psi}}}$ est borné.
2. *Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$,*
$$\Psi = \frac{1}{(\alpha - u(0))} \lim_{t\to 0^+} \frac{S_u T_t \widetilde{k_0^u} - S_u \widetilde{k_0^u}}{t}$$
existe dans la norme de K_u et l'opérateur $\mathcal{A} = A^u_{\Psi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\Psi}} + c}$ est borné, avec
$$c = \frac{\alpha}{(\alpha - u(0))} \lim_{t\to 0^+} < \frac{T_t \widetilde{k_0^u} - \widetilde{k_0^u}}{t}, \widetilde{k_0^u} > .$$
3. *Si $\alpha = \infty$,*
$$\Psi = \lim_{t\to 0^+} \frac{S_u T_t \widetilde{k_0^u} - S_u \widetilde{k_0^u}}{t}$$
existe dans la norme de K_u et l'opérateur $\mathcal{A} = A^u_{\overline{S_u \widetilde{\Psi}} + c}$ est borné, avec
$$c = \lim_{t\to 0^+} < \frac{T_t \widetilde{k_0^u} - \widetilde{k_0^u}}{t}, \widetilde{k_0^u} > .$$

Dans tous les cas $\mathcal{A}$ est le générateur de $(T_t)_{t\geq 0}$.

Démonstration. Soient $(T_t)_{t\geq 0} \subset \mathcal{T}(K_u)$ est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur K_u. Alors par théorème 2.10 $(T_t) \in \mathcal{B}_u^\alpha, \forall t \geq 0$. Supposons que $(T_t)_{t\geq 0}$ est uniformément continu avec son générateur infinitésimal $\mathcal{A}$, puisque $\mathcal{B}_u^\alpha$ est une algèbre fermé et

$$\mathcal{A} = \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t - I}{t},$$

dans la norme de opérateur, alors $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_u^\alpha$ borné. D'après la propositions 2.21, nous avons les cas suivants

(1) si $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, alors il existe $\Psi \in K_u$ tel que $\mathcal{A} = A^u_{\Psi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\Psi}}}$ et $\Psi = (1-\alpha\overline{u(0)})^{-1}\mathcal{A}k_0^u$ par conséquent

$$\mathcal{A}k_0^u = \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t k_0^u - k_0^u}{t}$$

alors

$$(1-\alpha\overline{u(0)})\Psi = \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t k_0^u - k_0^u}{t}.$$

(2) Si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, alors il existe $\Psi \in K_u$, $c \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{A} = A^u_{\Psi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\Psi}}+c}$ avec

$$\Psi = \frac{1}{(\alpha - u(0))} S_u \mathcal{A}\widetilde{k_0^u}$$

et

$$c = \frac{\alpha}{(\alpha - u(0))} < \mathcal{A}\widetilde{k_0^u}, \widetilde{k_0^u} >,$$

par suite

$$\mathcal{A}\widetilde{k_0^u} = \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t \widetilde{k_0^u} - \widetilde{k_0^u}}{t}$$

alors

$$(\alpha - u(0))\Psi = \lim_{t\to 0^+} \frac{S_u T_t \widetilde{k_0^u} - S_u \widetilde{k_0^u}}{t}$$

et

$$c = \frac{\alpha}{(\alpha - u(0))} \lim_{t\to 0^+} < \frac{T_t \widetilde{k_0^u} - \widetilde{k_0^u}}{t}, \widetilde{k_0^u} > .$$

(3) Le troisième point résulte du seconde et Proposition 2.21.

Pour l'autre direction. Supposons que (1) est satisfait et $\mathcal{A} = A^u_{\Psi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\Psi}}} \in \mathcal{B}_u^\alpha$. Nous avons aussi

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\overline{S_u\widetilde{T_t k_0^u}} - \overline{S_u\widetilde{k_0^u}}}{t} = (1-\alpha\overline{u(0)})\overline{S_u\widetilde{\Psi}}.$$

et aussi $\forall f \in K_u^\infty$,

$$\begin{aligned} \frac{T_t - I}{t} f &= (1-\alpha\overline{u(0)})^{-1} P_u\left(\frac{T_t k_0^u - k_0^u}{t} f + \alpha \frac{\overline{S_u \widetilde{T_t k_0^u}} - \overline{S_u \widetilde{k_0^u}}}{t} f\right) \\ &\longrightarrow^{t\to 0^+} P_u(\Psi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\Psi}}) f \\ &= A^u_{\Psi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\Psi}}} f. \end{aligned}$$

Comme K_u^∞ est dense dans K_u, alose $A^u_{\Psi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\Psi}}}$ est le générateur infinitésimal du semi-groupe T_t. Comme ce générateur est borné, alors T_t est uniformément continu.
Pour les points deuxième et troisième suit du premier. □

Présentons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs de Toepliz tronqués, dans les deux proposition suivantes

Proposition. 3.3. *Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_u^\alpha$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\geq 0}$. Alors*

$$T(t) = e^{t\mathcal{A}} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{A}^n.$$

De plus, l'une des conditions suivantes est satisfaite

1. $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, $T_t = A^u_{\varphi_t + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_t}}}$ *avec*

$$\varphi_t = (1-\alpha\overline{u(0)})^{-1} e^{t\mathcal{A}} k_0^u.$$

2. $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$, $T_t = A^u_{\varphi_t + \alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi_t}} + c_t}$ *avec*

$$\varphi_t = (\alpha - u(0))^{-1} S_u e^{t\mathcal{A}} \widetilde{k_0^u}$$

   et

$$c = \frac{\alpha}{(\alpha - u(0))} < e^{t\mathcal{A}} \widetilde{k_0^u}, \widetilde{k_0^u} > .$$

3. $\alpha = \infty$, $T_t = A^u_{\overline{S_u\widetilde{\varphi_t}} + c_t}$ *avec*

$$\varphi_t = e^{t\mathcal{A}} k_0^u,$$

   et

$$c = < e^{t\mathcal{A}} \widetilde{k_0^u}, \widetilde{k_0^u} > .$$

Démonstration. Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_u^\alpha$ générateur de $(T(t))$, par théorème 3.2 nous avons

$$T(t) = e^{t\mathcal{A}} = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathcal{A}^n.$$

Si $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, et $\mathcal{A} = A^u_{\Psi+\alpha S_u\overline{\widetilde{\Psi}}}$ avec $\Psi = (1-\alpha\overline{u(0)})^{-1}\mathcal{A}k_0^u$, par corollaire 2.23 nous avons $\mathcal{A}^n = A^u_{\Psi_n+\alpha S_u\overline{\widetilde{\Psi_n}}}$ avec $\Psi_n = (1-\alpha\overline{u(0)})^{-1}\mathcal{A}^n k_0^u$ alors

$$\begin{aligned}
T_t &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq 0}^{n}\frac{t^k}{k!}\mathcal{A}^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq 0}^{n}\frac{t^k}{k!}(A^u_{\Psi+\alpha S_u\overline{\widetilde{\Psi}}})^k \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq 0}^{n}\frac{t^k}{k!}A^u_{\Psi_k+\alpha S_u\overline{\widetilde{\Psi_k}}} = \lim_{n\to\infty} A^u_{\overline{\sum_{k\geq 0}^n \frac{t^k}{k!}\Psi_k+\alpha S_u\widetilde{\sum_{k\geq 0}^n \frac{t^k}{k!}\Psi_k}}} \\
&= (1-\alpha\overline{u(0)})^{-1}\lim_{n\to\infty} A^u_{\overline{(\sum_{k\geq 0}^n \frac{t^k}{k!}\mathcal{A}^k)K_0^u+\alpha S_u\widetilde{(\sum_{k\geq 0}^n \frac{t^k}{k!}\mathcal{A}^k)K_0^u}}}. \\
&= A^u_{\varphi_t+\alpha S_u\overline{\widetilde{\varphi_t}}}.
\end{aligned}$$

avec $\varphi_t = (1-\alpha\overline{u(0)})^{-1}e^{t\mathcal{A}}k_0^u$.

Pour les deuxième et troisième points résultent de premier et Proposition 2.21. □

Proposition. 3.4. *Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_u^\alpha$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés $(T(t))_{t\geq 0}$. Alors $(T_t)_{t\geq 0}$ est défini comme suit*

1. *Si $|\alpha| = 1$, et $\mathcal{A} = \Phi(S_u^\alpha)$, avec $\Phi \in L^\infty(\mu_\alpha)$ alors*
$$T_t = e^{t\Phi}(S_u^\alpha), t \geq 0.$$
2. *Si $|\alpha| < 1$, et $\mathcal{A} = \Psi(S_u^\alpha) = A^u_{\frac{\Psi}{1-\alpha\overline{u}}}$ avec $\Psi \in H^\infty$, alors*
$$T_t = e^{t\Psi}(S_u^\alpha) = A^u_{\frac{e^{t\Psi}}{1-\alpha\overline{u}}}$$
3. *$|\alpha| > 1$, et $\mathcal{A} = \Psi^*(S_u^{1/\overline{\alpha}})^* = A^u_{\frac{\alpha\overline{\Psi}}{\alpha-u}}$, avec $\Psi \in H^\infty$ et $\Psi_t^*(z) = \overline{\Psi_t(\overline{z})}$, alors*
$$T_t = (e^{t\Psi})^*(S_u^{1/\overline{\alpha}})^* = A^u_{\frac{\alpha\overline{e^{t\Psi}}}{\alpha-u}}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{B}_u^\alpha$ générateur de $(T(t))$.
1) Si $|\alpha| = 1$, et $\mathcal{A} = \Phi(S_u^\alpha)$, alors

$$T_t = \lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq 0}^{n}\frac{t^k}{k!}\mathcal{A}^k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq 0}^{n}\frac{t^k}{k!}(\Phi)^k(S_u^\alpha) = e^{t\Phi}(S_u^\alpha).$$

Pour les deuxième et troisième points résultent de premier et calcul fonctionnel pour $\mathcal{B}_u^\alpha$ (voir chapitre 2) . □

Exemple 3.2. *(1) Soit $\lambda \in \mathbb{D}$ et soit $\mathcal{A} = \widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$ l'opérateur de Toeplitz tronqué de rang 1. Par [50], Example 4.2.12, $\mathcal{A}$ est opérateur de Toeplitz tronqué de type $u(\lambda)$,*

$$\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u = A^u_{\widetilde{k_\lambda^u} + u(\lambda)\overline{S_u k_\lambda^u}}.$$

Alors par proposition 3.3, $\mathcal{A}$ générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés $(e^{t\mathcal{A}})_{t\geq 0}$. Nous avons

$$\begin{aligned} e^{t\mathcal{A}} &= I + t(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u) + \frac{t^2}{2!}(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u)^2 + \frac{t^3}{3!}(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u)^3 + \dots \\ &= I + t(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u) + \frac{t^2}{2!}u'(\lambda)(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u) + \frac{t^3}{3!}u'(\lambda)^2(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u) + \dots \end{aligned}$$

Si $u'(\lambda) = 0$, alors

$$e^{t\mathcal{A}} = I + t(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u),$$

et si $u'(\lambda) \neq 0$, alors

$$e^{t\mathcal{A}} = I + \frac{e^{tu'(\lambda)} - 1}{u'(\lambda)}(\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u).$$

(2) Puisque l'opérateur $k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u}$ est l'opérateur adjoint de $\widetilde{k_\lambda^u} \otimes k_\lambda^u$. D'où il résulte que $(k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u})$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs de Toeplitz tronqué T_t donné par

$$\begin{aligned} T_t &= I + t(k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u}) & &\text{si } u'(\lambda) = 0. \\ T_t &= I + \frac{e^{t\overline{u'(\lambda)}} - 1}{\overline{u'(\lambda)}}(k_\lambda^u \otimes \widetilde{k_\lambda^u}) & &\text{si } u'(\lambda) \neq 0. \end{aligned}$$

(3) Supposons u admet une ADC en point $\zeta \in \mathbb{T}$, c'est-à-dire la Limite non-tangentielle de u et u' existe en ζ avec la limite de u en ζ du module 1. Soit $\mathcal{A} = k_\zeta^u \otimes k_\zeta^u$. Par [50], Example 4.2.12, $\mathcal{A}$ est opérateur de Toeplitz tronqué de type $u(\zeta)$, avec symbole $k_\zeta^u + u(\zeta)\overline{S_u \widetilde{k_\zeta^u}}$. Nous avons

$$\mathcal{A}^2 = k_\zeta^u(\zeta)(k_\zeta^u \otimes k_\zeta^u) = |u'(\zeta)|(k_\zeta^u \otimes k_\zeta^u),$$

puisque $|u'(\zeta)| \neq 0$, on déduit, d'après le point (1), que

$$T_t = e^{t\mathcal{A}} = I + \frac{e^{t|u'(\zeta)|} - 1}{|u'(\zeta)|}(k_\zeta^u \otimes k_\zeta^u).$$

(4) Soit $\alpha \in \mathbb{D}$ et soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont n solutions distinctes de l'équation $u(\lambda) = \alpha$. Soit $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \widetilde{k^u_{\lambda_j}}$, avec les a_j sont des nombres complexes. Notez que si u est un produit de Blaschke d'ordre fini de n, alors $\{\widetilde{k^u_{\lambda_j}}, 1 \leq j \leq n\}$ est une base de K_u, (voir [29]), et chaque fonction φ dans K_u donnée par $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \widetilde{k^u_{\lambda_j}}$.

Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = A^u_{\varphi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}} &= \sum_{j=1}^{n} a_j A^u_{\widetilde{k^u_{\lambda_j}}+u(\lambda_j)\overline{S_u k^u_{\lambda_j}}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \widetilde{k^u_{\lambda_j}} \otimes k^u_{\lambda_j}.\end{aligned}$$

Les opérateurs $\widetilde{k^u_{\lambda_j}} \otimes k^u_{\lambda_j}$ sont de type $u(\lambda_j) = \alpha$. De plus, ces opérateurs sont commutes, alors

$$\begin{aligned}T_t = e^{t\mathcal{A}} &= \prod_{j=1}^{n} e^{ta_j \widetilde{k^u_{\lambda_j}} \otimes k^u_{\lambda_j}} \\ &= \prod_{j\in M}\left[I + ta_j(\widetilde{k^u_{\lambda_j}} \otimes k^u_{\lambda_j})\right]\prod_{j\in N}\left[I + \frac{e^{ta_j u'(\lambda_j)}-1}{u'(\lambda_j)}(\widetilde{k^u_{\lambda_j}} \otimes k^u_{\lambda_j})\right].\end{aligned}$$

avec $M = \{j,\ u'(\lambda_j) = 0\}$ et $N = \{j,\ u'(\lambda_j) \neq 0\}$. Depuis

$$(\widetilde{k^u_{\lambda_i}} \otimes k^u_{\lambda_i})(\widetilde{k^u_{\lambda_j}} \otimes k^u_{\lambda_j}) = \widetilde{k^u_{\lambda_j}}(\lambda_i)(\widetilde{k^u_{\lambda_i}} \otimes k^u_{\lambda_j}) = 0 \quad \textit{si } i \neq j,$$

alors

$$T_t = I + t\sum_{j\in M} a_j \widetilde{k^u_{\lambda_j}} \otimes k^u_{\lambda_j} + \sum_{j\in N}\left[\frac{e^{ta_j u'(\lambda_j)}-1}{u'(\lambda_j)}(\widetilde{k^u_{\lambda_j}} \otimes k^u_{\lambda_j})\right].$$

(5) Soit u est un produit de Blaschke d'ordre fini de n et $|\alpha| = 1$. En utilisant le fait que $u' \neq 0$ dans $\mathbb{T}$, l'équation $u(\zeta) = \alpha$ a n solutions distinguées, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, qui dans le cercle unité. La famille $\left\{k^u_{\zeta_j}, 1 \leq j \leq n\right\}$ est une base orthogonale pour K_u. Pour tout $\varphi \in K_u$, $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j k^u_{\zeta_j}$, avec $a_j = \frac{\varphi(\zeta_j)}{|u'(\zeta_j)|}$, et nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = A^u_{\varphi+\alpha\overline{S_u\widetilde{\varphi}}} &= \sum_{j=1}^{n} a_j A^u_{k^u_{\zeta_j}+u(\zeta_j)\overline{S_u\widetilde{k^u_{\zeta_j}}}} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}.\end{aligned}$$

