Université Med Khider-Biskra]*Hamdi Soumia*

THE UNIVERSITY OF NEW SOUTH WALES

SCHOOL OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING

Supervisor:
Assessor:

Dédicace

Je tiens à dédier ce modeste travail à :

Mes chers parents, pour leur soutien moral et matériel ; les sacrifices et les encouragements qu'ils m'ont portés durant toute ma vie. Que Dieu (le tout puissant) les garde pour mois.

Aussi à mes sœurs et mes frères.

A toute ma grande famille et toutes mes connaissances.

A mes amis sans exception.

A tous mes enseignants, surtout mon encadreur Monsieur ***Labed Boubakeur*** *et mes collég*ues

A toutes ces personnes et d'autres, je dédie ma mémoire.

Je leur présente mes respets et mes sincères remerciements.

Remerciements

A l'issue de ce modeste travail, je tiens à remercier : ***Allah*** *qui m'a donné la patience et l'effort pour réaliser cette mémoire.*

C'est un plaisir d'exprimer ma profonde gratitude à mon superviseur, monsieur : ***Labed Boubakeur****, Professeur à l'université de Biskra. Ses encouragements et sa disponibilité ont grandement contribué à l'élaboration de ce travail. Ses conseils et son orientation se sont toujours avérés pertinents.*

Mes remerciements vont également à messieurs les membres du comité d'examination, maîtres de conférence à l'université de Biskra pour avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble des enseignants du département de Mathématiques ainsi que toutes les personnes qui ont participé, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Enfin, je remercie vivement ma famille pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation.

Résumé

Les équation p-Laplacien sont des équations différentielles au dérivées partielle elliptique non linéaire et du second ordre, ils proviennent naturellement des problèmes physiques par exemple de la rhéologie,mouvement brownien, mécanique quantique, dont le nom est un hommage au physicien mathématicien Pierre-Simon de Laplace, les fonctions solutions de l'équation de Laplace sont appelées les fonctions p-harmonique. Il ya beaucoup des outiles étudier l'existence des solutions de ces équations par exemple :méthode de compacité(de degré topologique), méthode de monotonie.

Dans ce travail, on s'intéresse au méthodes de degré topologique dans l'étude de l'existence des équation p-Laplacien et entre ces équation on consacre sur les l'équation p-Laplacian de type Liénard avec un argument de déviation et l'équation p-Laplacian avec plusieurs arguments du déviation.

Mots clés Existence des solutions, Degré topologique de Brouwer , D.T de Leray-Shauder, p-Laplacien, équation du Liénard, solution périodique

Abstract The p-Laplacian equation are derived partial differential equations in nonlinear elliptic and second order, they come naturally from physical problems such as rheology, Brownian motion, quantum mechanics, whose name is a tribute to the mathematical physicist Pierre-Simon Laplace, the functions of solutions are the Laplace equation p-called harmonic functions. There are a lot of outiles study the existence of solutions of these equations such as : compactness method (topological degree), method of monotony.

In this work, we focus on the topological degree methods in the study of the existence of p-Laplacian equation and between equations are spent on the equation p-Laplacian Liénard type with an argument of deviation and the 'p-Laplacian equation with several arguments deviation.

Keywords Existence of solutions, topological degree of Brouwer, Leray-DT Shauder, p-Laplacian Liénard equation, periodic solution.

Table des matières

Introduction Générale

Dans de nombreux domaines de la mécanique, de l'astronomie, de la physique, et de la technique, l'étude des phénomènes est d'une importance considérable. Lorsque les équations qui les régissent sont linéaire, l'existence de résultats sur la structure générale des solutions permet, du moins en principe, de résoudre le problème de la détermination des solutions. Il n'en est malheureusement pas de même pour les équations différentielles non linéaire.
C'est pour répondre aux besoins de la mécanique céleste, on va définir un méthode qui appelé méthode de degré topologique (méthode de compacité), cette méthode est commencée dans 1912 par E.L.Brouwer telle que l'application (du degré) est défin é dans un espace de dimension fini et dans 1934 J.P.Shauder a donné un extension de cette méthode dans un espace de dimension infini, pour voir tout les détaille sur les théories du Degré topologique, on recherche dans les livres suivantes :([3], [4], [12], ...)

Le but de cette travail est d'utilise le degré topologique pour étudier l'existence des équations p-Laplacien

Ce mémoire contient quatre chapitres comme le suivant :

• *Le premier chapitre : Théorie du Degré Topologique :* contient des proposition et quelques propriétés sur le degré topologique de Brouwer et le degré topologique de Leray-Shauder.

• *Le deuxième chapitre : Equations p-laplacien :* dans ce chapitre, on va donner des notation sur l'équation p-Laplacian et votre solutions

• *Le troisième chapitre : Solutions périodiques du l'équation p-laplacien de type Liénard avec un argument de déviation :*

on va présenter un appplication du degré pour étudier l'existence des solutions périodiques dans l'équation p-Laplacien de type Liénard avec un argument de déviation.

cette étude est nouveux mais il est extension d'autre étude par exemple ([20], [21])

•*Le quatrième chapitre :solutions périodiques dans p-Laplacien neutre les équations différentielles avec plusieurs arguments de déviation :*Dans cette chapitre,on applique le degré sur l'équation p-Laplacien avec des arguments de déviation

Chapitre 1

Théorie du Degré Topologique

1.1 Introduction

Soient $y \in \mathbb{R}^N$ et $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une application au moins continue et considérons l'équation

$$f(x) = y, \tag{1.1}$$

comment peut-on s'assurer de manière "un peu pratique" qu'il existe au moins une solution x à (1.1)?

Dans le cas où f est linéaire: si le déterminant de f est non nul, alors il existe une solution unique et stable à (1.1), et ce pour tout $y \in \mathbb{R}^N$.
Ceci n'est pas une condition nécessaire et suffisante: il peut exister des solutions, pour certains y, lorsque le déterminant de f s'annule ; dans ce cas, on peut cependant constater que ces solutions ne sont pas stables ; si l'on perturbe un peut y, il peut ne plus exister de solution du tout.
Nous souhaitons ici développer un outil jouant, pour des applications non-linéaires, ce rôle du déterminant pour les applications linéaires : un réel, "le degré", qui indique par sa non-nullité que (1.1) a au moins une solution stable, ce degré dépendra de f et y, mais aussi de l'ensemble sur lequel on cherche les solutions à (1.1) .
Une première idée pour définir le degré de f en y sur un ensemble Ω pourrait ètre "c'est le nombre de solutions à (1.1) dans Ω". Cependant, on souhaite quand même

qu'il soit plus facile en pratique de prouver la non-nullité du degré que de prouver que (1.1) a des solutions. En ce sens, la définition précédente ne semble pas faire avancer grand chose : on veut savoir qu'il existe des solutions à (1.1) en prouvant que le degré correspondant est non-nul, et pour prouver ceci il faut savoir qu'il existe des solutions à (1.1) ...
Cette première définition peut donc paraître trop naïve, mais elle n'est curieusement pas si éloignée que cela de la définition finale ; en fait, il manque juste deux ingrédients pour faire de cette définition l'outile extrèmement puissant que nous allons étudier : il ne faut compter que les solutions "stables", et les compter avec une "orientation".
En fait, beaucoup de conséquences du degré topologique sont souvent vues comme de simples applications des deux théorèmes suivantes.

Points fixes

Théorème 1.1.1 (Point fixe de Brouwer) *Soit* $\overline{B}$ *la boule unité fermée de* $\mathbb{R}^N$ *et* $f : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$ *continue. Alors* f *a un point fixe : il existe* $x \in \overline{B}$ *tel que* $f(x) = x$ *.*

Théorème 1.1.2 (Point fixe de Schauder) *Soit* $\overline{B}$ *la boule unite fermée d'un Banach* $\mathbb{E}$ *et* $f : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$ *continue telle que* $f\left(\overline{B}\right)$ *est relativement compacte dans* $\mathbb{E}$*. Alors* f *a un point fixe : il existe* $x \in \overline{B}$ *tel que* $f(x) = x$*.*

Les preuves de ces deux théorèmes seront immédiates une fois le degré topologique construit. On peut aussi noter, et c'est classique, que le théorème de schauder peut se déduire du théorème du Brouwer, et il faut cependant comprendre que le degré topologique est un outil bien plus puissant, plus générale et souvent même plus facile d'utilisation que ces théorèmes de points fixes.

Preuve. voir [18] ■

1.2 Degré topologique de Brouwer : la dimension finie

Cas particulier : la dimension N=1

Beaucoup d'application conduisent au problème de trouver tous les zéro d'une application continue $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ou U est un fermé dans $\mathbb{R}$ c'est a dire, nous somme intéressés des solution de

$$f\,(x) = 0 \quad x \in U, \tag{1.2}$$

Dans le cas particulier on pose $U = [0,\ 1]$.
Soit $f : [0,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue tel que $f\,(0) \neq 0$ et $f\,(1) \neq 0$ et notons

$$d\,(f) = \frac{1}{2}(sgn\,(f\,(1)) - sgn\,(f\,(0))).$$

Si $d\,(f) \neq 0$, alors $f\,(1)$ et $f\,(0)$ ont des signes différents, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [0,\ 1]$ tel que $f(x) = 0$ et s'assurer que (1.2) a au moins une solution stable dans $[0,\ 1\ ]$ (il suffit qu'il soit non-nul); il est de plus très simple à calculer. Si l'on perturbe légèrement f, alors comme f est non-nul avant perturbation, il reste non nul après perturbation et une solution à (1.2) continue donc à exister.
Si l'on souhaite un degré adapté à (1.2) (i.e. avec un second member pas forcément nul) et qui prenne en compte l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ sur lequel on cherche les solutions, alors en décomposant Ω en ses composantes connexes $\Omega = \cup_{i \in I}\ \ ]a_i.b_i[$ on peut définir :

$$d\,(f,\ \Omega,\ y) = \frac{1}{2}\sum_{i \in I}(sgn\,(f\,(b_i) - y) - sgn\,(f\,(a_i) - y)\ ), \tag{1.3}$$

Lorsque $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas sur $\partial\Omega$ (comme Ω est borné, cette non-annulation implique que $f - y$ ne peut change de signe que sur un nombre fini de composantes connexes de Ω, et que la somme sur I est en fait fini).

Le degré topologique de Brouwer

Nous donnons ici une formulation précise du degré topologique de Brouwer et de ses propriétés principales.

Le théorème suivant établit l'existence et l'unicité du degré topologique via ses propriétés clefs.

