République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Thèse pour obtenir le titre de Doctorat en Sciences

Filière : Mathématiques Appliquées

Thèse présentée

Par

Madame ABDESSELAM NAWEL

STABILISATION UNIFORME DE QUELQUES PROBLÈMES AUX LIMITES

Soutenu devant le jury formé de :

Zohir Mokhtari. Pr	Univ.Biskra	Président
Khaled Melkemi. Pr	Univ.Batna 2	Directeur de thèse
Mourad Dilmi. Pr	Univ.Sétif 1	Examinateur
Yahia Djabrane. MCA	Univ.Biskra	Examinateur
Mohamed Zerguine. MCA	Univ.Batna 2	Examinateur

Dédicace.

J'adresse mes plus sincères remerciements à

Mes chers parents.

Mon mari Mohammed Saleh.

Mon adorable fils Yanis El - Hakim.

Mes soeurs :

Nadia, Sabrina, Yamina et la petite Soumia.

Mes frères :

Farid, Yacine, Hafnaoui.

Et enfin tout mes proches pour leurs soutiens moral et affectif.

Avec mes sincères voeux de réussite à eux aussi et encore une fois je leurs ai reconnaissante de m'avoir supporter toutes ces années et à qui je dédie ce modeste travail de recherche.

Remerciements.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à DIEU tout puissant miséricordieux de m'avoir aider à accomplir ce travail de recherche à point.

J'adresse ma profonde gratitude et reconnaissance à mon Directeur de Thèse : Professeur K. Melkemi ; Professeur à l'université de Batna II : Je vous remercie pour la confiance que vous m'avez accordé, votre disponibilité et vos encouragements qui m'ont guidé à terminer ce travail de recherche. Je garde toujours en mémoire votre générosité, votre compréhension ainsi que votre efficacité. Pour tout ce que vous m'avez donner. Je remercie le Professeur Z. Mokhtari, pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepter ce travail et de m'attribuer les membres du jury en fonction de ma spécialité. Un trés grand merci aux professeurs : M.Dilmi, Y. Djabrane et M. Zerguine qui ont accepter de faire partie des membres du jury. Leurs présence constitue un grand honneur. Merci pour vos remarques, vos critiques, vos conseils et en particulier pour l'intérêt que vous avez porter à mon travail de recherche. Merci encore une fois à tous les membres du jury. Je leurs en suis reconnaissante. Je le remercie vivement pour son aide et son soutien avec mes sincères voeux de réussite. Sans oublier l'expression particulière de toute mon amitié à Mme F.Bouabdalleh et Mme F. Boulaghmen pour leurs aides et leurs soutiens durant cette dernière année. Merci à tous ceux et celles qui m'ont aider de près ou de loin à la réalisation de ce travail de recherche, par une réflexion, un soutien, des encouragements ou tout type d'aide ou autres.

Notations et Préliminaires.

Dans toute la suite de cette thèse, nous utiliserons les conventions suivantes :

$\mathbb{N}$ ensemble des nombres naturel,

$\mathbb{R}$ ensemble des nombres réel,

$\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexe,

Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,

Γ frontière de Ω,

Γ_0 et Γ_1 deux parties disjointes de Γ,

$< .,. >$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$,

$C^k(\Omega)$ fonctions k fois continûment sur différentiables dans Ω,

$\triangle$ l'opérateur de Laplace,

A l'opérateur différentiel d'ordre deux,

$divu$ la divergence de u,

DH la différentielle covariante,

$\mathbf{i} = \sqrt{-1}$

Re, Im la partie réelle, la partie imaginaire,

inf, sup la borne inférieure, la borne supérieure,

$\nabla_0 f$ le gradient de la fonction f,

$D_X Y$ la dérivée covariante,

$T_x\mathbb{R}^n$ l'espace tangent,

$[X, Y]$ le crochet de Lie,

Table des matières

Introduction générale.

La compréhension des phénomènes du monde réel ainsi que le développement de la technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles (E.D.P). C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes ; à travers des équations aux dérivées partielles qui vont nous permettre de comprendre le rôle de tel où tel paramètre et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. En particulier l'équation de Schrödinger modélise plusieurs phénomènes naturels en : Physique, Chimie, Biologie...etc

C'est trés difficile de comprendre complètement la dynamique des processus évolutifs. C'est pour cela, dans la majorité des systèmes, on considère l'énergie du comportement asymptotique à l'infinie. La Théorie du Contrôle des E.D.P intervient dans différents contextes et de plusieurs manières. Les problèmes de stabilité des E.D.P ont fait récemment l'objet de nombreux travaux. Nous renvoyons par exemple aux livres de J-Lions [**35**].

Ce travail porte sur la stabilisation uniforme de quelques problèmes aux limites de certaines classes des E.D.P à coefficients variables. Nous nous sommes intéressés particulièrement à la question de la stabilisation exponentielle de l'équation de Schrödinger.
Des recherches considérables ont été faites sur les problèmes de la stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $E(t)$. C'est la norme des solutions dans l'espace d'état à étudier sa limite afin de déterminer si cette limite est nulle ou pas. Dans le cas ou la limite est nulle, la vitesse de décroissance d'énergie tendra vers zéro. Sachant que les liens entre les problèmes de stabilisation et de contrôlabilité sont étroits. Comme la stabilisation ne peut pas toujours être obtenue, par conséquent, l'étude de la contrôlabilité est souvent faite indépendamment et directement.
Dans cette thèse, on considère les deux problèmes suivants :

- Le problème de la stabilisation uniforme de l'équation de Schrödinger avec un feedback frontière de type mémoire pour un opérateur fortement elliptique à coefficients variables dans l'espace d'énergie $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

– Le problème de la stabilisation uniforme de l'équation de Schrödinger avec des conditions aux limites de type mémoire agissant de type Neumann tel que l'espace d'énergie $L^2(\Omega)$.

Plus précisément, ce travail est constitué de trois chapitres :

Dans le premièr chapitre, on rappele quelques notions d'analyses fonctionnelles qui concerne la topologie faible, les opérateurs compacts ainsi que les résultats de compacité seront d'une grande utilité dans notre travail. Dans le deuxième chapitre, nous allons traiter le système suivant :

$$\begin{cases} z_t - \mathbf{i}Az & = & 0 & \text{dans} & \Omega\times]0,+\infty[\\ z(x,0) & = & z_0(x) & \text{dans} & \Omega \\ z & = & 0 & \text{sur} & \Gamma_0\times]0,+\infty[\\ \frac{\partial z}{\partial \nu_A} & = & u & \text{sur} & \Gamma_1\times]0,+\infty[\end{cases}$$

Sachant que $\frac{\partial z}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial z}{\partial x_i}.\nu_i$ et $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ est le vecteur normal, et u la fonction de contrôle.

Les problèmes liés au systéme ci-dessus dans le cas où $A = \mathbf{\Delta}$, et pour un opérateur à coefficients variables, le cas des équations des ondes a été considéré par de nombreux auteurs [**24**] ; [**12**] ; [**13**] ; [**54**]. Le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Schrödinger à coefficients constants avec des conditions aux limites de type mémoire agissant sur la condition de Neumann a été présenté comment une communication en ICAAM Monastir Tunisie [**5**].

Cette étude dans le cas où l'opérateur à coefficients variables a été proposée dans mon mémoire de magister [**4**], Mais malheureusement, le choix de la géométrie ne convenait pas.

Notre contribution consiste à établir la stabilisation uniforme de l'équation de Schrödinger avec un feedback frontière de type mémoire pour un opérateur fortement elliptique à coefficients variables. On démontre ce résultat en plusieurs étapes :

On s'inspire du choix de la fonction de contrôle par les travaux de [**1**] et de [**24**] pour faire le choix de la fonction de contrôle dans le cas où les coefficients sont constants. Pour le cas des coefficients variables, le système des équations des ondes décroit plus rapidement.

L'inspiration a été adoptée selon les travaux de recherches [**20**] ; [**54**] ; [**27**] ; [**28**] ; [**30**] ; [**51**] ; [**58**] ; [**53**] ; [**49**] ; [**19**] ; [**14**].

Ensuite, on utilise un multiplicateur convenable (par la méthode des multiplicateurs), pour obtenir quelques identités. On combine les idées décrites dans [**22**] ; [**23**] ; [**47**] ; [**61**] avec celle de [**39**] pour majorer l'identité de ce système. On souhaite adopter une approche combinée avec la méthode Riemannienne. Cette dernière a été déjà introduite dans le contexte des équations réelles avec des coefficients variables, pour étudier les problèmes de la stabilisation directe et de la contrôlabilité exacte (voir [**62**] ; [**20**]).

Notre objectif est de montrer qu'on peut appliquer cette approche sur les systèmes complexes avec des coefficients variables. Nous construisons une métrique convenable sur $\mathbb{C}^n$ bien adaptée à ce type de système. L'outil principal de la preuve est l'utilisation de la méthode de la géométrie Riemannienne sur $\mathbb{C}^n$.

Enfin, la stabilisation uniforme de l'énergie sera démontrée, ce résultat améliorera donc les résultats existants dans la littérature [12] ; [13] ; [20] ; [54] où la stabilisation exponentielle de l'équation des ondes a été obtenue.

Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans Electron. J. Differ. Eqns (129) (2017) 1-14. Sous le titre "Memory boundary feedback stabilization for Schrödinger equations with variable coefficients" [3].

Dans le troisiéme chapitre, l'étude est consacrée à la résolution du problème suivant :

$$\begin{cases} z_t - \mathbf{i}\boldsymbol{\Delta} z &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0,+\infty[\\ z(x,0) &= z_0(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \\ z &= 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \times]0,+\infty[\\ \frac{\partial z}{\partial \nu} &= u \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times]0,+\infty[\end{cases}$$

où $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i}$ le laplacien par rapport à la variable d'espace $(x_1, ..., x_n)$, ν désigne le vecteur normal unitaire, $\frac{\partial z}{\partial \nu} = \nabla z.\nu$, et u la fonction de contrôle.

Dans notre thèse, on présente avec l'idée de I. Lasiecka et R. Triggiani utilisée dans [40] pour obtenir la décroissance exponentielle de l'équation de Schrödinger avec un feedback frontière non linéaire $L_2(\Omega)$. On combine cette idée avec des estimations pour obtenir des résultats similaires pour l'équation de Schrödinger avec un feedback frontière de type mémoire.

Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans IJSER, Volume 7, Issue 8, August 2016 ISSN 2229-5518. Sous le titre "Existence and uniform decay rates at the$-L^2(\Omega)-$ level of the Schrödinger equation with memory boundary feedback"[2].

On termine notre travail par une conclusion et quelques questions ouverts.

CHAPITRE 1

Généralité : Quelques notions de base.

Les espaces $L^p(\Omega)$ et ceux de Sobolev constituent un outil de base pour aborder la théorie des EDP. Dans ce chapitre nous allons rappeler ces espaces ainsi que d'autres résultats élémentaires d'analyse fonctionnelle nécessaires pour comprendre les travaux que nous avons proposés dans les chapitres suivants. En particulier, nous donnerons les principaux résultats sur la topologie faible et la topologie faible étoile, les opérateurs compacts et les applications différentielles de la géométrie Riemannienne.

1. Rappels d'analyse fonctionnelle.

1.1. Topologie faible $\sigma(E, E')$..

DÉFINITION 1.1. *On note E un espace normé, E' son duel topologique. On appelle topologie faible sur E et que l'on note $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires $f \in E'$.*

On peut recenser les ouverts qui doivent appartenir à la topologie faible de la manière suivante : Si $f \in E'$ et $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(U)$ est nécessairement un ouvert de $\sigma(E, E')$. Mais comme les intervalles ouverts forment une base de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$, on voit que ceci revient à dire que pour tout intervalle I et tout $f \in E'$; $f^{-1}(I)$ est dans $\sigma(E, E')$.

DÉFINITION 1.2. *Si $x_n \to x$ dans $\sigma(E, E')$, alors on la note par $x_n \rightharpoonup x$ et on dit x_n converge faiblement vers x dans E.*

Les propositions et les théorèmes suivants nous donnent quelques résultats sur la convergence faible et forte des suites dans les espaces de Banach et de Hilbert [8].

PROPOSITION 1.1. *Soit E un espace de Banach et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, alors $\forall f \in E'$, $x_n \rightharpoonup x \Longleftrightarrow f(x_n) \to f(x)$.*

THÉORÈME 1.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans un espace de Hilbert E. Alors la suite $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ possède une sous-suite faiblement convergente.*

THÉORÈME 1.2. *Toute suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert E est bornée.*

THÉORÈME 1.3. *Soient* $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ *une suite qui converge faiblement vers* x *et* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite qui converge fortement vers* y. *Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle.$$

1.2. Topologie *-faible. Soit E un espace de Banach, E' son dual (muni de la norme $\|f\|_{E'} = \sup\limits_{x\in E, \|x\|\leq 1} |\langle f, x\rangle|$) et son bidual topologique muni de la norme :

$$\|\imath\|_{E''} = \sup_{f\in E',\ \|f\|_{E'}\leq 1} |\imath\,(f)|\,.$$

Définissons l'application J de E dans E'' comme suit :
à tout $x \in E$ et $f \in E'$

$$J_x(f) = f(x).$$

J_x est une forme linéaire continue sur E', de plus J réalise une injection continue de E dans E''. En effet, $\|J_x\|_{E''} = \|f\|_E$ car :

$$\|J_x\,(f)\|_{E''} = \sup_{f\in E',\ \|f\|_{E'}\leq 1} |J_x\,(f)| = \sup_{x\in E,\ \|x\|\leq 1} |f(x)| = \|x\|_E\,.$$

On a donc $J(E) \subset E''$, cela va nous permettre de définir une nouvelle topologie sur E'.

DÉFINITION 1.3. *Topologie *-faible notée* $*{-}\sigma\,(E, E'$ *est la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires dont la base de voisinages de* $f_0 \in E^{/}$ *pour la topologie *-faible est donnée par*

$$U = \left\{f \in E',\ \ |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \epsilon,\ i = 1, ..., n,\ x_i \in E,\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

PROPOSITION 1.2. *Soit* E *un espace de Banach. Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de* E', *alors* f_n *converge vers* f *pour la topologie *-faible si et seulement si* $f_n(x) \to f(x)$, *pour tout* $x \in E$.

1.3. Espaces réflexifs, espaces séparables.

DÉFINITION 1.4. *Soit* E *un espace de Banach et* $J : E \to E''$ *l'injection canonique de* E *dans* E'', *définie par* $J_x(f) = f(x)$ *pour tout* $x \in E$, $f \in E'$. *L'espace* E *est dit réflexif, si* $J(E) = E''$.

D'où le résultat suivant :

THÉORÈME 1.4. *Soit* E *un espace de Banach réflexif; alors toute suite bornée dans* E *admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

DÉMONSTRATION. Voir [8], théorème III.27, page 50. ■

DÉFINITION 1.5. *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous-ensemble dense et dénombrable.*

On donne alors le résultat suivant :

THÉORÈME 1.5. *Soit E un espace de Banach séparable, alors toute suite bornée $(f_n)_n$ dans E' admet au moins une sous-suite *-faiblement convergente.*

DÉMONSTRATION. Voir [8], corollaire III.26, page 50. ∎

Rappelons maintenant les opérateurs compacts sur les espaces de Hilbert.

1.4. Opérateurs compacts sur les espaces de Hilbert.

DÉFINITION 1.6. *Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur linéaire continu T de H dans H est dit compact s'il transforme tout ensemble borné en un ensemble relativement compact.*

Le résultat suivant caractérise les opérateurs compacts par le moyen des suites faiblement convergentes.

PROPOSITION 1.3. *Un opérateur linéaire est compact si et seulement s'il transforme toute suite faiblement convergente en une suite admettant au moins une sous suite fortement convergente.*

REMARQUE 1.1. *Le résultat de la proposition précédente peut remplacer la définition précédente.*

THÉORÈME 1.6. *On suppose que H est un espace de Hilbert séparable. Soit T un opérateur auto - adjoint compact, alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

DÉMONSTRATION. Voir [8], théorème VI.11, page 97. ∎

PROPOSITION 1.4. *Tout opérateur symétrique T définit sur un espace de Hilbert H, à valeurs dans ce même espace H est un opérateur borné et auto - adjoint.*

DÉMONSTRATION. Voir [63]. ∎

Dans ce qui suit nous rappelons les propriétés et les résultats fondamentaux sur les espaces de Sobolev.

2. Espaces de Sobolev.

2.1. Espace de Sobolev d'ordre entier.

DÉFINITION 1.7. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel.*

On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $H^m(\Omega)$, l'ensemble :

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\right\},$$

où $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$ désigne la dérivée d'ordre α au sens des distributions avec $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$.
On donne dans cette paragraphe Quelques propriétées des espaces $H^m(\Omega)$.

2.2. Quelques propriétées des espaces $H^m(\Omega)$.. On a les propriétées suivantes :
(i) On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2}, \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

La norme associée étant donnée par :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega (D^\alpha u)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}, \forall u \in H^m(\Omega).$$

De plus, il est bien connu que cet espace est un espace de Hilbert.
(ii) Pour $m = 0$ on a $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et pour tout $m_1 > m_2$, on a :

$$H^{m_1}(\Omega) \subset H^{m_2}(\Omega).$$

(iii) Pour tout $m \geq 0$, $H^m(\Omega)$ est un espace séparable.
(iv) Pour tout $m \geq 0$, nous désignons par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$:

$$H_0^m(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$$

dans $H^m(\Omega)$, et par $H^{-m}(\Omega)$ le duel topologique de $H_0^m(\Omega)$.
(v) Grâce aux applications traces, que nous allons voir après, les espaces $H_0^m(\Omega)$ peuvent être définis comme suit :

$$H_0^m(\Omega) = \left\{u \in H^m(\Omega) / \frac{\partial^j u}{\partial \eta^j} = 0, \ \forall j = 0, ..., m-1.\right\},$$

où $\frac{\partial}{\partial \eta}$ est la dérivée normal de u suivant la normal extérieure à $\Gamma = \partial\Omega$.

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, \eta_i, \ \forall x \in \Gamma.$$

2.3. Espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire. *Lorsque s est un fractionnaire positif, l'espace $H^s(\Omega)$ se caractérise par la définition suivante :*

DÉFINITION 1.8. *Soit s un réel, $0 < s < 1$ et un ouvert de $\mathbb{R}^n$; on désigne par $H^s(\Omega)$ l'espace :*

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy < +\infty \right\}$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = (\|u\|_{L^2(\Omega)} + \int \int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} dxdy \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Si s désigne un réel positif de partie entière $[s] = m$, alors l'espace $H^s(\Omega)$ peut être définit de la manière suivante :

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ [s] = m,\ D^\alpha u \in H^{s-m}(\Omega) \right\}.$$

REMARQUE 1.2. *Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$; nous pouvons définir l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ au moyen de la transformation de Fourier.*

3. Espaces mixtes.

Soit X un espace de Banach et T un réel strictement positif. Pour $p \in [1, +\infty[$ on note $L^p(0, T, X)$ l'ensemble des classes des fonctions Lebesgue merables définies sur $]0, T[$ et à valeurs dans X ; telles que $t \mapsto \|f(t)\|_X^p$ est intégrable sur $]0, T[$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(0;T;X)} = \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De la même façon, pour $p = +\infty$, on définit un espace de Banach $L^\infty(0, T; X)$ muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup \|f(t)\|_X < +\infty.$$

La proposition suivante nous donnent quelques propriétées importantes des espaces $L^p(0, T, X)$.

