

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie mécanique  
Réf : .....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة الميكانيكية  
المرجع: .....

Mémoire présenté en vue de l'obtention  
Du diplôme de  
**Magister en Génie mécanique**

**Option : Construction mécanique**

**Etablissement d'un modèle numérique pour la  
représentation du comportement d'un matériau  
élastoviscoplastique**

Présenté par :

**SAADALLAH Younès**

Soutenu publiquement le 30 avril 2012

**Devant le jury composé de :**

Dr. HECINI Mabrouk	Professeur	Président	Université de Biskra
Dr. HADID Mohamed	Maitre de Conférences 'A'	Rapporteur	Université de Biskra
Dr. BENZAADA Said	Professeur	Examineur	Université de Biskra
Dr. TATI Abdelouahab	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Biskra

*A ma mère*

## **Remerciements**

*Je tiens à remercier particulièrement le Docteur Mohamed Hadid, mon directeur de mémoire, d'avoir été mon encadrant académique aussi bien pendant l'année théorique et pratique qu'au cours de la préparation de ce mémoire. Un grand merci pour ses conseils, sa disponibilité, l'intérêt qu'il a éprouvé à mon travail et pour m'avoir fait profiter de ses connaissances et de ses qualités tant sur le plan professionnel que sur le plan socio-humain.*

*Mes sincères remerciements s'adressent également au Professeur Mabrouk Hécini d'abord d'avoir été mon professeur au cours de la première année de Magister et puis d'avoir accepté de présider le jury. J'exprime ma sincère gratitude au Docteur Abdelouahab Tati et au Professeur Saïd Bensaada de m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury en qualité d'examineurs.*

*J'adresse aussi ma profonde reconnaissance à tous les professeurs m'ayant encadré pendant l'année théorique et pratique, et qui m'ont fourni tous les outils nécessaires pour mener à bien et à terme ce mémoire de Magister.*

*Mes remerciements s'expriment sincèrement à Mr Omar Boukhodra, Directeur de mon établissement d'exercice pour l'intérêt qu'il a éprouvé aussi bien à ma personne qu'à mon étude et de n'avoir épargné aucun effort pour me permettre de réaliser mon projet de mémoire. A travers lui je salue tout le personnel de l'établissement Foudil El-Ouertilani : Conseiller de l'éducation, corps enseignant, personnel administratif et tous les travailleurs.*

*Toute ma famille est également saluée pour sa patience et pour m'avoir encouragé et assuré toutes les conditions nécessaires qui m'ont permis de me consacrer uniquement à l'étude sans me soucier d'aucune autre préoccupation.*

*Enfin je ne peux passer de remercier, sans citer les noms, tous ceux qui ont contribué à l'achèvement de ce mémoire.*



## Table des matières

### Table des figures et index des tableaux

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre I- Etude bibliographique</b> .....	4
I.1    Introduction .....	4
I.2    Microstructure et mécanismes physiques de déformation des matériaux .....	4
I.2.1    Métaux et alliages.....	4
I.2.2    Polymères .....	7
I.2.3    Céramiques.....	9
I.3    Mécanique des milieux continus .....	11
I.3.1    Description du mouvement du milieu continu .....	11
I.3.2    Etude de déformations.....	13
I.3.3    Etude des contraintes.....	16
I.3.4    Modélisation des efforts et puissances virtuelles. ....	18
I.4    Thermodynamique des milieux continus.....	20
I.4.1    Description des échanges .....	20
I.4.2    Premier principe .....	20
I.4.3    Deuxième principe.....	22
I.4.4    Principe de l'état local.....	23
I.5    Les grandes classes de comportement mécanique.....	26
I.5.1    Briques de base des lois de comportement.....	26
I.5.2    Viscoélasticité uniaxiale.....	28
I.5.3    Plasticité uniaxiale.....	30
I.5.4    Viscoplasticité .....	35
I.6    Bilan du chapitre .....	39
<b>Chapitre II- Modélisation de comportement non linéaire des matériaux</b> ....	40
II.1    Introduction .....	40
II.2    Aspects phénoménologiques .....	40
II.2.1    Essai de traction uniaxiale.....	40
II.2.2    Déformations et contraintes vraies .....	43
II.2.3    Limite d'élasticité.....	44

II.3	Critères d'écoulement.....	44
II.3.1	Fonction de charge .....	45
II.3.2	Critère de Tresca.....	46
II.3.3	Critère de Von Mises.....	47
II.3.4	Comparaison des critères de Tresca et Von Mises .....	48
II.4	Règle d'écoulement.....	49
II.4.1	Partition de la déformation.....	49
II.4.2	Règle de la normalité.....	49
II.4.3	Lois d'écroutissage.....	50
II.5	Fluage viscoplastique .....	52
II.5.1	Mécanisme du fluage.....	52
II.5.2	Cinétique du fluage.....	52
II.5.3	Influence de la contrainte et de la température.....	54
II.6	Bilan du chapitre .....	55
 <b>Chapitre III- Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres</b>		
	.....	56
III.1	Introduction .....	56
III.2	Théorie élémentaire des poutres.....	56
III.2.1	Hypothèses géométriques.....	57
III.2.2	Hypothèses cinématiques .....	57
III.2.3	Efforts et hypothèses statiques .....	58
III.2.4	La relation moment-courbure .....	59
III.2.5	Les flèches des poutres.....	59
III.3	Extension de la théorie des poutres au comportement viscoélastique.....	60
III.3.1	Relation moment courbure .....	61
III.4	Etude analytique d'une flexion viscoélastique sous sollicitations complexes.....	62
III.4.1	Description du problème .....	62
III.4.2	Détermination des déformations.....	62
III.4.3	Répartition des contraintes et position de l'axe neutre.....	64
III.4.4	Détermination de la flèche.....	66
III.5	Modélisation de la flexion élastoplastique des poutres prismatiques.....	68
III.5.1	Seuil de plasticité.....	69
III.5.2	Flexion d'un matériau de comportement élastoplastique parfait.....	70

III.5.3	Seuil d'écoulement en flexion composée .....	72
III.5.4	Flexion élastoplastique à écrouissage non linéaire .....	73
III.5.5	Flexion des poutres sous chargement transversal .....	78
III.6	Simulation numérique d'une poutre en flexion élastoplastique .....	83
III.6.1	Description du problème .....	83
III.6.2	Méthodes numériques utilisées.....	83
III.6.3	Présentation et discussion des résultats .....	83
III.7	Bilan du chapitre .....	89
 <b>Chapitre IV- Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.....</b>		 <b>90</b>
IV.1	Introduction .....	90
IV.2	Description du problème .....	90
IV.2.1	Problématique.....	90
IV.2.2	Cadre du travail .....	91
IV.3	Présentation du modèle rhéologique .....	91
IV.3.1	Profil des déformations.....	92
IV.3.2	Profil des contraintes .....	93
IV.4	Formulation mathématique des équations du modèle .....	93
IV.4.1	Analyse viscoélastique .....	93
IV.4.2	Analyse viscoplastique .....	95
IV.4.3	Intégration de l'équation différentielle de la courbure élastoviscoplastique .....	97
IV.4.4	Choix d'une méthode d'intégration.....	98
IV.4.5	Algorithme de calcul .....	100
IV.4.6	Détermination de la flèche viscoélastique / élastoviscoplastique.....	100
IV.4.7	Organigramme général du programme.....	102
IV.5	Présentation et analyse des résultats.....	103
IV.5.1	Géométrie et paramètres du matériau.....	103
IV.5.2	Interprétation du graphe de la courbure.....	103
IV.5.3	Influence du chargement et des paramètres.....	106
IV.5.4	Frontières viscoélastique / viscoplastique .....	110
IV.5.5	Répartition des contraintes et des déformations.....	112
IV.5.6	Interprétation des courbes de la flèche .....	116
IV.6	Conclusion.....	118

<b>Conclusions générales et perspectives .....</b>	<b>119</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>121</b>
<b>Résumés .....</b>	<b>124</b>



## **Table des figures**

Figure I.1- Formation de bandes de glissement [3].....	5
Figure I.2- Système de maillage .....	5
Figure I.3- Déplacement par glissement d'une dislocation.....	6
Figure I.4- Déplacement par montée d'une dislocation .....	6
Figure I.5- Structure de polyéthylène [4] .....	7
Figure I.6- Structure cellulaire du bois. 1-section transverse; 2-section radiale; 3-section tangentielle [5].....	9
Figure I.7- Principe des systèmes de glissement dans les matériaux ioniques [1].....	10
Figure I.8- Configuration du système. ....	12
Figure I.9- Vecteur contrainte et force élémentaire. ....	16
Figure I.10- Composantes de $\sigma$ en base orthonormée.....	16
Figure I.11- Contrainte normale et contrainte tangentielle .....	17
Figure I.12- Schématisation des briques de bases des lois de comportement.....	27
Figure I.13- Modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt.....	28
Figure I.14- Courbes de fluage et de relaxation .....	29
Figure I.15- Modèles composés de Kelvin-Voigt et de Zener .....	30
Figure I.16- Modèle élastique parfaitement plastique.....	31
Figure I.17- Modèle de Prager .....	32
Figure I.18- Illustration des deux principaux types d'écroutissage.....	35
Figure I.19- Modèle de Bingham .....	35
Figure I.20- Modèle de Bingham généralisé .....	36
Figure I.21- Fluage avec le modèle de Bingham .....	37
Figure II.1- Diagramme contrainte-déformation : a- métaux ductiles en traction simple ; b- acier à faible teneur en carbone en traction-compression simples [8]. ....	42
Figure II.2- Diagramme contrainte vraie - déformation vraie de divers polymères obtenues à 25°C et à 10 – 3s – 11en traction par la méthode vidéométrique [9] .....	42

Figure II.3- Diagramme typique contrainte-déformation de l'oxyde d'aluminium et du verre en traction [10]. .....	43
Figure II.4- Comparaison des les courbes contrainte-déformation conventionnelle et vraie [11] .....	44
Figure II.5 : a- Domaine d'élasticité unidimensionnelle ; b- Expérience de traction-compression et torsion d'un tube mince: domaine élastique déterminé expérimentalement [12] .....	45
Figure II.6- Critères de Tresca et de Von Mises dans l'espace des contraintes principales ....	47
Figure II.7- Comparaison des critères de Tresca (en pointillés) et de Von Mises (traits pleins) : a- En traction-cisaillement (Tresca : $\tau t = \sigma e2$ , Von Mises : $\tau m = \sigma e3$ ,) ; b- En traction biaxiale. ....	48
Figure II.8- Règle de normalité dans le plan des contraintes planes[14]. ....	50
Figure II.9- Ecrouissage isotrope [14].....	51
Figure II.10- Ecrouissage cinématique [14].....	51
Figure II.11- Courbe typique du fluage [10] .....	53
Figure II.12- Courbe de la vitesse de déformation de fluage [4] .....	53
Figure II.13- Courbe de fluage présentant l'influence de la contrainte et de la température [20] .....	55
Figure III.1- Hypothèses cinématiques d' Euler-Bernoulli .....	58
Figure III.2- Déformée de la poutre. ....	60
Figure III.3- Poutre console soumise à une sollicitation complexe .....	62
Figure III.4- Répartition des déformations à t=1h.....	63
Figure III.5- Evolution des déformations dans la section la plus sollicitée .....	64
Figure III.6- Répartition des contraintes .....	65
Figure III.7- Position de l'axe neutre le long de la poutre .....	66
Figure III.8- Déformée de la poutre .....	67
Figure III.9- Evolution de la déformée de la poutre.....	68
Figure III.10- Flexion élastoplastique [25].....	69

Figure III.11- Répartition des contraintes dans la section : régime élastique, régime élastoplastique, plastification complète.....	70
Figure III.12- Relation moment-courbure .....	71
Figure III.13- Répartition des contraintes en flexion élastoplastique à écrouissage non linéaire. ....	74
Figure III.14- Relation moment-courbure pour différents paramètres d'écrouissage [25] .....	75
Figure III.15- Etat de déformation élastoplastique d'une poutre cantilever.....	78
Figure III.16- Courbe de la relation charge-déflexion. a. Poutre console chargée à son extrémité libre ; b. Poutre console uniformément chargée. c. Poutre simplement appuyée uniformément chargée [25] .....	81
Figure III.17- Influence du module d'écrouissage sur la courbure .....	84
Figure III.18- Répartition des contraintes en fonction de la hauteur de la poutre.....	85
Figure III.19- Répartition des contraintes le long de la poutre .....	85
Figure III.20- Répartitions des déformations le long de la poutre .....	86
Figure III.21- Limite élastique-plastique.....	87
Figure III.22- Répartition des contraintes en fonction de $x, y$ .....	87
Figure III.23- Répartition des déformations en fonction de $x, y$ .....	87
Figure III.24- Courbe Contrainte-Déformation.....	88
Figure III.25- Influence du module d'écrouissage sur la flèche .....	89
Figure IV.1- Poutre en flexion trois points .....	91
Figure IV.2- Modèle rhéologique élastoviscoplastique .....	92
Figure IV.3- Répartition des déformations et des contraintes dans le domaine viscoélastique	95
Figure IV.4- Répartition des déformations et des contraintes dans le domaine élastoviscoplastique.....	96
Figure IV.5- Comparaison des méthodes d'Euler Explicite / Implicite.....	99
Figure IV.6- Frontière viscoélastique / viscoplastique.....	101
Figure IV.7- Evolution de la courbure .....	104
Figure IV.8- Evolution de taux de courbure.....	104

Figure IV.9- Progression de la courbure en fonction de la longueur de la poutre .....	105
Figure IV.10- Relation moment-courbure.....	106
Figure IV.11- Evolution de la courbure sous un chargement de 35 N.....	107
Figure IV.12- Influence du module d'écrouissage sur la courbure.....	108
Figure IV.13- Evolution de la courbure sans élasticité différée.....	109
Figure IV.14- Evolution de la courbure sans élasticité instantanée .....	109
Figure IV.15- Evolution de la courbure rigide viscoplastique .....	110
Figure IV.16- Frontière viscoélastique / viscoplastique.....	111
Figure IV.17- Evolution de la frontière viscoélastique .....	111
Figure IV.18- Evolution de la contrainte sur la fibre extérieure .....	112
Figure IV.19- Répartition des contraintes .....	113
Figure IV.20- Répartition des contraintes dans la section la plus sollicitée .....	114
Figure IV.21- Evolution de la déformation sur la fibre extérieure.....	115
Figure IV.22- Répartition des déformations .....	115
Figure IV.23- Répartition des déformations au cours du temps dans la section la plus sollicitée .....	116
Figure IV.24- Déformée de la poutre .....	117
Figure IV.25- Evolution de la flèche.....	117

## **Index des tableaux**

Tableau I.1- Variables thermodynamiques [2].....	25
Tableau III.1- Facteurs de forme pour les sections usuelles [26].....	72
Tableau IV.1- Propriétés mécaniques du matériau objet de simulation.....	103

# Introduction générale

## Généralités

De par leurs natures ou leurs modes de fabrication, les matériaux ne réagissent pas de la même façon aux sollicitations extérieures. Si la réponse est instantanée et réversible pour certains matériaux sous un certain chargement, il n'en est pas de même pour d'autres ou pour les mêmes matériaux sous des chargements dépassant certaines valeurs critiques. Par ailleurs, certains matériaux répondent instantanément alors que d'autres réagissent en différé.

Tout a été dit ou presque sur le comportement élastique linéaire, caractérisé par la réversibilité et l'indépendance du facteur temps. Il représente actuellement le cadre de la majorité des calculs des milieux continus. Au-delà du domaine élastique, intervient la théorie de la plasticité classique utilisée pour le calcul des déformations irréversibles ou permanentes indépendantes du temps. D'autre part, le comportement différé exprime le fait que la réponse à une sollicitation imposée à un instant donné n'est pas acquise entièrement à cet instant mais elle se traduit par une déformation qui évolue avec le temps, il s'agit de la viscoélasticité si la réponse est réversible et de la viscoplasticité dans le cas d'une réponse irréversible. En effet, avec des ordres de grandeurs différents, tous les comportements évoqués s'appliquent à tous les matériaux. Il s'avère donc nécessaire d'établir des lois constitutives globales pour simuler plus précisément le comportement mécanique des matériaux à la lumière de ces concepts.

L'établissement de la loi de comportement d'un matériau est généralement phénoménologique, basée sur l'expérimentation macroscopique et l'identification des paramètres dans le cadre de la formulation thermodynamique. Les lois de comportement sont constituées de formules mathématiques pilotées par des paramètres identifiés par des essais mécaniques adaptés aux lois étudiées. Les grandeurs mesurées sont généralement la force et le déplacement qui ne sont pas les grandeurs directement utilisées dans les lois de comportement. Il est donc nécessaire de les convertir en contraintes et déformations représentées par des équations mathématiques. La résolution de ces équations est généralement analytique dans le cas des comportements linéaires, cependant elle exige souvent une simulation numérique si une non linéarité a lieu.

## **Problématique**

Les essais de flexion induisent un champ de contrainte non uniforme dans l'éprouvette ; cela ne pose pas grand problème dans le cas d'un comportement élastique linéaire ; il nous suffit des hypothèses géométriques, cinématiques et statiques à partir desquelles une formulation mathématique nous permet de déterminer par des méthodes analytiques toutes les inconnues du problème. Cependant en prenant en compte la déformation plastique, qu'elle soit dépendante du temps ou non, une non linéarité a souvent lieu dans les équations de comportement. Un recours aux méthodes numériques est alors souvent indispensable pour résoudre le problème.

Nous nous intéressons dans ce mémoire à l'établissement d'un modèle numérique susceptible de simuler le comportement des matériaux élastoviscoplastiques sous un état de contrainte non uniforme. Nous considérons pour cela un essai de flexion trois points en fluage sous l'hypothèse des petites déformations où les hypothèses d'Euler-Bernoulli et celles de Saint Venant sont respectées. La méthode itérative de Newton-Raphson pour la résolution des équations non linéaires, la méthode d'intégration des équations différentielles d'Euler implicite et la méthode des différences finies de deuxième ordre sont privilégiées pour la résolution des équations mathématiques du modèle, notamment la courbure qui se présente comme un paramètre géométrique primordial à partir duquel découlent l'évaluation des flèches et la simulation de la répartition des contraintes et des déformations.

Le modèle proposé est une combinaison de deux mécanismes analogiques dont le premier décrit le comportement viscoélastique à élasticité instantanée tant que la contrainte est en dessous du seuil de plasticité alors que le second simule le comportement viscoplastique à écrouissage cinématique une fois la contrainte dépasse ce seuil. Le modèle est, de par ses composantes élastique, viscoélastique et viscoplastique, considéré comme un modèle global, complexe, et susceptible de caractériser une grande variété des matériaux.

## **Structure de mémoire**

Le présent mémoire s'organise en quatre chapitres dont le premier est consacré à une revue bibliographique axée sur le concept général de la loi de comportement qui se traduit par l'établissement d'une relation entre la contrainte et la déformation. Partant de l'échelle microscopique où les mécanismes physiques de déformations sont élucidés, une modélisation

des efforts et des déformations dans le cadre de la mécanique des milieux continus est rappelée, passant par la suite par le formalisme de la thermodynamique des processus irréversible où le principe de l'état local dont découle la formulation des lois de comportement est présenté. Enfin, terminant par une classification rhéologique des lois constitutives énumérées sous forme de modèles analogiques.

Le deuxième chapitre traite de la théorie de la plasticité classique et de la viscoplasticité. L'essai de traction constituant la base de la modélisation est présenté, les concepts du domaine d'élasticité aussi bien dans le cas unidimensionnel que dans le cas tridimensionnels sont illuminés. Les lois d'écoulement et d'écrouissage sont ensuite développées. Enfin le fluage viscoplastique qui traduit la déformation au cours du temps est discuté.

Dans le troisième chapitre nous nous intéressons à l'application des fondements théoriques acquis à partir des deux premiers chapitres pour une modélisation de comportement non linéaire des poutres. La théorie élémentaire des poutres, qui voit son extension aux comportements viscoélastique et élastoplastique, constitue la base de la modélisation dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Des applications en viscoélasticité et en élastoplasticié à écrouissage cinématique non linéaire sont prises en considération.

Une proposition d'un modèle permettant de représenter le comportement élastoviscoplastique des matériaux fait l'objet du dernier chapitre. En plus de l'élasticité instantanée, la viscoélasticité et la plasticité dépendante du temps ou la viscoplasticité sont considérées dans le modèle. Un calcul numérique s'avère nécessaire pour résoudre les équations du modèle. Les résultats obtenus sont enfin présentés et discutés.

## **Chapitre I- Etude bibliographique**

### **I.1 Introduction**

Dans ce chapitre, nous nous intéressons, en premier lieu, aux structures microscopiques et aux mécanismes physiques de déformations réversibles et irréversibles pour différents types de matériaux. Nous présentons par la suite des rappels de mécanique et de thermodynamique des milieux continus qui constituent les outils théoriques de la modélisation des efforts et des déformations. Enfin nous procédons à la schématisation de différentes lois de comportement dont l'élasticité, la viscoélasticité, la plasticité et la viscoplasticité.

### **I.2 Microstructure et mécanismes physiques de déformation des matériaux**

Les deux principales réponses des matériaux aux sollicitations sont la déformation et la rupture. La déformation peut être élastique, viscoélastique (élastique en fonction du temps), plastique ou de fluage (plastique en fonction du temps). La rupture peut survenir soudainement ou sous l'action de sollicitations répétées. Pour certains matériaux, la rupture est dépendante du temps [1]. Avec des ordres de grandeurs, ces déformations s'appliquent à tous les matériaux malgré la grande différence de nature et de structure de ces derniers tels que les métaux et alliages, les polymères et les bois, les céramiques et les bétons, les composites, dont on observe une grande unité dans le comportement macroscopique [2].

#### **I.2.1 Métaux et alliages**

##### **I.2.1.1 Microstructure**

Les métaux et alliages sont constitués d'assemblages d'atomes liés entre eux par des forces électromagnétiques naissant entre les électrons d'atomes voisins. L'ordre de grandeur du rayon d'un atome est de  $10^{-7}$  à  $10^{-6}$  mm. Les arrangements stables sont déterminés par une condition de minimum de l'énergie de l'assemblage, fonction de l'activation thermique. Les liaisons des arrangements métalliques correspondent à une mise en commun d'électrons des couches externes des atomes.



### I.2.1.2 Déformation élastique

Les déformations élastiques se situent au niveau atomique, l'effet macroscopique constaté, est le résultat des variations des espaces interatomiques nécessaires pour équilibrer les sollicitations extérieures, ainsi que de mouvements réversibles de dislocations. Ces modifications géométriques sont essentiellement réversibles. Dans une déformation élastique pure, la configuration initiale des atomes est retrouvée après cessation de la sollicitation.

### I.2.1.3 Déformation permanente

Les déformations permanentes plastiques se situent au niveau cristallin et se superposent aux déformations élastiques, elles correspondent à des déplacements relatifs d'atomes, stables après cessation de la sollicitation. Suivant les cas, ces déformations sont purement intra-granulaires ou font intervenir des déplacements inter-granulaires.

#### *Déformation par glissement et maclage*

Les plans de symétrie de mailles, qui sont aussi les plans réticulaires les plus denses en atomes correspondent aux distances les plus grandes entre plans parallèles. Ce sont donc dans ces plans que des glissements par cisaillement peuvent se produire dans la direction de la contrainte tangentielle maximale. Le maclage est plutôt caractéristique des déformations aux températures ambiantes et moyennes. On l'observe dans les cristaux C.C et H.C. concurremment avec des glissements, mais aussi dans des cristaux C.F.C. à faible énergie de faute d'empilement. Ces défauts, glissement et maclage, constituent des déformations hétérogènes à l'échelle du cristal mais que l'on peut considérer comme homogènes à l'échelle macroscopique (Figures I.1,2).

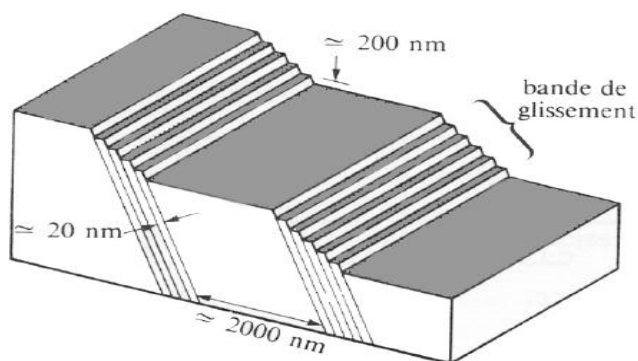


Figure I.1- Formation de bandes de glissement [3]

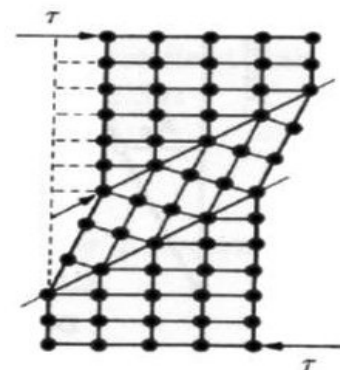


Figure I.2- Système de maclage

***Déformation par mouvements de dislocations***

La présence de dislocation réduit considérablement la stabilité du réseau cristallin. Leur mobilité est la cause essentielle des déformations permanentes homogènes à l'échelle macroscopique.

***Déplacement par glissement***

Lorsque sous l'action d'une sollicitation extérieure, une dislocation coin ou vis se déplace et traverse un cristal, elle engendre un déplacement irréversible. La Figure I.3 en donne le schéma pour une dislocation coin dans un cristal cubique soumis à une contrainte tangentielle  $\tau$ . Ce mécanisme de déplacement n'exige la rupture de liaison qu'au voisinage de la ligne de dislocation et successivement d'un atome à l'autre. Dans le cas plus complexe d'une boucle de dislocation qui se développe, le plan de la boucle peut dévier dans un autre plan à partir de son point « vis pure » pour éviter un obstacle (une impureté par exemple).

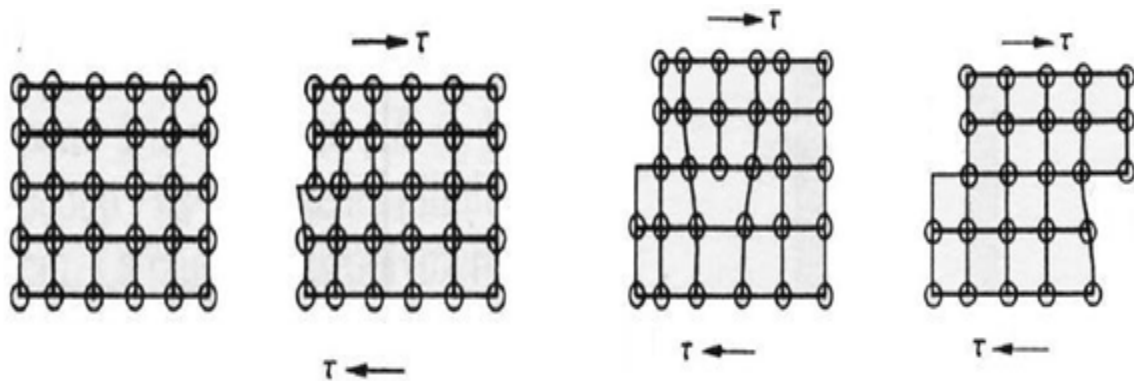


Figure I.3- Déplacement par glissement d'une dislocation

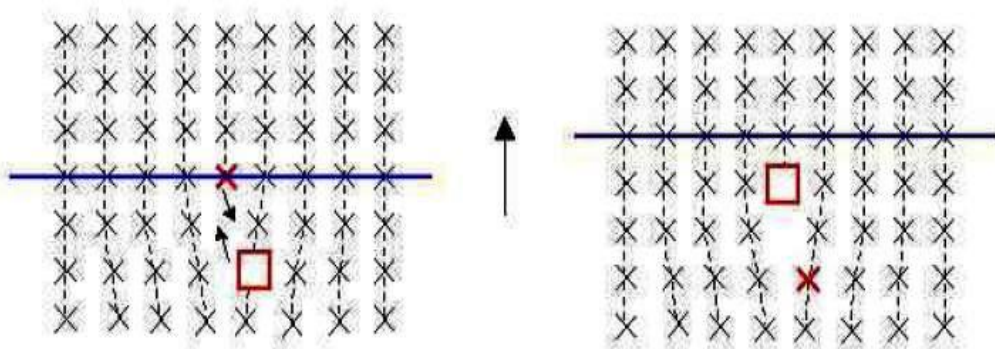


Figure I.4- Déplacement par montée d'une dislocation

**Déplacement par montée**

Une dislocation coin peut se déplacer perpendiculairement à son plan de glissement avec transport de matière. Une lacune étant proche d'une ligne de dislocation extérieure peut provoquer le saut d'un atome du demi-plan supplémentaire sur le site cristallin inoccupé et la permutation de toute la rangée d'atomes (Figure I.4). Selon ce mécanisme, la dislocation a monté d'un espace interatomique.

**I.2.2 Polymères****I.2.2.1 Microstructure**

Les polymères solides sont constitués par des molécules en chaînes (Figure I.5). Le squelette de la chaîne est formé d'atomes de carbone principalement, reliés par la liaison covalente carbone-carbone dont l'énergie à rupture est de l'ordre de  $300 \text{ kJ/mole}$ . D'autres atomes d'hydrogène, d'oxygène, d'azote, ... sont reliés aux atomes de la chaîne et éventuellement à des atomes de molécules voisines par des liaisons polaires ou de type Van der Waals dont l'énergie de rupture n'est que de l'ordre de  $10 \text{ KJ/mol}$ .

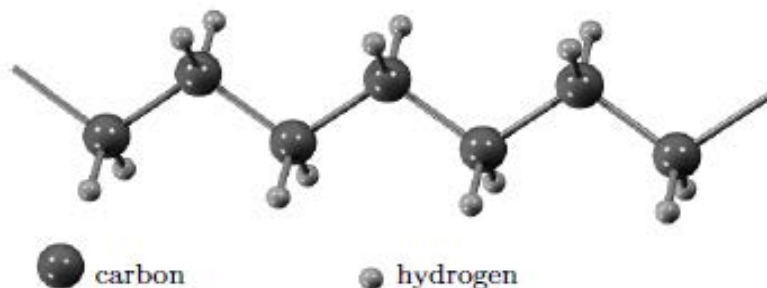


Figure I.5- Structure de polyéthylène [4]

**I.2.2.2 Déformations viscoélastiques**

Pour la plupart des polymères, tant que la sollicitation ne dépasse pas une certaine valeur, les déformations sont élastiques mais elles mettent en jeu des phénomènes dissipatifs que l'on traduit globalement par une viscosité. Elles sont les résultats de mouvements relatifs de segments de chaînes dans lesquelles les liaisons ne sont pratiquement pas détruites mais les réarrangements qui interviennent sont des phénomènes thermiquement activés. Le nombre d'atomes par seconde pouvant effectuer un saut est fonction de la contrainte et de la

température ce qui entraîne une relation entre la vitesse de déformation et la contrainte, c'est le phénomène de viscosité. La déformation bien que réversible ne se stabilise ou ne disparaît qu'au bout d'un certain temps. La limite de réversibilité est de l'ordre de quelques pour cent mais si la densité des liaisons est faible (cas des élastomères), elle peut atteindre 50 à 100%.

### **I.2.2.3 Déformations permanentes**

Elles prennent naissance à la fois dans les cristallites où des dislocations sont générées et dans les régions amorphes, par rotations importantes des liaisons. Une sollicitation plus importante provoque la destruction de la sous-structure par rupture des liaisons de plus faible énergie alors que de nouvelles liaisons peuvent se créer par simple rapprochement d'éléments actifs.

- Les réorientations favorisent la formation de nouvelles cristallites qui jouent le rôle de renfort. Il y a consolidation ou écrouissage avec, à contrainte constante, équilibre plastique asymptotique en fonction du temps (fluage à caractère logarithmique).
- Lorsque la densité des cristallites se stabilise, il peut y avoir écoulement de fluage à contrainte constante.
- Enfin, la déformation plastique s'accompagne d'anisotropie par consolidation directionnelle.

### **I.2.2.4 Microstructure et déformation du bois**

Les fibres macroscopiques du bois sont constituées de cellules de quelques centièmes de millimètres de côté et de quelques millimètres de long disposées parallèlement à l'axe du tronc. De leur tour, ces cellules sont essentiellement constituées de cellulose (40 à 50% en poids) et de lignine (25 à 30%). A ces deux polymères s'ajoute l'eau qui existe soit sous forme de combinaison chimique avec la lignine, soit sous forme d'imprégnation dans les membranes des cellules, soit sous forme libre dans les vides des tissus.

Les déformations élastiques sont dues aux déformations réversibles des cellules qui sont fortement influencées par le taux d'humidité. Elles peuvent atteindre 0,1 à 0,5% sans déformations permanentes appréciables, selon les essences de bois et la direction de la sollicitation par rapport à l'axe de l'arbre. La viscosité est faible.

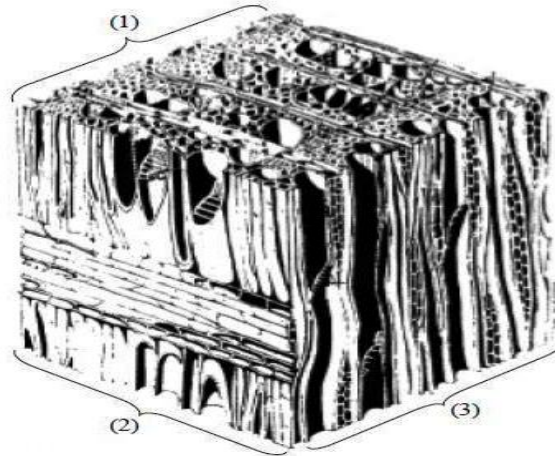


Figure I.6- Structure cellulaire du bois. 1-section transverse; 2-section radiale; 3-section tangentielle [5]

Quant aux mécanismes de déformations permanentes, il est difficile de les séparer des mécanismes de rupture : soit que les déformations permanentes macroscopiques résultent de micro-ruptures, soit que la rupture macroscopique intervient avant que des déformations appréciables ne se soient produites. Quoiqu'il en soit, le mécanisme principal de la déformation plastique du bois est le glissement des cellules les unes par rapport aux autres alors que la rupture intervient par la rupture des chaînes de cellulose.

### **I.2.3 Céramiques**

#### **I.2.3.1 Microstructure**

Les éléments qui entrent dans la composition des céramiques sont liés entre eux par des liaisons fortes, covalentes ou ioniques, et forment des composés hétéropolaires (réseaux d'anions et de cations). Les cations sont des éléments métalliques qui cèdent leurs électrons périphériques aux anions, dans la majorité des cas, de l'oxygène. Les céramiques sont souvent des oxydes métalliques. Il existe également des composés dans lesquels les cations sont du carbone, de l'azote ou du bore ; ce sont les carbures, les nitrures et les borures.

#### **I.2.3.2 Déformation élastique**

Comme dans les métaux et les alliages, sous l'effet d'efforts extérieurs, les atomes se rapprochent ou s'éloignent et engendrent ainsi des forces de rappel qui tendent à ramener les atomes à leur position d'équilibre et restituer au solide sa forme originale qu'il aura après

cessation d'efforts. Cependant, les liaisons interatomiques (ioniques ou covalentes) des céramiques étant des liaisons fortes et orientées, ces matériaux ont une rigidité élevée.

### I.2.3.3 Déformation permanente

Dans un matériau à liaisons covalentes, puisque ces liaisons sont fortement directionnelles, le déplacement de la dislocation entraîne en général une rupture définitive de la liaison. Quant aux matériaux ioniques, l'équilibre des charges électrostatiques devant être assuré, les plans de glissement correspondent aux plans qui permettent aux charges électrostatiques de même signe de ne pas se trouver face à face lorsque le déplacement de dislocations dans ces plans engendre un glissement (Figure I.7). En outre les impuretés interagissent facilement avec les dislocations et les piègent efficacement [3]. Les céramiques ont, par conséquent, un comportement fragile et se rompent sans déformation plastique sauf à des températures proches de leur température de fusion où la forte agitation thermique des atomes entraîne un certain mouvement de dislocation.

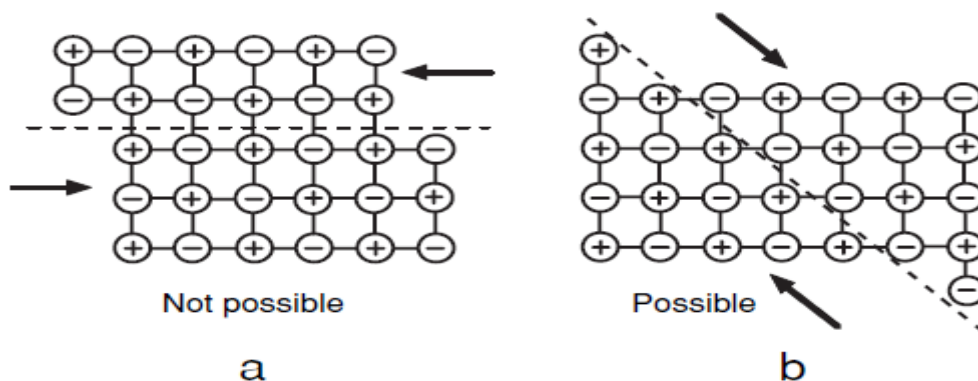


Figure I.7- Principe des systèmes de glissement dans les matériaux ioniques [1]

### I.2.3.4 Constitution et déformation du béton

Le béton est constitué de granulats, de ciment et d'eau sous forme de pâte qui durcit en fonction du temps. Au début de la prise, les constituants anhydres se dissolvent jusqu'à saturation et réagissent en solution pour former des hydrates qui précipitent en enveloppant les grains anhydres. Les cristaux formés sont des hydrates de silicate de calcium, de l'hydroxyde de chaux et différents aluminates.

Il est difficile de séparer les mécanismes de déformation et de rupture car les microfissures et les cavités initiales qui existent avant toute sollicitation, en se développant par des

mécanismes de rupture fragile, engendrent des déformations permanentes. Ce phénomène est peu important en dessous d'une certaine valeur de sollicitation. La déformation dans cette première phase est le résultat de mouvement quasi-réversible d'atomes et peut être considéré comme élastique avec viscosité faible. La rupture fragile par décohésion pâte-grains étant le phénomène essentiel de déformation permanente et de rupture.

### **I.3 Mécanique des milieux continus**

Le concept de milieu continu est une modélisation physique macroscopique issue de l'expérience courante, dont la pertinence est avérée selon les problèmes abordés et en fonction de l'échelle des phénomènes mis en jeu. Dans la formulation mathématique classique de ce concept, un système mécanique est représenté par un volume constitué, au niveau différentiel, de particules. L'état géométrique de ces particules, de façon semblable à celui d'un point matériel, est caractérisé par la seule connaissance de leur position. La perception intuitive de la continuité se réfère à l'évolution du système : au cours de celle-ci, des particules initialement voisines demeurent voisines [6].

#### **I.3.1 Description du mouvement du milieu continu**

##### **I.3.1.1 Configuration du système**

L'état du système  $S$  à l'instant  $t$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est appelé configuration de ce système (Figure I.8). On désigne de façon générique par  $K_t$  la configuration actuelle. La configuration géométrique de  $S$  est décrite par l'ensemble des positions, repérées dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , de ses particules. Ce repérage se fait au moyen de vecteur de position  $\underline{OM}$ , noté aussi  $\underline{x}$ , qui précise la position de chaque particule de  $S$  à l'instant  $t$  à partir de l'origine  $O$  d'un repère  $R$  dans  $\mathcal{R}$ . On peut définir  $\underline{x}$  par ses coordonnées  $x^i (i = 1,2,3)$  dans  $R$ . Le volume occupé par  $S$  dans cette configuration est  $\Omega_t$  de frontière  $\partial\Omega_t$ . On introduit aussi la configuration de référence : c'est la configuration particulière  $K_{t_0}$  du système à un instant  $t_0$  fixé. Sauf mention explicite du contraire, on posera  $t_0 = 0$ .  $S$  occupe dans  $K_0$  un volume  $\Omega_0$  de frontière  $\partial\Omega_0$ . Les coordonnées des vecteurs-positions  $\underline{OM}_0$  de  $K_0$  dans le repère  $R$  de  $\mathcal{R}$  seront systématiquement notées  $X^i (i = 1, 2, 3)$ . Le vecteur  $\underline{OM}_0$  sera aussi noté  $\underline{X}$ .

Ainsi  $\underline{OM} = \underline{x}$  de coordonnées  $x^i$  dans  $K_t$

$$\underline{OM}_0 = \underline{X} \text{ de coordonnées } X^i \text{ dans } K_0$$

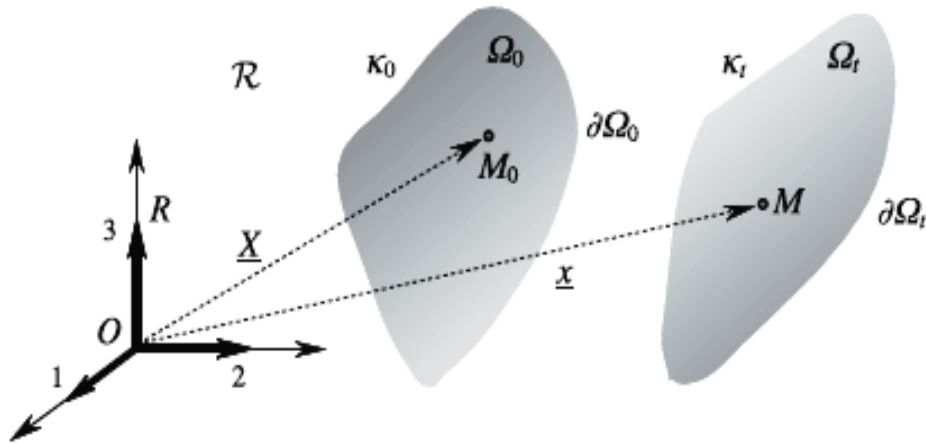


Figure I.8- Configuration du système.

### I.3.1.2 Description lagrangienne

La description lagrangienne consiste à :

- identifier les particules constitutives du système par leur position géométrique dans une configuration de celui-ci prise comme référence et notée  $K_0$ , c'est-à-dire par la variable  $\underline{X}$ .
- exprimer la valeur de toute grandeur physique dans la configuration actuelle en fonction de la particule à laquelle elle est rattachée et de l'instant actuel, c'est-à-dire en fonction des variables  $\underline{X}$  et  $t$ .

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (\text{I.1})$$

et la valeur d'une grandeur physique attachée à cette particule, soit  $\mathcal{B}$  est :

$$\mathcal{B} = B(\underline{X}, t) \quad (\text{I.2})$$

Dans la formule (I.1),  $\underline{\phi}$  est une fonction vectorielle définie sur  $\Omega_0, \forall t$ , et qui vérifie évidemment :

$$\underline{\phi}(\underline{X}, 0) = \underline{X} \quad (\text{I.3})$$

Suivant la nature de la grandeur physique concernée,  $B$  est une fonction scalaire, vectorielle ou tensorielle d'ordre quelconque, qui vérifie la formule homologue de (I.3).



### I.3.1.3 Description eulérienne

La description eulérienne de l'évolution consiste à prendre, à chaque instant, la configuration actuelle comme configuration de référence pour décrire l'évolution infinitésimale entre  $t$  et  $(t + dt)$ . Ainsi pour l'aspect géométrique, la description eulérienne définit le mouvement du système par la donnée, à chaque instant  $t$ , de la vitesse  $\underline{U}_t$  de la particule située au point géométrique  $M$  dans  $K_t$ .

$$\forall t, \forall M \in \underline{\Omega}_t, \quad \underline{U} = \underline{U}_t(\underline{x}, t) \quad (\text{I.4})$$

On retrouve bien encore la donnée d'une fonction vectorielle de 4 variables scalaires, mais à la différence de (I.1), les variables spatiales  $(x^1, x^2, x^3)$  sont relatives à la configuration actuelle et non plus à une configuration de référence : elles n'identifient donc plus les particules au cours du temps. Toute grandeur physique, est définie sur  $K_t$  sous la forme :

$$\forall t, \forall M \in \Omega_t, \quad \mathcal{B} = b(\underline{x}, t) \quad (\text{I.5})$$

### I.3.2 Etude de déformations.

#### I.3.2.1 Transformation homogène tangente.

Le principe sur lequel s'applique cette étude consiste à remplacer localement, en chaque point  $M_0$  dans  $K_0$ , la transformation par une transformation homogène, fonction de  $M_0$ , qui lui soit tangente.

$$x'^i = \left( \frac{\partial \phi^i(\underline{X}, t)}{\partial X^j} X'^j \right) + \left( x^i - \frac{\partial \phi^i(\underline{X}, t)}{\partial X^j} X^j \right) + \left| \underline{M_0 M'_0} \right| 0(M_0, M'_0) \quad (\text{I.6})$$

avec 
$$\lim_{M'_0 \rightarrow M_0} 0(M_0, M'_0) = 0 \quad (\text{I.7})$$

Les deux parenthèses dans ces formules définissent une correspondance affine entre les coordonnées  $X'^j$  et  $x'^i$  d'une particule dans  $K_0$  et  $K_t$ . Cette correspondance est tangente à la correspondance  $\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$  au voisinage de  $M_0$  en raison de (I.7).

$$F_j^i(\underline{X}, t) = \frac{\partial \phi^i(\underline{X}, t)}{\partial X^j} \quad (\text{I.8})$$

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \phi^i(\underline{X}, t)}{\partial X^j} \underline{e}_i \otimes \underline{e}^j \quad (\text{I.9})$$

$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$  apparait comme le gradient du champ de vecteur  $\underline{\phi}(\underline{X}, t)$  à l'instant  $t$  dans  $K_0$ . Il est appelé gradient de la transformation en  $M_0$ .