Théorème 1.2.1 *Soit* $N > 1$; $\mathcal{A} = \{(f, \Omega, y) \,/\, \Omega$ *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^N$, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *est continue*$\}$ *telle que* $y \notin f(\partial\Omega)$. *Il existe une et une seule application* $d : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

- *Si* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $y \in \Omega$ *alors :*

$$d(Id, \Omega, y) = 1 \ \ (normalisation)\,,$$

- *Si* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *et* $y \in \mathbb{R}^N$, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *est continue et* Ω_1, Ω_2 *sont des ouverts disjoints inclus dans* Ω *tels que* $y \notin f\left(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)$ *alors :*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y) \ \ (additivit\acute{e})\,,$$

- *Si* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$, $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *et* $y : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *sont continues et, pour tout* $t \in [0,1]$, $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ *alors :*

$$d(h(0,\cdot), \Omega, y(0)) = d(h(1,\cdot), \Omega, y(1)).\ (invariance\ par\ homotopie),$$

d est appelé le degré topologique de Brouwer.

Quelques propriétés

Proposition 1.2.2 *Le degré topologique de Brouwer vérifie les propriétés suivantes :*

i) *Si* $d(f, \Omega, y) \neq 0$ *alors il existe* $x \in \Omega$ *tel que* $f(x) = y$.

ii) Pour tout $z \in \mathbb{R}^N$, $d(f, \Omega, y) = d(f - z,\ \Omega,\ y - z)$.

iii) Soit $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et $r = dist(y,\ f(\partial\Omega)) > 0$. Si $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ continue et $z \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $sup_{\partial\Omega}(|g - f|) + |y - z| < r$ alors :

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, z)\,.$$

iv) $d(f, \Omega, \cdot)$ est constant sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$.

v) Pour tout $z \in \mathbb{R}^N$, $d(f, \Omega, y) = d(f(\cdot - z), z + \Omega, y)$.

Preuve. voir [3] ■

Remarque 1.2.3 *En guisse de cas particulier de iii), on voit que* $d(f, \Omega, y)$ *ne dépent que des valeurs de* f *sur* $\partial\Omega$ *: si* $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *est continue et* $g = f$ *sur* $\partial\Omega$ *alors :*

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y).$$

1.2.1 Unicité du degré de Brouwer

Cela peut paraître bizarre d'aborder la question de l'unicité avant celle de l'existence (quel intérêt de montrer qu'un objet est unique si l'on ne sait pas qu'il existe ?). Cependant, la preuve qu'il existe au plus une application vérifiant les propriétés énoncées dans le théorème 1.2.1 va en fait nous demander de décortique cette application, de sorte qu'à la fin on aura compris comment la construire, et comment donc en prouver l'existence.
A noter que l'unicité du degré de Brouwer sera très importante quand on construira le degré de leray-schauder.

Réduction aux applications et valeurs régulières

Nous montrons ici que le degré, défini sur $\mathcal{A}$, est en fait entièrement déterminé par ses valeurs sur un sous-ensemble particulier de $\mathcal{A}$.
Fixons Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et notons $\mathcal{A}_\Omega = \{(f, y) \ , (f, \Omega, y) \in \mathcal{A}\} \subset C(\overline{\Omega})^N \times \mathbb{R}^N$. Il est clair que $\mathcal{A}_\Omega$ est un ouvert de $C(\overline{\Omega})^N \times \mathbb{R}^N$: en effet, si $(f, y) \in \mathcal{A}_\Omega$ alors $r = dist(y, f(\partial\Omega)) > 0$ donc, en prenant $(g, z) \in C(\overline{\Omega})^N \times \mathbb{R}^N$ tel que $sup_{\overline{\Omega}} |g - f| < \frac{r}{2}$ et $z \in B\left(y, \frac{r}{2}\right)$.
On a, pour tout $x \in \partial\Omega$,
$|g(x) - z| \geq |f(x) - z| - |g(x) - f(x)| \geq |f(x) - y| - |y - z| - |g(x) - f(x)| > r - \frac{r}{2} - \frac{r}{2} > 0$ et donc $(g, z) \in \mathcal{A}_\Omega$.
En notant $C^\infty(\overline{\Omega})$ l'ensemble des restrictions à $\overline{\Omega}$ de fonctions dans $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ et comme $C^\infty(\overline{\Omega})^N$ est dense dans $C(\overline{\Omega})^N$ et $\mathcal{A}_\Omega$ est un ouvert de $C(\overline{\Omega})^N \times \mathbb{R}^N$, alors on en déduit que $\mathcal{A}_\Omega^\infty = \left\{(f, y) \in \mathcal{A}_\Omega \ , \ f \in C^\infty(\overline{\Omega})^N\right\}$ est dense dans $\mathcal{A}_\Omega$.

Pour f régulière sur Ω, on note $C_f = \{x \in \Omega \ / \ \ Jf(x) = 0\}$et $\mathbb{R}_f = \mathbb{R}^N \backslash f(C_f)$l'ensemble des valeurs régulières de f ; ce sont les $y \in \mathbb{R}^N$ qui vérifient que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $f(x) = y, \ \ f'(x)$ est inversible. Le théorème de sard 1.2.4 affirme que $|f(C_f)| = 0$, et donc en particulier que $\mathbb{R}_f$ est dense dans $\mathbb{R}^N$ (son complémentaire est d'intérieur vide, puisque de mesure de lebesgue nulle). Ceci permet de voir que $\mathcal{A}_\Omega^{\infty,\mathbb{R}} = \{(f, \ y) \in \mathcal{A}_\Omega^\infty, \ \ y \in \ \mathbb{R}_f\}$ est dense dans $\mathcal{A}_\Omega^\infty$ pour la topologie de $C\left(\overline{\Omega}\right)^N \times \mathbb{R}^N$ et donc aussi dans $\mathcal{A}_\Omega$ pour cette même topologie. Mais le point iii) de la proposition (1.2.2) de la montre que $d(\cdot, \Omega, \cdot)$ est continu sur $\mathcal{A}_\Omega$ (et en fait localement constant sur cet ensemble, ce qui est normal puisqu'à valeurs dans $\mathbb{Z}$). L'application $d(\cdot; \Omega \ , \cdot)$ est donc entièrement déterminée sur $\mathcal{A}_\Omega$ par ses valeurs sur $\mathcal{A}_\Omega^{\infty,\mathbb{R}}$ (ensemble dense dans $\mathcal{A}_\Omega$), et il suffit de connaître le degré sur $\mathcal{A}^{\infty,\mathbb{R}} = \left\{(f, \Omega, y) \in \mathcal{A} \ / \ f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^N, \ y \in \ \mathbb{R}_f\right\}$pour le connaître sur $\mathcal{A}$.

Théorème 1.2.4 (Sard) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $\ f \in \ C^{\,1}(\Omega)^N$, *et* $C_f = \{x \in \Omega \ / \ \ Jf(x) = \det f'(x) = 0\}$. *Alors* $|f(C_f)| = 0$.

Réduction cas linéaire :

Nous allons voir ici qu'il suffit en fait de déterminer le degré sur les applications linéaires et avec $y = 0$ pour le déterminer sur $A^{\infty.\mathbb{R}}$.
Soit $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}^{\infty,\mathbb{R}}$. Comme y est une valeur régulière de f, si x est un antécédent de y par f alors x est forcément dans Ω (et non sur $\partial\Omega$) et $f'(x)$ est inversible; par le théorème d'inversion locale, f est donc un difféomorphisme local d'un voisinage de x sur un voisinage de y; cela montre en particulier que au voisinage de x, il ne peut exister d'autre antécédent de y (f est injective au voisinage de x) et montre qu'ils sont en nombre fini.
Si δ est choisi assez petit de sorte que les boules centrées sur les antécédents de y et de rayan δ soient deux à deux disjointes, comme y n'a pas d'antécédent par f en dehort de ces boules, la proposition d'additivité du degré associée aux propriétés ii) et v) de la proposition (1.2.2) montre que :

$$\begin{aligned} d(f,\Omega,y) &= \textstyle\sum_{z\in f^{-1}(\{y\})} d(f,B(z,\delta),y), \\ &= \textstyle\sum_{z\in f^{-1}(\{y\})} d(f-y,B(z,\delta),0), \\ &= \textstyle\sum_{z\in f^{-1}(\{y\})} d(f(z+\cdot)-y,B(0,\delta),0), \end{aligned} \tag{1.4}$$

(et ce pour tout δ assez petit). Soit z un antécédent de y. Comme f'est uniformément continue sur Ω (car $f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^N$), le théorème des accroissements finis donne :

$$|f(z+x)-y-f'(z)x| \leq \sup_{t\in[0,1]} \|f'(z+tx)-f'(z)\|\,|x| \leq \omega(|x|)\,|x|, \tag{1.5}$$

Où $\|\cdot\|$ est la norme d'endomorphisme induite par $|\cdot|$ et $\omega(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$ (module d'uniforme continuité de f'). Considérons l'homotopie $(t,x) \to t(f(z+x)-y)+(1-t)f'(z)x$ et prenons $\delta > 0$; sil existe $x \in \partial B(0,\delta)$ et $t \in [0,1]$ tel que $h(t,x) = 0$, alors $t(f(z+x)-y-f'(z)x) = -f'(z)x$ et, par (1.5) on a $|f'(z)x| \leq \omega(\delta)\delta$. Mais, comme $f'(z)$ est inversible, on peut trouver $C_z > 0$ indépendant de δ et x tel que $|f'(z)x| \geq C_z\ |x| = C_z\ \delta$ et on aboutirait donc à $C_z \leq \omega(\delta)$, ce qui n'est pas possible lorsque δ est assez petit. Dans cette situation, on peut alors appliquer l'invariance par homotopie du degré pour voir que

$$d(f(z+\cdot)-y,B(0,\delta),0) = d(f'(z),B(0,\delta),0),$$

En utilisant ceci avec un δ suffisamment petit qui convient à tous les antécédents de y (en nombre finis), (1.4) donne :

$$d(f,\Omega,y) = \sum_{x\in f^{-1}(\{y\})} d(f'(z),B(0,\delta),0),$$

Pour chaque antécédent z, la seule solution de $f'(z)x = 0$ est $x = 0$ (car $f'(z)$ est inversible) ; l'additivité du degré topologique permet donc de voir que cette formule est en fait valable pour tout $\delta > 0$.

D'aprés cette résultat, on conclure que le degré est entiérement déterminer par les valeurs qu'il prend sur les applications linéaires inversible.