PROPOSITION 1.5. *Pour $p \in [1, +\infty[$, on a les résultats suivants :*
1. Si X est séparable, alors $L^p(0, T, X)$ est aussi séparable.
2. Si X est réflexif (respectivement de Hilbert), alors $L^p(0, T, X)$ est aussi réflexif (respectivement de Hilbert). On a alors $L^2(0, T, X)$ est un espace de Hilbert tels que
3. Si X et Y désignent deux espaces de Banach, X inclus dans Y, avec injection continue, alors il existe une injection continue de $L^p(0, T; X)$ dans $L^p(0, T, Y)$.
4. Soient p et p' deux exposants conjugués, $p \in [1; +\infty[$.
4.a. Le duel de $L^p(0, T, X)$ s'identifie à $L^{p'}(0, T, X)$:

4.2. Si Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$; On a l'équivalence algébrique et topologique entre les espaces $L^p(0,T,L^p(\Omega))$ et $L^p(]0,T[\times\Omega)$.

3.1. Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles. *Soit X un espace de Bancah et T un réel strictement positif.*

DÉFINITION 1.9. *On désigne par $\mathcal{D}'(0,T,X)$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(]0,T[)$ (espace des fonctions numériques indéfiniment différentiables à support compact dans $]0,T[$) dans X. Un élément de $\mathcal{D}'(]0,T[,X)$ est appelé une "distribution" et on note pour $f\in\mathcal{D}'(0,T,X)$ et $\varphi\in\mathcal{D}(]0,T[)$*

$$f(\varphi)=\langle f,\varphi\rangle.$$

Comme pour le cas réel, on donne la définition de la dérivée d'une distribution.

DÉFINITION 1.10. *Soit $f\in\mathcal{D}'(0,T,X)$ et m un entier positif. La dérivée de f d'ordre m est donnée par la formule suivante :*

$$\langle\frac{d^m f}{dt^m},\varphi\rangle=(-1)^m\langle f,\frac{d^m\varphi}{dt^m}\rangle.$$

3.2. Espaces $W^{1,p}(0,T,X)$. .

DÉFINITION 1.11. *Soient p un réel, $1\le p\le\infty$, X un espace de Banach et T un réel strictement positif. On définit l'espace comme suit : $W^{1,p}(0,T,X)=\left\{u\in L^p(0,T,X),\frac{\partial u}{\partial t}\in L^p(0,T,X)\right\}$ que l'on munit de la norme suivante :*

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T,X)}=\|u\|_{L^p(0,T,X)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^p(0,T,X)},$$

ou de la norme équivalente, si p est fini, définit par :

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T,X)}=\left(\|u\|^p_{L^p(0,T,X)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^p_{L^p(0,T,X)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les propositions suivantes permettent de caractériser les conditions suffisantes

PROPOSITION 1.6. *Pour $p\in[1,+\infty[$, l'espace $W^{1,p}(0,T,X)$ est de Banach.*

PROPOSITION 1.7. *Si X est séparable et $p<+\infty$, alors l'espace $W^{1,p}(0,T,X)$ est séparable.*

PROPOSITION 1.8. *Si $1<p<+\infty$ et X est séparable réflexif alors l'espace $W^{1,p}(0,T,X)$ est réflexif.*

PROPOSITION 1.9. *Pour $p=2$, on note $H^1(0,T,X)=W^{1,2}(0,T;X)$, on a alors $H^1(0,T,X)$ est de Hilbert.*

3.3. Espace $H^1(Q)$..

DÉFINITION 1.12. *Soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et T un réel strictement positif.*

On définit l'espace :

$$H^1(Q) = \left\{ u \in L^2(Q), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0,T,X) \right\}$$

que l'on munit de la norme définit par :

$$\|u\|_{H^1(Q)} = \left(\|u\|^2_{L^2(Q)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L^p(Q)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

THÉORÈME 1.7. *L'espace $H^1(Q)$ est de Hilbert pour la norme définit ci-dessus.*

LEMME 1.1. *Si*

$$\int_0^T u dt = 0$$

Alors

$$\int_0^T \|u\|^2 dt \leq C \int_0^T \left\| u' \right\|^2 dt$$

et

$$\int_0^T \|u\|^p_{L^p(Q)} dt \leq C \int_0^T \|u'\|^p_{L^p(Q)} dt$$

pour u dérivable pour tout $t \in [0,T]$, et $u \in L^2 \left(0, T, \left(H_0^1(\Omega)\right)^n\right)$ et $u' \in L^2 \left(0, T, \left(H_0^1(\Omega)\right)^n\right) \cap L^p(Q)$.

DÉMONSTRATION. Voir J.L Lions [34]. ■

Les résultats qui vont suivre seront utilisés de façon fondamentale dans ce travail :

Formule de Green. *Rappelons qu'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ et de frontière Γ est dit de classe C^k si Γ est une variété de dimension $n-1$ et de classe C^k :*

THÉORÈME 1.8. *(La première Formule de Green)*

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ (par exemple de classe C^1 avec Γ borné) ; alors pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, on a la première formule de Green :

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = -\int_\Omega v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \eta_i(x) d\Gamma, i = \overline{1,n}$$

où η_i est le $i^{\grave{e}me}$ cosinus directeur de la normale n sortante.

DÉMONSTRATION. Voir [57] ■

Cette formule est une " intégration par partie généralisée ". Son importance est extrême par la suite. Comme conséquence de ce théorème, on a :

COROLLAIRE 1.1. *Si* $u, v \in H^1(\Omega)$ *et si* $\triangle u \in L^2(\Omega)$, *alors :*

$$\int_\Omega \triangle u(x)\, v(x)\, dx = -\int_\Omega \nabla v(x)\, \nabla u(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(x)\, v(x)\, d\Gamma,$$

où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq n}$ *est le vecteur gradient de* u *et* $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u.\eta$.

Maintenant, on rappelle certains lemmes et concepts utilisés souvent dans la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution, nous aurons besoin aussi dans la suite quelques inégalités et propriétées des opérateurs.
Soit V *un espace de Banach et* V' *son duel topologique.*

LEMME 1.2. *(Inégalité de Young)*[8] *Soit* p *et* q *deux réels vérifiant* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *Alors*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \forall \varepsilon > 0,\ ab \leq \frac{\varepsilon}{p} a^p + \frac{1}{q\varepsilon^{\frac{p}{q}}}.$$

En particulier si $p = q = 2$, *on retrouve l'inégalité de Cauchy.*

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2,\ ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

En pratique, pour deux réels positifs a *et* b *et pour tout* $\varepsilon > 0$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \forall \varepsilon > 0, ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Notation : *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, *on désigne par* p' *l'exposant conjugué de* p *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

THÉORÈME 1.9. *(Inégalité de Hölder.)*[8] *Soit* $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'}(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors* $fg \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hölder.

COROLLAIRE 1.2. *(Inégalité de Hölder généralisé)*[8]
Soit $f_1, f_2, ..., f_k$ *des fonctions telles que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega), 1 \leq i \leq k$ *avec :*

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leq 1$$

.

Alors le produit $f = f_1 f_2 ... f_k$ *appartient à* $L^p(\Omega)$ *et*

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1} ... \|f\|_{p_k}.$$

$L^p(\Omega)$ *est réflexif pour* $1 < p < \infty$.

LEMME 1.3. *(de Gronwall)*[8]
Soit f une fonction $\in L^{\infty}(0,T), f(t) \geq 0$, p.p, $t \in [0,T]$.
μ une fonction $\in L^{1}(0,T)$, $\mu(t) \geq 0$, p.p, $t \in [0,T]$. On suppose :
$f(t) \leq \int_0^t \mu(s) f(s)ds + C, p.p, t \in [0,T]$, C est une constante. Alors :

$$f(t) \leq C \exp(\int_0^t \mu(s)\, ds), \quad p.p \text{ avec } \ t \in [0,T].$$

On désigne par $\langle f,g \rangle$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$

$$\langle f,g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

.

4. Rappels sur la géométrie Riemannienne.

Maintenant, nous aurons besoin aussi dans la suite des quelques propriétées et lemmes pour introduire la méthode de la géométrie Riemannienne, dans le contexte des équations réelles avec des coefficients variables afin d'étudier les problèmes de la stabilisation directe et de la contrôlabilité exacte (voir par exemple [20] et [62]).

4.1. La géométrie Riemannienne sur $\mathbb{R}^n$. *Dans ce paragraphe, on va introduire quelques notions de la geométrie Riemannienne dont on aura besoin ultérieurement et on renvoie le lecteur aux ouvrages [6], [25] et [30] pour plus de détails. Les lemmes suivants nous donne des relations qu'on utilisera dans le chapitre 2.*

LEMME 1.4. [62] *Soit f_1, f_2 deux fonctions réelles dans $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ et soit H un champ de vecteurs sur $H = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^n$. Alors La formule de la divergence dans la métrique Euclidiéenne est donnée comme suit*

(i)

$$\int_{\Omega} div_0 H d\Omega = \int_{\Gamma} H.\nu d\Gamma.$$

(ii)

$$\int_{\Omega} f_1 H\left(f_2\right) d\Omega = \int_{\Gamma} H.\nu f_1 f_2 d\Gamma - \int_{\Omega} f_2 div_0(f_1 H) d\Omega.$$

LEMME 1.5. [31], [62] *Soit f une fonction réelle dans $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ et soient H, X deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$.*
Alors Le gradient $\nabla_g f$ de f dans la métrique Riemannienne g est donné comme suit

(i)

$$\nabla_g f\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x\right) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} = A\left(x\right) \nabla_0 f.$$

(ii)

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} := (A(x)\nabla_0 y).\nu = \nabla_g y.\nu$$

(iii)

$$\langle \nabla_g f, \nabla_g H(f)\rangle_g = DH(\nabla_g f, \nabla_g f)$$
$$+\frac{1}{2} div_0\left(|\nabla_g f|_g^2 H\right)(x) - \frac{1}{2}|\nabla_g f|_g^2 div_0 H,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

(vi) On définie l'opérateur différentiel d'ordre deux par :

$$Ay := -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)$$
$$= -div_0(A(x)\nabla_0 y)$$
$$= -div_0(\nabla_g y), y \in C^2(\Omega).$$

DÉMONSTRATION. (i) On a

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

avec

$$\nabla_g f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = A(x)\nabla_0 f.$$

Et

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = X.\nabla_0 f$$
$$= \langle X, \nabla_0 f\rangle_0 = \langle X, G(x)A(x)\nabla_0 f\rangle$$
$$= \langle X, G(x)\nabla_g f\rangle = \langle X, \nabla_g f\rangle_g.$$

(ii) On a

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}.\nu_i = \sum_{i=1}^{n}(A(x).\nabla_0 y)_i.\nu_i$$

=A$(x)\nabla_0 y.\nu$= $\nabla_g y.\nu$

(iii)On peut voir[26].

(vi)

$Ay = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(A(x)\nabla_0 h)_i$$
$$= -div_0(\nabla_g y).$$

■

LEMME 1.6. [62] *Soient* f, h *deux fonctions réelles dans* $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *et soient* H, X *deux champs de vecteurs sur* $\mathbb{R}^n$. *Alors*

(i)

$$\langle X(x), A(x)H(x)\rangle_g = H\left(x\right)X\left(x\right). \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(ii)

$$\langle \nabla_g f, \nabla_g h\rangle_g = \nabla_g f(h\rangle = \nabla_0 f.A\left(x\right)\nabla_0 h$$

Maintenant, on passe à la première formule de Green associe à l'opérateur A.

LEMME 1.7. [43] *Soient* f_1, f_1 *deux fonctions réelles dans* $H^2\left(\Omega\right)$, *on a*

$$\int_\Omega A f_1 f_2 d\Omega = \int_\Omega \langle \nabla_g f_1, \nabla_g f_2\rangle_g d\Omega - \int_\Gamma \frac{\partial f_1}{\partial \nu_A} f_2 d\Gamma.$$

Les résultats qui vont suivre seront utilisés de façon fondamentale dans le chapitre 2. On va construire une métrique convenable sur $\mathbb{C}^n$ *bien adapter a ce type de système complexe.*

La géométrie Riemannienne sur $\mathbb{C}^n$.. *Dans cette partie, on construit une métrique convenable sur les systèmes complexes avec des coefficients variables.*

DÉFINITION 1.13. *On définit le produit scalaire* $g\left(.,.\right)$ *et la norme correspondante* $|.|_g$ *sur l'espace tangent. Pour tout* z_1, $z_2 \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle z_1, z_2\rangle_g = \langle Rez_1, Rez_2\rangle_g + \langle Rez_1, Rez_2\rangle_g$$

$$-\mathbf{i}\left(\langle Rez_1, Imz_2\rangle_g - \langle Rez_1, Imz_2\rangle_g\right).$$

Alors on peut définir la norme

$$\|z\|_g^2 = \langle z, z\rangle_g = \|Rez\|_g^2 + \|Imz\|_g^2.$$

Notations *Soit* f *une fonction complexe et* H *est un champ vecteur sur* $(\mathbb{R}^n, g)$. *On note*

$$H(f) = H(Ref) + \mathbf{i}H(Imf)$$

$$\nabla_g f = \nabla_g Ref + \mathbf{i}\nabla_g Imf,$$

et

$$div_0 f = div_0(Ref) + \mathbf{i}div_0(Imf.$$

Le lemme suivant est un outil principal de l'utilisation de la méthode de la géométrie Riemannienne, on renvoie le lecteur à l'ouvrage [25].

LEMME 1.8. *Soient f_1, $f_2$deux fonctions complexes dans $H^2(\Omega)$. Alors*
i) la troisième formule de Green

$$\int_{\Omega} (Af_1)\,\overline{f_2}d\Omega = \int_{\Omega} \langle \nabla_g f_1, \nabla_g f_2 \rangle_g d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial f_1}{\partial \nu_A}\overline{f_2}d\Gamma.$$

ii)

$$\int_{\Omega} f_1 H(\overline{f_2})d\Omega = \int_{\Gamma} H.\nu f_1 \overline{f_2}d\Gamma - \int_{\Omega} \overline{f_2} div_0(f_1 H)d\Omega.$$

D'autre part, si f est une fonction complexe dans $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ et H est un champ vecteur sur $\mathbb{R}^n$. Alors on a

$$Re\langle \nabla_g f, \nabla_g H(f)\rangle_g = DH(\nabla_g Ref, \nabla_g Ref) + DH(\nabla_g Imf, \nabla_g Imf) + \frac{1}{2}H\left(\|\nabla_g f\|_g^2\right)$$

CHAPITRE 2

Stabilisation uniforme de l'équation de Schrödinger dans $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

Ce chapitre est dédié à l'étude de l'équation de Schrödinger à coefficients variables avec un feedback frontière de type mémoire à conditions aux limites de type Neumann. Pour montrer l'existence locale, globale et l'unicité de la solution en utilisant la méthode dite la méthode de Faedo-Galerkin. Ensuite, nous allons établir la décroissance exponentielle du la solution du système considéré. On adopte l'approche basée sur la géométrie Riemannienne et la technique des multiplicateurs pour prouver la stabilisation uniforme de l'équation de Schrödinger dont la partie elliptique est à coefficients variables avec des conditions aux limites dissipatives de type mémoire.

1. Position du problème.

Soit Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *de frontière régulière* $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ *où* Γ_0 *et* Γ_1*sont deux parties de* Γ *vérifiant* $\Gamma_0, \Gamma_1 \neq \phi$, $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \phi$. *On dénote par*

$$z^{/} = z_t = \frac{\partial z}{\partial t}, \ \mathbf{i}^2 = -1.$$

Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance de la fonction z *par rapport à* x *(parfois par rapport à* t*). L'objet de ce chapitre est de chercher une solution du problème mixte suivant :*

$$\begin{cases} z_t - \mathbf{i}Az & = & 0 & dans & \Omega\times]0,+\infty[\\ z\,(x,0) & = & z_0\,(x) & dans & \Omega \\ z & = & 0 & sur & \Gamma_0\times]0,+\infty[\\ \frac{\partial z}{\partial \nu_A} & = & u & sur & \Gamma_1\times]0,+\infty[\end{cases}$$

où $\frac{\partial z}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,(x)\, \frac{\partial z}{\partial x_i}.\nu_i$ *et* $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ *est le vecteur normal, et* u *la fonction de contrôle tel que*

$$u = \int_0^t k\,(t-s)\, z_t\,(s)\, ds - bz_t.$$

A fin d'étudier le problème et de formuler le théorème d'existence et d'unicité on aura besoin des hypothèses suivantes :

- *Hypothèses.*

(H_1) L'opérateur différentiel d'ordre deux A est défini comme suit :

$$Az = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial z}{\partial x_j}\right).$$

où les coefficients réels (a_{ij}) de classe C^∞ $\forall\ 1 \le i, j \le n$ sont symétriques et il existe une constante positive α_1 telle que :

$$(a) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\overline{\xi_j} \ge \alpha_1 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i^2,$$

$$(b) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j > 0,$$

pour tout $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(H_2) On suppose que la fonction $k \in C^3(\mathbb{R}^+, L^\infty(\Omega))$ est décroissante. En outre, on suppose qu'il vérifie les conditions suivantes :

$$(a)\exists\delta > 0,\ k'' \ge -\delta\ k'\Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$$

$$(b)k'(0) = -k(0)$$

$$(c)k''' \le 0,\ \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$$

On propose que

$$f = \inf_{(x,t)\in\Gamma_1\times\mathbb{R}^+}\left(-k'\right) \ne 0$$

$$\varphi = \sup_{(x,t)\in\Gamma_1\times\mathbb{R}^+} k(t)$$

(H_3) On suppose que la fonction $b \in L^\infty(\Gamma_1)$, et qu'il existe une constante positive β telle que :

$$b \ge \beta$$

pour tout $x \in \Gamma_1$.

Remarque 2.1. *On va transformer la condition au bord sur la partie Γ_1, on suppose que $z_0 = 0$ on Γ_1. Par intégration par partie :*

$$\int_0^t k(t-s)\,z_t(s)\,ds = [k(t-s)\,z(s)]_0^t + \int_0^t k'(t-s)\,z(s)\,ds$$

$$= \int_0^t k'(t-s)\,z(s)\,ds + k(0)\,z(t) - k(t)\,z_0$$

$$= \int_0^t k'(t-s)\,z(s)\,ds + k(0)\,z(t).$$

Donc à travers ce chapitre la condition sur Γ_1 sera :

$$u = -\int_0^t k'(t-s)\,z(s)\,ds - k(o)\,z(t) - bz_t.$$

Formulation variationnelle. *Pour étudier l'existence locale, globale et la décroissance exponentielle de la fonctionnelle d'énergie, nous procédons à obtenir une formulation variationnelle du problème proposè. Pour cela, on définit l'espace* $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ *comme une fermeture de l'ensemble* $\mathcal{D}(\Omega)$*, des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans* $H^1(\Omega)$*. On peut le caractériser comme suit*

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{z \in H^1(\Omega), z = 0 \ sur \ \Gamma_0\}$$

muni du produit scalaire

$$a(z,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{v}}{\partial xj} d\Omega.$$

La dérivation étant prise au sens des distributions.