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla}} \underline{\phi}(\underline{X}, t) \quad (\text{I.10})$$

### I.3.2.2 Déformations

#### *Tenseurs des dilatations*

$$\underline{dM} \cdot \underline{dM}' = \underline{dM}_0 \cdot \underline{C}(\underline{X}, t) \underline{dM}'_0 \quad (\text{I.11})$$

$$\underline{C}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{F}}^t(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \quad (\text{I.12})$$

#### *Tenseur des déformations de Green Lagrange*

$$\underline{e}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{F}}^t(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) - \underline{Id} \right) \quad (\text{I.13})$$

En coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$e_{ij}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_k(\underline{X}, t)}{\partial X_i} \frac{\partial \phi_k(\underline{X}, t)}{\partial X_j} - \delta_{ij} \right) \quad (\text{I.14})$$

En désignant par  $ds_0$  la longueur du vecteur élémentaire  $\underline{dM}_0$  dans la configuration  $K_0$  et par  $ds$  celle de son transporté  $\underline{dM}$ , en application des formules :  $(ds_0 = |\underline{dM}_0|; ds = |\underline{dM}|)$ , on a alors:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 \underline{dM}_0 \cdot \underline{e}(\underline{X}, t) \cdot \underline{dM}_0 \quad (\text{I.15})$$

### I.3.2.3 Déplacement

Il est commode d'introduire dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , le déplacement  $\underline{u}(\underline{X}, t)$  de la particule située en  $M_0$  dans  $K_0$ , entre les configurations  $K_0$  et  $K_t$ . Ce vecteur s'obtient par :

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{M}_0 M = \underline{x} - \underline{X} \quad (\text{I.16})$$

On a ainsi à chaque instant  $t$ , dans  $\mathcal{R}$  et dépendant évidemment du choix de  $\mathcal{R}$ , un champ de vecteurs définis sur  $K_0$ . On a alors, de façon immédiate, en conséquence de (I.16) :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\nabla\phi}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{Id}} + \underline{\underline{\nabla u}}(\underline{X}, t) \quad (\text{I.17})$$

où  $\underline{\underline{\nabla u}}(\underline{X}, t)$  est le gradient du champ de déplacement à l'instant  $t$  en  $\underline{X}$ .

En coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$F_{ij}(\underline{X}, t) = \delta_{ij} + \frac{\partial u(\underline{X}, t)}{\partial X_j} \quad (\text{I.18})$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \quad (\text{I.19})$$

Cette formule met en évidence la non-linéarité de la relation entre le champ de déplacement et le champ de déformation de Green-Lagrange.

### I.3.2.4 Transformation infinitésimale

La transformation du milieu entre les configurations  $K_0$  et  $K_t$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  est dite infinitésimale si elle est telle que :

$$\|\underline{\underline{\nabla u}}(\underline{X}, t)\| \ll 1 \quad \forall M_0 \in \Omega_0 \quad (\text{I.20})$$

#### *Tenseur des déformations linéarisé*

Dans cette hypothèse (I.20), le tenseur des déformations de Green-Lagrange se réduit au premier ordre (11), au tenseur des déformations linéarisé  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X}, t)$ .

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\nabla u}}(\underline{X}, t) + \underline{\underline{\nabla^t u}}(\underline{X}, t) \right) \quad (\text{I.21})$$

Celui-ci apparait comme la partie symétrique du gradient du déplacement. Ses composantes s'écrivent, dans le cas des coordonnées cartésiennes orthonormées :

$$\varepsilon_{ij}(\underline{X}, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i(\underline{X}, t)}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j(\underline{X}, t)}{\partial X_i} \right) \quad (\text{I.22})$$

**I.3.3 Etude des contraintes**

**I.3.3.1 Vecteur-contrainte et tenseur des contraintes.**

La formule essentielle liant le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  au vecteur-contrainte  $\underline{T(n)}$  sur la facette de normale sortante  $\underline{n}$  s'exprime par :

$$\underline{T(n)} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \tag{I.23}$$

La force élémentaire  $\underline{df}$  s'exerce sur une surface  $da$  de normale  $\underline{n}$ , (Figure I.9).

$$\underline{df} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} da = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{da} \tag{I.24}$$



Figure I.9- Vecteur contrainte et force élémentaire.

Pour les composantes dans une base orthonormée, la formule (I.23) conduit au résultat :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \tag{I.25}$$

La composante  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes de Cauchy représente la composante selon la direction  $\underline{e}_i$  du vecteur contrainte sur la facette de normale  $\underline{e}_j$ .

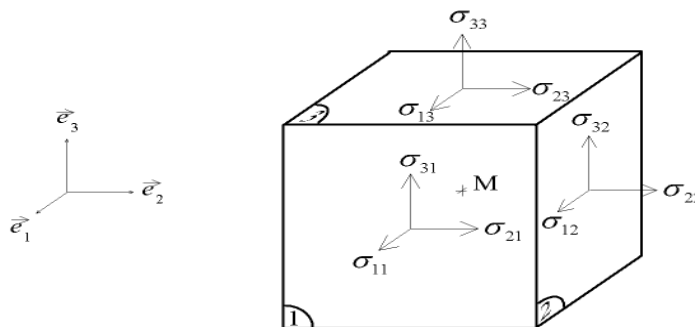


Figure I.10- Composantes de  $\underline{\underline{\sigma}}$  en base orthonormée

**I.3.3.2 Contraintes normales et contraintes tangentielles**

On définit de façon naturelle la contrainte normale sur une facette comme la composante de  $\underline{T}(\underline{n})$  selon la direction de la normale  $\underline{n}$  soit :

$$\underline{T}(\underline{n}) \cdot \underline{n} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \quad (\text{I.26})$$

En choisissant le terme  $\sigma$  comme terme générique de la contrainte normale, on écrira alors :

$$\sigma = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} \quad (\text{I.27})$$

Où en base orthonormée

$$\sigma = \sigma_{ij} n_i n_j \quad (\text{I.28})$$

On définit la contrainte tangentielle  $\underline{\tau}$  comme la composante vectorielle de  $\underline{T}(\underline{n})$  dans le plan de la facette de sorte que :

$$\underline{T}(\underline{n}) = \sigma \underline{n} + \underline{\tau} \quad (\text{I.29})$$

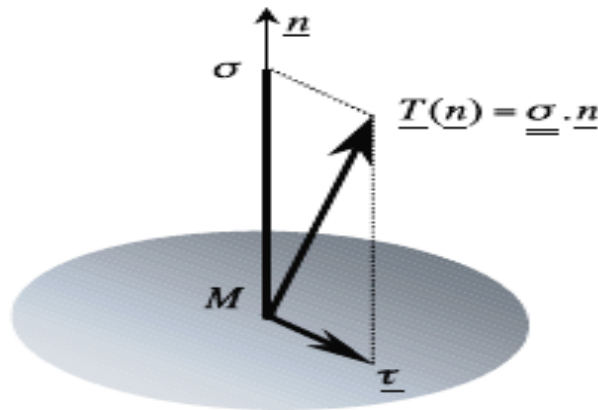


Figure I.11- Contrainte normale et contrainte tangentielle

La contrainte tangentielle est appelée également contrainte de cisaillement (ou de cission). Dans le cas général, elle est mesurée par son module.

$$|\underline{\tau}| = ((\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})^2 - (\underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n})^2)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{I.30})$$

### I.3.3.3 Contraintes principales

Les directions principales de  $\underline{\underline{\sigma}}$ , tenseur symétriques euclidien réel, sont les directions propres de l'application linéaire associée à  $\underline{\underline{\sigma}}$ . Elles sont orthogonales entre elles. Les valeurs principales de  $\underline{\underline{\sigma}}$  sont appelées contraintes principales et notées  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Dans une base orthonormée dirigée selon les directions principales des contraintes de Cauchy, la matrice  $\underline{\underline{\tilde{\sigma}}}$  est diagonale et  $\underline{\underline{\sigma}}$  s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_1 \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2 \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_3 \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (\text{I.31})$$

### I.3.4 Modélisation des efforts et puissances virtuelles.

#### I.3.4.1 Puissance virtuelle des efforts.

On fait l'hypothèse ici que les efforts extérieurs agissant sur un système  $S$  à chaque instant sont de deux types :

- Des forces de volumes définies par une densité massique  $\underline{F}(\underline{x}, t)$ . Sur l'élément du volume  $d\Omega_t$  en  $M$ , la force de volume élémentaire est donc:

$$\underline{F}(\underline{x}, t) dm = \rho(\underline{x}, t) \underline{F}(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad (\text{I.32})$$

- Des forces de surfaces exercées au contour  $\partial\Omega_t$  de  $S$ , définies en chaque point de  $d\Omega_t$  par une densité surfacique  $\underline{T}_\Omega(\underline{x}, t)$ . La force de surface élémentaire agissant sur l'élément de surface  $da$  de  $d\Omega_t$  est :

$$\underline{df}_\Omega = \underline{T}_\Omega(\underline{x}, t) da \quad (\text{I.33})$$

En désignant par  $(\underline{\hat{U}})$  le champ des vitesses virtuelles, la puissance virtuelle des efforts extérieurs et celle des efforts intérieures s'écrivent respectivement :

$$\mathcal{P}_{(e)}(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{F}(\underline{x}, t) \cdot \underline{\hat{U}}(\underline{x}) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}_\Omega(\underline{x}, t) \cdot \underline{\hat{U}}(\underline{x}) da \quad (\text{I.34})$$

$$\mathcal{P}_{(i)}(\underline{\hat{U}}) = \int_{\Omega_t} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{grad}} \underline{\hat{U}}(\underline{x}) d\Omega_t \quad (\text{I.35})$$

### I.3.4.2 Puissance virtuelle des quantités d'accélération

La quantité d'accélération d'un élément  $dm = \rho(\underline{x}, t)d\Omega_t$  est :

$$\underline{a}(\underline{x}, t)dm = \rho(\underline{x}, t)\underline{a}(\underline{x}, t)d\Omega_t \quad (\text{I.36})$$

La puissance virtuelle des quantités d'accélération est :

$$\mathcal{A}(\underline{U}) = \int_{\Omega_t} \underline{a}(\underline{x}, t)\underline{U}(\underline{x})dm = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\underline{a}(\underline{x}, t)\underline{U}(\underline{x})d\Omega_t \quad (\text{I.37})$$

### I.3.4.3 Principe des puissances virtuelles

Ce principe stipule que la puissance virtuelle des quantités d'accélération d'un système est égale à la puissance de toutes les forces appliquées au système, tant intérieures qu'extérieures, quel que soit le mouvement virtuel du système considéré.

#### *Equation de la dynamique*

$$\mathcal{P}_{(e)}(\underline{U}) + \mathcal{P}_{(i)}(\underline{U}) = \mathcal{A}(\underline{U}) \quad (\text{I.38})$$

$$\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\underline{F}(\underline{x}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x})d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}_\Omega(\underline{x}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x})da \quad (\text{I.39})$$

$$+ \int_{\Omega_t} -\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{grad}}\underline{U}(\underline{x})d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\underline{a}(\underline{x}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x})d\Omega_t$$

Le champ  $\underline{\underline{\sigma}}$  étant supposé continu, et continument différentiable, on a :

$$-\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{grad}}\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}(\underline{x})div^t\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) - div\left(\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)\underline{U}(\underline{x})\right) \quad (\text{I.40})$$

Par application du théorème de la divergence :

$$\int_{\Omega_t} \left( div^t\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) + \rho(\underline{x}, t)\left(\underline{F}(\underline{x}, t) - \underline{a}(\underline{x}, t)\right) \right) \cdot \underline{U}(\underline{x})d\Omega_t \quad (\text{I.41})$$

$$+ \int_{\partial\Omega_t} \underline{T}_\Omega(\underline{x}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x})da - n(x)\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x})da = 0$$

et compte tenu de la symétrie de  $\underline{\underline{\sigma}}$

$$\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) + \rho(\underline{x}, t) \left( \underline{F}(\underline{x}, t) - \underline{a}(\underline{x}, t) \right) = 0 \quad (\text{I.42})$$

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}_\Omega(\underline{x}, t) \quad (\text{I.43})$$

Dans le cas de la statique,  $\underline{a}(\underline{x}, t) = 0$

$$\operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) + \rho(\underline{x}, t) \underline{F}(\underline{x}, t) = 0 \quad (\text{I.44})$$

## I.4 Thermodynamique des milieux continus

### I.4.1 Description des échanges

Le système étudié  $S$  occupe, dans la configuration actuelle  $K_t$ , le domaine  $D$  de volume  $\Omega_t$  et de frontière  $\partial\Omega_t$ , transportés convectivement de  $D_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $\partial\Omega_0$  dans la configuration de référence  $K_0$ . Les sous-systèmes  $S'$  sont définis de façon semblable. Le système  $S$  n'échange avec l'extérieur que de la chaleur et du travail. Il en va de même pour un sous-système  $S'$  quelconque et l'extérieur de  $S'$ . La puissance des efforts extérieurs dans le mouvement réel exprime le taux de travail reçu de l'extérieur par  $S$  ou  $S'$ .

$$\mathcal{P}'_{(e)}(\underline{U}) = \int_{\Omega'_t} \rho F(\underline{x}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x}, t) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}_{\Omega'}(\underline{x}, t) \cdot \underline{U}(\underline{x}, t) da \quad (\text{I.45})$$

Le taux de chaleur reçu par  $S'$  résulte de l'addition de deux contributions : l'une est volumique qui exprime le taux de chaleur fournie à distance ; elle se met sous la forme de l'intégrale sur  $\Omega'_t$  d'une densité volumique  $r(\underline{x}, t)$ . L'autre surfacique qui est l'intégrale sur  $\Omega'_t$  d'une densité surfacique  $h_{\Omega'}(\underline{x}, t)$  qui exprime les échanges de chaleur entre les particules sur  $\partial\Omega'_t$  et les particules de  $(S - S')$ .

$$Q' = \int_{\Omega'_t} r(\underline{x}, t) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} h(\underline{x}, t, \underline{n}(\underline{x})) da \quad (\text{I.46})$$

### I.4.2 Premier principe

Le premier principe de la thermodynamique postule l'existence d'une fonction de l'état thermodynamique du système, appelée énergie interne, notée  $E$  ayant la dimension d'un



## I. Etude bibliographique

travail telle que, à chaque instant, la somme de la dérivée particulière de l'énergie interne  $E$  de  $S$  et de la dérivée particulière de l'énergie cinétique  $K$  de  $S$ , est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs exercés sur le système,  $\mathcal{P}_{(e)}(\underline{U})$ , et du taux de chaleur reçue par le système,  $Q$ . Le même énoncé est valable pour tout sous-système  $S'$ .

$$\dot{E}' + \dot{K}' = \mathcal{P}'_{(e)}(\underline{U}) + Q' \quad (\text{I.47})$$

$$K' = \frac{1}{2} \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x}, t) \underline{U}^2(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad (\text{I.48})$$

$$E' = \int_{\Omega'_t} \rho(\underline{x}, t) e(\underline{x}, t) d\Omega_t \quad (\text{I.49})$$

où  $e(\underline{x}, t)$  est la densité massique de l'énergie interne.

En simplifiant les notations :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega'_t} \rho \left( e + \frac{\underline{U}^2}{2} \right) d\Omega_t = \int_{\Omega'_t} \rho (\underline{F} \cdot \underline{U} + r) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} \underline{T}_{\Omega'} \cdot \underline{U} + h(n) da \quad (\text{I.50})$$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique :

$$\mathcal{P}'_{(e)}(\underline{U}) + \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}) = \dot{K}' \quad (\text{I.51})$$

On obtient :

$$\dot{E}' = Q' - \mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U}) \quad (\text{I.52})$$

En remplaçant  $\mathcal{P}'_{(i)}(\underline{U})$  par son expression au moyen de la représentation des efforts intérieurs par les contraintes de Cauchy ; on peut écrire :

$$\int_{\Omega'_t} \rho \dot{e} d\Omega_t = \int_{\Omega'_t} (\underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}} + r) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega'_t} h(n) da \quad (\text{I.53})$$

$$h(\underline{n}) = -\underline{q} \cdot \underline{n}$$

Le vecteur  $\underline{q}$  exprime le courant de chaleur sortant.

En appliquant le théorème de la divergence, l'énoncé du premier principe devient alors :

$$\int_{\Omega'_t} \rho \dot{e} d\Omega_t = \int_{\Omega'_t} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + r - \text{div} \underline{q}) d\Omega_t \quad (\text{I.54})$$

$$\rho \dot{e} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + r - \text{div} \underline{q} \quad (\text{I.55})$$

### I.4.3 Deuxième principe

Le deuxième principe de la thermodynamique postule l'existence d'une variable d'état appelée température absolue, notée  $T$ , positive, et d'une fonction de l'état thermodynamique du système, appelée entropie, additive notée  $S$ , tels que :

pour toute évolution réelle thermodynamique réversible de l'élément de matière,  $\frac{1}{T(\underline{x},t)}$  est le facteur intégrant du taux de chaleur reçue, en sorte que pour  $S$ , et pour tout sous-système  $S'$ .

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S} = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t) \dot{s}(\underline{x},t) d\Omega_t = \int_{\Omega'_t} \frac{r(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)} d\Omega_t - \int_{\partial\Omega'_t} \frac{q(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)} \cdot \underline{n}(\underline{x},t) da \quad (\text{I.56})$$

En désignant par  $s$  l'entropie massique, pour toute évolution réelle :

$$\frac{dS}{dt} = \dot{S} = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x},t) \dot{s}(\underline{x},t) d\Omega_t \geq \int_{\Omega'_t} \frac{r(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)} d\Omega_t - \int_{\partial\Omega'_t} \frac{q(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)} \cdot \underline{n}(\underline{x},t) da \quad (\text{I.57})$$

On en déduit l'expression locale du deuxième principe, appelée inégalité fondamentale.

$$\rho \dot{s} + \text{div} \left( \frac{q}{T} \right) - \left( \frac{r}{T} \right) \geq 0 \quad (\text{I.58})$$

En tenant compte de l'équation du premier principe, on obtient :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} + \rho(T\dot{s} - \dot{e}) - \frac{q}{T} \underline{\underline{grad}} T \geq 0 \quad (\text{I.59})$$

Cette inégalité peut être transformée en introduisant la fonction thermodynamique, appelée énergie libre (de Helmholtz) ; l'énergie libre massique  $\psi$  est définie par :

$$\psi = e - Ts \quad (\text{I.60})$$

On obtient l'inégalité dite de Clausius-Duhem :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}} - \rho(\dot{\psi} + s\dot{T}) - \frac{q}{T} \underline{\underline{grad}}T \geq 0 \quad (\text{I.61})$$

Le premier membre de l'inégalité de Clausius-Duhem est souvent noté  $\Phi$ , c'est la dissipation volumique dans la configuration actuelle. Le deuxième principe de la thermodynamique exprime que la dissipation est toujours positive et n'est nulle que pour une évolution réelle thermodynamiquement réversible.

#### **I.4.4 Principe de l'état local**

La méthode de l'état local postule que l'état thermomécanique d'un milieu matériel en un point et à un instant donnés est complètement défini par la connaissance des valeurs, à cet instant, d'un certain nombre de variables ne dépendant que du point considéré. Les dérivées temporelles de ces variables n'intervenant pas pour définir l'état, cette hypothèse implique que toute évolution puisse être considérée comme une succession d'états d'équilibre. C'est par le choix de la nature et du nombre des variables d'état que l'on décrit plus ou moins finement les phénomènes physiques [2].

##### **I.4.4.1 Variables observables et variables internes**

Un certain nombre de variables d'état sont imposés par le formalisme de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus ; ce sont les variables observables : la température  $T$  et la déformation totale  $\varepsilon$ . Pour les phénomènes dissipatifs, l'état actuel dépend aussi de l'histoire passée représentée par les valeurs à chaque instant d'autres variables appelés variables internes. En petites déformations, la déformation plastique ou viscoplastique notée  $\varepsilon_p$  est la déformation permanente associée à la configuration relâchée. Elle résulte de la déformation totale par décharge élastique conduisant à la partition des déformations.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (\text{I.62})$$

Deux variables internes, liées par cette équation de partition, sont ainsi définies : la déformation thermo-élastique  $\varepsilon_e$  et la déformation plastique  $\varepsilon_p$ . Les autres phénomènes tels que l'écroutissement, l'endommagement, la rupture, nécessitent l'introduction d'autres variables internes de nature plus cachée. On les désigne par  $V_k$ .

**I.4.4.2 Potentiel thermodynamique, lois d'état**

On postule l'existence d'un potentiel thermodynamique qui dépend des variables d'état :

$$\psi = \psi(\varepsilon, T, \varepsilon_e, \varepsilon_p, V_k) \quad (\text{I.63})$$

En plasticité ou viscoplasticité, les déformations interviennent sous la forme de leur partition:

$$\psi = \psi(\varepsilon_e, T, V_k) = \psi\left((\varepsilon - \varepsilon_p), T, V_k\right) \quad (\text{I.64})$$

Ce qui montre que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_p} \quad (\text{I.65})$$

En utilisant l'inégalité de Clausius Duhem avec :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} : \dot{\varepsilon}_e + \frac{\partial \psi}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k \quad (\text{I.66})$$

on obtient :

$$\left(\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e}\right) : \dot{\varepsilon}_e + \sigma : \varepsilon_p - \rho \left(s + \frac{\partial \psi}{\partial T}\right) \dot{T} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \dot{V}_k - \frac{q}{T} \underline{\underline{grad T}} \geq 0 \quad (\text{I.67})$$

On peut imaginer une transformation élastique à température constante ( $\dot{T} = 0$ ) et uniforme ( $\underline{\underline{grad T}} = 0$ ) qui ne modifie ni la déformation plastique ( $\dot{\varepsilon}_p = 0$ ) ni les autres variables internes ( $\dot{V}_k = 0$ ). L'inégalité de Clausius-Duhem devant être vérifiée quel que soit  $\dot{\varepsilon}_e$  :

$$\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} = 0 \quad (\text{I.68})$$

Cette égalité étant vérifiée, on peut imaginer une transformation thermique de dilatation telle que ( $\dot{\varepsilon}_p = 0, V_k = 0, \underline{\underline{grad T}} = 0$ ) qui impose à l'inégalité de n'être vérifiée que si :

$$s + \frac{\partial \psi}{\partial T} = 0 \quad (\text{I.69})$$

Notons que

$$\sigma = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_e} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_p} \quad (\text{I.70})$$

Ce qui montre que la contrainte est la variable associée à la déformation élastique, à la déformation totale et à la déformation plastique. On définit par analogie les variables forces thermodynamiques avec les variables internes par :

$$A_k = \rho \frac{\partial \psi}{\partial V_k} \quad (\text{I.71})$$

Les variables associées forment un ensemble de variables normales en dualité avec les variables d'état observables et internes. Le Tableau I.1 résume l'ensemble de ces variables :

Variables d'état		Variables associées
Observables	Internes	
$\varepsilon$		$\sigma$
$T$		$s$
	$\varepsilon_e$	$\sigma$
	$\varepsilon_p$	$\sigma$
	$V_k$	$A_k$

Tableau I.1- Variables thermodynamiques [2]

#### I.4.4.3 Dissipation, lois complémentaires

Compte tenu des lois d'état, l'inégalité de Clausius-Duhem se réduit à l'expression de la dissipation qui doit être positive :

$$\Phi = \sigma : \dot{\varepsilon}_p - A_k \dot{V}_k - \frac{q}{T} \underline{\text{grad}T} \geq 0 \quad (\text{I.72})$$

$$\Phi_1 = \sigma : \dot{\varepsilon}_p - A_k \dot{V}_k ; \quad \Phi_2 = -\frac{q}{T} \underline{\text{grad}T} \quad (\text{I.73})$$

$\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont respectivement la dissipation intrinsèque et la dissipation thermique par conduction.

On stipule l'existence d'un potentiel de dissipation :

$$\varphi = \varphi \left( \dot{\varepsilon}_p, \dot{V}_k, \frac{q}{T} \right) \quad (I.74)$$

Les lois complémentaires s'expriment par la propriété de normalité (ou dissipativité normale)

$$\sigma = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}_p} ; A_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}_k} ; \underline{gradT} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \frac{q}{T}} \quad (I.75)$$

Les lois complémentaires s'expriment sous forme de lois d'évolution des variables flux en fonction des variables duales. La transformée de Legendre-Fenchel permet de définir le potentiel correspondant  $\varphi^* \left( \sigma, A_k, \underline{gradT} \right)$ , dual de  $\varphi$  par rapport aux variables  $\left( \dot{\varepsilon}_p, \dot{V}_k, \frac{q}{T} \right)$ .

$$\varphi^* \left( \sigma, A_k, \underline{gradT} \right) = \text{Sup} \left( \left( \sigma : \dot{\varepsilon}_p - A_k \dot{V}_k - \frac{q}{T} \underline{gradT} \right) - \varphi \left( \dot{\varepsilon}_p, \dot{V}_k, \frac{q}{T} \right) \right) \quad (I.76)$$

On démontre que si la fonction  $\varphi^*$  est dérivable, la propriété de normalité est conservée pour les variables  $\dot{\varepsilon}_p, -\dot{V}_k, -\frac{q}{T}$ . Les lois complémentaires d'évolution s'écrivent alors :

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma} ; -\dot{V}_k = \frac{\partial \varphi^*}{\partial A_k} ; -\frac{q}{T} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial (\underline{gradT})} \quad (I.77)$$

## I.5 Les grandes classes de comportement mécanique

L'allure qualitative de la réponse des matériaux à quelques essais simples permet de les ranger dans des classes bien définies. Ces comportements "de base", qui peuvent être représentés par des systèmes mécaniques élémentaires, sont l'élasticité, la plasticité et la viscosité [7].

### I.5.1 Briques de base des lois de comportement

1. Le ressort, qui symbolise l'élasticité linéaire parfaite, pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge, et où il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge et de déformation (Figure I.12.a).

2. L'amortisseur, qui schématise la viscosité, linéaire (Figure I.12.b) ou non linéaire (Figure I.12.c). La viscosité est dite pure s'il existe une relation biunivoque entre la charge et

la vitesse de chargement. Si cette relation est linéaire, le modèle correspond à la loi de Newton.

3. Le patin, qui modélise l'apparition de déformations permanentes lorsque la charge est suffisante (Figure I.12.d). Si le seuil d'apparition de la déformation permanente n'évolue pas avec le chargement, le comportement est dit plastique parfait. Si, de plus, la déformation avant écoulement est négligée, le modèle est rigide-parfaitement plastique.

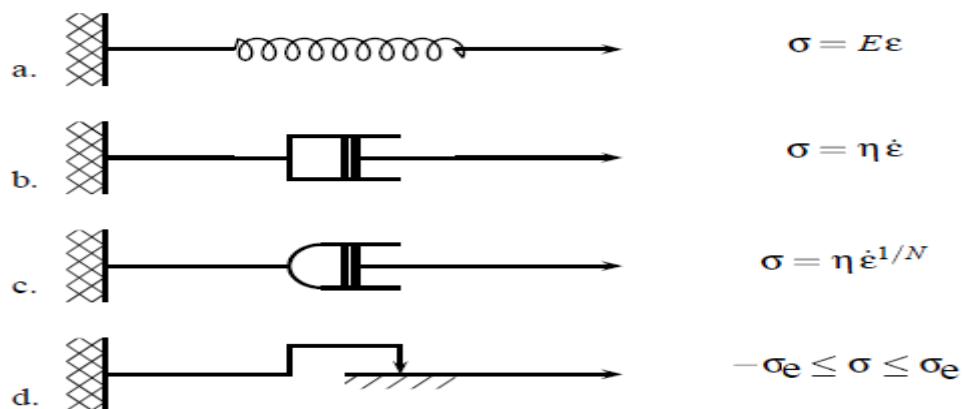


Figure I.12- Schématisation des briques de bases des lois de comportement

Ces éléments peuvent être combinés entre eux pour former des modèles rhéologiques. Ceux-ci représentent des systèmes mécaniques qui servent de support dans la définition des modèles. Il ne faut en aucun cas leur accorder un trop grand crédit pour ce qui concerne la représentation des phénomènes physiques qui sont à la base des déformations. Ils sont néanmoins brièvement présentés ici, car ils permettent de comprendre la nature des relations à introduire pour chaque type de comportement, en pratiquant par exemple l'exercice qui consiste à combiner deux à deux les modèles élémentaires. C'est aussi l'occasion d'introduire l'ensemble du vocabulaire qui sera utile dans le cas général des chargements tridimensionnels. En fonction du type de chargement imposé, la réponse de ces systèmes peut être jugée dans 3 plans différents :

- plan déformation–contrainte,  $\varepsilon - \sigma$ , pour l'essai de traction simple, ou d'écroutissage, augmentation monotone de la charge ou de la déformation ;
- plan temps–déformation,  $t - \varepsilon$ , pour l'essai de fluage, sous charge constante ;
- plan temps–contrainte,  $t - \sigma$ , pour l'essais de relaxation, sous déformation constante.

**I.5.2 Viscoélasticité uniaxiale****I.5.2.1 Modèle de Maxwell**

Le modèle de Maxwell regroupe un amortisseur et un ressort en série (Figure I.13.a).

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E_0 + \sigma/\eta \quad (\text{I.78})$$

**I.5.2.2 Modèle de Kelvin-Voigt**

Le modèle de Voigt regroupe un amortisseur et un ressort en parallèle (Figure I.13.b).

$$\sigma = H\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (\text{I.79})$$

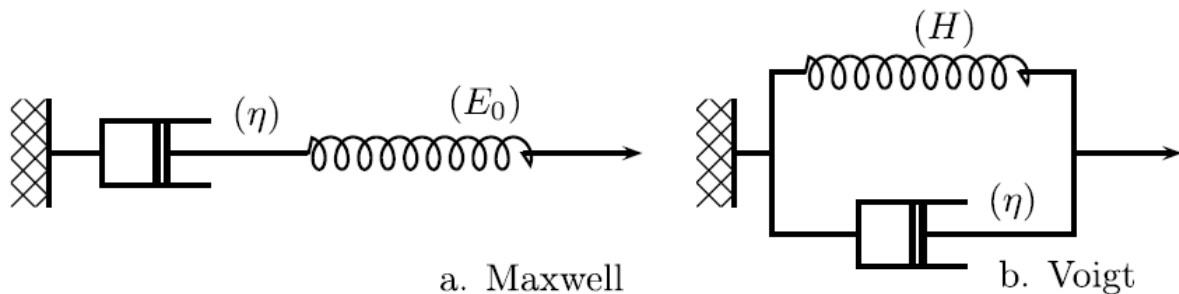


Figure I.13- Modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt

La particularité du modèle de Voigt est de ne pas présenter d'élasticité instantanée. Ceci entraîne que sa fonction de relaxation n'est pas continue et dérivable par morceaux, avec un saut fini à l'origine. L'application d'un saut de déformation en  $t = 0$  produit une contrainte infinie. Ce modèle n'est donc pas utilisable en relaxation, sauf si la mise en charge est progressive, et sera pour cette raison associé à un ressort en série pour effectuer des calculs de structure (voir I.5.2.3). Sous l'effet d'une contrainte  $\sigma_0$  constante en fonction du temps, la déformation tend vers la valeur asymptotique  $\sigma_0/H$ , le fluage est donc limité (Figure I.14.a). Par ailleurs, si, après une mise en charge lente, la déformation est fixée à une valeur  $\varepsilon_0$ , la contrainte asymptotique sera  $H\varepsilon_0$ . Il n'y a donc pas dans ce dernier cas disparition complète de la contrainte. Au contraire, dans le cas du modèle de Maxwell, la vitesse de fluage est constante (Figure I.14.a), et la disparition de contrainte au cours d'une expérience de relaxation est totale (Figure I.14.b).



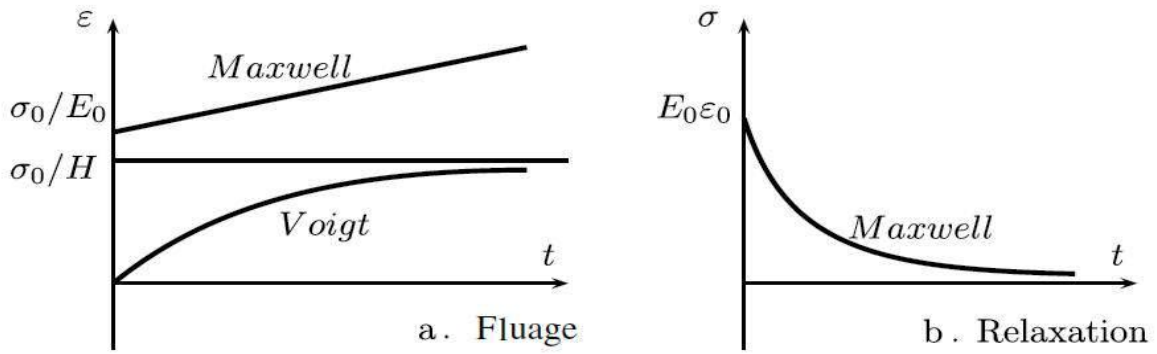


Figure I.14- Courbes de fluage et de relaxation

Dans le cas de modèles et de chargement aussi simples, la réponse est obtenue instantanément par intégration directe des équations différentielles. Pour le modèle de Maxwell :

$$\text{fluage sous une contrainte } \sigma_0: \quad \varepsilon = \sigma_0/E_0 + \sigma_0 t/\eta \quad (\text{I.80})$$

$$\text{relaxation à la déformation } \varepsilon_0: \quad \sigma = E_0 \varepsilon_0 \exp(-t/\tau) \quad (\text{I.81})$$

Pour le modèle de Voigt :

$$\text{fluage sous une contrainte } \sigma_0: \quad \varepsilon = (\sigma_0/H)(1 - \exp(-t/\hat{\tau})) \quad (\text{I.82})$$

Les constantes  $\tau = \eta/E_0$  et  $\hat{\tau} = \eta/H$  sont homogènes à un temps  $\tau$  désignant le temps de relaxation du modèle de Maxwell.

### I.5.2.3 Solide de Kelvin Voigt à élasticité instantané

Ce modèle est composé d'un ressort et du modèle de Kelvin Voigt montés en série (Figure I.15.a). Il présente respectivement les réponses suivantes, pour  $t > 0$ , en fluage sous une contrainte  $\sigma_0$ , en posant  $\tau_f = \eta/H$ , et en relaxation pour une déformation  $\varepsilon_0$ , en posant  $\tau_r = \eta/(H + E_0)$ .

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \left( \frac{1}{E_0} + \frac{1}{H} (1 - \exp(-t/\tau_f)) \right) \quad (\text{I.83})$$

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon_0 \left( \frac{H}{H + E_0} + \frac{E_0}{H + E_0} \exp(-t/\tau_r) \right) \quad (\text{I.84})$$

Le temps caractéristique en relaxation,  $\tau_r$ , est plus court que le temps correspondant en fluage  $\tau_f$ . Le matériau évolue donc plus vite vers son état asymptotique en relaxation qu'en fluage.

### I.5.2.4 Modèle de Zener

Le modèle est représenté sur la Figure I.15.b. Il est constitué d'un ressort et du modèle de Maxwell montés en parallèle. On obtient ainsi sa fonction de relaxation :

$$\varepsilon(t) = \sigma_0(E_1 + E_2 \exp(-t/\tau)) \quad (I.85)$$

où  $\tau = \eta/E_2$

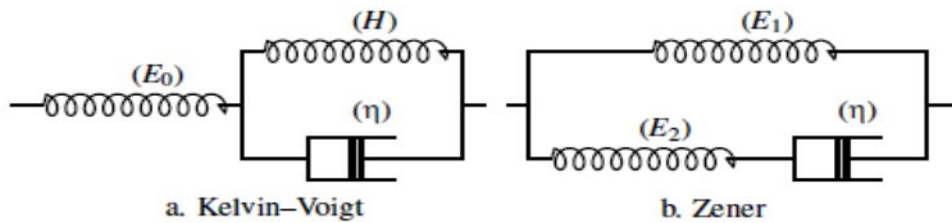


Figure I.15- Modèles composés de Kelvin-Voigt et de Zener

Le modèle de Zener peut se ramener au modèle de Kelvin-Voigt, à l'aide du double changement de variable  $1/E_1 = 1/E_0 + 1/H$ , et  $E_2 = E_0 + H$ , ce qui prouve que les deux modèles sont en fait identiques. La même observation peut être faite en fluage. Ce modèle correspond au comportement du béton frais.

## I.5.3 Plasticité uniaxiale

### I.5.3.1 Modèle élastique-parfaitement plastique

L'association d'un ressort et d'un patin en série (Figure I.16.a) produit un comportement élastique parfaitement plastique, modélisé en Figure I.16.b. Le système ne peut pas supporter une contrainte dont la valeur absolue est plus grande que  $\sigma_e$ . Pour caractériser ce modèle, il faut considérer une fonction de charge  $f$  dépendant de la seule variable  $\sigma$ , et définie par :

$$f(\sigma) = \sigma - \sigma_e \quad (I.86)$$

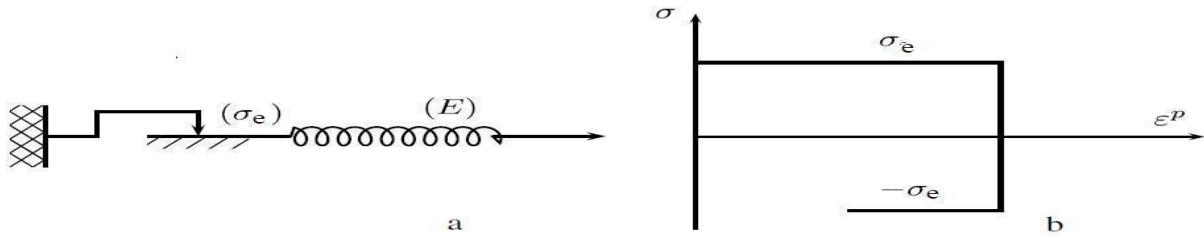


Figure I.16- Modèle élastique parfaitement plastique

Le domaine d'élasticité correspond aux valeurs négatives de  $f$ , et le comportement du système se résume alors aux équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{domaine d'élasticité si :} & f < 0 & \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e = \dot{\sigma}/E \\ \text{décharge élastique si :} & f = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 & \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e = \dot{\sigma}/E \\ \text{écoulement plastique si :} & f = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 & \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_p \end{array} \right. \quad (\text{I.87})$$

En régime élastique, la vitesse de déformation plastique est bien entendu nulle, la vitesse de déformation élastique devenant à son tour nulle pendant l'écoulement plastique. Ceci implique que l'expression de la vitesse de déformation plastique ne peut pas se faire à l'aide de la contrainte. C'est au contraire la vitesse de déformation qui doit être choisie comme pilote. Le modèle est sans écrouissage, puisque le niveau de contrainte ne varie plus au sortir du domaine d'élasticité. Il n'y a pas d'énergie stockée au cours de la déformation, et la dissipation en chaleur est égale à la puissance plastique. Le modèle est susceptible d'atteindre des déformations infinies sous charge constante, conduisant à la ruine du système par déformation excessive.

### I.5.3.2 Modèle de Prager

L'association en parallèle de la Figure I.17.a correspond au comportement illustré en Figure I.17.b. Dans ce cas, le modèle présente de l'écrouissage. Il est dit cinématique linéaire, car dépendant linéairement de la valeur actuelle de la déformation plastique. Sous cette forme, le modèle est rigide-plastique. Il devient élastoplastique si l'on rajoute un ressort en série. La forme de la courbe dans le plan  $\sigma - \dot{\varepsilon}_p$  est due au fait que, lors de l'écoulement plastique, la contrainte qui s'établit dans le ressort vaut  $X = H\varepsilon_p$ . Par ailleurs, cet écoulement ne se produit que si la valeur absolue de la contrainte dans le patin, soit  $|\sigma - H\varepsilon_p|$ , est égale à  $\sigma_e$ . Pour une déformation donnée, cette contrainte  $X$  est une contrainte interne qui caractérise le nouvel état neutre du matériau.

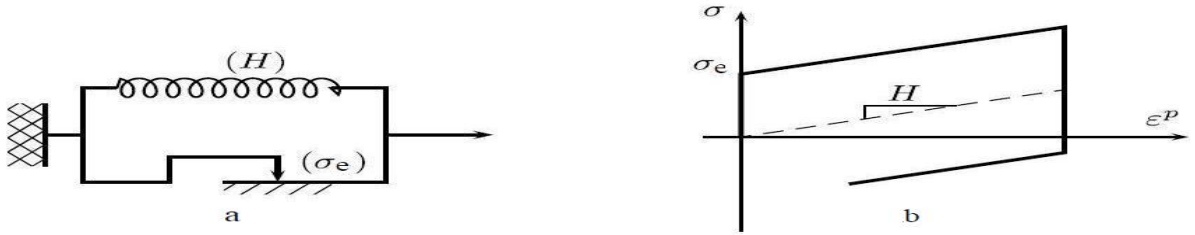


Figure I.17- Modèle de Prager

Ce deuxième exemple offre l'occasion d'écrire un modèle plus complet que précédemment. La fonction de charge dépend maintenant de la contrainte due aux efforts appliqués et de la contrainte interne. Elle s'écrit :

$$f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_e \quad (\text{I.88})$$

Il n'y aura présence d'écoulement plastique que si on vérifie à la fois  $f = 0$  et  $\dot{f} = 0$ . Ceci conduit à la condition suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} - \frac{\partial f}{\partial X} \dot{X} = 0 \quad (\text{I.89})$$

d'où :

$$\text{signe}(\sigma - X) \dot{\sigma} + \text{signe}(\sigma - X) \dot{X} = 0 \quad (\text{I.90})$$

$\dot{\sigma} = \dot{X}$ , et finalement :  $\dot{\epsilon}_p = \dot{\sigma}/H$

Dans ce cas, la contrainte augmente au cours de l'écoulement plastique, si bien qu'elle peut servir de variable de contrôle. Mais il est aussi toujours possible d'exprimer la vitesse d'écoulement plastique en fonction de la vitesse de déformation totale, en utilisant la décomposition de la déformation combinée avec l'expression de la vitesse de déformation plastique, le cas où  $H = 0$  redonnant bien entendu le cas du matériau parfaitement plastique :

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{E}{E + H} \dot{\epsilon} \quad (\text{I.91})$$

Il est remarquable de noter que le calcul de l'énergie dissipée au cours d'un cycle produit exactement le même résultat que pour le premier montage, ce qui indique que, pour ce type de comportement, une partie de l'énergie est temporairement stockée dans le matériau (ici, dans

le ressort), et entièrement restituée à la décharge. Ceci donne une illustration physique de la notion d'écrouissage renversable, alors que d'autres règles d'écrouissage cinématique, non linéaire, sont accompagnées d'une dissipation d'énergie.

### I.5.3.3 Écriture générale des équations de l'élastoplasticité uniaxiale

Dans le cas général, les conditions de «charge-décharge» s'expriment donc :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{domaine d'élasticité si :} & f(\sigma, A_i) < 0 & \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e = \dot{\sigma}/E \\ \text{décharge élastique si :} & f(\sigma, A_i) = 0 \text{ et } \dot{f} < 0 & \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e = \dot{\sigma}/E \\ \text{écoulement plastique si :} & f(\sigma, A_i) = 0 \text{ et } \dot{f} = 0 & \dot{\varepsilon} = \dot{\sigma}/E + \dot{\varepsilon}_p \end{array} \right. \quad (\text{I.92})$$

Dans le cas général, le module  $H$  dépend de la déformation et/ou des variables d'écrouissage. La valeur du module plastique au point  $(\sigma, A_i)$  s'obtient en écrivant que le point représentatif du chargement reste sur la limite du domaine d'élasticité au cours de l'écoulement. L'équation qui en découle s'appelle la condition de cohérence :

$$f(\sigma, A_i) = 0 \quad (\text{I.93})$$

Ce formalisme peut paraître un peu lourd dans le cadre d'un chargement uniaxial, mais il est utile de le mettre en place, car ce sont les mêmes outils qui seront utilisés dans le cas plus complexe des chargements multiaxiaux. Dans les deux exemples qui ont été décrits, le domaine d'élasticité est soit fixe, soit mobile, sa taille étant conservée. Le premier cas ne nécessite bien entendu aucune variable d'écrouissage, le second fait intervenir une variable  $X$  qui dépend de la valeur actuelle de la déformation plastique. Cette variable deviendra tensorielle dans le cas général. Comme indiqué plus haut le type d'écrouissage correspondant s'appelle écoulement cinématique (Figure I.18.b).

### I.5.3.4 Modèle de Taylor

Une autre évolution élémentaire que peut subir le domaine d'élasticité est l'expansion. Cet autre cas (Figure I.18.a) correspond à un matériau dont le domaine d'élasticité voit sa taille augmenter, mais qui reste centré sur l'origine : il s'agit d'un écoulement isotrope. La variable d'écrouissage qui intervient dans  $f$  est la dimension du domaine d'élasticité, notée  $R$  :

$$f(\sigma, R) = |\sigma| - R - \sigma_e \quad (\text{I.94})$$

L'évolution de cette variable est la même quel que soit le signe de la vitesse de déformation plastique. Elle s'exprimera donc en fonction de la déformation plastique cumulée  $p$ , variable dont la dérivée est égale à la valeur absolue de la vitesse de la déformation plastique  $\dot{p} = |\dot{\varepsilon}_p|$ . Bien entendu, il n'y a pas de différence entre  $p$  et  $\varepsilon_p$  tant que le chargement est monotone croissant. Dans ce cas, vérifier la condition de cohérence revient tout simplement à exprimer que la valeur actuelle de la contrainte est sur la frontière du domaine d'élasticité. Pour l'érouissage cinématique, cela s'écrit ( $\sigma = X + \sigma_e$ ), et pour l'érouissage isotrope ( $\sigma = R + \sigma_e$ ). Cela signifie donc que c'est la loi d'évolution de la variable d'érouissage qui détermine exactement la forme de la courbe de traction. Les deux modèles rhéologiques invoqués donnent des courbes linéaires, avec des modules plastiques nul ou constant. Il est souvent plus réaliste de considérer une courbe qui se sature en fonction de la déformation, soit par exemple une fonction puissance (loi de Ramberg–Osgood, avec deux coefficients matériaux  $K$  et  $m$ ) ou une exponentielle, cette dernière formulation offrant l'avantage d'introduire une contrainte ultime  $\sigma_u$  supportable par le matériau (deux coefficients matériau,  $\sigma_u$  et  $b$  en plus de  $\sigma_e$ ) :

$$\sigma = \sigma_e + K(\varepsilon_p)^m \quad (\text{I.95})$$

$$\sigma = \sigma_u + (\sigma_e - \sigma_u)\exp(-b\varepsilon_p) \quad (\text{I.96})$$

Dans bien des cas, les utilisateurs ne prennent pas la peine de définir une forme explicite de la loi de comportement, et décrivent la courbe de traction point par point. Cela revient implicitement à considérer un érouissage isotrope. Ce type d'érouissage est prédominant pour les déformations importantes (au-delà de 10%). Cependant, l'érouissage cinématique continue de jouer un rôle important lors de décharges, même pour les grandes déformations, et c'est lui qui est prépondérant pour les faibles déformations et les chargements cycliques. Il permet en particulier de simuler correctement l'effet Bauschinger, c'est-à-dire le fait que la contrainte d'élasticité en compression décroît par rapport à la contrainte initiale à la suite d'un pré-érouissage en traction. Il est néanmoins moins souvent utilisé que l'érouissage isotrope, car son traitement numérique est plus délicat.