Degré d'un isomorphisme de $\mathbb{R}^N$

Dans cette partie on calcule $d(A, B(0,\delta), 0)$ lorsque $\delta > 0$ et A est un isomorphisme de $\mathbb{R}^N$, nous avons besoin pour cela d'un peu d'algèbre linéaire.
La décomposition polaire de A nous assure qu'il existe un endomorphisme S symétrique défini positif et un endomorphisme O orthogonal tel que $A = SO$.
Toutes les valeurs propres de S sont strictement positives, et S est diagonalisable. En choisissant une base dans laquelle S est diagonal et en effectuant, dans cette base, des homotopies $\mathbb{R}_*^+$ entre chacune de ses valeurs propres et 1, nous obtenons une homotopie d'endomorphismes $S(t)$ ayant tous les valeurs propre strictement positives (donc une homotopie d'isomorphismes) entre S et Id on a

$$J_A = P \begin{pmatrix} sgn(det(A)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec une matrice de passage (remarquons que $det(O) = sgn(det(A))$ puisque S est symétrique définie positive).
L'application $t \to S(t)O(t)$ est donc une homotopie d'isomorphismes entre A et J_A. Comme chaque $S(t)O(t)$ est un isomorphisme, il est clair qu'il ne peut y avoir de solution de $S(t)O(t)x = 0$ sur $\partial B(0.\delta)$ et l'invariance par homotopie du degré donne donc :

$$d(A, B(0,\delta), 0) = d(J_A, B(0,\delta), 0).$$

Si $detA > 0$ alors on a fini : $J_A = Id$ et la propriété de normalisation du degré donne $d(A, B(0,\delta), 0) = 1$
Dans le cas où $det\ A < 0$ on trouve que $d(A, B(0,\delta), 0) = -1$.
On déduit finalement de tout ceci que, lorsque A est un isomorphisme alors $d(A, B(0,\delta), 0) = sgn(det(A))$ ce qui conclut la preuve de l'unicité du degré puisque l'on a vu que celui-ci est entièrement déterminé par ses valeurs sur les isomorphismes, et que ladite valeur est simplement le signe du déterminant de l'isomorphisme considéré.

Preuve. voir [3] ■

1.2.2 Construction du degré de Brouwer

Nous allons maintenant prouver qu'il existe une application vérifiant les propriétés du théorème 1.2.1 . La preuve en question consiste à construire cette application ; il est en fait tout aussi important de retenir les propriétés du degré que sa construction, qui permet de mieux le comprendre et souvent de la calculer dans des cas particuliers. Le principe de construction consiste à parcourir en sens inverse le raisonement que l'on a suivi pour prouver l'unicité du degré. Nous allons d'abord construire un degré pour les fonctions et valeurs régulières, puis utiliser celui-ci pour construire un degré sur les fonctions régulières (et n'importe quel type de valeur), et enfin en déduire un degré pour les fonctions continues.

Degré pour les fonctions et valeurs régulières :

On a $\mathcal{A}^{\infty,\mathbb{R}} = \left\{ (f, \Omega, y) \in \mathcal{A} \ / \ f \in C^\infty \left(\overline{\Omega}\right)^N , \ y \in \ \mathbb{R}_f \right\}$. Nous avons vu que, puisque Ω est borné, une valeurs régulière (i.e. appartenant à $\mathbb{R}_f$)ne peut avoir qu'un nombre fini d'antécédents.
Le degré sur $\mathcal{A}^{\infty,\mathbb{R}}$ est défini par :

$$d^{\infty,\mathbb{R}} (f \ , \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} sgn\left(Jf\left(x\right)\ \right),$$

Il est assez clair que $d^{\infty,\mathbb{R}}$vérifie les propriétés de normalisation et d'additivité et l'invariance par homotopie. Cependant, pour continuer la construction du degré topologique il sera crucial de savoir que $d^{\infty,\mathbb{R}}$ est localment constant en y, ce que nous allons nous attacher à prouver maintenant.

Cette définition n'est pas évidente à manipuler sur les grosses perturbations de y ..., nous allons donc commencer par établir une autre expression de $d^{\infty,\mathbb{R}}$.

Lemme 1.2.5 *Soit* $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}^{\infty,\mathbb{R}}$ *et* $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *une approximation de l'unité vérifiant* $supp\left(\rho_\varepsilon\right) \subset B\left(0,\varepsilon\right)$. *Il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que, pour tout* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$d^{\infty,\mathbb{R}} \ (f, \Omega, y) = \int_\Omega \rho_\varepsilon\left(f\left(x\right) - y\right) Jf\left(x\right) dx,$$

Preuve.
Si y n'a pas d'antécédent, alors $\varepsilon_0 = dist\left(y, f\left(\ \overline{\Omega}\right)\right) > 0$ convient car, dans ce cas , $\rho_\varepsilon\left(f(x) - y\right) = 0$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Dans le cas contraire, notons $x_1, ..., x_n$ les antécédents de y par f. Pour tout $i = 1, ..., n$, $f'(x_i)$ est inversible donc par le théorème d'inversion locale f est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert U_i de x_i sur une boule ouverte $B(y, r_i)$ centrée en y (on peut supposer les U_i deux à deux disjoints). Sur U_i, Jf ne change pas de signe et on a donc, grâce au théorème de changement de variable.

$$\begin{aligned}
\int_{U_i} \rho_\varepsilon\left(f(x) - y\right) Jf(x)\, dx &= sgn\left(Jf(x_i)\right) \int_{U_i} \rho_\varepsilon\left(f(x) - y\right) \left|Jf(x)\right| dx \\
&= sgn\left(Jf(x_i)\right) \int_{B(y,r_i)} \rho_\varepsilon(z - y)\ dz \\
&= sgn\left(Jf(x_i)\right) \int_{B(0,r_i)} \rho_\varepsilon(u)\ du \\
&= sgn\left(Jf(x_i)\right)\ .
\end{aligned}$$

Dès que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 = \inf(r_1, ..., r_n)$ (car alors $supp(\rho_\varepsilon) \subset B(0, r_i)$ pour tout $i = 1, ..., r_n$). Par définition, $y \notin f\left(\overline{\Omega} \setminus \left(\cup_{i=1}^n U_i\right)\right)$ (les seuls antécédents de y sont $x_1, ...x_n$) et, comme $\overline{\Omega} \setminus \left(\cup_{i=1}^n U_i\right)$ est un compact, on en déduit que $\varepsilon_2 = dist\left(y, f\left(\overline{\Omega} \setminus \left(\cup_{i=1}^n U_i\right)\right)\right) > 0$. Si l'on prend $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$, on a alors $\left|f(x) - y\right| \geq \varepsilon$ dès que $x \in \overline{\Omega} \setminus \left(\cup_{i=1}^n U_i\right)$ et donc, dans cette situation, $\rho_\varepsilon\left(f(x) - y\right) = 0$. On en déduit que, pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$, puisque les U_i ont été pris deux à deux disjoints et $\varepsilon_0 = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \rho_\varepsilon\left(f(x) - y\right) Jf(x)\, dx &= \int_{\cup_{i=1}^n U_i} \rho_\varepsilon\left(f(x) - y\right) Jf(x)\, dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{U_i} \rho_\varepsilon\left(f(x) - y\right) Jf(x)\, dx
\end{aligned}$$

■

Nous pouvons maintenant prouver que $d^{\infty.\mathbb{R}}$ est localement constant en y (et même pas si localement que ça).

Proposition 1.2.6 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^N$ et B une boule ouverte incluse en dans $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$. Si (y^1, y^2) sont des valeurs régulières de f alors :*

$$d^{\infty.\mathbb{R}}\left(f, \Omega, y^1\right) = d^{\infty.\mathbb{R}}\left(f, \Omega, y^2\right),$$

Degré pour les fonction régulières et tout type de valeurs

Nous souhaitons maintenant définir le degré sur $\mathcal{A}^\infty$
$\mathcal{A}^\infty = \left\{(f, \Omega, y) \in \mathcal{A} \ / \ f \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^N\right\}$.
Soit $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}^{\infty.}$; y n'est pas forcément une valeur régulière de f mais le théorème de sard nous permet de voir que les valeurs régulières de f sont denses dans $\mathbb{R}^N$ de sorte que ,en notant $r = dist(y, f(\partial\Omega)) > 0$, on sait qu'il existe au moins un valeurs régulière y^1de f dans $B(y, r)$. Comme cette boule est incluse dans $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$, on sait que $d^{\infty,\mathbb{R}}$ ne dépend pas de la valeur régulière y^1 dans $B(y, r)$. Ces considérations nous permettent donc de définir un degré d^{∞} sur $\mathcal{A}^\infty$ de la manière suivante :

$d^{\infty}(f, \Omega, y) = d^{\infty,\mathbb{R}}(f, \Omega, y^1)$, où y^1 est n'importe quelle valeur régulière de f dans $B(y, r)$ avec $r = dist(y, f(\partial\Omega))$.

Proposition 1.2.7 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $h \in C^{\infty}\left([0,1] \times \overline{\Omega}\right)^N$ et $y \in C^{\infty}([0,1])$ tels que , pour tout $t \in [0,1]$, $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$. Alors*

$$d^\infty(h(t, \cdot), \Omega, y) \text{ est indépendant de } t.$$

Preuve. voir [1] ■

Degré pour les fonctions continues

Il nous reste à conclure en construisant finalement d sur $\mathcal{A}$. Soit $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et $r = dist(y, f(\partial\Omega)) > 0$ par la proposition (si K est un compacte de $\mathbb{R}^N$ alors $\left\{f_{|K}, f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)\right\}$ est dense dans $C(K)$),on sait qu'il existe $g \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right)^N$ telle que $sup_{\overline{\Omega}}|g - f| < r$; il est alors clair que $y \notin g(\partial\Omega)$ de sorte que l'on peut parler de

$d^\infty(g,\Omega,y)$. Grâce à la proposition 1.2.7 , il n'est pas dur de voir que cette quantité ne dépend pas de la fonction g ainsi choisie ; si $\widetilde{g}$ est une autre fonction régulière telle que $sup_{\overline{\Omega}}|g-f|<r$ alors l'homotopie régulière $h(t,x)=t\ g(x)+(1-t)\widetilde{g}$ vérifie aussi, pour tout $t\in[0,1]$, $sup_{\overline{\Omega}}|h(t,\cdot)-f|<r$, de sorte que $y\notin h\,(t,\partial\Omega)$ et la même proposition 1.2.7 donne donc

$$d^\infty(\widetilde{g},\Omega,y)=d^\infty(h\,(0,\cdot)\,,\Omega,y)=d^\infty(h\,(1,\cdot)\,,\Omega,y)=d^\infty(g,\Omega,y)$$

On peut donc bien définir le degré sur $\mathcal{A}$ par :

$d(f,\Omega,y)=d\ ^\infty(g,\Omega,y)$, où g est n'importe quelle fonction régulière telle que $sup_{\overline{\Omega}}|g-f|<r$ avec $r=dist(y,f(\partial\Omega))$.