Démonstration. Multiplions la première équation du probléme par un élément $\overline{v} \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, intégrons le résultat obtenu sur Ω et utilisons le formule de Green.

$$\int_{\Omega} z_t \overline{v} d\Omega = \mathbf{i} \int_{\Omega} Az\overline{v} d\Omega = \mathbf{i} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \overline{v} d\Omega$$

$$= \mathbf{i} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_i} \nu_i \overline{v} d\Gamma_1 - \mathbf{i} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{v}}{\partial xj} d\Omega$$

$$= \mathbf{i} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial z}{\partial \nu_A} \overline{v} d\Gamma_1 - \mathbf{i} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{v}}{\partial xj} d\Omega$$

de la condition au limite sur Γ_1, on a

$$\int_{\Omega} z_t \overline{v} d\Omega = \mathbf{i} \int_{\Gamma_1} (- \int_0^t k'(t-s) z(s) ds - k(o) z(t) - bz_t) \overline{v} d\Gamma_1$$

$$-\mathbf{i} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{v}}{\partial xj} d\Omega.$$

On obtient la formule variationnelle suivante :

$$\langle z_t, v \rangle + \mathbf{i} a(z,v) + \mathbf{i} \beta(t,z,v) = \mathbf{i} \langle bz_t, v \rangle, \ \forall v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \quad (1)$$

où

$$a(z,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial \overline{v}}{\partial xj} d\Omega.$$

$$\beta(t,z,v) = \int_{\Gamma_1} (- \int_0^t k^{/}(t-s) z(s) ds - k(0) z) \overline{v} \, d\Gamma_1, \ \beta(0,z,v) = 0.$$

■

2. Existence, unicité et régularité des solutions

Ce paragraphe comporte une étude basée sur la méthode de Faedo-Galerkin de l'existence, de l'unicité et de la régularité de la solution du problème, et sous les hypothèses que nous avons cité précédemment, l'existence locale et l'unicité d'une solution faible seront obtenus en se basant sur les approximations de Faedo-Galarkin. Ci-dessous, on va établir un résultat concernant l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du problème.

THÉORÈME 2.1. *Supposons que les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) sont vérifiées.*
1- Pour tout $z_0 \in V = H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, il existe une solution (faible) unique du système considéré vérifiant :

$$z \in C\left(]0, T[\,, V\right).$$

2-Si $z_0 \in H^3(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ tel que $\frac{\partial z_0}{\partial \nu_A} = -\frac{1}{2}k(-s)z(0)$ sur Γ_1. Alors la solution z (dite forte) est plus régulière

$$z \in C^1\left(]0, T[\,, V\right).$$

DÉMONSTRATION. *La preuve de ce théorème est formée de trois étapes :*
- On construit des solutions "approchées" par la méthode de Faedo-Galerkin.
- On établit pour ces solutions approchées, des estimations à priori.
- On passe à la limite.
Commençons par introduire la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} e_n \in \; H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \forall\, n; \\ \forall m,\ e_1, ..., e_m \text{ sont linéairement indépendants}; \end{cases}$$

l'espace engendré par la famille $(e_1, ..., e_m)$ est dense dans $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ c'est à dire $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble des fonctions dans V qui forment une base orthonormée pour $L^2(\Omega)$, on cherche alors une suite $(z^m) = (z^m(t))$ sous la forme

$$z^m(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm}(t) e_j,\ t \in [0, T_m]$$

solution du problème variationnel approché, associé au problème proposé suivant :

$$\langle z_t^m, e_j\rangle + \mathbf{i}a\left(z_m, e_j\right) + \mathbf{i}\beta\left(t, z_m, e_{j.}\right) = -\mathbf{i}\langle b z_t^m, e_{j.}\rangle,\ j = 1, ..., m.(1)$$

avec la condition initiale

$$z_m(x,0) = z_{0m},\ z_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{jm}(t) e_{j.}, \text{ dans } H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \text{ lorsque } m \to \infty.$$

On obtient un problème de Cauchy, on est assuré de l'existence d'une solution, (noter que $det(e_i \;\;, e_j) \neq 0$ grâce à la linéaire indépendance de $(e_1, \ldots, e_m)$ dans un intervalle $[0; T_m]$; les estimations à priori qui suivent montreront que $T_m = T$. ∎

2.1. Première estimation à priori. *Posant dans* (1) $v = z_t^m$, *on trouve*

$$\langle z_{tt}, z_t^m\rangle + \mathbf{i}a\left(z_m, z_t^m\right) + \mathbf{i}\beta\left(t, z_m, z_t^m\right) = -\mathbf{i}\langle bz_t^m, z_t^m\rangle$$

En prenant la partie imaginaire, il résulte

$$Re\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial z_m}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{z_t^m}}{\partial x_j}d\Omega\right) = -\int_{\Gamma_1} b\left|z_t^m\right|^2 d\Gamma_1 - Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)z_m(s)\overline{z_t^m}\left(t\right)dsd\Gamma_1\right)$$
$$-\frac{1}{2}Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k\left(0\right)z_m(t)\overline{z_t^m}\left(t\right)dsd\Gamma_1\right).$$

Mais

$$-\int b\left|z_t^m\right|^2 d\Gamma_1 - Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)z_m(s)\overline{z_t^m}\left(t\right)dsd\Gamma_1\right) - \frac{1}{2}Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k\left(0\right)z_t(t)\overline{z_t^m}\left(t\right)dsd\Gamma_1\right)$$
$$= -\int_{\Gamma_1} b\left|z_t^m\right|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k'\left|z^m\right|^2 d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''\left(t-s\right)\left|z^m\left(s\right) - z^m\left(t\right)\right|^2\, dsd\Gamma_1$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Gamma_1} k\left|z^m\right|^2 d\Gamma_1\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z^m\left(s\right) - z^m\left(t\right)\right|^2\, dsd\Gamma_1\right].$$

Alors

$$Re\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial z^m}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{z_t^m}}{\partial x_j}d\Omega\right) = \int_{\Gamma_1} b\left|z_t^m\right|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{4}\int_{\Gamma_1} k'\left|z_m\right|^2 d\Gamma_1$$
$$-\frac{1}{4}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Gamma_1} k\left|z^m\right|^2 d\Gamma_1\right] + \frac{1}{2}\left[\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z^m\left(s\right) - z^m\left(t\right)\right|^2 dsd\Gamma_1\right]$$
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Gamma_1}\int_0^t k\left(t-s\right)\left|z^m\left(s\right) - z_m\left(t\right)\right|^2 dsd\Gamma_1\right].$$

D'aprés les hypothèses sur les fonctions k,*et* b *on a :*

$$-\int_{\Gamma_1} b\left|z_t^m\right|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k'\left|z^m\right|^2 d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\left[\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''\left(t-s\right)\left|z^m\left(s\right) - z^m\left(t\right)\right|^2 dsd\Gamma_1\right] < 0$$

donc

$$Re\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial z_m}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{y_t^m}}{\partial x_j}d\Omega\right) \leq -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Gamma_1} k\left|z_m\right|^2 d\Gamma_1\right]$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|y^m\left(s\right) - y^m\left(t\right)\right|^2 dsd\Gamma_1\right].$$

d'autre part, on a

$$Re\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial z_m}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{z_t^m}}{\partial xj}d\Omega\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial z_m}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{z_m}}{\partial xj}d\Omega\right)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\left|\nabla_g z_m\right|_g^2 d\Omega\right),$$

d'où résulte que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\left|\nabla_g z^m\right|_g^2 d\Omega\right) \leq cte.$$

Alors

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla_g z^m(T)|_g^2\, d\Omega \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla_g z^m(0)|_g^2\, d\Omega.$$

d'autre part, on a

$$Re\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial z_m}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{z_t^m}}{\partial xj}d\Omega\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial z_m}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{z_m}}{\partial xj}d\Omega\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}|\nabla_g z_m|_g^2\, d\Omega\right),$$

d'où résulte que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}|\nabla_g z^m|_g^2\, d\Omega\right) \leq cte.$$

Alors

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla_g z^m(T)|_g^2\, d\Omega \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla_g z^m(0)|_g^2\, d\Omega.$$

2.2. Seconde estimation à priori. *On dérive* (1) *deux par rapport à* t*, et on pose* $v = z_{tt}^m$

$$\langle z_{tt}^m, z_{tt}^m\rangle + \mathbf{i}\int_{\Gamma_1}(-\int_0^t k''(t-s)\, z^m(s)\, ds - k(0)\, z^m + bz_t^m)\overline{z_{tt}^m}d\Gamma_1$$

$$+\mathbf{i}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial z_t^m}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{z_{tt}^m}}{\partial x_j d\Omega}$$

$$-\mathbf{i}\int_{\Gamma_1}bz_{tt}^m\overline{z_{tt}^m}d\Gamma_1 = 0$$

On prend la partie imaginaire

$$Re\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}(x)\frac{\partial y_t^m}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{y_{tt}^m}}{\partial x_j d\Omega}\right) = -\int_{\Gamma_1}b\,|y_{tt}^m|^2\, d\Gamma_1 - Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'(t-s)\, z^m(s)\, \overline{z_{tt}^m}(t)\, dsd\Gamma_1\right)$$

$$-Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_t^0 k(0)\, z_t^m(t)\overline{z_{tt}^m}(t)\, dsd\Gamma_1\right)$$

D'aprés la définition de k

$$-\int_{\Gamma_1}b\,|z_{tt}^m|^2\, d\Gamma_1 - Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_t^0 k''(t-s)\, z_m(s)\overline{z_{tt}^m}(t)\, dsd\Gamma_1\right)$$

$$-Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k(0)\, z_t^m(t)\overline{z_{tt}^m}(t)\, d\Gamma_1\right) = -\int b\,|z_{tt}^m|^2\, d\Gamma_1$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}k'\,|z_t^m|^2\, d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)\,|z_t^m(t) - z^m(s)|^2\, dsd\Gamma_1$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[-\int_{\Gamma_1}k'\,|z_t^m|^2\, d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)\,|z_t^m(t) - z^m(s)|^2\, dsd\Gamma_1\right]$$

On déduit que :

$$-\int_{\Gamma_1}b\,|z_{tt}^m|^2\, d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}k''\,|z_t^m|^2\, d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'''(t-s)\,|z_t^m(t) + z^m(s)|^2\, dsd\Gamma_1 \leq 0$$

Alors

$$Re\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial z_t^m}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{z_{tt}^m}}{\partial xj}d\Omega\right)\leq -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(-\int_{\Gamma_1}k'\,{}_t^m|^2\,d\Gamma_1$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''\left(t-s\right)\left|z_t^m\left(t\right)+z^m\left(s\right)\right|^2 dsd\Gamma_1)$$

D'autre part

$$Re\left(\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}a_{ij}\left(x\right)\frac{\partial z_t^m}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{z_{tt}^m}}{\partial x_j}d\Omega\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\left|\nabla_g z_t^m\right|_g^2 d\Omega\right)$$

Alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\left|\nabla_g z_t^m\right|_g^2 d\Omega\right)\leq -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(-\int_{\Gamma_1}k'\left|z_t^m\right|^2 d\Gamma_1+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_t^0 k''\left(t-s\right)\left|z_t^m\left(t\right)+z^m\left(s\right)\right|^2 dsd\Gamma_1).$$

D'après les hypothèses sur la fonction k, on en déduit

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[-\int_{\Gamma_1}k'\left|z_t^m\right|^2 d\Gamma_1+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''\left(t-s\right)\left|z_t^m\left(t\right)+z^m\left(s\right)\right|^2 dsd\Gamma_1\right]\leq 0.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega}\left|\nabla_g z_t^m\right|_g^2 d\Omega\right)\leq 0.$$

D'où

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla_g z_t^m\left(T\right)\right|_g^2 d\Omega\leq\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|\nabla_g z_t^m\left(0\right)\right|_g^2 d\Omega\left|z_t^m\right|_V^2.$$

2.3. Passage à la limite. *On déduit qu'on peut extraire des sous-suites convergentes (z^m), et (z_t^m) de (z^m), et (z_t^m) respectivement et telles que, lorsque $m\to+\infty$, on a z^m $\to z$ faiblement dans $L^\infty\left(0,T;H_{\Gamma_0}^1\left(\Omega\right)\right)$ $z_t^m\to z_t$ faiblement dans $L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$. Par ailleurs, il résulte, en particulier que z^m est bornée dans $L^\infty\left(0,T;H_{\Gamma_0}^1\left(\Omega\right)\right)$ et z_t^m est bornée dans $L^\infty\left(0,T;L^2\left(\Omega\right)\right)$. On sait que l'injection $H^1(0,T,V)\hookrightarrow L^2(0,T,V)$ est compacte. Donc fortement dans $L^2(0,T,V)$. Pour $j\in\mathbb{N}^*$ fixe quelconque et $\forall m>j$, on a*

$$\langle z_t^m,e_j\rangle+\mathbf{i}a\left(z^m,e_j\right)+\mathbf{i}\beta\left(t,z^m,e_j\right)=-\mathbf{i}\langle bz_t^m,e_j\rangle,\ j=1,...,m.$$

De la convergence faible, on déduit que $\langle z_t^m,e_j\rangle\to\langle z_t,e_j\rangle$ faiblement dans $L^\infty(0,T)$ $a\left(z^m,e_j\right)$ $\to a\left(z,e_j\right)$ faiblement dans $L^\infty(0,T)$. Et par conséquent par passage à la limite, il devient

$$\langle z_t^m,e_j\rangle+\mathbf{i}a\left(z^m,e_j\right)+\mathbf{i}\beta\left(t,z_m,e_j\right)=-\mathbf{i}\langle bz_t^m,e_j\rangle,\ j=1,...,m.$$

Comme $(e_1,e_{2.},...,e_m)$ est dense dans $H_{\Gamma_0}^1\left(\Omega\right)$, on obtient pour tout $e\in H_{\Gamma_0}^1\left(\Omega\right)$:

$$\langle z_t^m,e\rangle+\mathbf{i}a\left(z^m,e\right)+\mathbf{i}\beta\left(t,z^m,e\right)=-\mathbf{i}\langle bz_t^m,e\rangle,\ i=1,...,m.$$

Il résulte que z satisfait à la première équation de systhème. Maintenant, on passe à l'unicité.

2.4. Unicité. *Soient y et z deux solutions du problème proposé au sens du théorème de l'existence. On pose $w = y - z$. Alors w satisfait*

$$\begin{cases} w_t - \mathbf{i}Aw = 0 & dans \quad \Omega\times]0,+\infty[\\ w(x,0) = 0 & dans \quad \Omega \\ w = 0 & sur \quad \Gamma_0\times]0,+\infty[\\ \frac{\partial w}{\partial \nu_A} = -\int_0^t k'(t-s)w(s)\,ds - \frac{1}{2}kw + bw_t & sur \quad \Gamma_1\times]0,+\infty[\end{cases}$$

Multipliant par $\overline{w}_t$ la première équation de système, intégrant sur Ω. En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega |w_t|^2\,d\Omega - \mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n \int_{\Gamma_1} a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\nu_i\overline{w_t}d\Gamma + \mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial \overline{w_t}}{\partial xj}d\Omega = 0.$$

Prenant la partie imaginaire de la relation précédente

$$Re\int_{\Gamma_1}\frac{\partial y}{\partial \nu_A}\overline{w_t}d\Gamma_1 = Re\int_\Omega \nabla_g w\nabla_g\overline{w_t}d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega\left[\frac{d}{dt}|\nabla_g w|_g^2\right]d\Omega = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla_g w(t)|_g^2\,d\Omega.$$

Pour $t = 0$, on a

$$\int_\Omega |\nabla_g w|_g^2\,d\Omega + \int_{\Gamma_1} k\,|y|^2\,d\Gamma_1 - \int_0^t\int_{\Gamma_1} k'(t-s)\,|w(t) - w(s)|^2\,d\Gamma_1 ds = 0.$$

Puisque, k est une fonction positive et décroissante alors

$$\int_\Omega |\nabla_g w|_g^2\,d\Omega = -\int_{\Gamma_1} k\,|y|^2\,d\Gamma_1 + \int_0^t\int_{\Gamma_1} k'(t-s)\,|w(t) - w(s)|^2\,d\Gamma_1 ds \le 0,$$

on déduit

$$\int_\Omega |\nabla_g w|_g^2\,d\Omega \le 0,$$

et donc

$$\nabla_g w = 0$$

Ainsi, en utilisant la condition au limite, nous obtenons $w = 0$.

D'où l'unicité. ■

3. Stabilisation uniforme

Notre deuxième objectif dans ce chapitre est de déterminer

$$u = -\int_0^t k'(t-s)\, z(s)\, ds - k(o)\, z(t) - bz_t.$$

sous forme d'un feedback frontière de type mémoire, telle que la solution du problème proposé décroit exponentiellement. Ce choix de la fonction de contrôle u nous a été inspiré par le travail de Guesmia [24] tel que $A = \triangle$ dans le cas où le feedback est linéaire et par Aassila [1] dans le cas non linéaire en utilisant la technique des multiplicateurs sur l'équation des ondes. Cette étude a été généralisée par Shugen.Chai Yuxia.Guo [20] aux équations des ondes à coefficients variables en adaptant une approche développée par Yao[62] et qui combine la géométrie Riemannienne et la technique des multiplicateurs, Serge Nicaisie et Pignotti [54] en se basant sur la construction d'une fonction de Liapunov qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème des ondes à coefficients variables.

3.1. Décroissance exponentielle. *Dans cette partie, on montre que la solution forte (régulière) du problème considéré décroit uniforme dans l'espace d'énergie V. Par un argument de densité, on a le même resultat pour la solution faible. Notons que*

$$Q = \Omega \times [S, T]$$

$$\Sigma_0 = \Gamma_0 \times [S, T]$$

$$\Sigma_1 = \Gamma_1 \times [S, T]$$

Dans le lemme suivant, on démontre que le système proposé est dissipatif.