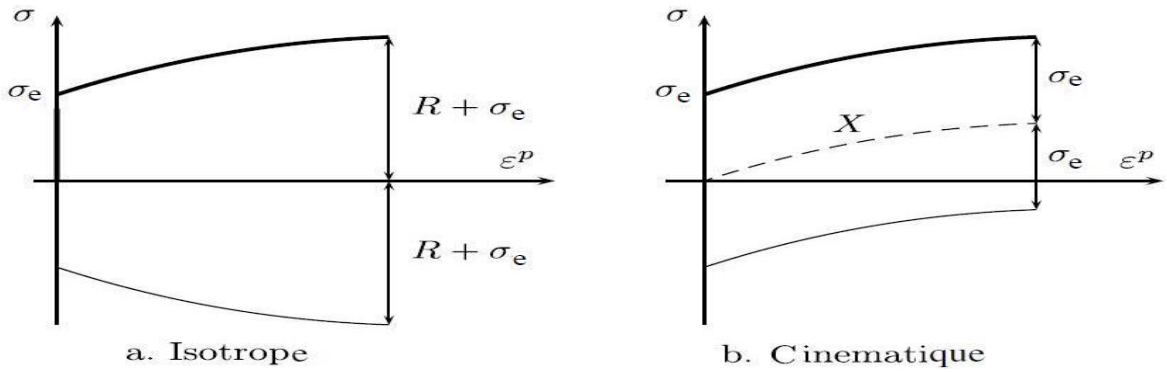


Figure I.18- Illustration des deux principaux types d'écrouissage.

### I.5.4 Viscoplasticité

#### I.5.4.1 Modèle élastique parfaitement viscoplastique

En négligeant l'élasticité instantanée, les solides viscoplastiques sont ceux qui présentent, comme les solides plastiques, des déformations permanentes après cessation des sollicitations mais qui subissent un écoulement de fluage, fonction du temps, sous sollicitation. Le modèle élastique parfaitement viscoplastique de Bingham est constitué d'un ressort en série avec une combinaison en parallèle d'un patin et d'un amortisseur (Figure I.19).

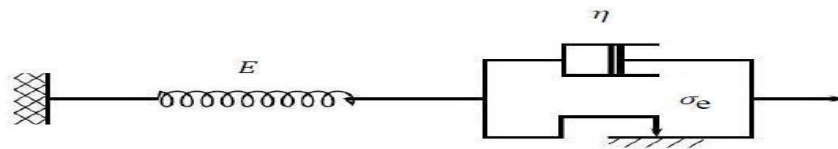


Figure I.19- Modèle de Bingham

$$\begin{cases} \sigma < \sigma_e & \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \\ \sigma \geq \sigma_e & \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{vp} ; \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{(\sigma - \sigma_e)}{\eta} \end{cases} \quad (I.97)$$

La vitesse de déformation viscoplastique n'est fonction que de la contrainte. Ce modèle présente ainsi respectivement en fluage et en relaxation les réponses suivantes :

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{(\sigma_0 - \sigma_e)}{\eta} t \quad (I.98)$$

$$\sigma = E\varepsilon_0 + (E\varepsilon_0 - \sigma_e) \exp\left(-\frac{Et}{\eta}\right) \quad (I.99)$$

### I.5.4.2 Modèle de Bingham généralisé

La Figure I.20.a indique comment, en rajoutant un simple amortisseur, il est possible de passer d'un modèle de comportement plastique indépendant du temps à un modèle viscoplastique : le modèle obtenu est le modèle de Bingham généralisé. La déformation élastique se lit aux bornes du ressort de caractéristique  $E$ , la déformation viscoplastique, nommée  $\varepsilon_{vp}$ , aux bornes de l'assemblage en parallèle.

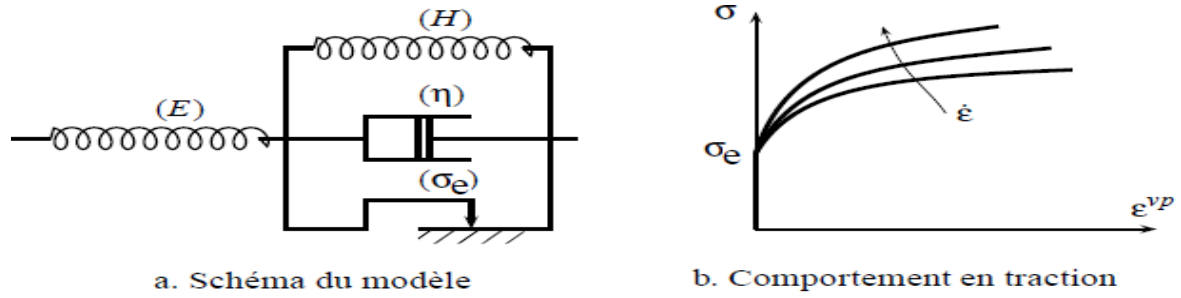


Figure I.20- Modèle de Bingham généralisé

La détermination des équations de ce modèle s'effectue en considérant les équations de comportement individuelles de chacun des éléments :

$$X = H\varepsilon_{vp}, \quad \sigma_v = \eta\dot{\varepsilon}_{vp}, \quad \sigma_p \leq \sigma_e \quad (\text{I.100})$$

où  $X$ ,  $\sigma_v$  et  $\sigma_p$  sont respectivement les contraintes dans le ressort de caractéristique  $H$ , dans l'amortisseur et dans le patin, et :

$$\sigma = X + \sigma_v + \sigma_p \quad (\text{I.101})$$

Il y a donc, comme pour le modèle plastique, un domaine d'élasticité, dont la frontière est atteinte lorsque  $|\sigma_p| = \sigma_e$ . On distingue alors trois régimes de fonctionnement, selon que la vitesse de déformation viscoplastique est nulle, positive ou négative :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{vp} = 0 & |\sigma_p| = |\sigma - H\varepsilon_{vp}| \leq \sigma_e \\ \dot{\varepsilon}_{vp} > 0 & \sigma_p = \sigma - H\varepsilon_{vp} - \eta\dot{\varepsilon}_{vp} = \sigma_e \\ \dot{\varepsilon}_{vp} < 0 & \sigma_p = \sigma - H\varepsilon_{vp} - \eta\dot{\varepsilon}_{vp} = -\sigma_e \end{cases} \quad (\text{I.102})$$

Le premier cas correspond à l'intérieur du domaine d'élasticité ( $|\sigma_p| < \sigma_e$ ) ou à un état de décharge élastique ( $|\sigma_p| = \sigma_e$ ) et ( $|\dot{\sigma}_p| \leq 0$ ), les deux autres cas à de l'écoulement



( $|\dot{\sigma}_p| = \sigma_e$ ) et ( $|\dot{\sigma}_p| = 0$ ). En posant  $\langle x \rangle = \max(x, 0)$ , les trois cas peuvent se résumer par une seule expression :

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \frac{\langle f \rangle}{\eta} \text{signe}(\sigma - X) \quad (\text{I.103})$$

avec  $f(\sigma, X) = |\sigma - X| - \sigma_e$

La nature du modèle a maintenant complètement changé, puisque le point représentatif de l'état de contrainte courant peut se trouver dans la zone  $f > 0$ , et que la vitesse d'écoulement est maintenant régie par le temps : elle peut être non nulle sans qu'il y ait d'incrément de contrainte ou de déformation. Ceci explique qu'en Figure I.20.b, la courbe de traction ne soit plus unique (plus la vitesse est grande, plus la contrainte visqueuse  $\sigma_v$  sera élevée, et plus la courbe de traction sera haute), et que, lors d'une décharge, le point de fonctionnement ne pénètre pas immédiatement dans le domaine d'élasticité (on peut donc avoir un écoulement positif à contrainte décroissante).

En fluage (Figure I.21), en supposant qu'on applique un échelon de contrainte (de 0 à  $\sigma_0 > \sigma_e$ ) à partir d'un état de référence où toutes les déformations sont nulles, le modèle prévoit que la déformation viscoplastique est une exponentielle en fonction du temps  $t$ , avec un temps caractéristique  $\tau_f = \eta/H$  (Figure I.21.a) :

$$\varepsilon_{vp} = \frac{\sigma_0 - \sigma_e}{H} \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_f}\right) \right) \quad (\text{I.104})$$

La Figure I.21.b montre, dans le plan contrainte-déformation viscoplastique, les évolutions respectives de la contrainte interne  $X$  et du seuil  $X + \sigma_e$ . Lorsque ce dernier rejoint la contrainte appliquée  $\sigma_0$ , la vitesse de déformation viscoplastique s'annule.

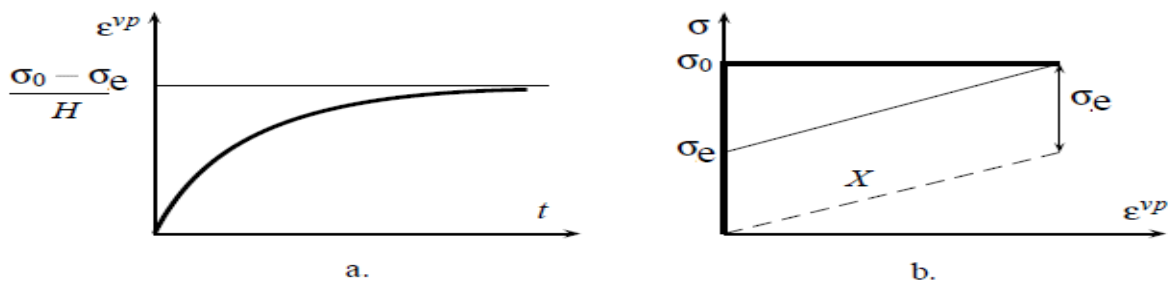


Figure I.21- Fluage avec le modèle de Bingham

En relaxation, la réponse à un échelon de déformation (de 0 à  $\varepsilon_0$  tel que  $E\varepsilon_0 > \sigma_e$ ) fait cette fois intervenir un temps caractéristique de relaxation  $\tau_r = \eta/(E + H)$ .

$$\sigma = \sigma_e \frac{E}{E + H} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right)\right) + \frac{E\varepsilon_0}{E + H} \left(H + E \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right)\right) \quad (\text{I.105})$$

### I.5.4.3 Quelques modèles classiques en viscoplasticité

Dans l'exemple précédent, la vitesse de déformation viscoplastique est proportionnelle à une certaine contrainte efficace, différence entre la contrainte appliquée et le seuil, qui représente la distance entre le point de fonctionnement actuel et la frontière du domaine d'élasticité, qui n'est rien d'autre que la valeur de la fonction  $f$  au point de fonctionnement courant. La relation linéaire peut être remplacée par une forme plus générale, en introduisant une fonction de viscosité,  $\Theta$  qui fournit alors en traction simple :

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \Theta(f) \quad (\text{I.106})$$

Pour un modèle qui comporterait à la fois de l'érouissage isotrope et cinématique, cette relation s'inverse sous la forme suivante, toujours en traction simple :

$$\sigma = \sigma_e + X + R + \Theta^{-1}(\dot{\varepsilon}_{vp}) \quad (\text{I.107})$$

La courbe de traction est déterminée par l'évolution du seuil, exactement comme dans le cas d'un modèle de plasticité, mais également par la fonction de viscosité, qui pilote la valeur de la contrainte visqueuse  $\sigma_v$ . Pour des raisons physiques évidentes, on considère que  $\Theta(0) = 0$ , et on suppose que  $\Theta$  est une fonction monotone croissante. Dans le cas où  $\sigma_v$  s'annule, le modèle reproduit un comportement plastique indépendant du temps. Par ailleurs, plus la vitesse de sollicitation augmente, plus la contrainte atteinte, pour une déformation donnée, sera élevée. Dans le cadre d'un modèle viscoplastique, il y a donc deux possibilités pour introduire l'érouissage. On conserve les possibilités d'action sur des variables de type  $X$  et  $R$ , et on joue sur la forme de la contrainte visqueuse. On appelle classiquement modèles à érouissage additif ceux qui jouent sur les variables de type plasticité et modèles à érouissage multiplicatif ceux qui jouent sur la contrainte visqueuse, une approche où les deux mécanismes sont présents étant bien entendu également envisageable. Par ailleurs, contrairement au cas de la plasticité, on peut ici considérer un modèle dans lequel le domaine

d'élasticité se réduit à l'origine ( $\sigma = 0$ ), et qui ne possède pas d'érouissage. Ainsi le modèle le plus courant est-il le modèle de Norton (avec deux coefficients matériau  $K$  et  $n$ ) :

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \left(\frac{|\sigma|}{K}\right)^n \text{signe}(\sigma) \quad (\text{I.108})$$

On peut le généraliser pour en faire un modèle à seuil sans érouissage, ou réintroduire  $X$  et  $R$  aux côtés de  $\sigma_e$ , ce qui conduit à un modèle à érouissage additif.

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \left\langle \frac{|\sigma| - \sigma_e}{K} \right\rangle^n \text{signe}(\sigma) \quad (\text{I.109})$$

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \left\langle \frac{|\sigma - X| - R - \sigma_e}{K} \right\rangle^n \text{signe}(\sigma - X) \quad (\text{I.110})$$

Pour obtenir des lois à érouissage multiplicatif, on admet que la fonction  $\phi$  ne dépend pas uniquement de  $f$ , ainsi la loi de Lemaitre (coefficients matériau  $K$ ,  $m$  et  $n$  positifs,  $\dot{p} = |\dot{\varepsilon}_{vp}|$ ):

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \left(\frac{|\sigma|}{K}\right)^n p^{-n/m} \text{signe}(\sigma) \quad (\text{I.111})$$

## I.6 Bilan du chapitre

Ce chapitre avait pour objectif de cerner le concept général de la loi de comportement. Après avoir présenté une description sommaire des mécanismes physiques de déformation orientée vers la justification physique des hypothèses de la modélisation, nous nous sommes intéressés aux éléments de la mécanique et de la thermodynamique des milieux continus où la méthode des puissances virtuelles, qui présente un outil nécessaire pour la modélisation des efforts et des déformations, a été développée ; la méthode de l'état local basée sur les deux premiers principes de la thermodynamique et conduisant à la définition des lois d'états et des lois complémentaires d'évolution a été élucidée. Enfin une schématisation d'une diversité de modèles analogiques représentant les différentes lois de comportement en situation unidimensionnelle a été établie. Bref, le présent chapitre conclut que la loi de comportement mécanique des matériaux peut être exprimée par l'équation rhéologique suivante :

$$f(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dots, t, T) = 0 \quad (\text{I.112})$$

## **Chapitre II- Modélisation de comportement non linéaire des matériaux**

### **II.1 Introduction**

Ce chapitre est consacré principalement à la modélisation phénoménologique et mathématique, dans le cadre de la plasticité associée, du comportement non linéaire des matériaux. Nous abordons en premier lieu quelques aspects phénoménologiques qui découlent des essais caractéristiques tels que l'écroutissage en traction simple. L'accent est mis par la suite sur la limite élastique unidimensionnelle, puis sa généralisation au cas tridimensionnel ; la notion de critère d'écoulement est alors intervenue. Le critère de Tresca et celui de Von Mises sont développés et comparés. Ensuite nous exposons la règle d'écoulement plastique en prenant en compte les deux formes d'écroutissage : cinématique et isotrope. Enfin, et dans la perspective du développement de notre modèle au dernier chapitre, nous nous intéressons au phénomène du fluage avec ses trois phases.

### **II.2 Aspects phénoménologiques**

#### **II.2.1 Essai de traction uniaxiale**

L'essai d'écroutissage en traction simple est le plus connu pour caractériser le comportement des matériaux en traction, que ce comportement soit linéaire ou non. Il consiste à soumettre une éprouvette à une sollicitation axiale (force ou déplacement) qui engendre un état de contrainte ou de déformation uniformes dans tout le volume utile ce qui permet de l'assimiler à un élément de volume [2]. Dans le cas des matériaux isotropes, l'état uniaxial est défini par un état unidimensionnel en contrainte mais tridimensionnel en déformation :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.1})$$

## II. Modélisation de comportement non linéaire des matériaux

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^* \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^* \varepsilon \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

où  $\nu^*$  est le coefficient de contraction, égal au coefficient de Poisson  $\nu$  en élasticité.

En élastoplasticité ou élastoviscoplasticité les hypothèses de découplage des déformations élastique et plastique ( $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ ) et d'incompressibilité plastique ( $Tr(\varepsilon_p) = 0$ ) permettent d'exprimer le coefficient de contraction  $\nu^*$ .

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^* \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^* \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_e & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \varepsilon_e & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \varepsilon_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \varepsilon_p & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \varepsilon_p \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

$$\nu^* = \nu \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon} \quad (\text{II.4})$$

Les diagrammes contrainte-déformation issus des essais de traction uni-axiale sont d'une grande importance en matière de phénoménologie des comportements mécaniques des matériaux. Ainsi la Figure II.1.a présente des diagrammes contraintes-déformations pour différents métaux ductiles. L'allure est assez semblable pour tous ces matériaux : une pente élastique suivie d'une courbe représentant le comportement plastique du matériau. On distingue en général des courbes à palier (acier faible teneur en carbone) (Figure II.1.b) et des courbes à module tangent. En ce qui concerne les polymères (Figure II.2), deux phases distinctes sont observées : une première phase viscoélastique de module élevé suivie d'une phase plastique. La phase intermédiaire nommée phase de plastification n'a pas la même allure suivant le polymère étudié. Pour les polymères amorphes, on observe une chute brutale de la contrainte lors de cette phase transitoire alors que pour les polymères semi cristallins, la limite élastique se présente par un simple changement de pente. Quant aux céramiques et verres (Figure II.3), seule une pente linéaire représentant l'élasticité du matériau est observée. En effet les céramiques ont un comportement fragile et se rompent généralement sans déformation plastique.

II. Modélisation de comportement non linéaire des matériaux

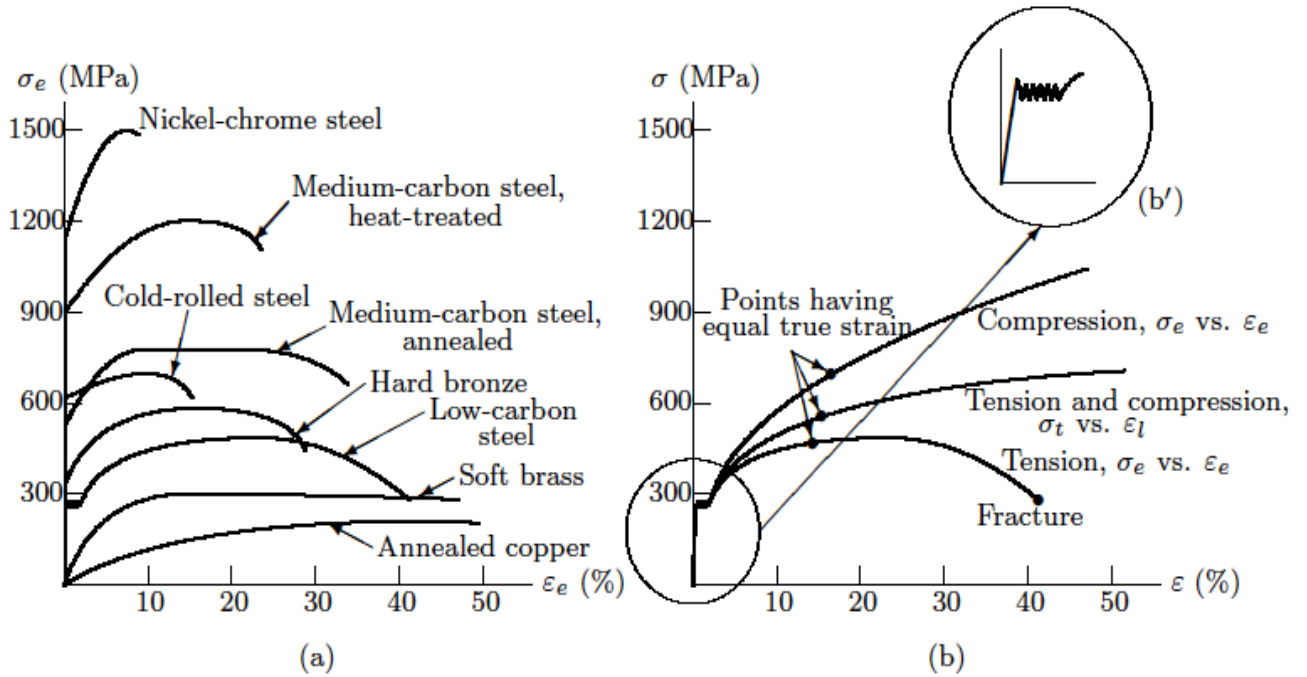


Figure II.1- Diagramme contrainte-déformation : a- métaux ductiles en traction simple ; b- acier à faible teneur en carbone en traction-compression simples [8].

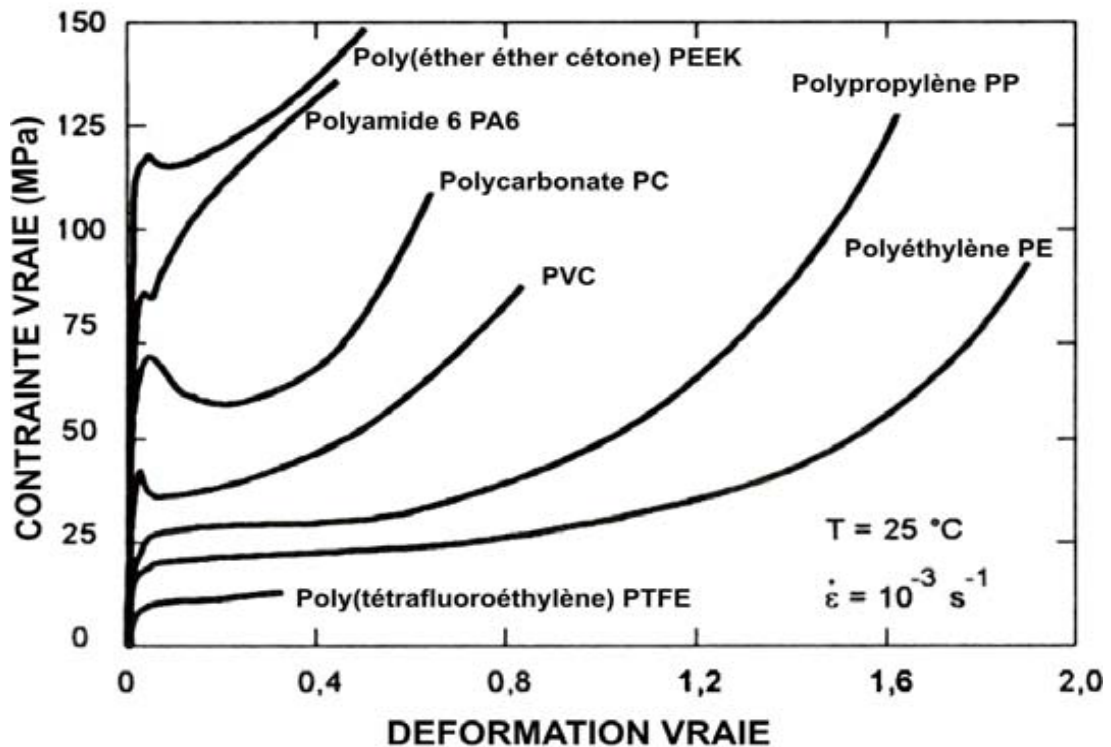


Figure II.2- Diagramme contrainte vraie - déformation vraie de divers polymères obtenues à  $25^\circ\text{C}$  et à  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  en traction par la méthode vidéométrique [9].

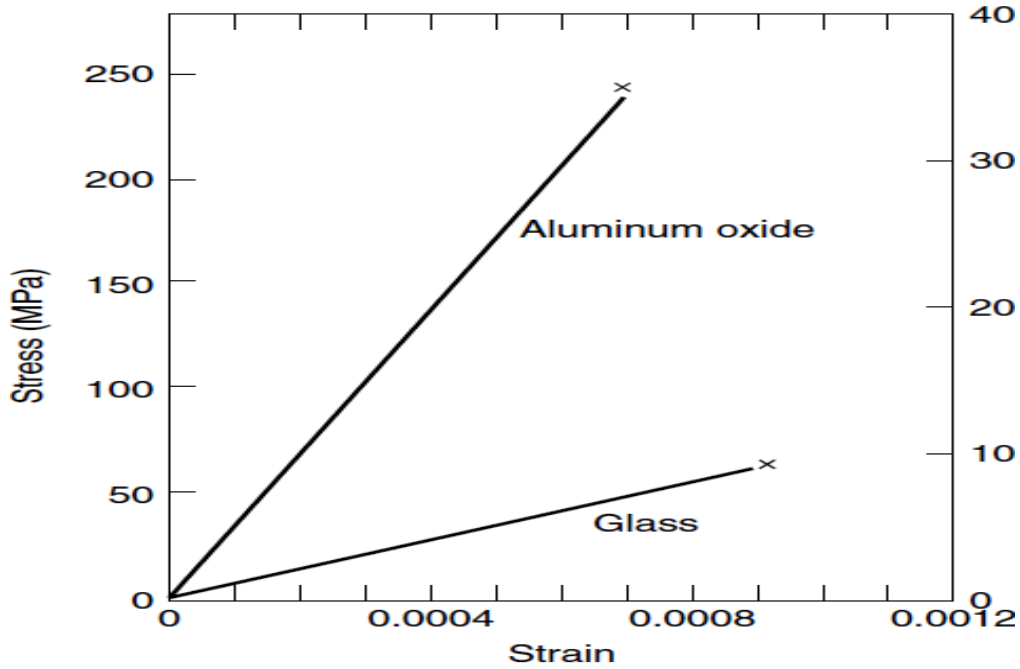


Figure II.3- Diagramme typique contrainte-déformation de l'oxyde d'aluminium et du verre en traction [10].

### II.2.2 Déformations et contraintes vraies

L'état de déformation est défini par la déformation conventionnelle  $e$  calculée à partir de la longueur actuelle  $L_t$  et la longueur initiale  $L_0$ . L'état de contrainte est défini par la contrainte  $S$  obtenue en divisant l'effort  $F$  mesuré par la section résistante  $A_0$  de l'éprouvette.

$$e = \Delta L/L_0 = (L_t - L_0)/L_0 \quad (\text{II.5})$$

$$S = F/A_0 \quad (\text{II.6})$$

L'évolution de comportement obtenue (état de contrainte en fonction de l'état de déformation) est appelée courbe de comportement conventionnelle.

La déformation vraie est calculée en prenant en considération l'évolution de la longueur de l'éprouvette pendant l'essai. La contrainte vraie est obtenue en prenant compte de la variation de la section pendant l'essai.

$$\varepsilon = \int_{L_0}^{L_t} dl/L = \ln\left(\frac{L_t}{L_0}\right) = \ln(1 + e) \quad (\text{II.7})$$

$$\sigma = F/A_t \quad (\text{II.8})$$

## II. Modélisation de comportement non linéaire des matériaux

En supposant que les déformations plastiques se produisent à volume constant :

$$A_0/A_t = L_t/L_0 \quad (\text{II.9})$$

La contrainte vraie s'exprime alors par :

$$\sigma = S(1 + e) \quad (\text{II.10})$$

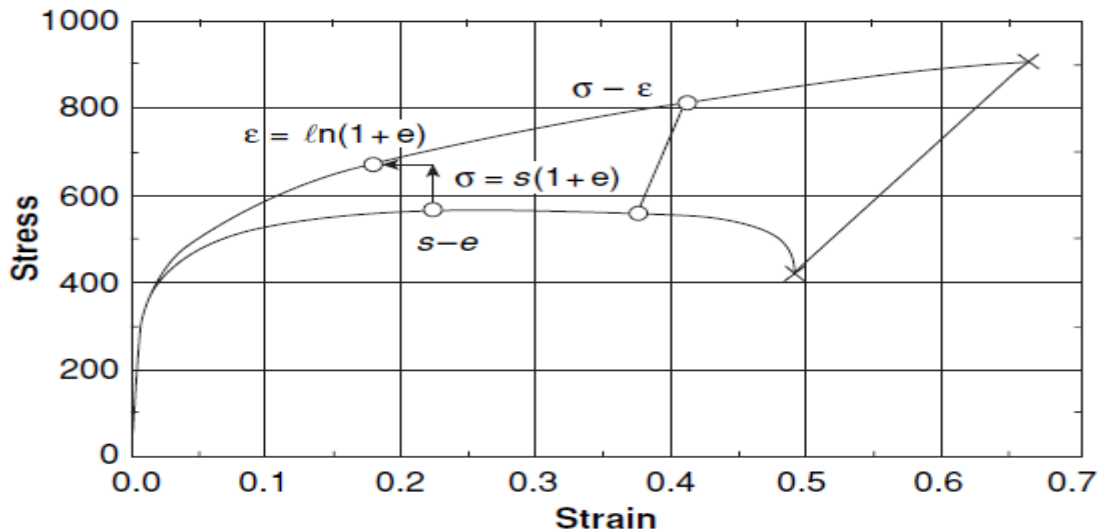


Figure II.4- Comparaison des les courbes contrainte-déformation conventionnelle et vraie [11]

### II.2.3 Limite d'élasticité

La courbe d'écrouissage en traction compression représentée sur la Figure II.5.a caractérise le comportement unidimensionnel dans un essai de traction simple effectué à vitesse de déformation fixée sur une éprouvette en acier doux. On constate l'existence d'un seuil pour la contrainte, soit  $\sigma_e$ , à partir duquel le comportement du matériau devient irréversible. Déceler cette contrainte est un problème expérimental difficile puisqu'elle dépend de la précision du capteur de déformation utilisé. La limite d'élasticité conventionnelle est la contrainte qui correspond à une déformation irréversible donnée. Elle est évaluée à une déformation permanente égale à 0.2% pour les contrôles des qualités des matériaux [2].

### II.3 Critères d'écoulement

Si le seuil de plasticité unidimensionnelle définit le domaine d'élasticité dans l'espace de la contrainte à une dimension, il devient nécessaire de définir un critère afin d'aborder l'étude



## II. Modélisation de comportement non linéaire des matériaux

des chargements multiaxiaux. Le critère d'écoulement (ou de plasticité) est alors la généralisation au cas tridimensionnel du seuil de plasticité unidimensionnelle (Figure II.5.b).

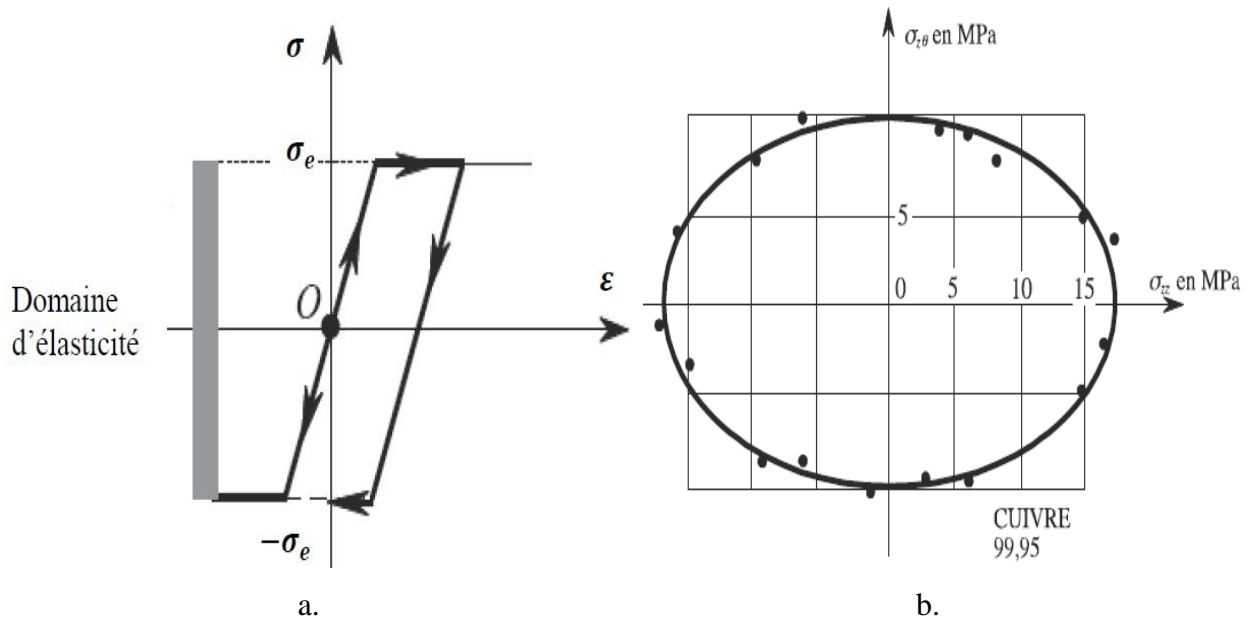


Figure II.5 : a- Domaine d'élasticité unidimensionnelle ; b- Expérience de traction-compression et torsion d'un tube mince: domaine élastique déterminé expérimentalement [12]

### II.3.1 Fonction de charge

Il est d'usage, pour définir mathématiquement le domaine d'élasticité, d'introduire une fonction scalaire  $f$  du tenseur des contraintes  $\sigma$ , appelée fonction de charge, telle que :

$$\begin{cases} f(\sigma) < 0 & \text{correspond à l'intérieur du domaine} \\ f(\sigma) = 0 & \text{à sa frontière} \\ f(\sigma) > 0 & \text{à l'extérieur} \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Les symétries matérielles étant respectées, la fonction  $f$  est, dans le cas d'un matériau isotrope, une fonction symétrique des seules contraintes principales, ou bien encore des invariants du tenseur des contraintes dont la définition provient du polynôme caractéristique :

$$I_1 = \text{Tr}(\sigma) = \sigma_{ii} \quad (\text{II.12})$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^2) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} \quad (\text{II.13})$$

$$I_3 = \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma^3) = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} \quad (\text{II.14})$$

## II. Modélisation de comportement non linéaire des matériaux

En supposant le milieu être insensible à la pression hydrostatique, on peut écrire le critère en fonction du seul tenseur déviateur des contraintes  $s$  défini par :

$$s = \sigma - \frac{I_1}{3} Id \quad (\text{II.15})$$

et dont les invariants s'expriment par :

$$J_1 = Tr(s) = 0 \quad (\text{II.16})$$

$$J_2 = \frac{1}{2} Tr(s^2) = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (\text{II.17})$$

$$J_3 = \frac{1}{3} Tr(s^3) = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} \quad (\text{II.18})$$

La fonction  $f$  est alors une fonction isotrope du seul tenseur symétrique  $\sigma$ . En application du théorème de représentation [6, 12], la fonction  $f$  s'exprime de façon équivalente comme :

- soit une fonction symétrique des contraintes principales,
- soit une fonction des invariants  $I_1, I_2, I_3$  de  $\sigma$ .
- soit une fonction de l'invariant  $I_1$  de  $\sigma$  et des invariants  $J_2$  et  $J_3$  de son déviateur  $s$ .

### II.3.2 Critère de Tresca

Ce critère est introduit par Tresca en 1864 à la suite d'expériences sur le plomb. On y suppose que le seuil de plasticité apparaît lorsque la contrainte de cisaillement maximale dépasse une valeur critique. La fonction de charge correspondante s'écrit :

$$f(\sigma) = \text{Sup}(|\sigma_i - \sigma_j|) - \sigma_e \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{II.19})$$

$\sigma_e$  apparaît comme la limite d'élasticité en traction simple. Elle est égale à l'opposé de la limite en compression simple. La résistance en cisaillement simple vaut  $\sigma_e/2$ .

Dans l'espace des contraintes principales, le critère de Tresca est représenté par un prisme droit à base hexagonale dont l'axe est la trisectrice du repère  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  (Figure II.6).

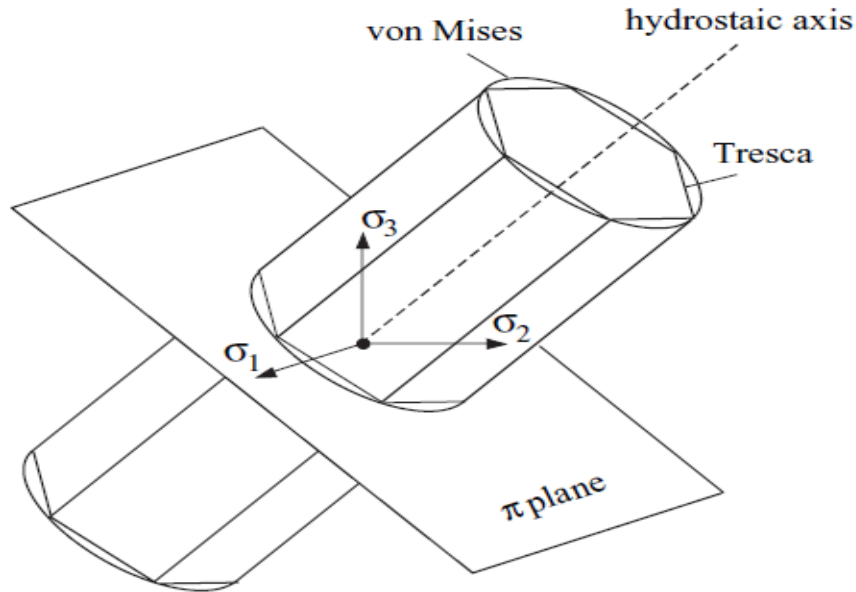


Figure II.6- Critères de Tresca et de Von Mises dans l'espace des contraintes principales

### II.3.3 Critère de Von Mises

Dans le critère de Von Mises, proposé en 1913, la fonction de charge  $f$  étant fonction des invariants de  $\sigma$  s'exprime de manière équivalente comme une fonction de  $I_1 = Tr\sigma$  et des invariants non nuls du déviateur des contraintes  $s$  (Equations II.16, II.17, II.18). Le critère le plus simple est celui qui n'utilise que le second invariant du déviateur des contraintes  $J_2$ . La fonction de charge s'écrit :

$$f(\sigma) = J_2 - \frac{1}{3}\sigma_e^2 \quad (\text{II.20})$$

On définit à partir de cette fonction de charge le concept de contrainte équivalente (de Von Mises) à un état de contrainte donné : notée  $\sigma_{eq}$ , c'est la contrainte de traction qui donne la même valeur à la fonction de charge que l'état de contrainte considéré :

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} \quad (\text{II.21})$$

Dans l'espace des contraintes principales à 3 dimensions, le critère de Von Mises s'écrit :

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} - \sigma_e \quad (\text{II.22})$$

## II. Modélisation de comportement non linéaire des matériaux

C'est l'équation d'un cylindre à base circulaire (Figure II.6) axé sur la trisectrice du repère  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ .

### II.3.4 Comparaison des critères de Tresca et Von Mises

Comme il n'est bien entendu pas question de se placer dans l'espace des 6 (ou 9) composantes du tenseur des contraintes, il faut se résoudre à ne visualiser les frontières du domaine d'élasticité que dans des sous-espaces à deux ou trois dimensions. Les représentations les plus courantes s'effectuent :

- dans le plan traction-cisaillement (Figure II.7.a), lorsque seules les composantes  $\sigma = \sigma_{11}$  et  $\tau = \sigma_{12}$  sont non nulles ; les expressions des critères se réduisent alors à :

Tresca : 
$$f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 4\tau^2)^{1/2} - \sigma_e \quad (\text{II.23})$$

Von Mises : 
$$f(\sigma, \tau) = (\sigma^2 + 3\tau^2)^{1/2} - \sigma_e \quad (\text{II.24})$$

- dans le plan des contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2$  (Figure II.7.b), lorsque la troisième contrainte principale  $\sigma_3$  est nulle :

Tresca : 
$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2 - \sigma_e \quad \text{si } 0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \quad (\text{II.25})$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_e \quad \text{si } 0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \quad (\text{II.26})$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_e \quad \text{si } \sigma_2 \leq 0 \leq \sigma_1 \quad (\text{II.27})$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_e \quad \text{si } \sigma_1 \leq 0 \leq \sigma_2 \quad (\text{II.28})$$

Von Mises : 
$$f(\sigma_1, \sigma_2) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)^{1/2} - \sigma_e \quad (\text{II.29})$$

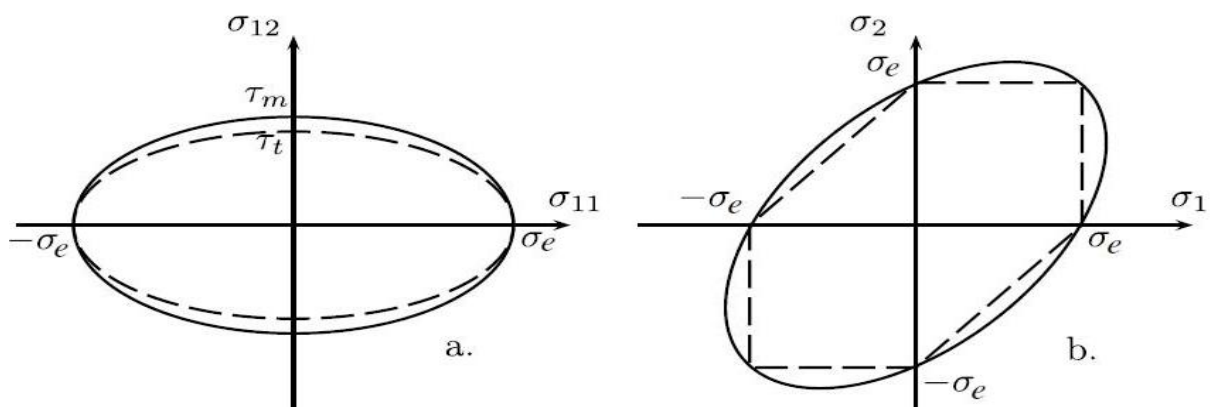


Figure II.7- Comparaison des critères de Tresca (en pointillés) et de Von Mises (traits pleins) :  
 a- En traction-cisaillement (Tresca :  $\tau_t = \frac{\sigma_e}{2}$ , Von Mises :  $\tau_m = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}}$ ) ; b- En traction biaxiale.

## II.4 Règle d'écoulement

### II.4.1 Partition de la déformation

On suppose que la décomposition de la déformation est additive, ce qui est en grande partie lié à l'hypothèse de petites transformations. Dans ce cas, la déformation totale  $\varepsilon$  est divisée en deux parties, une partie élastique  $\varepsilon_e$  et l'autre plastique  $\varepsilon_p$  :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (\text{II.30})$$

En prenant en compte le comportement visqueux, plusieurs études expérimentales, ont proposé de décomposer la déformation totale en composantes réversibles et composantes irréversibles dont certaines sont indépendantes du temps et d'autres dépendantes du temps [13]. La déformation totale  $\varepsilon$  peut alors être partitionnée en 4 composantes comme suit :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_p + \varepsilon_{vp} \quad (\text{II.31})$$

où  $\varepsilon_e$  est la déformation élastique réversible indépendante du temps,  $\varepsilon_{ve}$  est la déformation viscoélastique réversible,  $\varepsilon_p$  est la déformation plastique instantanée,  $\varepsilon_{vp}$  est la déformation viscoplastique dépendante du temps.

### II.4.2 Règle de la normalité

Le principe du travail plastique maximal implique la convexité du domaine élastique, admise comme une évidence expérimentale [12]. Il annonce alors que le taux de déformation plastique est dirigé suivant la normale extérieure au domaine élastique au point de charge.

$$\dot{\varepsilon}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (\text{II.32})$$

Le scalaire  $\dot{\lambda}$ , appelé multiplicateur plastique est calculé à partir de la condition de cohérence qui impose que l'état de contrainte actuel se trouve toujours sur la surface de plasticité et qui s'écrit comme :

$$\dot{f} = 0 \quad (\text{II.33})$$

où  $\dot{f}$  est la dérivée temporelle de  $f$ .

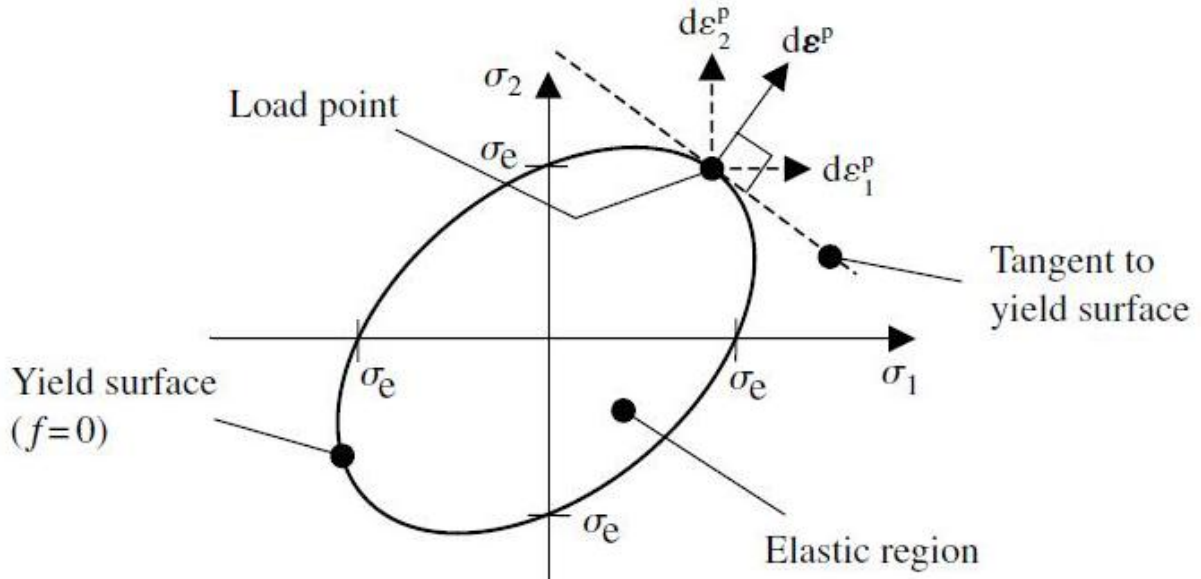


Figure II.8- Règle de normalité dans le plan des contraintes planes[14].

### II.4.3 Lois d'écrouissage

Les déformations permanentes sont provoquées par la modification de la structure interne du matériau qui conduit à un nouvel état dans lequel les propriétés mécaniques du matériau peuvent évoluer ou non. Elles peuvent laisser le domaine élastique inchangé (cas de la plasticité parfaite par exemple) ou modifier sa position et/ou sa dimension. Les variables d'écrouissage sont introduites pour caractériser les changements apportés au domaine élastique par les déformations permanentes, ce sont des variables évolutives avec l'histoire du chargement et décrites par les lois d'écrouissage.