Degré de Brouwer dans un espace vectoriel de dimension finie

Dans la parti précédente, le degré topologique de Brouwer a été construit sur $\mathbb{R}^N$(i.e. pour des applications définies sur des parties de $\mathbb{R}^N$).

Dans la suite, nous allons avoir besoin, pour tout espace vectoriel F normé de dimension finie, d'un degré topologique d_F sur F.

L'idée est très simple : comme F est de dimension finie, disons N, il existe un isomorphisme $\varphi:\mathbb{R}^N\longrightarrow F$. En définissant $\mathcal{A}\ _F$ comme l'ensemble des triplets $(f,\Omega\ ,y)$ tels que Ω est un ouvert borné de F, $y\in F$ et $f:\overline{\Omega}\longrightarrow F$ est continue et vérifie $y\notin f\,(\partial\Omega)$, on constate que pour tout $(f,\Omega\ ,y)$ on a $(\varphi^{-\ 1}of\ o\,\varphi,\varphi^{-1}\,(\Omega)\,,\varphi^{-1}\,(y))\in\mathcal{A}$ et on est donc incité à poser $d_F(f,\Omega\ ,y)=d(\varphi^{-1}of\ o\varphi,\varphi^{-1}\,(\Omega)\,,\varphi^{-1}\,(y))$(où $[d]$ est le degré de Brouwer dans $\mathbb{R}^N$).Il est alors clair que d_F vérifie les propriétés de normalisation, d'additivité et l'invariance par homotopie.

En fait, on n'a pas vraiment le choix de cette définition, car il ne peut exister sur F qu'un seul degré vérifiant les propriétés du théorème 1.2.1 .

En effet, si d_F est un tel degré et $\varphi:\mathbb{R}^N\longrightarrow F$ est un isomorphisme, alors il est clair que $\widetilde{d}\ (g,U\ ,z)=d_F(\varphi\ og\ o\varphi^{-1},\varphi\ \ (U)\,,\varphi\ \ \ (z))$ définit un degré topologique sur $\mathbb{R}^N$, ce qui implique que $\widetilde{d}$ doit être égal au degré de Brouwer d (par unicité de ce dernier). Cela prouve au passage que cette définition ne dépend pas de l'isomorphisme φ choisi à l'aide d'un autre isomorphisme serait aussi un degré sur F, et donc le degré sur F).

Dans la suite, nous allons devoir jongler simultanément avec plusieurs espaces vectoriels, et comparer les degrés topologiques de ces différents espaces. Soient $F\subset G$

deux espaces vectoriels de dimension finie et Ω un ouvert borné de G ; si $f:\overline{\Omega}\longrightarrow F$ est continue et $y\in F\setminus f(\partial\Omega)$, alors on peut parler de $d_G(f,\Omega\ ,y)$.
De plus, la restriction $f_{|\overline{\Omega\cap F}_-}:\overline{\Omega\cap F}\ \longrightarrow F$ est continue et $y\in F\backslash f_{|\overline{\Omega\cap F}}\left(\partial_F\left(\Omega\cap F\right)\right)$(car le bord $\partial_F\left(\Omega\cap F\right)$ de $\Omega\cap F$ relativement à F est inclus dans $\partial\Omega$), de sorte que l'on peut parler $d_F\left(f_{|\overline{\Omega\cap F}},\Omega\cap F,y\right)$.
La première idée qui vient à l'esprit serait de se demander si
$d_G(f,\Omega\ ,y)=d_F\left(f_{|\overline{\Omega\cap F}},\Omega\cap F,y\right)$; en réfléchissant un peu, on se rend compte que ceci n'a aucune chance d'avoir lieu en général :en effet, y pourrait avoir des antécédents par f dans $\Omega\setminus F$, des antécédents parfaitement "stables" et qui seraient donc repérés par $d_G(f,\Omega\ ,y)$ mais n'ont aucune chance d'être détectés par $d_F\left(f_{|\overline{\Omega\cap F}},\Omega\cap F,y\right)$.
Si l'on considère maintenant que f est une perturbation de l'identité, c'est à dire $f=Id-g$ avec g à valeurs dans F, alors cette situation ne peut pas se produire ; si x est un antécédent de y par $Id-g$ on a forcément $x=g\left(x\right)+y\in F$.
On peut donc comparer les degrés de divers espaces vectoriels inclus les uns dans les autres, pourvu qu'on les regarde sur des perturbations de l'identité. C'est le propos de l'énoncé suivant la théorème1.3.8.

1.3 Degré topologique de leray-schauder : la dimension infinie

Nous souhaitons maintenant construire un degré ayant la même finalité que le degré de Brouwer, mais en dimension infinie, c'est à dire un outil qui permette d'assurer qu'une équation de la forme $f(x)=y$, où f est continue d'un Banach $\mathbb{E}$ dans lui -même, a au moins une solution x .

Définition 1.3.1 *Le degré topologique en dimension infinie ne pourra donc pas être défini pour toutes les applications continues d'un Banach $\mathbb{E}$ dans lui -même, le degré que nous allons étudier ici, appelé degré de leray-schauder, est construit sur les applications qui différent de l'identité par une application compacte.*

Définition 1.3.2 *soient ξ et $\mathbb{E}$ des Banach et A un fermé de ξ . Une application $f:A\to\mathbb{E}$ est dite compacte si elle est continue et si, pour tout $R>0,f(A\cap\overline{B}\left(0,R\right))$*

est relativement compact dans $\mathbb{E}$. Il est équivalent de dire que, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ bornée dans A, on peut extraire de $(f(x_n))_{n\geq 1}$ une suite qui converge dans $\mathbb{E}$.

Voici le résultat principal de ce parti, qui énonce l'existence du degré de leray-schauder en même temps que ses propriétés principales, tout à fait similaires à celles du degré de Brouwer.

Théorème 1.3.3 *Soientt $\mathbb{E}$ un Banach et $\mathcal{A}_c$ l'ensemble des triplets $(Id - f\ , \Omega, y)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{E}$, $y \in \mathbb{E}$ et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{E}$ est compacte et telle que $y \notin (Id\ - f)(\partial\Omega\ )$. Il existe une application $d : \mathcal{A}_c \to \mathbb{Z}$ telle que :*

- *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{E}$ et $y \in \Omega$ alors : $d(Id, \Omega, y) = 1$ (normalisaton),*
- *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{E}$ et $y \in \mathbb{E}$, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{E}$ est compacte et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y \notin (Id\ - f)\left(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)$ alors*

$$d(Id\ - f, \Omega, y) = d(Id\ - f, \Omega_1, y) + d(Id\ - f, \Omega_2, y)\ \ (additivit\acute{e}),$$

- *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{E}$, $h : [0,1]\ \overline{\times\Omega} \longrightarrow\ \mathbb{E}$ est compacte, et*

  $y : [0,1] \longrightarrow\ \mathbb{E}$ est continue et, pour tout $t \in [0,1]$, $y(t) \notin (Id\ - h(t,\cdot))(\partial\Omega)$, alors :

$$d(Id - h(0,\cdot), \Omega, y(0)) = d(Id - h(1,\cdot), \Omega, y(1)) \qquad (invariance\ par\ l'\hom otopie),$$

d est appelé le degré topologique de leray-schauder.

Remarque 1.3.4 *En fait, ce degré est unique(ce qui justifie d'ailleurs que l'on puisse lui donner un nom...). L'unicité du degré de leray-schauder est cependant moins instructive et moins utile pour nous que celle du degré de Brouwer, nous n'en parlerons pas plus.*

Remarque 1.3.5 *Il est aussi possible de définir un degré topologique pour des perturbations "compactes" d'un opérateur de Fredholm (entre espaces pas nécessairement identiques).*

Quelques propriétés :

Lemme 1.3.6 *Soient ξ et $\mathbb{E}$ des Banach et A un fermé de ξ. Si $f : A \to \mathbb{E}$ est compacte et si X est un fermé borné dans A alors $(Id - f)(X)$ est fermé.*

Proposition 1.3.7 *Le degré topologique de leray-schauder vérifie les propriétés suivantes :*

i) Si $d(Id - f, \Omega, y) \neq 0$ alors il existe $x \in \Omega$ tel que $x - f(x) = y$.

ii) Pour tout $z \in \mathbb{E}$, $d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f - z, \Omega, y - z)$.

iii) Soit $(Id - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_c$ et $r = dist(y, (Id - f)(\partial\Omega)) > 0$. Si $g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ compacte et $z \in \mathbb{R}^N$ tels que $sup_{\partial\Omega}(\|g - f\|) + \|y - z\| < r$ alors :

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - g, \Omega, z).$$

iv) $d(Id - f, \Omega, \cdot)$ est constant sur les composantes connexes de $\mathbb{E} \backslash (Id - f)(\partial\Omega)$.

v) Pour tout $z \in \mathbb{E}$, $d(Id - f, \Omega, y) = d((Id - f)(\cdot - z), z + \Omega, y)$.

Proposition 1.3.8 *Soit G un espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace de G.Soit Ω un ouvert borné de G, $y \in F$ et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow F$ une application continue telle que $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$. Alors*

$$d_G(Id - f, \Omega, y) = d_F(Id - f_{|\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y).$$

1.3.1 Du degré de Brouwer au degré de leray shauder

La raison pour laquelle on est capable de construire un degré pour les perturbations compactes de l'identité est que les applications compactes s'approchent bien par des applications “en dimension finie” (pour lesquelles on à déjà un degré).