Lemme 2.1. *Pour $z \in V$, on introduit la fonctionnelle d'énergie totale associée au problème proposé par*

$$2E(t) = \int_\Omega |\nabla_g z|_g^2\, d\Omega + \int_{\Gamma_1} k\, |z|^2\, d\Gamma_1 - \int_0^t \int_{\Gamma_1} k'(t-s)\, |z(t) - z(s)|^2\, d\Gamma_1 ds. \quad (2.2)$$

Soit $z(x,t)$ solution du problème considéré. Alors, la fonctionnelle d'énergie définie par (2.2) *est strictement décroissante sur* $[0, +\infty)$*. De plus*

$$E(S) - E(T) = \int_{\Sigma_1} b\, |z_t|^2\, d\Sigma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} k'\, |z|^2\, d\Sigma_1 + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Sigma_1} k''(t-s)\, |z(t) - z(s)|^2\, d\Sigma_1 ds.$$

Démonstration. D'après les hypothèses (H_1), et (H_3)on a $E(.)$ est positive.
Pour $z_0 \in H^3(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, $E(.)$ est dérivable et

$$2E'(t) = \int_\Omega (\nabla_g \overline{z_t} \nabla_g z d\Omega + \nabla_g \overline{z} \nabla_g z_t) d\Omega + \int_{\Gamma_1} k'\, |z|^2\, d\Gamma_1 + 2Re \int_{\Gamma_1} k z_t d\Gamma_1$$

$$- \int_0^t \int_{\Gamma_1} k''(t-s)\, |z(t) - z(s)|^2\, d\Gamma_1 ds$$

$$-\int_0^t\int_{\Gamma_1} k'(t-s)\,\frac{d}{dt}(z(t)-z(s))\left(\overline{z(t)-z(s)}\right)dsd\Gamma_1.$$

On multiplie la première equation de système proposè par $\overline{z_t}$ et on intègre sur Ω,

$$\int_\Omega (z_t-\mathbf{i}Az)\,\overline{z_t}d\Omega=0$$

$$\int_\Omega z_t\overline{z_t}d\Omega-\mathbf{i}\int_\Omega Az\overline{z_t}d\Omega=0$$

$$\int_\Omega |z_t|^2\,d\Omega-\mathbf{i}\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)\overline{z_t}d\Omega=0$$

La formule de Green nous donne

$$\int_\Omega |z_t|^2\,d\Omega-\mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n\int_{\Gamma_1}a_{ij}(x)\,\frac{\partial z}{\partial x_i}\nu_i\overline{z_t}d\Gamma_1+\mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a_{ij}(x)\,\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial\overline{z_t}}{\partial x_j}d\Omega=0.$$

On prend la partie imaginaire

$$Im(\int_\Omega |z_t|^2\,d\Omega-\mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n\int_{\Gamma_1}a_{ij}(x)\,\frac{\partial z}{\partial x_i}\nu_i\overline{z_t}d\Gamma_1+\mathbf{i}\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega a_{ij}(x)\,\frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial\overline{z_t}}{\partial x_j}d\Omega)=0.$$

On observons facilement que

$$Re\int_\Omega\langle\nabla_g z_t,\nabla_g\overline{z}\rangle_g d\Omega=Re\int_{\Gamma_1}\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\overline{z_t}d\Gamma_1.$$

Et on multiplie la troisième equation de système par $\overline{z_t}$, et on intègre sur Γ_1

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\overline{z_t}d\Gamma_1=-\int_{\Gamma_1}k(0)\,z(t)\,\overline{z_t}d\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}\left(\int_o^t k'(t-s)\,z(s)\,ds\right)\overline{z_t}d\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}bz_t\overline{z_t}d\Gamma_1$$

on prend la partie réelle

$$Re\int_{\Gamma_1}\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\overline{z_t}d\Gamma_1=-Re\int_{\Gamma_1}k(0)\,z(t)\,\overline{z_t}d\Gamma_1-Re\int_{\Gamma_1}\left(\int_0^t k'(t-s)\,z(s)\,ds\right)\overline{z_t}d\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}b\,|z_t|^2\,d\Gamma_1.$$

On a

$$E'(t)=Re\int_\Omega\langle\nabla_g z_t,\nabla_g\overline{z}\rangle_g d\Omega-Re\int_0^t\int_{\Gamma_1}k'(t-s)\,\overline{z_t}(t)\,(z(t)-z(s))\,d\Gamma_1ds$$

$$+Re\int_{\Gamma_1}k\overline{z_t}zd\Gamma_1+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}k'\,|z|^2\,d\Gamma_1-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1}k''(t-s)\,|z(t)-z(s)|^2\,d\Gamma_1ds.$$

Alors

$$E'(t)=Re\int_{\Gamma_1}\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\overline{z_t}d\Gamma_1+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}k'\,|z|^2\,d\Gamma_1-Re\int_0^t\int_{\Gamma_1}k'(t-s)\,\overline{z_t}(t)\,(z(t)-z(s))\,d\Gamma_1ds$$

$$+Re\int_{\Gamma_1}k\overline{z_t}zd\Gamma_1-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1}k''(t-s)\,|z(t)-z(s)|^2\,d\Gamma_1ds.$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial z}{\partial\nu_A}=-\int_0^t k'(t-s)\,z(s)\,ds-k(o)\,z(t)-bz_t.$$

Alors on obtient

$$= -\int_{\Gamma} b\left|z_t\right|^2 d\Gamma - Re\int_{\Gamma_1} k\left(0\right) z\left(t\right) \overline{z_t}\left(t\right) d\Gamma_1 - Re\int_{\Gamma_1} \overline{z_t}\left(\int_0^t k'\left(t-s\right) z\left(s\right) ds\right) d\Gamma_1$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k'\left|z\right|^2 d\Gamma_1 - Re\int_0^t\int_{\Gamma_1} k'\left(t-s\right)\overline{z_t}\left(t\right)\left(z\left(t\right)-z\left(s\right)\right) d\Gamma_1 ds$$

$$+Re\int_{\Gamma_1} k\overline{z_t}z d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1} k''\left(t-s\right)\left(z\left(t\right)-z\left(s\right)\right)^2 d\Gamma_1 ds.$$

On obtient

$$= -\int_{\Gamma_1} b\left|z_t\right|^2 d\Gamma_1 - Re\int_{\Gamma_1} k(0)z(t)\overline{z_t}(t)d\Gamma_1 + Re\int_{\Gamma_1} k\overline{z_t}z d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k'\left|z\right|^2 d\Gamma_1$$

$$-Re\int_0^t\int_{\Gamma_1} k'\left(t-s\right)\overline{z_t}\left(t\right) z\left(s\right) ds d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1} k''\left(t-s\right)\left|z\left(t\right)-z\left(s\right)\right|^2 d\Gamma_1 ds$$

$$-Re\int_0^t\int_{\Gamma_1} k'\left(t-s\right)\overline{z_t}\left(t\right) z\left(t\right) ds d\Gamma_1 + Re\int_0^t\int_{\Gamma_1} k'\left(t-s\right)\overline{z_t}\left(t\right) z\left(s\right) d\Gamma_1 ds d\Gamma_1.$$

Ensuite l'égalité ci dessus prend la forme suivante

$$E'(t) = -\int_{\Gamma_1} b\left|z_t\right|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k'\left|z\right|^2 d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1} k''\left(t-s\right)\left|z\left(t\right)-z\left(s\right)\right|^2 d\Gamma_1 ds$$

$$+Re\int_0^t\int_{\Gamma_1} z\overline{z_t}\left(k - k\left(0\right) - \int_0^t k'\left(t-s\right) ds\right) d\Gamma_1.$$

Observons que

$$Re\int_{\Gamma_1} z\overline{z_t}\left(k - k\left(0\right) - \int_0^t k'\left(t-s\right) ds\right) d\Gamma_1 = 0.$$

Par conséquent

$$E'\left(t\right) = -\int_{\Gamma_1} b\left|z_t\right|^2 d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k'\left|z\right|^2 d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1} k''\left(t-s\right)\left|z\left(t\right)-z\left(s\right)\right|^2 d\Gamma_1 ds.$$

Puisque la fonction k est positive et décroissante; et b une fonction positive alors $E(t)$ est décroissante et pour tout $0 \leq S < T < \infty$ on a

$$E\left(S\right) - E\left(T\right) = \int_{\Sigma_1} b\left|z_t\right|^2 d\Sigma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} k'\left|z\right|^2 d\Sigma_1 + \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Sigma_1} k''\left(t-s\right)\left|z\left(t\right)-z\left(s\right)\right|^2 d\Sigma_1 ds.$$

■

Le lemme suivant nous donne une identité trés utile pour la démonstration de notre résultat de stabilité.

Lemme 2.2. *Pour tout $0 \leq S < T < \infty$ on a :*

$$\int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right)^2 \frac{H.\nu}{\left|\nu_A\left(x\right)\right|_g^2} d\Sigma_0 - \int_{\Sigma_1}\left|\nabla_g z\right|_g^2 H.\nu d\Sigma_1 + 2Re\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right) H\left(\overline{z}\right) d\Sigma_1 + Im\int_{\Sigma_1} z\overline{z_t} H.\upsilon d\Sigma_1$$

$$= 2Re\int_Q DH\langle\nabla_g z, \nabla_g z\rangle dQ - \int_Q\left|\nabla_g z\right|_g^2 divH dQ + \int_\Omega z_t H\left(z\right) d\Omega \left.\right|_S^T + Im\int_Q \overline{z_t} z \, divH dQ.$$

DÉMONSTRATION. *Multiplions la première equation de système proposè par $H.\nabla\overline{z}$, et intègrons sur Q. On a*

$$\int_Q z_t H.\nabla\overline{z}dQ - \mathbf{i}\int_Q AzH.\nabla\overline{z}dQ = 0.$$

Au début, on va intégrer par parties sur $]S,T[$, donc

$$\int_Q z_t H.\nabla\overline{z}dQ = \int_\Omega zH.\nabla\overline{z}d\Omega \mid_S^T - \int_Q zH.\nabla\overline{z_t}dQ.$$

Ensuite, nous appliquons la formule de Green. On trouve

$$\int_Q z_t H.\nabla\overline{z}dQ = \int_\Omega zH.\nabla\overline{z}d\Omega \mid_S^T - \int_\Sigma z\overline{z_t}H.\nu d\Sigma + \int_Q \overline{z_t}div\,(z.H)\,dQ.$$

Alors la relation présédente devient

$$\int_Q z_t H.\nabla\overline{z}dQ = \int_\Omega zH.\nabla\overline{z}d\Omega \mid_S^T - \int_\Sigma z\overline{z_t}H.\nu d\Sigma + \int_Q \overline{z_t}zdivHdQ + \int_Q \overline{z_t}H.\nabla zdQ.$$

D'autre par, on a $\overline{z_t} = -\mathbf{i}A\overline{z}$, donc la formule ci dessous aura la forme suivante :

$$\int_Q z_t H.\nabla\overline{z}dQ = \int_\Omega zH.\nabla\overline{z}d\Omega \mid_S^T - \int_\Sigma z\overline{z_t}H.\nu d\Sigma - \mathbf{i}\int_Q A\overline{z}H.\nabla\overline{z}dQ + \int_Q \overline{z_t}zdivHdQ.$$

Insérant la formule de ci-dessus, on obtient

$$\int_\Omega zH.\nabla\overline{z}d\Omega \mid_S^T - \int_\Sigma z\overline{z_t}H.\nu d\Sigma - \mathbf{i}\int_Q A\overline{z}H.\nabla zdQ + \int_Q \overline{z_t}zdivHdQ - \mathbf{i}\int_Q AzH.\nabla\overline{z}dQ = 0$$

$$\int_\Omega zH.\nabla\overline{z}d\Omega \mid_S^T - \int_\Sigma z\overline{z_t}H.\nu d\Sigma - \mathbf{i}\left[\int_Q (A\overline{z}H.\nabla z + AzH.\nabla\overline{z})\,dQ\right] + \int_Q \overline{z_t}zdivHdQ.$$

Donc

$$\int_\Omega zH.\nabla\overline{z}d\Omega \mid_S^T - \int_\Sigma z\overline{z_t}H.\nu d\Sigma - 2\mathbf{i}Re\int_Q AzH.\nabla\overline{z}dQ + \int_Q \overline{z_t}zdivHdQ = 0.$$

D'où

$$2iRe\int_Q AzH.\nabla\overline{z}dQ = \int_\Omega zH.\nabla\overline{z}d\Omega \mid_S^T - \int_\Sigma z\overline{z_t}H.\nu d\Sigma + \int_Q \overline{z_t}zdivHdQ.$$

Prenons en compte les parties imaginaires, on obtient

$$2Re\int_Q AzH.\nabla\overline{z}dQ = Im\int_\Omega zH.\nabla\overline{z}d\Omega \mid_S^T - Im\int_\Sigma z\overline{z_t}H.\nu d\Sigma + Im\int_Q \overline{z_t}zdivHdQ.$$

De la formule de Green, on a

$$\int_Q AzH.\nabla\overline{z}dQ = \int_\Sigma \nabla_g z\nu.H\,(y)\,d\Sigma - \int_Q \nabla_g z\nabla\,(H\,(z))\,dQ$$

$$= \int_\Sigma \frac{\partial z}{\partial\nu_A}H\,(y)\,d\Sigma - \int_Q \langle\nabla_g z, \nabla g\,(H\,(z))\rangle dQ.$$

En appliquant la relation (iii) du lemme 2.5 ; on trouve

$$\int_Q AzH.\nabla\overline{z}dQ = \int_\Sigma \frac{\partial z}{\partial\nu_A}H\,(z)\,d\Sigma - \int_Q DH\,(\nabla_g z, \nabla_g\overline{z})\,dQ - \frac{1}{2}\int_Q div\left(|\nabla_g z|^2 .H\right)dQ + \frac{1}{2}\int_Q |\nabla_g z|_g^2\,divHdQ.$$

Pour continuer, on a besoin des conditions géométriques suivantes :

Les conditions géométriques sur Γ_0 sont

$$z = z_t = 0;$$
$$|\nabla_g z|_g^2 = \frac{1}{|\nu_A(x)|_g^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right)^2$$
$$H(z) = \frac{H.\nu}{|\nu_A(x)|_g^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right).$$

Ces conditions implique

$$\begin{aligned} &2Re\int_\Sigma \left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right) H(\overline{z})\, d\Sigma \\ &= 2Re\int_{\Sigma_0} \frac{\partial z}{\partial \nu_A} H.\nabla \overline{z} d\Sigma_0 \\ &= 2Re\int_{\Sigma_0} \frac{\partial z}{\partial \nu_A}\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\frac{H.\nu}{|\nu_A(x)|_g^2} d\Sigma_0 \\ &= 2Re\int_{\Sigma_0} \left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right)^2 \frac{H.\nu}{|\nu_A(x)|_g^2} d\Sigma_0. \end{aligned}$$

Puisque $z = z_t = 0$ sur Σ_0, on a

$$Im\int_\Sigma z\overline{z_t} H.\nu d\Sigma = Im\int_{\Sigma_0} z\overline{z_t} H.\nu d\Sigma_0 = 0,$$

et d'autre part, on peut voir que

$$2Re\int_\Sigma \left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right) H(\overline{z})\, d\Sigma = 2Re\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right) H.\nabla\overline{z} d\Sigma_1,$$

et aussi

$$Im\int_\Sigma z\overline{z_t} H.\nu d\Sigma = Im\int_{\Sigma_1} z\overline{z_t} H.\nu d\Sigma_1.$$

Ensuite, on va remplacer les conditions frontières, on obtient alors

$$\begin{aligned} &2Re\int_{\Sigma_0}\frac{\partial z}{\partial \nu_A} H(\overline{z})\, d\Sigma_0 + 2Re\int_{\Sigma_1}\frac{\partial z}{\partial \nu_A} H(\overline{z})\, d\Sigma_1 - 2Re\int_Q DH(\nabla_g z, \nabla_g \overline{z})\, dQ \\ &- \int_{\Sigma_1} |\nabla_g z|_g^2 H.\nu d\Sigma_1 - \int_{\Sigma_0} |\nabla_g z|_g^2 H.\upsilon d\Sigma_0 + \int_Q |\nabla_g z|_g^2 divH dQ \\ &= Im\int_\Omega zH(\overline{z})\, d\Omega \,|_S^T - Im\int_{\Sigma_1} z\overline{z_t} H.\nu d\Sigma_1 - Im\int_{\Sigma_0} z\overline{z_t}H.\nu d\Sigma_0 + Im\int_Q \overline{z z_t} divH dQ. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &Re\int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right)^2 \frac{H.\nu}{|\nu_A(x)|_g^2} d\Sigma_0 + 2Re\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right) H(\overline{z})\, d\Sigma_1 + Im\int_{\Sigma_1} z\overline{z_t}H.\nu d\Sigma_1 - \int_{\Sigma_1} |\nabla_g z|_g^2 H.\nu d\Sigma_1 \\ &- \int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right)^2 \frac{H.\nu}{|\nu_A(x)|_g^2} d\Sigma_0 = 2Re\int_Q DH\langle\nabla_g z, \nabla_g\overline{z}\rangle dQ - \int_Q |\nabla_g z|_g^2 divH dQ + Im\int_\Omega \overline{z} H(z)\, d\Omega \,|_S^T \\ &+ Im\int_Q \overline{z_t} z divH dQ. \end{aligned}$$

Finalement, l'identité désirée est donnée par

$$\int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right)^2\frac{H.\nu}{\left|\nu_A(x)\right|_g^2}d\Sigma_0-\int_{\Sigma_1}\left|\nabla_g z\right|_g^2 H.\nu d\Sigma_1$$

$$+2Re\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right)H\left(\overline{z}\right)d\Sigma_1+Im\int_{\Sigma_1}z\overline{z_t}H.\upsilon d\Sigma_1$$

$$=2Re\int_Q DH\langle\nabla_g z,\nabla_g z\rangle dQ-\int_Q\left|\nabla_g z\right|_g^2 divHdQ+\int_\Omega z_t H\left(z\right)d\Omega\mid_S^T+Im\int_Q\overline{z_t}zdivHdQ.$$

■

Preuve de la stabilisation uniforme. *Notre résultat de stabilisation est le suivant :*

THÉORÈME 2.2. *Soient les hypothèses suivantes (H_1), (H_2) et (H_3) sont vérifiées, supposons en plus les conditions géométrique suivantes :*
Il existe un champ de vecteur H sur $(\mathbb{R}^n, g)$ tel que :

$$i)\forall X\in T_x\mathbb{R}^n, a>0,\langle D_X H, X\rangle_g\geq a\left|X\right|_g^2$$

$$ii)H.\nu<0 \ sur \ \Gamma_0$$

$$iii)H.\nu\geq 0 \ sur \ \Gamma_1.$$

Alors pour toute donnée initiale $z_0\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, ils existent deux constantes positives M et ω telles que

$$E(t)\leq Me^{-\omega t}E(0).$$

REMARQUE 2.2. *Des conditions suffisantes pour l'existence d'un champ de vecteur H vérifiant l'hypothèse (i) sont présentées dans* [**62**]. *Des exemples sont donneés aussi dans le même article. D'après Komornik* [**26**], *pour établir ce théorème il suffit de montrer que pour toute solution du problème on a $\forall S>0$,*

$$\int_0^\infty E\left(t\right)dt\leq CE\left(S\right).$$

DÉMONSTRATION. *Soient $0\leq S<T<\infty$.*
Grâce à (i) l'identité du lemme devient

$$2a\int_Q\left|\nabla_g z\right|_g^2 dQ\leq\int_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right)^2\frac{H.\nu}{\left|\nu_A(x)\right|_g^2}d\Sigma_0-\int_{\Sigma_1}\left|\nabla_g z\right|_g^2 H.\nu d\Sigma_1$$

$$+Im\int_{\Sigma_1}\overline{z_t}zH.\nu d\Sigma_1+2Re\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A}\right)H\left(\overline{z}\right)d\Sigma_1+\int_Q\left|\nabla_g z\right|_g^2 divHdQ$$

$$-Im\int_\Omega zH\left(z\right)d\Omega\mid_S^T-Im\int_Q\overline{z_t}zdivHdQ.$$

La condition (ii) donne

$$2a\int_Q\left|\nabla_g z\right|_g^2 dQ\leq-\int_{\Sigma_1}\left|\nabla_g z\right|_g^2 H.\nu d\Sigma_1$$

$$+2Re\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)H\left(\overline{z}\right)d\Sigma_1+Im\int_{\Sigma_1}z\overline{z'}H.\nu d\Sigma_1$$

$$+\int_Q\left|\nabla_g z\right|_g^2 divHdQ-Im\int_\Omega zH\left(z\right)d\Omega\mid_S^T-Im\int_Q\overline{z_t}zdivHdQ.$$

Pour continuer, on a besoin les lemmes suivants.