Puisque les opérateurs $k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}$ *sont commute,*

$$\begin{aligned} T_t = e^{t\mathcal{A}} &= \prod_{j=1}^{n} e^{ta_j k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \left[I + \frac{e^{ta_j |u'(\zeta_j)|} - 1}{|u'(\zeta_j)|} (k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}) \right]. \end{aligned}$$

et puisque $(k^u_{\zeta_i} \otimes k^u_{\zeta_i})(k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}) = 0$*, si* $i \neq j$*,*

$$T_t = I + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{e^{ta_j |u'(\zeta_j)|} - 1}{|u'(\zeta_j)|} (k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}) \right].$$

Théorème 3.8. *Soient* $u(z) = z^n$ *et* $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$*. Les semi-groupes uniformément continus d'opérateurs de Toeplitz tronqués sur* K_u *sont :*

$$T_t = I + \frac{1}{nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta}} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^j (e^{tc_j} - 1) \widetilde{k^u_{re^{i\theta}\omega^j}} \otimes k^u_{re^{i\theta}\omega^j},$$

$$T_t = I + \frac{1}{nr^{n-1}e^{i(1-n)\theta}} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\omega}^j (e^{tc_j} - 1) k^u_{re^{i\theta}\omega^j} \otimes \widetilde{k^u_{re^{i\theta}\omega^j}},$$

$$T_t = I + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{tc_j} - 1)(k^u_{e^{i\theta}\omega^j} \otimes k^u_{e^{i\theta}\omega^j}),$$

$$T_t = A^u_{e^{t\varphi}} \text{ et } T_t = A^u_{e^{t\overline{\varphi}}},$$

avec $0 < r < 1$*,* $\theta \in \mathbb{R}$*,* $(c_j)_{j=0}^{n-1} \in \mathbb{C}^n$ *et* $\varphi \in K_u$*.*

Démonstration. Soit $(T_t)_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs de Toeplitz tronqués sur K_u et soit $\mathcal{A}$ son générateur infinitésimal. Il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que tous les opérateurs T_t et $\mathcal{A}$ sont dans $\mathcal{B}^\alpha_u$. Nous avons l'un des cas suivants :

1. $0 < |\alpha| < 1$: notons que $\alpha = (re^{i\theta})^n$, avec $0 < r < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation $u(z) = \alpha$ sont $\lambda_j = re^{i\theta}\omega^{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$. La famille $\{\widetilde{k^u_{\lambda_j}},\ j = 1, \ldots, n\}$ est une base de K_u. Par conséquent, $A = A^u_{\varphi + \alpha \overline{S_u \widetilde{\varphi}}}$, avec $\varphi = \sum_{j=1}^n a_j \widetilde{k^u_{\lambda_j}}$, avec $(a_j)_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$. D'après l'exemple 3.2, point (4),

$$T_t = I + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{e^{ta_j u'(\lambda_j)} - 1}{u'(\lambda_j)} (\widetilde{k_{\lambda^u_j}} \otimes k^u_{\lambda_j}) \right],$$

on obtient :

$$T_t = I + \frac{1}{nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta}} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^j (e^{tc_j} - 1) \widetilde{k^u_{re^{i\theta}\omega^j}} \otimes k^u_{re^{i\theta}\omega^j},$$

Pour des nombres complexes $c_0, \dots, c_{n-1}$.

2. $1 < |\alpha| < \infty$: on applique le point (1) sur l'opérateur adjoint $(T_t^*)_{t\geq 0}$, nous avons

$$T_t^* = (e^{t\mathcal{A}})^* = e^{t(\mathcal{A})^*} = e^{tA^u_{\varphi + \frac{1}{\alpha}\overline{S_u\tilde{\varphi}}}},$$

puisque $|\frac{1}{\alpha}| < 1$, alors

$$T_t^* = I + \frac{1}{nr^{n-1}e^{i(n-1)\theta}} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^j (e^{tc_j} - 1) \widetilde{k^u_{re^{i\theta}\omega^j}} \otimes k^u_{re^{i\theta}\omega^j},$$

d'où

$$T_t = I + \frac{1}{nr^{n-1}e^{i(1-n)\theta}} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\omega}^j (e^{tc_j} - 1) k^u_{re^{i\theta}\omega^j} \otimes \widetilde{k^u_{re^{i\theta}\omega^j}}.$$

3. $|\alpha| = 1$: soit $\alpha = e^{in\theta}$. Les solutions de l'équation $u(z) = \alpha$ sont $\zeta_j = e^{i\theta}\omega^{j-1}$, $j = 1, \dots, n$. D'après l'exemple 3.2, (5),

$$T_t = I + \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{e^{ta_j|u'(\zeta_j)|} - 1}{|u'(\zeta_j)|} (k^u_{\zeta_j} \otimes k^u_{\zeta_j}) \right],$$

on obtient :

$$T_t = I + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (e^{tc_j} - 1)(k^u_{e^{i\theta}\omega^j} \otimes k^u_{e^{i\theta}\omega^j}),$$

pour des nombres complexes $c_0, \dots, c_{n-1}$.

4. $\alpha = 0$: Il existe $\varphi \in K_u$ tel que $\mathcal{A} = A^u_\varphi$. Notez que φ est une fonction holomorphie bornée. Donc

$$T_t = e^{tA^u_\varphi} = A^u_{e^{t\varphi}}.$$

5. $|\alpha| = \infty$: on applique le point (4) sur l'opérateur adjoint $(T^*)_{t\geq 0}$, on obtient alors que

$$T_t = A^u_{e^{t\overline{\varphi}}}.$$

D'autre part, toutes les familles $(T_t)_{t\geq 0}$ dans le théorème sont des semi-groupes uniformément continus. $\square$

3.4 Semi-groupes fortement continus (C_0-semi-groupes).

Dans le cadre de ce paragraphe, nous introduisons une classe plus générale que la classe des semi-groupes uniformément continus et nous étudions leurs propriétés élémentaires.

3.4.1 Préliminaires.

Pour φ dans $L^2(\mathbb{T})$. Soit T_φ, l'opérateur de Toeplitz sur H^2 avec symbole φ, avec domaine

$$D(T_\varphi) = \{f \in H^2 : P(\varphi f) \in H^2\}.$$

Espaces de De Branges-Rovnyak.

Soit b est une fonction non constante, $b \in H^\infty$, mais pas un point extrême. L'espace de de Brange-Rovnyak $\mathcal{H}(b)$ est l'image de H^2 par l'operator $(I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2}$, c'est à dir

$$\mathcal{H}(b) = (I - T_b T_{\bar{b}})^{1/2}(H^2).$$

Dans le livre de Sarason [53], il y a plusieurs propriétés de ces espaces, on a si $\|b\|_\infty < 1$ alors $\mathcal{H}(b) = H^2$ et si b est une fonction intérieure, alors $\mathcal{H}(b) = H^2 \ominus bH^2$.

Classes de Nevanlinna et Smirnov.

La classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$ dans $\mathbb{D}$ est la classe de fonctions $\varphi = \frac{\psi}{\chi}$ avec ψ, $\chi \in H^\infty$ et $\chi \neq 0$ sur $\mathbb{D}$,

$$\mathcal{N} = \{\varphi = \frac{\psi}{\chi}, \psi, \chi \in H^\infty, \chi \neq 0 \ sur\ \mathbb{D}\}.$$

La classe de Smirnov $\mathcal{N}^+ \subset \mathcal{N}$ se compose de tous $\varphi = \frac{\psi}{\chi} \in \mathcal{N}$ par que χ est extérieure,

$$\mathcal{N}^+ = \{\varphi = \frac{\psi}{\chi}, \psi, \chi \in H^\infty, \chi \neq 0 \ sur\ \mathbb{D}, \chi \ extérieure\}.$$

Il est noté dans [55] que chaque fonction non nulle φ dans $\mathcal{N}^+$ a une expression unique qu'on appelle représentation canonique, de la forme $\varphi = \frac{b}{a}$, avec a et b sont dans H^∞ , a est une fonction extérieure, $a(0) > 0$, et $|a|^2 + |b|^2 = 1, p.p$ sur $\mathbb{T}$,

$$\mathcal{N}^+ = \{\varphi = \frac{b}{a}, a, b \in H^\infty, a \ extérieure, |a|^2 + |b|^2 = 1, p.p \ sur\ \mathbb{T}, a(0) > 0\}.$$

La classe de Smirnov locale $\mathcal{N}_u^+$, qui défini par Sarason dans [54], compose de tous $\varphi = \frac{\psi}{\chi} \in \mathcal{N}$ pour que u, χ sont relativement premiers (si les seuls fonctions diviseurs intérieures de u et χ sont des fonctions constantes du module un). D'après [54], tout $\varphi \in \mathcal{N}_u^+$ a une représentation canonique unique $\varphi = \frac{b}{va}$, avec $a, b \in H^\infty$, a est une fonction extérieure, tel que $a(0) > 0, |a|^2 + |b|^2 = 1, pp \ sur\ \mathbb{T}$, v est intérieure, v, b et v, u sont relativement premiers,

$$\mathcal{N}_u^+ = \{\varphi = \frac{b}{va}, \frac{b}{a} \in \mathcal{N}^+, v \ extérieure, v, b \ et\ v, u \ sont\ relativement\ premiers\}.$$

Opérateurs de Toeplitz non-bornés.

[54]. Soit φ est une fonction non nulle dans $\mathcal{N}^+$, avec représentation canonique $\varphi = \frac{b}{a}$. L'opérateur T_φ, l'opérateur Toeplitz avec symbole φ, est par définition l'opérateur de multiplication par φ sur le domaine

$$D(T_\varphi) = \{f \in H^2 : \varphi f \in H^2\} = aH^2.$$

L'opérateur T_φ est fermé et densément défini, et son adjoint fermé et densément défini T_φ^*. Le domaine $D(T_\varphi^*) = \mathcal{H}(b)$, et le graphique

$$\mathcal{G}(T_\varphi^*) = \{f \oplus g \in H^2 \oplus H^2 : T_{\overline{b}} f = T_{\overline{a}} g\}.$$

L'opérateur $T_{\overline{\varphi}}$, l'opérateur de Toeplitz avec symbole $\overline{\varphi}$, est défini comme T_φ^*.

Opérateurs de Toeplitz tronqués non-bornés.

[54, 55]. L'opérateur $T_{\overline{\varphi}}$ induit un opérateur sur K_u, désigné par $A^u_{\overline{\varphi}}$, et défini par

$$A^u_{\overline{\varphi}} = T_{\overline{\varphi}} / D(T_{\overline{\varphi}}) \cap K_u,$$

avec domaine

$$D(A^u_{\overline{\varphi}}) = \mathcal{H}(b) \cap K_u.$$

Dans [54], Sarason a été défini l'opérateur A^u_φ, on fonction de $\varphi \in \mathcal{N}^+_u$, il utilise le calcul fonctionnel pour définir ces opérateurs : pour $\varphi \in \mathcal{N}^+_u$, avec la représentation canonique unique $\varphi = \frac{b}{va}$, on a

$$A^u_{\overline{\varphi}} = ((va)^*(S_u^*))^{-1} b^*(S_u^*),$$

où, pour une fonction ψ holomorphe dans $\mathbb{D}$, $\psi^*(z) = \overline{\psi(\overline{z})}$. Alors $A^u_{\overline{\varphi}}$ est opérateur fermé densément défini dans K_u. L'espace K_u admet un opérateur de conjugaison naturelle C, donc A^u_φ est la transformée de $A^u_{\overline{\varphi}}$ avec l'opérateur C, c'est-à-dire ,

$$\begin{aligned} D(A^u_\varphi) &= CD(A^u_{\overline{\varphi}}) = \{f : Cf \in \mathcal{H}(b) \cap K_u\} \\ A^u_\varphi Cf &= CA_{\overline{\varphi}} f, \forall f \in D(A^u_{\overline{\varphi}}). \end{aligned}$$

Dans [54], Sarason prolonge les résultats de Suárez dans [61],dans le théorème suivant

Théorème 3.9. *Un opérateur fermé A densément défini dans K_u commute avec S_u si et seulement si $A = \varphi(S_u)$ où $\varphi \in \mathcal{N}^+_u$.*

Quelques propriétés intéressantes dans les articles de Sarason [54, 55], sont regroupées, pour $\varphi \in \mathcal{N}_u^+$:

(i) Les opérateurs A_φ^u et $A_{\overline{\varphi}}^u$ sont adjoints l'un de l'autre.

(ii)

$$\mathcal{G}(A_\varphi^u) = \{f \oplus g \in K_u \oplus K_u : A_b^u f = A_{va}^u g\},$$

et

$$\mathcal{G}(A_{\overline{\varphi}}^u) = \{f \oplus g \in K_u \oplus K_u : A_{\overline{b}}^u f = A_{\overline{va}}^u g\}.$$

(iii) Soit $\psi \in H^\infty$, alors

$$A_{\overline{\psi}}^u A_{\overline{\varphi}}^u f = A_{\overline{\varphi}}^u A_{\overline{\psi}}^u f = A_{\overline{\varphi}\overline{\psi}}^u f$$

pour f dans $D(A_{\overline{\varphi}}^u)$.

(iv) $A_{\overline{\varphi}}^u f = A_{1/\overline{v}}^u A_{\overline{b}/\overline{a}}^u f$ pour f dans $D(A_{\overline{\varphi}}^u)$.

(v) Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions non nulles dans $\mathcal{N}_u^+$. Alors $A_{\overline{\varphi_1}}^u = A_{\overline{\varphi_2}}^u$ si et seulement si u divise $\varphi_1 - \varphi_2$.

Semi-groupes similaires.

[19]. Soient $(T_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur X, avec son générateur infinitésimale A sur $D(A)$, et V est un isomorphisme d'un espace Hilbert Y dans X, alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur Y donné par

$$S(t) := V^{-1}T(t)V,$$

et son générateur

$$B = V^{-1}AV$$

avec le domaine

$$D(B) = \{y \in Y : Vy \in D(A)\}.$$

et le résolvant de B est

$$R(\lambda, B) = V^{-1}R(\lambda, A)V, \quad \lambda \in \rho(A).$$

En particulier, si V est un isomorphisme unitaire, nous disons que B et A sont unitairement équivalents.

3.4.2 Opérateurs non-bornés commutes avec le Shift généralisé S_u^α.

Dans la suite, nous présenterons quelques conditions nécessaires pour qu'un opérateur non-bornés commutes avec le Shift généralisé S_u^α.

Si $\alpha = 0$, ou $\alpha = \infty$.

Si $\alpha = 0$ alors $S_u^\alpha = S_u$, si $\alpha = \infty$ alors $S_u^\alpha = S_u^*$. Par Sarason [54, 55], nous avons les résultats suivants

Théorème 3.10. *1. Un opérateur fermé A densément défini dans K_u commute avec S_u si et seulement si $A = \varphi(S_u)$ où $\varphi \in \mathcal{N}_u^+$.*

2. Un opérateur fermé A densément défini dans K_u commute avec S_u^* si et seulement si $A = \varphi^*(S_u^*)$ où $\varphi \in \mathcal{N}_u^+$ et $\varphi^*(z) = \overline{\varphi(\overline{z})}$.

Si $\alpha \in \mathbb{D}$.