Définition 1.3.9 *Soient ξ et $\mathbb{E}$ des Banach et A un fermé borné dans ξ. Une application $f : A \to \mathbb{E}$ est de rang fini si elle est continue et si $f(A)$ est inclus dans un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ de dimension finie.*

Proposition 1.3.10 *Soient ξ et $\mathbb{E}$ des Banach et A un fermé dans ξ. Si $f : A \to \mathbb{E}$ est une application compacte alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : A \to \mathbb{E}$ de rang fini tel que $sup_A(\|g - f\|) \leq \varepsilon$.*

Théorème 1.3.11 (Leray-Schauder) *Si $\mathbb{E}$ est un Banach, $L : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ esl linéaire compacte, $\lambda \neq 0$ vérifie $\frac{1}{\lambda} \notin V_P(L)$ et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{E}$ contenant 0 alors*

$$d(Id - \lambda L, \Omega, 0) \neq 0.$$

Remarque 1.3.12 *On définit la multiplicité algébrique de $\mu \in V_P(L)$ par $\lim_{n\to\infty}(\dim\ker(L - \mu Id)^n)$. Limite en fait atteinte à partir d'un certain rang. On a alors $d(Id - \lambda L, \Omega, 0) = (-1)^{m(\lambda)}$, où $m(\lambda)$ est la somme des multiplicités algébriques des valeurs propres de L supérieures à $\frac{1}{\lambda}$.*

Théorème 1.3.13

1− *Supposons que $f \in C(\overline{\Omega})$ et $y \notin f(\partial\Omega)$, si $\|f - g\| < dis(y, f(\partial\Omega))$ alors $d(g, \Omega, y)$ est défini et est égal $d(f, \Omega, y)$.*

2− *Si $h(t, x) = h_t(x)$ est un homotopie et $y \notin h_t(\partial\Omega)$, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$alors $d(h_t, \Omega, y)$ est indépendant que $t \in [0, 1]$.*

Théorème 1.3.14 *Soit $f \in C(\overline{\Omega})$ et $y \notin f(\partial\Omega)$, si $d(f, \Omega, y)$ est non nul alors il ya un $x \in \Omega$ avec $f(x) = y$.*

1.3.2 Construction du degré de Leray-Schauder

Nous pouvons maintenant construire le degré de Leray-Shauder, à partir du degré de Brouwer. L'idée ressemble à celles qui ont guidé nos pas lors de la construction du degré de Brouwer : nous connaissons un degré sur une certaine classe I d'applications (celles définies sur un espace de dimension finie et à valeurs dans ce même espace) ; pour définir le degré sur une application "générale" (i.e perturbation compacte de l'unité en ce qui nous concerne), nous allons simplement dire qu'il est égal au degré de n'importe quelle application de I proche de notre application "générale", en montrant que cette définition est cohérente (c'est à dire que deux applications de I proches de notre application "générale" ont même degré).

Soit $(Id - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_c$. Par le lemme 1.3.6, $r = dist\,(y, (Id - f)\,(\partial\Omega))$ est strictement positif. Soit $g : \overline{\Omega} \to E$ une application de rang fini telle que $\sup_{\overline{\Omega}} \|g - f\| < r$ (voir la proposition 1.3.10) ; il est clair que $y \notin (Id - g)\,(\partial\Omega)$
(car $\sup_{\partial\Omega} \|Id - g - (Id - f)\| < dist\,(y, (Id - f)\,(\partial\Omega))$). Notons F un espace de dimension finie qui contient l'image de g et y . La restriction $Id - g_{|\overline{\Omega\cap F}}$ de $Id - g$ à $\overline{\Omega \cap F}$ est à valeurs dans F et, comme le bord $\partial_F\,(\Omega \cap F)$ de $\Omega \cap F$ relativement à F est inclus dans $\partial\Omega$, on a $\left(Id - g_{|\overline{\Omega\cap F}}, \Omega \cap F, y\right) \in \mathcal{A}_F$. On peut donc parler de l'entier $d_F\left(Id - g_{|\overline{\Omega\cap F}}, \Omega \cap F, y\right)$ et on a envie de définir le degré de Leray-Shauder de $(Id - f, \Omega, y)$ comme étant cet entier ; mais ceci ne sera une définition cohérente (et surtout qui nous permettera de prouver les propriétés du degré de Leray-Shauder) que si l'on peut montrer qu'elle ne dépend pas des choix de g et F effectués.
Soit donc g_1 une autre application de rang finie définie sur $\overline{\Omega}$ et à distance de f strictement inférieure à $r = dist\,(y, (Id - f)\,(\partial\Omega))$, et F_1 un autre espace de dimension finie qui contient y et l'image de g_1. En notant $G = F + F_1$, la proposition 1.3.8 permet de voir que

$$d_F\left(Id - g_{|\overline{\Omega\cap F}}, \Omega \cap F, y\right) = d_G\left(Id - g_{|\overline{\Omega\cap G}}, \Omega \cap G, y\right)$$

et

$$d_{F_1}\left(Id - g_{1|\overline{\Omega\cap F_1}}, \Omega \cap F_1, y\right) = d_G\left(Id - g_{1|\overline{\Omega\cap G}}, \Omega \cap G, y\right)$$

On construit maintenant dans G l'homotopie naturelle
$h\,(t,x) = t\left(Id - g_{\overline{|\Omega\cap G}}\right)(x) + (1-t)\left(Id - g_{1|\overline{\Omega\cap G}}\right)(x)$ entre $Id - g_{\overline{|\Omega\cap G}}$ et $Id - g_{1|\overline{\Omega\cap G}}$. Comme ces dux fonctions sont, sur $\partial_G\,(\Omega \cap G) \subset \overline{\Omega}$, à distance de $Id - f$ strictement inférieure à r , on voit que pour tout $t \in [0,1]$ la fonction $Id - h\,(t,.)$ reste aussi, sur $\partial_G\,(\Omega \cap G)$, à distance de $Id - f$ strictement inférieure à r ; en particulier, $Id - h$ ne prend donc jamais y comme valeur sur $[0,1] \times \partial_G\,(\Omega \cap G)$ et l'invariance par homotopie de d_G donne $d_G\left(Id - g_{\overline{|\Omega\cap G}}, \Omega \cap G, y\right) = d_G\left(Id - g_{1|\overline{\Omega\cap G}}, \Omega \cap G, y\right)$, ce qui conclut le raisonnement.

Pour résumer, le degré de Leray-Shauder sur est donc défini ainsi :

$$d\,(Id - f, \Omega, y) = d_F\left(Id - g_{|\overline{\Omega\cap G}}, \Omega \cap G, y\right)\ ,\ g : \overline{\Omega} \to E \text{ où est n'importe}$$

quelle application de rang fini telle que $\sup_{\overline{\Omega}} \|g - f\| < r$, avec $r = dist\,(y, (Id - f)\,(\partial\Omega))$, et F est un sous espace de E de dimension finie qui contient y et l'image de g.
La propriété de normalisation est alors une trivialité, et les autre propriétés sont vérifies (voir la preuve dans [3] page 29)

1.4 Généralisation du degré topologique dans un espace Euclidienne de dimension n

$\mathbb{E}^n$ étant l'espace euclidien à n dimensions muni de la norme

$$|x| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

La frontière et l'adhérence d'un ensemble $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ seront désignés respectivement par $\partial\Omega$ et $\overline{\Omega}$. L'application $y : x \to y\,(x)$ de l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ dans $\mathbb{E}^n$ définie par les n fonctions réelles $y_i = y_i\,(x_1, x_2, ..., x_n)\,,\ i\ = 1, 2, ..., n.$
Sera dite appartenir à $C^k\,(\Omega)\,,\ k$ entier positif ou nul, si les n fonctions $y_i\,(x_1, x_2, ..., x_n)\,,$ $i\ = 1, 2, ..., n$, sont k fois continûment dérivables par rapport à $x_1, x_2, ..., x_n$ dans Ω.
Cela étant, la définition de E.HEINZ [1] du degré topologique au point $z \in \mathbb{E}^n$ d'une application appartenant à $C^1\,(\Omega)$ est la suivante :

Définition 1.4.1 *Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{E}^n$, considérons l'application y : $x \to y\,(x)$ où $y\,(x) \in C^1\,(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ telle que $y\,(x) \neq z$ pour $z \in \partial\Omega$, z étant un point fixé dans $\mathbb{E}^n$.*
Soit $\mathbf{\Phi}\,(r) \in C^0\,([0, \infty[)$ une fonction réelle telle que :
i) $\mathbf{\Phi}\,(r) = 0$ dans un voisinage de $r = 0$ et pour $r \in [\varepsilon, \infty[$ où $o < \varepsilon < \inf_{x\in\partial\Omega} |y\,(x) - z|$
ii) $\int_{\mathbb{E}^n} \mathbf{\Phi}\,(|x|)\,dx = 1$ où $dx = dx_1 dx_2......dx_n$
Le degré topologique de l'application $y(x)$ en z par rapport à Ω est défini par :

$$d\,(y(x), \Omega, z) = \int_{\Omega} \mathbf{\Phi}\,(|y(x) - z|) \quad J\ \ [y(x)]\,dx,$$

où $J\ [y(x)]$ *est le jacobien de* $y(x)$.

L'extention de la définition du degré au cas des applications continues et la démonstration de ses principales propriétés nécessitent le lemme suivant, démontré en [1].

Lemme 1.4.2 *Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{E}^n$ et $y_i : x \to y_i(x), i = 1, 2,$ deux applications appartenant à $C^1(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ telles que, pour z fixé dans $\mathbb{E}^n$ et $\varepsilon > 0$:*

$$|y_i(x) - z| > 7\varepsilon,\ x \in \partial\Omega,\ i = 1, 2,$$

$$|y_1(x) - y_2(x)| < \varepsilon, \qquad x \in \overline{\Omega},$$

on a

$$d\ [y_1(x), \Omega, z] = d\ [y_2(x), \Omega, z],$$

Nous pouvons dès lors introduire, avec E.HEINZ, la

Définition 1.4.3 *Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{E}^n$ et z fixé dans $\mathbb{E}^n$, considérons l'application $y : x \to y(x)$ telle que $y(x) \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ et $y(x) \neq z$ pour $x \in \partial\Omega$. Soit $\{y_k(x)\}, k = 1, 2, ...,$ une suite d'applications $y_k : x \to y_k(x)$ telles que $y_k(x) \in C^1(\mathbb{E}^n)$ et $y_k(x) \neq z$ pour $x \in \partial\Omega$ qui convergent uniformément vers $y(x)$ dans $\overline{\Omega}$.*
Le degré topologique de $y(x)$ en z par rapport à Ω est défini par :

$$d\ [y(x), \Omega, z] = \lim_{k\to\infty} d\ [y_k(x), \Omega, z],$$

1.4.1 Propriétés fondamentales du degré topologique

Rappelons maintenant les propriétés fondamentales du degré topologique [1].
$\Omega_1$et $\Omega_2$étant deux ouverts bornés disjoints de $\mathbb{E}^n$.