LEMME 2.3. *Soient* $0\leq S<T<\infty,\forall\varepsilon>0.$

$$-\int_{\Sigma_1}\left|\nabla_g z\right|_g^2 H.\nu d\Sigma_1+2Re\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)H\left(\overline{z}\right)d\Sigma_1\leq C_0\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)^2 d\Sigma_1$$

tel que

$$C_0=\left(\alpha_1\sup\frac{\left|H\right|^2}{\left|H.\nu\right|}\right)^2.$$

DÉMONSTRATION. *On remarque que*

$$2Re\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)H\left(\overline{z}\right)d\Sigma_1=2Re\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)H.\nabla\overline{z}d\Sigma_1.$$

Alors, grâce à l'hypothése (iii) on a

$$\left|2Re\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)H.\nabla\overline{z}d\Sigma_1\right|\leq 2\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right|\frac{\left|H\right|}{\left|H.\nu\right|}\left|\nabla\overline{z}\right|H.\nu d\Sigma_1$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour une constante positive $\alpha_1>0$

$$2\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right|\frac{\left|H\right|}{\left|H.\nu\right|}\left|\nabla\overline{z}\right|H.\nu d\Sigma_1\leq\alpha_1\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)^2\frac{\left|H\right|^2}{\left|H.\nu\right|}d\Sigma_1+\frac{1}{\alpha_1}\int_{\Sigma_1}\left|\nabla z\right|^2 H.\nu d\Sigma_1$$

De la condition (a) de l'hypothèse (H_1)*, on obtient*

$$\alpha_1\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)^2\frac{\left|H\right|^2}{\left|H.\nu\right|}d\Sigma_1+\frac{1}{\alpha_1}\int_{\Sigma_1}\left|\nabla z\right|^2 H.\nu d\Sigma_1\leq\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}\frac{\left|H\right|^2}{\left|H.\nu\right|}\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)^2 d\Sigma_1+\int_{\Sigma_1}\left|\nabla_g z\right|_g^2 H.\nu d\Sigma_1$$

Alors

$$-\int_{\Sigma_1}\left|\nabla_g z\right|_g^2 H.\nu d\Sigma_1+2Re\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)H\left(\overline{y}\right)d\Sigma_1\leq C_0\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)^2 d\Sigma_1.$$

■ *Pour continuer, on a besoin aussi le lemme suivant.*

LEMME 2.4. $\forall\varepsilon>0$

$$\left|Im\int_{\Sigma_1}z\overline{z_t}H.\nu d\Sigma_1-Im\int_\Omega zH\left(z\right)d\Omega\mid_S^T\right|\leq 2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\right|\int_{\Sigma_1}\left|z_t\right|^2 d\Sigma_1+\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\left(x\right)\right|E\left(S\right)$$

$$+\frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\right|}{2\alpha_1}\int_{\Sigma_1}\left|z\right|^2 d\Sigma_1+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\left(x\right)\right|\right)\left|z\right|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le terme suivant

$$\left| Im \int_{\Sigma_1} z\overline{z_t} H.\nu d\Sigma_1 \right| \leq \frac{1}{2\alpha_1} \int_{\Sigma_1} |z|^2 H.\nu d\Sigma_1 + 2\alpha_1 \int_{\Sigma_1} |z_t|^2 H.\nu d\Sigma_1$$

$$\leq \frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}} |H|}{2\alpha_1} \int_{\Sigma_1} |z|^2 d\Sigma_1 + 2\alpha_1 \sup_{x\in\overline{\Omega}} |H| \int_{\Sigma_1} |z_t|^2 d\Sigma_1.$$

Maintenant, on majore l'autre terme

$$\left| -Im \int_{\Omega} z.H(z)\, d\Omega \; |_S^T \right| = \int_{\Omega} |z(T)\, H.\nabla z(T) - z(S)\, H.\nabla z(S)|\, d\Omega)$$

$$\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} |H(x)| \, (\int_{\Omega} |z(T)| \, |\nabla z(T)|\, d\Omega) + \int_{\Omega} |y(S)| \, |\nabla z(S)|\, d\Omega)$$

$$\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} |H(x)| \, (\int_{\Omega} (\frac{\alpha_1}{2} |z(T)|^2 + \frac{1}{2\alpha_1} |\nabla_g z(T)|_g^2 + \frac{\alpha_1}{2} |z(S)|^2 + \frac{1}{2\alpha_1} |\nabla_g z(S)|_g^2) d\Omega)$$

$$\leq \sup_{x\in\overline{\Omega}} |H(x)| \, (\int_{\Omega} (\frac{\alpha_1}{2} |z(T)|^2 + \frac{1}{2\alpha_1} |\nabla_g z(T)|_g^2 + \frac{\alpha_1}{2} |z(S)|^2 + \frac{1}{2\alpha_1} |\nabla_g z(S)|_g^2) d\Omega)$$

$$\leq \varepsilon \sup_{x\in\overline{\Omega}} |H(x)|\, E(S) + \left(\frac{\alpha_1 \varepsilon}{2} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |H(x)| \right) |z|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} .$$

Exploitons l'inégalité de Young et l'hypothèse (a) de (H_1) *; nous permettent d'éstimer les deux termes de la formule de l'identité comme suit*

$$\left| Im \int_{\Sigma_1} z\overline{z_t} H.\nu d\Sigma_1 - Im \int_{\Omega} zH(z)\, d\Omega \; |_S^T \right| \leq + \left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |H(x)| \right) |z|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} + \varepsilon \sup_{x\in\overline{\Omega}} |H(x)|\, E(S)$$

$$\frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}} |H|}{2\alpha_1} \int_{\Sigma_1} |z|^2 d\Sigma_1 + 2\alpha_1 \sup_{x\in\overline{\Omega}} |H| \int_{\Sigma_1} |z_t|^2 d\Sigma_1.$$

■

LEMME 2.5.

$$\left| \int_Q |\nabla_g z|_g^2 \, divH dQ - Im \int_Q \overline{z'} z divH dQ \right| \leq C_1 \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A} \right)^2 d\Sigma_1 + \frac{\varepsilon}{2} \int_Q |\nabla_g \overline{z}|_g^2 \, dQ$$

$$+ \left(\frac{\alpha_1}{2\varepsilon} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\nabla_g (divH)| + \frac{1}{4} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |divH| \right) \int_{\Sigma_1} |z|^2 d\Sigma_1$$

tel que

$$C_1 = \frac{\alpha_1}{2} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |divH|$$

DÉMONSTRATION. *On a*

$$-Im\int_Q \overline{z'}zdivHdQ = Im\int_Q \mathbf{i}A\overline{z}zdivHdQ$$
$$= Re\int_Q div\left(\nabla_g\overline{z}\right)zdivHdQ.$$

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$Re\int_Q divH\left(\nabla_g\overline{z}\right)zdivHdQ = Re\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)zdivHd\Sigma_1 - \int_Q\left|\nabla_g z\right|_g^2 divHdQ - \int_Q z\nabla_g\overline{z}\nabla_g\left(divH\right)dQ.$$

On estime les deux termes suivants

$$\left|Re\int_{\Sigma_1}\frac{\partial z}{\partial\nu_A}zdivHd\Sigma_1\right| \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|divH\right|\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right|\left|y\right|d\Sigma_1.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et utilisant l'hypothése (a), on obtient $\forall\alpha_1 > 0$.

$$\left|Re\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)zdivHd\Sigma_1\right| \leq \sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|divH\right|\int_{\Sigma_1}\frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)^2 d\Sigma_1 + \sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|divH\right|\left(\frac{1}{4\alpha_1}\int_{\Sigma_1}\left|z\right|^2 d\Sigma_1\right)$$
$$\leq \frac{\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|divH\right|\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)^2 d\Sigma_1 + \frac{1}{2\alpha_1}\int_{\Sigma_1}\left|z\right|^2 d\Sigma_1.$$

Maintenant, on a la majoration suivante

$$\left|Re\int_Q z\nabla_g z\nabla_g\left(divH\right)dQ\right| \leq \int_Q\left|z\nabla_g\left(divH\right)\right|\left|\nabla_g\overline{z}\right|dQ$$

. On applique encore une fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition (a) *de l'hypothèse* (H_1), $\forall\varepsilon > 0$

$$\int_Q\left|z\nabla_g\left(divH\right)\right|\left|\nabla_g\overline{z}\right|dQ \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_Q\left|\nabla_g z\right|_g^2 dQ + \alpha_1\frac{\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|\nabla_g\left(divH\right)\right|^2}{2\varepsilon}\int_Q\left|z\right|^2 dQ.$$

Alors, on a

$$\left|Re\int_{\Sigma_1}\frac{\partial z}{\partial\nu_A}zdivHd\Sigma_1\right| \leq C_1\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)^2 d\Sigma_1 + \frac{1}{4}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|divH\right|\int_{\Sigma_1}\left|z\right|^2 d\Sigma_1.$$

tel que

$$C_1 = \frac{\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|divH\right|$$

. Donc on a obtenir la majoration de deux termes de l'identité

$$\left|\int_Q\left|\nabla_g z\right|_g^2 divHdQ - Im\int_Q\overline{z_t}zdivHdQ\right| \leq C_1\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)^2 d\Sigma_1 + \frac{\varepsilon}{2}\int_Q\left|\nabla_g\overline{z}\right|_g^2 dQ$$
$$\left(\frac{\alpha_1}{2\varepsilon}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|\nabla_g\left(divH\right)\right| + \frac{1}{4}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|divH\right|\right)\int_{\Sigma_1}\left|z\right|^2 d\Sigma_1 \quad .$$

D'autre part, on a

$$\left(\frac{\partial z}{\partial\nu_A}\right)^2 = \left(-\int_0^t k'\left(t-s\right)z\left(s\right)ds - k\left(0\right)z\left(t\right) - bz_t\right)^2$$

$$= b^2 |z_t|^2 + \left(- \int_0^t k'(t-s) z(s) \, ds \right)^2$$

$$+2k(0) z(t) \int_0^t k'(t-s) z(s) \, ds + (k(0) z(t))^2 + 2bz_t(\int_0^t k'(t-s) z(s) \, ds + k(0) z(t)).$$

Exploitons l'inégalité algébrique, on a

$$\left| \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial z}{\partial \nu_A} \right)^2 d\Sigma_1 \right| \leq 3[\int_{\Sigma_1} \left(- \int_0^t k'(t-s) z(s) \, ds \right)^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} k(0) |z|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} b^2 |z_t|^2 d\Sigma_1].$$

Insérant les relations prèsidentes dans la formule ci dessus, on obtient

$$2a \int_Q |\nabla_g z|_g^2 \, dQ \leq 3(C_0 + C_1) \left[\int_{\Sigma_1} \left(- \int_0^t k^{'}(t-s) z(s) \, ds \right)^2 d\Sigma_1 \right] + 3(C_0 + C_1) \left[\int_{\Sigma_1} k(0) |z|^2 d\Sigma_1 \right.$$

$$+ \int_{\Sigma_1} {}_t|^2 d\Sigma_1 + C_2 \int_{\Sigma_1} |^2 d\Sigma_1 + \frac{\varepsilon}{2} \int_Q |\nabla_g \overline{z}|_g^2 \, dQ + \varepsilon \sup_{x \in \overline{\Omega}} |H(x)| \, E(S) + 2\alpha_1 \sup_{x \in \overline{\Omega}} |H| \int_{\Sigma_1} \left| z' \right|^2 d\Sigma_1$$

$$+ \left(\frac{\varepsilon \alpha_1}{2} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |H(x)| \right) |z|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))},$$

tel que

$$C_2 = \frac{\alpha_1}{2\varepsilon} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |\nabla_g (divH)| + \frac{1}{4} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |divH| + \frac{\varepsilon \alpha_1}{2} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |H(x)|.$$

■

Dans le lemme suivant, on procède comme dans [**22**], *par la même technique utilisée par Laseicka et Triggani dans* [**39**].

LEMME 2.6.

$$|z|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} \leq \int_{\Sigma_1} |bz_t|^2 \, d\Sigma_1.$$

DÉMONSTRATION. *Pour cela, on suppose*

$$|z|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} > \int_{\Sigma_1} |bz_t|^2 \, d\Sigma_1.$$

Montrons maintenant qu'il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que*

$$|z_n|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} \equiv 1 \text{ et} \int_{\Sigma_1} |bz_t^n|^2 \, d\Sigma_1 = 0.$$

On majore $E(0)$. *On a*

$$2a \int_Q |\nabla_g z|_g^2 \, dQ - \frac{\varepsilon}{2} \int_S^T E(t) \, dt - \varepsilon \sup_{x \in \overline{\Omega}} |H(x)| \, E(S) \leq C_2 \int_{\Sigma_1} |z|^2 \, d\Sigma_1$$

$$+2\alpha_1 \sup_{x \in \overline{\Omega}} |H| \int_{\Sigma_1} |z_t|^2 \, d\Sigma_1$$

$$+ \left(\frac{\varepsilon \alpha_1}{2} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |H(x)| \right) |z|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))} + 2\alpha_1 \sup_{x \in \overline{\Omega}} |H| \int_{\Sigma_1} |z_t|^2 \, d\Sigma_1$$

$$+3(C_0 + C_1) \left[\int_{\Sigma_1} \left(- \int_0^t k'(t-s) z(s) \, ds \right)^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} k(0) |z|^2 d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_1} |bz_t|^2 d\Sigma_1 \right].$$

La formule de ci-dessus sera pour $S=0$

$$\left[\left(2a-\frac{\varepsilon}{2}\right)T-\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\right]E(0)\leq 2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\int_{\Sigma_1}|z_t|^2\,d\Sigma_1+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\right)|z|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))}$$

$$+2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\int_{\Sigma_1}|z_t|^2\,d\Sigma_1+$$

$$3(C_0+C_1)\left[\int_{\Sigma_1}\left(-\int_0^t k'(t-s)\,z(s)\,ds\right)^2 d\Sigma_1+\int_{\Sigma_1}k(0)\,|z|^2\,d\Sigma_1+\int_{\Sigma_1}|bz_t|^2\,d\Sigma_1\right]$$

$$+C_2\int_{\Sigma_1}|z|^2\,d\Sigma_1+\left(2a-\frac{\varepsilon}{2}\right)T[\int_{\Sigma_1}k'\,|z|^2\,d\Sigma_1+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Sigma_1}k''(t-s)\,|z(t)-z(s)|^2\,d\Sigma_1 ds].$$

Donc

$$\left[\left(2a-\frac{\varepsilon}{2}\right)T-\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\right]E(0)\leq\left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H(x)|\,.\right.$$

Alors, (z_n^0) *est bornée*

$$|z_n^0|_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)}\leq cte.$$

Donc on peut extraire une sous suite

$$z_n^0\to\widetilde{z}^o$$

qui converge faiblement dans $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. *Soit* $\widetilde{z}(t,\widetilde{z}_0)$, *la solution correspondante du problème et la condition initiale* $\widetilde{z}_0$.

$$\begin{array}{rcll}\widetilde{z}_t(t,\widetilde{z}_0) & = & iA\widetilde{z}(t,\widetilde{z}_0) & \text{dans } Q,\\ \widetilde{z}(t_0,\widetilde{z}_0) & = & \widetilde{z}_0 & \text{dans } \Omega,\\ \widetilde{z}(t_0,\widetilde{z}_0) & = & 0 & \text{sur } \Sigma,\\ \dfrac{\partial\widetilde{z}}{\partial\nu_A}(t,\widetilde{z}_0) & = & 0 & \text{sur } \Sigma_1,\end{array}$$

Alors

$$z_n(t,z_n^0)\to\widetilde{z}(t,\widetilde{z}_0)$$

$\star$ *faiblement dans* $L^\infty\left(0,T,H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right)$ *et* $z_n(t,z_n^0)$ *est uniforme bornée dans* $L^\infty\left(0,T,H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right)$. *Par compacitie* $z_n\left(t,z_n^0\right)\to\widetilde{y}(t,\widetilde{z}_0)$ *faiblement dans* $L^\infty\left(0,T,H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right)$. *Donc* $|\widetilde{z}(t,\widetilde{z}_0)|_{C(S,T.L^2(\Omega))}=1$. *Mais d'aprés, l'unicitie de la solution on a* $\widetilde{z}(t_0,\widetilde{z}_0)=0$ *dans* Q *ce qui est une contradiction avec la proposition, alors*

$$|z|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))}\leq\int_{\Sigma_1}|bz_t|^2\,d\Sigma_1.$$

■

Maintenant, on passe à la majoration de la cinquiéme estimation de la formule de l'identité. En inspirant l'idée de la preuve par le travail de Guesmia [**24**] *dans le cas où le feedback est linéaire et par* [**4**], [**1**] *dans le cas non linéaire en utilisant la technique des multiplicateurs sur l'équation des ondes. Aussi par* [**20**] *aux équations des ondes à coefficients variables.*

LEMME 2.7. *Soit $e>0$, vérifiant*

$$e\inf_{\Gamma_1} k' + 1 > 0$$

Alors, pour tout $0 \leq S < T < \infty$, on a

$$\int_{\Sigma_1} \left| -\int_0^t k'(t-s)\, z(s)\, ds \right|^2 d\Sigma_1 \leq C_3 E(S).$$

Tel que

$$C_3 = 2\left[\frac{|k(0)|_{L^\infty(\Gamma_1)}}{e\delta f} + |h|_{L^\infty(\Gamma_1)}\right].$$

DÉMONSTRATION. *Soit $e>0$ vérifiant (2.3) et posant*

$$h(x) = \frac{k(0)}{\delta(1+ek'(0))} \qquad x \in \Gamma_1$$

.

La condition (2.3) implique que $h \geq 0$ et $h \in L^\infty(\Gamma_1)$. Notons que

$$I = \left(-\int_0^t k'(t-s)\, z(s)\, ds\right)^2 - h\int_0^t k''(t-s)\, |z(t)-z(s)|^2\, ds + hk'z^2.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned} I \leq &\left(\int_0^t -k'(t-s)\, ds\right)\left(\int_0^t -k'(t-s)\, z^2(s)\, ds\right) \\ &-h\int_0^t k''(t-s)\, z^2(s)\, ds \\ &+2hy\int_0^t k''(t-s)\, z(s)\, ds + hk'(0)\, z^2 - hk'z^2 + hk'z^2. \end{aligned}$$

Il facile de vérifier que $\int_0^t -k'(t-s)\, ds = k(t) - k(0)$

$$\begin{aligned} I \leq &(k(t)-k(0))\int_0^t k'(t-s)\, z^2(s)\, ds - h\int_0^t k''(t-s)\, z^2(s)\, ds \\ &+2hz\int_0^t k''(t-s)\, z(s)\, ds + hk'(0)\, z^2. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous donne

$$\begin{aligned} I \leq &k(t)\int_0^t k'(t-s)\, z^2(s)\, ds - k(0)\int_0^t k'(t-s)\, z^2(s)\, ds \\ &-h\int_0^t k''(t-s)\, z^2(s)\, ds + \frac{h}{e} z^2 \\ &+eh\left(\int_0^t k''(t-s)\, z(s)\, ds\right)^2 + hk'(0)\, z^2. \end{aligned}$$

D'autre part, l'inégalité ci dessus, il en découle

$$I \leq k(t)\int_0^t k'(t-s)\, z^2(s)\, ds - k(0)\int_0^t k'(t-s)\, z^2(s)\, ds$$

$$-h\int_0^t k''(t-s)\,z^2(s)\,ds$$

$$+h\left(\frac{1}{e}+k'(0)\right)z^2+eh\left(\int_0^t k''(t-s)\,z(s)\,ds\right)^2.$$

De l'inégalite de Hölder et de (a) de l'hypothèse (H_2)*, on déduit*

$$I\le k(t)\int_0^t k'(t-s)\,z^2(s)\,ds+\frac{k(0)}{\delta}\int_0^t k''(t-s)\,z^2(s)\,ds-h\int_0^t k''(t-s)\,z^2(s)\,ds+h\left(\frac{1}{e}+k'(0)\right)z^2$$

$$+eh\left[\left(\int_0^t k'(t-s)\,ds\right)\left(\int_0^t k''(t-s)\,z^2(s)\,ds\right)\right].$$

Aussi grâce à $\int_0^t -k'(t-s)\,ds=k(t)-k(0)$*, l'estimation précédente donne*

$$I\le k(t)\int_0^t k'(t-s)\,z^2(s)\,ds-k(0)\int_0^t k'(t-s)\,z^2(s)\,ds-h\int_0^t k''(t-s)\,z^2(s)ds$$

$$+k'(0)\,z^2+eh\left(k'(0)-k'(t)\right)\left(\int_0^t k''(t-s)\,z^2(s)\,ds\right).$$

L'hypothèse (H_1)*, nous permettent dèstimer les égalités précédente comme suit*

$$k\int_0^t k'(t-s)\,z^2(s)\,ds<0$$

et

$$ehk'\int_0^t k''(t-s)\,z^2(s)\,ds<0$$

et aussi de la définition de h*, on déduit que*

$$I\le\frac{1}{e\delta}k(0)\,z^2$$

et par conséquent

$$\int_{\Sigma_1} Id\Sigma_1\le\frac{1}{e\delta}\int_{\Sigma_1}k(0)\,z^2d\Sigma_1.$$

Alors

$$\int_{\Sigma_1}\left(-k'(t-s)\,z(s)\,ds\right)^2d\Sigma_1\le\int_{\Sigma_1}hk''(t-s)\left(z(t)-z(s)\right)^2d\Sigma_1-\int_{\Sigma_1}hk'z^2d\Sigma_1+\frac{1}{e\delta}\int_{\Sigma_1}k(0)\,z^2d\Sigma_1.$$