#### II.4.3.1 Ecrouissage isotrope

L'écrouissage isotrope, noté  $R$ , est une variable scalaire correspondant à une dilatation simple du critère initial et est souvent fonction de la déformation plastique cumulée. Il correspond à une dilatation du domaine d'élasticité identique dans toutes les directions de l'espace des contraintes et le centre du domaine d'élasticité reste inchangé (Figure II.9). La fonction de charge s'écrit alors [2]:

$$f = f(\sigma, R) = f_e(\sigma) - \Gamma(R) \quad (\text{II.34})$$

où  $f_e$  indique la forme du critère de limite d'élasticité et  $\Gamma$  introduit l'écrouissage.

## II. Modélisation de comportement non linéaire des matériaux

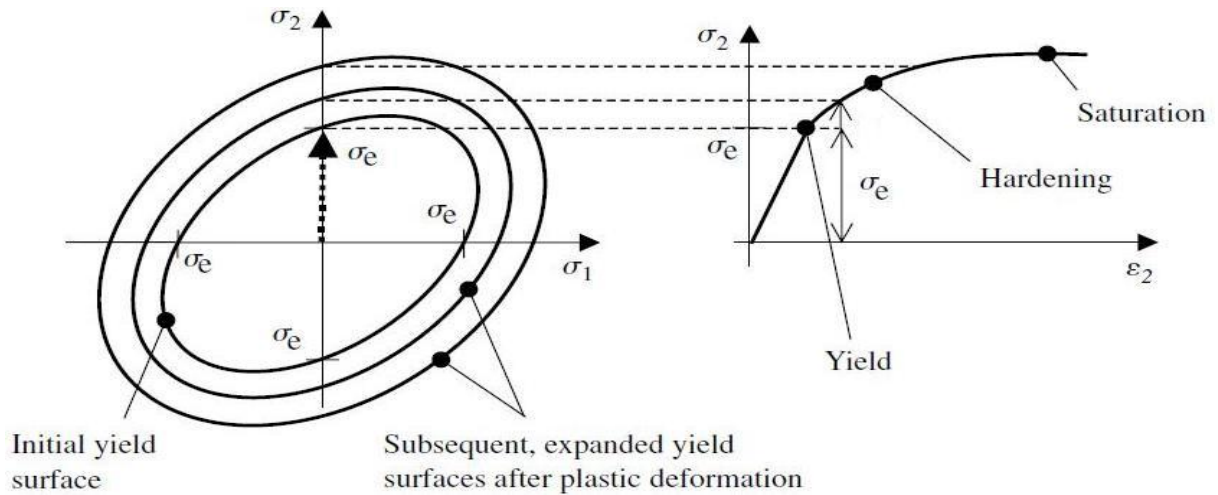


Figure II.9- Ecrouissage isotrope [14]

### II.4.3.2 Ecrouissage cinématique

L'écrouissage cinématique correspond à la translation de la surface de charge (Figure II.10). Sa variable  $X$  est de nature tensorielle. Elle indique la position actuelle de la surface de charge.

$$f = f_e(\sigma - X) - \sigma_e \quad (\text{II.35})$$

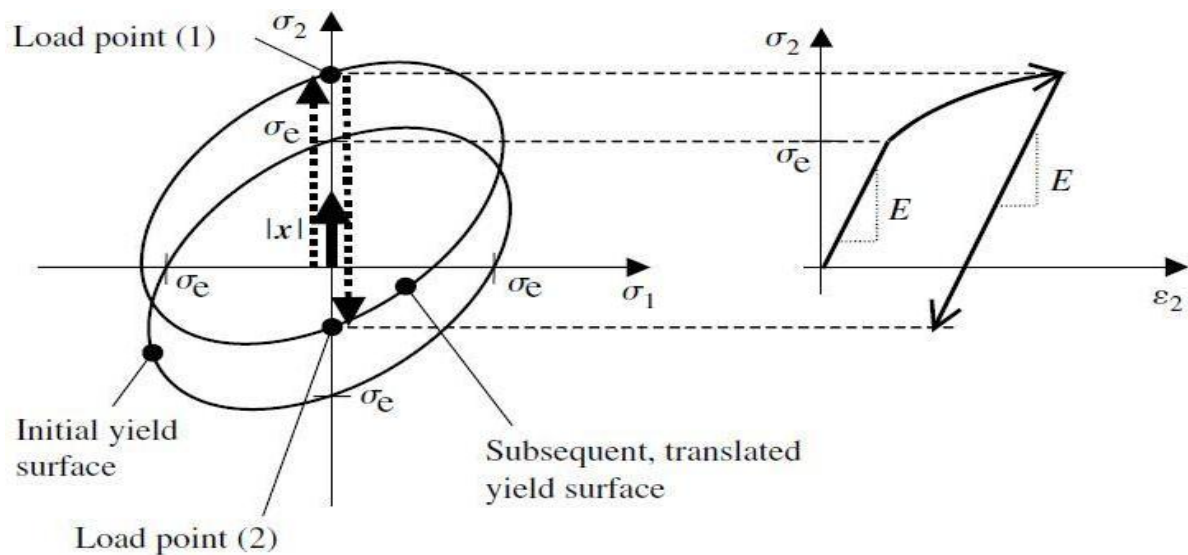


Figure II.10- Ecrouissage cinématique [14]

On se réfère aux ouvrages [2, 15] pour plus de détails sur la modélisation de l'écrouissage.

## **II.5 Fluage viscoplastique**

La théorie de la viscoplasticité décrit l'écoulement par fluage de la matière, qui par rapport au cas de la plasticité, dépend du temps de façon essentielle. Ainsi les métaux et alliages, les caoutchoucs, les géo-matériaux en général, le bois et les composites peuvent avoir, dans certaines conditions, un comportement dépendant du temps [2, 16].

### **II.5.1 Mécanisme du fluage**

Pour les métaux et alliages, le fluage correspond à des mécanismes liés au mouvement des dislocations dans les grains (montée, déviation, polygonisation) auxquels se superposent des effets de glissement inter-cristallins. Ces mécanismes prennent naissance dès que la température dépasse environ le tiers de la température absolue de fusion exprimée en  $K$ .

Pour les polymères, le comportement viscoplastique se manifeste le plus souvent au voisinage de la température ambiante. Par ailleurs, le changement du comportement viscoélastique au comportement viscoplastique se produit souvent lors de faibles variations de températures [3].

Le fluage des céramiques cristallines ne se produit que lorsqu'il y a apparition de glissements à caractère visqueux qui, comme dans les métaux, résultent soit du mouvement des dislocations, soit de glissement intergranulaires. Les liaisons atomiques des céramiques étant particulièrement forte, les températures auxquelles les dislocations deviennent assez mobiles sont donc relativement élevées ; le fluage ne se manifeste par conséquent qu'à hautes températures [3].

### **II.5.2 Cinétique du fluage**

La courbe du fluage classique représente l'évolution en fonction du temps de la déformation d'un matériau soumis à une contrainte unidimensionnelle constante à température constante [2]. La courbe typique du fluage des métaux, des polymères et des céramiques est représentée sur la Figure II.11. Cette courbe met en évidence trois phases (primaire, secondaire et tertiaire).



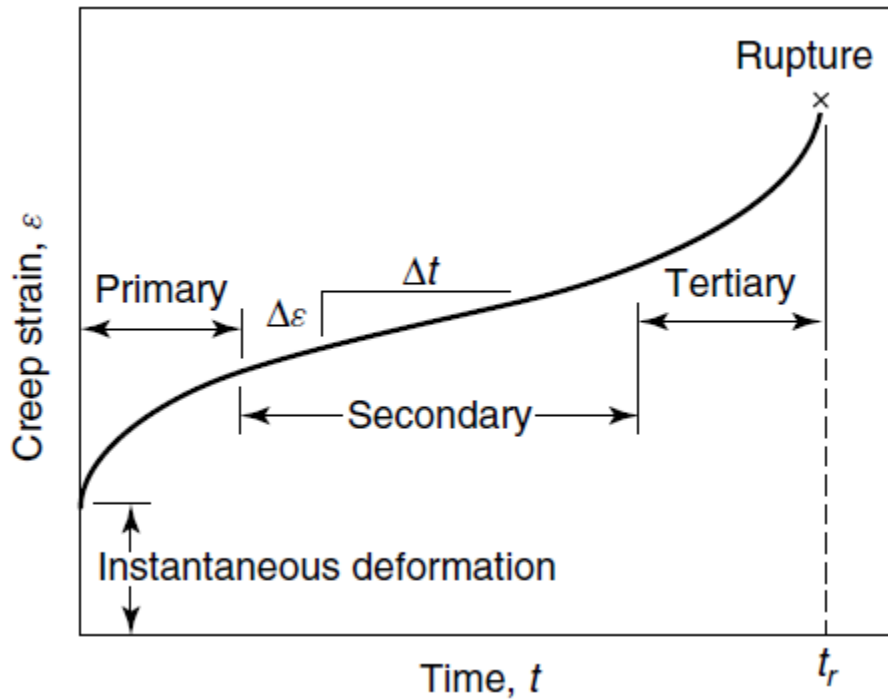


Figure II.11- Courbe typique du fluage [10]

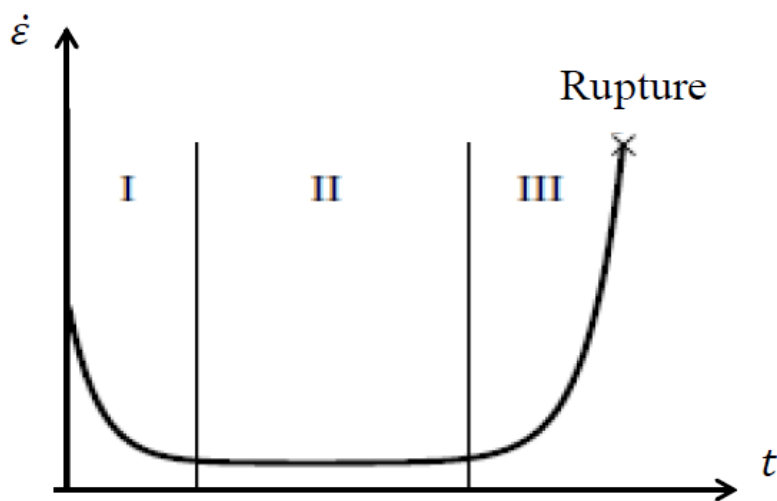


Figure II.12- Courbe de la vitesse de déformation de fluage [4]

### II.5.2.1 Fluage primaire

La vitesse de fluage, très grande initialement diminue progressivement en raison de l'écroutissage du matériau. La déformation peut être représentée par la simple formule [17] :

$$\varepsilon_f = A\sigma^n t^m \quad (\text{II.36})$$

## II. Modélisation de comportement non linéaire des matériaux

où  $A, n, m$  sont des paramètres qui dépendent de la température.

La contrainte étant constante, la vitesse de déformation est donnée par :

$$\dot{\epsilon}_f = Am\sigma^n t^{m-1} \quad (\text{II.37})$$

### II.5.2.2 Fluage secondaire

La vitesse de déformation du fluage pendant cette phase est sensiblement constante. Différents essais de fluage effectués à des contraintes différentes, mais à même température permettent la mise en évidence de la relation existant entre la vitesse de fluage secondaire  $\dot{\epsilon}_{vp}$  et la contrainte  $\sigma$  [2]; c'est la loi de Norton.

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^N \quad (\text{II.38})$$

Où  $\lambda$  et  $N$  sont d'autres coefficients caractéristiques de chaque matériau et de la température.

### II.5.2.3 Fluage tertiaire

L'augmentation régulière de la vitesse jusqu'à la déformation de rupture est due à la diminution de la section dans les essais conduits à force constante et au développement du phénomène d'endommagement qui réduit progressivement la résistance du matériau [2]. Le fluage tertiaire est souvent étudié en association avec l'endommagement [2, 16, 17]. En tenant compte de l'évolution de l'endommagement, la loi de Norton s'exprime par [16] :

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \left(\frac{\sigma}{\lambda(1-D)}\right)^N \quad (\text{II.39})$$

où  $D$  est une variable d'endommagement.

## II.5.3 Influence de la contrainte et de la température

Les paramètres qui contrôlent la vitesse de fluage sont la contrainte, la température et certains paramètres relatifs au matériau étudié tels que la taille de grain [18-20]. La Figure II.12 présente des courbes typiques du fluage qui montrent l'effet de la contrainte et de la température sur la vitesse de déformation. Il est clair, d'après les équations ci-dessus, que la vitesse de déformation augmente avec l'augmentation de la contrainte. Il en est de même pour

## II. Modélisation de comportement non linéaire des matériaux

la température ; et cela s'explique par le fait que les phénomènes de viscosité qui interviennent dans les grains et aux joints de grains dans les métaux où aux liaisons intermoléculaires dans les polymères sont très influencés par la température [2]. Pour se rendre compte de cette influence, on considère le fluage comme un phénomène thermiquement activé.

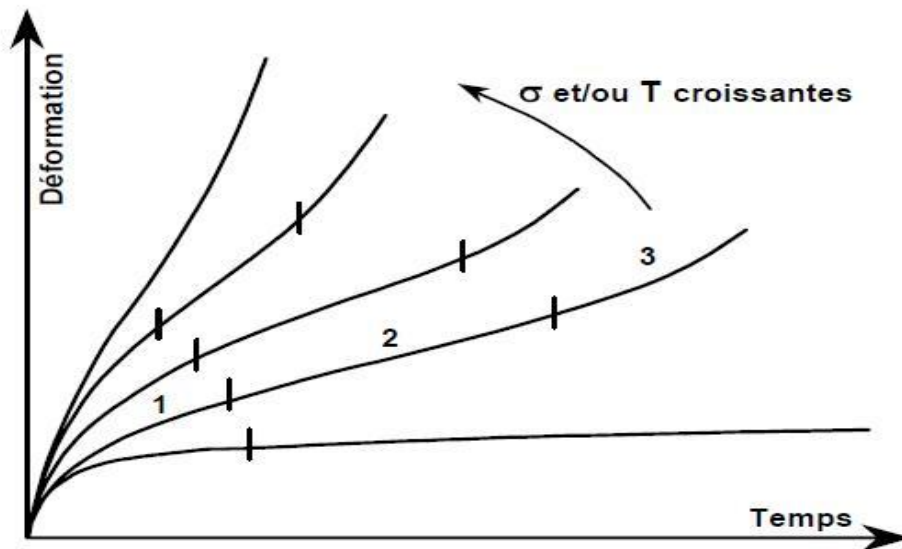


Figure II.13- Courbe de fluage présentant l'influence de la contrainte et de la température [20]

### II.6 Bilan du chapitre

Nous avons présenté dans ce deuxième chapitre, qui revêt un caractère bibliographique, les fondements théoriques du comportement plastique et viscoplastique des matériaux. Nous avons mis en évidence quelques aspects phénoménologiques apparus lors des essais caractéristiques tels que les essais d'érouissage et l'essai de fluage en traction simple. Une formulation mathématique générale des lois de comportement dans le cadre de la mécanique des milieux continus et de la plasticité associée a été présentée dans la perspective d'une modélisation en situation tridimensionnelle : la règle et les critères d'écoulement plastique ainsi que les deux formes d'érouissage ont été développés. Enfin une modélisation du fluage viscoplastique a été adoptée de manière à fournir des arguments permettant la validation du modèle proposé dans le dernier chapitre.

## **Chapitre III- Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres**

### **III.1 Introduction**

Ce chapitre traite de la flexion des poutres. Nous commençons par donner une brève présentation de la théorie élémentaire des poutres élastiques fondée sur les hypothèses cinématiques d'Euler-Bernoulli et les hypothèses statiques de Barré de Saint Venant. Nous développons ensuite un prolongement de cette théorie au comportement viscoélastique et qui sera couronnée par une application sur une poutre console sous sollicitations complexes et dont la réponse suit le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt. Nous nous intéressons enfin à la flexion des poutres élastoplastiques où deux modèles sont pris en considération : le modèle élastoplastique parfait et le modèle élastoplastique à écrouissage non linéaire. Des méthodes numériques s'avèreront nécessaires pour la simulation de comportement élastoplastique écrouissable.

### **III.2 Théorie élémentaire des poutres**

Une poutre est un corps matériel qui possède une direction privilégiée. Elle a la particularité d'avoir une dimension dont l'ordre de grandeur est supérieur aux deux autres. Typiquement, les dimensions caractéristiques de la section sont petites par rapport à la longueur de la poutre[21]. Les théories de poutres exploitent cette particularité pour proposer des modélisations approchées. L'intérêt de ces modélisations se situe dans l'apport de méthodes simplifiées pour traiter le problème de référence tridimensionnel. La simplification consiste généralement à ramener la résolution du problème tridimensionnel à la résolution d'un problème unidimensionnel, en associant des hypothèses géométriques, statiques et cinématiques. Pour cela, ces modélisations introduisent le petit paramètre  $\epsilon$  rapport d'une dimension caractéristique  $h$  de la section sur la longueur  $L$  de la poutre. Communément pour considérer le milieu comme une poutre, l'ordre de grandeur est  $\epsilon \leq 0.1$ . Plus le paramètre  $\epsilon$  est petit, plus la poutre est élancée [21].

### III.2.1 Hypothèses géométriques

L'élément poutre est décrit par une surface plane  $S$  appelée section droite de centre de gravité  $G$ . La ligne moyenne de la poutre est formée par les différentes positions du centre de gravité  $G$  de la poutre lorsque l'on parcourt cette dernière selon toute sa longueur  $l$  [22]. Si les dimensions de la section transversale sont petits devant sa longueur  $l$  alors l'état de contrainte  $\sigma$  ainsi que le champ de déplacement  $\underline{u}$  du solide pourront être approximés en fonction de quantités exprimées uniquement le long de la ligne moyenne.

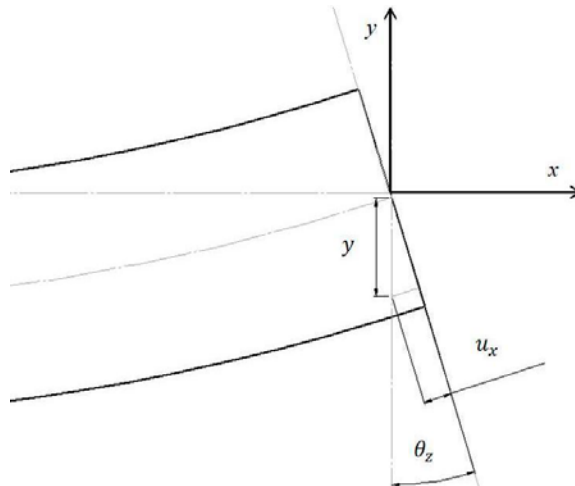
### III.2.2 Hypothèses cinématiques

Les déplacements, rotations et déformations sont supposés petits. La poutre, de par ses équations d'équilibre, sera donc étudiée dans sa configuration de référence. C'est l'Hypothèse des Petites Perturbations. L'hypothèse d'Euler-Bernoulli suppose que, pour toutes transformations géométriques, les sections droites d'une poutre restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne. Cette hypothèse permet de définir le déplacement  $\underline{u}_p$  de tout point  $p$ , d'une section droite uniquement en fonction du déplacement du centre de gravité  $\underline{u}_G$  et de la rotation de la section droite  $\underline{\theta}$  à l'abscisse curviligne  $s$ . Dans le cas d'une poutre droite, l'abscisse curviligne  $s$  est confondue avec l'axe  $x$ , le champ de déplacement  $\underline{u}(u_x, u_y, u_z)$  de tout point  $p(x, y, z)$  peut ainsi être obtenu par :

$$u_x(x, y, z) = u_x + \theta_y(x) \cdot z - \theta_z(x) \cdot y \quad (\text{III.1})$$

$$u_y(x, y, z) = u_y - \theta_x(x) \cdot z \quad (\text{III.2})$$

$$u_z(x, y, z) = u_z + \theta_x(x) \cdot y \quad (\text{III.3})$$



### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

Figure III.1- Hypothèses cinématiques d' Euler-Bernoulli

En définissant la courbure  $\chi$  par  $\chi = \frac{\partial \theta}{\partial x}$ , les déformations sont alors exprimées par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x(x)}{\partial x} + \chi_y(x) \cdot z - \chi_z(x) \cdot y \quad (\text{III.4})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y(x)}{\partial x} - \theta_z(x) - \chi_x(x) \cdot z \right) \quad (\text{III.5})$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z(x)}{\partial x} + \theta_y(x) - \chi_x(x) \cdot y \right) \quad (\text{III.6})$$

Si la poutre ne subit pas de torsion ( $\chi_x(x) = 0$ ), et selon l'hypothèse d'Euler-Bernoulli supposant que les déformations de cisaillement sont nulles, on peut écrire :

$$\frac{\partial u_y(x)}{\partial x} = \theta_z(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_z(x)}{\partial x} = -\theta_y(x) \quad (\text{III.7})$$

Le tenseur de déformations est alors uni-axial et s'exprime enfin comme suit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x(x)}{\partial x} + \chi_y(x) \cdot z - \chi_z(x) \cdot y \quad \varepsilon_{xy} = 0 \quad \varepsilon_{xz} = 0 \quad (\text{III.8})$$

#### III.2.3 Efforts et hypothèses statiques

L'hypothèse de Barré de Saint Venant suppose que pour une section droite quelconque, suffisamment éloignée du point d'application des efforts extérieurs sur une poutre, les effets de ce même chargement peuvent être remplacés par un torseur équivalent s'appliquant à cette section droite. Pour une section droite, le tenseur des contraintes en un point  $p$  est :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Le torseur des contraintes généralisées, par application du principe fondamental de la statique est défini par une composante en efforts  $\underline{R}$  et une composante en moments  $\underline{M}$ .

$$\underline{R} = N\underline{x} + T_y\underline{y} + T_z\underline{z} \quad (\text{III.10})$$

$$\underline{M} = M_x\underline{x} + M_y\underline{y} + M_z\underline{z} \quad (\text{III.11})$$

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

$N$  est l'effort normal,  $T_y$  et  $T_z$  sont respectivement les efforts tranchants selon les directions  $y$  et  $z$ .  $M_x$  est le moment de torsion,  $M_y$  et  $M_z$  sont les moments de flexion autour des directions  $y$  et  $z$ .

#### III.2.4 La relation moment-courbure

Considérant une flexion plane selon la direction  $y$ , l'hypothèse d'Euler-Bernoulli nous permet d'obtenir le profil des déformations axiales le long de la section droite :

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{\partial \theta_z}{\partial x} \cdot y = -\chi_z \cdot y \quad (\text{III.12})$$

Utilisant la loi de comportement élastique uni-axiale linéaire reliant la contrainte et la déformation ( $\sigma = E\varepsilon$ ), nous pouvons, à partir de l'équation d'équilibre des moments, exprimer le moment fléchissant dans une section  $S$  d'abscisse  $x$  par :

$$M_z = \int_S E \chi_z \cdot y^2 dS \quad (\text{III.13})$$

En introduisant la définition du moment d'inertie quadratique  $I_z = \int_S y^2 dS$ , la courbure s'exprime par :

$$\chi_z = M_z / EI_z \quad (\text{III.14})$$

La contrainte normale, en fonction du moment, est obtenue en tout point de la poutre par :

$$\sigma_{xx}(x, y) = -\frac{M_z(x)y}{I_z} \quad (\text{III.15})$$

#### III.2.5 Les flèches des poutres

On ne tolère, en pratique, que de très faibles flèches des poutres, de sorte que les lignes élastiques sont très plates (Figure III.2). Dans ce cas on suppose, avec une exactitude suffisante [23] que :

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (\text{III.16})$$

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad (\text{III.17})$$

Dans le cas de barres très élancées dont les flèches peuvent être importantes, il n'est pas possible d'utiliser les équations simplificatrices précédentes et l'on aura recours à l'expression exacte :

$$\theta = \text{arc tan} \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (\text{III.18})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \text{arc tan} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}}{\left( 1 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right)^{3/2}} \quad (\text{III.19})$$

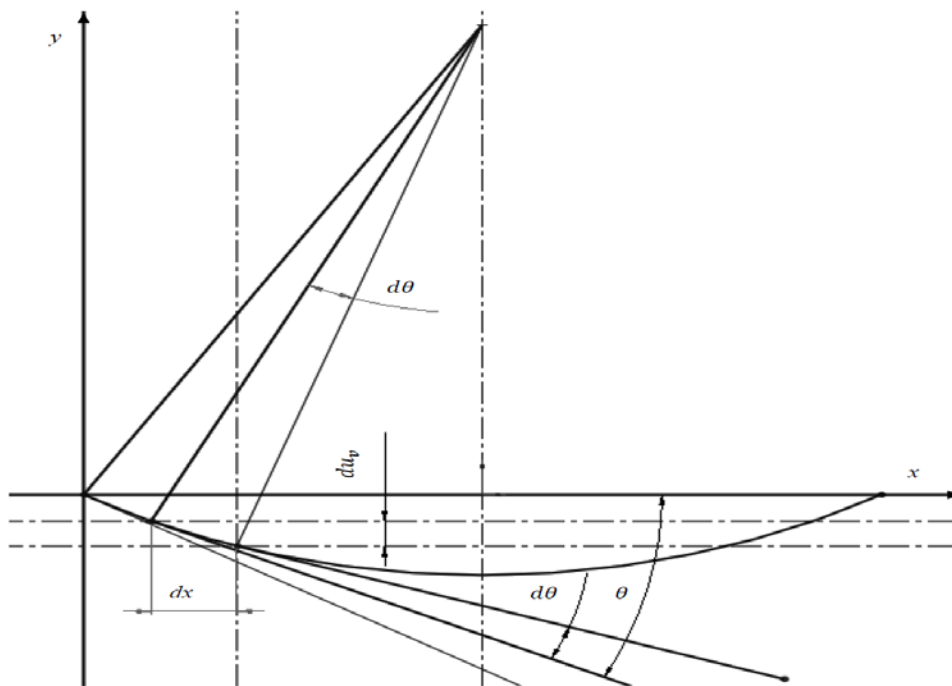


Figure III.2- Déformée de la poutre.

### III.3 Extension de la théorie des poutres au comportement viscoélastique.

Les hypothèses de Bernoulli s'appliquent, non seulement dans le cas des poutres élastiques, mais aussi pour étudier le comportement inélastique des poutres [24]. Nous nous proposons à étudier, dans cette section, le comportement différé d'une poutre en flexion. Nous supposons que la réponse du matériau suit le modèle de kelvin-Voigt (voir I.5.2.2).



### III.3.1 Relation moment courbure

Partons de l'équation d'équilibre statique de n'importe quelle section de la poutre qui, dans le cas d'une flexion pure, s'exprime par :

$$M(x, t) = - \int_S \sigma(x, y, t) y dS \quad (\text{III.20})$$

Dans le cadre de l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, le modèle de Kelvin-Voigt nous permet d'exprimer la relation contrainte-courbure par :

$$\sigma(x, y, t) = -y(E\chi(x, t) + \mu\dot{\chi}(x, t)) \quad (\text{III.21})$$

En supposant que la section est constante le long de la poutre, la symétrie de la flexion nous permet, en remplaçant la contrainte dans l'équation d'équilibre par son expression, d'écrire :

$$M(x, t) = \int_S (E\chi(x, t) + \mu\dot{\chi}(x, t)) y^2 dS \quad (\text{III.22})$$

En définissant le moment quadratique d'inertie par  $I = \int_S y^2 dS$ , on obtient :

$$\dot{\chi}(x, t) + \frac{E}{\mu} \chi(x, t) = \frac{M(x, t)}{\mu I} \quad (\text{III.23})$$

La solution générale de cette équation différentielle est donnée par :

$$\chi(x, t) = \left( C + \int \frac{M(x, t)}{\mu I} \exp\left(-\frac{E}{\mu} t\right) dt \right) \exp\left(-\frac{E}{\mu} t\right) \quad (\text{III.24})$$

Dans le cas du fluage ( $M$  est indépendant du temps), en tenant compte des conditions aux limites ( $\chi(x, 0) = 0$ ), l'équation s'écrit :

$$\chi(x, t) = \frac{M(x, t)}{EI} \left( 1 - \exp\left(-\frac{E}{\mu} t\right) \right) \quad (\text{III.25})$$

### III.4 Etude analytique d'une flexion viscoélastique sous sollicitations complexes

#### III.4.1 Description du problème

Considérons une poutre droite, constituée d'un matériau homogène et isotrope de longueur  $l$  et de section droite  $S$  de hauteur  $2h$  et de largeur  $b$ . La poutre est encadrée en une extrémité et soumise à une force transversale concentrée  $P$  et une autre force axiale  $N$  à son extrémité libre (Figure III.3). Sous les chargements envisagés, la poutre console est soumise à la fois à la traction et à la flexion selon un axe qui n'est pas l'axe principal d'inertie. Nous supposons que la réponse du matériau suit le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt et que les hypothèses d'Euler-Bernoulli et de Saint-Venant sont toujours valables.

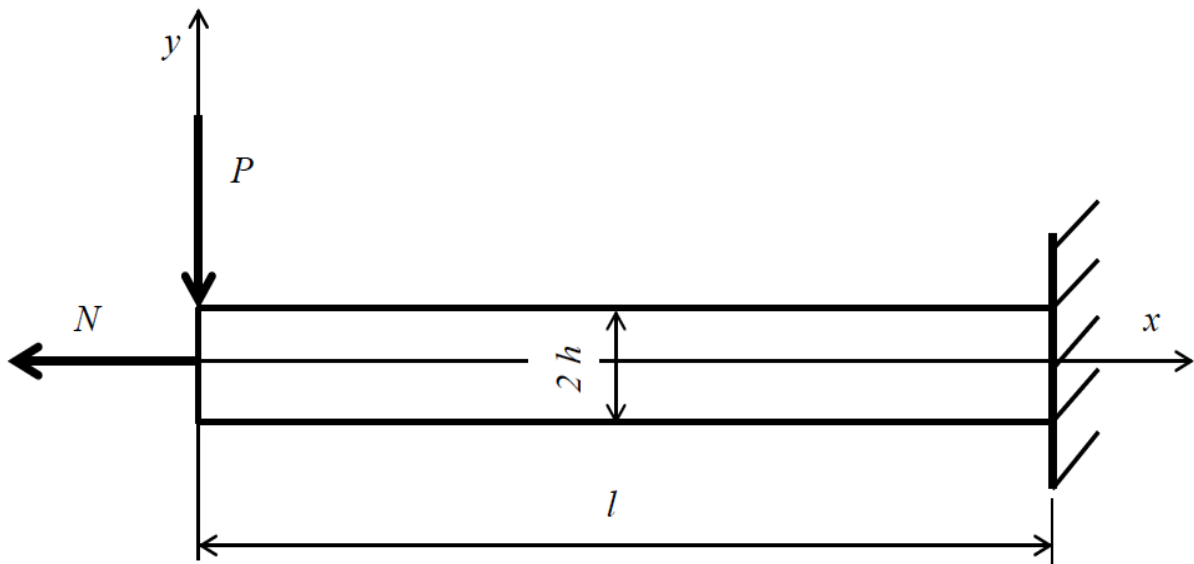


Figure III.3- Poutre console soumise à une sollicitation complexe

#### III.4.2 Détermination des déformations

Le moment ( $M = -Px$ ) généré par la charge  $P$  engendre une courbure  $\chi$  exprimée par l'Equation (III.25). Selon l'hypothèse d'Euler-Bernoulli ( $\varepsilon = -\chi y$ ), les déformations engendrées par le moment de flexion  $M$  sont évaluées à:

$$\varepsilon_M(x, y, t) = \frac{-yM(x, t)}{EI} \left( 1 - \exp\left(-\frac{E}{\mu}t\right) \right) \quad (\text{III.26})$$

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

D'autre part, en supposant que la contrainte produite par l'effort axial est uniforme, on peut exprimer les déformations dues à cet effort dans le cas du comportement viscoélastique selon le modèle de Kelvin-Voigt par :

$$\varepsilon_N(x, t) = (N/SE) \left( 1 - \exp\left(-\frac{E}{\mu} t\right) \right) \quad (\text{III.27})$$

La déformation totale due à la traction et la flexion est donc égale à:

$$\varepsilon(x, y, t) = \left( \frac{N}{SE} - \frac{yM(x, t)}{EI} \right) \left( 1 - \exp\left(-\frac{E}{\mu} t\right) \right) \quad (\text{III.28})$$

La déformation enregistrée au niveau de l'axe principal d'inertie correspondant à  $y = 0$  est non nulle (Figure III.4), elle évolue en fonction du temps (Figure III.5). Cela est dû à l'effet de la force axiale qui provoque un décalage de l'axe neutre qui prend position, dans ce cas, au-dessous de l'axe principal d'inertie. La déformation enregistrée au niveau de l'axe principal d'inertie est obtenue en mettant  $y = 0$  :

$$\varepsilon(x, 0, t) = \left( \frac{N}{SE} \right) \left( 1 - \exp\left(-\frac{E}{\mu} t\right) \right) \quad (\text{III.29})$$

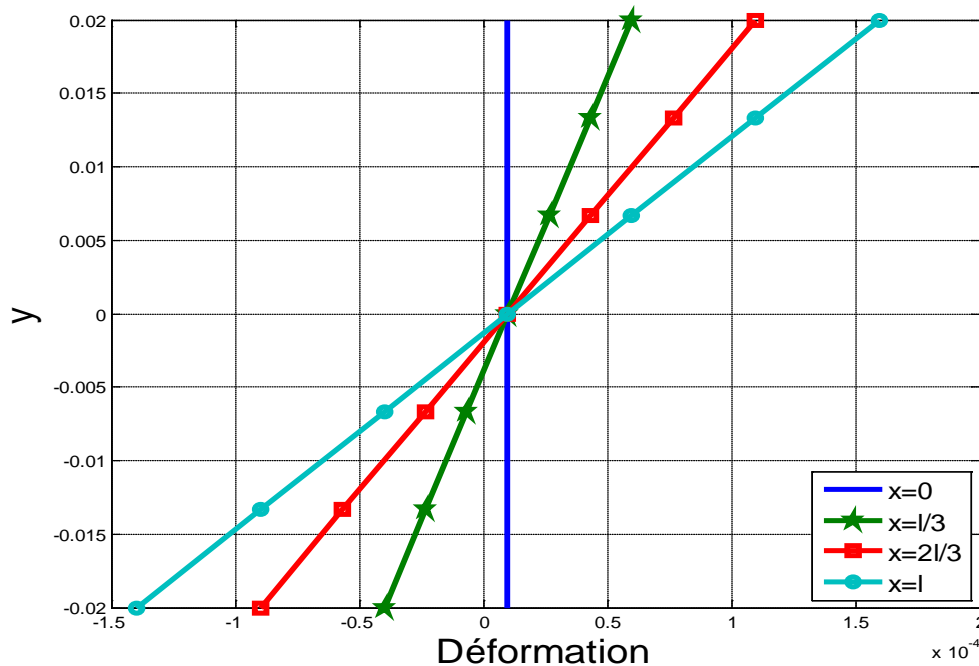


Figure III.4- Répartition des déformations à t=1h

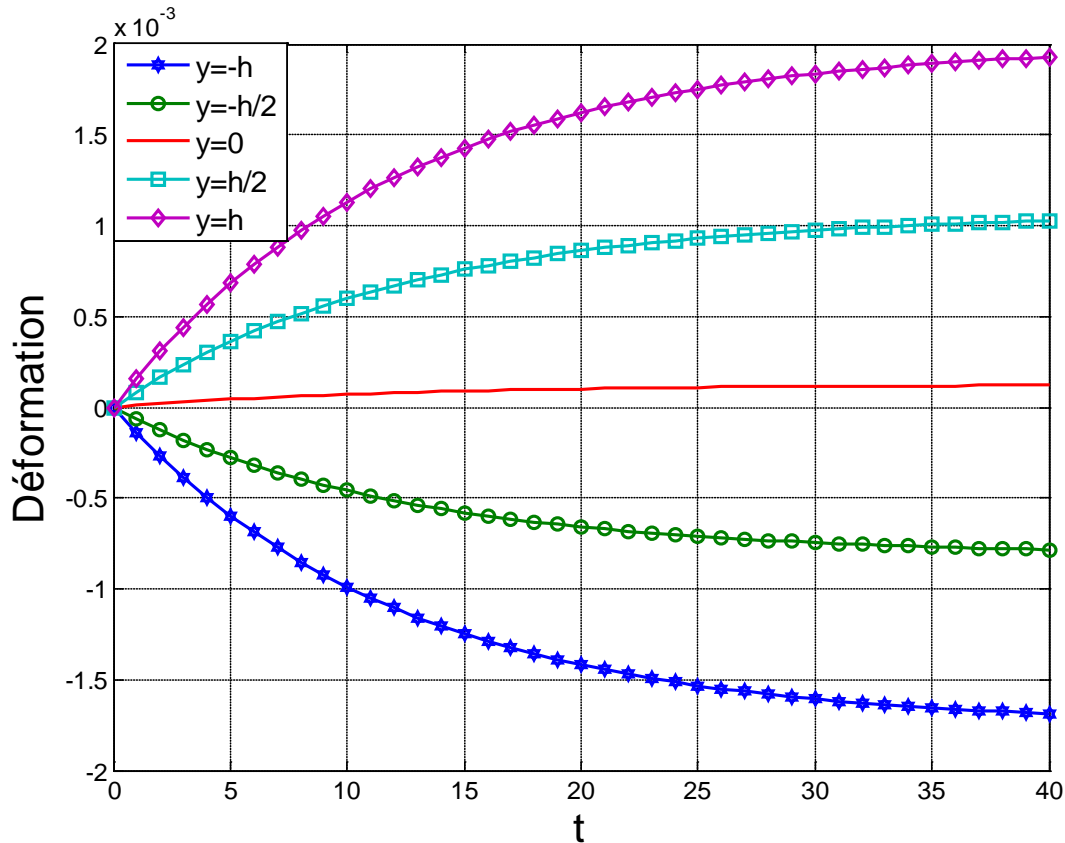


Figure III.5- Evolution des déformations dans la section la plus sollicitée

### III.4.3 Répartition des contraintes et position de l'axe neutre.

Les contraintes produites dans chaque section de l'élément poutre sont dues à la force axiale  $N$  et au moment de flexion  $M$  engendré par la force transversale  $P$ . En supposant que la contrainte produite par la force axiale est uniforme le long de la poutre, on peut écrire :

$$\sigma(x, y) = \frac{N}{S} - \frac{yM(x)}{I} \quad \text{(III.30)}$$

Il est à remarquer que la contrainte évaluée au niveau de l'axe principal de l'inertie ( $y = 0$ ) à l'extrémité libre est non nulle (Figure III.6). Elle est égale à la contrainte normale produite par la force axiale  $N$ .

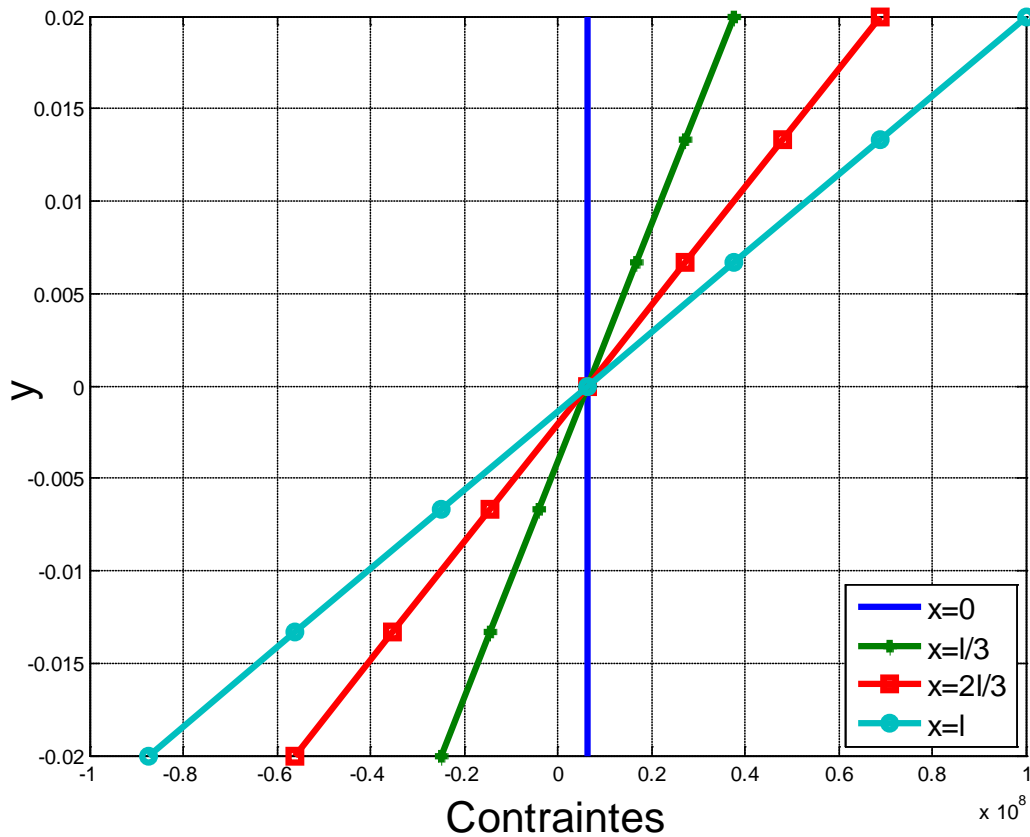


Figure III.6- Répartition des contraintes

En désignant par  $y_0$  la position de l'axe neutre, cette position correspond alors à la coordonnée où la contrainte totale est nulle. En mettant donc  $\sigma(x, y_0) = 0$ , on obtient:

$$y_0(x) = \frac{NI}{SM(x)} \quad (\text{III.31})$$

Nous remarquons que la position de l'axe neutre change progressivement le long de la poutre. Il est clair que la valeur de la position de l'axe neutre tend vers l'infini lorsque  $M$  tend vers 0 (Figure III.7). En effet avec un très faible moment, il faut une très grande distance  $y_0$  tendant à l'infini pour créer une contrainte qui peut équilibrer la contrainte due à la force axiale  $N$  afin de satisfaire l'équation d'équilibre. Inversement quand  $M$  tend vers l'infini, la coordonnée  $y_0$  tend vers 0. Cela s'explique par la dominance de la contrainte produite par le moment  $M$  à tel point que la contrainte produite par la force axiale  $N$  est considérée négligeable.

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

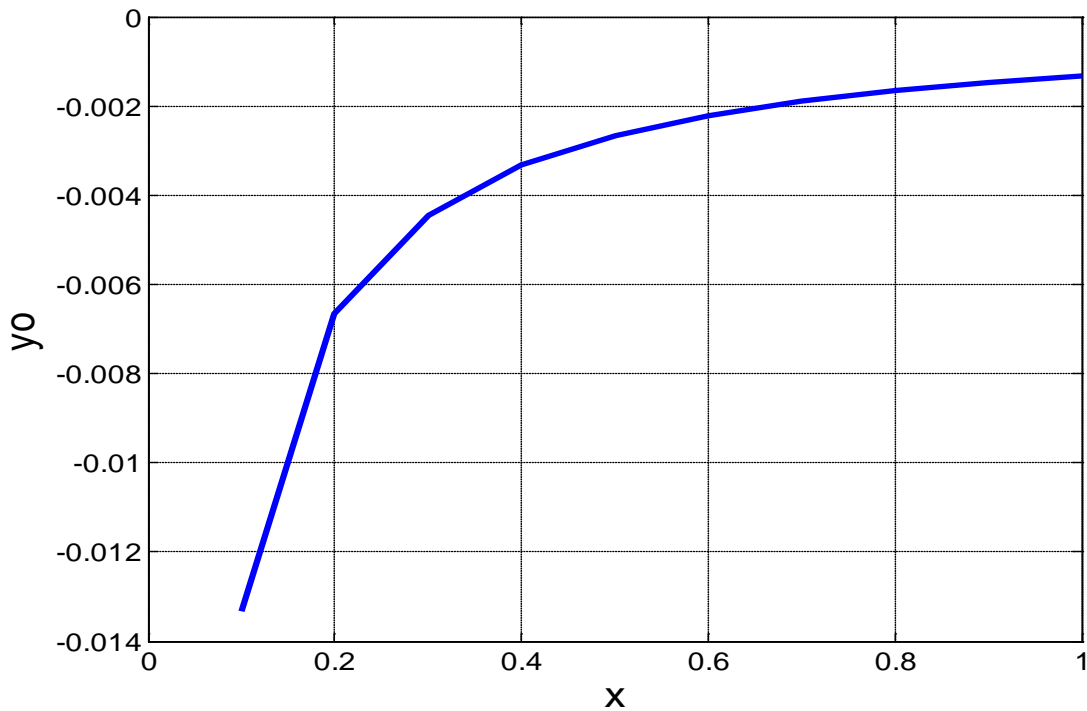


Figure III.7- Position de l'axe neutre le long de la poutre

#### III.4.4 Détermination de la flèche

Sous l'hypothèse des petits déplacements, la courbure est assimilée à la dérivée deuxième de la flèche. Dans le cas d'une poutre console, le moment engendré par la force  $P$  est évalué à ( $M(x) = -Px$ ). L'équation différentielle de la flèche s'écrit alors comme suit :

$$\frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{-Px}{EI} \left( 1 - \exp\left(-\frac{E}{\mu} t\right) \right) \quad (\text{III.32})$$

En intégrant deux fois, on obtient :

$$u_y(x, t) = \left( \frac{-Px^3}{6EI} + C_1 x + C_2 \right) \left( 1 - \exp\left(-\frac{E}{\mu} t\right) \right) \quad (\text{III.33})$$

A tout instant  $t$ , les conditions aux limites sont :

$$\frac{\partial u_y(l, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u_y(l, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{III.34})$$

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

Il s'ensuit que les constantes d'intégrations sont égales à :

$$C_1 = \frac{Pl^2}{2EI} \quad \text{et} \quad C_2 = -\frac{Pl^3}{3EI} \quad (\text{III.35})$$

La flèche prend sa formule finale à tout instant  $t$  et à tout point  $x$  comme suit :

$$u_y(x, t) = \frac{-P}{6EI} (2l^3 - 3l^2x + x^3) \left( 1 - \exp\left(-\frac{E}{\mu}t\right) \right) \quad (\text{III.36})$$

La flèche maximale à tout instant  $t > 0$  est repérée à l'extrémité libre de la poutre correspondant à la coordonnée  $x = 0$  (Figure III.8). Elle y est évaluée à :

$$\delta = u_y(0, t) = \frac{-Pl^3}{3EI} \left( 1 - \exp\left(-\frac{E}{\mu}t\right) \right) \quad (\text{III.37})$$

La Figure III.9 nous présente l'évolution de la flèche en fonction de temps pour différentes sections de la poutre. Nous y remarquons que plus on s'éloigne de l'encastrement plus l'évolution est importante. Nous soulignons également que la flèche finit par avoir un état stationnaire quels que soit  $x$  et  $t$ .