Rappelons que $u_\alpha = \frac{u-\alpha}{1-\overline{\alpha}u}$, pour $\alpha \in \mathbb{D}$ et $T_\alpha = M_{(1-|\alpha|^2)^{-1/2}(1-\overline{\alpha}u)}$ est un opérateur unitaire de K_{u_α} dans K_u. Nous avons $T_\alpha^{-1} = M_{(1-|\alpha|^2)^{1/2}(1-\overline{\alpha}u)^{-1}}$ (voir sous-section transformation de Crofoot 2.3.1), par suite, on a

$$T_\alpha^{-1} S_u^\alpha T_\alpha = S_{u_\alpha}.$$

Soient $(T_t)_{t\geq 0}$ et $(S_t)_{t\geq 0}$ sont des semi-groupes fortement continus avec des générateurs respectifs $(A, D(A))$ et $(B, D(B))$ dans K_u, K_{u_α} respectivement, nous avons

$$T_t = T_\alpha S_t T_\alpha^{-1}$$

alors T_t, S_t sont similaires, de plus

$$A = T_\alpha B T_\alpha^{-1} \text{ avec domaine } \quad D(B) = \{f \in K_u : T_\alpha^{-1} f \in D(A)\}.$$

Si φ est dans H^∞ et $A_\varphi^{u_\alpha}$ est borné, on a d'après Théorème 2.12 $T_\alpha A_\varphi^{u_\alpha} T_\alpha^{-1}$ coïncide avec $A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}$ and $T_\alpha A_{\overline{\varphi}}^{u_\alpha} T_\alpha^{-1}$ coïncide avec $A^u_{\frac{\overline{\varphi}}{1-\overline{\alpha}u}}$. Ces formules donnent la définition suivante.

Définition 3.3. *Pour $\alpha \in \mathbb{D}$ et $\varphi \in \mathcal{N}_{u_\alpha}^+$, nous fixons*

$$T_\alpha A_\varphi^{u_\alpha} T_\alpha^{-1} = A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}$$

et

$$T_\alpha A_{\overline{\varphi}}^{u_\alpha} T_\alpha^{-1} = A^u_{\frac{\overline{\varphi}}{1-\overline{\alpha}u}}.$$

Proposition. 3.5. *Soit $\varphi \in \mathcal{N}^+_{u_\alpha}$. Alors l'opérateur $A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}$ avec domaine*

$$D(A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}) = \left\{ f \in K_u : \frac{f}{1-\overline{\alpha}u} \in D(A^{u_\alpha}_\varphi) \right\},$$

est fermé et densément défini commute avec S^α_u, sur K_u.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{N}^+_{u_\alpha}$, par Théorème 3.9 $A^{u_\alpha}_\varphi$ est un opérateur fermé densément défini sur K_{u_α} commute avec S_u sur $D(A^{u_\alpha}_\varphi)$, et par [54]

$$\mathcal{G}(A^{u_\alpha}_\varphi) = \{f \oplus g \in K_{u_\alpha} \oplus K_{u_\alpha} : A^{u_\alpha}_b f = A^{u_\alpha}_{va} g\},$$

et nous avons T_α opérateur unitaire de K_{u_α} dans K_u, alors $A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}$, et $A^{u_\alpha}_\varphi$ Sont unitairement équivalents. ($A^{u_\alpha}_\varphi$ est un opérateur fermé densément défini sur K_{u_α} commute avec S_u sur $D(A^{u_\alpha}_\varphi)$ if and only if $A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}$ est un opérateur fermé densément défini sur K_u commute avec S^α_u sur $D(A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}})$). □

Proposition. 3.6. *Soit $\varphi \in \mathcal{N}^+_{u_\alpha}$. Alors les opérateurs $A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}$, $A^u_{\frac{\overline{\varphi}}{1-\overline{\alpha}u}}$ sont adjoints l'un de l'autre.*

Démonstration. Soit l'opérateur $A^u_{\frac{\overline{\varphi}}{1-\overline{\alpha}u}}$ sur le domaine

$$\begin{aligned} D(A^u_{\frac{\overline{\varphi}}{1-\overline{\alpha}u}}) &= D(T_\alpha A^{u_\alpha}_{\overline{\varphi}} T^{-1}_\alpha) \\ &= \{f \in K_u : T^{-1}_\alpha f \in D(A^{u_\alpha}_{\overline{\varphi}})\}, \\ &= \{f \in K_u : \frac{f}{1-\overline{\alpha}u} \in D(A^{u_\alpha}_{\overline{\varphi}})\}. \end{aligned}$$

Comme T_α est unitaire, d'après [54], $A^{u_\alpha}_\varphi$ et $A^{u_\alpha}_{\overline{\varphi}}$ sont adjoints l'un de l'autre, d'où

$$\begin{aligned} (A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}})^* &= T_\alpha (A^{u_\alpha}_\varphi)^* T^{-1}_\alpha \\ &= T_\alpha A^{u_\alpha}_{\overline{\varphi}} T^{-1}_\alpha. \\ &= A^u_{\frac{\overline{\varphi}}{1-\overline{\alpha}u}}. \end{aligned}$$

□

Proposition. 3.7. *(Interprétation de calcul fonctionnel de $A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}}$).*
Un opérateur fermé A densément défini dans K_u commute avec S^α_u si et seulement si

$$A = A^u_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}} = \varphi(S^\alpha_u) = ((va)(S^\alpha_u))^{-1} b(S^\alpha_u),$$

avec $\varphi = \frac{b}{va} \in \mathcal{N}^+_{u_\alpha}$.

Démonstration. Par Théorème 3.9, un opérateur fermé A densément défini dans K_{u_α} commute avec S_{u_α} si et seulement si

$$A_{\varphi}^{u_\alpha} = \varphi(S_{u_\alpha}) = ((va)(S_{u_\alpha})^{-1}b(S_{u_\alpha})$$

où $\varphi \in \mathcal{N}_{u_\alpha}^{+}$, comme T_α est unitaire, alors

$$\begin{aligned} A^{u}_{\frac{\varphi}{1-\alpha\overline{u}}} &= T_\alpha A_{\varphi}^{u_\alpha} T_\alpha^{-1} \\ &= T_\alpha \varphi(S_{u_\alpha}) T_\alpha^{-1} \\ &= \varphi(T_\alpha S_{u_\alpha} T_\alpha^{-1}) \\ &= \varphi(S_u^\alpha) \\ &= ((va)(S_u^\alpha))^{-1} b(S_u^\alpha). \end{aligned}$$

□

Si $\alpha \in \mathbb{C}/\overline{\mathbb{D}}$**.**

Les résultats ci-dessus,(le cas $|\alpha| < 1$), s'appliquent à A^* pour obtenir des résultats similaires pour A. Dans ce cas, nous avons

Proposition. 3.8. *1. Un opérateur fermé A densément défini dans K_u commute avec S_u^α si et seulement si $A = A^{u}_{\frac{\alpha\overline{\varphi}}{\alpha-u}}$ avec $\varphi \in \mathcal{N}^{+}_{u(1/\overline{\alpha})}$, avec domaine $D(A^{u}_{\frac{\alpha\overline{\varphi}}{\alpha-u}}) = \{f \in K_u : \frac{\alpha f}{\alpha-u} \in D(A_{\overline{\varphi}}^{u(1/\overline{\alpha})})\}$.*

2. Un opérateur fermé A densément défini dans K_u commute avec $(S_u^{1/\overline{\alpha}})^*$ si et seulement si

$$A = A^{u}_{\frac{\alpha\overline{\Phi}}{\alpha-u}} = \Phi^*((S_u^{1/\overline{\alpha}})^*) = ((va)^*((S_u^{1/\overline{\alpha}})^*))^{-1} b^*((S_u^{1/\overline{\alpha}})^*),$$

avec $\Phi \in \mathcal{N}^{+}_{u_{1/\overline{\alpha}}}$, et $\Phi^*(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}$.

Si $\alpha \in \mathbb{T}$**.**

S_u^α est un opérateur unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication $M_z(f) = zf$ sur $L^2(\mu_\alpha)$. En effet, pour $f \in L^2(\mu_\alpha)$, soit

$$(V_\alpha f)(z) = (1 - \overline{\alpha}u(z)) \int \frac{f(\zeta)}{1-\overline{\zeta}z} d\mu_\alpha(\zeta).$$

alors V_α est un opérateur unitaire de $L^2(\mu_\alpha)$ dans K_u et nous avons $S_u^\alpha = V_\alpha M_z V_\alpha^{-1}$.

Pour une fonction mesurable $\Phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, l'opérateur de multiplication M_Φ est défini par

$$\begin{aligned} D(M_\varphi) &= \{f \in L^2(\mu_\alpha) : \varphi f \in L^2(\mu_\alpha)\} \\ M_\varphi f &= \varphi f, \quad f \in D(M_\varphi). \end{aligned}$$

M_Φ est un opérateur fermé et densément défini sur $L^2(\mu_\alpha)$ (voir [19], Proposition 4.10, pp. 31). Nous fixons $\Phi(S_u^\alpha) = V_\alpha M_\Phi V_\alpha^{-1}$ avec domaine $\{f \in K_u,\ V_\alpha^{-1} f \in D(M_\Phi)\}$. Dans ce cas nous avons

Proposition. 3.9. *Soit $\alpha \in \mathbb{T}$. Un opérateur fermé A densément défini dans K_u commute avec S_u^α si et seulement si $A = \Phi(S_u^\alpha)$ pour certaines fonctions mesurables $\Phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit B un opérateur densément fermé sur $L^2(\mu_\alpha)$ qui commute avec M_z et $M_{\overline{z}}$. Donc, B commute avec M_P pour chaque polynôme trigonométrique P. Soit $\Psi \in L^2(\mu_\alpha)$. Il existe une suit uniformément borné de fonctions continues sur le support de μ_α qui converge vers Ψ, $\mu_\alpha - p.p.$ Voir théorème de Lusin. Par l'extension du Théorème Tietze-Urysohn, ces fonctions sont des fonctions continues sur $\mathbb{T}$. Par suit, il existe une suit uniformément borné de polynôme trigonométrique $(P_n)_n$ qui convergent vers Ψ, $\mu_\alpha - p.p.$ Pour $f \in D(B)$, on obtient en utilisant le théorème de convergence dominé

$$< M_{P_n} f, BM_{P_n} f >=< M_{P_n} f, M_{P_n} Bf >\to_{n\to\infty}< M_\Psi f, M_\Psi Bf > .$$

Comme B est fermé, on obtient que $M_\Psi f \in D(B)$ et que $BM_\Psi f = M_\Psi Bf$, Ce qui signifie que B commute avec M_Ψ. De l'autre côté par ([15], Corollaire 6.9, p. 279), l'algèbre de multiplication $A = \{M_\Psi; \Psi \in L^2(\mu_\alpha)\}$, et son commutateur coïncide. Il résulte de ([41], Théorème 5.6.4, pp. 343-344) que $B = M_\Phi$ Pour une fonction mesurable $\Phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$. Maintenant, on applique le résultat $V_\alpha^{-1} A V_\alpha$ Pour un opérateur A fermé densément défini sur K_u commute S_u^α. □

3.4.3 C_0-semi-groupes.

Nous obtenons alors le résultat suivant, qui donne la commutativité ente le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe et le Shift généralisé S_u^α.

Proposition. 3.10. *Soit $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$. Le générateur infinitésimal A du C_0-semi-groupe $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}_u^\alpha$ est fermé avec domaine $D(A)$ dense dans K_u. De plus,*

(i) si $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$, $S_u^\alpha(D(A)) \subseteq D(A)$ et pour tout f dans $D(A), S_u^\alpha Af = AS_u^\alpha f$.

(ii) si $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}|\overline{\mathbb{D}}$, $(S_u^{1|\overline{\alpha}})^*(D(A)) \subseteq D(A)$ et pour tout f dans $D(A), (S_u^{1|\overline{\alpha}})^* Af = A(S_u^{1|\overline{\alpha}})^* f$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$. Soit f est un élément arbitraire du domaine $D(A)$ de A. Donc, il existe une fonction f_0 dans K_u tel que

$$\lim_{t\to 0^+} \|\frac{T_t f - f}{t} - f_0\| = 0.$$

De plus, $Af = f_0$. Depuis S_u^α est un opérateur borné sur K_u et T_t commutes avec S_u^α pour tout t, nous avons que

$$\lim_{t\to 0^+} \|\frac{T_t S_u^\alpha(f) - S_u^\alpha(f)}{t} - S_u^\alpha(f_0)\| = 0.$$

Alors, $S_u^\alpha(f)$ est dans $D(A)$ et

$$AS_u^\alpha(f) = S_u^\alpha(f_0) = S_u^\alpha Af.$$

Par conséquent $S_u^\alpha(D(A)) \subseteq D(A)$ et $S_u^\alpha Af = AS_u^\alpha f$ pour tout f dans $D(A)$.
Si $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}|\overline{\mathbb{D}}$, nous avons $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}_u^\alpha$, commutes avec $(S_u^{1|\overline{\alpha}})^*$ qui résulte du premier. □

Nous commençons par la commutativité ente les résolvants de A et S_u^α.

Corollaire 3.11. *Pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ dans l'ensemble résolvant de A_φ^u, il existe une fonction φ_λ tel que l'une des conditions suivantes est satisfaite*

1. *Si $|\alpha| = 1$, alors $R(\lambda, A_\varphi^u) = \Phi_\lambda(S_u^\alpha)$, avec $\Phi_\lambda \in L^\infty(\mu_\alpha)$.*
2. *Si $|\alpha| < 1$, alors $R(\lambda, A_\varphi^u) = \Phi_\lambda(S_u^\alpha) = A^u_{\frac{\Phi_\lambda}{1-\alpha\overline{u}}}$, avec $\Phi_\lambda \in H^\infty$.*
3. *Si $|\alpha| > 1$, alors $R(\lambda, A_\varphi^u) = \Phi_\lambda(S_u^{1/\overline{\alpha}})^* = A^u_{\frac{\overline{\alpha\Phi_\lambda}}{\alpha-u}}$, avec $\Phi_\lambda \in H^\infty$.*

Démonstration. Soit f est une fonction dans le domaine $D(A)$ de A. Puisque A commutes avec S_u^α, $S_u^\alpha(D(A)) \subseteq D(A)$. Depuis $R(\lambda, A_\varphi^u)f$ est dans $D(A)$, $S_u^\alpha R(\lambda, A_\varphi^u)f$ est dans $D(A)$. Par conséquent

$$S_u^\alpha f = S_u^\alpha(\lambda I - A_\varphi^u)R(\lambda, A_\varphi^u)f = (\lambda I - A_\varphi^u)S_u^\alpha R(\lambda, A_\varphi^u)f,$$

et donc

$$R(\lambda, A_\varphi^u)S_u^\alpha f = R(\lambda, A_\varphi^u)(\lambda I - A_\varphi^u)S_u^\alpha R(\lambda, A_\varphi^u)f = S_u^\alpha R(\lambda, A_\varphi^u)f.$$

donc

$$R(\lambda, A_\varphi^u)S_u^\alpha = S_u^\alpha R(\lambda, A_\varphi^u) \ sur\ D(A).$$

puisque $D(A)$ est dense dans K_u,

$$R(\lambda, A_\varphi^u)S_u^\alpha = S_u^\alpha R(\lambda, A_\varphi^u) \ sur\ K_u.$$

Alors l'une des conditions suivantes est satisfaite

1. si $|\alpha| = 1$, alors $R(\lambda, A^u_\varphi) = \Phi_\lambda(S^\alpha_u)$, avec $\Phi_\lambda \in L^\infty(\mu_\alpha)$.
2. Si $|\alpha| < 1$, alors $R(\lambda, A^u_\varphi) = \Phi_\lambda(S^\alpha_u) = A^u_{\frac{\Phi_\lambda}{1-\alpha\overline{u}}}$, avec $\Phi_\lambda \in H^\infty$.
3. Si $|\alpha| > 1$, alors $R(\lambda, A^u_\varphi) = \Phi_\lambda(S^{1/\overline{\alpha}}_u)^* = A^u_{\frac{\alpha\overline{\Phi_\lambda}}{\alpha-u}}$, avec $\Phi_\lambda \in H^\infty$.

$\square$

Le résultat suivant donne une condition nécessaire aux générateurs de semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz tronqués.