Donc

$$\int_{\Sigma_1}\left(-\int_0^t k'(t-s)\,z(s)\,ds\right)^2d\Sigma_1\le\frac{|k(0)|_{L^\infty(\Gamma_1)}}{e\delta f}\int_{\Sigma_1}fz^2d\Sigma_1$$

$$-\int_{\Sigma_1}k'z^2d\Sigma_1+|h|_{L^\infty(\Gamma_1)}\left[\int_{\Sigma_1}k''(t-s)\left(z(t)-z(s)\right)^2d\Sigma_1\right].$$

Observons que

$$\int_{\Sigma_1}\left(-\int_0^t k'(t-s)\,z(s)\,ds\right)^2d\Sigma_1\le C_3E(S).$$

Tel que

$$C_3=2\left[\frac{|k(0)|_{L^\infty(\Gamma_1)}}{e\delta f}+|h|_{L^\infty(\Gamma_1)}\right].$$

Insérons les estimations des lemmes prècèdentes et utilisons la définition de l'énergie, on obtient

$$2a\int_Q |\nabla_g y|^2\, dQ \le 3\left(C_0+C_1\right)\left[\int_{\Sigma_1}\left(-\int_0^t k'\left(t-s\right)z\left(s\right)ds\right)^2 d\Sigma_1\right]+\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H\left(x\right)|\,E\left(S\right)$$

$$+C_2\int_{\Sigma_1}|z|^2\, d\Sigma_1+\frac{\varepsilon}{2}\int_Q|\nabla_g z|_g^2\, dQ+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H\left(x\right)|\right)|z|^2_{C([S,T],L^2(\Omega))}$$

$$3\left(C_0+C_1\right)\left[\int_{\Sigma_1}k\left(0\right)|z|^2\, d\Sigma_1+\int_{\Sigma_1}|bz_t|^2\, d\Sigma_1\right]$$

$$+2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\int_{\Sigma_1}|z_t|^2\, d\Sigma_1.$$

La formule de ci-dessus devient

$$2a\int_Q|\nabla_g z|^2\, dQ-\frac{\varepsilon}{2}\int_Q|\nabla_g\overline{z}|_g^2\, dQ\le\left[3C_3\left(C_0+C_1\right)+\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H\left(x\right)|\right]E\left(S\right)$$

$$+C_2\int_{\Sigma_1}|^2\, d\Sigma_1+2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\int_{\Sigma_1}|z_t|^2\, d\Sigma_1+\left(\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H\left(x\right)|\right)\int_{\Sigma_1}|bz_t|^2\, d\Sigma_1$$

$$+3\left(C_0+C_1\right)\left[\int_{\Sigma_1}|bz_t|^2\, d\Sigma_1+\int_{\Sigma_1}k\left(0\right)|z|^2\, d\Sigma_1\right].$$

On a

$$\left(4a-\varepsilon\right)\int_S^T E\left(t\right)dt\le[3C_3\left(C_0+C_1\right)+\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H\left(x\right)|]E\left(S\right)$$

$$+2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\int_{\Sigma_1}\left|z^{/}\right|^2 d\Sigma_1$$

$$+[3\left(C_0+C_1\right)+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H\left(x\right)|]\int_{\Sigma_1}\left|bz^{/}\right|^2 d\Sigma_1$$

$$+[3\left(C_0+C_1\right)|k\left(0\right)|^2_{L^\infty}+C_2]\int_{\Sigma_1}|z|^2\, d\Sigma_1.$$

On obtient

$$\left(4a-\varepsilon\right)\int_S^T E\left(t\right)dt\le[3C_3\left(C_0+C_1\right)+\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H\left(x\right)|]E\left(S\right)$$

$$+2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\frac{1}{\sup_{x\in\overline{\Gamma_1}}|b|}\int_{\Sigma_1}b\,|z_t|^2\, d\Sigma_1+[3\left(C_0+C_1\right)|k\left(0\right)|^2_{L^\infty}+C_2]\frac{1}{f}\int_{\Sigma_1}\left(-k'\right)|z|^2\, d\Sigma_1$$

$$+[3\left(C_0+C_1\right)+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H\left(x\right)|]\sup_{x\in\overline{\Gamma_1}}|b|\int_{\Sigma_1}b\,|z_t|^2\, d\Sigma_1.$$

Par conséquent, l'estimation ci dessus conduit à

$$\left(4a-\varepsilon\right)\int_S^T E\left(t\right)dt\le[3C_3\left(C_0+C_1\right)+\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H\left(x\right)|]E\left(S\right)+2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H|\frac{1}{\sup_{x\in\overline{\Gamma_1}}|b|}E\left(S\right)$$

$$+[3\left(C_0+C_1\right)|k\left(0\right)|^2_{L^\infty}+C_2]\frac{1}{f}E\left(S\right)+[3\left(C_0+C_1\right)+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}|H\left(x\right)|]\sup_{x\in\overline{\Gamma_1}}|b|\,E\left(S\right).$$

En choisissant $\varepsilon<4a$ suffisamment petit, on obtient

$$\int_S^T E(t)dt\le CE\left(S\right)$$

tel que

$$C=\frac{1}{(4a-\varepsilon)}[3C_3\left(C_0+C_1\right)+\varepsilon\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\left(x\right)\right|+2\alpha_1\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\right|\frac{1}{\sup_{x\in\overline{\Gamma_1}}\left|b\right|}$$

$$+[3\left(C_0+C_1\right)+\frac{\varepsilon\alpha_1}{2}\sup_{x\in\overline{\Omega}}\left|H\left(x\right)\right|]\sup_{x\in\overline{\Gamma_1}}\left|b\right|+[3\left(C_0+C_1\right)\left|k\left(0\right)\right|_{L^\infty}^2+C_2]\frac{1}{f}].$$

Maintenant, en laissant T tendre vers l'infini, on déduit que :

$$\int_S^\infty E(t)dt\leq CE\left(S\right).$$

D'où l'inégalite de la stabilisation uniforme. ■

CHAPITRE 3

Stabilisation uniforme de l'équation de Schrödinger dans l'espace $L^2(\Omega)$

.

On présente dans ce chapitre un résultat de décroissance uniforme de l'énergie pour l'équation de Schrödinger avec conditions aux limites de type mémoire dans l'espace $L^2(\Omega)$. *On commence Par la démonstration de l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin. Ensuite, nous allons établir la décroissance exponentielle du la solution du système considéré. En se basant sur les techniques utilisées par Laseicka et Triggiani dans* [**39**], *pour prouver la stabilisation uniforme de l'équation de Schrödinger avec des conditions aux limites dissipatives de type mémoire. Mais avant de donner les détails de la preuve, on va rappeler d'une manière brève les différentes phases qu'à connues la notion de stabilisation exponentielle, sans vraiment rentrer dans les détails, où prétendre que cet aperçu historique soit exhaustif.*

Les travaux de C. S. Morawetz

En 1959, en analysant l'expression explicite de la solution obtenue par séparation des variables de l'équation des ondes dans un domaine non borné de $\mathbb{R}^3$, [60] a réussi à montrer que l'énergie locale, décroit de maniéré exponentielle quand le temps tend vers l'infini. Sous les hypothèse plus générales que celle de C. Wilcox, en 1961 C. S. Morawetez a montré que l'énergie locale, décroit comme l'inverse du temps. En combinant leurs méthodes, P. D. Lax, C. S. Morawetz et R. S. Phillips ont prouvé en 1963, que l'énergie locale associée à la solution de l'équation des ondes dans un domaine de $\mathbb{R}^3$, extérieur à un domaine étoilé, décroit de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

Les travaux de G.Chen et de J.Lagnese

En se basant sur les travaux de C. S. Morawetz sur l'équation des ondes dans un domaine extérieur, D. L. Russell a conjecturé, en 1974, un phénomène analogue pour l'équation des ondes dans un domaine borné.

Énoncé de la conjecture

Soit un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, s'il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}$ extérieur à tel que le bord de Ω, noté $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ où Γ_0 et Γ_1 sont deux parties de Γ vérifiant $\Gamma_0, \Gamma_1 \neq \phi$, $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \phi$, admette une partition vérifiant la condition géométrique suivante :
$m(x).\nu(x) \leq 0$, pour tout $x \in \Gamma_0$ où $\nu(x)$ désigne la normale unitaire extérieur à Ω, et $m(x) = x_0 - x$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe deux constantes, C et w positives telles que l'énergie associée au système suivant :

$$\begin{aligned} y_{tt} - \Delta y = 0 \qquad & \text{dans} \quad]0,+\infty[\times\Omega \\ y(x,0) = 0,\ y(0,x) = y_t(x) \qquad & \text{dans} \quad \Omega \\ y = 0 \qquad & \text{sur} \quad]0,+\infty[\times\Gamma_0 \\ \alpha(x)\,\partial_\nu y + y_t = 0 \qquad & \text{sur} \quad]0,+\infty[\times\Gamma_1 \end{aligned}$$

vérifie l'inégalité suivante :

$$E(t) \leq Cexp(-wt), \forall t \geq 0.$$

En 1977, J. P. Quin et D. L. Russell sont parvenus à montrer, sous les hypothèses de la conjecture de Russel, l'inégalité
$E(t) \leq \frac{C(E(0)}{1+t}, \forall t \geq 0.$ *(3.1)*
Mais malheureusement, ils n'ont pas réussit à monter que $C(E(0))$ vérifie
$C(E(0)) \leq kE(0)$ *(3.2)*
où k est une constante qui ne dépend ni de $E(0)$ ni du temps. Il est intéressant de savoir qu'à partir de (3.1) et de (3.2) on peut déduire la décroissance exponentielle de $E(t)$ par une

simple application des propriétés des semi groupes.

Le premier résultat positif consernant la conjecture de Russell, a été obtenu en 1979 par G. Chen, en partant des hypothèses suivantes : il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *et* $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ *tel que*

$m(x).\nu(x) \leq 0$ *; pour tout* $x \in \Gamma_0$. *(3.3)*

$m(x).\nu(x) \geq \gamma > 0$ *; pour tout* $x \in \Gamma_1$ *tel que* $\nu(x)$ *désigne le champ unitaire normal extérieur à* Ω, $m(x) = x_0 - x$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$. *Ensuite, en adaptant les techniques, en particulier la technique des multiplicateurs, utilisées par C. S. Morawetez, W. A. Strauss et J. U. R alston, dans les domaines extérieurs, G. Chen* [**16**] *a pu alléger les hypothèses (III), ces résultats ont été améliorés par J. Lagnese* [**29**].

En 1983, sous l'hypotése il existe un champ de vecteur $h \in \left(l^2\left(\overline{\Omega}\right)\right)^n$ *tel que :*

$$\begin{cases} m(x).\nu(x) \leq 0\,; \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_0. \\ m(x).\nu(x) \geq \gamma > 0\,; \text{pour tout } x \in \Gamma_1. \\ \quad \text{la matrice } \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \frac{\partial h_j}{\partial x_i}\right) \text{ est uniformément définie positive sur } \overline{\Omega} \end{cases}$$

Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggiani

En 1987, utilisant des méthodes différents de celles de chen et Lagnese [**29**], *I. Lasiecka et R. Triggiani* [**36**] *ont pu redémontrer les résultats de chen et Lagnese pour l'équation des ondes et de Schrôdinger avec une condition de Dirichlet non homogène sur tout le bord* Γ. *Ils font appel à un opérateur de feedback frontière donnée par :*

$$F(y, y_t) = -b\frac{\partial}{\partial \nu}(Gy_t)$$

, sur Γ *où* $b \in L^\infty(\Gamma)$, *et* $b(x) \geq b_0 > 0$ *; pour tout* $x \in \Gamma$, *et* G *est l'inverse de l'isomorphe suivant :*

$$(-\triangle) : H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

qu'on note $G = (-\triangle)^{-1}$. *Dans tous les travaux, dans un domaine borné, cité ci dessus l'inégalité a été obtenue, à partir d'une estimation sur* $\int_0^\infty E(t)dt$ *; tel que*

$$E(t) \leq Cexp(-wt), \ \forall t \geq 0.$$

En utilisant un résultat du à [[**21**] *et* [**55**]*], malheureusement ce théorème prouve l'existence des constantes* C, *et* w *sans donner des estimations explicites. On remarquer que lorsque la frontière, la condition (3.3) exige que*

$$\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \phi.$$

♦***Les travaux de V. Komornik et E. Zuazua***

En 1987, V. Komournik et E. Zuazua [**27**] *ont allégé la condition (3.3) de G. Chen en la remplaçant par*

$m(x).\nu(x) > 0$ *pour tout* $x \in \Gamma_1$ *donc permettant, en principe, de généraliser les résultats de*

Chen et langnese aux domaines à bords réguliers et connexes, mais au prix de remplacer la condition aux limites, du problème président , sur $\Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$ *par* $\partial_\nu y = -m.\nu y_t \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$ *Si sur* $\Gamma_1 = \partial\Omega$ *satisfait à la condition prèsidente, alors pour tout* $n \geq 2$ *; la méthode de* Komornik *et* Zuazua [27] *donne, d'une manière simple des estimations explicites pour* C *et* w *en fonction de géométrie de* Ω *et* x_0 *:*

Leur procédé devient inapplicable dans le cas général où $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} \neq \phi$*, car dans ce cas la régularité des solutions n'est pas suffisante pour justifier l'application de la méthode des multiplicateurs.*

Ce pendant, la même année (1987), P. Grisvard est parvenu à montrer que, au moins pour $n \geq 3$*, l'identité fondamentale, sur laquelle est basée sur la technique des multiplicateur de Komornik et Zuazua* [27]*, devient une inégalité qui est suffisante pour mener les calcules a bout et obtenir une décroissance exponentielle de l'énergie, avec des estimation explicites pour* C *et* w*.*

Le cas $n \geq 4$*, sans l'hypothèse* $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \phi$ *rest ouvert ; à moins que l'inégalité de Grisvard ne puisse être prouvée dans ce cas ; alors le procédé de stabilisation de Komornik et Zuazua peut être appliqué avec efficacité.*

Les travaux de J. L. Lions

En 1986, Lions [34] a élaboré une méthode générale de stabilisation exponentielle pour toue les système linéaires réversibles exactement contrôlables. Son précédé repose essentiellement sur la théorie du contrôle optimale et la méthode de pénalisation. Mais il ne donne méthode explicite pour construire l'opérateur de feedback, ni d'estimation sur le taux de décroissance de l'énergie.

Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggiani et Zang

L'objet principal de I. Lasiecka, R. Triggiani, et Zang [40] était d'obtenir une estimation d'é nergie $L^2(\Omega)$ pour une équation linéaire de la forme :

$\mathbf{iz}_t + \triangle z = q_1\,(t,x)\,.\nabla z + q_0\,(t,x)\,z\,(t,x) + f$ *dans* Ω. (3.4)

En revanche, le niveau d'énergie naturel pour (3.4) est le niveau $H^1\,(\Omega)$ comme on le sait d'aprés le travail de Lasiecka et Trriggani.

THÉORÈME 3.1. *Supposons que $q_1\,(t,x) = ir_1\,(t,x)$ pour un vecteur réel r_1, soit z une solution de (3.4) satisfaisant en plus $z\,(t,x) = 0$ dans $\Gamma_0 \times (0,T)$ tel que $l.\nu \leq 0$ sur $\Gamma_\circ$ pour le champ vecteur. Soit $T > 0$ arbitraire. Soit $f \in L^2\,(Q)$ alors certaines hypothèse minimales de régularité sur les coefficients $q_0\,(t,x)$ et $q_1\,(t,x)$ dans (3.4) Ce qui n'est pas critique pour rappeler ici, comme dans le cas de notre problème, ils sont tout zéro. Donc l'inégalité suivante est vraie : il existe un $C_T > 0$ tel que*

$$\|z(x,o)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_T \left[\|z\|^2_{L^2(\Sigma_1)} + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right| |z|\, d\Gamma_1 dt + \left\|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right\|^2_{H_a^{-1}(\Sigma_1)} + \|z\|^2_{H^{-1}(Q)} \right]. \quad (3.5)$$

avec $H_a^{-1}\,(\Sigma_1)$ est l'espace dual de l'espace $H_a^1\,(\Sigma_1)$ et $H_a^1\,(\Sigma_1) = H^{\frac{1}{2}}\left(0,T,L^2(\Sigma_1)\right) \cap L^2(0,T,H^1(\Gamma_1))$.

La preuve de l'estimation de l'énergie (3.5) au niveau $L^2\,(\Omega)$ pour (3.4) nécessite une utilisation intensive de mécanisme d'analyse pseudo différentiel micro local [40] section 10.

ciser quelques hypothèses utiles pour obtenir le résultat visé.On passe maintenant à notre problème, soit Ω un ouvert borné $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière Γ. Supposons que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ où Γ_0 et Γ_1 sont deux parties de Γ vérifiant : $\Gamma_0, \Gamma_1 \neq \phi$, $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \phi$. L'objet de ce chapitre est d'étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} z_t - \mathbf{i}\boldsymbol{\Delta} z &= 0 & \text{dans} & \Omega\times]0,+\infty[\\ z(x,0) &= z_0(x) & \text{dans} & \Omega \\ z &= 0 & \text{sur} & \Gamma_0\times]0,+\infty[\\ \frac{\partial z}{\partial \nu} &= u & \text{sur} & \Gamma_1\times]0,+\infty[\end{cases}$$

où $\mathbf{\Delta z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z}{\partial x_i}$, le laplacien par rapport à la variable d'espace $(x_1, ..., x_n)$, ν désigne le vecteur normal unitaire, $\frac{\partial z}{\partial \nu} = \nabla z.\nu$ avec u est la fonction de contrôle donnée par

$$u = \mathbf{i}\left[-\int_0^t k'(t-s)\, z(s)\, ds + \frac{k(0)}{2} z(t)\right].$$

Dans l'étude du problème proposé, nous aurons besoin de pré

ciser quelques hypothèses utiles pour obtenir le résultat visé.

• *Hypothèses.*

(H_1) On suppose que la fonction $k \in C^3(\mathbb{R}^+, L^\infty(\Omega))$ est décroissante.

On suppose qu'il vérifie les conditions suivantes :

$$(a)\forall\alpha > 0, k'' \geq -\alpha k' \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$$

$$(b)\forall t > t_0, k(0) - 2k(t) < o$$

$$(c)k''' \leq 0, \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$$

REMARQUE 3.1. *On peut prendre comme exemple la fonction*

$$k(t,x) = f(x)\, e^{-\alpha t} + g(x), (x,t) \in \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$$

où $f, g \in L^\infty(\Gamma_1, \mathbb{R}^+)$.

Le problème de stabilisation frontière consiste à exhiber un opérateur de feedback frontière de telle sorte que l'énergie $E(t)$ du système vérfie

$$E(t) \leq Cexp(-\beta t); \forall t \geq 0.$$

où C et β sont des constantes positives est β appelé taux de décroissance de l'énergie.

1. Existence, unicité et régularité des solutions

Notre but dans Ce paragraphe est de montrer l'existence, l'unicité et de la régularité de la solution du problème proposé. Les techniques utilisées dans la démonstration sont basées sur les approximations de Faedo-Galerkin. Ci-dessous, on va établir un résultat concernant l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du problème proposé.