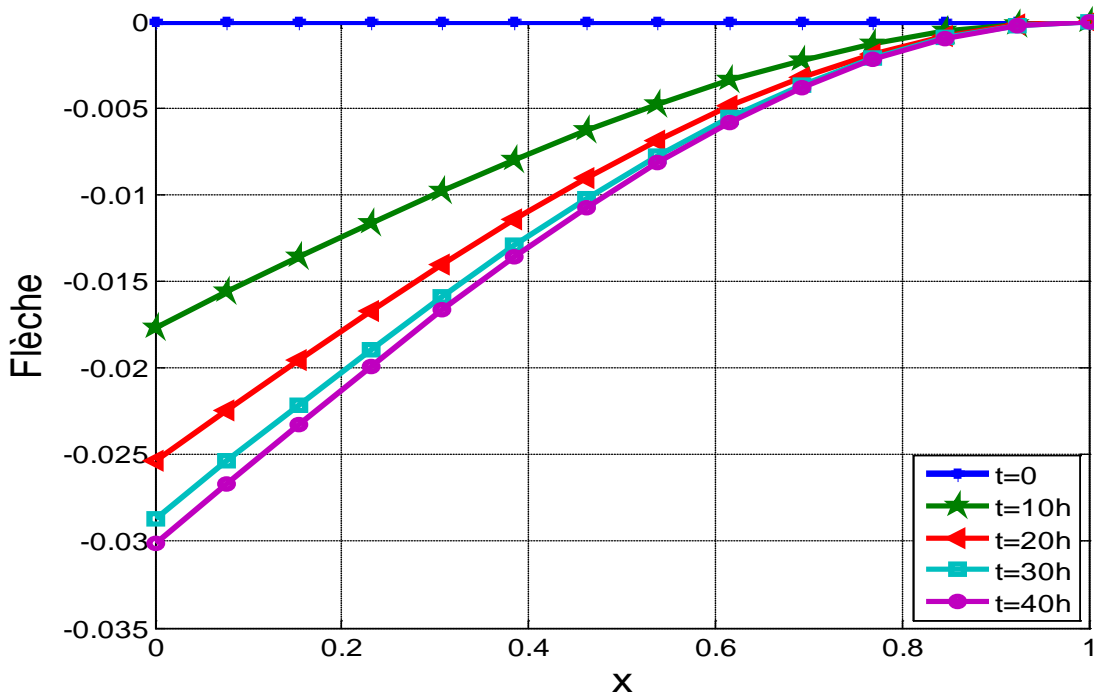


Figure III.8- Déformée de la poutre

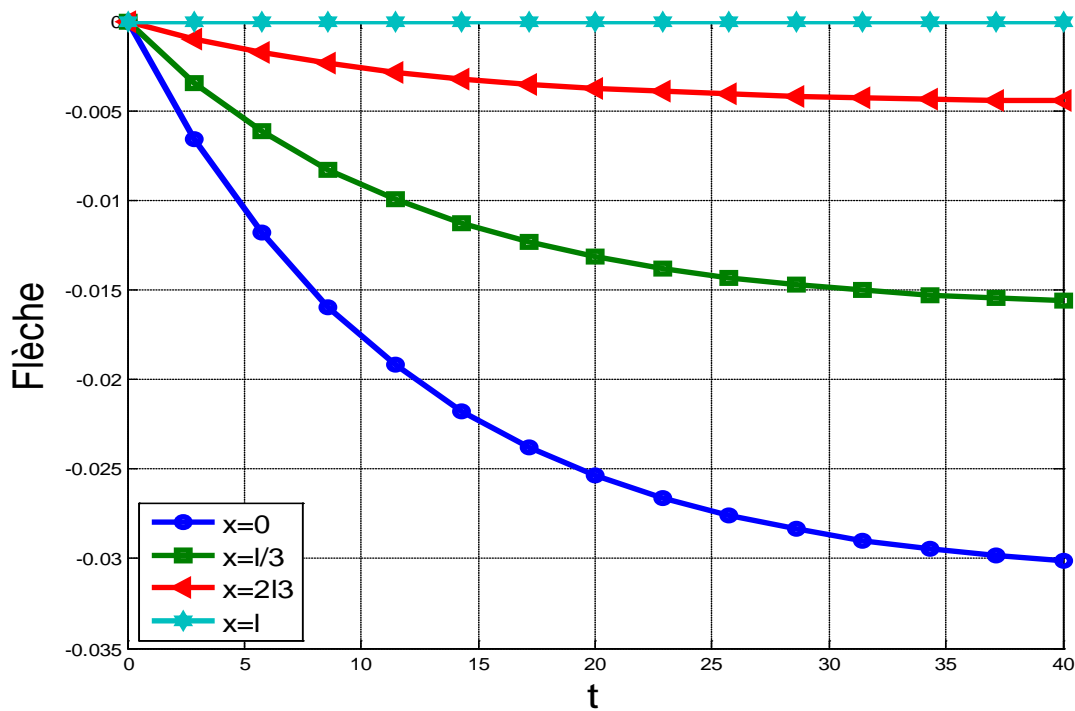


Figure III.9- Evolution de la déformée de la poutre

### III.5 Modélisation de la flexion élastoplastique des poutres prismatiques.

Considérons une poutre prismatique soumise à un moment de flexion  $M$  à ses extrémités (Figure III.10). La section transversale de la poutre a un axe de symétrie  $Oy$ , et l'axe de couple de flexion est parallèle à  $Oz$ . Le plan de la flexion coïncide avec le plan  $xy$ , la fibre neutre  $Ox$  fléchit en arc de rayon  $R$ . La seule contrainte non nulle ( $\sigma_{xx} = \sigma$ ) est donnée par :

$$\sigma = -\frac{My}{I} = -E\chi y \quad (\text{III.38})$$

Où  $E$  est le module de Young du matériau et  $I$  est le moment d'inertie de la section transversale par rapport à l'axe neutre  $Oz$ .

La déformation longitudinale élastique ( $\varepsilon_{xx} = \varepsilon$ ) de la poutre est donnée selon l'hypothèse d'Euler-Bernoulli par :

$$\varepsilon = -\chi y = -y/R \quad (\text{III.39})$$

où  $R$  est le rayon de courbure.



### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

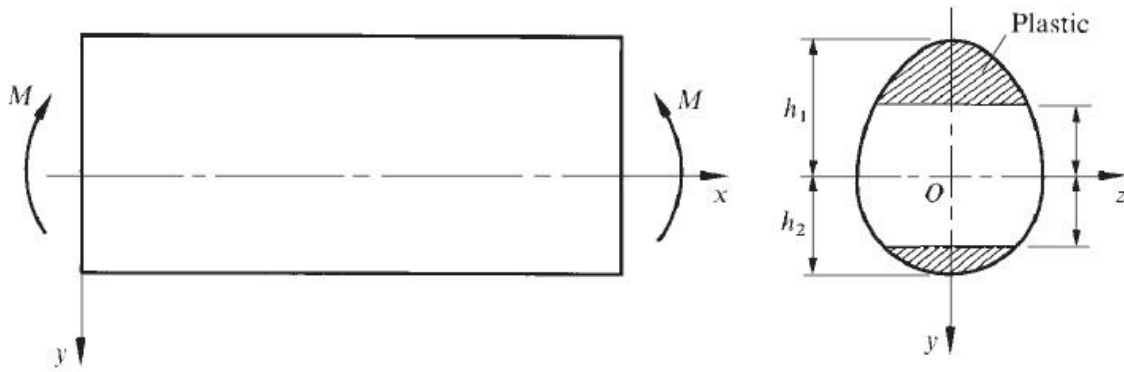


Figure III.10- Flexion élastoplastique [25].

#### III.5.1 Seuil de plasticité

Le premier écoulement a lieu dans la fibre la plus éloignée de l'axe neutre, lorsque la contrainte longitudinale  $\sigma = \sigma_e$ . Si la section transversale n'est pas symétrique par rapport à  $Oz$ , la zone plastique apparaît dans un côté et commence à progresser vers l'intérieur de la poutre avant que l'autre côté de la poutre n'atteigne le seuil d'écoulement. En augmentant le moment de flexion, les deux zones plastiques qui apparaissent se situent à distances égales par rapport à l'axe neutre. Cette distance est évaluée à :

$$y_e = \frac{\sigma_e}{E\chi} = \frac{\sigma_e R}{E} \quad (\text{III.40})$$

La position de l'axe neutre est déterminée à partir de l'équation d'équilibre de la section transversale :

$$\int \sigma b(y) dy = 0 \quad (\text{III.41})$$

Où  $b$  est la largeur de la section transversale pour chaque distance  $y$  de  $Oz$ .

Dans la zone élastique, la contrainte  $\sigma$  varie linéairement de 0 à l'axe neutre jusqu'à  $\sigma_e$  à la frontière de la zone plastique. Dans la zone plastique la contrainte est fonction de la déformation ( $|y|/R$ ) [25]. Le moment fléchissant peut alors être calculé par la formule :

$$M = - \int \sigma b(y) y dy \quad (\text{III.42})$$

### III.5.2 Flexion d'un matériau de comportement élastoplastique parfait

Prenons l'exemple d'une poutre rectiligne, homogène, isotrope et constituée d'un matériau de comportement élastoplastique parfait ; de longueur  $l$  et de section  $S$  constante et rectangulaire de largeur  $b$  et de hauteur  $2h$ . La poutre est soumise à la flexion sous l'effet d'un moment  $M$  appliqué à ses extrémités. Les hypothèses d'Euler-Bernoulli et de Saint Venant sont toujours valables. La limite élastique est atteinte en premier pour  $y = \pm h$ .

$$|\sigma|_{max} = \sigma_e = \frac{Mh}{I} \quad (III.43)$$

Le moment  $M_e$  et la courbure  $\chi_e$  valent alors :

$$M_e = \sigma_e \frac{I}{h} \quad \chi_e = \frac{M_e}{EI} \quad (III.44)$$

Une plastification progressive a lieu dans la section ( $M > M_e$ ). En désignant par  $y_e$  la distance entre l'axe neutre et la frontière élastique, on peut aisément montrer que :

$$\left(\frac{\chi}{\chi_e}\right) = \left(\frac{h}{y_e}\right) \quad (III.45)$$

On distingue alors deux zones de comportements différents (Figure III.11). La distribution des contraintes dans chacune d'elles s'exprime par :

$$\text{(Zone élastique): pour } -y_e \leq y \leq y_e \quad \sigma = -E\chi y \quad (III.46)$$

$$\text{(Zone plastique): pour } -h < y \leq -y_e \quad \text{et} \quad y_e < y \leq h \quad \sigma = \sigma_e \quad (III.47)$$

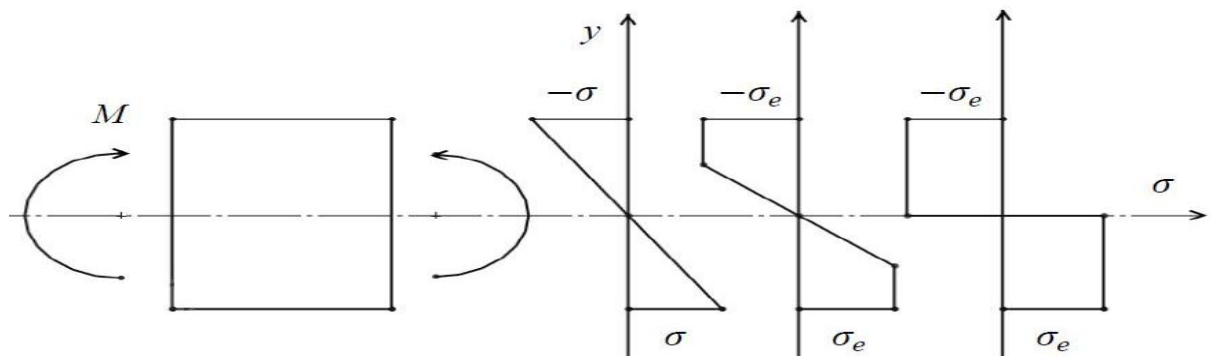


Figure III.11- Répartition des contraintes dans la section : régime élastique, régime élastoplastique, plastification complète.

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

Le moment de flexion est donné par :

$$M = -2b \int_0^h \sigma y dy = 2b \left( E\chi \int_0^{y_e} y^2 dy + \sigma_e \int_{y_e}^h y dy \right) \quad (\text{III.48})$$

En intégrant et remplaçant  $y_e$  par son expression (équation III.45), on obtient :

$$\frac{M}{M_e} = \frac{1}{2} \left( 3 - \left( \frac{\chi_e}{\chi} \right)^2 \right) \quad (\text{III.49})$$

La section est complètement plastifiée lorsque  $y_e \rightarrow 0$  ;  $\lim_{y_e \rightarrow 0}(\chi) = \infty$

A cet état correspond le moment ultime  $M_u$  correspondant à la ruine et défini par :

$$M_u = \int_S \sigma_e y dS = 2\sigma_e J \quad (\text{III.50})$$

Où  $J$  représente le moment statique de la demi-section  $S$

La Figure III.12 nous représente la relation entre le moment et la courbure. Nous y observons deux points limites  $M_e$  et  $M_u$  correspondant respectivement au moment seuil de plasticité (fin de la linéarité) et à la ruine du matériau.

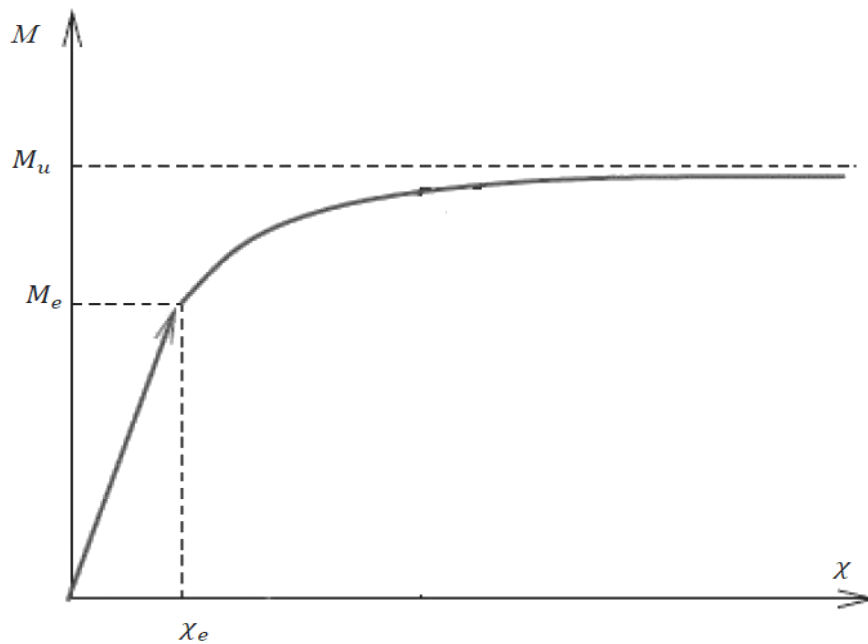


Figure III.12- Relation moment-courbure

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

Pour une section rectangulaire :  $I = \frac{2bh^3}{3}$  ;  $J = \frac{bh^2}{2}$  ;  $M_u = 1,5M_e$

Le moment ultime s'exprime par  $M_u = sM_e$ , où  $s$  est appelé facteur de forme. Le Tableau III.1 nous présente les facteurs de forme de quelques formes de sections usuelles.

Forme	Rectangle	Cercle	Tube	Triangle	Section en I	Losange
Facteur de forme	1.5	1.7	1.27	2.34	1.1-1.2	2

Tableau III.1- Facteurs de forme pour les sections usuelles [26]

#### III.5.3 Seuil d'écoulement en flexion composée

Dans la modélisation élastique parfaitement plastique qui est couramment adoptée, le domaine d'élasticité de l'élément de poutre est défini par la fonction  $f$  telle que :

$$f(M, N) = 0 \quad (\text{III.51})$$

où  $M$  est le moment de flexion supposé porté par l'un des axes principaux de la section,  $N$  est l'effort axial, positif en traction. Dans le cas d'une poutre de section rectangulaire ( $b \times 2h$ ), le premier écoulement a lieu aux fibres externes, la contrainte due à la traction et la flexion qui s'y établit pour  $-h$  et  $h$  est respectivement égale à :

$$\sigma = \frac{N}{2bh} + \frac{3M}{2bh^2}, \quad \sigma = \frac{N}{2bh} - \frac{3M}{2bh^2} \quad (\text{III.52})$$

La limite élastique correspond à :

$$\text{Max} \left( \left| \frac{N}{2bh} + \frac{3M}{2bh^2} \right|, \left| \frac{N}{2bh} - \frac{3M}{2bh^2} \right| \right) = \sigma_e \quad (\text{III.53})$$

L'effort axial  $N_e$  correspondant à l'écoulement dans le cas d'une traction simple et le moment  $M_e$  correspondant au premier écoulement dans le cas d'une flexion pure sont donnés respectivement par :

$$N_e = 2bh\sigma_e \quad M_e = 2bh^2\sigma_e/3 \quad (\text{III.54})$$

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

Il s'ensuit que l'Equation (III.53) s'écrit :

$$\text{Max} \left( \left| \frac{N}{N_e} + \frac{M}{M_e} \right|, \left| \frac{N}{N_e} - \frac{M}{M_e} \right| \right) = 1 \quad (\text{III.55})$$

#### III.5.4 Flexion élastoplastique à écrouissage non linéaire

Reprenons l'exemple de la section III.5.2, en prenant en considération cette fois l'effet de l'écrouissage. L'écoulement plastique a lieu toujours en premier pour  $y = \pm h$  où le moment  $M_e$  et le rayon de courbure  $R_e$  prennent pour valeurs :

$$M_e = \sigma_e \frac{I}{h} \quad R_e = \frac{Eh}{\sigma_e} \quad (\text{III.56})$$

Pendant la plastification, le rayon de courbure est défini par :

$$R = Ey_e/\sigma_e \quad (\text{III.57})$$

##### III.5.4.1 Distribution des contraintes

On suppose que le matériau suit la loi de comportement élastoplastique à écrouissage proposé par Ludwik [8] :

$$\frac{\sigma}{\sigma_e} = \left( \frac{E\varepsilon}{\sigma_e} \right)^n \quad \varepsilon \geq \frac{\sigma_e}{E} \quad (\text{III.58})$$

où  $0 \leq n \leq 1$ .  $\sigma$  et  $\varepsilon$  sont respectivement la contrainte et la déformation longitudinales dans la zone plastique. Comme ( $\varepsilon = -y/R$ ), la distribution des contraintes dans la section transversale est donnée par:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_e \frac{y}{y_e} & -y_e \leq y \leq y_e \\ \sigma = \sigma_e \left( \frac{y}{y_e} \right)^n & -h \leq y \leq -y_e \text{ et } y_e \leq y \leq h \end{cases} \quad (\text{III.59})$$

La Figure III.13 représente la distribution des contraintes dans les deux zones élastique et plastique délimitées par la hauteur  $y_e$ .

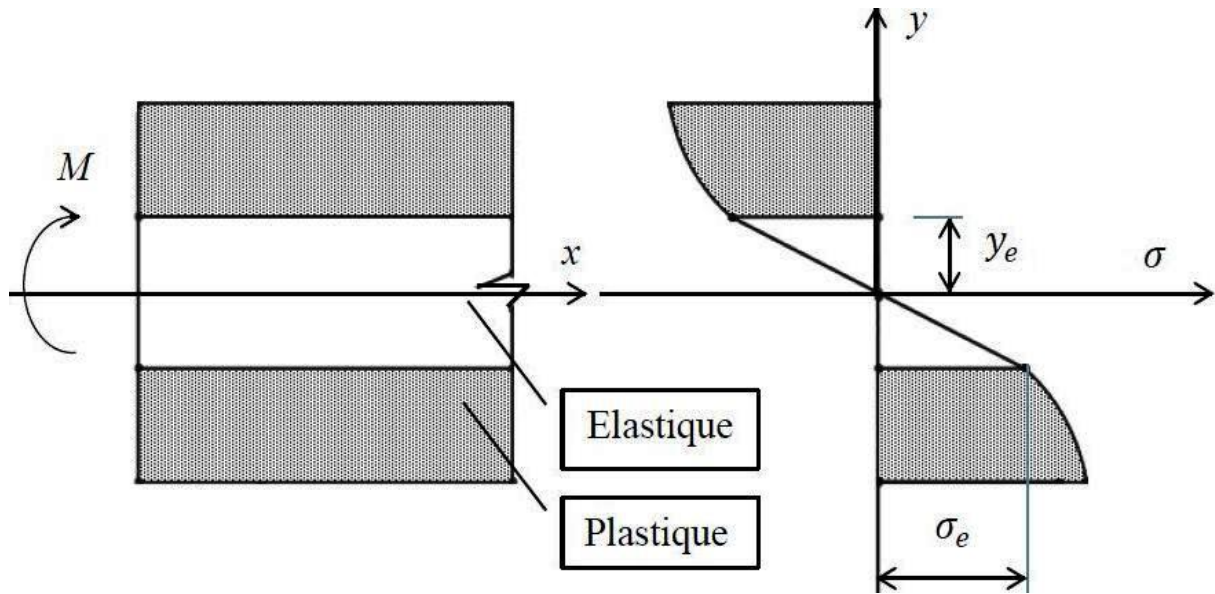


Figure III.13- Répartition des contraintes en flexion élastoplastique à écrouissage non linéaire.

### III.5.4.2 Relation moment-courbure

En tenant en compte la symétrie de la section, le moment fléchissant est donné par :

$$M = 2b \int_0^h \sigma y dy \quad (\text{III.60})$$

En remplaçant la contrainte par ses valeurs dans les zones élastique et plastique (Equation III.59), l'intégration de la formule (III.60) nous donne la relation moment-courbure qui s'exprime par [8, 25]:

$$\frac{M}{M_e} = \frac{1}{2+n} \left( 3 \left( \frac{R_e}{R} \right)^n - (1-n) \left( \frac{R}{R_e} \right)^2 \right) \quad (\text{III.61})$$

Nous remarquons que pour  $(n = 0)$ , et  $(n = 1)$  la relation moment-courbure se ramène respectivement à celle qui gouverne le comportement élastoplastique parfait et le comportement élastique linéaire. Pour  $0 < n < 1$ , nous assistons au comportement élastoplastique écrouissable. L'évolution du rapport  $(M/M_e)$  en fonction de  $(R_e/R)$  est représenté par le graphe de la Figure III.14. Pour différentes valeurs de  $n$ , le rapport  $M/M_e$  accroît progressivement avec le rapport  $(R_e/R)$ . Il est cependant à noter que pour  $n = 0$ , le moment  $M$  ne peut pas excéder la valeur  $(1.5 M_e)$  qui représente bien la valeur du moment ultime dans le cas d'une élastoplasticité parfaite (voir III.5.2).

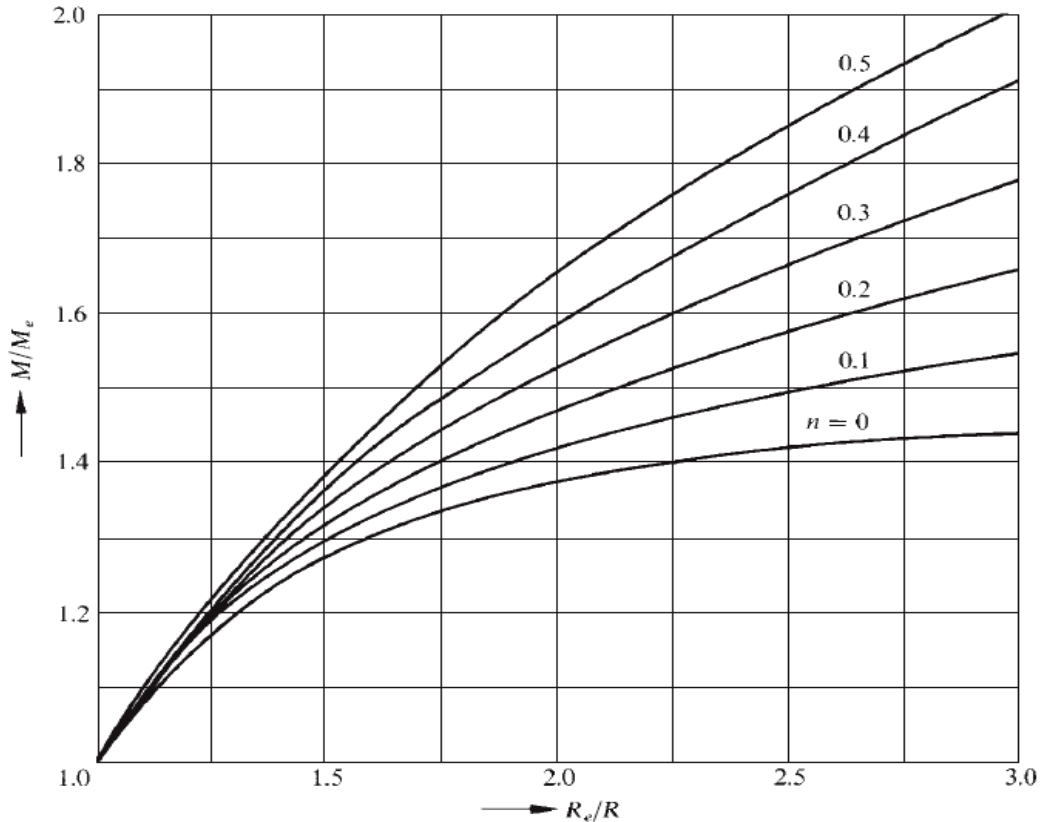


Figure III.14- Relation moment-courbure pour différents paramètres d'écroûissage [25]

### III.5.4.3 Résolution de l'équation non linéaire de la courbure

Les méthodes numériques utilisées pour approcher une racine  $\alpha$  d'une fonction  $f$  sont en général itératives. Elles consistent à construire une suite  $\{x^k\}$  telle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \alpha \quad (\text{III.62})$$

La convergence des itérations est caractérisée par la définition suivante :

On dit qu'une suite  $\{x^k\}$  construite par une méthode numérique converge vers  $\alpha$  avec un ordre  $p \geq 1$  si

$$\exists c > 0: \frac{|x^{k+1} - \alpha|}{|x^k - \alpha|^p} \leq c, \forall k \geq k_0 \quad (\text{III.63})$$

où  $k_0 \geq 0$  est un entier.

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

Afin de mettre au point des algorithmes possédant de meilleures propriétés de convergence, il est nécessaire de prendre en compte les informations données par les valeurs de  $f$  et, éventuellement, par sa dérivée  $f'$  (si  $f$  est différentiable) ou par une approximation convenable de celle-ci [27].

En écrivant le développement de Taylor de  $f$  en  $\alpha$  au premier ordre, On obtient la version linéarisée :

$$f(\alpha) = 0 = f(x) + (\alpha - x)f'(\xi) \quad (\text{III.64})$$

où  $\xi$  est entre  $\alpha$  et  $x$ . L'équation conduit à la méthode itérative :

$$x^{k+1} = x^k - q_k^{-1}f(x^k) \quad \forall k \geq 0 \quad (\text{III.65})$$

où  $q_k$  est une approximation de  $f'(x^k)$  qui peut prendre plusieurs formes :

***La méthode de la sécante.***

$$q_k = \frac{f(x^k) - f(x^{k-1})}{x^k - x^{k-1}} \quad (\text{III.66})$$

En donnant deux valeurs initiales  $x^{-1}$  et  $x^0$ , on déduit le schéma itératif suivant :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{x^k - x^{k-1}}{f(x^k) - f(x^{k-1})}f(x^k) \quad (\text{III.67})$$

Si les coordonnées initiales sont choisies assez proches de  $\alpha$ , la convergence est d'ordre  $p \approx 1.63$

***La méthode de Newton-Raphson***

$$q_k = f'(x^k) \quad (\text{III.68})$$

En donnant une seule valeur initiale  $x^0$ , on obtient le schéma itératif de la méthode de Newton-Raphson :

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \quad (\text{III.69})$$



### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

A la  $k$ -ème itération, la méthode de Newton-Raphson nécessite l'évaluation des deux fonctions  $f$  et  $f'$  au point  $x^k$ . Cet effort de calcul supplémentaire est plus que compensé par une accélération de la convergence, la méthode de Newton-Raphson étant d'ordre 2.

Etant la plus convergente, nous privilégions le schéma itératif de Newton-Raphson pour évaluer la courbure élastoplastique. Pour ce faire, l'Equation (III.61) reliant le moment au rayon de courbure s'écrit :

$$f(R) = \frac{1}{2+n} \left( 3 \left( \frac{R_e}{R} \right)^n - (1-n) \left( \frac{R}{R_e} \right)^2 \right) - \frac{M}{M_e} = 0 \quad (\text{III.70})$$

Pour simplifier l'équation, nous mettons  $r = R/R_e$  et  $m = M/M_e$ , on obtient alors :

$$f(r) \frac{1}{2+n} (3r^{-n} - (1-n)r^2) - m = 0 \quad (\text{III.71})$$

#### **Algorithme de Newton Raphson**

$$\left. \begin{array}{l} k = 1,2,3, \dots L \\ i = 1,2,3, \dots, N \\ \text{Valeur initiale} \\ r_i^1 = r^1 \\ \text{Schéma itératif} \\ f(r_i^k) = \frac{1}{2+n} \left( 3(r_i^k)^{-n} - (1-n)(r_i^k)^2 - m_i \right) \\ f'(r_i^k) = \frac{1}{2+n} \left( -3n(r_i^k)^{-(n+1)} - 2(1-n)(r_i^k) \right) \\ r_i^{k+1} = r_i^k - \frac{f(r_i^k)}{f'(r_i^k)} \\ \text{Critère d'arrêt} \\ |r_i^{k+1} - r_i^k| \leq \xi \end{array} \right\} \quad (\text{III.72})$$

La valeur initiale ( $r_1 = R/R_e$ ) est choisie entre 0 et 1. Elle dépend aussi bien du rapport ( $m = M/M_e$ ) que du module d'érouissage  $n$  puisqu'ils sont les seuls éléments dont dépend le rapport  $r$ .

### III.5.5 Flexion des poutres sous chargement transversal

#### III.5.5.1 Flèche d'une poutre de comportement élastoplastique parfait

Considérons une poutre fléchie sous l'effet d'une charge transversale agissante dans le plan de symétrie (Figure III.15). En négligeant l'effet des efforts de cisaillement, la relation entre le moment de flexion et le rayon de courbure est alors identique à celle du cas de la flexion pure. En supposant que le matériau est de comportement élastoplastique parfait et que la section transversale est de forme rectangulaire, la relation moment- rayon de courbure s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{R_e}{R} = \frac{M}{M_e} & M \leq M_e \\ \frac{R_e}{R} = \left( 3 - 2 \left( \frac{M}{M_e} \right) \right)^{-1/2} & M \geq M_e \end{cases} \quad (\text{III.73})$$

Et comme  $R/R_e = y_e/h$  pour une section élastoplastique où  $2h$  est la hauteur de la section et  $2y_e$  est celui du cœur élastique, on peut avoir :

$$\frac{M}{M_e} = \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{y_e^2}{h^2} \right) \quad (\text{III.74})$$

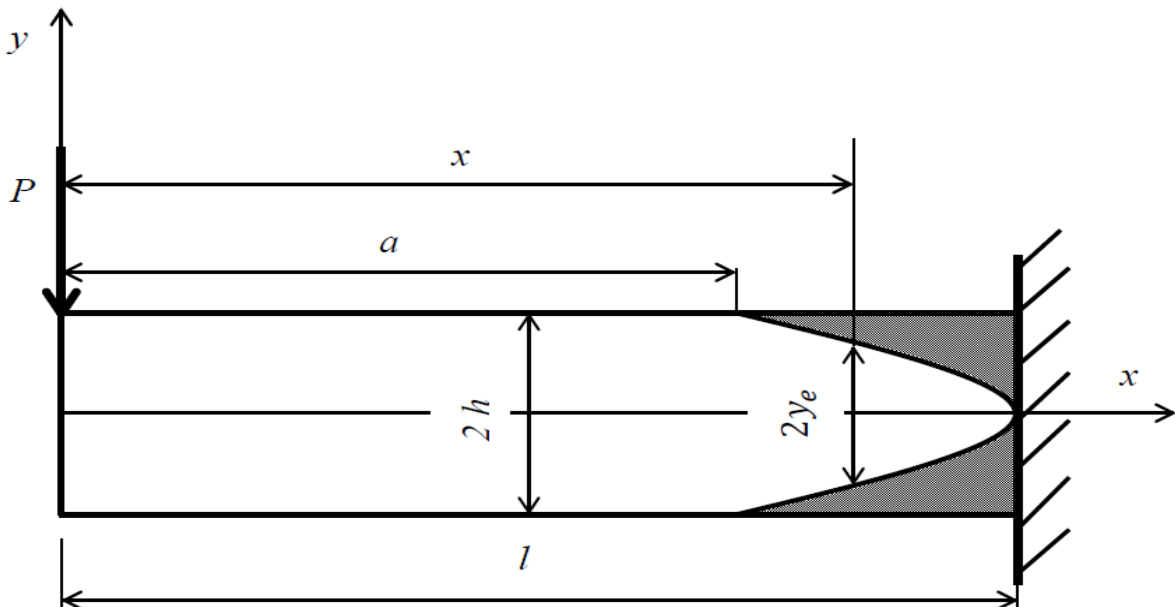


Figure III.15- Etat de déformation élastoplastique d'une poutre cantilever

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

Le déplacement  $u_y$  de chaque particule de l'axe longitudinal de la poutre est supposé petit par rapport aux dimensions de la section transversale. En dénotant par  $\theta$  l'angle de rotation que fait la déformée avec l'axe des  $x$ , on peut écrire :

$$\theta = \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \frac{1}{R} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \quad (\text{III.75})$$

Reprenons l'exemple d'une poutre cantilever de longueur  $l$  et de section rectangulaire de largeur  $b$  et de hauteur  $2h$  soumise à une charge transversale concentrée  $P$  à son extrémité libre (Figure III.15).

L'écoulement plastique a lieu en premier au niveau de l'extrémité encastree de la poutre pour  $y = \pm h$  où le moment atteint la valeur ( $M_e = P_e l$ ). En augmentant le chargement  $P$  en dessus de  $P_e$ , la zone plastique progresse symétriquement à partir des coins de la section encastree. Quand le moment atteint sa limite élastique à une distance  $a$  de l'extrémité libre de la poutre on peut écrire :

$$\frac{P_e}{P} = \frac{a}{l} \quad \frac{M}{M_e} = \frac{x}{a} \quad (\text{III.76})$$

Cela nous permet de réécrire la relation moment-courbure sous la forme :

$$\left(\frac{y_e}{h}\right)^2 = 3 - \frac{2x}{a} = 3 - \frac{2x}{l} \left(\frac{P}{P_e}\right) \quad (\text{III.77})$$

La ruine de la poutre a lieu quand le moment atteint sa valeur ultime ( $M_u = 1.5M_e$ ) dans la section encastree. Le chargement correspondant à la ruine est alors ( $P_u = 1.5P_e$ ) et la distance  $a$  est évaluée à  $2l/3$ .

L'équation différentielle de la déformée de la poutre est donnée par :

$$\begin{cases} R_e \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{x}{a} & x \leq a \\ R_e \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \left(3 - \frac{2x}{a}\right)^{-1/2} & x \geq a \end{cases} \quad (\text{III.78})$$

En intégrant et prenant en considération les conditions aux limites :

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

$$\begin{cases} \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 & \text{pour } x = l \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \text{ est continue} & \text{pour } x = a \end{cases} \quad (\text{III.79})$$

on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{a}{R_e} \left( \sqrt{3 - \frac{2x}{a}} - \sqrt{3 - \frac{2l}{a}} \right) & a \leq x \leq l \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} = -\frac{a}{R_e} \left( \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \sqrt{3 - \frac{2l}{a}} \right) & 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad (\text{III.80})$$

Et comme le déplacement  $u_y$  est nul à l'extrémité encastree ( $x = l$ ), l'intégration des équations ci-dessus nous donne :

$$\begin{cases} u_y = \frac{a^2}{3R_e} \left( \left( 3 - \frac{2x}{a} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( 3 + \frac{l-3x}{a} \right) \sqrt{3 - \frac{2l}{a}} \right) & a \leq x \leq l \\ u_y = \frac{a^2}{3R_e} \left( 5 - \frac{x}{2a} \left( 9 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \left( 3 + \frac{l-3x}{a} \right) \sqrt{3 - \frac{2l}{a}} \right) & 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad (\text{III.81})$$

Pour  $x = 0$ , la relation entre l'angle de rotation  $\theta$  et la déflexion  $\delta$  sont données par:

$$\frac{\theta}{\theta_e} = \frac{P_e}{P} \left( 3 - 2 \sqrt{3 - \frac{2P}{P_e}} \right) \quad (\text{III.82})$$

$$\frac{\delta}{\delta_e} = \left( \frac{P_e}{P} \right)^2 \left( 5 - \left( 3 + \frac{P}{P_e} \right) \sqrt{3 - \frac{2P}{P_e}} \right) \quad (\text{III.83})$$

Où  $\theta_e$  et  $\delta_e$  sont respectivement l'angle de rotation et la déflexion correspondant à la limite élastique et qui ont pour valeurs :

$$\theta_e = \frac{l}{2R_e} = \frac{\sigma_e l}{2Eh} \quad \delta_e = \frac{l^2}{3R_e} = \frac{\sigma_e l^2}{3Eh} \quad (\text{III.84})$$

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

La Figure III.16 présente la relation entre les rapports  $(\delta/\delta_e)$  et  $(P/P_e)$ , qui peut refléter la relation entre la charge et la déflexion, pour différents modes de chargement.

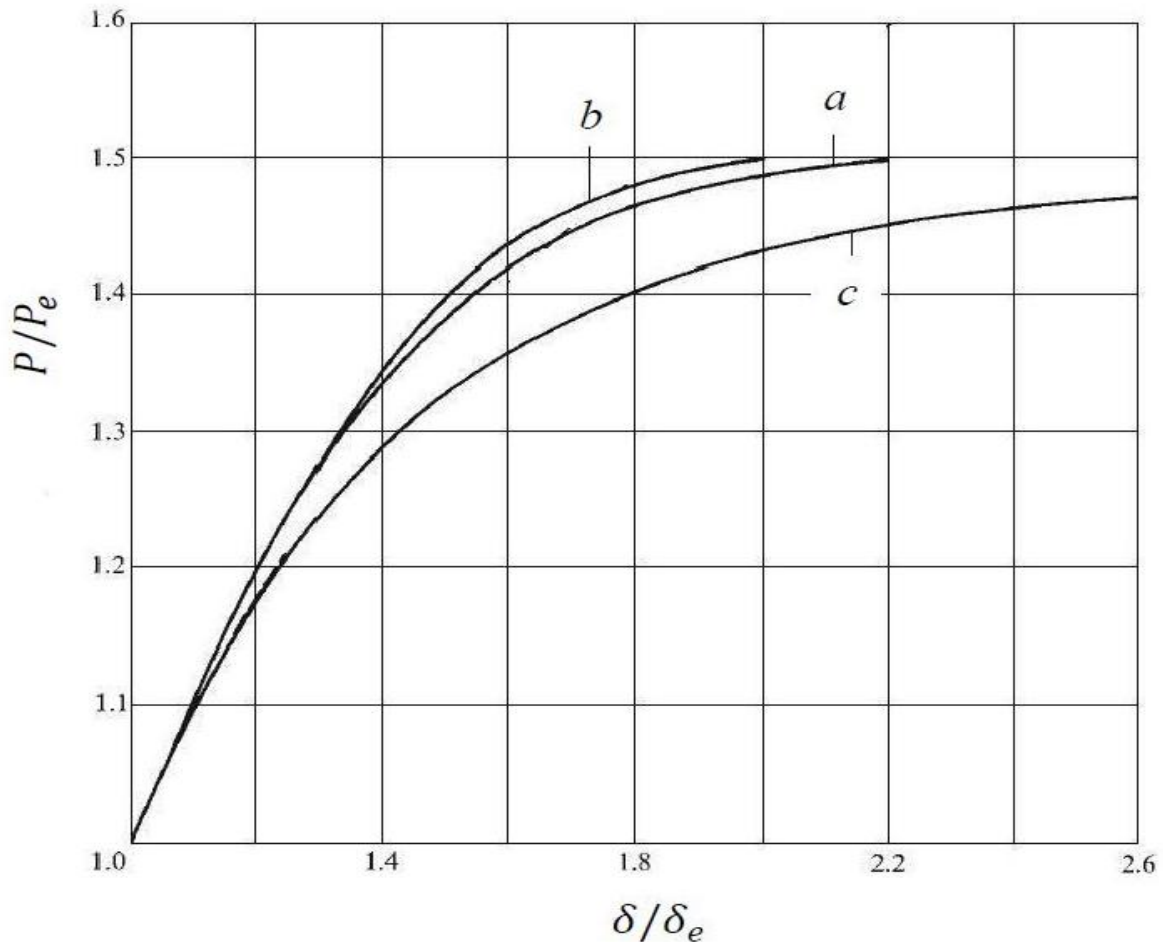


Figure III.16- Courbe de la relation charge-déflexion. a. Poutre console chargée à son extrémité libre ; b. Poutre console uniformément chargée. c. Poutre simplement appuyée uniformément chargée [25]

#### III.5.5.2 Flèche d'une poutre de comportement élastoplastique écrouissable

En prenant en compte l'effet de l'écrouissage, un calcul numérique est nécessaire pour la résolution de l'équation différentielle de la flèche.

##### *Méthode des différences finies*

La méthode des différences finies permet d'obtenir des approximations des dérivées d'une fonction. Le domaine de calcul est discrétisé en un nombre fini de points sur lesquels on approche les opérateurs de dérivation des équations modèles par des développements en séries

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

de Taylor tronquées à l'ordre de précision choisie. Elle se distingue par un cout de calcul raisonnable et surtout par la simplicité de sa mise en œuvre. Dans le calcul des flèches des poutres, la méthode est bien adaptée aussi bien en élasticité qu'en plasticité [28]. Il est donc choisi de mettre en place un schéma aux différences finies d'ordre 2 pour le calcul. Pour ce faire, la longueur de la poutre est discrétisé en  $N - 1$  éléments. Le schéma des différences finies d'ordre deux centré est donné par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.85})$$

avec  $i = 2, 3, \dots, N$

Sous l'hypothèse des petits déplacements, la courbure étant assimilée à la dérivée deuxième de la flèche, nous pouvons écrire :

$$\chi_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.86})$$

avec  $\Delta x = l/(N - 1)$

Le problème se réduit alors en un système d'équations linéaires :

$$[A]\{u\} = (\Delta x)^2[\chi] \quad (\text{III.87})$$

Le déplacement vertical et l'angle de rotation étant nuls à l'extrémité encastree correspondant à  $(x = l)$ , nous pouvons exprimer les conditions aux limites comme suit :

$$u_N = 0 \quad u_N - u_{N-1} = 0$$

#### *Algorithme de calcul*

$$\left| \begin{array}{l} \text{Discrétisation} \\ i = 1, 2, 3, \dots, N \\ \Delta x = \frac{l}{N - 1} \\ \text{Construction de la matrice } A \\ \text{Résolution de système d'équations} \\ \{u\} = (\Delta x)^2 [A]^{-1} [\chi] \end{array} \right. \quad (\text{III.88})$$

### **III.6 Simulation numérique d'une poutre en flexion élastoplastique**

#### **III.6.1 Description du problème**

Nous nous proposons à simuler le comportement d'une poutre console telle que décrite sur la Figure III.15. Nous supposons que la poutre de section rectangulaire  $(40 \times 60)mm^2$  et de longueur de  $1000mm$  est constituée d'un matériau de comportement élastoplastique à écrouissage non linéaire dont les paramètres se réfèrent aux travaux de [29] avec un module de Young  $E = 71000 MPa$  et une contrainte seuil  $\sigma_e = 300 MPa$ .

#### **III.6.2 Méthodes numériques utilisées**

Nous privilégions la méthode itérative de Newton-Raphson pour résoudre l'équation de la courbure (Equation III.61) selon l'algorithme (III.72) avec une erreur absolue  $= 10^{-15}$ . Une fois la courbure obtenue, nous optons par ailleurs pour un schéma aux différences finies d'ordre 2 en se référant à l'algorithme (III.88) pour évaluer la flèche. L'implémentation de ces méthodes numériques est faite sous Matlab.

#### **III.6.3 Présentation et discussion des résultats**

##### **III.6.3.1 Influence du module d'écrouissage sur la courbure**

La Figure III.17 nous présente la courbure enregistrée en fonction de la longueur de la poutre suite à un chargement de  $12 KN$ . La linéarité de la courbure dans la région élastique définie par  $(M \leq M_e)$  résulte de la linéarité du moment fléchissant  $(M = -Px)$ . Or dès que le moment fléchissant dépasse le moment seuil  $M_e$ , un profil non linéaire s'établit et nous observons un accroissement au fur et à mesure que nous nous dirigeons vers l'encastrement où le moment prend sa valeur maximale. La vitesse de cet accroissement est dépendante du module d'écrouissage qui l'influence considérablement. Il est à rappeler que nous nous approchons au comportement élastoplastique parfait avec de faibles valeurs du module  $n$  avoisinant le zéro alors que nous nous convergeons vers le comportement élastique linéaire en augmentant la valeur de  $n$  au voisinage de 1.