Théorème 1.4.4 *Ω_1 et Ω_2 étant deux ouverts bornés disjoints de $\mathbb{E}^n$. $y : x \to y(x)$ une application telle que $y(x) \in C^0\left(\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}\right)$ et $y(x) \neq z$ pour $x \in \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, z fixé dans $\mathbb{E}^n$, on a*

$$d[y(x), \Omega_1 \cup \Omega_2, z] = d\ [y(x), \Omega_1, z] + d\ [y(x), \Omega_2, z],$$

Théorème 1.4.5 *Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{E}^n$ et $y : x \to y(x)$ une application telle que $y(x) \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ et $y(x) \neq z$ pour $x \in \partial\Omega$, z fixé dans $\mathbb{E}^n$, si*

$$d[y(x), \Omega, z] \neq 0,$$

il existe au moins un point $\xi \in \Omega$ tel que

$$y(\xi) = z,$$

Théorème 1.4.6 (Théorème l'invariance par rapport à une homotopie) *Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{E}^n$, I l'intervalle fermé et borné de $\mathbb{E}^1$ défini par $I = \{\tau : a \leq \tau \leq b\}$, $y : x \to y(x,\tau)$ une famille d'applications telles que $y(x,\tau) \in C^0\left(\overline{\Omega} \times I\right)$ et $y(x,\tau) \neq z$ pour $(x,\tau) \in \partial\Omega \times I$, z fixé dans $\mathbb{E}^n$, le degré topologique de $y(x,\tau)$ en z par rapport à Ω est constant pour $\tau \in I$.*

Cette théorème possède des corollaires importants :

Corollaire 1.4.7 *Avec les notations du théorème 1.4.6, si, pour un $\tau_0 \in I$, $y(x,\tau_0) \neq z$ pour, $x \in \partial\Omega$, z fixé dans $\mathbb{E}^n$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $\tau \in I$ satisfaisant à $|\tau - \tau_0| \leq \eta$, $d\ [y(x,\tau), \Omega, z]$ est défini et*

$$d\ [y(x,\tau), \Omega, z] = d\ [y(x,\tau_0), \Omega, z],$$

Corollaire 1.4.8 (Théorème de H.POINCARÈ-P BOHL) *Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{E}^n$ et $y_i : x \to y_i(x), i = 1, 2$, deux applications telles que $y_i(x) \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ et z fixé dans $\mathbb{E}^n$, si, pour tout $x \in \partial\Omega$, le segment de droite*

$$\overline{y_1(x)\, y_2(x)} = \{y \in \mathbb{E}^n : y = y_1(x) + \tau\,[y_2(x) - y_1(x)],\ \tau \in [0,1]\},$$

ne rencontre pas z *, alors*

$$d\ [y_1(x), \Omega\ , z] = d\ [y_2(x), \Omega\ , z],$$

Corollaire 1.4.9 (Théorème de E.ROUCHÉ) Ω *étant un ouvert borné de* $\mathbb{E}^n$ *et* $y_i : x \rightarrow y_i(x), i = 1, 2,$ *deux applications telles que* $y_i(x) \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ *et,* z *fixé dans* $\mathbb{E}^n$,

$$|\ y_1(x) - y_2(x)| < |y_2(x) - z\ |,$$

Pour tout $x \in \partial\Omega$, *on a*

$$d\ [y_1(x), \Omega\ , z] = d\ [y_2(x), \Omega\ , z],$$

Le théorème suivant est nécessaire pour introduire, dans le cadre de la théorie de HEINZ [1], la notion d'indice d'une application.

Théorème 1.4.10 Ω *étant un ouvert borné de* $\mathbb{E}^n$ *et* $y : x \rightarrow y(x)$ *une application telle que* $y(x) \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ *et* $y(x) \neq z$ *pour* $x \in \partial\Omega$, z *fixé dans* $\mathbb{E}^n$, *soit* F *l'ensemble(fermé)des* $x \in \overline{\Omega}$ *tels que* $y(x) = z$ *et soit* $\Omega_0 \subset \Omega$ *un ouvert contenant* F *alors,* $d\ [y(x), \Omega\ , z] = d\ [y(x), \Omega_0\ , z]$,

Nous pouvons maintenant définir l'indice d'une application :

Définition 1.4.11 $B(x_0,\rho)$ *étant la boule ouverte de centre* $x_0 \in \mathbb{E}^n$ *et de rayan* $\rho > 0$ *, soit* $y : x \rightarrow y(x)$ *une application telle que* $y(x) \in C^0\ \left[\overline{B}(x_0,\rho)\right]$ *et* $y(x) \neq y(x_0)$ *pour* $x \in \overline{B}(x_0,\rho)$ *et* $x \neq x_0$.
L'indice $i\ [\ y\ (x); x_0]$ *de l'application* $y\ (x)$ *en* x_0 *est défini par:* $i\ [\ y\ (x); x_0] = d\ [y\ (x), B(x_0,\rho)\ , y\ (x_0)]$,

L'indice d'une application possède les propriétés suivantes :

Théorème 1.4.12 Ω *étant un ouvert borné de* $\mathbb{E}^n$, *soit* $y : x \rightarrow y(x)$ *une application telle que* $y(x) \in\ C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ *et que,* z *étant un point fixé dans* $\mathbb{E}^n$, *l'équation*

$y(x) = z$, $x \in \overline{\Omega}$ *possède uniquement* p *solutions distinctes* $x_1, x_2, ..., x_p$ *appartenant à* Ω*.Alors*

$$d\ [y\ (x), \Omega\ , z] = \sum_{j=1}^{p} i\ [\ y\ (x) ; x_j] , \tag{1.13}$$

Théorème 1.4.13 *Soientt* x_0*un point fixé de* $\mathbb{E}^n$ *et* $\mathbb{V}$ *un voisinage de* x_0*.*
Si l 'application $y : x \to y(x)$ *est telle que* $y(x) \in\ C^1(\mathbb{V})$ *et* $J\ [y(x_0)] \neq 0$*, alors*

$$i\ [\ y\ (x) ; x_0] = \frac{J\ [y(x_0)]}{|J\ [y(x_0)]|} \tag{1.14}$$

Ces théorèmes permettent d'obtenir une autre propriété importante du degré topologique

Corollaire 1.4.14 Ω *étant un ouvert borné de* $\mathbb{E}^n$*, soit* $y : x \to y(x)$ *une application telle que* $y(x) \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\left(\cup_{j=1}^{N} \mathbb{V}_j\right)$ *où les* $\mathbb{V}_j \subset \Omega$*,* $j = 1, 2, ..., N$*, sont des voisinages des racines* $x_1, x_2, ..., x_n$ *supposées distinctes et en nombre fini, de l'équation*

$$y(x) = z, z\ fixé\ dans\ \mathbb{E}^n, x \in \Omega,$$

Si $y(x) \neq z$ *pour* $x \in \partial\Omega$ *et si,* $J\ [y(x_j)] \neq 0$*,* $j = 1, 2, ..., N$*, alors*

$$d\ [y(x), \Omega\ , z] = N^+ - N^-,$$

Où N^+ *(resp.* N^- *)désigne le nombre de racines telles que* $J\ [y(x\ )] > 0$ *(resp.* $J\ [y(x\ )] < 0$*).*

Enfin, le résultat suivant se fonde sur un théorème de SARD [2] :

Théorème 1.4.15 [[*1*], [*2*]] Ω *étant un ouvert borné de* $\mathbb{E}^n$*, soit* $y\ : x \to y(x)$ *une application telle que* $y(x) \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega)$ *et* $y(x)\ \neq z_0$ *pour* $x \in \partial\Omega$*,* z_0 *fixé dans* $\mathbb{E}^n$*. Pour chaque* $0 < \varepsilon < \inf_{x\in\partial\Omega} |y(x) - z_0|$ *, il existe un* $z \in \mathbb{E}^n$ *satisfaisant à* $|z - z_0| \leq \varepsilon$ *et tel que :*

1. $d\,[y(x), \Omega\ , z] = d\,[y(x), \Omega\ , z_0]$
2. *l'équation* $y(x) = z,\ x \in \overline{\Omega}$ *, possède au plus un nombre fini* p *de solutions* $x_1, x_2, ..., x_p$ *qui appartiennent à* Ω *(on pose* $p = 0$ *s'il n'y a pas de solutions) :*
3. $J\,[y(x_0)] \neq 0$ *pour* $\quad j = 1, 2, ..., p.$

On en déduit facilement le

Corollaire 1.4.16 *Ω étant un ouvert borné de $\mathbb{E}^n$ et $y : x \to y(x)$ une application telle que $y(x)\ \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ et $y(x)\ \neq z_0$ pour $x \in \partial\Omega$, z_0 fixé dans $\mathbb{E}^n$, $d\ [y(x), \Omega\ , z_0]$ est un entier.*

Chapitre 2

Equations p-laplacien

L'équation différentielle le plus important de l'ordre seconde est l'équation de laplace célébré. C'est le prototype de l'équation elliptique linéaire. Il est moins connu, qu'il a aussi une contre partie non-linéaire,la soi-disant $p-$laplace
équation (ou p-harmonique équation) , dépendant d'un paramètre p .
L'équation p-laplace a été beaucoup étudie au cours des cinquante dernières années et sa théorie est maintenant assez développées...certains problèmes difficiles restent ouverts.

2.1 Introduction

L'équation de laplace $\triangle u = 0$ ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

Est l'équation d'Euler-Lagrange pour l'intégrale de Dirichlet $D(u)$:

$$D(u) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \int\limits_{\Omega} ... \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right] dx_1 ... dx_n,$$

Si nous changons la place à p ^{ème} puissance, nous avons l'intégrale :

$$I(u) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx = \int\limits_{\Omega} ... \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx_1 ... dx_n,$$

Correspondant d'Euler-Lagrange équation est :

$$div \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right) = 0,$$

C'est l'équation $p-$laplace et l'opérateur $p - laplacien$ est défini comme

$$\triangle_p u = \ div \left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u \right),$$

$$= |\nabla u|^{p-4} \left\{ |\nabla u|^{\ 2} \triangle u + (p-2) \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\},$$

Généralement $p \geqslant 1$.
Il ya plusieurs valeurs remarquables de p.

- $p = 1$

$$\triangle_1 u = \text{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = -H,$$

Où H est l'opérateur courbure moyenne. En seulement deux variables que nous avons l'expression familière

$$H = \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{\left(u_x^2 + u_y^2 \right)^{\frac{3}{2}}},$$

- $p = 2$ on a l'opérateur de laplace

$$\triangle_{\ 2} u = \ \triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

- $p = n$ le cas limite, où n est le nombre de variables indépendants,

l'intégrale

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^n \, dx = \int_{\Omega} ... \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right]^{\frac{n}{2}} dx_1 ... dx_n,$$

est invariant conforme, le cas limite est important dans la théorie de quasi-conformelle application.