Proposition. 3.12. *Si A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz tronqués sur K_u. Alors l'une des l'une des formes suivantes :*

1. *$A = \Phi(S^\alpha_u)$, pour certains $\alpha \in \mathbb{T}$ et une fonction mesurable Φ.*
2. *$A = A^u_{\frac{\Phi}{1-\alpha\overline{u}}} = \Phi(S^\alpha_u) = ((va)(S^\alpha_u))^{-1}b(S^\alpha_u)$, pour certains $\alpha \in \mathbb{D}$ et $\Phi \in \mathcal{N}^+_{u_\alpha}$.*
3. *$A = A^u_{\frac{\alpha\overline{\Phi}}{\alpha-u}} = \Phi^*((S^{1/\overline{\alpha}}_u)^*) = ((va)^*((S^{1/\overline{\alpha}}_u)^*))^{-1}b^*((S^{1/\overline{\alpha}}_u)^*)$, pour certains $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ et $\Phi \in \mathcal{N}^+_{u_{1/\overline{\alpha}}}$ avec $\Phi^*(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}$.*
4. *$A = A^u_{\overline{\Phi}}$, pour certains $\Phi \in \mathcal{N}^+_u$.*

Démonstration. Soit A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(T_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs de Toeplitz tronqués sur K_u. Il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que tous les opérateurs T_t sont dans $\mathcal{B}^\alpha_u$. Les opérateurs T_t commute avec S^α_u. Cela implique que A commute avec S^α_u. Les propositions 3.7, 3.8 et 3.9 et le théorème 3.10 donnent les cas (1),(2),(3), et (4). $\square$

Dans la suite nous présentons le théorème qui donne la caractérisation des C_0-semi-groupes de contractions sur K_u.

Théorème 3.11. *Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ est une famille sur K_u. Alors $(T_t)_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs de Toeplitz tronqués de contraction si et seulement s'il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$, tel qu'une des conditions suivantes est satisfaite*

1. *$|\alpha| < 1$ et il existe une fonction C, analytique et ayant une partie réelle négative sur le disque unité ouvert, tel que*
$$T_t = A^u_{\frac{e^{tC}}{1-\alpha\overline{u}}}.$$
2. *$1 < |\alpha| < +\infty$ et il existe une fonction C, analytique et ayant une partie réelle négative sur le disque unité ouvert, tel que*
$$T_t = A^u_{\frac{\alpha e^{t\overline{C}}}{\alpha-u}}.$$

3. *$\alpha = \infty$, et il existe une fonction C, analytique et ayant une partie réelle négative sur le disque unité ouvert, tel que*
$$T_t = A^u_{e^{t\overline{C}}}.$$

4. *$|\alpha| = 1$ et il existe une fonction mesurable q tel que $\underset{\zeta\in\mathbb{T}}{esssup} Re(q(\zeta)) \leq 0$ et*
$$T_t = e^{tq}(S^\alpha_u).$$

Démonstration. Soit $(T_t)_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur K_u. Ensuite, il existe $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$, de sorte que pour chaque $t \geq 0$, $T_t \in \mathcal{B}^\alpha_u$. Nous avons les cas suivants :

1. $|\alpha| < 1$. Alors $(T_\alpha^{-1} T_t T_\alpha)_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe sur K_{u_α} commute avec S_{u_α}. Par theorem 2 de [57], il en résulte une fonction analytique C sur $\mathbb{D}$, avec une partie réelle négative et telle que
$$T_\alpha^{-1} T_t T_\alpha = A^{u_\alpha}_{e^{tC}}, t \geq 0.$$
Donc
$$T_t = T_\alpha A^{u_\alpha}_{e^{tC}} T_\alpha^{-1} = A^u_{\frac{e^{tC}}{1-\alpha\overline{u}}}.$$

2. $1 < |\alpha| \leq +\infty$, T_t commutes avec S^α_u, alors T_t^* commutes avec $S_u^{1/\overline{\alpha}}$, et donc le résultat ci-dessus applique à T_t^* pour obtenir des résultats similaires pour T_t. Dans ce cas, nous avons
$$T_t = (T_t^*)^* = (A^u_{\frac{e^{tC}}{1-\overline{(\frac{u}{\alpha})}}})^* = A^u_{\frac{\alpha e^{t\overline{C}}}{\alpha - u}}.$$

3. $\alpha \in \mathbb{T}$, $(V_\alpha^{-1} T_t V_\alpha)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de multiplication sur $L^2(\mu_\alpha)$. Par proposition 4.11 of [47] il existe une fonction mesurable q sur $\mathbb{T}$ tel que $\underset{\zeta\in\mathbb{T}}{esssup} Re(q(\zeta)) \leq \infty$, et
$$V_\alpha^{-1} T_t V_\alpha = M_{e^{tq}}.$$
Il en résulte que
$$T_t = V_\alpha M_{e^{tq}} V_\alpha^{-1} = e^{tq}(S^\alpha_u).$$
Puisque$(T_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de contraction, puis $\underset{\zeta\in\mathbb{T}}{esssup} Re(q(\zeta)) \leq 0$.

□

Chapitre 4

Estimation de la fonction de comptage de Nevanlinna et opérateurs de composition sur les espaces de Dirichlet.

4.1 Opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet.

4.1.1 Espace de Dirichlet.

On pose

$$dA_\alpha(z) = (1+\alpha)(1-|z|^2)^\alpha dA(z).$$

Les espaces de Dirichlet dont donnés par :

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}), \|f\|_\alpha^2 = |f(0)|^2 + \mathcal{D}_\alpha(f) \right\}.$$

Où

$$\mathcal{D}_\alpha(f) = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z).$$

Ainsi lorsque $\alpha = 1$, $\mathcal{D}_1 = H^2$ est l'espace de Hardy classique et lorsque $\alpha = 0$, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$ est l'espace de Dirichlet classique.

La notation $A \lesssim B$ signifie qu'il existe une constante C absolue que $A \leqslant CB$. Nous écrivons $A \asymp B$ si $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.

Nous avons la proposition suivante :

Proposition. 4.1. *Soit* $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{D}_\alpha$ *alors*

$$\|f\|_\alpha^2 \asymp \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{1-\alpha} |a_n|^2.$$

Pour montre ce résultat nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2.

$$\int_0^1 r^n (1-r^2)^\alpha dr \asymp \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r^n (1-r^2)^\alpha dr &= \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n (1-r^2)^{1-(1-\alpha)} dr + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 r^n (1-r^2)^\alpha dr \\
&\lesssim n^{(1-\alpha)} \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n (1-r^2) dr + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 r (1-r^2)^\alpha dr \\
&\lesssim n^{(1-\alpha)} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^{(1+\alpha)}} \\
&\lesssim \frac{1}{n^{1+\alpha}}.
\end{aligned}$$

De plus

$$\int_0^1 r^n (1-r^2)^\alpha dr \geq \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n (1-r^2)^\alpha dr \geq \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{1-\frac{1}{n}} r^n dr \gtrsim \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

donc

$$\int_0^1 r^n (1-r^2)^\alpha dr \asymp \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

□

Démonstration. de la Proposition 4.1.

Soit $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. On écrit :

$$\|f\|_\alpha^2 - |a_0|^2 = \frac{1+\alpha}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\sum_{k=1} k a_k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta}|^2 d\theta r (1-r^2)^\alpha dr.$$

Par la formule de Parseval, pour chaque $r \in (0,1)$ on a

$$\|f\|_\alpha^2 - |a_0|^2 = 2(1+\alpha) \sum_{k=1} k^2 |a_k|^2 \int_0^1 r^{2k-1} (1-r^2)^\alpha dr.$$

donc

$$\|f\|_\alpha^2 \asymp \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)^{1-\alpha} |a_n|^2.$$

□

4.1.2 Opérateurs de composition sur l'espace $\mathcal{D}_\alpha$.

Pour une fonction holomorphe φ à partir de disque unité de lui-même, $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$, on défini l'opérateur de composition sur $\mathcal{D}_\alpha$ par :

$$\begin{aligned} C_\varphi : \mathcal{D}_\alpha &\longrightarrow \mathcal{D}_\alpha \\ f &\longmapsto f \circ \varphi. \end{aligned}$$

Dans ce travail nous étudions certaines propriétés de cet opérateur lorsqu'il est bien défini tel la bornitude, la compacité ainsi que l'appartenance à la classe de Hilbert Schmidt. Rappelons que C_φ est toujours bien défini sur H^2 mais ce n'est pas le cas dans $\mathcal{D}_\alpha$ pour $0 \leq \alpha < 1$, voir [7, 20, 35, 26, 64, 23].

Soit $0 < \alpha \leq 1$, la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna associée à $\mathcal{D}_\alpha$, est donnée par :

$$N_{\varphi,\alpha}(z) := \begin{cases} \sum_{z=\varphi(w), w\in\mathbb{D}} (1-|w|)^\alpha, & z \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}, \\ \\ 0, & z \notin \varphi(\mathbb{D}). \end{cases}$$

Notons que lorsque $\alpha = 1$, $N_{\varphi,1}$ est comparable a la fonction de comptage de Nevanlinna classique que nous redéfinissons de la manière suivante

$$N_{\varphi,1}(z) = \sum_{z=\varphi(w)} \log(1/|w|), \qquad w \in \mathbb{D} \setminus \{\varphi(0)\}.$$

Notons que $\log 1/|w| \asymp 1 - |w|, |w| \to 1^-$.

On associé à l'opérateur de composition sur l'espace de Dirichlet classique $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$, (le cas où $\alpha = 0$), la fonction de comptage $n_\varphi = N_{\varphi,0}$ donné par

$$n_\varphi(z) = \operatorname{card}\{w : \varphi(w) = z\}$$

c'est le nombre de zéros de de la fonction $\varphi - z$.

La fonction de comptage généralisée de Nevanlinna joue un rôle essentiel dans l'étude de l'opérateur de composition. L'estimation de $N_{\varphi,\alpha}$ s'avère compliqué en générale. Dans ce travail nous allons donner une majoration de la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna par la normes des itérées du symbole φ. Ceci va nous permettre de construire quelques exemple d'opérateur borné et compact dans $\mathcal{D}_\alpha$.

Nous avons besoins des résultats suivants, le premier lemme donne la formule de changement de variable en terme de la fonction de comptage voir [60].

Lemme 4.3. *Soient $0 \leq \alpha \leq 1$, $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe et soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{D}$ on a :*

$$\int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi)(z)|\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) = (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} f(z) N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z).$$

Démonstration. On suppose que φ n'est pas constante.

L'ensemble $\mathbf{Z} = \{z \in \mathbb{D} : \varphi'(z) = 0\}$ est dénombrable et $\mathbb{D} \backslash \mathbf{Z}$ peut s'écrire comme une union des rectangles disjoints $\mathbf{R}_j$ où sur chaqu'un φ est biholomorphe. On note par ψ_j l'inverse de la restriction de φ sur $\mathbf{R}_j$.

Par la formule de changement de variable usuel, avec $z = \psi_j(w)$, pour tout j on a :

$$\int_{\mathbf{R}_j} (f \circ \varphi)(z)|\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) = (1 + \alpha) \int_{\varphi(\mathbf{R}_j)} f(w)(1 - |\psi_j(w)|^2)^\alpha dA(w).$$

Par sommation sur j, on déduit que :

$$\int_{\mathbb{D} \backslash \mathbf{Z}} (f \circ \varphi)(z)|\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) = (1 + \alpha) \int_{\mathbb{D}} f(w) \left(\sum_j \chi_j(w)(1 - |\psi_j(w)|^2)^\alpha \right) dA(w).$$

Où χ_j est la fonction caractéristique de l'ensemble $\varphi(\mathbf{R}_j)$.

L'ensemble $\mathbf{Z}$ est dénombrable donc il est de mesure nulle, donc le premier membre de l'équation égale

$$\int_{\mathbb{D}} (f \circ \varphi)(z)|\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z).$$

Et aussi si $w \in \varphi(\mathbb{D})/\varphi(\mathbf{Z})$ on a

$$\sum_j \chi_j(w)(1 - |\psi_j(w)|^2)^\alpha = \sum_{w \in \varphi(\mathbb{D}), \varphi(z) = w} (1 - |z|^2)^\alpha = N_{\varphi,\alpha}(w).$$

□

Pour $\alpha > 0$ la fonction de comptage géneralisé $N_{\varphi,\alpha}$ vérifie l'inégalité de la moyenne (voir[33]), plus précisément, nous avons :

Lemme 4.4. *Soit $0 < \alpha \leq 1$. Si $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, alors*

$$N_{\varphi,\alpha}(z) \leq \frac{2}{r^2} \int_{D(z,r)} N_{\varphi,\alpha}(w) dA(w).$$

pour tout disque $D(z, r)$ de centre z et de rayon r et telle que $D(z, r) \subset \mathbb{D} \setminus D(0, \frac{1}{2})$

Démonstration. Soit $w(z) = (1-|z|^2)^\alpha$, on a $\lim_{|z|\to 1^-} w(z) = 0$, par le théorème de Green, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$ nous avons

$$\begin{aligned} w(\lambda) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) \log |\frac{z-\lambda}{1-\overline{\lambda}z}|(z) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) \log |\gamma_z^{-1}(\lambda)| dA(z). \end{aligned}$$

Où

$$\gamma_z(\delta) = \frac{z+\delta}{1+\overline{z}\delta}$$

Puisque w est concave et décroissant alors $\Delta(w(r)) = \Delta(w(z)) = w'(r)/r + w''(r) < 0$, pour $0 < \alpha < 1$,et

$$\begin{aligned} N_{\varphi,\alpha}(\zeta) = \sum_{\varphi(\lambda)=\zeta} w(\zeta) &= \frac{1}{2}\sum_{\varphi(\lambda)=\zeta} \int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) \log |\gamma_z^{-1}(\lambda)| dA(z) \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z))(\sum_{\varphi(\lambda)=\zeta} -\log |\gamma_z^{-1}(\lambda)|) dA(z). \end{aligned}$$

Nous avons $\varphi(\lambda) = \zeta$ si est seulement si $\varphi \circ \gamma_z(\gamma_z^{-1}(\lambda)) = \zeta$ donc on a

$$N_{\varphi,\alpha}(\zeta) = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) N_{\varphi\circ\gamma_z,1}(\zeta) dA(z).$$

Où

$$N_{\varphi\circ\gamma_z,1}(\zeta) = \sum_{\varphi\circ\gamma_z(\lambda)=\zeta} \log \frac{1}{|\lambda|}.$$

$$\begin{aligned} N_{\varphi,\alpha}(\zeta) &\leq -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z))[\frac{1}{r^2}\int_{D(\zeta,r)} N_{\varphi\circ\gamma_z,1}(\lambda) dA(\lambda)] dA(z) \\ &= \frac{1}{r^2}\int_{D(\zeta,r)} [-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \Delta(w(z)) N_{\varphi\circ\gamma_z,1}(\lambda) dA(z)] dA(\lambda) \\ &= \frac{1}{r^2}\int_{D(\zeta,r)} N_{\varphi,\alpha}(\lambda) dA(\lambda). \end{aligned}$$

□

4.2 Lien entre $N_{\varphi,\alpha}$ et $\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)$.

Nous avons besoins le théorème de Kellay–Lefèvre suivant,(Théorèmes 1.3 et 1.4 [33])

Théorème 4.1. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors pour $0 < \alpha \leq 1$,*

1. *C_φ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha$ $\iff$ $N_{\varphi,\alpha} = O(1-|z|)^\alpha$, $\quad |z| \to 1^-$.*

2. *C_φ est compact dans $\mathcal{D}_\alpha$* $\iff$ $N_{\varphi,\alpha} = o(1-|z|)^\alpha, \quad |z| \to 1^-$.