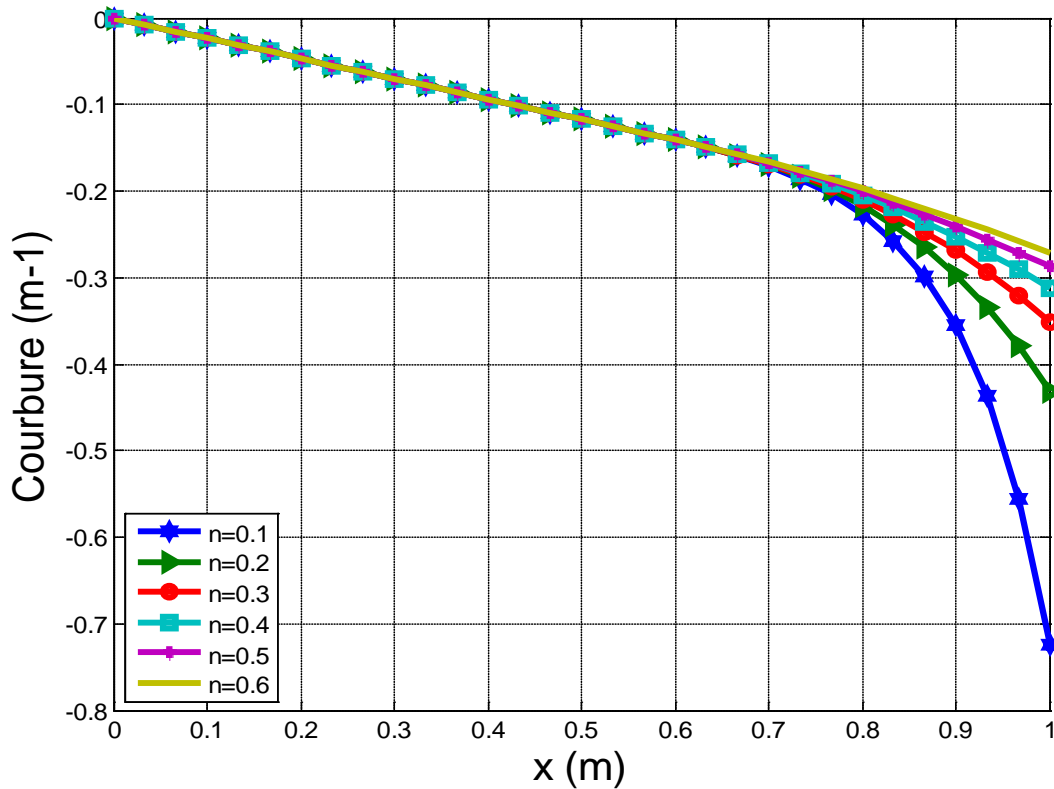


Figure III.17- Influence du module d'écrouissage sur la courbure

### III.6.3.2 Répartition des contraintes et des déformations

La Figure III.18 nous présente la répartition des contraintes en fonction de  $y$  dans 5 sections de la poutre avec un paramètre d'écrouissage ( $n = 0.2$ ). Il est évident que la contrainte est nulle à l'extrémité libre, elle augmente proportionnellement avec le moment fléchissant en ayant un comportement linéaire quand ce moment est inférieur au moment seuil  $M_e$ . La linéarité est encore établie avec un moment supérieur au moment seuil dans la zone élastique ( $|y| \leq y_e$ ) où la contrainte n'a pas encore atteint le seuil de plasticité. La non linéarité a lieu dans la zone plastifiée ( $|y| > y_e$ ) où la contrainte dépasse la limite élastique  $\sigma_e$ . D'autre part, si nous considérons la courbe des contraintes le long de la poutre sur la Figure III.19, nous pouvons constater que l'allure est linéaire en dessous du moment seuil. Cependant, dans les fibres extérieures ( $y = \pm h$ ), un accroissement non linéaire s'établit dès qu'on dépasse ce seuil. Il est à noter que pour les autres fibres ( $|y| < \pm h$ ), il y a accroissement plus rapide dès qu'on dépasse le moment seuil mais qui diminue sa vitesse dès qu'on dépasse la contrainte seuil  $\sigma_e$ . Cela s'explique par les deux formules de l'Equation (III.59) gouvernant la contrainte dans la zone élastoplastique.



### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

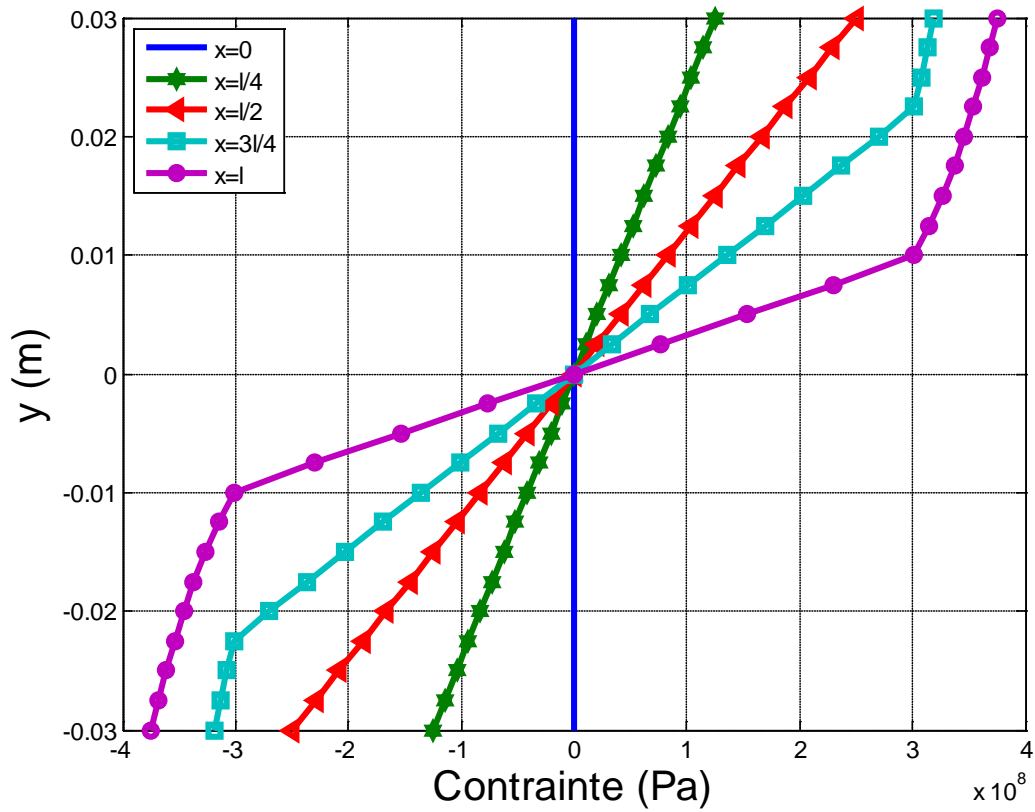


Figure III.18- Répartition des contraintes en fonction de la hauteur de la poutre

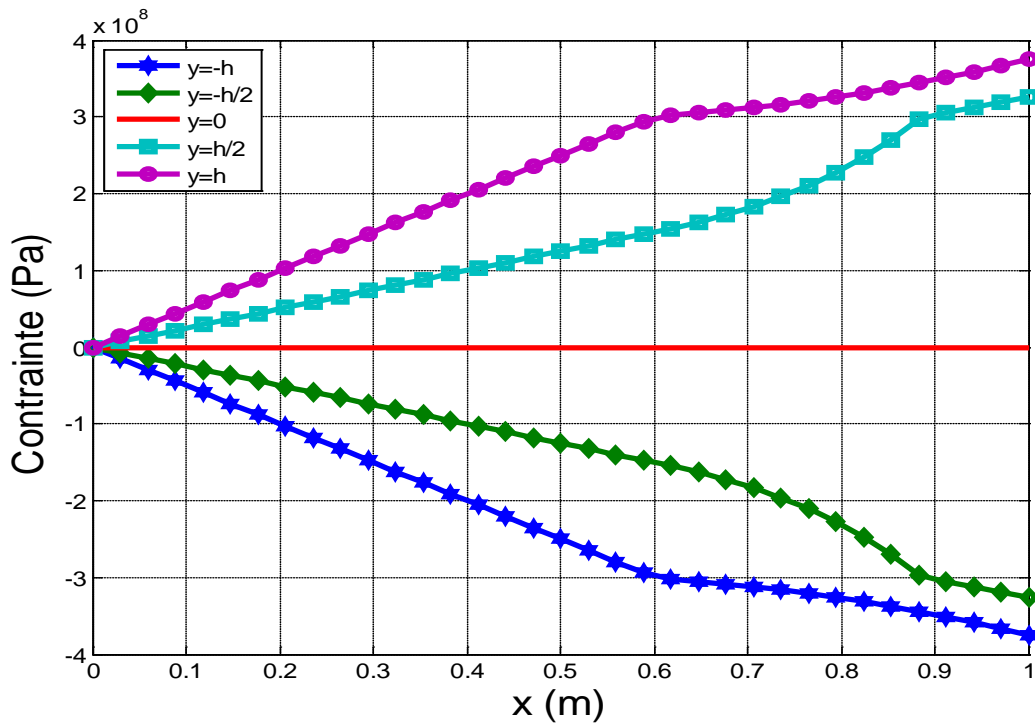


Figure III.19- Répartition des contraintes le long de la poutre

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

Les déformations qui, sous l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, conservent l'allure linéaire en fonction de  $y$  suivent le profil de la courbure en fonction des  $x$  (Figure III.20).

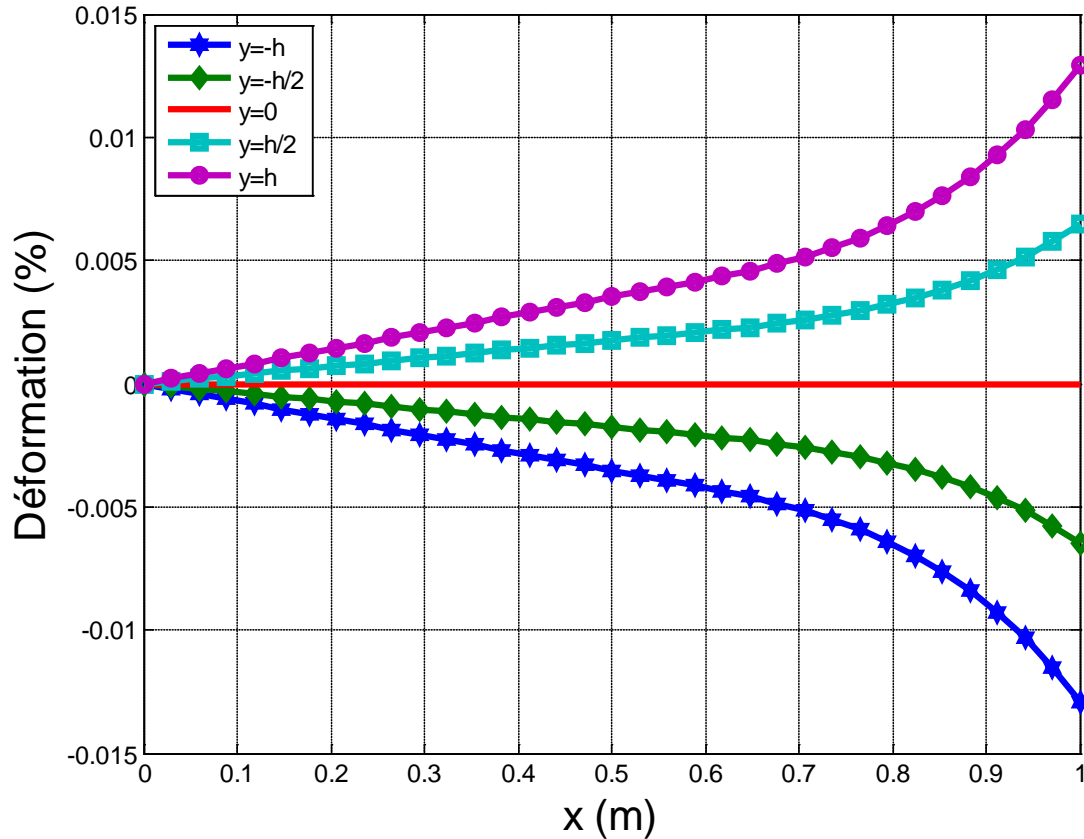


Figure III.20- Répartitions des déformations le long de la poutre

Les Figures III.22 et III.23 nous représentent la répartition des contraintes et des déformations en chaque point dans les zones élastique et plastique délimitées par la fonction  $y_e(x)$  représentée sur la Figure III.21. Il est à noter que les valeurs maximales des contraintes et des déformations prennent lieu dans les deux coins de l'encastrement où la plastification a lieu en premier temps. Elles diminuent progressivement en se dirigeant vers l'extrémité libre et/ou vers l'axe neutre.

La relation contrainte-déformation dans chaque point de la poutre est représentée par la courbe de la Figure III.24 correspondant à une courbe typique de traction-compression d'un matériau de comportement élastoplastique écrouissable.

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

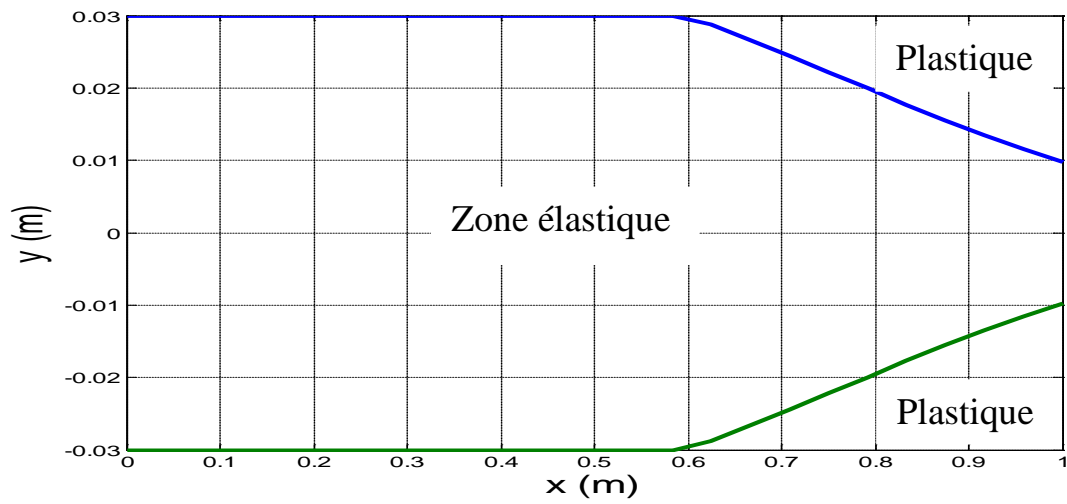


Figure III.21- Limite élastique-plastique

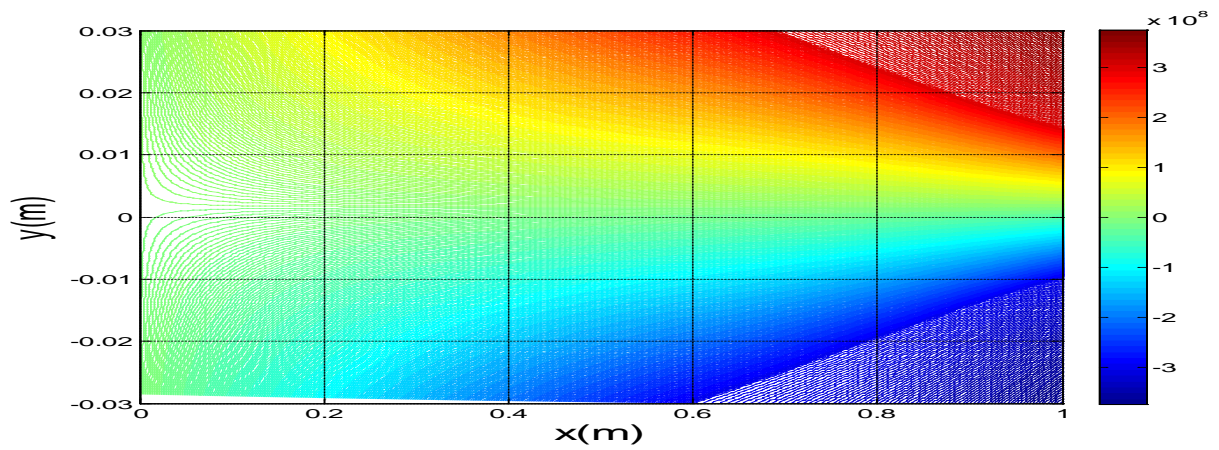


Figure III.22- Répartition des contraintes en fonction de  $(x, y)$

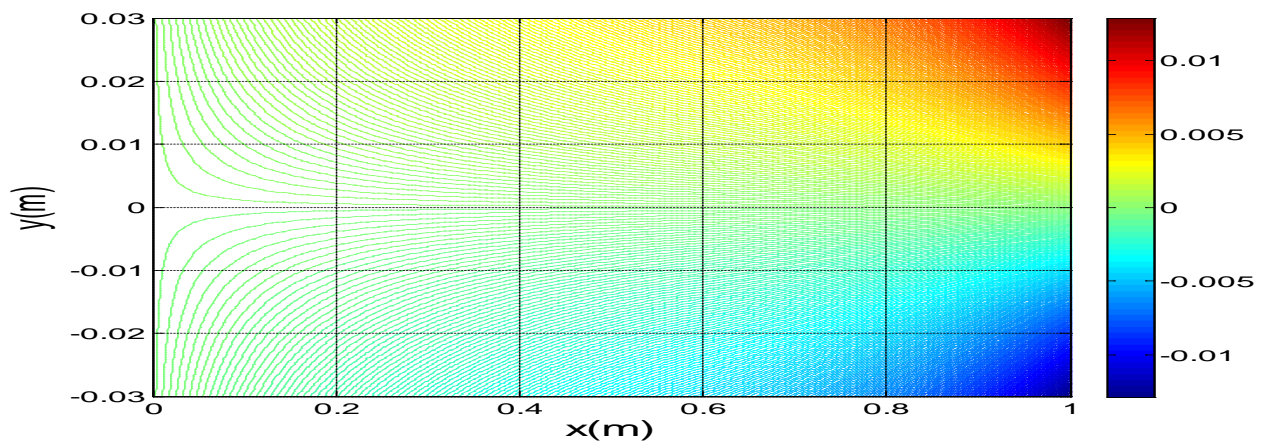


Figure III.23- Répartition des déformations en fonction de  $(x, y)$

### III. Modélisation et simulation de comportement non linéaire des poutres

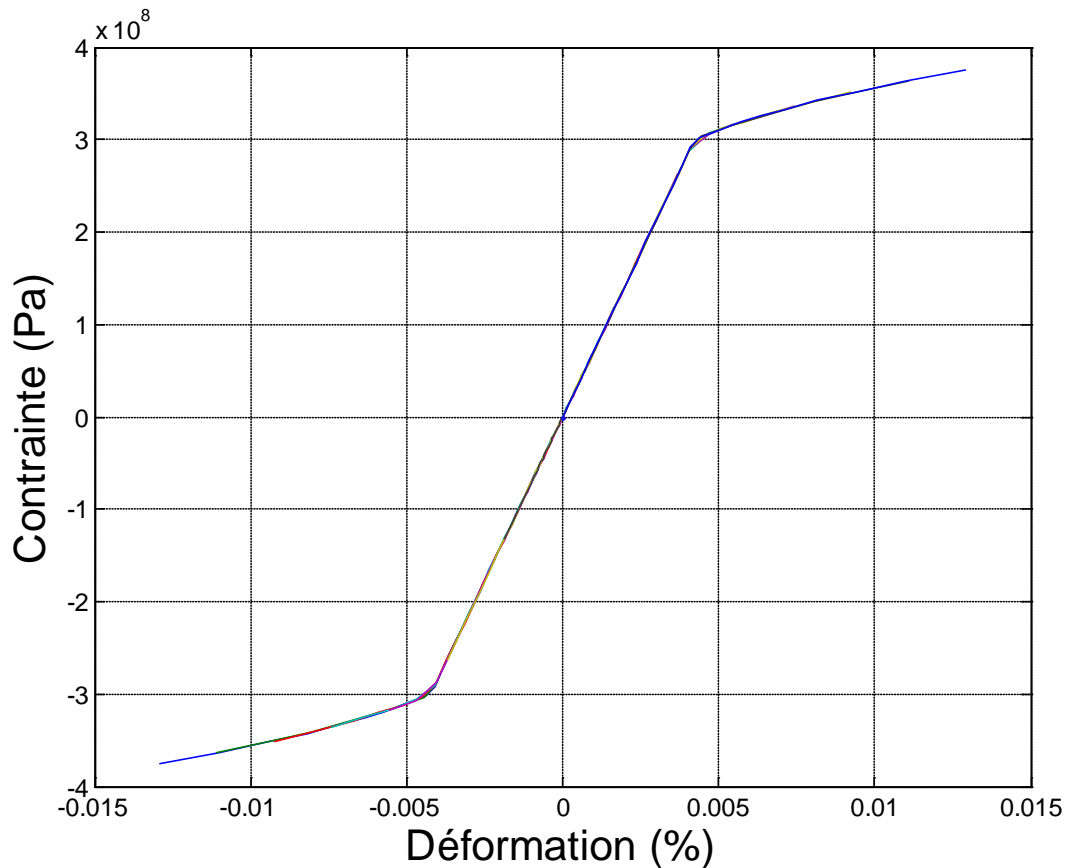


Figure III.24- Courbe Contrainte-Déformation

#### III.6.3.3 Influence de l'écrouissage sur la flèche

La flèche élastoplastique qui prend sa valeur maximale à l'extrémité libre, diminue progressivement et non linéairement en se dirigeant vers l'encastrement où elle s'annule du fait de l'encastrement lui-même qui ne permet pas de déplacement. Comme la courbure, elle est très sensible au module d'écrouissage (Figure III.25). Nous y remarquons que, plus le module d'écrouissage est faible, plus la flèche est importante. Il est à rappeler qu'à la différence de la courbure, la non-linéarité de la courbe de la flèche est établie aussi bien dans le cas du comportement élastique que lorsqu'il s'agit du comportement élastoplastique. Ainsi la déformée est non linéaire tout le long de la poutre.

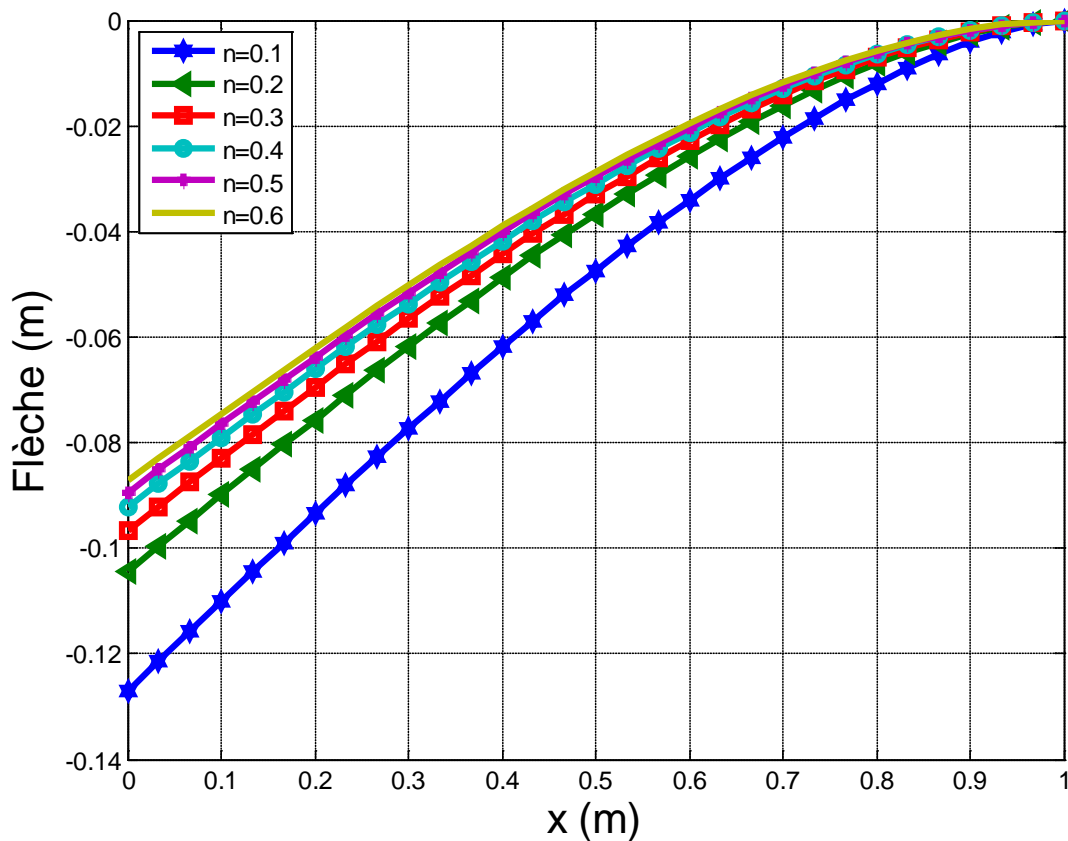


Figure III.25- Influence du module d'écrouissage sur la flèche

### III.7 Bilan du chapitre

Ce chapitre a fait l'objet de la modélisation du comportement non linéaire des poutres en flexion. Nous avons constaté que, dans le cas d'une flexion pure, il existe des solutions analytiques aux problèmes élastiques ou viscoélastiques. Cependant, en plasticité, il est souvent à faire recours à la simulation numérique pour évaluer la courbure qui présente le paramètre géométrique principal à partir duquel découle le calcul de toutes les autres grandeurs comme la flèche et la distribution des contraintes et des déformations. La méthode itérative de Newton-Raphson a été privilégiée pour la résolution de l'équation non linéaire de la courbure élastoplastique. D'autre part, un schéma aux différences finies a été établi pour l'évaluation de la flèche élastoplastique. Les résultats obtenus en élastoplasticité ont montré une grande sensibilité de la flèche et de la courbure au paramètre d'écrouissage.

## **Chapitre IV- Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.**

### **IV.1 Introduction**

Dans le présent chapitre nous allons proposer un modèle rhéologique complexe et susceptible de représenter le comportement élastoviscoplastique des matériaux. L'essai de flexion trois points est privilégié. Après une présentation du modèle analogique, nous nous intéressons à la formulation mathématique des équations du comportement à partir des lois de l'élasticité, de la viscoélasticité et de la viscoplasticité. Une fois les équations mathématiques établies, nous procédons à la mise en place des méthodes analytiques et numériques (selon le cas) permettant la résolution de ces équations. Les résultats obtenus sont présentés, discutés et comparés, par la suite, à d'autres résultats obtenus dans la littérature.

### **IV.2 Description du problème**

#### **IV.2.1 Problématique**

Les essais de flexion induisent un champ de contrainte non uniforme dans l'éprouvette. En élasticité, il existe des solutions analytiques simples pour évaluer les grandeurs macroscopiques (charge et flèche) et les valeurs des contraintes et des déformations en tout point. Par contre, dès qu'une non-linéarité est introduite, la viscoplasticité dans notre cas, il n'existe en général pas de solution analytique au problème. Il est alors nécessaire d'avoir recours à la simulation numérique pour décrire le comportement du matériau. La courbure de flexion étant un paramètre géométrique et spécifique, à partir duquel découlent l'évaluation de la flèche et la répartition des contraintes et des déformations, constitue l'élément principal sur lequel s'articule la modélisation.

#### IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

##### IV.2.2 Cadre du travail

Nous considérons une poutre homogène et rectiligne, simplement appuyée, de longueur  $l$  et de section rectangulaire droite et constante ( $b \times 2h$ ) (Figure IV.1), constituée d'un matériau de comportement élastoviscoplastique décrit par le modèle présenté sur la Figure IV.2. La poutre est soumise à une flexion sous l'effet d'une charge constante  $P$  appliquée à la distance  $l/2$  des appuis. Le chargement appliqué, étant indépendant du temps, nous place dans le cadre d'un essai de fluage élastoviscoplastique. Les hypothèses de Bernoulli et de Saint-Venant sont respectées de manière à ce que les champs de contraintes et de déformations soient unidimensionnels. L'effet de la température, bien qu'il soit prépondérant dans les problèmes viscoplastiques n'est pas pris en charge dans notre travail ; nous considérons alors que l'essai s'effectue à température ambiante.

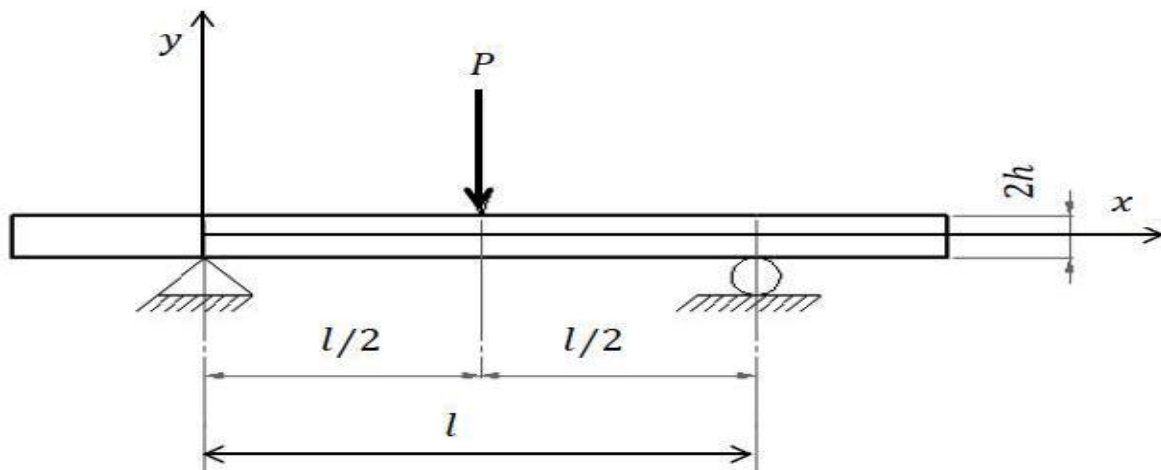


Figure IV.1- Poutre en flexion trois points

##### IV.3 Présentation du modèle rhéologique

Le modèle proposé est un montage en série de deux mécanismes dont l'un représente le comportement viscoélastique et l'autre décrit le comportement viscoplastique (Figure IV.2). Le mécanisme viscoélastique est défini par le modèle de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée qui est composé d'un ressort représentant l'élasticité instantanée, monté en série avec une combinaison en parallèle d'un autre ressort et d'un amortisseur reproduisant ainsi une élasticité différée ou (une viscoélasticité). Ce modèle est souvent adopté pour décrire le

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

comportement viscoélastique du bois [30-32]. Il est également utilisé pour simuler la viscoélasticité du béton [33] et de certains polymères [34].

Le mécanisme viscoplastique représenté par le modèle généralisé de Bingham est défini par l'association en parallèle d'un patin indiquant le seuil de plasticité, un ressort représentant l'érouissage cinématique linéaire du matériau et d'un amortisseur simulant la déformation plastique différée (ou la viscoplasticité). Le modèle de Bingham est appliqué pour décrire le comportement viscoplastique du bois [2, 30], des polymères et de certaines argiles [35]. Il est aussi utilisé pour modéliser le comportement des métaux et alliages à des températures moyennes et élevées [2]. Le modèle proposé est donc, en jouant sur ses paramètres, susceptible de simuler une grande variété de matériaux.

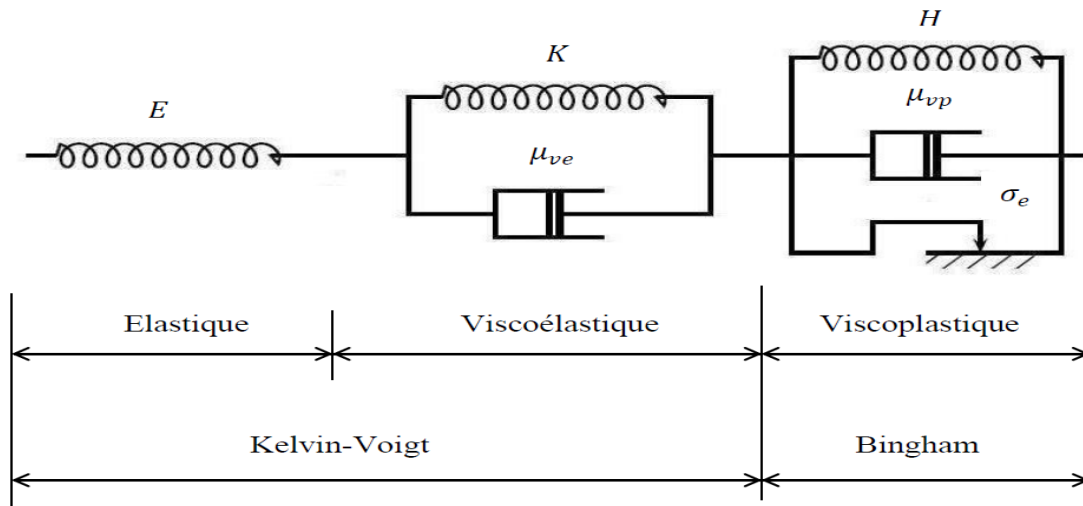


Figure IV.2- Modèle rhéologique élastoviscoplastique

**IV.3.1 Profil des déformations**

En dessous d'une contrainte seuil  $\sigma_e$ , la déformation totale  $\varepsilon$  est la somme d'une déformation élastique instantanée  $\varepsilon_e$  et une déformation viscoélastique  $\varepsilon_{ve}$ . L'écoulement viscoplastique a lieu lorsque la contrainte est au-dessus de la limite élastique  $\sigma_e$ , la déformation totale vaut alors la somme des déformations viscoélastique ( $\varepsilon_e + \varepsilon_{ve}$ ) et viscoplastique  $\varepsilon_{vp}$ .

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} & \sigma \leq \sigma_e \\ \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp} & \sigma > \sigma_e \end{cases} \quad (IV.1)$$



#### IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

##### IV.3.2 Profil des contraintes

Le montage viscoélastique en série nous permet de prévoir que les contraintes enregistrées dans le ressort  $E$ , et dans la combinaison ressort-amortisseur sont identiques:

$$\sigma = E\varepsilon_e = K\varepsilon_{ve} + \mu_{ve}\dot{\varepsilon}_{ve} \quad (\text{IV.2})$$

où  $E$  est le module de Young,  $K$  et  $\mu_{ve}$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de viscosité de Newton dans le mécanisme ressort-amortisseur.

En la présence de l'écroutissage, le seuil de plasticité est défini par la somme de la contrainte enregistrée dans le patin  $\sigma_e$  et la contrainte interne établie dans le ressort  $H$  [7]. L'amortisseur viscoplastique ne travaille que lorsque la contrainte dépasse cette contrainte seuil. On peut donc exprimer la contrainte dans le mécanisme viscoplastique par :

$$\sigma = \sigma_e + H\varepsilon_{vp} + \mu_{vp}\dot{\varepsilon}_{vp} \quad (\text{IV.3})$$

où  $\mu_{vp}$  est le coefficient de viscosité de l'amortisseur viscoplastique,  $H$  est le module d'écroutissage cinématique.

Il est à noter que le champ des contraintes évalué immédiatement après le chargement est bien celui prévu par les lois de l'élasticité. Le fluage provoque ensuite une redistribution des contraintes dans la poutre au cours du temps [18].

#### IV.4 Formulation mathématique des équations du modèle

##### IV.4.1 Analyse viscoélastique

L'analyse viscoélastique (élasticité instantanée et élasticité différée) concerne les sections de la poutre où la contrainte n'a pas atteint sa limite élastique  $\sigma_e$ . Autrement dit, tant que le moment seuil  $M_e$ , correspondant à la plastification de la première fibre, n'est pas atteint, la réponse du matériau est, à tout point, uniquement viscoélastique (Figure IV.3):

$$M \leq M_e = \frac{\sigma_e l}{h} \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} \quad (\text{IV.4})$$

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

La loi de comportement élastique linéaire nous permet d'exprimer la relation contrainte-déformation par :

$$\sigma = E\varepsilon_e = E(\varepsilon - \varepsilon_{ve}) \quad (\text{IV.5})$$

et comme la déformation  $\varepsilon_{ve}$  enregistrée dans le mécanisme ressort-amortisseur peut être exprimée selon les lois de la viscoélasticité (voir I.5.2.2), dans le cas de fluage par :

$$\varepsilon_{ve} = \frac{\sigma}{K} \left( 1 - \exp\left(-\frac{Kt}{\mu_{ve}}\right) \right) \quad (\text{IV.6})$$

nous pouvons exprimer la contrainte  $\sigma$  en fonction de la déformation totale  $\varepsilon$  par:

$$\sigma = \frac{E}{q(t)} \varepsilon \quad (\text{IV.7})$$

avec  $q(t) = 1 + \frac{E}{K} \left( 1 - \exp\left(-\frac{Kt}{\mu_{ve}}\right) \right)$

Le moment de flexion généré dans chaque section de la poutre est évalué à partir de l'équation d'équilibre :

$$M(x) = -b \int_{-h}^h y \sigma(x, y) dy \quad (\text{IV.8})$$

Tenant compte des hypothèses d'Euler-Bernoulli ( $\varepsilon = -\chi y$ ), de la symétrie de la section et remplaçant la contrainte par son expression (Equation IV.7), on peut réécrire l'équation d'équilibre comme suit :

$$M(x) = \frac{2bE}{q(t)} \int_0^h \chi(x, t) y^2 dy \quad (\text{IV.9})$$

En intégrant, on obtient :

$$\chi(x, t) = \frac{M(x)}{EI} q(t) \quad (\text{IV.10})$$

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

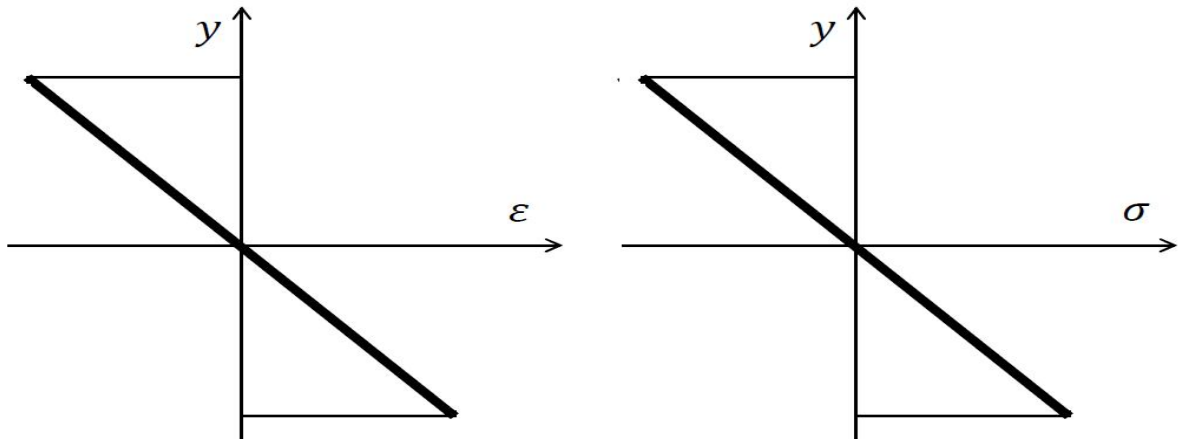


Figure IV.3- Répartition des déformations et des contraintes dans le domaine viscoélastique

#### IV.4.2 Analyse viscoplastique

Le mécanisme viscoplastique s'active lorsque la contrainte atteint le seuil de plasticité, les sections où le moment fléchissant  $M$  dépasse le moment seuil  $M_e$  sont partiellement plastifiées en raison de la non-uniformité des contraintes. On assiste ainsi dans une même section à deux zones de comportements différents (viscoélastique et élastoviscoplastique). En désignant par  $y_e$  la distance entre l'axe neutre et la frontière de la zone viscoélastique (Figure IV.4), la contrainte établie dans cette zone est donnée par :

$$\sigma = \frac{E}{q(t)} \varepsilon \quad |y| \leq y_e \quad (\text{IV.11})$$

avec  $y_e(x, t) = h\chi_e(x, t)/\chi(x, t)$  et  $\chi_e(x, t) = M_e q(t)/EI$

La zone élastoviscoplastique est définie par ( $y_e < |y| < h$ ). La contrainte qui s'y établit est donnée par:

$$\sigma = \sigma_e + H(\varepsilon - \varepsilon_e - \varepsilon_{ve}) + \mu_{vp}(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e - \dot{\varepsilon}_{ve}) \quad (\text{IV.12})$$

Admettant que la déformation élastique soit instantanée,  $\dot{\varepsilon}_e = d\varepsilon_e/dt = 0$ , et remplaçant les déformations élastique  $\varepsilon_e$ , viscoélastique  $\varepsilon_{ve}$  et sa vitesse  $\dot{\varepsilon}_{ve}$  par leurs expressions, on aura :

$$\sigma = \frac{\sigma_e + H\varepsilon + \mu_{vp}\dot{\varepsilon}}{r(t)} \quad (\text{IV.13})$$

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

avec  $r(t) = 1 + H \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{K} \left( 1 - \exp \left( -\frac{Kt}{\mu_{ve}} \right) \right) \right) + \mu_{vp} \left( \frac{1}{\mu_{ve}} \exp \left( -\frac{Kt}{\mu_{ve}} \right) \right)$

L'équation de la courbure élastoviscoplastique est obtenue à partir de l'équation d'équilibre :

$$M(x) = -2b \left( \int_0^{y_e} \frac{E}{q(t)} \varepsilon(x, y, t) y dy + \int_{y_e}^h \frac{\sigma_e + H\varepsilon(x, y, t) + \mu_{vp}\dot{\varepsilon}(x, y, t)}{r(t)} y dy \right) \quad (IV.14)$$

En remplaçant la déformation totale et sa vitesse par leurs expressions respectivement ( $\varepsilon = -\chi y$ ) et ( $\dot{\varepsilon} = -\dot{\chi} y$ ) on obtient :

$$M(x) = 2b \left( \frac{E\chi(x, t)}{q(t)} \int_0^{y_e} y^2 dy + \int_{y_e}^h \frac{(\sigma_e y + H\chi(x, t)y^2 + \mu_{vp}\dot{\chi}(x, t)y^2)}{r(t)} dy \right) \quad (IV.15)$$

En intégrant et remplaçant  $y_e$  par sa valeur, on obtient l'équation différentielle de la dérivée temporelle de la courbure (ou taux de courbure) élastoviscoplastique:

$$\dot{\chi}(x, t) = \frac{M_e}{I} \frac{\left( r(t) - \frac{Hq(t)}{E} - \frac{3}{2} \right) \left( \frac{\chi_e}{\chi(x, t)} \right)^2 + \frac{Hq(t)}{E} \left( \frac{\chi(x, t)}{\chi_e} \right) - \frac{M(x)r(t)}{M_e} + \frac{3}{2}}{\mu_{vp} \left( \left( \frac{\chi_e}{\chi(x, t)} \right)^3 - 1 \right)} \quad (IV.16)$$

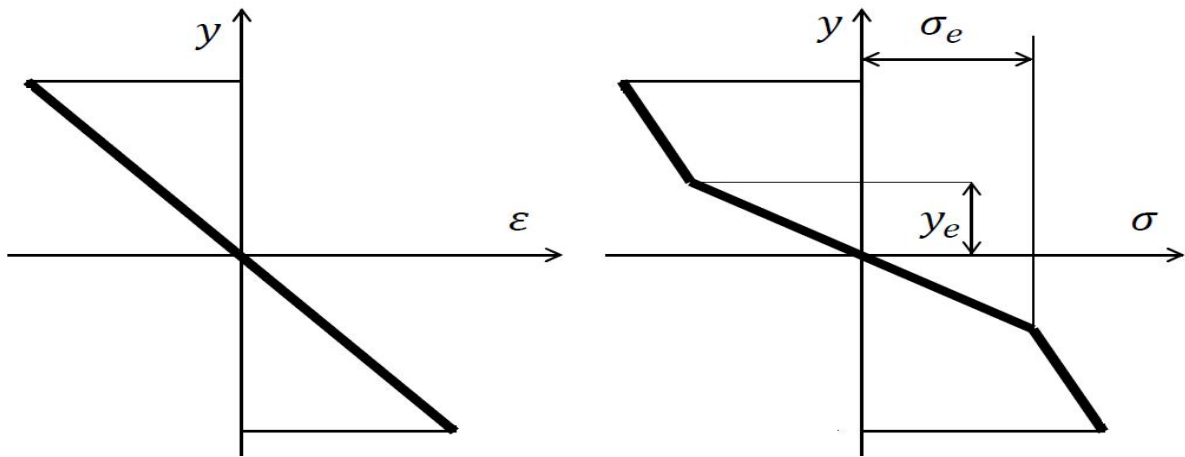


Figure IV.4- Répartition des déformations et des contraintes dans le domaine élastoviscoplastique

Nous désignons par le terme viscoélastique, dans la suite de cet exposé, l'ensemble de l'élasticité instantanée et l'élasticité différée.

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

**IV.4.3 Intégration de l'équation différentielle de la courbure élastoviscoplastique**

Il existe une multitude de méthodes numériques pour l'intégration des équations différentielles ordinaires, nous citons à titre d'exemple la méthode explicite de Runge-Kutta et la méthode du point milieu généralisée (ou les  $\theta$  –méthodes).

Nous considérons l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t = 0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

**IV.4.3.1 Les méthodes de Runge-Kutta**

Les méthodes de Runge-Kutta ont été développées pour éviter le calcul des dérivées d'ordre supérieur, souvent nécessaire dans le développement en série de Taylor. Des valeurs supplémentaires de la fonction  $y(x, t)$  donnée sont utilisées à la place de ces dérivées d'une manière qui copie très exactement la précision donnée par un polynôme de Taylor [35]. Les plus utilisées sont celles d'ordre 2 et d'ordre 4. Les schémas correspondants sont les suivants:

Schéma d'ordre 2 :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f \left( y_i + \frac{\Delta t}{2} f(y_i, t_i), t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (\text{IV.18})$$

Schéma d'ordre 4

Schéma d'ordre 4 :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{\Delta t}{6} (f(y_i, t_i) + 2f_1 + 2f_2 + f_3) \\ f_1 = f \left( y_i + \frac{\Delta t}{2} f(y_i, t_i), t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \\ f_2 = f \left( y_i + \frac{\Delta t}{2} f_1, t_i + \frac{\Delta t}{2} \right) \\ f_3 = f(y_i + \Delta t f_2, t_i + \Delta t) \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

où  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

**IV.4.3.2 La méthode du point milieu généralisée**

Le schéma du point milieu généralisé s'écrit [36, 37]:

$$\begin{cases} y_{i+\theta} = (1 - \theta)y_i + \theta y_{i+1} \\ y_{i+1} = y_i + \Delta t f(t_{i+\theta}, y_{i+\theta}) \end{cases} \quad (\text{IV.20})$$

$\theta$  étant un paramètre variant de 0 à 1.