THÉORÈME 3.2. *Supposons satisfaites l'hypothèse (H_1)*
1- Pour tout $z_0 \in V = L^2(\Omega)$. Il existe une solution (faible) unique du système proposé vérifiant :

$$z \in C\left(\mathbb{R}^+, V\right).$$

2-Si $z_0 \in H^2(\Omega)$ tel que $\frac{\partial z_0}{\partial \nu} = \mathbf{i}\frac{1}{2}k(0)z(0)$ sur Γ_1. Alors la solution z (dite forte) est plus régulière

$$z \in C^1\left(\mathbb{R}^+, V\right).$$

La formulation variationnelle. *Multiplions la première équation du problème proposé par $\overline{v}$ et intégrons sur Ω, en utilisant la formule de Green.*
Alors, la formulation variationnelle du problème proposé est donnée par

$$\int_\Omega z_t \overline{v} d\Omega = \mathbf{i}\int_\Omega \triangle z \overline{v} d\Omega = \mathbf{i}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial z}{\partial \nu}\overline{v} d\Gamma_1 - \mathbf{i}\int_\Omega \nabla z \overline{\nabla v} d\Omega$$

où $v \in V$. De la condition au limite, on a

$$\int_\Omega z_t \overline{v} d\Omega = \mathbf{i}(\int_{\Gamma_1} (\mathbf{i}\int_0^t k'(t-s)z(s)\,ds + \mathbf{i}\frac{1}{2}k(0)z_t)\overline{v} d\Gamma_1) - \mathbf{i}\int_\Omega \nabla z \overline{\nabla v} d\Omega.$$

Introduisons les notations suivantes :
$< .,. >$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$

$$a(z,v) = \int_\Omega \nabla z \nabla \overline{v} d\Omega$$

$$\beta(t,z,v) = -(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'(t-s)z(s)\,ds + \frac{1}{2}k(0)z_t)\overline{v} d\Gamma_1, \qquad \beta(0,z,v) = 0.$$

Alors, on réécrit comme la formulation comme suit

$$\langle z_t, v\rangle + \mathbf{i}a(z,v) = \beta(t,z,v).$$

On passe à la démonstration de l'existence des solutions.

1.1. Existence. *Soit* $(e_n)_{n\in\aleph}$ *un ensemble des fonctions dans* V *qui forment une base orthonormée pour* $L^2(\Omega)$, *et* V_m *l'espace engendré par* $(e_1,...,e_m)$, *et* $z^m(t)=\sum_{i=1}^m \alpha_{im}(t)e_i$ *une solution du problème de Cauchy*

$$\langle z_t,v\rangle+\mathbf{i}a\left(z,v\right)=\beta\left(t,z,v\right).$$

Posant dans la formulation variationnelle $v=z^m$, *on trouve*

$$\langle z_t^m,z^m\rangle+\mathbf{i}a\left(z^m,z^m\right)=\beta\left(t,z^m,z^m\right).$$

En prenant la partie réelle, on résulte

$$Re\left(\int_\Omega z_t^m\overline{z^m}d\Omega\right)=-Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)z^m(s)\overline{z^m}\left(t\right)dsd\Gamma_1\right)$$
$$-Re\left(\mathbf{i}\int_\Omega\left|\nabla z\right|^2d\Omega\right)-\frac{1}{2}Re\left(\int_{\Gamma_1}k\left(0\right)z^m(t)\overline{z^m}\left(t\right)d\Gamma_1\right).$$

On a

$$Re\left(\mathbf{i}\int_\Omega\left|\nabla z\right|^2d\Omega\right)=0$$

alors

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\left|z_m\right|^2d\Omega=-2Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)z_m(s)\overline{z_m}\left(t\right)dsd\Gamma_1\right)-\int_{\Gamma_1}k\left(0\right)\left|z_m\left(t\right)\right|^2d\Gamma_1.$$

Observons que

$$-2Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)z^m(s)\overline{z^m}\left(t\right)dsd\Gamma_1\right)=\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z^m(s)-z^m\left(t\right)\right|^2dsd\Gamma_1$$
$$-\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z^m(s)\right|^2dsd\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z_m\left(t\right)\right|^2dsd\Gamma_1$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\left|z_m\right|^2d\Omega=\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z_m(s)-z_m\left(t\right)\right|^2dsd\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}k\left(0\right)\left|z_m\left(t\right)\right|^2d\Gamma_1$$
$$-\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z_m\left(t\right)\right|^2dsd\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z_m(s)\right|^2dsd\Gamma_1.$$

De la formulation variationnelle, on déduit que

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\left|z_m\right|^2d\Omega=\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z_m(s)-z_m\left(t\right)\right|^2dsd\Gamma_1$$
$$-\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z_m(s)-z_m\left(t\right)+z_m\left(t\right)\right|^2dsd\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}k\left(t\right)\left|z_m\left(t\right)\right|^2d\Gamma_1.$$

D'autre part, on a

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\left|z_m\right|^2d\Omega\leq\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z_m(s)-z_m\left(t\right)\right|^2dsd\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z_m\left(t\right)\right|^2dsd\Gamma_1$$
$$-\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z_m(s)-z_m\left(t\right)\right|^2dsd\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}k\left(t\right)\left|z_m\left(t\right)\right|^2d\Gamma_1.$$

On obtient

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|z_m|^2\,d\Omega\leq-\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'(t-s)\,|z_m(t)|^2\,dsd\Gamma_1-\int_{\Gamma_1}k(t)\,|z_m(t)|^2\,d\Gamma_1.$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|z_m|^2\,d\Omega\leq\int_{\Gamma_1}(k(0)-2k(t))\,|z_m(t)|^2\,d\Gamma_1.$$

D'aprés (b) de l'hypothèse (H_1)*, on a*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|z_m|^2\,d\Omega\leq 0.$$

Et

$$\int_{\Omega}|z^m(T)|^2\,d\Omega\leq\int_{\Omega}|z^m(0)|^2\,d\Omega.$$

On déduit que $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $L^2(0,T,V)$ *donc on peut extraire une suite notée* $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *qui converge vers* z*. Soit* $v\in V$*, alors il existe une suite* $(v^m)_{m\in\mathbb{N}}$ *telle que* $v^m\in V^m$*.* $v^m\to v$ *dans* V $(v^m)_{m\in\mathbb{N}}$ *vérifie la formulation variationnelle, tel que*

$$\langle z_t^m,v^m\rangle+\mathbf{i}a(z^m,v^m)=\beta(t,z^m,v^m).$$

Soit $\zeta\in\mathcal{D}(]0,T[)$*, on pose*

$$\psi^m=\zeta v^m\qquad\psi=\zeta v$$

Alors on a

$$\psi^m\to\psi$$

dans $L^2(0,T,V)$*. Multiplions la première équation par* ζ *et intégrons sur* $]0,T[$*, on trouve*

$$\int_0^T\langle z_t^m,\psi^m\rangle dt+\mathbf{i}\int_0^T a(z^m,\psi^m)\,dt=\int_0^T\beta(t,z^m,\psi^m)\,dt.$$

Aprés intégration par parties, on obtient

$$\int_0^T\langle z^m,\psi_t^m\rangle dt+\mathbf{i}\int_0^T a(z^m,\psi^m)\,dt=\int_0^T\beta(t,z^m,\psi^m)\,dt.$$

En passant à la limite, on trouve :

$$\begin{cases}\int_0^T\langle z,\psi_t\rangle dt+\mathbf{i}\int_0^T a(z,\psi)\,dt=\int_0^T\beta(t,z,\psi)\,dt\\ \forall v\in V,\forall\zeta\in\mathcal{D}(]0,T[).\end{cases}$$

$$z\in C(]0,T[,V)$$

1.2. Régularité. *On dérive la formulation variationnelle par rapport à t,on a*

$$\int_{\Omega} z_{tt}\overline{v}d\Omega = -\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)z\left(s\right)\overline{v}dsd\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k(0)z_t\overline{v}d\Gamma_1 - \mathbf{i}\int_{\Omega}\nabla z_t\overline{\nabla v}d\Omega.$$

On pose $v = z_t^m$

$$\int_{\Omega} z_{tt}^m\overline{z_t^m}d\Omega = -\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)z_m\left(s\right)\overline{z_t^m}dsd\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k(0)z_t^m\overline{z_t^m}d\Gamma_1 - \mathbf{i}\int_{\Omega}\nabla z_t^m\overline{\nabla z_t^m}d\Omega.$$

On prend la partie réelle

$$Re(\int_{\Omega} z_{tt}^m\overline{z_t^m}d\Omega) = Re(-\int_{\Gamma_1}\int_0^t k''(t-s)z^m\left(s\right)\overline{z_t^m}dsd\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k(0)z_t^m\overline{z_t^m}d\Gamma_1 - \mathbf{i}\int_{\Omega}\nabla z_t^m\overline{\nabla z_t^m}d\Omega).$$

On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left|z_t^m\right|^2 d\Omega = -Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)z^m(s)\overline{z_t^m}\left(t\right)dsd\Gamma_1\right)$$
$$-\frac{1}{2}Re\int_{\Gamma_1} k\left(0\right)\left|z_t^m\right|^2 d\Gamma_1 - \mathbf{i}Re\int_{\Omega}\left|\nabla z_t^m\right|^2 d\Omega).$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left|z_t^m\right|^2 d\Omega = -2Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)z^m(s)\overline{z_t^m}\left(t\right)dsd\Gamma_1\right) - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k\left(0\right)\left|z_t^m\right|^2 d\Gamma_1.$$

Avec

$$-2Re\left(\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)z^m(s)\overline{z_t^m}\left(t\right)dsd\Gamma_1\right) = \frac{d}{dt}(\int_{\Gamma_1}\int_0^t -k'\left(t-s\right){}^m(s) - z^m\left(t\right)|^2 dsd\Gamma_1$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k\left(0\right){}_t^m| d\Gamma_1) + \int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z^m(s) - z^m\left(t\right)\right|^2 dsd\Gamma_1.$$

Observons que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left|z_t^m\right|^2 d\Omega = \frac{d}{dt}(\int_{\Gamma_1}\int_0^t -k'\left(t-s\right)\left|z^m(s) - z^m\left(t\right)\right|^2 dsd\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k\left(0\right)\left|z_t^m\right| d\Gamma_1)$$
$$+\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z^m(s) - z^m\left(t\right)\right|^2 dsd\Gamma_1$$

d'aprés l'hypothèse (H_1), on a

$$\frac{d}{dt}(\int_{\Gamma_1}\int_0^t -k'\left(t-s\right)\left|z^m(s) - z^m\left(t\right)\right|^2 dsd\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k\left(0\right)\left|z_t^m\right| d\Gamma_1)$$
$$+\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'\left(t-s\right)\left|z^m(s) - z^m\left(t\right)\right|^2 dsd\Gamma_1 \leq 0$$

Alors

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left|z_t^m\right|^2 d\Omega \leq 0$$

Tel que

$$\int_{\Omega}\left|z_t^m\left(T\right)\right|^2 d\Omega \leq \int_{\Omega}\left|z_t^m\left(0\right)\right|^2 d\Omega.$$

On déduit que $(z_t^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2\left(0,T,V\right)$ donc on peut extraire une suite notée $(z_t^m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui converge vers z_t.Soit $v_t \in V$, alors il existe une suite $(v_t^m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $v_t^m \in V^m$.

$$v_t^m \to v_t \text{ dans } V$$

$(v_t^m)_{m\in\mathbb{N}}$ *vérifie la formulation variationnelle où*

$$\langle z_{tt}^m, v_t\rangle + \mathbf{i}a\left(z_t^m, v_t\right) = \beta\left(t, z_t^m, v_t\right).$$

Soit $\zeta_t \in \mathcal{D}\left(]0,T[\right)$, *on pose*

$$\psi_t^m = \zeta_t v^m \qquad \text{et} \qquad \psi_t = \zeta_t v_t$$

Alors on a

$$\psi_t^m \to \psi_t \text{ dans } L^2\left(0,T,V\right)$$

Multiplions la formulation variationnelle par ζ_t *et intégrons sur* $]0,T[$, *on trouve*

$$\int_0^T \langle z_{tt}^m, \psi_t^m\rangle dt + \mathbf{i}\int_0^T a\left(z_t^m, \psi_t^m\right)dt = \int_0^T \beta\left(t, z_t^m, \psi_t^m\right)dt.$$

Aprés intégration par parties, on obtient

$$\int_0^T \langle z_t^m, \psi_{tt}^m\rangle dt + \mathbf{i}\int_0^T a\left(z_t^m, \psi_t^m\right)dt = \int_0^T \beta\left(t, z_t^m, \psi_t^m\right)dt.$$

En passant à la limite, on trouve

$$\begin{cases} \int_0^T \langle z_t, \psi_{tt}\rangle dt + \mathbf{i}\int_0^T a\left(z_t, \psi_t\right)dt = \int_0^T \beta\left(t, z_t, \psi_t\right)dt \\ \forall v_t \in V, \forall \zeta_t \in D\left(]0,T[\right). \end{cases}$$

$$z \in C^1(]0,T[\,,V).$$

On passe maintenant à l'unicité.

Unicité.

Soient z et y deux solutions de problème proposé. Alors $w = z - y$ vérifie

$$\begin{cases} \mathrm{w}_t - \mathbf{i}\boldsymbol{\Delta} w = 0 & \text{dans} \quad \Omega\times]0,+\infty[\\ \mathrm{w}{=}0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \mathrm{w}{=}0 & \text{sur} \quad \Gamma_0\times]0,+\infty[\\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = \mathbf{i}\int_0^t k^{/}(t-s)w\,(s)\,ds + \mathbf{i}\frac{1}{2}k(0)w & \text{sur} \quad \Gamma_1\times]0,+\infty[\end{cases}$$

Multipliant la premiére équation de systéme ci dessous par $\overline{w}$, integrant sur Ω.

En appliquant la formule de Green, on obtient

$$\int_\Omega w_t \overline{w} d\Omega - \mathbf{i}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \nu}\overline{w} d\Gamma_{_1} + \mathbf{i}\int_\Omega \nabla w \nabla \overline{w} d\Omega = 0.$$

Prenant la partie réelle de la relation précédente

$$Re\int_\Omega w_t \overline{w} d\Omega = Re\left(\mathbf{i}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \nu}\overline{w} d\Gamma_{_1} - \mathbf{i}\int_\Omega |\nabla w|^2 d\Omega\right).$$

Puisque $Re\left(\mathbf{i}\int_\Omega |\nabla w|^2 d\Omega\right) = 0$, *alors*

$$Re\int_\Omega w_t \overline{w} d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[\frac{d}{dt}|w|^2\right] d\Omega = Re(\mathbf{i}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \nu}\overline{w} d\Gamma_{_1}).$$

D'aprés la condition frontière, on arrive

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[\frac{d}{dt}|w|^2\right] d\Omega = Re(\mathbf{i}\int_{\Gamma_1} \left(\mathbf{i}\int_0^t k'(t-s)w\,(s)\,ds + \mathbf{i}\frac{1}{2}k(0)w\right)\overline{w} d\Gamma_{_1}).$$

Pour $t = 0$, on a

$$\int_\Omega |w|^2 d\Omega = -\int_0^t \int_{\Gamma_1} k\,(t-s)\,|y\,(s)|^2\, d\Gamma_1 ds$$

Puisque k une fonction positive, on déduit

$$\int_\Omega |w|^2 d\Omega \leq 0.$$

et donc

$$|w| = 0$$

Alors

$$w = 0$$

cette dernière égalité donne $y = z = 0$. Par conséquent, la preuve du l'unicité est achevée. ∎

2. Théorème de Stabilisation exponentielle

Décroissance exponentielle. *Dans ce paragraphe, on montre que la solution forte (régulière) du problème considéré décroit uniforme dans l'espace d'énergie V. On commence par démontrer que le système est dissipatif. Notons que*

$$Q = \Omega \times [0,T]$$

$$\Sigma_0 = \Gamma_0 \times [0,T]$$

$$\Sigma_1 = \Gamma_1 \times [0,T].$$

Pour $z \in V$, on introduit la fonctionnelle d'énergie totale associée au problème proposé par

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |z|^2 \, d\Omega + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Gamma_1} k(t-s)\,|z(t)-z(s)|^2 \, d\Gamma_1 ds.$$

Dans le lemme suivant, on démontre que le système proposé est dissipatif.

Lemme 3.1. *Soit $z(x,t)$ solution du problème considéré. Alors, la fonctionnelle d'énergie définie ci dessus est strictement décroissante sur $[0,+\infty)$. De plus*

$$E(0) - E(T) = \int_{\Sigma_1} k(t)\,|z(t)|^2 \, d\Sigma_1 - \int_0^t \int_{\Sigma_1} k'(t-s)\,|z(t)-z(s)|^2 \, d\Sigma_1 ds.$$

Preuve *D'après l'hypothèse (H_1), $E(.)$ est positive*

$$E'(t) = Re\int_\Omega \overline{z} z_t d\Omega + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Gamma_1} k'(t-s)\,|z(s)|^2 \, d\Gamma_1 ds + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k(0)\,|z(t)|^2 \, d\Gamma_1.$$

D'autre part, si on pose $z_t = \mathbf{i}\triangle z$ on a

$$E'(t) = Re\int_\Omega \overline{z}\,(\mathbf{i}\triangle z)\, d\Omega + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Gamma_1} k'(t-s)\,|z(s)|^2 \, d\Gamma_1 ds + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k(0)\,|z(t)|^2 \, d\Gamma_1.$$

Utilisant la formule de Green et on prend la partie réelle, on obtient

$$E'(t) = \mathbf{i}Re\int_{\Gamma_1} \overline{z}\left(\frac{\partial z}{\partial \nu}\right) d\Gamma_1 - Re\int_\Omega \mathbf{i}\,(\nabla \overline{z} \nabla z)\, d\Omega + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Gamma_1} k'(t-s)\,|z(s)|^2 \, d\Gamma_1 ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k(0)\,|z(t)|^2 \, d\Gamma_1.$$

Observons que

$$Re\int_\Omega \mathbf{i}\,|\nabla z|^2 \, d\Omega = 0,$$

et avec la condition aux limite, on obtient

$$E'(t) = -Re\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'(t-s) z(s)\,\overline{y} ds d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k(0)\,|z(t)|^2 \, d\Gamma_1$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Gamma_1} k'(t-s)\,|z(s)|^2 \, d\Gamma_1 ds + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k(0)\,|z(t)|^2 \, d\Gamma_1.$$

Tel que

$$-Re\int_{\Gamma_1}\int_0^t k'(t-s) z(s)\,\overline{z} ds d\Gamma_1 = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{\Gamma_1} k'(t-s)\,|z(s)-z(t)|^2 \, d\Gamma_1 ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1} k'(t-s)\left|z(t)\right|^2 d\Gamma_1 ds-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1} k'(t-s)\left|z(s)\right|^2 d\Gamma_1 ds.$$

Alors

$$E'(t)=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\Gamma_1} k'(t-s)\left|z(s)-z(t)\right|^2 d\Gamma_1 ds-\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} k(t)\left|z(t)\right|^2 d\Gamma_1.$$

Donc $E(t)$ *est décroissante et pour tout* $0<T<\infty$ *on a*

$$E(0)-E(T)=\int_{\Sigma_1} k(t)\left|z(t)\right|^2 d\Sigma_1-\int_0^t\int_{\Gamma_1} k'(t-s)\left|z(s)-z(t)\right|^2 d\Gamma_1 ds.$$

Preuve de la stabilisation uniforme. *On montre que la solution forte du problème proposé décroit exponentiellement dans l'espace d'énergie V. Par un argument de densité, on a le même résultat pour la solution faible. Alors, il existe une constante* $C_T > 0$ *dépendante de* T *tel que*

$$\|z(x,o)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_T \left[\|z\|^2_{L^2(\Sigma_1)} + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right| |z| \, d\Gamma_1 dt + \left\| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right\|^2_{H_a^{-1}(\Sigma_1)} + \|z\|^2_{H^{-1}(Q)}, \right]$$

tel que $H_a^{-1}(\Sigma_1)$ *est l'espace dual de l'espace* $H_a^1(\Sigma_1)$ *l'espace pivot* $L^2(\Sigma_1)$. $H_a^1(\Sigma_1) = H^{\frac{1}{2}}(0,T,L_2(\Sigma_1)) \cap L^2(0,T,H^1(\Gamma_1))$.
L'objectif de ce travail est de prouver la stabilisation uniforme de l'équation de Schrödinger avec conditions aux limites de type mémoire dans l'espace $L^2(\Omega)$.
Maintenant, on passe à notre résultat principal, en utilisant l'estimation utiliser par [40]. Notre résultat de stabilisation est le suivant.