Démonstration. (i)
$\Leftarrow$) Soit $N_{\varphi,\alpha} = O(1-|z|)^\alpha, |z| \to 1^-$, d'après le changement de variable dans le lemme 4.3 on a

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi(f)\|_\alpha^2 &= |f(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |(f' \circ \varphi)(z)|^2 |\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) \\
&= |f(0)|^2 + (1+\alpha) \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\
&\lesssim |f(0)|^2 + (1+\alpha) \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1-|z|^2)^\alpha dA(z) \\
&\asymp \|f\|_\alpha^2.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$)Supposons maintenant que C_φ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha$, On considère la fonction test donnée par

$$F_\lambda(z) = \frac{(1-|\lambda|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{(1-\overline{\lambda} z)}, \qquad \lambda, z \in \mathbb{D}.$$

Et

$$\begin{aligned}
\|F_\lambda\|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 &= \| \sum_n \overline{\lambda} z^n \|_{\mathcal{D}_\alpha}^2 (1-|\lambda|^2)^{2-\alpha} \\
&\asymp (\sum_n (1+n)^{1-\alpha} |\lambda|^{2n})(1-|\lambda|^2)^{2-\alpha} \\
&\asymp 1.
\end{aligned}$$

nous avons, par l'inégalité de la moyenne (Lemme 4.4)

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha(C_\varphi(F_\lambda)) &= \int_{\mathbb{D}} |\,(F_\lambda(\varphi(w))'\,|^2 dA_\alpha(w) \\
&= (1+\alpha) \int_{\mathbb{D}} |F_\lambda'(z)| N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\
&\asymp (1-|\lambda|^2)^{2-\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{|1-\overline{\lambda} z|^4} dA(z) \\
&\gtrsim (1-|\lambda|^2)^{2-\alpha} \int_{D(\lambda, \frac{1-|\lambda|}{2})} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{|1-\overline{\lambda} z|^4} dA(z) \\
&\gtrsim (1-|\lambda|^2)^{-2-\alpha} \int_{D(\lambda, \frac{1-|\lambda|}{2})} N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\
&\gtrsim \frac{N_{\varphi,\alpha}(\lambda)}{(1-|\lambda|^2)^\alpha}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}(\lambda)}{(1-|\lambda|^2)^\alpha} \lesssim \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \|C_\varphi(F_\lambda)\|_\alpha^2 \lesssim \|C_\varphi\|^2 \sup_{\lambda \in \mathbb{D}} \|F_\lambda\|_\alpha^2 \lesssim \|C_\varphi\|^2 < \infty.$$

(ii)($\Leftarrow$) Soit $N_{\varphi,\alpha} = o(1-|z|)^\alpha, |z| \to 1^-$, Soit $(f_n)_n$ est une suite dans $\mathcal{D}_\alpha$ convergence faiblement vers 0, Il suffit de montrer que $\|C_\varphi(f_n)\|_\alpha \to 0, n \to \infty$. La convergence faible de f_n à 0 implique que $f_n \to 0$ et $f'_n \to 0$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$. Soit $\varepsilon > 0$ il existe $\rho_\varepsilon \in (\frac{1}{2}, 1)$ tel que

$$N_{\varphi,\alpha} \leq \varepsilon(1-|z|)^\alpha, \text{ pour } \rho_\varepsilon < |z| < 1.$$

Par changement variable on a

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi(f_n)\|_\alpha &= |f_n(\varphi(0))|^2 + \int_{\mathbb{D}} |(f'_n \circ \varphi)(z)|^2 |\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) \\
&\asymp |f_n(0)|^2 + (1+\alpha) \int_{\mathbb{D}} |f'_n(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\
&\leq |f_n(0)|^2 + \int_{\rho_\varepsilon \mathbb{D}} |f'_n(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) + \varepsilon \int_{\varphi(\mathbb{D})|\rho_\varepsilon \mathbb{D}} |f'_n(z)|^2 (1-|z|)^\alpha dA(z) \\
&\leq |f_n(0)|^2 + \int_{\rho_\varepsilon \mathbb{D}} |f'_n(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

nous avons $f'_n \to 0$ uniformément sur le disque fermé $\rho_\varepsilon \overline{\mathbb{D}}$, donc $\|C_\varphi(f_n)\|_\alpha \to 0, n \to \infty$.

$\Rightarrow$) Supposons que pour $\beta > 0$ et la suite $\lambda_n \in \mathbb{D}$ tel que $|\lambda_n| \to 1^-$ et

$$N_{\varphi,\alpha}(\lambda_n) \geq \beta(1-|\lambda_n|)^\alpha.$$

On a la fonction test

$$f_n(z) = \frac{(1-|\lambda_n|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{(1-\overline{\lambda_n} z)}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

c'est une suit bornée dans $\mathcal{D}_\alpha$ converge faiblement vers 0.En effet, elle est convergente uniformément vers 0 sur les compacts,on a

$$(1-|\lambda_n|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}} \leq 2(1-|\lambda_n|^2)^{(1-\frac{\alpha}{2})/2}$$

D'autre part, par le changement de variable et inégalité de la moyenne, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|f_n \circ \varphi\|_\alpha^2 &\asymp \int_{\mathbb{D}} |\left(f_n(\varphi(w))\right)'|^2 dA_\alpha(w) \\
&\asymp (1-|\lambda_n|^2)^{2-\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{|1-\overline{\lambda_n} z|^4} dA(z) \\
&\geq c_1 (1-|\lambda_n|^2)^{-2-\alpha} \int_{D(\lambda_n, \frac{1-|\lambda_n|}{2})} N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \\
&\geq c_2 \frac{N_{\varphi,\alpha}(\lambda_n)}{(1-|\lambda_n|^2)^\alpha} \\
&\geq c_2 \beta.
\end{aligned}$$

où c_1, c_2 sont indépendants de n. Donc C_φ n'est pas compact, contradiction. $\square$

Nous avons maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 4.2. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Soit $0 < \alpha \leq 1$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ pour tout $n \geq n_0$ on a :*

$$N_{\varphi,\alpha}(z) \leq \frac{8e^4}{\alpha+1}\mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}), \qquad \frac{1}{n} \leq 1-|z| \leq \frac{1}{n-1}.$$

Démonstration. Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand de sorte que $n \geq n_1$ alors $D(1-1/n-1, 1/2(n+1) \subset \mathbb{D} \setminus D(0, \frac{1}{2})$. Soit et suppose que $n_1 \in \mathbb{N}$ $1/n \leq 1-|z| \leq 1/(n-1)$. Puisque $N_{\varphi,\alpha}$ vérifie l'inégalité de la moyenne Lemme 4.4 on a

$$\begin{aligned} N_{\varphi,\alpha}(z) &\leq 2 \times 4(n+1)^2 \int_{D(z,1/2(n+1))} N_{\varphi,\alpha}(w)dA(w) \\ &= 8(n+1)^2 \int_{D(z,1/2(n+1))} N_{\varphi,\alpha}(w)\frac{|w|^{2n}}{|w|^{2n}}dA(w) \\ &\leq 8(n+1)^2\Big[\sup_{D(z,1/2(n+1))} |w|^{-2n}\Big] \int_{D(z,1/2(n+1))} N_{\varphi,\alpha}(w)|w|^{2n}dA(w). \end{aligned}$$

Maintenant, il est facile de voir qu'il existe $n_0 \geq n_1$ suffisamment grand de sorte que pour chaque $n \geq n_0$

$$\sup_{D(z,1/2(n+1))} |w|^{-2n} \leq e^4.$$

Donc,

$$\begin{aligned} N_{\varphi,\alpha}(z) &\leq 8e^4(n+1)^2 \int_{D(z,1/2(n+1))} N_{\varphi,\alpha}(w)|w|^{2n}dA(w) \\ &\leq 8e^4(n+1)^2 \int_{\mathbb{D}} N_{\varphi,\alpha}(w)|w|^{2n}dA(w). \end{aligned}$$

D'autre part, par Lemma 4.3 on a

$$\int_{\mathbb{D}} N_{\varphi,\alpha}(w)|w|^{2n}dA(w) = \frac{1}{1+\alpha}\int_{\mathbb{D}} |\varphi'(\eta)|^2|\varphi(\eta)|^{2n}dA_\alpha(\eta).$$

Ainsi

$$N_{\varphi,\alpha}(z) \leq \frac{8e^4}{1+\alpha}\mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}), \qquad \frac{1}{n} \leq 1-|z| \leq \frac{1}{n-1}.$$

Le preuve est maintenant terminée.

$\square$

En conséquence de cela, nous obtenons

Corollaire 4.5. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe et soit $0 < \alpha \leq 1$. Alors*

1. *Si* $\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n) = O(1/n^\alpha)$ *alors* C_φ *est borné sur* $\mathcal{D}_\alpha$.
2. *Si* $\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n) = o(1/n^\alpha)$ *alors* C_φ *est compact sur* $\mathcal{D}_\alpha$.

On se propose de donner une autre preuve comme celle qui a été donée par El-Fallah, Kellay, Shabankhah et Youssfi dans [23], dans le cas de Dirichlet ($\alpha = 0$) voir Corollaire 4.9. On considère la fonction test donnée par

$$F_\lambda(z) = \frac{(1-|\lambda|^2)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{(1-\overline{\lambda}z)}, \qquad \lambda, z \in \mathbb{D}.$$

Nous avons besoin du lemme suivant ([23]) pour redémontrer le corollaire 4.5.

Lemme 4.6. *Soit* $\varphi \in \mathcal{D}_\alpha$ *telle que* $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $0 < \alpha \leq 1$,*alors*

1. C_φ *est borné dans* $\mathcal{D}_\alpha \iff \sup_{\lambda\in\mathbb{D}} \|F_\lambda \circ \varphi\|_{\mathcal{D}_\alpha} < \infty$.
2. C_φ *est compact dans* $\mathcal{D}_\alpha \iff \lim_{|\lambda|\to 1^-} \|F_\lambda \circ \varphi\|_{\mathcal{D}_\alpha} = 0$.

Preuve du Corollaire 4.5.

On suppose que $\varphi(0) = 0$. Si $\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n) = o(1/n^\alpha)$ alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\alpha(C_\varphi(F_\lambda)) &= \int_{\mathbb{D}} |\,(F_\lambda(\varphi(w))'\,|^2 dA_\alpha(w) \\
&\leq c_1(1-|\lambda|^2)^{2-\alpha} \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(w)|^2}{(1-|\lambda\varphi(w)|^2)^4} dA_\alpha(w) \\
&\leq c_2(1-|\lambda|^2)^{2-\alpha} \sum_{n\geq 0}(1+n)^3|\lambda|^{2n} \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(w)|^2|\varphi(w)|^{2n} dA_\alpha(w) \\
&\leq c_3(1-|\lambda|^2)^{2-\alpha} \sum_{n\geq 0}(1+n)|\lambda|^{2n}\mathcal{D}_\alpha(\varphi^{n+1}) \\
&\leq c_4(1-|\lambda|^2)^{2-\alpha}\Big[\sum_{0\leq n\leq N}(1+n)^{1-\alpha}|\lambda|^{2n} + o\Big(\sum_{n\geq N}(1+n)^{1-\alpha}|\lambda|^{2n}\Big)\Big] \\
&\asymp o(1), \quad |\lambda| \to 1^-.
\end{aligned}$$

Avec c_1, c_2, c_3 et c_4 sont des constantes positifs. Donc C_φ est compact, pour la bornitude c'est la même preuve.

4.3 Lien entre n_φ et $\mathcal{D}(\varphi^n)$.

Le lemme suivant nous donne une majoration de n_φ par la norme dans $\mathcal{D}$ des itérées de φ.

Lemme 4.7. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe*

$$\int_{1-\frac{1}{m}\leq|z|\leq 1} n_\varphi(z)dA(z) \leq e^4 \frac{\mathcal{D}_0(\varphi^{m+1})}{(1+m)^2}, \quad m \geq 2.$$

Démonstration. Depuis $N_{\varphi,0} = n_\varphi$, par le Lemme 4.3 nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_0(\varphi^{m+1}) &= (m+1)^2 \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(z)|^2 |\varphi^m(z)|^2 dA(z) \\
&= (m+1)^2 \int_{\mathbb{D}} n_\varphi(w)|w|^{2m} dA(w) \\
&\geq (m+1)^2 \int_{1-\frac{1}{m}\leq|w|\leq 1} n_\varphi(w)|w|^{2m} dA(w) \\
&\geq (m+1)^2 \big(1-\frac{1}{m}\big)^{2m} \int_{1-\frac{1}{m}\leq|z|\leq 1} n_\varphi(w)dA(w) \\
&\geq e^{-4}(m+1)^2 \int_{1-\frac{1}{m}\leq|z|\leq 1} n_\varphi(w)dA(w), \qquad m \geq 2,
\end{aligned}$$

Le preuve est maintenant terminée. □

Nous obtenons le résultat suivant qui est le théorème principal dans cette section et donne une relation entre le comportement moyen de n_φ et $\mathcal{D}_0(\varphi^m)$

Théorème 4.3. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est une fonction holomorphe. Alors*

$$\inf_{1-\frac{1}{m}\leq|z|\leq 1-\frac{1}{m+1}} n_\varphi(z) \leq \frac{e^4}{\pi} \mathcal{D}_0(\varphi^{m+1}), \qquad m \geq 2.$$

Démonstration. D'après Lemme (4.3) et l'inégalité suivante

$$\int_{1-\frac{1}{m}\leq|z|\leq 1} n_\varphi(z)dA(z) \geq \frac{\pi}{(m+1)^2} \inf_{1-\frac{1}{m}\leq|z|\leq 1-\frac{1}{m+1}} n_\varphi(z).$$

on a le preuve. □

L'ensemble de Carleson est définit par

$$W(\zeta,\delta) = \{z \in \mathbb{D} : |z| > 1-\delta; \quad |\arg(\overline{\zeta} z)| < \delta\}, \qquad \zeta \in \mathbb{T}.$$

Pour $\zeta \in \mathbb{T}$ et $\delta \in (0,1)$, l'ensemble

$$\mathcal{N}(\zeta,\delta) := \int_{W(\zeta,\delta)} n_\varphi(w)dA(w).$$

Nous allons utiliser le lemme de Zorboska [64, 33] suivant

Lemme 4.8. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe.*

1. *C_φ est borné dans $\mathcal{D}$* $\iff$ $\sup_{\zeta\in\mathbb{T}}\mathcal{N}(\zeta,\delta)=O(\delta^2)\quad \delta\to 0.$
2. *C_φ est compact dans $\mathcal{D}$* $\iff$ $\sup_{\zeta\in\mathbb{T}}\mathcal{N}(\zeta,\delta)=o(\delta^2)\quad \delta\to 0.$

Le corollaire suivant a été obtenu par El-Fallah-Kellay-Shabankah-Youssfi [23], ici la preuve qui découle immédiatement du Théorème 4.3 et le Lemme 4.8

Corollaire 4.9. *Soit $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ une fonction holomorphe. Alors*

1. *Si $\mathcal{D}_0(\varphi^n)=O(1)$ alors C_φ est borné dans $\mathcal{D}$.*
2. *Si $\mathcal{D}_0(\varphi^n)=o(1)$ alors C_φ est compact dans $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{D}_0(\varphi^n)=O(1)$ .Soit $\delta>0$ et soit $m\geq 1$ telle que $1/(m+1)\leq\delta\leq 1/m$. par Lemme 4.3 nous avons

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{T}}\mathcal{N}(\zeta,\delta)\leq\int_{1-\frac{1}{m}\leq|z|\leq 1}n_\varphi(z)dA(z)=O(1/(1+m)^2)=O(\delta^2).$$

Le lemme 4.8 donne le résultat. Une preuve similaire pour la compacité. □

Li-Queffélec-Rodriguez-Piazza ont montré que ce résultat est essentiellement optimale [37].