Notons que lorsque  $\theta = 0$ , alors nous retrouvons la méthode explicite d'Euler où la solution à l'instant  $t + \Delta t$  est dépendante de la solution à l'instant  $t$ . Elle est alors immédiate :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f(t_i, y_i) \quad (\text{IV.21})$$

Par contre dans le cas où  $\theta \neq 0$ , la solution dépend non seulement des valeurs à l'instant  $t$  mais aussi des valeurs à l'instant  $t + \Delta \theta$ . Un schéma itératif est alors nécessaire pour résoudre le problème.

Pour  $\theta = 1$ , nous avons un schéma purement implicite ou (Euler arrière).

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f(t_{i+1}, y_{i+1}) \quad (\text{IV.22})$$

Pour  $\theta = 1/2$ , nous assistons à un schéma implicite appelé schéma du point milieu. Notons que dès que  $\theta > 0$ , le schéma est implicite, au sens où on n'a pas d'expression explicite de  $y_{i+1}$  en fonction de  $y_i$ .

**IV.4.4 Choix d'une méthode d'intégration**

La stabilité de la solution numérique est une des conditions nécessaires pour la précision des résultats numériques[35]. L'utilisation de méthodes explicites pour la résolution de problèmes mécaniques s'avère intéressante par sa simplicité d'implémentation et un coût mémoire faible. Mais ces schémas peuvent s'avérer plus coûteux en termes de temps de calcul car ils deviennent instables lorsque le pas de temps augmente. Les méthodes implicites peuvent être plus efficaces en termes de coût CPU car elles sont inconditionnellement stables et des pas de temps plus grands peuvent donc être utilisés [27, 38].

#### IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

Afin de mettre en évidence la pertinence des méthodes implicites, nous avons effectué deux programmes numériques sous Matlab pour l'intégration de l'équation de la courbure, dont l'un est fondé sur la méthode d'Euler explicite  $\theta = 0$  alors que l'autre est basé sur la méthode d'Euler implicite  $\theta = 1$ . Les résultats obtenus avec la même discrétisation spatiotemporelle sont résumés dans la Figure IV.5 :

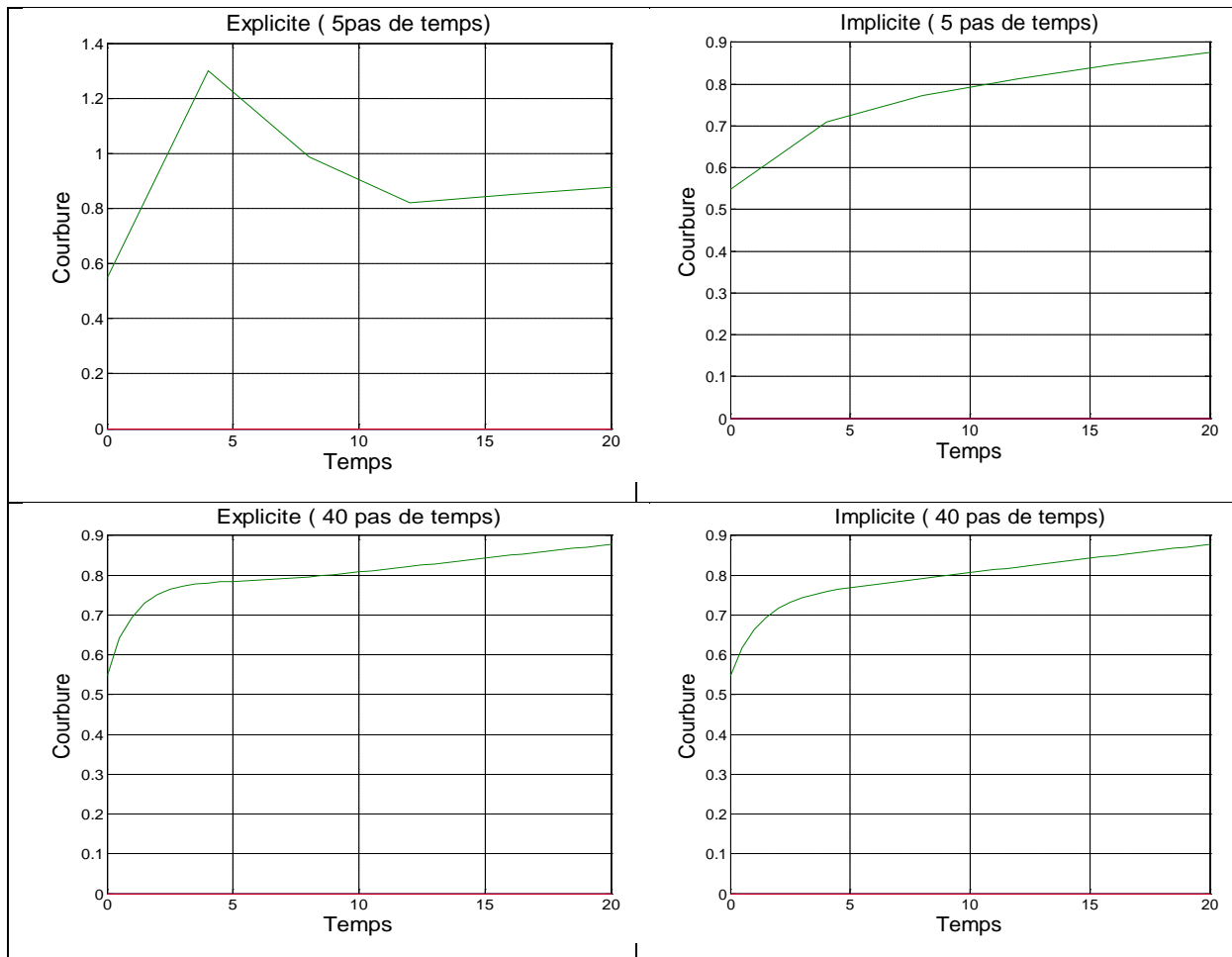


Figure IV.5- Comparaison des méthodes d'Euler Explicite / Implicite

Nous remarquons que la solution numérique donnée par la méthode d'Euler explicite n'est stable que sous la condition que le pas de temps est très petit. En revanche les courbes obtenus par la méthode d'Euler implicite ne présentent pas d'oscillation, quelle que soit la valeur de  $\Delta t$ . Nous privilégions par conséquent une intégration avec la méthode implicite d'Euler. En effet un calcul itératif par la méthode de Newton-Raphson a lieu après chaque pas de temps ; cependant la stabilité est inconditionnellement assurée.

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

**IV.4.5 Algorithme de calcul**

Etant donné que toutes les déformations visqueuses sont nulles à l'instant  $t = 0$ , la courbure totale à cet instant est égale à la courbure élastique. Ainsi on la prend pour valeur initiale :

$$\begin{array}{l}
 \dot{\chi}(x, t) = f(t, \chi(x, t)) \\
 \text{Discrétisation spatiotemporelle} \\
 i = 1, 2, 3, \dots, n - 1 \\
 t_{i+1} = t_i + \Delta t \\
 j = 1, 2, 3, \dots, m - 1 \\
 x_{j+1} = x_j + \Delta x \\
 \text{Valeurs initiales} \\
 t_{1=0} ; \quad \chi_{1,j} = \frac{M_j}{EI} \\
 \text{Calcul de la courbure} \\
 \text{Schéma d'Euler implicite} \\
 \chi_{i+1,j} = \chi_i + \Delta t f(t_i, \chi_{i+1,j}) \\
 \text{Méthode de Newton - Raphson} \\
 k = 1, 2, 3 \dots q \\
 g(\chi_{i+1,j}) = \chi_{i+1,j} - \chi_i - \Delta t f(t_i, \chi_{i+1,j}) \\
 \chi_{i+1,j}^{k+1} = \chi_{i+1,j}^k - \frac{g(\chi_{i+1,j}^k)}{\left(\frac{\partial g(\chi_{i+1,j}^k)}{\partial (\chi_{i+1,j}^k)}\right)} \\
 \text{Critère d'arrêt} \\
 |\chi_{i+1,j}^{k+1} - \chi_{i+1,j}^k| \leq \xi
 \end{array} \tag{IV.23}$$

**IV.4.6 Détermination de la flèche viscoélastique / élastoviscoplastique**

Dans le domaine viscoélastique, la flèche peut aisément être déterminée analytiquement avec les lois de l'élasticité et de la viscoélasticité. Ainsi en désignant par  $x_e = 2M_e/P$  la distance entre chaque appui et la frontière viscoélastique où le moment est en dessous du moment seuil  $M_e$  (Figure IV.6), les expressions de la flèche viscoélastique de part et d'autre s'écrivent :

$$\begin{cases}
 u_y(x, t) = -\left(\frac{pbx}{6I_z l} (l^2 - b^2 - x^2)\right) q(t) & 0 \leq x \leq x_e \\
 u_y(x, t) = \left(\frac{-pbx(l^2 - b^2 - x^2)}{6I_z l} + \frac{p(x-a)^3}{6I_z}\right) q(t) & (l - x_e) \leq x \leq l
 \end{cases} \tag{IV.24}$$



IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

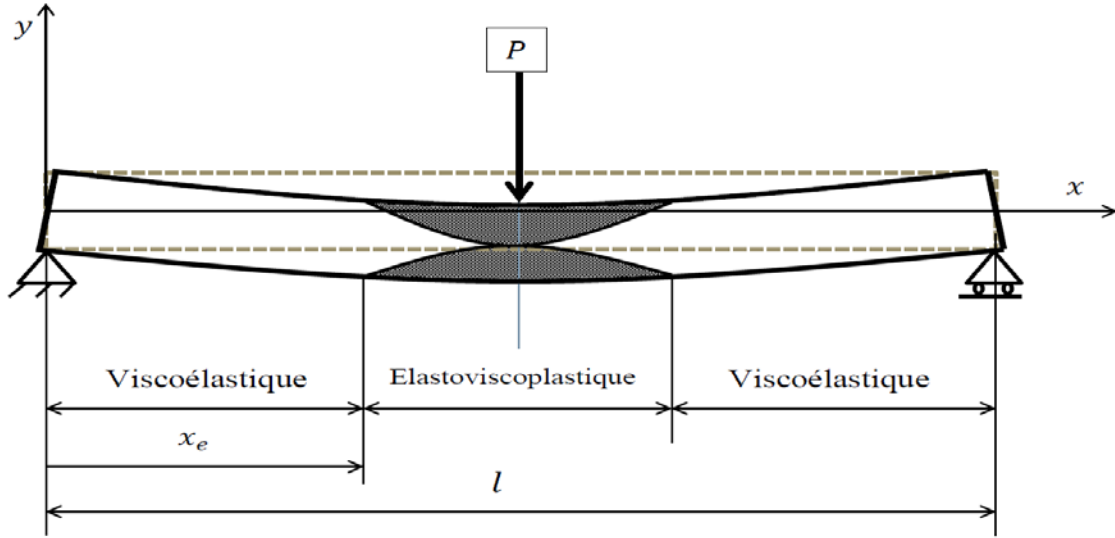


Figure IV.6- Frontière viscoélastique / viscoplastique

Etant donné que la courbure, qui est la dérivée deuxième de la flèche, est obtenue numériquement dans le domaine élastoviscoplastique ( $x_e \leq x \leq l - x_e$ ) (Figure IV.6), un calcul numérique s'avère nécessaire pour la détermination de la flèche élastoviscoplastique. La méthode des différences finies, déjà présentée dans la section (III.5.5.2) semble convenir à ce type de problèmes. Il est donc choisi d'établir un schéma aux différences finies d'ordre 2 pour le calcul de la flèche. Pour ce faire, le domaine élastoviscoplastique est discrétisé en  $m - 1$  éléments ; le temps est discrétisé en  $n - 1$  pas. Le schéma numérique se présente :

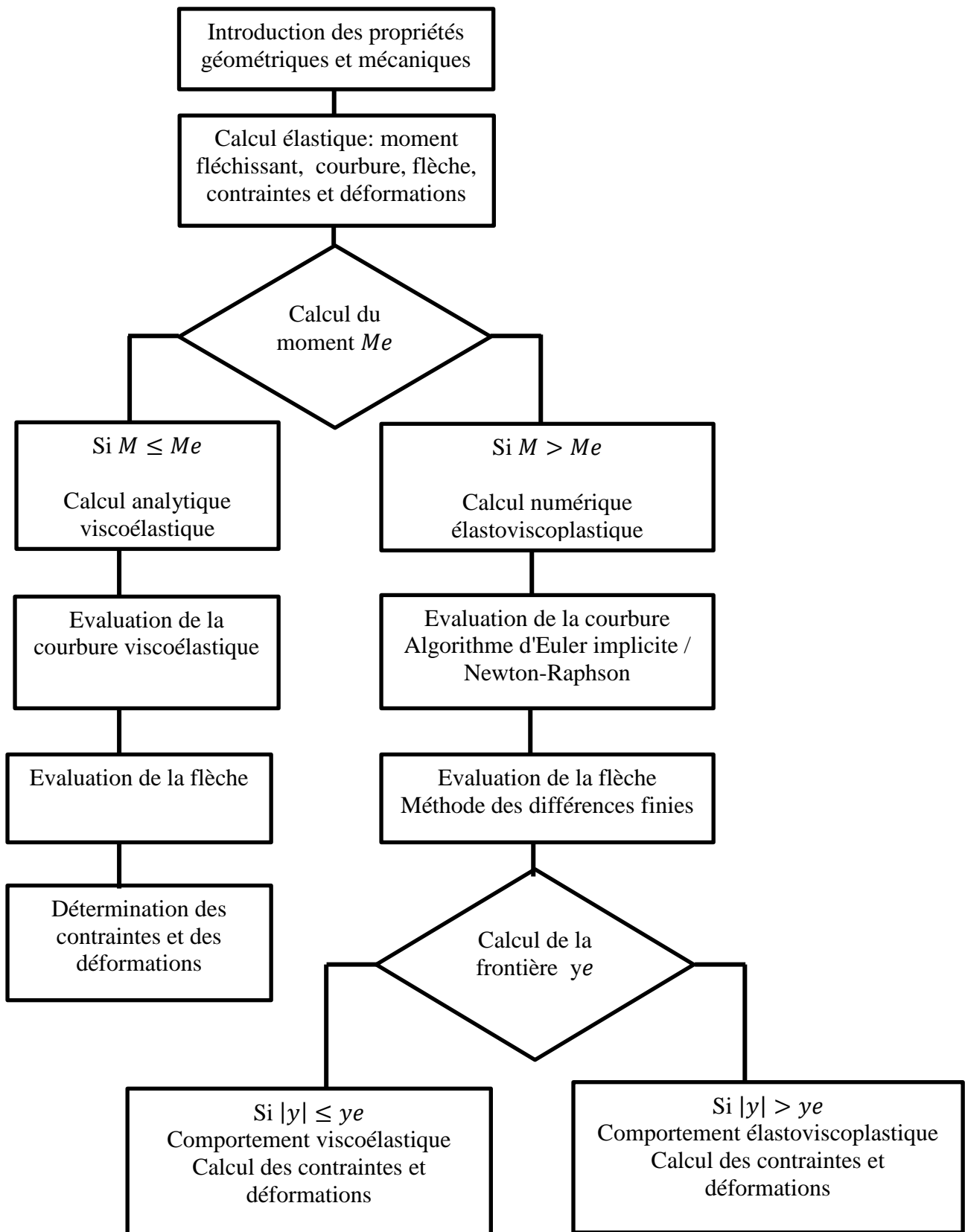
$$\left\{ \begin{array}{l} j = 2, 3, \dots, m \\ x_{j+1} = x_j + \Delta x \\ i = 1, 2, 3, \dots, n \\ t_{i+1} = t_i + \Delta t \\ \chi_{i,j}(\Delta x)^2 = u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1} \end{array} \right. \quad (IV.25)$$

La continuité de la flèche entre le domaine viscoélastique et le domaine viscoplastique est assurée en imposant les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = -\frac{pbx}{6I_z l} (l^2 - b^2 - x^2) r(t) \Big|_{x=x_e} \\ u_n = \left( \frac{-pbx(l^2 - b^2 - x^2)}{6I_z l} + \frac{p(x-a)^3}{6I_z} \right) r(t) \Big|_{x=l-x_e} \end{array} \right. \quad (IV.26)$$

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

IV.4.7 Organigramme général du programme



IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

### IV.5 Présentation et analyse des résultats

#### IV.5.1 Géométrie et paramètres du matériau

La simulation a été effectuée pour un essai de fluage en flexion trois points. La poutre simplement appuyée est d'une longueur de  $100\text{ mm}$ , d'une section rectangulaire de  $25\text{ mm}$  de largeur et de  $15\text{ mm}$  de hauteur. Le matériau choisi est un bois de propriétés mécaniques résumées dans le Tableau IV.1. A l'exception du module d'écrouissage  $H$ , ces paramètres se sont référés aux travaux de [30]. L'intervalle du chargement appliqué dans la simulation est de  $25\text{ N}$  à  $35\text{ N}$ . Il est à noter que, sous le chargement envisagé, la frontière viscoélastique est située à une distance supérieure que la coordonnée ( $x = l/4$ ), et n'importe quel chargement compris entre  $25\text{ N}$  et  $35\text{ N}$  provoque une déformation viscoplastique.

$E\text{ (MPa)}$	$H\text{ (MPa)}$	$K\text{ (MPa)}$	$\mu_{ve}\text{ (MPa.H)}$	$\mu_{vp}\text{ (MPa.H)}$	$\sigma_e\text{ (MPa)}$
6200	2000	40000	52834	40510	13.1

Tableau IV.1- Propriétés mécaniques du matériau objet de simulation

#### IV.5.2 Interprétation du graphe de la courbure

Dans un premier temps, nous appliquons un chargement de façon à générer un moment de flexion qui dépasse le moment seuil  $M_e$  dans une partie de la poutre, ce qui lui permet de se comporter selon le modèle élastoviscoplastique proposé (voir IV.3). L'autre partie où le moment n'excède pas ce moment seuil répond alors selon le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée. Ainsi en appliquant une charge égale à  $30\text{ N}$ , nous obtenons les courbes de la Figure IV.7 qui nous présente l'évolution de la courbure dans deux sections différentes de la poutre dont l'une est de comportement viscoélastique ( $x = l/4$ ) et l'autre de comportement élastoviscoplastique ( $x = l/2$ ). Les résultats obtenus correspondent à des courbes typiques de fluage, nous y distinguons un fluage primaire caractérisé par un accroissement rapide de la courbure jusqu'à un palier linéaire connu par le fluage stationnaire. La courbure viscoélastique semble avoir un état stable quasi-constant dans le stade stationnaire, cela se montre clairement sur la Figure IV.8 où sa vitesse avoisine le zéro après un certain temps. Cependant le palier stationnaire du taux de courbure élastoviscoplastique est d'une pente linéaire qui tend à être constant après un certain temps.

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

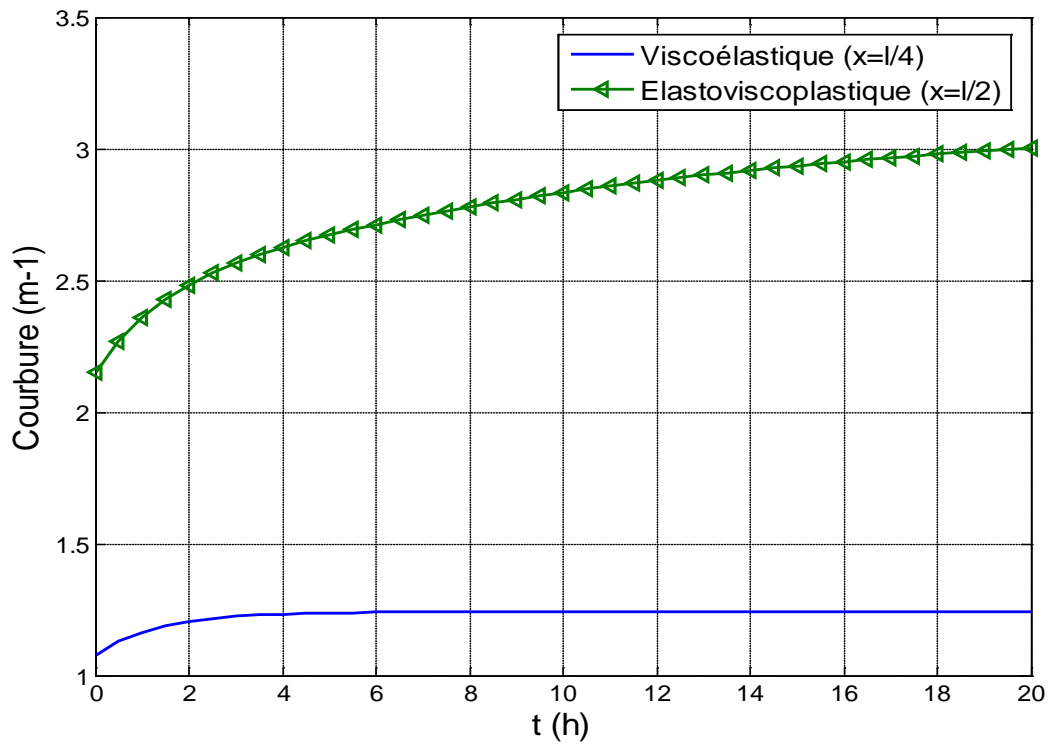


Figure IV.7- Evolution de la courbure

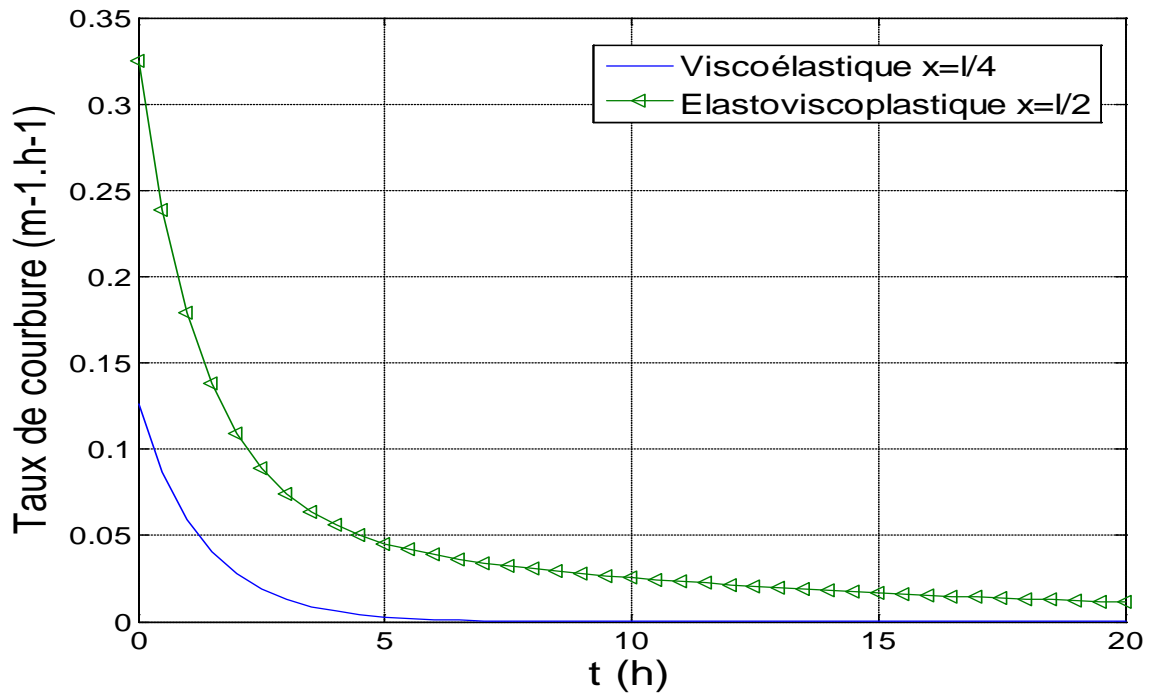


Figure IV.8- Evolution de taux de courbure

#### IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

Pour suivre la progression de la courbure en fonction de la longueur de la poutre, nous nous reportons à la Figure IV.9 qui nous présente une progression linéaire dans le domaine viscoélastique qui s'explique par la linéarité du moment de flexion. Cette progression accroit plus rapidement à partir de la frontière viscoélastique ( $M > M_e$ ) jusqu'au milieu de la poutre où elle prend sa valeur maximale. D'autre part, la relation moment courbure est présenté sur la Figure IV.10. Nous remarquons qu'à l'instant  $t = 0$ , cette relation est linéaire étant donné que la courbure est évaluée avec les loi de l'élasticité à cet instant. Cette linéarité est conservée, à temps fixe, aussi bien tant que le moment est en dessous du moment seuil. Cependant, nous observons que dès que le moment atteint son seuil ( $M_e = 0.4913 N.m$ ), la courbure augmente plus rapidement en prenant une allure non linéaire. En considérant un échelon de temps ( $t_1, t_2, t_3, t_4$ ), la courbe de la relation moment-courbure est, à chaque valeur de temps fixé, identique à celle obtenue dans le cas de la plasticité écouissable indépendante du temps. (voir III.5.4.2).

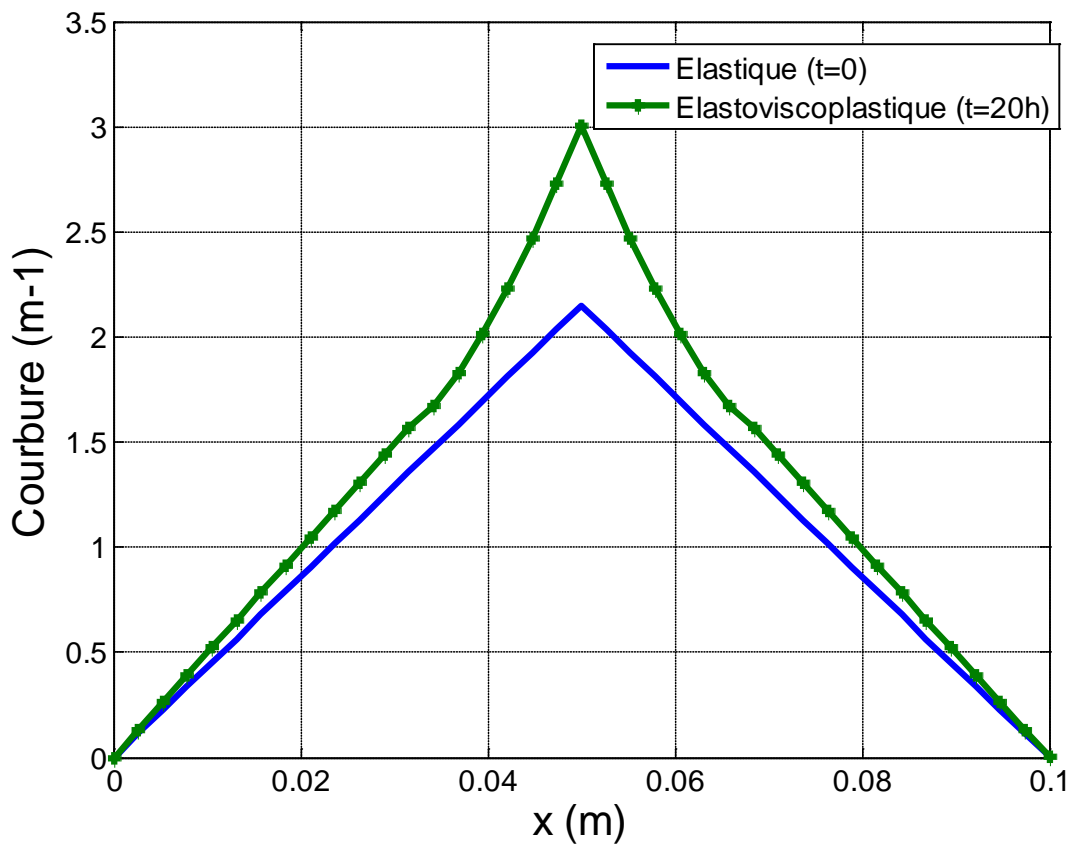


Figure IV.9- Progression de la courbure en fonction de la longueur de la poutre

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

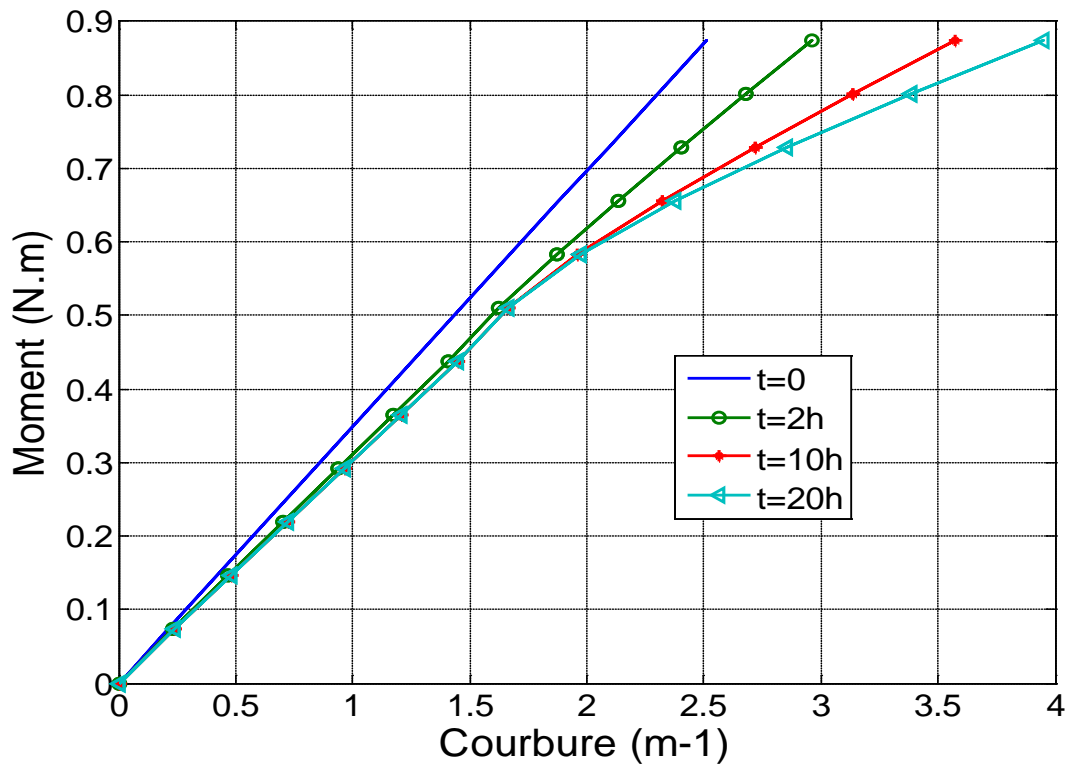


Figure IV.10- Relation moment-courbure

### IV.5.3 Influence du chargement et des paramètres

Pour étudier l'influence du chargement et des paramètres sur la courbure, nous procédons à des simulations en variant le chargement appliqué ou les paramètres en question puis nous comparons les résultats obtenus.

#### IV.5.3.1 Influence du chargement

En appliquant un chargement de 35 N, nous assistons à un accroissement de la pente de la courbure élastoviscoplastique dans le palier stationnaire sur la Figure IV.11 en comparaison avec celui de la Figure IV.7; cependant le domaine viscoélastique conserve presque la même pente. Cela nous permet de dire qu'en fonction du temps (en fluage), le fléchissement élastoviscoplastique est très sensible au chargement en comparaison avec le fléchissement viscoélastique.

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

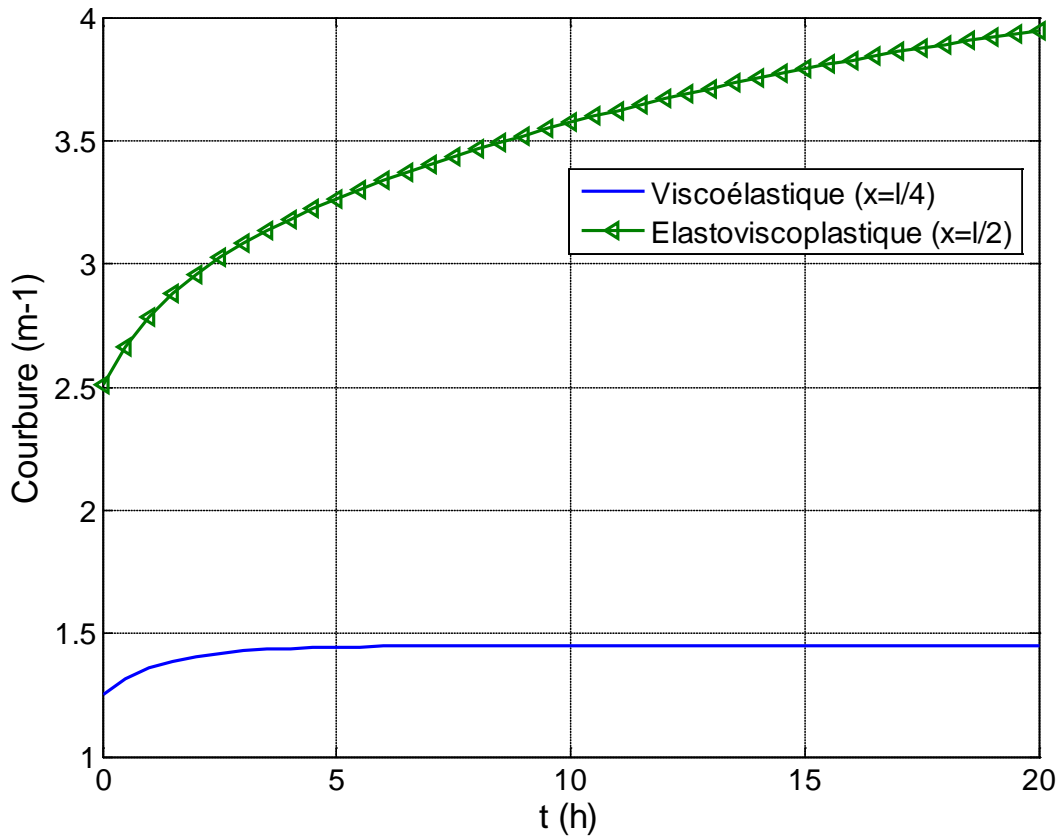


Figure IV.11- Evolution de la courbure sous un chargement de 35 N

#### IV.5.3.2 Influence de l'écroutissage

En revenant au premier chargement de 30 N. Pour nous rendre compte de la sensibilité de la courbure au module d'écroutissage  $H$ , nous procédons à une simulation avec un module d'écroutissage qui prend les valeurs (0, 1000, 5000, 10000 MPa). Les résultats obtenus sur la Figure IV.12, concernant la section correspondant au milieu de la poutre, mettent en évidence l'influence importante du module d'écroutissage sur la courbure. Ainsi pour une valeur égale à 0, nous observons un profil élastoviscoplastique semblable au comportement élastoviscoplastique parfait. En augmentant ce module, la pente du palier stationnaire de la courbure diminue. Ce phénomène est naturel et trouve son interprétation physique dans le sens où l'écroutissage est un durcissement du matériau exigeant ainsi une augmentation de la contrainte pour qu'il y ait lieu d'augmentation de la déformation. Enfin pour des modules d'écroutissage excessifs, la déformation viscoplastique tend à être insignifiante voire nulle.

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

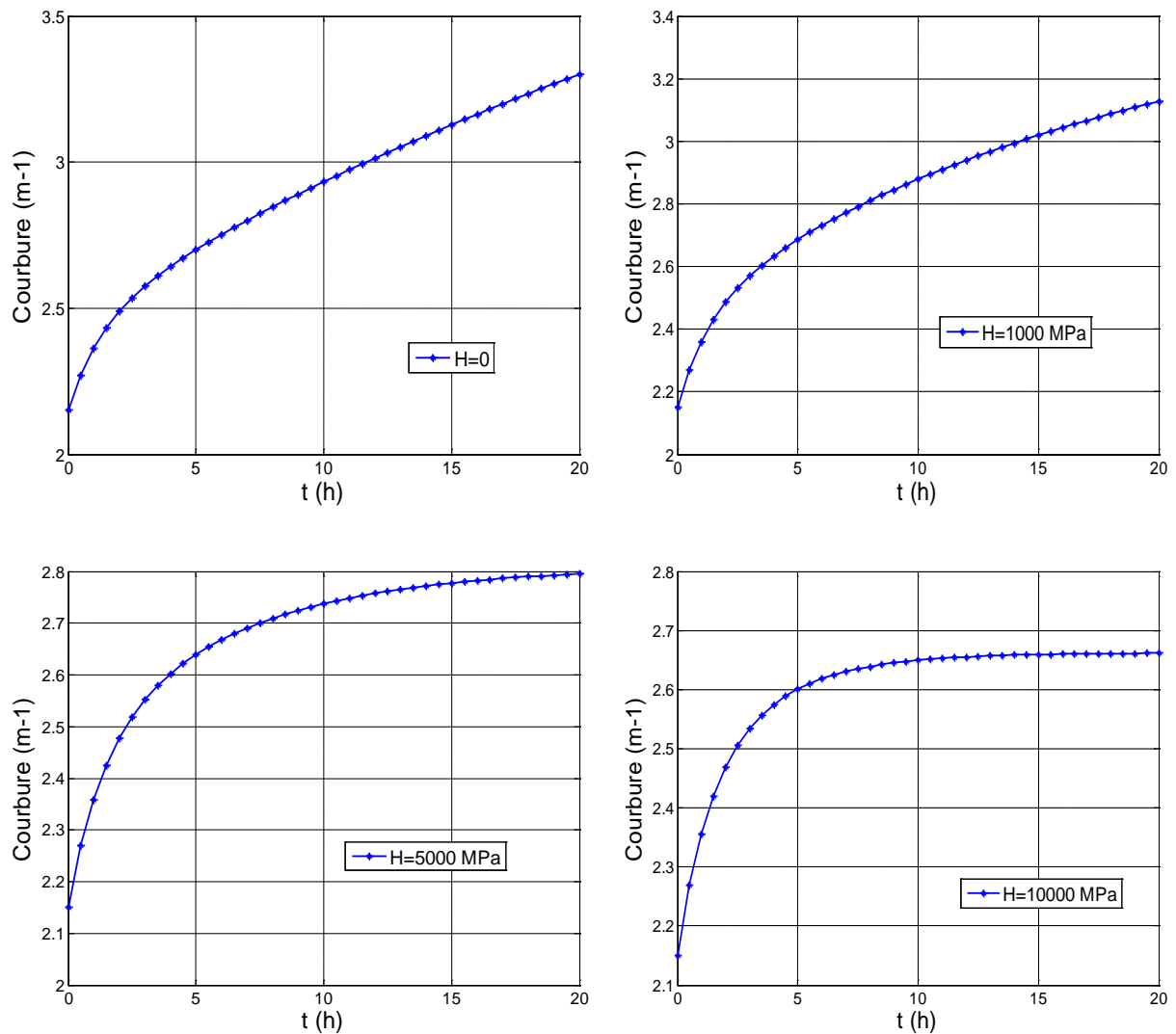


Figure IV.12- Influence du module d'écrouissage sur la courbure

**IV.5.3.3 Influence du mécanisme viscoélastique**

La flexibilité et l'extensibilité de notre modèle nous permet de simuler différents comportements en jouant sur les paramètres. Ainsi nous prévoyons le comportement élastoviscoplastique sans élasticité différée en donnant des valeurs excessives tendant vers l'infini aux paramètres  $K$  et  $\mu_{ve}$ , (Figure IV.13). D'autre part, en surestimant le module d'élasticité  $E$ , nous considérons le comportement élastoviscoplastique sans élasticité instantanée (Figure IV.14). Plus encore, en choisissant des paramètres viscoélastiques très élevés, nous assistons au comportement rigide viscoplastique (Figure IV.15).



IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

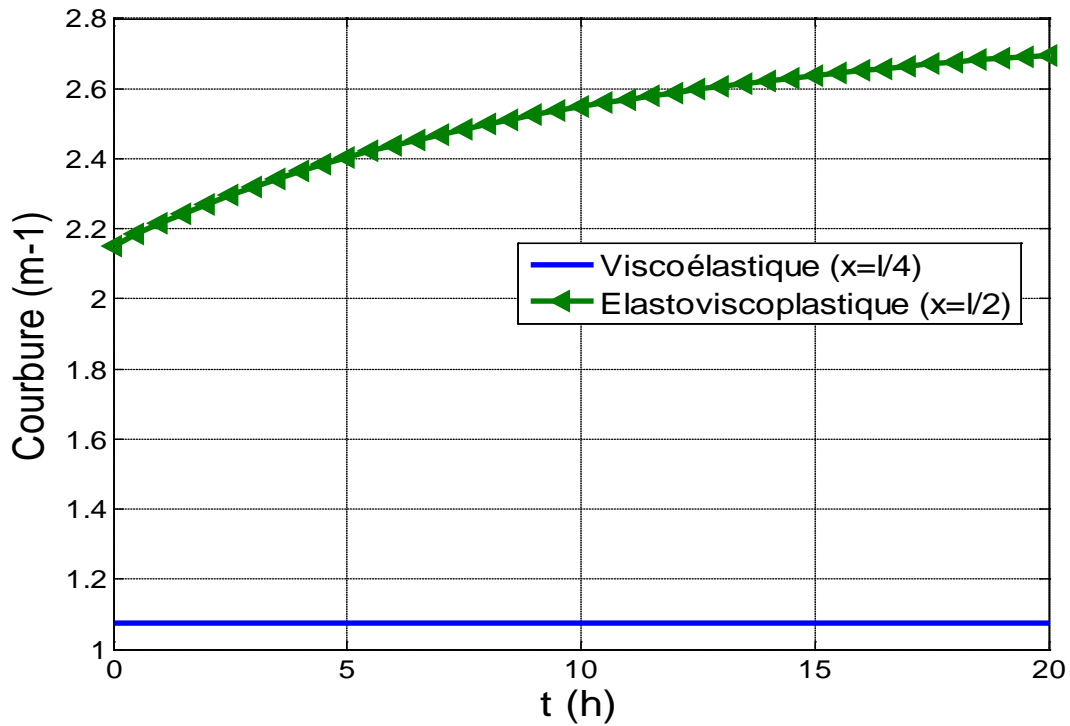


Figure IV.13- Evolution de la courbure sans élasticité différée

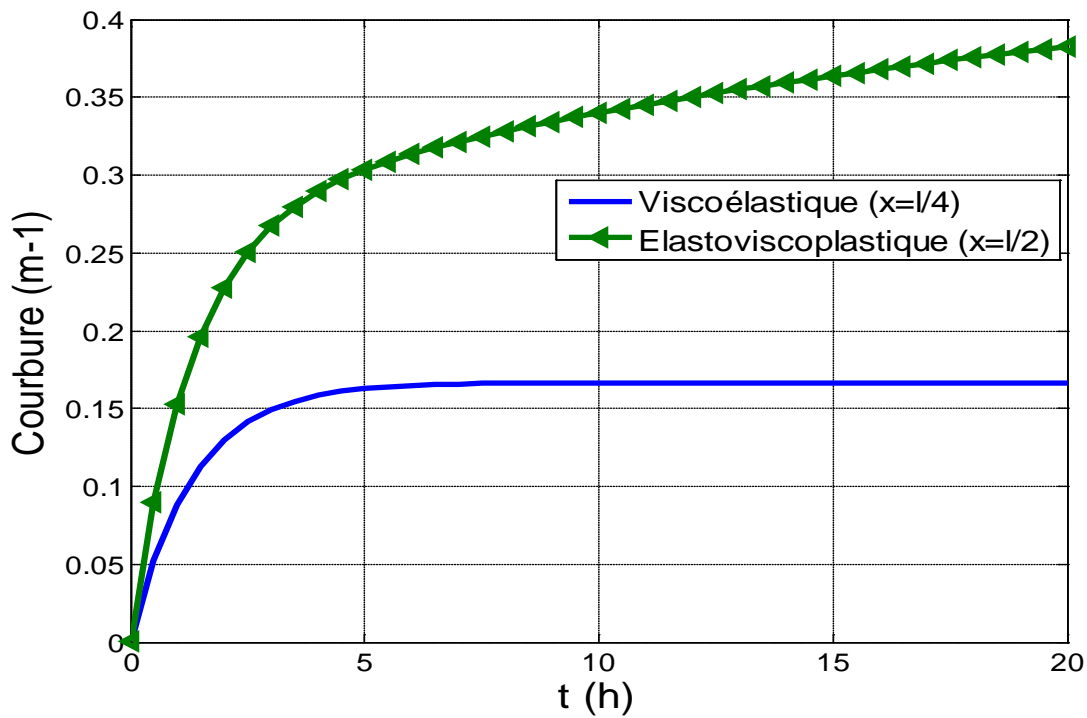


Figure IV.14- Evolution de la courbure sans élasticité instantanée

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

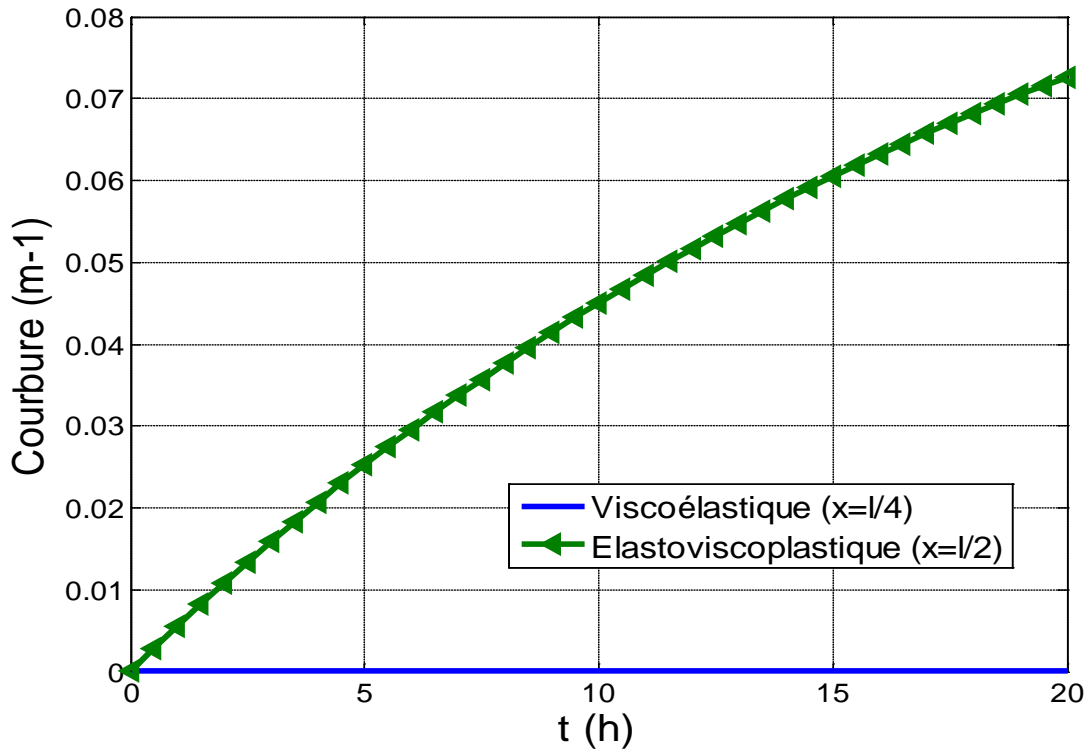


Figure IV.15- Evolution de la courbure rigide viscoplastique

#### IV.5.4 Frontières viscoélastique / viscoplastique

Deux éléments sont à l'origine de l'évolution de la frontière viscoélastique / viscoplastique. D'abord, selon l'axe des  $x$ , la frontière viscoélastique / viscoplastique correspond à la coordonnée  $x_e$  où le moment fléchissant est égal au moment seuil  $M_e$ . On peut la déterminer à partir de l'égalité  $M(x) = M_e$ . Et comme nous disposons, dans le cas de la flexion trois points, de deux formules du moment, nous repérons deux valeurs définies par :

$$x_e = \begin{cases} 2M_e/P \\ l - (2M_e/P) \end{cases}$$

Le domaine viscoélastique est alors défini par  $0 \leq x \leq 2M_e/P$  et  $l - (2M_e/P) \leq x \leq l$ .