THÉORÈME 3.3. *Supposons satisfaites l'hypothèse* (H_1)*, en plus les conditions géométrique. Il existe un champ de vecteur* H *tel que :*

$$i) H.\nu \geq 0 \ sur \ \Gamma_0$$

$$ii) H.\nu \geq 0 \ sur \ \Gamma_1$$

Alors pour toute donnée initiale $z_0 \in L^2(\Omega)$*, ils existent des constantes positives* M *et* ω *telles que*

$$E(t) \leq M e^{-\omega t} E(0).$$

REMARQUE 3.2. *Soit* $h \in \left[C^2(\overline{\Omega})\right]^n$ *un champ vecteur réel tel que :*
(i) h *est un coercitive dans* $\overline{\Omega}$*, il existe* $\gamma > 0$ *tel que la matrice Jacobienne* J *de* h *satisfait*

$$Re(J(x), \bar{\xi}) \geq \gamma \left|\xi\right|^2 \forall x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{C}^n.$$

(ii) $h(x).\nu(x) \leq 0 \quad$ *pour tout* $\ x \in \Gamma_0$.

DÉMONSTRATION. DÉMONSTRATION. Pour démontrer la stabilisation uniforme, nous avons besoin l'estimation utiliser par Lasiecka, Triggani [40] [le théorème 1.2], et aussi c'est facile de remarquer que l'énergie $E(t)$ définie dans (2.2) satisfaisant $E(t) \leq E(0), \forall t \geq 0$. Alors, la solution de problème proposé, satisfait l'inéqualitie suivant :

$$E(t) \leq E(0) \leq C_T \left[|z|^2_{L_2(\Sigma_1)} + \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2_{L_2(\Sigma_1)} + |z|^2_{H^{-1}(Q)} \right]$$

l'estimation ci dessous est une application directe baser sur l'estimation utiliser par Lasiecka, Triggani [40]. la preuve de ce théorème est basé sur le lemme suivant :

$$\|z\|^2_{L_2(\Sigma_1)} \leq \frac{1}{k^2(0)} \left| \frac{\partial z}{\partial \nu} \right|^2_{L_2(\Sigma_1)} + \frac{1}{k(0)} E(0).$$

On a

$$\left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2_{L^2(\Sigma_1)} = \left|-\int_0^t k'(t-s)\, z(s)\, ds\right|^2_{L^2(\Sigma_1)}$$

$$-2k(0)\int_{\Sigma_1}\int_0^t k'(t-s)\, Re\left(z(s)\, \overline{z}(t)\right) dsd\Sigma_1 + k^2(0)\left\|z\right\|^2_{L^2(\Sigma_1)}$$

et observons que

$$-2\int_{\Sigma_1}\int_0^t k'(t-s)\, Re\left(z(s)\,\overline{z}(t)\right) dsd\Sigma_1 = \int_{\Sigma_1}\int_0^t k'(t-s)\left|z(t)-z(s)\right|^2 dsd\Sigma_1$$

$$-\int_{\Sigma_1}\int_0^t k'(t-s)\left|z(t)\right|^2 dsd\Sigma_1 + k^2(0)\left|z\right|^2_{L^2(\Sigma_1)}$$

Alors

$$\left\|z\right\|^2_{L^2(\Sigma_1)} \leq \frac{1}{k^2(0)}\left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2_{L^2(\Sigma_1)} - \frac{1}{k(0)}\int_{\Sigma_1}\int_0^t k'(t-s)\left|z(t)-z(s)\right|^2 dsd\Sigma_1.$$

On applique le lemme de la décroissance de l'énergie, on trouve que

$$-\int_{\Sigma_1}\int_0^t k'(t-s)\left|z(t)-z(s)\right|^2 dsd\Sigma_1 = E(0)-E(t)-\int_{\Sigma_1} k(t)\left|z(t)\right|^2 d\Sigma_1.$$

On obtient alors

$$\left\|z\right\|^2_{L^2(\Sigma_1)} \leq \frac{1}{k^2(0)}\left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2_{L^2(\Sigma_1)} + \frac{1}{k(0)}E(0).$$

On procède, par la même technique utilisé e par Laseicka et Triggani dans [36]. Pour cela, on a considéré que $\forall \varepsilon > 0$

$$\left\|z\right\|^2_{H^{-1}(Q)} \leq \varepsilon E(0).$$

D'autre part, $\forall \varrho > 0$

$$E(0) \leq C_T[(\frac{4}{k^2(0)}+\varrho)\left|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right|^2_{L^2(\Sigma_1)} - \frac{2}{k(0)}\int_{\Sigma_1}\int_0^t k'(t-s)\left|z(t)-z(s)\right|^2 dsd\Sigma_1 + \left\|z\right\|^2_{H^{-1}(Q)}].$$

On a aussi

$$-\frac{2}{k(0)}\int_{\Sigma_1}\int_0^t k'(t-s)\left|z(t)-z(s)\right|^2 dsd\Sigma_1 \leq \frac{2}{k(0)}E(0).$$

On arrive à l'estimation suivante :

$$E(0) \leq C_T(\frac{4\varepsilon}{k^2(0)}+\varrho)\left\|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right\|^2_{L_2(\Sigma_1)} + C_T(\frac{1}{k(0)}+1)\varepsilon E(0),$$

il existe d'aprés le théorème une constante $C_T > 0$ et $\varepsilon \to 0$

$$E(0) \leq \varrho C_T\left\|\frac{\partial z}{\partial \nu}\right\|^2_{L_2(\Sigma_1)} \quad \forall T > 0,$$

tel que

$$0 < \varrho C_T < 1.$$

■

Conclusion

Dans ce travail de recherche, on s'est intéressé à l'étude du problème de la stabilisation uniforme pour l'équation de Schrödinger dont la partie elliptique est à coefficients variables avec un feedback frontière de type mémoire agissant sur la condition de Neumann.

Au début, on a considéré l'équation de Schrödinger avec des coefficients variables à un feedback de type mémoire puis on a démontré la décroissance exponentielle de l'énergie, et on a montré aussi qu'on peut appliquer la méthode de la géométrie Riemannienne sur l'équation de Schrödinger avec des coefficients variables. Dans notre cas, nous avons construit une métrique Riemannienne convenable sur $\mathbb{C}^n$. On note que cette approche a été introduite pour étudier les problèmes de la contrôlabilité exacte et de la stabilisation directe de certains systèmes réels avec des coefficients variables : équation hyperbolique d'ordre deux [62],[22],[14] *équation d'Euler Bernoulli* [9],[10] [60], [19], [61], *et équation de Maxwell* [55], [29] *etc...*

En utilisant la technique des multiplicateurs et on adoptant l'approche basée sur la géométrie Riemannienne, nous avons établit la stabilisation exponentielle dans l'espace d'énergie $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ dans le chapitre 2.

Dans le dernier chapitre, en se basant sur les techniques de I. Lasiecka et Trriggan dans [43] *nous allons montrés que la solution se stabilise uniformement pour l'équation de Schrödinger avec un feedback frontière de type mémoire agissant sur la condition de Neumann dans l'espace d'énergie $L^2(\Omega)$. Ici on a adopté une méthode due à* [40] *dans le cas où le feedback frontière est non linéaire. Pour obtenir ce résultat on a supposé quelques conditions géométriques.*

Perspective de la Problèmatique

Notre étude ouvre la voie sur plusieurs questions, notamment dit

- Étude de la stabilisation uniforme frontière dans le cas d'une action de type mémoire agissant sur la condition de Dirichlet.

- Étude de la stabilisation uniforme frontiére dans le cas d'une action frontière non linéaire de type mémoire.

- Étude de la stabilisation uniforme frontière dans le cas d'une action de type mémoire tel que l'opérateur A est fortement elliptique est défini comme suit :

$$A(t)z = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)$$

- Les résultats obtenus ont exige certaines hypothèses géom étriques sur le domaine. Il est donc intéressant d'étudier le problème considéré dans ce travail de recherche en affaiblissant ces hypothèses.

- On peut aussi considérer le problème de la stabilisation de deux équations (par exemple ondes-ondes, Schrödinger-Schrödinger, etc...) couplées avec un feedback du type mémoire. A notre connaissance cette classe de systèmes n'a pas été considérée dans la littérature.

- Un autre problème intéressant a été posé a fin d'obtenir des résultats de la stabilisation uniforme de l'équation de Schrödinger avec un feedback frontière du type mémoire en se basant sur la construction d'une fonction de Liapunov dans le cas linéaire, il est important de signaler qu'on a une certaine difficulté pour définir une énergie dissipative équivalente comme on a fait pour l'équation des ondes.

- Une question immédiate est de voir s'il est possible d'obtenir des estimations de la stabilisation des systèmes avec des termes non linéaire et sans aucune hypothèse de petitesse.

Bibliographie

[1] Aassila. M. Strong asumptotic stability of a compactly coupled system of wave equations, App. Math. Letters. 14(2001), 285-290.

[2] Abdesselam. N. Existence and uniform decay rates at the -$L_2(\Omega)$ - level of the Schrödinger equation with memory boundary feedback. IJSER, Volume 7, Issue 8, August 2016 ISSN 2229-5518.

[3] Abdesselam. N, Melkemi. K. Memory boundary feedback stabilization for Schrödinger equations with variable coefficients. Electron. J. Differ. Eqns. 129(2017), 1-14.

[4] Abdesselam. N. Stabilisation de l'équation de Schrödingerde par un feedback frontière de type mémoire, mémoire de magister, université de Batna, (2006).

[5] Abdesselam. N. Memory boundary feedback stabilisation for Schrödinger equations with constant coefficients, ICAAM, Monastir, Tunisia, (2016).

[6] Aubin. T. Some nonlinear problems in Riemannian geometry, Springer Verlag, New York 1998.

[7] Bernardi. C and Maday. Y. Approximations spectrales des problèmes aux limites elliptiques, Springer Verlag 1992.

[8] Brezis. H. Analyse fonctionnelle, Masson 1987.

[9] Bartolomeo. J and Triggiani. R. Uniform energy decay rates for Euler Bernoulli equations with feedback operators in the Dirichlet/ Neumann boundary conditions, SIAM J. 22, 1(1991), 46-71.

[10] Cavalcanti. M.M, Cavalcanti, V. N and Soriano, J. A. Existence and boundary stabilization of a nonlinear hyperbolic equation with timedependent coefficients, J. of Ditextcurrency erential Equations. 8(1998), 1-21.

[11] Cavalcanti, M. M, Cavalcanti, V. N, Soriano. J. A. and Prates. J. S. Existence and asymptotic behavior for a degenerate Kirchhoff Carrier model with viscosity and nonlinear boundary conditions, Revista mathematica Complutense. 1(2001), 177-203.

[12] Chai, S, and Guo. Y. Boundary stabilization of wave equations with variable coefficients and memory, Differential Integral Equations. 17(2004), 669-680.

[13] Cavalcanti, M.M, and Guesmia, A. General decay rates of solutions to a nonlinear wave equation with boundary condition of memory type, Differential and Integral Equations. 5(2005), 583-600.

[14] Chai, S, Guo, Y, and Yao, P. F. Boundary feedback stabilization of Shallow Shells, SIAM J. Control Optim. 1(2003), 239-259.

[15] Chen, G. Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain, J. Math. Pures et Appl. 58(1979), 249-273.

[16] Chen, G. Control and stabilization for the wave equations in a bounded domain, SIAM J. Control and Optim. 1(1979), 66-81.

[17] Chen, G. A note on the boundary stabilization of the wave equation, SIAM J. Control Optim. 19(1981), 106-113.

[18] Cipolatti, R, Machtyngier, E, and, Siqueira, E. Nonlinear boundary feedback stabilization for Schrödinger equations, Differential and integral equations journal. 9(1996), 1-15.

[19] Conrad, C, and Rao, B. Decay of solutions of the wave equations in a star shaped domain with nonlinear boundary feedback, INRIA. 1381(1991), 1-28.

[20] Chai. S, and Yuxia, G. Boundary stabilization of wave equations with variable coefficients and memory, Differential Integral Equations. 17(2004), 669-680.

[21] Datko, R. Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert space, J. of Math. Anal. and Appl. 32(1970), 610-616.

[22] Feng, S, and Feng, X. A note on geometric conditions for boundary control of wave equations with variable coefficients, J. Math. Anal. Appl. 271(2002), 59-65.

[23] Feng, S, and Feng, X. Nonlinear internal damping of wave equations with variable coefficients, Acta Math. Sin. 6(2004), 1057-1072.

[24] Guesmia, A. stabilisation de l'équation des ondes avec conditions aux limites de type mémoire, Afrika Math, 10(1999), 14-25.

[25] Hebey, E. Introduction á l'analyse non linéaire sur les varités, Editeur Diderot. Paris 1997.

[26] Komornick, V. Exact controllability and stabilization, The multiplier method, Research in Applied Mathematics, Masson 1994.

[27] Komornick, V, and Zuazua, E. Stabilization frontière de l'équation des ondes : une méthode directe, C. R. Acad. Sci. Paris. 305(1987), 605-608.

[28] Komornick , V, and, Zuazua, E. A Direct method for boundary stabilisation of the wave equation, J. Math. Pures et Appl. 69 (1990), 33-54.

[29] Lagnese, J. L. Boundary stabilization of linear elastodynamic systems, SIAM J. Control Optim. 6(1983), 968-984.

[30] Lee, J. M. Riemannian Manifolds, An Introduction to curvature, Springer Verlag, New York 1997.

[31] Lasiecka, I. Mathematical control theory of coupled PDE's, CBMS Lectures University of Nebraska, Lincoln 1999.

[32] Lasiecka, I, Lions, J. L, and Triggiani, R. Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators, J.Math. Pures et Appl. 65(1986), 149-192.

[33] Lions, J. L. Quelque Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaire, Gauthier Villars 1969.

[34] Lions, J. L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distribued systems, SIAM Rev. 1(1988), 1-68.

[35] Lasiecka, I, and Tataru, D. Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping, Differential and Integral Equations. 6(1993), 507-533.

[36] Lasiecka, I, and Triggiani, R. Uniform exponential energy decay of wave equations in a bounded region with feedback control in the Dirichlet boundary condition, J. Differential Equation. 66(1987),340-390.

[37] Lasiecka, I, and Triggiani, R. Exact controllability of the wave equation with Neumann boundary control, App.Math. Optim. 19(1989), 243-290.

[38] Lasiecka, I, and Triggiani, R. Optimal regularity, exact controllability and uniform stabilization of Schrödinger equations, Differential and Integral Equations. 3(1992), 521-535.

[39] Lasiecka, I, and Triggiani, R. Well-posedness and sharp uniform decay rates at the $L^2(\Omega)$ Level of the Schrödinger equation with nonlinear boundary dissipation. J of Evolution Equation, 1(2006), 485-537.

[40] Lasiecka, I. Triggiani, R and Zhang, X. Global uniqueness, observability and stabilization of nonconservative Schrödinger equations via pointwise Carlemann estimates. Part.II. $L^2(\Omega)$-estimate, J. Inverse, Ill-Posed-Problems. 12(2)(2004), 1-49.

[41] Lasiecka, I. Triggiani, R and Yao, P. F. Exact controllability for second order hyperbolic equations with variable coefficients principal part and ... rst order term. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 1(1997), 111-122.

[42] Lasiecka, I. Triggiani, R and Yao, P. F. Inverse observability estimates for second-order hyperbolic equations with variable coefficients. J. Math. Anal. Appl. 235(1999), 13-57.

[43] Lasiecka, I. Triggiani, R and P. F. Yao, P. F. Carleman estimates for a plate equation on a Riemann manifolds with energy level terms, Analysis and Application ISAAC. 10(2001), 199-236.

[44] Lasiecka, I. Triggiani, R and Zhang, X. Global uniqueness, observability and stabilization of nonconservative Schrödinger equations via pointwise Carlemann estimates. J. Inverse Ill Posed-Probl. 12 (2004), 183-231.

[45] Liu, W. and Zuazua, E. Decay rates for dissipative wave equations, Ricerche di Matematica. 84(1999), 61-75.

[46] Lions, J. L-Magenes, Problème aux limites non homogénes et applications, volumes 1. Dunod 1968.

[47] Liu, W and Zuazua, E. Uniform stabilisation of the higher dimensionel of thermoelasticity with nonlinear boundary feedback, Quarterly of Appled Matematics59, 2(2001), 269-314.

[48] Machtyngier, E. Contrôlabilité exacte et stabilisation frontière de l'équation de Schrödinger, C. R. Acad. Sci. Paris. 1(1990), 801-806.

[49] Martinez, P. Stabilization for the wave equation with Neumann boundary stabilization by a locally distributed damping, ESAIM : Proceeding. 8(2000), 119-136.

[50] Messaoudi, S. Energy decay of solutions of a semilinear wave equation, Int. J. Appl. Math. 9(2000), 1037-1048.

[51] Machtyngier, E and Zuazua, E. Stabilization of Schrödinger equation, Portugaliae Mathematica. 2(1994), 243-256.

[52] Nakao, M. Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation, Math. Ann. 305(1996), 403-417.

[53] Nicaise, S and Pignotti, C. Stabilization of the wave equation with variable coefficients and boundary condition of memory type. Asymptot. Anal. 50(2004), 31-67.

[54] Nicaise, S and Pignotti, C. Internal and boundary observability estimates for heterogeneous Maxwell's system, App. Math. Optim. 54(2006), 47-70.

[55] Pazy, A. Semigroups of linear operators and application to partial differential equations, Springer Verlag 1983.

[56] Raviart and Thomas, J. M. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, 1992.

[57] Russell, D. L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : Recent progress and open Questions, SIAM Review. 4(1978), 639-739.

[58] Tataru, D. Boundary controllability for conservative PDEs, Appl. Math. Optim. 31(1995), 257-295.

[59] Triggiani, R and Yao, P. F. Carleman estimates with no lower-order terms for general Riemann wave equations. Global uniqueness and observability in one shot, Appl. Math. Optim. 46(2002), 331-375.

[60] Wyler, A. Stability of wave equations with dissipative boundary conditions in a bounded domain, Ditextcurrency erential Integral Equations. 7(1994), 345-366.

[61] Yao, P. F. On the observabillity inequalities for exact controllability of wave equations with variables coefficients, SIAM J. Control Optim. 5(1999), 1568-1599.

[62] Yao, P. F. Observability inequalities for the Euler-Bernoulli Plate with variable coefficients, Contemporary Mathematics. 268(2000), 383-406.

[63] Yosida, K. Functional Analysis, Spriger-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1968.

[64] Zuazua, E. Exponential decay for the semi linear equation with locally distributed damping, Partial Differential Equations. 15(1990), 205-235.

Résumé.

Dans cette thèse, nous avons établi l'existence de la solution et la stabilisation uniforme de l'équation de Schrödinger à coefficients variables avec un feedback frontière de type mémoire. La question de la stabilisation de cette équation est également considérée. Notre approche sera basée sur la méthode de la géométrie Riemannienne, et en utilisant l'dée de Laseicka et Trriggani dans l'espace d'énergie $L^2(\Omega)$.

Abstract. *In this thesis, we established the existence of the solution and the uniform stabilization of the Schrödinger of variable coefficients with a feedback boundary of type memory. The question of the stabilization of this equation is also considered. Our approach will be based on the method of the Riemannian geometry, and adapting the ideas of Laseicka and Trriggani at the* $L^2(\Omega)$ *energy level.*