4.4 Exemples.

Rappelons que pour $f\in H^2$, la limite radial f^* de f est donne par

$$f^*(e^{it}):=\lim_{r\to 1-}f(re^{it}).$$

Par le théorème de Fatou, la limite radial f^* existe presque partout sur $\mathbb{T}$. Noter que $\log|f^*|\in L^1(\mathbb{T})$. La fonction f est extérieure si

$$\log|f(0)|=\int_{\mathbb{T}}\log|f^*(\zeta)|\frac{|d\zeta|}{2\pi}.$$

Dans ce cas, la fonction a la représentation intégrale suivante

$$f(z)=\exp\int_{\mathbb{T}}\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\log|f^*(\zeta)|\frac{|d\zeta|}{2\pi},\qquad z\in\mathbb{D}.$$

Soit K un ensemble fermé de $\mathbb{T}$, et soit $\Omega\in\mathcal{C}^1([0.2\pi])$, tel que $\Omega(0)=0$ et

$$\int_{\mathbb{T}}\Omega(d(\zeta,K))|d\zeta|<\infty.$$

La fonction de distance correspondant à Ω, K est la fonction extérieure $\varphi_{\Omega,K}$ satisfaisant

$$|\varphi_{\Omega,K}(\zeta)| = e^{-\Omega(d(\zeta,K))} \qquad p.p \quad sur \quad \mathbb{T}. \tag{4.1}$$

Par conséquent

$$\varphi_{\Omega,K}(z) = \exp \int_{\mathbb{D}} \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\Omega(d(\zeta,K))\frac{|d\zeta|}{2\pi}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Si Ω vérifie la condition de Dini

$$\int_0^{\pi} \frac{\Omega(t)}{t} < \infty,$$

Alors la fonction $\varphi_{\Omega,K}$ appartient à l'algèbre du disque [31, p105-106] et dans ce cas nous avons $|\varphi(z)| \leq 1$ et l'ensemble des point de contact de $\varphi_{\omega,K}$ sur le cercle coincide avec K,ce qui signifie que

$$|\varphi_{\Omega,K}| = 1 \quad sur\ K.$$

Rappelons d'abord la construction du Cantor généralisé sur $\mathbb{T}$. Soit $K_0 = \mathbb{T}$ et $l_0 = 2\pi$. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de réels positive avec $a_1 < \frac{1}{2}$. Nous enlevons l'intervalle de longueur a_1 du milieu de K_0 .On obtient deux intervalles de longueur l_1 qu'on notera K_1.Puis encore nous enlevons deux intervalles centrés de longueur a_2 de chaque intervalle de K_1. Soit K_2 l'union de 2^2 intervalles restent chacun de longueur l_2. A la n'ième étape nous aurons un ensemble K_n de 2^n intervalles de longueur l_n. Note que $2l_n + a_n = l_{n-1}$. Le compact $K = \cap_{n\geq 1} K_n$ est appelé le contor généralisé. Il est facile de voir que K a la mesure de Lebesgue nulle si et seulement si $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}a_n = 2\pi$. L'ensemble de Cantor classique correspond à $l_n = \frac{1}{3^n}$.
Soit $t > 0$. Pour une partie fermée K de $\mathbb{T}$, le t–voisinage de K est donné par

$$K_t = \{\zeta \in \mathbb{T} : d(\zeta, K) \leq t\}.$$

Pour les ensembles de Cantor généralisé nous avons une estimation de $|K_t|$ donne par [22].

Proposition. 4.10. *Soit K est l'ensemble de Cantor généralisé associée à la suite $(a_n)_n$. Si*

$$\lambda_K := \sup_{n\geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}. \tag{4.2}$$

alors

$$|K_t| = O(t^{\mu_K}) \qquad t \to 0 \tag{4.3}$$

où $\mu_K = 1 - \log 2/\log(1/\lambda_K)$.

Démonstration. Soit $t \in (0, a_0]$, on choisit n tel que $a_n < t \leq a_{n-1}$. alors

$$|K_t| \leq 2^n(a_n + 2t) \leq 3.2^n t$$

Aussi

$$2^{n-1} = (\frac{1}{\lambda_K^{n-1}})^{\frac{\log 2}{\log(\frac{1}{\lambda_K})}} \leq (\frac{a_0}{t})^{\frac{\log 2}{\log(\frac{1}{\lambda_K})}}$$

donc

$$|K_t| \leq c(a_0, \lambda_K) t^{1 - \log 2/\log(1/\lambda_K)}.$$

□

L'ensemble de Cantor classique K correspond à $\mu_K = 1 - \log 2/\log 3$.

Nous avons besoin le théorème suivant que donné par [22] cas $\alpha \in (0, 1]$, et [21] le cas $\alpha = 0$.

Théorème 4.4. *Soit $\alpha \in [0, 1]$. Soit K est l'ensemble fermé de $\mathbb{T}$ vérifie (4.2), et soit $\Omega : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante telle que $t \to \Omega(t^\gamma)$ est concave pour quelque $\gamma > 2/(1 - \alpha)$. Soit f_Ω une fonction extérieure vérifie*

$$|f_\Omega^*(\zeta)| = \Omega(d(\zeta, K) \qquad p.p \quad sur \quad \mathbb{T}$$

alors

$$\mathcal{D}_\alpha(f_\Omega) \leq c(\alpha, \gamma, K) \int_{\mathbb{T}} \Omega'(d(\zeta, K))^2 d(\zeta, K)^{\alpha+1} |d\zeta|.$$

Lemme 4.11. *Soit K un ensemble fermé de $\mathbb{T}$ et $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable on a*

$$\int_{\mathbb{T}} h(d(\zeta, K))|d\zeta| = \int_0^1 h(t)\mathcal{N}_K(t)dt$$

où $\mathcal{N}_K(t) = 2\sum_j \chi_{\{|I_j| > 2t\}}$, $\quad 0 < t < \pi$, avec $\pi/K = \cup_j I_j$.

Notons que si $h(t) = \chi_{[0,\delta]}$ alors

$$\int_0^\delta \mathcal{N}_K(t)dt = \int_\pi |\{d(\zeta, K) < \delta\}| = |K_\delta|.$$

En particulier $\delta \mathcal{N}_K(\delta) \leq |K_\delta|$.

Nous avons la formule suivante qui calculer explicitement la norme pour la fonction extérieure.

Lemme 4.12. *Soit $\alpha \in [0,1]$. Soit K est l'ensemble fermé de $\mathbb{T}$ vérifie (4.2), et soit $\Omega : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante telle que $t \to \Omega(t^\gamma)$ est concave pour quelque $\gamma > 2/(1-\alpha)$. Alors*

$$\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega,K}) \le c \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2 e^{-2\Omega(t)} t^\alpha |K_t| dt,$$

avec c est constant positif.

Démonstration. Soit $\alpha \in [0,1]$. Soit K est l'ensemble de vérifie (4.2), et soit $\Omega : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante telle que $t \to \Omega(t^\gamma)$ est concave pour quelque $\gamma > 2/(1-\alpha)$. Soit la fonction extérieure $\varphi_{\Omega,K}$ satisfaisant

$$|\varphi_{\Omega,K}(\zeta)| = e^{-\Omega(d(\zeta,K))} \qquad p.p \quad sur \quad \mathbb{T}.$$

Alors d'après Théorème 4.4 on a

$$\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega,K}) \le c \int_{\mathbb{T}} \Omega'(d(\zeta,K)) e^{-2\Omega(d(\zeta,K))} d(\zeta,K)^{\alpha+1} |d\zeta|,$$

et d'après Lemme 4.11 on a

$$\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega,K}) \le c \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2 e^{-2\Omega(t)} t^\alpha |K_t| dt.$$

avec c est constant positif. □

4.4.1 Exemples d'estimations de fonction de comptage de Nevanlinna généralisé.

Nous allons donner une certaine estimation de fonction de comptage de Nevanlinna généralisée associée à la fonction de la distance donnée par (5.4). E nous allons donner quelques exemples d'opérateurs de composition bornés et compacts sur les espaces de Dirichlet par Corollaire 4.5.

Nous commençons par le cas de l'espace de Hardy ($\alpha = 1$).

Lemme 4.13. *Soit K est un ensemble fermé de $\mathbb{T}$ et soit $\Omega : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante telle que $\Omega(0) = 0$. Soit $\varphi = \varphi_{\Omega,K}$, alors*

$$N_\varphi(z) \lesssim \inf_{\varepsilon>0} \{|K_\varepsilon| + e^{-2\frac{\Omega(\varepsilon)}{1-|z|}}\}, \qquad |z| < 1.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par le Lemme 4.2 et pour $1/n \leq 1-|z| \leq 1/(n-1)$, $n \geq 2$, nous avons

$$\begin{aligned} N_{\varphi,1}(z) &\lesssim \int_{\mathbb{T}} e^{-2(n+1)\Omega(d(\zeta,K))} \frac{|d\zeta|}{2\pi} \\ &= \int_{\zeta\in K_\varepsilon} e^{-2(n+1)\Omega(d(\zeta,K))} \frac{|d\zeta|}{2\pi} + \int_{\zeta\in \mathbb{T}\setminus K_\varepsilon} e^{-2(n+1)\Omega(d(\zeta,K))} \frac{|d\zeta|}{2\pi} \\ &\lesssim |K_\varepsilon| + e^{-2(n+1)\Omega(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

□

Théorème 4.5. *Soit K un ensemble de Cantor généralisé associé à la suite $(a_n)_n$ vérifie (4.2) et soit $\Omega(t) = t^\beta$ tel que $\beta > \mu_K$, alors*

$$N_{\varphi,1}(z) = O((1-|z|)^{\mu_K/\beta}(\log 1/(1-|z|))^{\mu_K/\beta}), \qquad |z| \to 1-$$

Démonstration. Par (5.6) et Lemme 4.13 nous obtenons

$$N_{\varphi,1}(z) \lesssim \inf_{\varepsilon>0}\{\varepsilon^{\mu_K} + e^{-\frac{2\varepsilon^\beta}{1-|z|}}\}, \qquad |z| < 1.$$

Il suffit de choisir $\varepsilon^\beta = (1-|z|)(\log 1/(1-|z|)^{\mu_K/\beta})$. □

Maintenant, nous considérons l'espace de Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$ où $0 < \alpha < 1$.

Théorème 4.6. *Soit $0 < \alpha < 1$. Soit K l'ensemble de Cantor généralisé associé à la suite $(a_n)_n$ vérifie (4.2) tel que $\alpha + \mu_K \geq 1$. Soit $\Omega(t) = t^\beta$ tel que $\beta < \min\{(1-\alpha)/2, \alpha+\mu_K-1\}$. Let $\varphi = \varphi_{\Omega,K}$, alors*

$$N_{\varphi,\alpha}(z) = O((1-|z|)^{(\alpha+\mu_K-1)/\beta})(z \to 1-),$$

Démonstration. Depuis $\beta < (1-\alpha)/2$, il existe $\gamma > 2/(1-\alpha)$ tel que $\Omega(t^\gamma)$ est concave. Note que

$$\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n_{\Omega,K}) = \mathcal{D}_\alpha(\varphi_{n\Omega,K})$$

Ainsi, par Lemme 4.12 et (4.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\alpha(\varphi^n_{\Omega,K}) &= \mathcal{D}_\alpha(\varphi_{n\Omega,K}) \\ &\leq c_1 n^2 \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2 t^\alpha |K_t| e^{-2n\Omega(t)} dt \\ &= c_1 n^2 \int_0^{2\pi} t^{2\beta-2+\alpha+\mu_K} e^{-2nt^\beta} dt \\ &\leq c_2 n^2 \int_0^1 u^{(\beta+\alpha+\mu_K-1)/\beta} e^{-nu} du \\ &= O(1/n^{(\alpha+\mu_K-1)/\beta}). \end{aligned}$$

On termine par le théorème 4.2.

□

4.4.2 Exemples d'opérateurs de composition de Hilbert-Schmidt.

Maintenant, nous allons donner quelques exemples d'opérateurs dans la classe de Hilbert Schmidt. Soit $\mathcal{H}$ est un espace. On note $\mathcal{S}_2(\mathcal{H})$ la classe des opérateurs de Hilbert Schmidt. Nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.14. *Soit $0 \leq \alpha < 1$, et soit φ est une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $C_\varphi \in \mathcal{S}_2(\mathcal{D}_\alpha)$.

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)}{(1+n)^{1-\alpha}} < \infty$.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2+\alpha}}\, dA_\alpha(z) < \infty$.

(iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{(1-|z|^2)^{2+\alpha}} dA(z) < \infty$.

Démonstration. Nous montrons d'abord l'équivalence (i) et (ii). Let $e_n = z^n/(1+n)^{\frac{1-\alpha}{2}}$. Depuis $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ est une base orthonormée de $\mathcal{D}_\alpha$ et $C_\varphi(e_n) = \varphi^n/(1+n)^{\frac{1-\alpha}{2}}$, alors $C_\varphi \in S_2(\mathcal{D}_\alpha)$ si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|C_\varphi(e_n)\|_\alpha^2 \quad = \quad \sum_{n\geq 1} \frac{|\varphi(0)|^{2n}}{(1+n)^{1-\alpha}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)}{(1+n)^{1-\alpha}} < \infty.$$

Note que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|\varphi(0)|^{2n}}{(1+n)^{1-\alpha}} \asymp \frac{|\varphi(0)|^2}{(1-|\varphi(0)|^2)^\alpha} < \infty.$$

Maintenant, nous montrons l'équivalence (ii) et (iii). Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)}{(1+n)^{1-\alpha}} &\asymp \int_{\mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\infty} (1+n)^{1+\alpha} |\varphi(z)|^{2n-2} |\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) \\ &\asymp \int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^{2+\alpha}}\, dA_\alpha(z).\end{aligned}$$

Enfin, l'équivalence (iii) et (iv) suit le changement de variable de Lemme 4.3. □

Le résultat suivant a été obtenu par [23] pour l'espace de Dirichlet , $\alpha = 0$.

Théorème 4.7. *Soit $0 \leq \alpha < 1$. Soit K l'ensemble de Cantor généralisé vérifier (4.2), et soit $\Omega : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction croissante telle que $t \to \Omega(t^\gamma)$ est concave pour quelque $\gamma > 2/(1-\alpha)$. si*

$$\int_0^1 \frac{\Omega'(t)^2}{\Omega(t)^{2+\alpha}}\, t^\alpha |K_t| dt < \infty, \tag{4.4}$$

alors $C_{\varphi_{\Omega,K}} \in S_2(\mathcal{D}_\alpha)$.

Démonstration. Par Lemme 4.14 and Lemme 4.12, nous avons

$$\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{\Omega,K}) \leq c \int_0^{2\pi} \Omega'(t)^2\, e^{-2\Omega(t)}\, t^\alpha |K_t|\, dt.$$

Depuis $\varphi_{\Omega,K}^n = \varphi_{n\Omega,K}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'_{\Omega,K}(z)|^2}{(1-|\varphi_{\Omega,K}(z)|^2)^{2+\alpha}}\, dA_\alpha(z) &\asymp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi_{n\Omega,K})}{n^{1-\alpha}} \\
&\leq c_1 \int_0^1 \Omega'(t)^2\, t^\alpha |K_t| \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha e^{-2n\Omega(t)} \\
&\leq c_2 \int_0^1 \frac{\Omega'(t)^2}{[1-e^{-2\Omega(t)}]^{2+\alpha}}\, t^\alpha |K_t|\, dt,
\end{aligned}$$

avec c_1 et c_2 sont constants positifs. En notant que

$$1 - e^{-2\Omega(t)} \asymp \Omega(t),$$

nous obtenons le résultat. □

Chapitre 5

Opérateurs de composition dans les classes de Schatten.

5.1 Définitions.

Dans ce paragraphe nous définissons les valeurs singulières d'un opérateur compact, agissant sur un espace de Hilbert séparable $\mathcal{H}$, et nous introduisons les classes de Schatten S_p.

Définition 5.1. *Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert et T un opérateur compact défini de $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$. Les valeurs singulières $\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*$, de T sont les valeurs propres de l'opérateur $(TT^*)^{1/2}$, (est un opérateur compact défini positif), listées par ordre décroissant en module.*

Définition 5.2. *On dit qu'un opérateur compact T défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_1$ dans $\mathcal{H}_2$, est de Schatten de classe p, $0 < p < \infty$, autrement dit $T \in S_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, si la suite des valeurs singulières qui lui est associée $(\lambda_n)_n$ est dans l^p (i.e $\sum_n |\lambda_n|^p < \infty$). Si $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, on pose $S_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_1) := S_p(\mathcal{H}_1)$.*

Dans ce chapitre, nous étudions la propriété de certains opérateurs de composition dans les espaces de Dirichlet aux classes de Schatten en fonction de la taille des ensembles de niveau du symbole. Pour $s \in (0, 1)$, l'ensemble de niveau $E_\varphi(s)$ de φ est donnée par.

$$E_\varphi(s) = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\varphi(\zeta)| \geq s\},$$

et nous avons $E_\varphi := E_\varphi(1)$ l'ensemble des points de contact du symbole φ avec le cercle unité. Cette approche permet de donner des exemples explicites de l'opérateur de composition appartenant à la classe Schatten.

Pau et Paleaz dans [42] montre que pour $p \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}^{p/2}(z)}{(1-|z|^2)^{2+\alpha p/2}} dA(z) < \infty \iff C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha).$$

Pour plus d'informations sur les classes de Schatten voir par exemple [63].