Le domaine viscoplastique est défini par  $2M_e/P \leq x \leq l - (2M_e/P)$

Nous remarquons qu'au niveau de la longueur de la poutre, cette frontière n'est fonction que du chargement appliqué. Cela se montre clairement sur la Figure IV.16 où nous estimons qu'il

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

n'y a aucune progression en fonction de temps. Elle prend sa valeur minimale dans la section la plus sollicitée et la voit augmenter en se dirigeant vers les appuis. En revanche, selon l'axe des  $y$ , la frontière viscoélastique / viscoplastique est fonction de la courbure. La Figure IV.17 nous explique sa dépendance de temps en effectuant une descente rapide suivie par une pente non linéaire diminuant. Son allure est semblable à celle du taux de courbure.

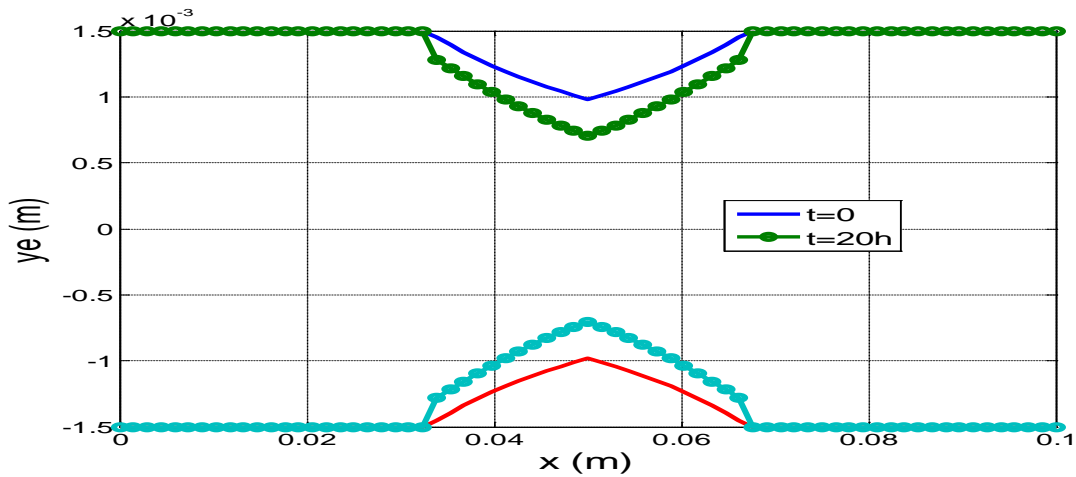


Figure IV.16- Frontière viscoélastique / viscoplastique

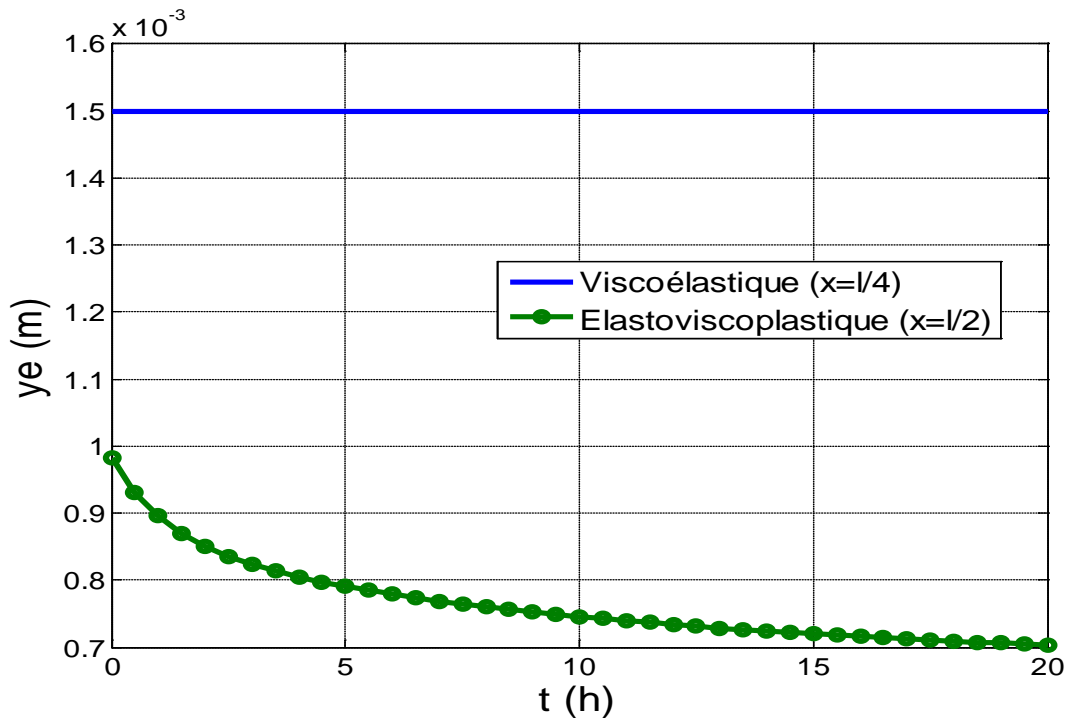


Figure IV.17- Evolution de la frontière viscoélastique

#### IV.5.5 Répartition des contraintes et des déformations

Lorsque le matériau a un comportement viscoplastique, la répartition des contraintes dans l'éprouvette est plus complexe. Il y a une redistribution des contraintes dans l'échantillon au cours d'un essai de fluage. Il existe un fluage transitoire de structure pendant lequel la vitesse de fléchissement diminue alors que les contraintes se redistribuent dans l'éprouvette [18]. Ce constat n'est pas en contradiction avec les résultats de la Figure IV.18 concernant l'évolution de la contrainte sur les fibres externes. En effet après une chute considérable de la contrainte juste après le chargement du fait qu'à l'instant = 0, elle est obtenue par les lois de l'élasticité instantanée, nous repérons une faible diminution progressive en fonction de temps pour arriver enfin à un état stable quasi-constant. Il est à souligner que plus la fibre est proche de la zone viscoélastique, plus la chute instantanée de la contrainte est faible ; enfin cette chute s'annule à la frontière viscoélastique / viscoplastique.

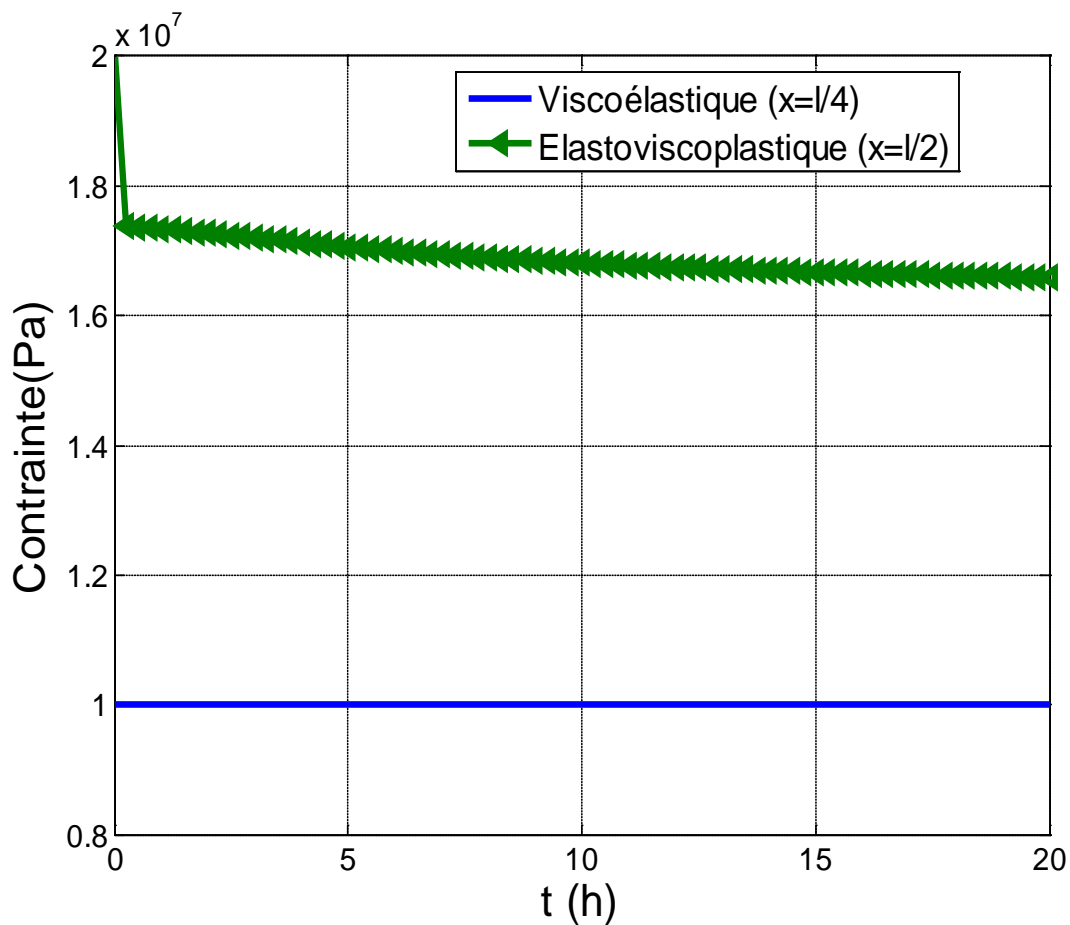


Figure IV.18- Evolution de la contrainte sur la fibre extérieure

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

La répartition des contraintes en fonction de la hauteur de la poutre est présentée sur la Figure IV.19. La figure à gauche nous présente la répartition des contraintes à l'instant  $t = 0$ . La linéarité est justifiée par les lois de l'élasticité. La figure à droite nous présente une redistribution des contraintes à l'instant  $t = 20h$ . Nous remarquons que le profil des contraintes reste linéaire dans le domaine viscoélastique ( $x = l/4$ ). Or dans le domaine élastoviscoplastique ( $x = l/2$ ), la contrainte change de pente dès que la contrainte seuil est atteinte. Le changement de cette pente est de manière à diminuer en fonction de  $y$  en comparaison avec la pente de la zone viscoélastique.

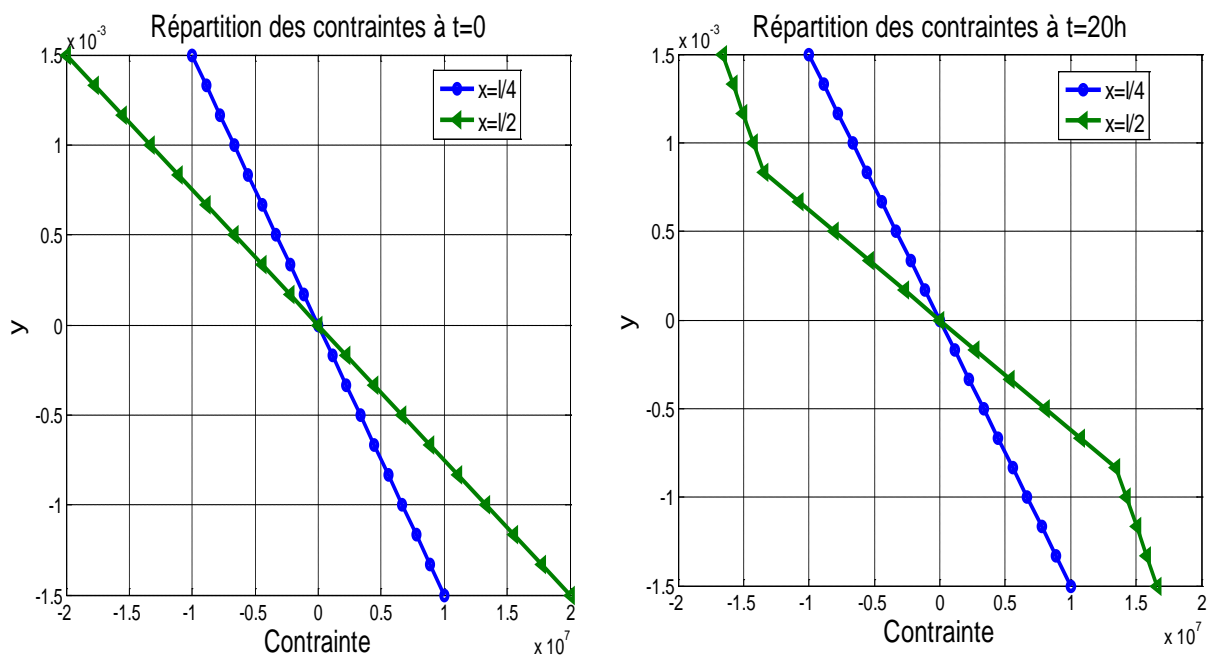


Figure IV.19- Répartition des contraintes

Pour nous rendre compte de la redistribution des contraintes dans la section la plus sollicitée en fonction de temps, nous procédons à une simulation à un échelon de temps soit ( $0,5h, 20h$ ). Les résultats obtenus sur la Figure IV.20 nous permettent de constater que, dans la zone viscoélastique ( $|y| \leq y_e$ ), l'augmentation de la pente de la contrainte en fonction de  $y$  est équilibrée par une diminution équivalente dans la zone viscoplastique ( $|y| > y_e$ ). Ce constat s'avère rationnel étant donné la constance de la contrainte en fonction de temps dans le cas du fluage.

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

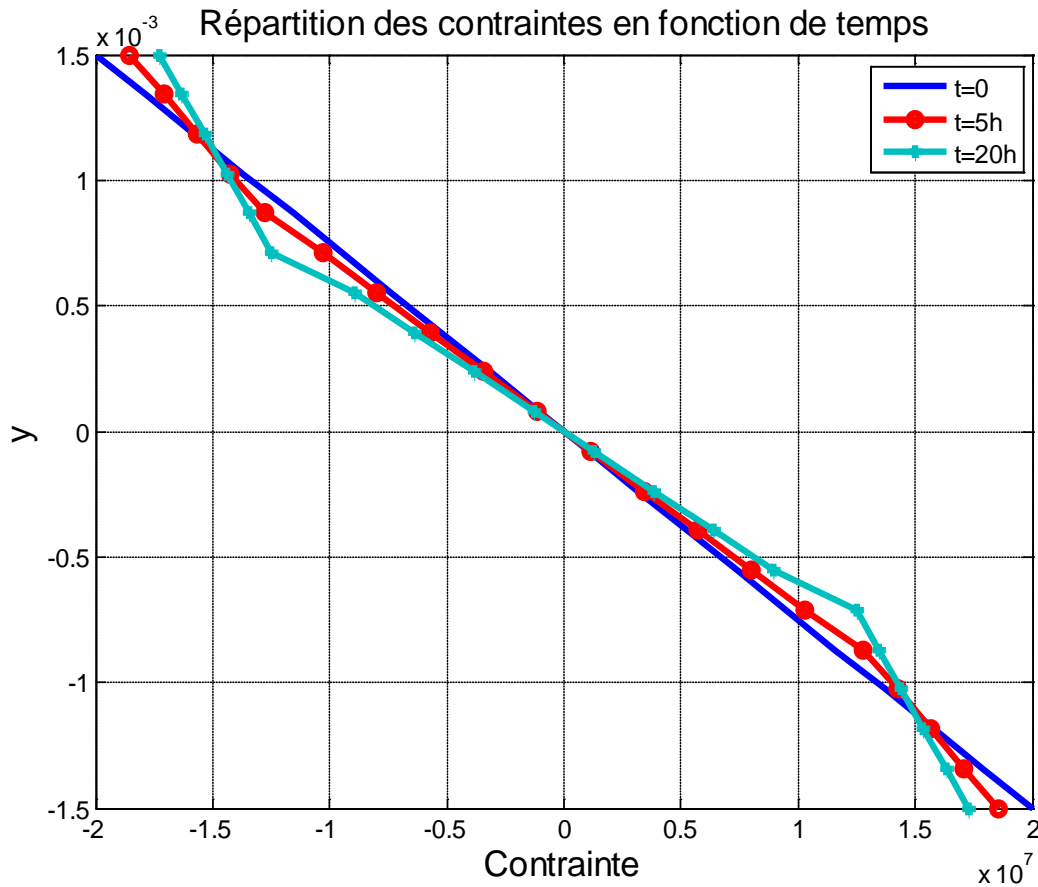


Figure IV.20- Répartition des contraintes dans la section la plus sollicitée

En ce qui concerne les déformations dans la poutre, l'allure des courbes au cours du temps (Figure IV.21) ne sera pas différente que celle de la courbure. Elle reflète le phénomène du fluage avec ces deux paliers transitoire et stationnaire. Il est à rappeler que dans une flexion symétrique trois points, les fibres inférieures sont en traction alors que les fibres supérieures subissent une compression. En effet, les hypothèses d'Euler-Bernoulli ( $\varepsilon = -\chi y$ ) nous expliquent que le seul élément qui entre en jeu, quant à la relation courbure-déformation est bien la dimension  $y$ . Par ailleurs, la Figure IV.22 nous montre que la linéarité en fonction de  $y$  est établie aussi bien dans le domaine viscoélastique que dans le domaine élastoviscoplastique. D'autre part, la Figure IV.23 nous affirme qu'à l'inverse de la répartition des contraintes (Figure IV.20), la répartition des déformations reste linéaire en fonction de  $y$  dans la section la plus sollicitée quel que soit le temps.

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

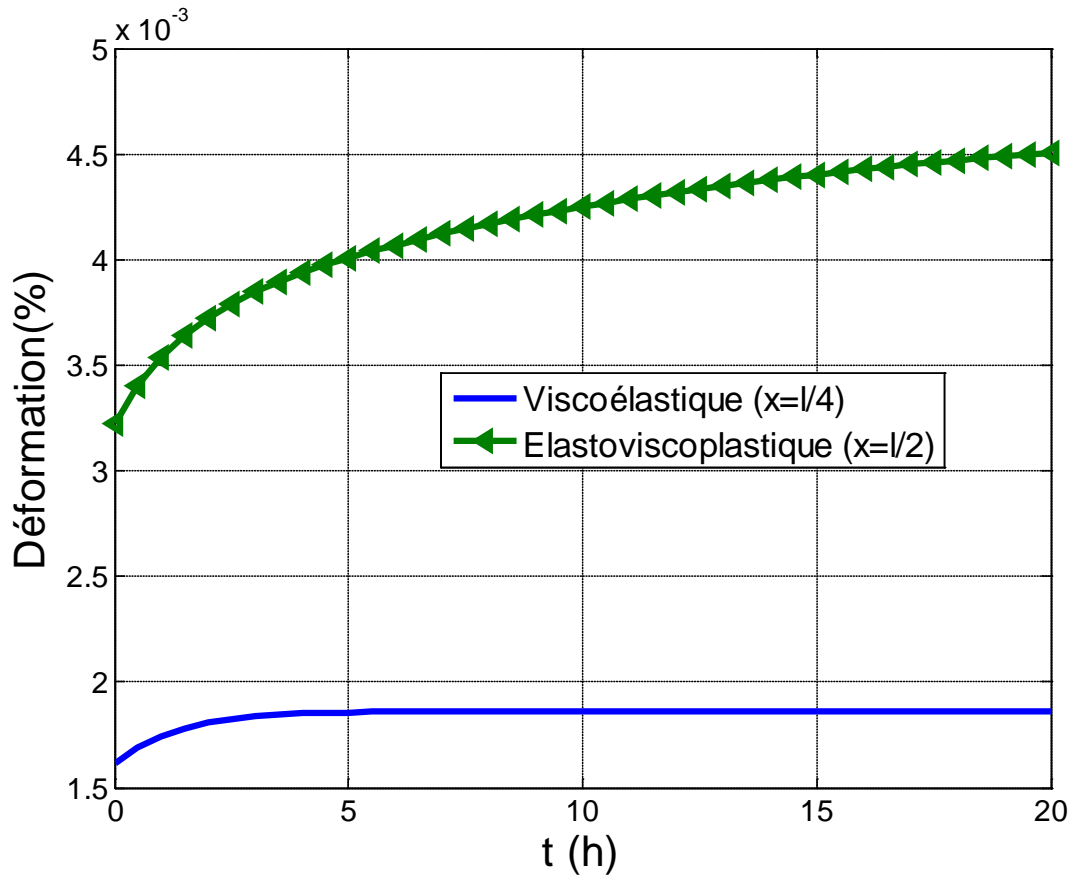


Figure IV.21- Evolution de la déformation sur la fibre extérieure

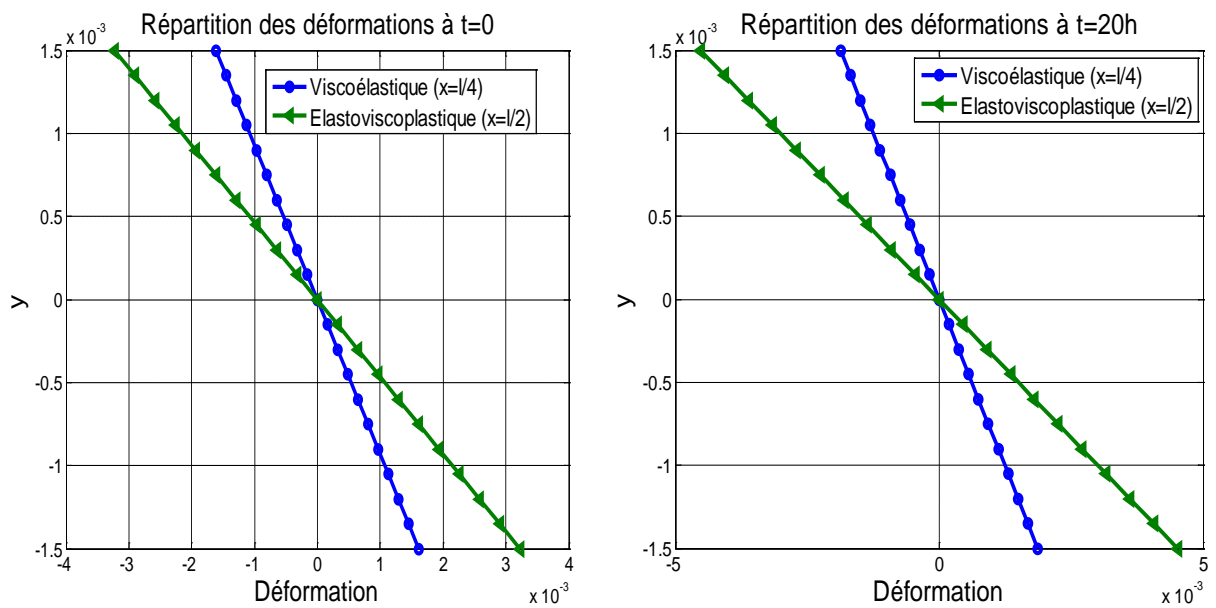


Figure IV.22- Répartition des déformations

IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

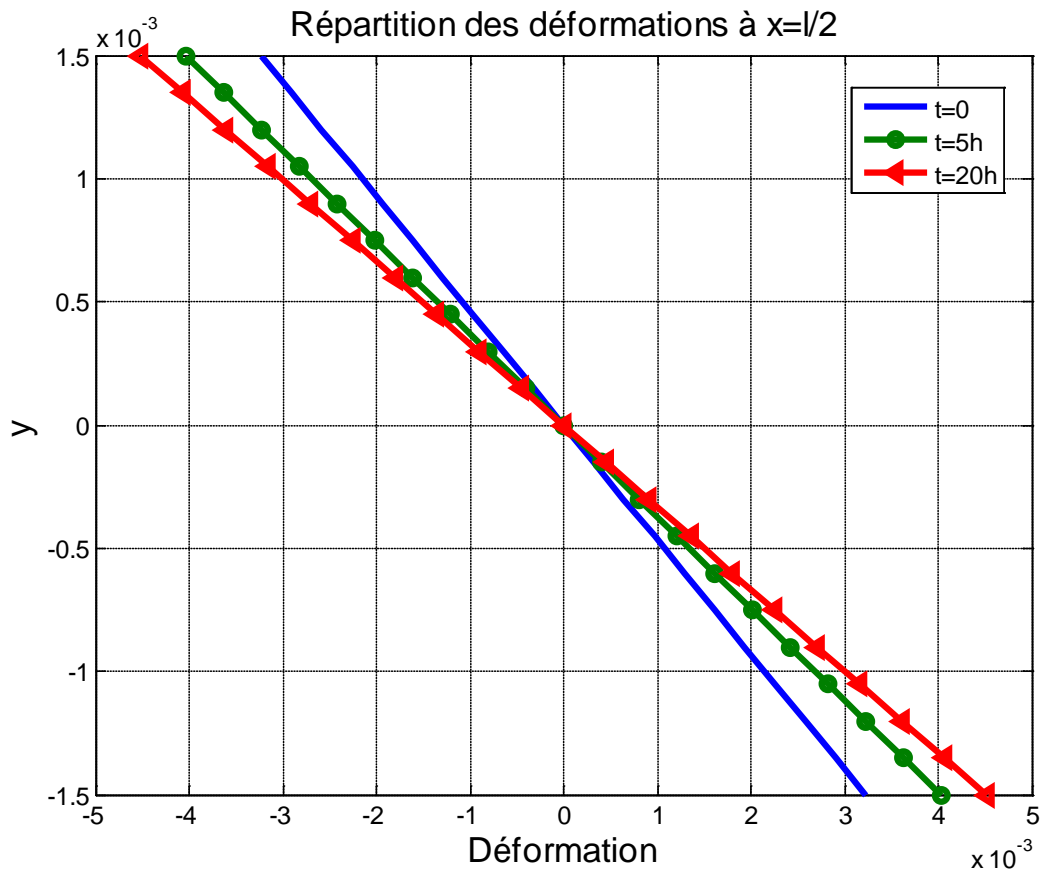


Figure IV.23- Répartition des déformations au cours du temps dans la section la plus sollicitée

#### IV.5.6 Interprétation des courbes de la flèche

Il est évident que la flèche maximale se situe au milieu de la longueur  $l$  de la poutre. Elle est fonction du moment engendré dans chaque section ainsi que du temps (Figure IV.24). En effectuant une simulation aux instants ( $t = 0$ ) et ( $t = 20h$ ), nous obtenons une flèche élastique instantanée importante qui prend encore de l'ampleur en valeur absolue, en symétrie par rapport à la verticale passant par le milieu de la poutre, après ( $20h$ ). Notons que le signe moins est dû au déplacement de l'axe neutre vers le bas. L'évolution de la flèche est représentée sur la Figure IV.25. Un aspect transitoire dans les premiers temps finissant par avoir un état stationnaire. Nous trouvons que son allure en valeur absolue nous rappelle celle de la courbure de taux de courbure et de la déformation. Cela trouve son explication par la cohérence et les relations qui relient toutes ces grandeurs.



IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

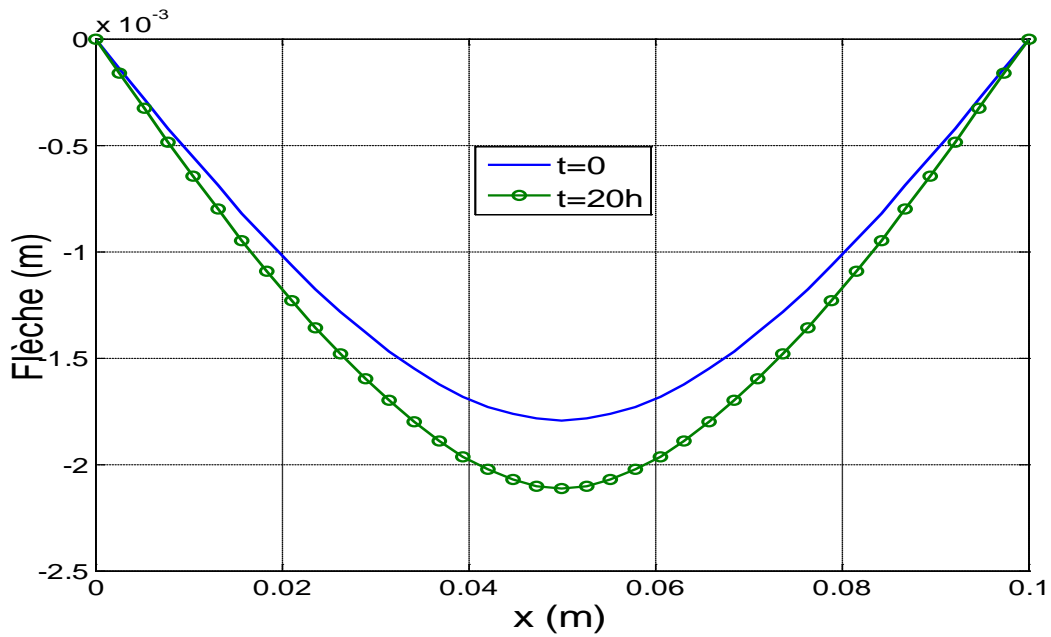


Figure IV.24- Déformée de la poutre

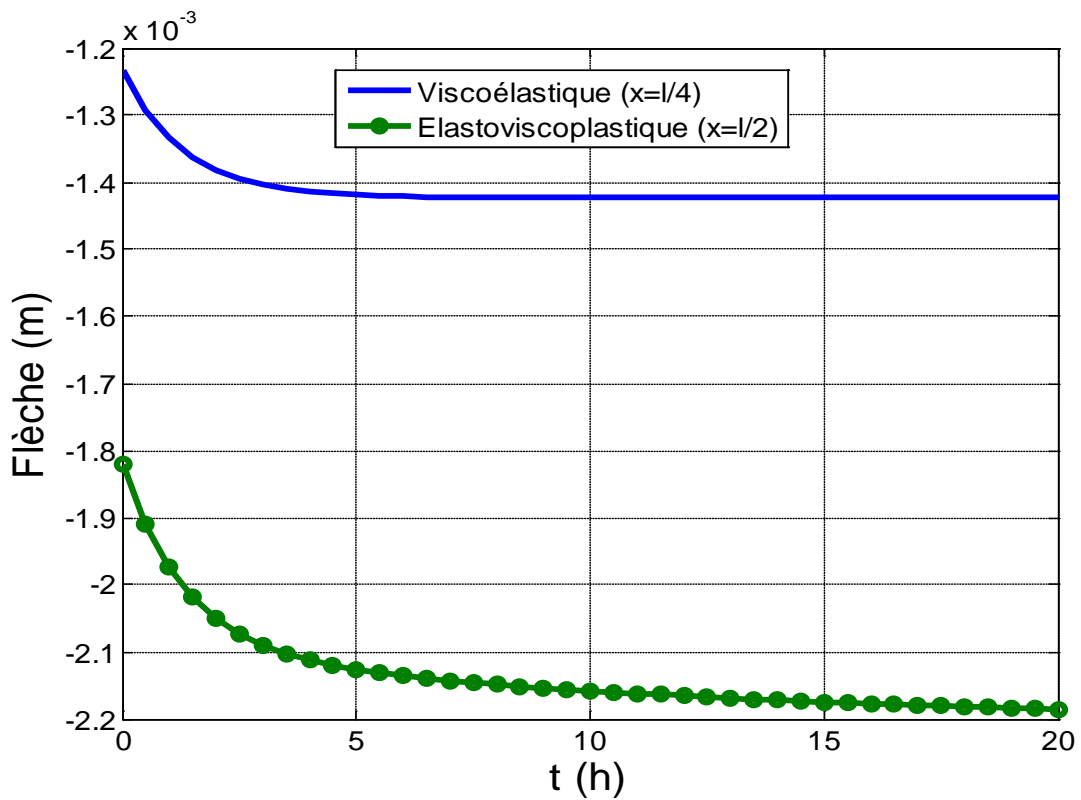


Figure IV.25- Evolution de la flèche

#### IV. Proposition d'un modèle rhéologique global représentant le comportement élastoviscoplastique des matériaux.

##### **IV.6 Conclusion**

Ce chapitre a fait l'objet d'une modélisation du comportement élastoviscoplastique des matériaux en la considération d'un champ de contrainte non uniforme. Le modèle proposé, étant une combinaison d'une élasticité instantanée, une viscoélasticité et une viscoplasticité est tellement complexe que la simulation numérique s'est imposée inéluctablement.

Les résultats obtenus reflètent, dans leur globalité, le comportement typique du fluage élastoviscoplastique. Les courbes évolutives de la courbure, de taux de courbure, de la déformation de la flèche, et de la frontière viscoélastique sont de même allure en valeur absolue, elles connaissent un accroissement accéléré aux premiers temps pour arriver par la suite à un état stationnaire ou quasi stationnaire. La redistribution des contraintes au cours du temps dans le domaine élastoviscoplastique étant non uniforme en fonction de la longueur et de la hauteur de la poutre était très complexe. Elle peut se décrire par une chute importante, par-dessus tout dans les fibres externes, puis continue sa diminution mais à pente très faible au cours du temps ; un état stationnaire n'est pas à exclure après un certain temps. La relation moment courbure est identique, à temps fixes, à celle obtenue par l'analyse élastoplastique écrouissable indépendante du temps.

L'analyse numérique nous a montré la cohérence des résultats obtenus en comparaison avec des solutions de la littérature. Cependant ces résultats ont été obtenus pour des chargements et des géométries simples et en situation unidimensionnelle. Si l'on envisage des chargements plus complexes, il s'avère nécessaire de développer des calculs par éléments finis ou par volumes finis.

## **Conclusions générales et perspectives**

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à la modélisation mathématique et la simulation numérique de l'un des comportements les plus complexes des matériaux, il s'agit du comportement élastoviscoplastique où l'ensemble des déformations élastique, viscoélastique et viscoplastique ont été prises en charge.

Après avoir présenté une revue bibliographique portant en premier lieu sur l'explication de l'origine physique des déformations réversibles et permanentes pour différentes classes de matériaux ; suivie par une modélisation des efforts et des déformations dans le cadre de la mécanique des milieux continus dont le principe des puissances virtuelles et la thermodynamique des milieux continus dont le principe de l'état local ; et accomplie par une classification rhéologique de différentes lois de comportement.

Nous avons mis l'accent en deuxième lieu sur les théories de la plasticité et de la viscoplasticité dont les principaux éléments sont le domaine d'élasticité, les critères d'écoulement, la partition des déformations, la règle de la normalité et les lois d'érouissage cinématique et isotrope. La lumière est jetée ensuite sur la modélisation du phénomène du fluage viscoplastique.

La modélisation de comportement en flexion, ayant la particularité d'une répartition non uniforme des contraintes, a fait l'objet du troisième chapitre. La théorie élémentaire des poutres dans le cadre de la mécanique des milieux continus et l'hypothèse de petites déformations, étant à la base de la modélisation en flexion des comportements aussi bien élastiques qu'inélastiques, a été présentée. Une application au cas d'une flexion viscoélastique sous sollicitation composée a eu lieu où nous nous sommes contentés à une résolution du problème uniquement par des méthodes analytiques. Une autre application portant sur la flexion élastoplastique, d'abord parfaite puis à érouissage non linéaire, nous a exigés de faire appel aux méthodes numériques pour la résolution des équations du modèle. Un schéma itératif de Newton-Raphson a été établi pour résoudre l'équation non linéaire de la courbure. La méthode des différences finies d'ordre deux a été utilisée pour l'évaluation de la flèche élastoplastique. Les résultats obtenus ont enfin été présentés et discutés.

Le mémoire est couronné par la proposition d'un modèle numérique représentant le comportement élastoviscoplastique en la considération d'un champ de contrainte non uniforme. L'essai de flexion trois points en fluage sous les hypothèses d'Euler-Bernoulli a été privilégié. Le bois a été choisi comme matériau objet de la simulation. L'équation de la courbure élastoviscoplastique, à la lumière de laquelle nous aurions pu déterminer toutes les autres grandeurs telles que la flèche et la répartition des contraintes et des déformations, a été intégrée par la méthode implicite d'Euler qui avait exigé un calcul itératif fondé sur la méthode de Newton-Raphson après chaque pas de temps. La méthode des différences finies d'ordre deux a été favorisée pour l'évaluation de la flèche élastoviscoplastique. Les résultats obtenus ont été présentés, discutés et comparés qualitativement avec d'autres résultats dans la littérature et ont montré une bonne estimation des grandeurs calculées.

Il est à noter que ces résultats sont obtenus en situation unidimensionnelle qui est, en effet, à la base du développement de toute loi de comportement. Une généralisation de ce modèle au cas tridimensionnel nous présente un souci et une nouvelle problématique qui aurait dû être prise en charge dans des travaux ultérieurs. La méthode des éléments finis ou celle des volumes finis auraient pu s'imposer dans le cas de la considération d'un chargement et / ou d'une géométrie complexe.

**Références bibliographiques**

- [1] Hosford, W. F. *Mechanical Behavior of Materials*. Cambridge University Press, New York, 2010.
- [2] Lemaitre, J. and Chaboche, J.-L. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 2001.
- [3] Bailon, J.-P. and Dorlot, J.-M. *Des matériaux*. Presses Internationales Polytechnique, Montréal, 2000.
- [4] Roesler, J., Harders, H. and Baeker, M. *Mechanical Behaviour of Engineering Materials*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2007.
- [5] Moraes, P. D. d. *Influence de la température sur les assemblages bois*. Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré Nancy 1, Nancy, 2003.
- [6] Salençon, J. *Mécanique des milieux continus, Tome 1: Concepts généraux*. Editions de l'école polytechnique, Palaiseau, 2007.
- [7] Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.-L., Forest, S. and Blétry, M. *Non-linear mechanics of materials*. Springer, 2010.
- [8] Lubliner, J. *Plasticity theory*. Pearson Education, 2006.
- [9] Dreistadt, C. *Analyse expérimentale et modélisation micromécanique du comportement du polycarbonate soumis aux chargements complexes*. Thèse de Doctorat, Université Paul Verlaine de Metz, 2007.
- [10] Mitchell, B. S. *An introduction to materials engineering and science*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2004.
- [11] Hosford, W. F. *Solid mechanics*. Cambridge University Press, New York, 2010.
- [12] Salençon, J. *De l'élastoplasticité au calcul à la rupture*. Editions de l'école polytechnique, Palaiseau, 2002.
- [13] Nguyen, D.-T. *Prédiction des déformations permanentes des couches de surface des chaussées bitumineuses*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2006.
- [14] Dunne, F. and Petrinic, N. *Introduction to Computational Plasticity*. Oxford University Press, New York, 2005.
- [15] Anandarajah, A. *Computational methods in elasticity and plasticity*. Springer, New York, 2010.
- [16] Neto, E. d. S., Peric, D. and Owen, D. *Computational methods for plasticity*, 2008.
- [17] Betten, J. *Creep Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.

- [18] Colin, C. *Etude du fluage du dioxyde d'uranium, caractérisation par essais de flexion et modélisation mécanique*. Thèse de Doctorat, Paris, 2003.
- [19] Besson, J. *Simulation numérique de la mise en forme des céramiques: Application à la compaction isostatique à chaud*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1990.
- [20] Amara, M. *Céramiques Nanocomposites Si/C/N/O : Simulation numérique d'un réacteur de synthèse de nanopoudres par pyrolyse laser*. Thèse de Doctorat, Université de Limoges, 2004.
- [21] Sanchez, P. *Mise en oeuvre et illustrations de la théorie exacte des poutres*. Thèse de Doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, 2001.
- [22] Arnaud Delaplace, F. G., Frédéric Ragueneau *Mécanique des structures*. Dunod, Paris, 2008.
- [23] S.P.Timoshenko *Résistance des matériaux*. Dunod, Paris, 1968.
- [24] Bazant, Z. P. and Cedolin, L. *Stability of structures: elastic, inelastic, fracture, and damage theories*. Dover publications, Mineola, New York, 2003.
- [25] Chakrabarty, J. *Theory of plasticity*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [26] Wong, M. B. *Plastic Analysis and Design of Steel Structures*. Elsevier, Amsterdam, 2009.
- [27] Quarteroni, A., Sacco, R. and Saleri, F. *Méthodes numériques* Springer-Verlag Italia, Milano, 2004.
- [28] Heran, E. J. *An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1997.
- [29] Blanchard, S. *Caractérisation du comportement non-linéaire des matériaux à partir d'essais statiquement indéterminés et de champs de déformation fortement hétérogènes*. Thèse de Doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2009.
- [30] Moutee, M. *Modélisation du comportement mécanique du bois au cours du séchage*. Thèse de PhD, Université de Laval, Québec, 2006.
- [31] HUSSON, J.-M. *Loi de comportement viscoélastique avec effet de mémoire*. Thèse de Doctorat, Université de Limoges, 2009.
- [32] Placet, V. *Conception et exploitation d'un dispositif expérimental innovant pour la caractérisation du comportement viscoélastique et de la dégradation thermique du bois dans des conditions sévères*. Thèse de Doctorat, Nancy-Université, 2006.
- [33] Salençon, J. *Viscoélasticité pour le calcul des structures*. Editions de l'école polytechnique, Palaiseau, 2009.

- [34] Lemaitre, J. *Handbook of materials behavior models*. Academic Press, San Diego, 2001.
- [35] Piepi, G. T. *Comportement viscoplastique avec rupture des argiles raides*. Thèse de Doctorat, Paris, 1995.
- [36] Simo, J. C. and Hughes, T. J. R. *Computational inelasticity*. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [37] Mariage, J.-F. *Simulation numérique de l'endommagement ductile en formage de pièces massives*. Thèse de Doctorat, Troyes, 2003.
- [38] Jeunechamps, P.-P. *Simulation numérique, à l'aide d'algorithmes thermomécaniques implicites, de matériaux endommageables pouvant subir de grandes vitesses de déformation*. Thèse de Doctorat en science, Université de Liège, 2008.

**Résumé :** Si le comportement des matériaux conventionnels utilisés dans des applications ordinaires est essentiellement de nature élastique linéaire, pour d'autres la réponse du matériau devient plus complexe à plus d'un égard. L'objectif de ce travail est de proposer un modèle de comportement performant et utilisable pour un matériau dont le comportement s'étale de l'élastique linéaire jusqu'au comportement élasto-viscoplastique beaucoup plus complexe. Le passage d'un cas à l'autre dépend de l'état de chargement et des fonctions du modèle. Le problème se complique encore davantage et devient plus intéressant par la considération d'un champ de contrainte non uniforme (le cas de la flexion) où le même matériau aura des comportements différents d'un point à un autre selon l'état de contrainte. Le modèle proposé est un montage en série d'un mécanisme viscoélastique représenté par le modèle de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée et d'un mécanisme viscoplastique décrit par le modèle de Bingham. Les équations du modèle sont résolues numériquement : la méthode numérique d'Euler implicite est choisie pour l'intégration de l'équation de la courbure ; la méthode des différences finies pour l'évaluation de la flèche.

**Mots clés :** Comportement des matériaux, élasticité, plasticité, viscoélasticité, viscoplasticité, flexion, fluage, poutre, courbure, flèche.

**Abstract:** If the behavior of conventional materials used in ordinary applications is essentially a linear elastic, for others the response of the material becomes more complex in many respects. The objective of this work is to provide a powerful role model suitable for a material whose behavior ranges from the linear elastic to elasto-viscoplastic much more complex. The transition from one case to another depends on the charging status and functions of the model. The problem is further complicated and becomes more interesting by the consideration of a non-uniform stress field (the case of bending) when the same material will behave differently from one point to another depending on the state of stress. The proposed model is a series connection of a mechanism represented by the viscoelastic Kelvin-Voigt model of instantaneous elastic and viscoplastic mechanism described by the Bingham model. The model equations are solved numerically: the backward Euler method is chosen for the integration of the equation of the curvature, the finite difference method for evaluation of the deflection.

**Keywords:** Behavior of materials, elasticity, plasticity, viscoelasticity, viscoplasticity, bending, creep, beam, curvature, deflection.

**ملخص :** إذا كان سلوك المواد التقليدية المستخدمة في التطبيقات العادية هو أساسا سلوكا مرنا خطيا، فإن الاستجابة بالنسبة لمواد أخرى تصبح أكثر تعقيدا وذلك على عدة مستويات. الهدف من هذا العمل هو اقتراح نموذج رياضي خاص بالمواد التي لا يقتصر سلوكها الميكانيكي على المرونة الخطية فقط بل يتعدى ذلك إلى أن يشمل اللزوجة و اللدونة اللزجة ليصبح أكثر تعقيدا. الانتقال من حالة سلوك إلى أخرى يعتمد على حالة الشحن و وظائف النموذج. المشكلة تزداد تعقيدا وتصبح أكثر إثارة للاهتمام من خلال اعتبار حقل إجهاد غير موحد (حالة الانحناء) حيث أن نفس المادة تتصرف بشكل مختلف من نقطة إلى أخرى تبعا لحالة الإجهاد. النموذج المقترح هو عبارة عن تركيب على التسلسل لنموذج كلفن فوي اللزج المرن ذو المرونة اللحظية و نموذج اللدونة اللزجة لبينغهام. تحل معادلات النموذج عدديا حيث تم اختيار طريقة أويلر الخلف لتكامل معادلة الانحناء، وطريقة الفروق المحدودة لتقييم الانحراف (السهم).

**الكلمات المرشدة :** سلوك المواد، المرونة، اللزوجة، اللدونة، الانحناء، الزحف، كمر (جائز)، ميل الانحناء، انحراف.