• $p = \infty$ comme $p \to \infty$, on rencontre l'équation $\triangle_\infty u = 0$ ou

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0,$$

C'est l'équation l'infini d'harmoniques.
L'opérateur p-harmonique apparaît dans de nombreux contextes.
Une courte liste est la suivante :

• Le problème non linéaire aux valeurs propres

$$\triangle_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0,$$

• L'équation $p-$poisson

$$\triangle_p u = f(x) \ ,$$

• Equations comme

$$\triangle_p u + |u|^{\alpha} u = 0,$$

qui sont intéressants lorsque l'expposant α est critique
• Equations paraboliques comme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \triangle_p u,$$

Où $u = u(x,t) = u((x_1, x_2..., x_n, t))$

• Donc on appelle p-harmoniques applications $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ minimisant le($p -$ énergie)

$$\int |\nabla u|^p \, dx = \int \left\{ \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{\frac{p}{2}} dx \ ,$$

• Peut-être avec certaines contraintes, un système d'équations apparaît c'est sujets supplémentaires sont trés intéressants mais ne peut pas être traitée ici.

La lecture est censé connaître quelques faits de base sur L^p espaces et les espaces de sobolev,en particulier , les espaces de premier ordre $W^{1,p}(\Omega)$et $W_0^{1,p}(\Omega)$ norme de l'est :

$$\| u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left\{ \int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Ω toujour un ensemble ouverte dans $\mathbb{R}^N$.

2.2 Le problème de dirichlet et solutions faibles

Le point de départ naturel est l'intégral $I(u)$ tel que

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \quad , \tag{2.1}$$

avec l'exposant p , $1 < p < \infty$, on est entraîné à la condition que la première variation doit disparaître, c'est

$$\int_\Omega \left\langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \eta \right\rangle dx = 0 \quad , \tag{2.2}$$

Pour tout les $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ .C'est la clé de concept d'hypothèses solutions faibles conviennent ce qui équivaut à

$$\int_\Omega \eta \operatorname{div} \left\langle |\nabla u|^{p-2} \ , \nabla u \right\rangle dx = 0 \ , \tag{2.1}$$

Depuis (2.1)a vérifié pour toutes les fonctions η que nous devons avoir :

$$\triangle_p u = \operatorname{div} \left(|\nabla u|^{p-2} \quad \nabla u \right) = 0 \ , \tag{2.4}$$

En Ω. D'autre termes, l'équation $P-$laplace est l'équation d'Euler-lagrange pour l'intégrale variational $I(u)$ .Il s'avère que la classe des solutions classiques est trop étroit pour le traitement du problème de dirichlet précitée(par une solution classique, nous entendons une solution ayant seconde en continu dérivées partielles. De telle sorte que l'équation peut être ponctuelle vérifiées). Nous définissons le concept de solutions faibles.ne nécessitant pas plus que la différentiabilité qu'ils appartiennent à l'espace de sobolev premier ordre $W^{1,p}(\Omega)$. Même l'espace local fera.

Définition 2.2.1 *Soit Ω un domaine dans $\mathbb{R}^n$, nous disons $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ est une solution faible de l'équation P-harmonique dans Ω. Si*

$$\int \left\langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \eta \right\rangle dx = 0 \tag{2.2}$$

Pour chaque $\eta \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Si,en plus , u est continues, alors on dit que u est une fonction $p-$harmonique.

Nous avons naturellement lire $|0|^{p-2}\,0$ a également 0 lorsque 0 ,$1 < p < 2$ .comme nous le verrons dans (*Théorie de la régularité*), toutes les solutions faibles sont continues.en fait,toute solution faible être redéfinie dans un ensemble de mesure de lebesgue nulle, donc la nouvelle fonction est continue, le cas échéant, nous supposons que la redéfinition a été effectué.
Nous avons le résultat suivant de base.

Théorème 2.2.2 *Les conditions suivantes sont équivalentes pour les*

i) *U est minimisant :*

$$\int |\nabla u|^p \, dx \;\leqslant \int |\nabla v|^p \, dx \;,\; lorsque \;\; v - u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,,$$

ii) *La première variation nulle*

$$\int \left\langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \eta \right\rangle dx = 0, lorsque \; \eta \in W_0^{1,p}(\Omega)\,,$$

iii) *Si, en plus, $\triangle_p u$ est continue, alors les conditions sont équivalentes à*

$$\triangle_p u = 0 \;\; en \;\; \Omega.$$

Remarque 2.2.3 *Si (2.2) est valable pour tout $\eta \in C_0^{\infty}(\Omega)$, alors il vaut aussi pour tout les $\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$, si nous savons que $u \in W^{1,p}(\Omega)$, donc les minimiseurs sont les mêmes que les solutions faibles.*

Lemme 2.2.4 *Si u est une solution faible en Ω , alors*

$$\int_{\Omega} \zeta^{p} |\nabla u|^{p} dx \leqslant p^{p} \int_{\Omega} |\nabla \zeta|^{p} |u|^{p} dx , \tag{2.6}$$

pour chaque $\zeta \in C_0^{\infty}(\Omega), 0 \leqslant \zeta \leqslant 1$, en particulier, si $B_{2r} \subset \Omega$, alors

$$\int_{B_r} |\nabla u|^{p} dx \leqslant p^{p} r^{-p} \int_{B_{2r}} |u|^{p} dx, \tag{2.7}$$

Preuve.

En utilise $\eta = \zeta^{p}\ u\ , \nabla\eta = \zeta^{p}\ \nabla u + p\zeta^{p-1} u\ \nabla\zeta$

Par le 2.2 équation et l'inégalité de Holder

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \zeta^{p} |\nabla u|^{p} dx &= -p \int_{\Omega} \zeta^{p-1} u \left\langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla \zeta \right\rangle dx \\
&\leqslant p \int_{\Omega} |\zeta \nabla u|^{p-1} |u \nabla \zeta| \, dx \\
&\leqslant p \left\{ \int_{\Omega} \zeta^{p} |\nabla u|^{p} dx \right\}^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \int_{\Omega} |u|^{p} |\nabla \zeta|^{p} dx \right\}^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

donc on a trouvé l'estimation suivante.

Enfin, si $B_{2r} \subset \Omega$,on peut ζ comme une fonction radial satisfaire $\zeta = 1$ dans B_r, $|\nabla\zeta| \leqslant r^{-1}$et $\zeta = 0$ à l'extérieur B_{2r}, cela est possible par appoximation ceci conclut la preuve.

Parfois, on peut considérer les sursolutions faibles et les sousolutions faibles Comme une règle numérique tel que $(\triangle_p u \leqslant 0)$ pour les sursolutions et $(\triangle_p u \geqslant 0)$ pour les sousolutions. ■

Définition 2.2.5 *On dira que $v \in W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ est un sursolution faible dans Ω si :*

$$\int_{\Omega} \left\langle |\nabla v|^{p-2} \nabla v, \nabla \eta \right\rangle dx \geqslant 0, \tag{2.8}$$

Pour tout $\eta \in C_0^{\infty}(\Omega)$ positif ou nul et pour les sousolutions faibles l'inégalité invers qui est vérifier.Dans l'estimation a priori ci-dessous, il est remarquable que le majorant est indépendant de la sursolution faible lui-même.

Théorème 2.2.6 *si $v > 0$ est un sursolution faible dans Ω ,alors :*

$$\int_\Omega \zeta^p \left|\nabla \log v\right|^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_\Omega \left|\nabla \zeta\right|^p dx,$$

chaque fois que $\eta \in C_0^\infty(\Omega), \zeta \geqslant 0$.

Preuve.
On peut ajouter des constantes à des sursolutions faibles.
D'abord, prouver l'estimation pour $v(x) + \varepsilon$ dans la place de $v(x)$
Alors laissez $\varepsilon \to 0$ dans :

$$\int_\Omega \frac{\zeta^p \left|\nabla v\right|^p}{(v+\varepsilon)^p} dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_\Omega \left|\nabla \zeta\right|^p dx,$$

donc on peut supposer que $v(x) \geqslant \varepsilon > 0$ premièrement.
Deuxièment on utilise la fonction de test $\eta = \zeta^p\ v^{1-p}$ puis

$$\nabla \eta = p\zeta^{p-1} v^{1-p} \nabla \zeta - (p-1)\,\zeta^p\ v^{-p} \nabla v,$$

et nous obtenons :

$$\begin{aligned}(p-1)\int_\Omega \zeta^p v^{-p} \left|\nabla v\right|^p dx &= p\int_\Omega \zeta^{p-1} v^{1-p} \left\langle \left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla v, \nabla \zeta \right\rangle dx \\ &\leqslant p\int_\Omega \zeta^{p-1} v^{1-p} \left|\nabla v\right|^{p-1} \left|\ \nabla \zeta\right| dx \\ &\leqslant p\left\{\int_\Omega \zeta^p v^{-p} \left|\nabla v\right|^p dx\right\}^{1-\frac{1}{p}} \left\{\int_\Omega \left|\nabla \zeta\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Le principe de comparaison est une des pierres angulaires de la théorie. ■

Théorème 2.2.7 *Supposons que u et v sont des fonctions p-harmoniques dans un domaine borné Ω.si à chaque $\zeta \in \partial\Omega$*

$$\lim_{x\to\zeta} \sup u(x) \leqslant \lim_{x\to\zeta} \inf v(x),$$

exclution la situation $\infty \leqslant \infty$ et $-\infty \leqslant -\infty$, alors $u \leqslant v$ dans Ω .

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$ et l'ensemble ouvert
$D_\varepsilon = \{x/\ u(x) > v(x) + \varepsilon\}$est vide ou bien égale $\mathbb{R}\,(D_\varepsilon \subset\subset \Omega)$, soustrayant les équations que nous obtenons

$$\int_\Omega \left\langle |\nabla v|^{p-2}\,\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u, \nabla \eta \right\rangle dx = 0,$$

pour tout $\eta \in W_0^{1,p}(\Omega)$ à support compact dans Ω .

$$\eta(x) = \max\{v(x) - u(x) + \varepsilon, 0\},$$

donc

$$\int_\Omega \left\langle |\nabla v|^{p-2}\,\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u, \nabla v - \nabla u \right\rangle dx = 0,$$

Cela possible dans le cas $\nabla u = \nabla v$ dans D_ε. car l' intégral est positif lorsque $\nabla u \neq \nabla v$. Donc $u(x) = v(x) + c$ dans D_ε et $c = \varepsilon$ car $u(x) = v(x) + \varepsilon$ dans ∂D_ε. Alors $u \leqslant v + \varepsilon$ dans Ω, donc on résult que $u \leqslant v$. ■

Remarque 2.2.8 *Le principe comparaison est vérifier lorsque u est un sous–solution faible et v un sursolution faible alors la conclusion $u \leqslant v$ est vérifier dans Ω .*

Remarque 2.2.9 *Sujet suivant est l'existense d'une fonction p−harmonique avec des valeurs aux limites données.*

Théorème 2.2.10 *Supposons que $g \in W^{1,p}(\Omega)$, où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, alors il existe un $u \in W^{1,p}(\Omega)$ unique avec valeurs au bord $u - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tels que :*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \leqslant \int_\Omega |\nabla v|^p\, dx, \tag{2.10}$$

Pour tous les semblables de v, ainsi u est une solution faible. En fait, $u \in C(\Omega)$ aprés une redéfinition.