5.2 Classes de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$.

Dans cette section on s'intéresse aux opérateurs de compositions associées à des fonctions holomorphes définies sur $\mathbb{D}$ dans lui même. Nous étudierons l'appartenance dans les classes de Schatten dans l'espace $\mathcal{D}_\alpha$ de ces opérateurs en terme de les ensembles de niveau et de la norme de φ^n. Nous avons besoin les lemmes suivants

Lemme 5.1. *[42] Soit $p \geq 0$. Soit φ est une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, alors*

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}^{p/2}(z)}{(1-|z|^2)^{2+\alpha p/2}} dA(z) < \infty \iff C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha).$$

Lemme 5.2. *Soit φ est une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, alors*

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} N_\varphi(re^{it}) \frac{dt}{2\pi} \leq (1-r)|E_\varphi(r)|$.

2. $N_\varphi(z) \lesssim |E_\varphi(|z| - (1-|z|)/2)|$ *pour tout* $z \in \mathbb{D}$ *tel que* $|z| > 2/3$.

Démonstration. (1) Soit $\log^+(x) = \max\{\log(x), 0\}$, alors par [32, Theorem 3.1], on a

$$\int_0^{2\pi} N_\varphi(re^{it}) \frac{dt}{2\pi} = -\log^+ \frac{|\varphi(0)|}{r} + \int_r^1 \frac{|E_\varphi(t)|}{t} dt$$

nous avons, si $r \leq t$ alors $|E_\varphi(t)| \leq |E_\varphi(r)|$, par conséquent

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} N_\varphi(re^{it}) \frac{dt}{2\pi} &\leq -\log^+ \frac{|\varphi(0)|}{r} + |E_\varphi(r)| \int_r^1 \frac{dt}{t} \\ &\leq (1-r)|E_\varphi(r)|.\end{aligned}$$

(2). Comme N_φ vérifie l'inegalité de la moyenne (voir [60]), nous avons pour tout disque $D(z,\rho)$ de rayon ρ, et centre z avec $D(z,\rho)\subset\mathbb{D}\setminus D(0,1/2)$

$$\begin{aligned}
N_\varphi(z) &\leq \frac{2}{\rho^2}\int_{D(z,\rho)} N_\varphi(w)dA(w)\\
&\leq \frac{2}{r^2}\int_{(|w|-|z|)\leq\rho} N_\varphi(w)dA(w)\\
&\leq \frac{2}{r^2}\int_{r=|z|-\rho}^{r=|z|+\rho}\int_0^{2\pi} N_\varphi(re^{i\theta})rdrd\theta\\
&\leq \frac{2}{\rho^2}\int_{r=|z|-\rho}^{r=|z|+\rho}(1-r)|E(r)|rdr\\
&\leq \frac{2}{\rho^2}(1-|z|+\rho)|E(|z|-\rho)\int_{r=|z|-\rho}^{r=|z|+\rho} rdr\\
&\leq \frac{4}{\rho}(1-|z|+\rho)|E(|z|-\rho).
\end{aligned}$$

On pose $\rho=(1-|z|)/2$, on a

$$N_\varphi(z)\leq 12|E_\varphi(|z|-(1-|z|)/2)|$$

pour $|z|-\rho>1/2$, c'est-à-dire $|z|>2/3$. □

Théorème 5.1. *Soit φ est une fonction injective. Si l'une des deux conditions est satisfaite*

1. *Si $\alpha p/2\leq 1$ et*
$$\int_0^1 \frac{|E_\varphi(r)|^{\alpha p/2}}{(1-r)^2}dr<\infty$$
2. *Si $\alpha p/2\geq 1$ et*
$$\int_0^1 \frac{|E_\varphi(r)|^{\alpha p/2}}{(1-r)^{1+\alpha p/2}}dr<\infty$$

alors $C_\varphi\in\mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$.

Démonstration. Soit φ est une fonction injective, alors

$$N_{\varphi,\alpha}(z)=N_\varphi^\alpha(z).$$

Si $\alpha p/2\leq 1$, par Lemme 5.2 et l'inégalité de Jensen , nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}}\frac{N_{\varphi,\alpha}^{p/2}(z)}{(1-|z|^2)^{2+\alpha p/2}}dA(z) &= \int_0^1\Big(\int_0^{2\pi} N_\varphi^{\alpha p/2}(re^{i\theta})\frac{d\theta}{\pi}\Big)\frac{rdr}{(1-r)^{2+\alpha p/2}}\\
&\lesssim \int_0^1\Big(\int_0^{2\pi} N_\varphi(re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}\Big)^{\alpha p/2}\frac{rdr}{(1-r)^{2+\alpha p/2}}\\
&\lesssim \int_0^1\frac{|E_\varphi(r)|^{\alpha p/2}}{(1-r)^2}dr.
\end{aligned}$$

Si $\alpha p/2 \geq 1$, par Lemme 5.2

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} N_\varphi^{\alpha p/2}(re^{i\theta})d\theta &= \int_0^{2\pi} N_\varphi^{\alpha p/2-1}(re^{i\theta})N_\varphi(re^{i\theta})d\theta \\
&\lesssim |E_\varphi(r-(1-r)/2)|^{\alpha p/2-1}\int_0^{2\pi} N_\varphi(re^{i\theta})d\theta \\
&\lesssim (1-r)|E_\varphi(r-(1-r)/2)|^{\alpha p/2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}^{p/2}(z)}{(1-|z|^2)^{2+\alpha p/2}}dA(z) &= \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} N_\varphi^{\alpha p/2}(re^{i\theta})\frac{d\theta}{\pi}\Big)\frac{rdr}{(1-r)^{2+\alpha p/2}} \\
&\lesssim \int_0^1 \frac{|E_\varphi(r-(1-r)/2)|^{\alpha p/2}}{(1-r)^{1+\alpha p/2}}dr \\
&\asymp \int_0^1 \frac{|E_\varphi(s)|^{\alpha p/2}}{(1-s)^{1+\alpha p/2}}ds
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 5.1 pour terminer la démonstration. □

Nous avons le résultat suivant

Théorème 5.2. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est une fonction holomorphe et soit $\alpha \in (0,1]$. Si*

$$\sum_n \Big(n^\beta \mathcal{D}_\beta(\varphi^n)^{1-\alpha+\beta}|E_\varphi(1-\frac{1}{n})|^{\alpha-\beta}\Big)^{p/2} < \infty$$

pour certains $\beta \in [0,\alpha]$ et $(\alpha-\beta)p/2 \leq 1$, alors $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$.

Démonstration. D'après l'inégalité de Hölder, nous avons pour $0 \leq \beta \leq \alpha$

$$N_{\varphi,\alpha}(z) \leq N^{1-\alpha+\beta}_{\varphi,\frac{\beta}{1-\alpha+\beta}}(z)N_\varphi^{\alpha-\beta}(z).$$

Comme $\beta \leq \beta/(1-\alpha+\beta)$, alors

$$N_{\varphi,\frac{\beta}{1-\alpha+\beta}}(z) \leq N_{\varphi,\beta}(z),$$

d'après Théorème 4.2, on a il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$

$$N_{\varphi,\beta}(z) \lesssim \mathcal{D}_\beta(\varphi^n), \qquad \frac{1}{n} \leq 1-|z| < \frac{1}{n-1}.$$

et par Lemme 5.2 (2), et l'inégalité de Jensen , nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}^{p/2}(z)}{(1-|z|^2)^{2+\alpha p/2}}dA(z) &\leq \sum_n \int_{\frac{1}{n+1}\leq 1-|z|<\frac{1}{n}} \frac{N_{\varphi,\beta}^{(1-\alpha+\beta)p/2}(z)N_\varphi^{(\alpha-\beta)p/2}(z)}{(1-|z|^2)^{2+\alpha p/2}}dA(z) \\
&\lesssim \sum_n \mathcal{D}_\beta(\varphi^n)^{(1-\alpha+\beta)p/2}n^{2+\alpha p/2}\int_{1-\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n+1}}\Big(\int_0^{2\pi} N_\varphi(re^{it})dt\Big)^{(\alpha-\beta)p/2} rdr \\
&\lesssim \sum_n \Big(n^\beta \mathcal{D}_\beta(\varphi^n)^{1-\alpha+\beta}|E_\varphi(1-\frac{1}{n})|^{\alpha-\beta}\Big)^{p/2} < \infty.
\end{aligned}$$

Le Lemme 5.1 donne le résultat.

$\square$

Remarque 5.1.

Si $\alpha p/2 \leq 1$, nous prendrons $\beta = 0$ et si

$$\sum_n \Big(\mathcal{D}(\varphi^n)^{1-\alpha}|E_\varphi(1-\frac{1}{n})|^\alpha\Big)^{p/2} < \infty.$$

alors $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$.

Nous avons le théorème suivant

Théorème 5.3. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ est une fonction holomorphe. Soit $p \leq 2/(1-\alpha)$, si*

$$\sum_n \Big(n|E_\varphi(1-1/3n)|\Big)^{\frac{p}{2}-1}\frac{\mathcal{D}(\varphi^n)}{n} < \infty, \tag{5.1}$$

alors $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$.

Pour la démonstration nous avons besoin de quelques lemmes

Lemme 5.3. *Soit $p \leq 2/(1-\alpha)$, alors*

$$N_{\varphi,\alpha}^{\frac{p}{2}}(z) \lesssim (1-|z|^2)^{1-(1-\alpha)\frac{p}{2}}|E_\varphi(|z|-(1-|z|)/2)|^{\frac{p}{2}-1}n_\varphi(z).$$

Démonstration. Soit $p \leq 2/(1-\alpha)$, par Hölder nous avons

$$\Big(\sum_{\varphi(w)=z}(1-|w|^2)^\alpha\Big)^{\frac{p}{2}} \leq n_\varphi(z)\Big(\sum_{\varphi(w)=z}(1-|w|^2)^{\alpha\frac{p}{p-2}}\Big)^{\frac{p}{2}-1}. \tag{5.2}$$

par le lemme de Schwarz, nous avons $|z=\varphi(w)| \leq |w|$ et $\alpha p/(p-2) \geq 1$, De plus, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi(w)=z}(1-|w|^2)^{\alpha\frac{p}{p-2}} &\leq (1-|z|^2)^{\alpha\frac{p}{p-2}-1}\sum_{\varphi(w)=z}(1-|w|^2) \\ &\asymp (1-|z|^2)^{\alpha\frac{p}{p-2}-1}N_\varphi(z). \end{aligned} \tag{5.3}$$

D'après Lemme 5.2 (2), les inégalités (5.2) et (5.3), nous trouvons le résultat. $\square$

Lemme 5.1 et Lemme 5.3 donnent le résultat suivant

Lemme 5.4. *Soit $p \leq 2/(1-\alpha)$. Si*

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|E_\varphi(|z|-(1-|z|)/2)|^{\frac{p}{2}-1}}{(1-|z|^2)^{1+\frac{p}{2}}}n_\varphi(z)dA(z) < \infty$$

alors $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$

Démonstration. Soit $p \leq 2/(1-\alpha)$, par Lemma 5.1, nous avons

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{N_{\varphi,\alpha}^{p/2}(z)}{(1-|z|^2)^{2+\alpha p/2}} dA(z) \lesssim \int_{\mathbb{D}} \frac{|E_\varphi(|z|-(1-|z|)/2)|^{\frac{p}{2}-1}}{(1-|z|^2)^{1+\frac{p}{2}}} n_\varphi(z) dA(z) < \infty,$$

Le Lemme 5.1 donne le résultat.

□

Nous avons vu dans le Lemme 4.3 que, pour $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction holomorphe, il existe $c > 0$ tel que pour tout $m \geq 1$,

$$\int_{1-\frac{1}{m} \leq |z| < 1} n_\varphi(z) dA(z) \lesssim \frac{\mathcal{D}(\varphi^m)}{m^2}.$$

Démonstration de Théorème 5.3.

Supposons que (5.1) est satisfaite, alors

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} \frac{|E_\varphi(|z|-(1-|z|)/2)|^{\frac{p}{2}-1}}{(1-|z|^2)^{1+\frac{p}{2}}} n_\varphi(z) dA(z) \\
&= \sum_m \int_{1-\frac{1}{m} \leq |z| < 1-\frac{1}{m+1}} \frac{|E_\varphi(|z|-(1-|z|)/2)|^{\frac{p}{2}-1}}{(1-|z|^2)^{1+\frac{p}{2}}} n_\varphi(z) dA(z) \\
&\lesssim \sum_m m^{1+\frac{p}{2}} \int_{1-\frac{1}{m} \leq |z| < 1-\frac{1}{m+1}} |E_\varphi(|z|-(1-|z|)/2)|^{\frac{p}{2}-1} n_\varphi(z) dA(z) \\
&\lesssim \sum_m \left(m^{1+\frac{p}{2}} - (m-1)^{1+\frac{p}{2}}\right) \int_{1-\frac{1}{m} \leq |z| < 1} |E_\varphi(|z|-(1-|z|)/2)|^{\frac{p}{2}-1} n_\varphi(z) dA(z) \\
&\leq \sum m^{p/2} |E_\varphi(1-1/3m)|^{\frac{p}{2}-1} \int_{1-\frac{1}{m} \leq |z| < 1} n_\varphi(z) dA(z) \\
&\leq \sum m^{p/2} |E_\varphi(1-1/3m)|^{\frac{p}{2}-1} \frac{\mathcal{D}(\varphi^m)}{m^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Par le Lemme 5.4, nous obtenons notre résultat. □

5.3 Classes de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta)$.

Dans ce paragraphe, seront présentées des résultats analogue comme sous-chaitre de classes de Schatten $\mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha.)$ On peut aussi considérer l'opérateur de composition C_φ dans un espace de type Dirichlet $\mathcal{D}_\alpha$ à un autre espace de type Dirichlet $\mathcal{D}_\beta$ avec $\alpha \neq \beta$. J. Pau et P.A. Pérez a été obtenu en [42] une caractérisation pour un opérateur de composition C_φ dans $\mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta)$. Nous avons le théorème suivant.

Théorème 5.4. *[42]. Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe. Soit $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$. Soit $0 < p < \infty$. Alors $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta)$ si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{N^{p/2}_{\varphi,\beta}(z)}{(1-|z|^2)^{2+\alpha p/2}} dA(z) < \infty.$$

Nous avons une caractérisation analogue pour théorèmes 5.1, 5.2 et 5.3 dans le théorème suivant

Théorème 5.5. *1. Soit φ fonction injective. Si l'une des deux conditions est satisfaite*

(a) si $\beta p/2 \leq 1$ et

$$\int_0^1 \frac{|E_\varphi(r)|^{\beta p/2}}{(1-r)^{2+(\alpha-\beta)p/2}} dr < \infty$$

(b) Si $\beta p/2 \geq 1$ et

$$\int_0^1 \frac{|E_\varphi(r)|^{\beta p/2}}{(1-r)^{1+\alpha p/2}} dr < \infty$$

alors $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta)$.

2. Si

$$\sum_n n^{(\alpha-\beta+\gamma)} \mathcal{D}_\gamma(\varphi^n)^{1-\beta+\gamma} |E_\varphi(1-\frac{1}{n})|^{\beta-\gamma}\Big)^{p/2} < \infty$$

pour certaine $\gamma \in [0,\beta]$ et $(\beta-\gamma)p/2 \leq 1$, alors $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta)$.

3. Soit $p \leq 2/(1-\beta)$, si

$$\sum_n \Big(n|E_\varphi(1-1/3n)|\Big)^{\frac{p}{2}-1} \frac{\mathcal{D}(\varphi^n)}{n^{1-\alpha+\beta}} < \infty,$$

alors $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta)$.

Démonstration. 1. La preuve résulte du théorème 5.1 et théorème 5.4.

2. La preuve résulte du théorème 5.2 et théorème 5.4.

3. La preuve résulte du théorème 5.3 et théorème 5.4.

□

5.4 Examples.

Soit K un ensemble fermé de $\mathbb{T}$, et soit $\Omega \in \mathcal{C}^1([0.2\pi])$, tel que $\Omega(0) = 0$ et

$$\int_{\mathbb{T}} \Omega(d(\zeta, K))|d\zeta| < \infty.$$

La fonction de distance correspondant à Ω, K est la fonction extérieure $\varphi_{\Omega,K}$ satisfaisant

$$|\varphi_{\Omega,K}(\zeta)| = e^{-\Omega(d(\zeta,K))} \qquad p.p \quad sur \quad \mathbb{T}. \tag{5.4}$$

Par conséquent

$$\varphi_{\Omega,K}(z) = \exp - \int_{\mathbb{D}} \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\Omega(d(\zeta,K))\frac{|d\zeta|}{2\pi}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Soit une partie fermée $K_t = \{\zeta \in \mathbb{T} : d(\zeta, K) \leq t\}$ de $\mathbb{T}$, $t \geq 0$.

Soit K est l'ensemble de Cantor généralisé associée à la suite $(a_n)_n$ (voir [22] ou chapitre 3). D'après Proposition 4.10, si

$$\lambda_K := \sup_{n\geq 1} \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}, \tag{5.5}$$

alors

$$|K_t| = O(t^{\mu_K}) \qquad t \to 0 \tag{5.6}$$

avec $\mu_K = 1 - \log 2/|\log \lambda_K|$.

Maintenant, nous avons besoin du lemme suivant, c'est un rappelle du théorème 4.6.

Lemme 5.5. *Soit $0 \leq \beta < 1$. Soit K l'ensemble de Cantor généralisé associé à la suite $(a_n)_n$ vérifie (5.5) tel que $\beta + \mu_K \geq 1$. Soit $\Omega(t) = t^\delta$ tel que $\delta < \min\{(1-\beta)/2, \beta + \mu_K - 1\}$. Alors*

$$\mathcal{D}_\beta(\varphi^n_{\Omega,K}) \lesssim 1/n^{(\beta+\mu_K-1)/\delta}.$$

Nous avons le corollaire suivant

Corollaire 5.6. *Soit $0 < \beta \leqslant \alpha < 1$. Soit K l'ensemble de Cantor généralisé associé à la suite $(a_n)_n$ vérifie (5.5) tel que $\beta + \mu_K \geq 1$. Soit $\Omega(t) = t^\delta$ tel que $\delta < \min\{(1-\beta)/2, \beta + \mu_K - 1\}$. Si*

$$\mu_K + \alpha + \beta^2 - \alpha\beta - \delta\beta - 1 > 2\delta/p$$

et $(\alpha - \beta)p/2 \leq 1$, alors $C_{\varphi_{\Omega,K}} \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$.

Démonstration. On pose $\varphi_{\Omega,K} = \varphi$, par Lemme 5.5, nous avons

$$\mathcal{D}_\beta(\varphi^n_{\Omega,K}) \lesssim 1/n^{(\beta+\mu_K-1)/\delta}.$$

Comme

$$\begin{aligned} |E_{\varphi_{\Omega,K}}(1-1/n)| &= \left|\left\{\zeta \in \mathbb{T} : e^{-\Omega(d(\zeta,K))} \geq (1-1/n)\right\}\right| \\ &\asymp \left|\left\{\zeta \in \mathbb{T} : d(\zeta,K) \leq \Omega^{-1}(1/n)\right\}\right| \\ &\asymp O(\Omega^{-1}(1/n)^{\mu_K}) \\ &\asymp (1/n)^{\frac{\mu_K}{\delta}}. \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_n \left(n^\beta \mathcal{D}_\beta(\varphi^n)^{1-\alpha+\beta}|E_\varphi(1-\frac{1}{n})|^{\alpha-\beta}\right)^{p/2} \lesssim \sum_n \left(\frac{1}{n}\right)^{(\mu_K+\alpha+\beta^2-\alpha\beta-\delta\beta-1)p/(2\delta)} < \infty.$$

Le résultat résulte alors par le théorème 5.2. □

Nous avons le corollaire suivant pour $\mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta)$.

Corollaire 5.7. *Soit* $0 < \gamma \leqslant \beta < 1$. *Soit* K *l'ensemble de Cantor généralisé associé à la suite* $(a_n)_n$ *vérifie* (5.5) *tel que* $\gamma + \mu_K \geq 1$. *Soit* $\Omega(t) = t^\delta$ *tel que* $\delta < \min\{(1-\gamma)/2, \gamma + \mu_K - 1\}$. *Si*

$$\mu_K + \beta + \gamma^2 - \gamma\beta - \alpha\delta + \beta\delta - \gamma\delta - 1 > 2\delta/p$$

et $(\beta-\gamma)p/2 \leq 1$, *alors* $C_{\varphi_{\Omega,K}} \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha, \mathcal{D}_\beta)$.

Démonstration. La preuve résulte du Corollaire 5.6 et Théorème 5.5 (2). □

Bibliographie

[1] J. Agler, J. E. McCarthy, Pick interpolation and Hilbert function spaces, Graduate Studies in Mathematics, vol. 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[2] P.R. Ahern, , D.N. Clark, : Radial limits and invariant subspaces. Amer. J. Math. 92, 332-342 (1970).

[3] A. Aleman, Hilbert spaces of analytic functions between the Hardy and the Dirichlet space. Proc. Amer. Math. Soc., 115 (1992), no. 1, 97-104.

[4] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 337Ű404.

[5] R.A. M. Avenda*ño*, P. Rosenthal, An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space, Grad. Texts in Math., vol. 237, Springer, New York, 2007.

[6] A. Baranov, I. Chalendar, , E. Fricain, J. Mashreghi, D. Timotin : Bounded symbols and reproducing kernel thesis for truncated Toeplitz operators. J. Funct. Anal., (259) :2673-2701, 2010.

[7] H.Benazzouz ; O. El-Fallah ; K. Kellay ; H. Mahzouli : Contact points and Schatten composition operators. Math. Z. 279 (2015), no. 1-2, 407-422.

[8] Z. Bendaoud, F. Korrichi, L. Merghni, A. Yagoub, Estimates of generalized Nevanlinna counting function and applications to composition operators, extracta mathematicae Vol. 30 , Num. 2, 221-234 (2015).

[9] Z. Bendaoud, F. Korrichi, L. Merghni, A. Yagoub, Contact points and Schatten of composition operators, Indian J. Pure Appl. Math., 49(4),651-661 (2018).

[10] R. Bessonov, : Truncated Toeplitz operators of finite rank. Proc. Amer. Math. Soc., 142(4) :1301- 1313, 2014.

[11] A. Beurling. Étude sur un problème de majoration. Thèse de Doctorat. Uppsala University, 1933.

[12] A. Beurling : On two problems concerning linear transformations in Hilbert space. Acta Math., 81(17) :239-255, 1948.

[13] A. Brown and P. R. Halmos. Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reine Angew. Math., 213 :89-102, 1963/1964.

[14] I. Chalendar, D. Timotin. Commutation relations for truncated Toeplitz operators, Operators and Matrices, 8, No. 3, 877-888 (2014).

[15] J. B. Conway, A course in Functional Analysis, Second edition, Graduate Text in Mathematics, 96. Springer-Verlag, New York, 1990.

[16] D.N. Clark, One dimensional perturbations of restricted shifts, J. Analyse Math. 25 (1972), 169-191.

[17] R. B. Crofoot, Multipliers between invariant subspaces of the backward shift, Pacific J. Math. 166 (1994), no. 2, 225-246.

[18] P. L. Duren, Theory of H^p spaces,Pure Appl. Math. Academic Press, New York-London, 1970.

[19] K. Engel, and R. Nagel. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 1995.

[20] O. El-Fallah, M. El Ibbaoui, H. Naqos, Composition operators with univalent symbol in Schatten classes. J. Funct. Anal. 266 (2014), no. 3, 1547–1564.

[21] O. El-Fallah, K. Kellay, T. Ransford. On the Brown–Shields conjecture for cyclicity in the Dirichlet space. Adv. Math. 222 (2009), no. 6, 2196–2214.

[22] O. El-Fallah, K. Kellay, T. Ransford. Cantor sets and cyclicity in weighted Dirichlet spaces, J. Math. Anal. Appl. 372 (2010), no. 2, 565-573.

[23] O. El-Fallah, K. Kellay, M. Shabankhah, H. Youssfi, Level sets and Composition operators on the Dirichlet space. J. Funct. Anal 260 (2011) 1721–1733.

[24] O. El-Fallah, K. Kellay, J. Mashreghi, T. Ransford. A primer on the Dirichlet space. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[25] P. Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Math., 30(1) :335-400, 1906.

[26] E.A. Gallardo-Gutiérrez, M.J. González, Exceptional sets and Hilbert–Schmidt composition operators, J. Funct. Anal. 199 (2003) 287–300.

[27] S.R. Garcia. Conjugation, The backward shift, and Toeplitz kernels. J. Operator Theory, 54 :2 :239-250, 2005.

[28] S.R. Garcia. Conjugation and Clark operators. Contemporary Mathematics, to appear.

[29] S.R. Garcia, W.T. Ross, , Model spaces : a survey, Contemp. Math. 638 (2015), 197-245.

[30] S. R. Garcia , M. Putinar, Complex symmetric operators and applications, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), no. 3, 1285-1315.

[31] J. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York, 1981.

[32] H. O. Kim, Averages of Nevanlinna counting functions of holomorphic self-maps of the unit disk, Hokkaido Math. J. 33 (2004), no. 3, 697-706.

[33] K. Kellay and P. Lefèvre, Compact composition operators on weighted Hilbert spaces of analytic functions, J. Math. Anal. Appl.386 (2012), 718–727.

[34] F. Korrichi : Opérateurs de Toeplitz tronqués et de composition. 2016, université de Biskra.

[35] P. Lefèvre ; D. Li ; H. Queffélec ; L. Rodríguez-Piazza, Approximation numbers of composition operators on the Dirichlet space. Ark. Mat. 53 (2015), no. 1, 155–175.

[36] J .E. Littlewood, On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math. Soc. 23 (1925),481-519.

[37] D. Li ; H. Queffélec ; L. Rodríguez-Piazza,Two results on composition operators on the Dirichlet space. J. Math. Anal. Appl. 426 (2015), no. 2, 734–746.

[38] D. Luecking, Trace ideal criteria for Toeplitz operators, J. Punct. Anal., 73 (1987), 345-368.

[39] N. K. Nikol'skii : Treatise on the shift operator : spectral function theory. Grundlehren der mathematischenWissenschaften. Springer, Berlin, 1986, ISBN 9783540150213.

[40] M. Reissig , B. W. Schulze, New Trends in the Theory of Hyperbolic Equations, Operator Theory : Advances and Applications, vol 159, Birkhauser 2005.

[41] R.V. Kadison, J.R. Ringrose, Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I. Elementary theory. Graduate Studies in Mathematics, 15. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[42] J. Pau, P. A. Pérez, Composition operators acting on weighted Dirichlet spaces. J. Math. Anal. Appl. 401 (2013), no. 2, 682-694.

[43] V. Paulsen, An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces, Cambridge studies in advanced mathematics, 152, 2016.

[44] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 1983.

[45] R.S. Phillips, Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959) 193-254.

[46] A. Poltoratski and D. Sarason, Aleksandrov-Clark measures, Recent advances in operatorrelated function theory, Contemp. Math., vol. 393, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 114

[47] B. SZ. Nagy, C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space (North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London, 1970).

[48] F. R. Randriamahaleo, Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman harmonique et opérateurs de Teoplitz tronqués de rang fini. IMB - Institut de Mathématiques de Bordeaux, 2015.

[49] N. A. Sedlock, Algebras of truncated Toeplitz operators , Oper. Matrices 5 (2011), 309-326.

[50] N. A. Sedlock, Properties of Truncated Toeplitz Operators, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2010. Ph.D. thesis, Washington University in St. Louis.

[51] D. Sarason, Algebraic properties of truncated Toeplitz operators. Oper. Matrices 1(4), 491-526 (2007).

[52] D. Sarason, Generalized interpolation in H^∞, Trans. Amer. Math. Soc 127 (1967), 179-203.

[53] D. Sarason, Sub-Hardy Hilbert Spaces in the Unit Disk, John Wiley, Sons Inc., New York, 1994.

[54] D. Sarason. Unbounded operators commuting with restricted backwards shifts. Oper. Matrices, 2 : 583-601, 2008.

[55] D. Sarason, Unbounded Toeplitz operators, Integral Equations Oper. Theory 61 (2008), 281-298.

[56] S. M. Seubert, Dissipative compressed Toeplitz operators on shift co-invariant subspaces, Houston J. Math., 32, no. 1 (2006), 277-292.

[57] S.M. Seubert, Semigroups of operators on quotient spaces of H^2 , J. Math. Anal. Appl. 167 (1992) 289-298.

[58] S. M. Seubert, Unbounded dissipative compressed Toeplitz operators. J. Math. Anal. Appl. 290 (2004), 132-146 ; MR 2032231 (2004i :47053).

[59] J. H. Shapiro, The essential norm of a composition operator. Annals of Math. 125 (1987) 375–404.

[60] J. H. Shapiro, Composition operators and classical function theory, Springer Verlag, New York 1993.

[61] D. Suárez. Closed commutants of the backwards shift operator. Pacific J. Math., 179 :371-396, 1997.

[62] A. Yagoub, M. Zarrabi. Semiqroups of truncated Toeplitz.Oper. Matrices Volume 12, Number 3 603-618 (2018),

[63] K. Zhu. Operator theory in function spaces, volume 139 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York, 1990.

[64] N. Zorboska, Composition operators on weighted Dirichlet spaces. Proc. Amer. Math. Soc., 126 (1998), no. 7, 2013 2023.

ملخّص.

هذه الأطروحة تندرج في مجال نظرية الموءثرات. في الجزء الأول من هذه الأطروحة، نهتم بأنصاف المجموعات لموءثرات توبليتز المبتورة في فضاء نموذجي و مولدات هذه الموءثرات. نعطي الشرط الّازم و الكافي لعاءيلة موءثرات توبليتز المبتورة لكي تكون نصف مجموعة و من ثم نصف مجموعة مستمرة بنتظام، وأخيرا نصف مجموعة التقليص مستمرة بقوة. في الجزء الثاني من هذه الأطروحة نقوم بدراسة موءثرات التركيب على فضاء ديركلي، ونهتم بمحدودية و تراص و الانتماء الى مجموعة شتان في فضاء ديركلي لهذه الموءثرات بستعمال مجموعات المستوى و دالة العد العام لنيفنلينة.

مفاتيح هذه المذكرة.

فضاءات هاردي، فضاءات ديركلي، فضاءات نموذجي، موءثرات توبليتز، موءثرات توبليتز المبتورة و المركبة، انصاف المجموعات.

Résumé.

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la théorie des opérateurs. Dans la première partie de la thèse, on s'intéresse aux semi-groupes d'opérateurs de Toeplitz tronqués sur l'espace modèle et leurs générateurs. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille d'opérateurs de Toeplitz tronqués soit un semi-groupe, puis un semi-groupe uniformément continu, et finalement un semi-groupe fortement continu de contractions. Dans la deuxième partie de la thèse nous avons étudier les opérateurs de composition sur l'espace de Dirichlet. Nous nous intéressons à la bornitude, la compacité et à l'appartenance de la classe de Schatten dans les espaces de Dirichlet de ces opérateurs en terme de les ensembles de niveau et la fonction de comptage généralisée de Nevanlinna.

Mots clés :

Espaces de Hardy, espaces de Dirichlet, espace modèle, opérateurs de Toeplitz, opérateurs de Toeplitz tronqués et composition, semi-groupes.

Abstract.

This thesis joins in the field of operator theory. In the first part of the thesis, we are interested in the truncated Toeplitz operators on the model space. We give a necessary and sufficient condition for a family of truncated Toeplitz operators to be a semigroup, then a uniformly continuous semigroup, and finally a strongly continuous semi-group of contractions. In the second part of the thesis, we studied the composition operators on the Dirichlet space. We are interested in the boundedness, compactness and belonging of the Schatten class in the Dirichlet spaces of these operators in terms of the level sets and the generalized counting Nevanlinna function.

Key words :
Hardy spaces, Dirichlet spaces, modèle spaces, Toeplitz operators, truncated Toeplitz operators and composition, semigroups.