Si en plus, $g \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ et Ω est assez régulière, alors $u \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ et $u\,|_{\partial\Omega} = g\,|_{\partial\Omega}$.

Théorème 2.2.11 *Supposons que* $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *est un solution faible de l'équation* $p-$*harmonique alors :*

$$| \, u(x) - u(y)| \leqslant L\, |x-y|^{\alpha} \qquad pour \quad x, y \in B(x_0, r),$$

à condition que $B(x_0, 2r) \subset\subset \Omega, \alpha > 0$ *exposant ne dépend à* n *et* p*, tandis que* L *dépend aussi de* $\|u\|_{L^p(B_{2r})}$

Théorème 2.2.12 *Supposons que* $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *est un solution faible et* $u \geqslant 0$ *dans* $B_{2r} \subset \Omega$ *alors les quantities*

$$m(r) = ess_{_{Br}} \inf u, \quad M(r) = ess_{_{Br}} \sup u,$$

satisfait

$$M(r) \leqslant cm(r) \, où \quad c = c(n, p),$$

La caractéristique principale est que la même constante de c fera pour toute les solutions faibles. Car on peut ajouter constantes à des solutions, l'inégalité du Harnack implique la continuité du Hölder pour voir cela, appliquez d'abort l'inégalité des deux solutions faibles non négatives. $u(x) - m(2r)$ *et* $M(2r) - u(x)$*, où* r *est assez petit,il s'ensuit que donc*

$$\begin{aligned} M(r) - m(2r) &\leqslant C(m(r) - m(2r)), \\ M(2r) - m(r) &\leqslant C(M(2r) - M(r)), \\ \omega(r) &\leqslant \frac{c-1}{c+1}\, \omega(2r), \end{aligned}$$

où $\omega(r) = M(r) - m(r)$ *est(essentiel) l'oscilation de* u *sur* $B(x_0, r)$*, il est décisif que :*

$$\lambda = \frac{c-1}{c+1} < 1,$$

Par Itération, on a $\omega(r) \leqslant \lambda\omega(2r)$*, nous obtenons* $\omega\left(2^{-k}r\right) \leqslant \lambda^k \omega(2r)$ *.Nous concluons*

$$\omega(\rho) \leqslant A\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha} \omega(r), \quad 0 < \rho < r \; .$$

Pour certains $\alpha = \alpha(n, p) > 0$ *et* $A = A(n, p)$

Nous avons ainsi démontré que l'inégalité de Harnack implique la continuité de Hölder, à condition que nous savons déjà que aussi signer des solutions changeantes sont localement bornée, et $\omega(r) = 0$ est éliminé dans la corollaire
Enfin, nous signalons un établissement simple mais important, le principe du maximun fort.

Corollaire 2.2.13 (Le principe du maximum fort) *Si une fonction $p-$harmonique atteint son maximum en un point intérieur, puis il se réduit à une constante.*

2.3 Théorie de la régularité

Les solutions faibles de l'équation $p-$harmonique sont, par définition, les membres de l'espace de sobolev $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. En fait, ils sont aussi de la classe $C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$. Plus précisement, une solution faible peut être redéfinie dans un ensemble de mesure de lebesgue nulle, donc la nouvelle fonction est localement continue du Hölder avec un exposant $\alpha = \alpha(n, p)$. Pour obtenir la continuité du Hölder des solutions faibles on avait une meilleurs distinction entre les trois cas, en fonction de la valeur de p,
Rappelons que n est la dimension.

1. Si $p > n$, alors chaque fonction dans $W^{1,p}(\Omega)$ est continue.
2. Le cas $p = n$ (on appele cas de borde) est assez simple.
3. le cas $p < n$ est beaucoup plus difficile ici la théorie de la régularité des équations élliptiques est appelé à.

Le cas $(p > n)$:
Dans ce cas toute les fonctions appartient à $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ sont continues et si $p > n$ et $v \in W^{1,p}(\Omega)$ où B est une boule dans $\mathbb{R}^n$ alors

$$|v(y) - v(x)| \leqslant C_1 |x - y|^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla v\|_{L^p(\ B)}, \tag{2.11}$$

tel que $x, y \in B$

Le cas $(\ p = n)$:

Lemme 2.3.1 *Supposons que* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$.*et*

$$\int_{B_r} |\nabla u|^p \, dx \leqslant K r^{n-p+p\alpha}, \tag{2.12}$$

quand $B_{2r} \subset \Omega$. $0 < \alpha \leqslant 1$ *et* K *est indépendant la boule* B_r.*Alors* $u \in C^{\alpha}_{loc}(\Omega)$.*En effet,*

$$osc_{B_r}(u) \leqslant \frac{4}{\alpha}\left(\frac{K}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{p}} r^{\alpha} \qquad B_{2r} \subset \Omega,$$

Le cas $(1 < p < n)$: Il est trés difficile que le cas $p \geqslant n$ et on a

$$ess_B \sup u \leqslant C \quad ess_B \inf u,$$

grace à des limites

$$\begin{aligned} ess_B \ \sup u &= lim_{q \to \infty} \left\{ \int_B u^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \\ ess_B \inf u &= lim_{q \to -\infty} \left\{ \int_B u^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

L'équation est utilisée vantent en déduire les inégalities du Hölder inverse comme

$$\left\{ \int_{B_r} u^{p_2} dx \right\}^{\frac{1}{p_2}} \leqslant K \left\{ \int_{B_R} u^{p_1} dx \right\}^{\frac{1}{p_1}},$$

Où $-\infty < p_1 < p_2 < \infty$ et $0 < r < R$, K est un constant .

2.4 Laplacien au l'infini

La limite du l'équation p–Laplace quand $p \to \infty$ est un fascinant dans deux variables, il est l'équation

$$u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u^2{}_y u_{yy} = 0,$$

L'opérateur $\alpha-$Laplacien

$$\begin{aligned}\triangle_\infty u &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{2}\left\langle\ \nabla u, \nabla \left|\nabla u\right|^2\right\rangle,\\ \triangle_p u &= \left|\nabla u\right|^{p-4}\left\{\left|\nabla u\right|^2 \triangle\ u + (p-2)\triangle_\infty u\right\} = 0\end{aligned}$$

diviser la facteur $\left|\nabla u\right|^{p-4}$, et laissez $p \to \infty$ dans

$$\frac{\left|\nabla u\right|^2 \triangle u}{p-2} + \triangle_\infty u = 0 \quad ,$$

$$\triangle_\infty u = 0\ ,$$

Cependant, la dérivation de l'équation ∞–Laplace laisse beaucoup à désirer. Toutefois, l'équation de la bonne .
Pour un p fini l'équation $\triangle_p u = 0$ est l'équation Euler–Lagrange pour la variationnelle intégral.

$$\left\|\nabla u\right\|_p = \left\{\int_\Omega \left|\nabla u\right|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \quad ,$$

Par conséquent on peut s'attendre à l'équation $\triangle_\infty u = 0$ être l'équation Euler–Lagrange pour le (fonctionnelle)

$$\begin{aligned}\left\|\nabla u\right\|_\infty &= \lim_{p\to\infty}\left\|\nabla u\right\|_p = ess_{x\in\Omega} sup\left|\nabla u\left(x\right)\right|,\\ & min_u max_x \left|\nabla u\left(x\right)\right|,\end{aligned}$$

L'équation a une interprétation géométrique intéressante, bien que valable que pour fonctions, et plûtot lisse de l'expliquer par l'intermédiaire du (flux de gradient)
Nous considérons la courbe $x = x\left(t\right) = \left(x_1\left(t\right), ..., x_n\left(t\right)\right)$ dans $\mathbb{R}^n$, suivent la courbe $\left|\nabla u\right|^2$différencier $\left|\nabla u\left(x\left(t\right)\right)\right|^2$ vous avez

$$\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 = 2\sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t},$$

Nous observons que si la courbe est une solution de système dynamique (le flot de gradient on appelle)

$$\frac{dx}{dt} = \nabla u\left(x\left(t\right)\right),$$

Nous obtenons, en remplacement de $\frac{\partial x_j}{\partial t}$ par $\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 = 2\triangle_\infty u$,
prendre sur la courbe, jusqu'a présent, u est arbitraire donc, si le u d'origine était une solution de $\triangle_\infty u = 0$.
nous concluons que $|\nabla u|$ est une constante sur la courbe .
Depuis ∇u représente la direction normale aux surfaces de niveau de u, nous avons à la suite interprétation.
suivant une lignes de courant $|\nabla u|$ est constante. Cependant, les lignes de courant différents ont généralement différents biens constants, cette propriété est util pour des applications à traitement d'image .
$\infty-$Laplacian apparaît également dans une formule amusante .
En le developpement de Tayler

$$u\left(x+h\right) = u\left(x\right) + \left\langle \nabla u\left(x\right), h\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle h, D^2 u\left(x\right)h\right\rangle + ... \quad ,$$

Nous prenons $h = t\ \nabla\ u\left(x\right)$, nous arrions à

$$u\left(x + t\nabla u\left(x\right)\right) = u\left(x\right) + t\left|\nabla u\left(x\right)\right|^2 + \frac{1}{2}t^2\nabla_\infty + ... \qquad ,$$

à notre plaisir, le t^2-term contient $\infty-$Laplacian.
Quelques solutions explicites sont :

$$\begin{array}{l} a\ \sqrt{x_1^2 + ... + x_k^2} + b \quad (1 \leqslant k \leqslant n) \\ a_1 x_1 + ... +\ a_n x_n + b \\ a_1 x_1^{\frac{4}{3}} + ... +\ a_n x_n^{\frac{4}{3}} + b\ \left(\sum a_j^3\right) \end{array}$$

ainsi que tous les angles dans des coordonnées sphériques comme :

$$arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad , \quad arctan\left(\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)$$

expressions des variables disjoints comme

$$5\sqrt{x_1^2+x_2^2}+3\sqrt{x_3^2+x_4^2}+(x_5^{\frac{4}{3}}-x_6^{\frac{4}{3}}),$$

peut être ajouté à la liste. Enfin, nous montionnons les solutions de l'équation $|\nabla u|^2 = 1$
Le problème de Dirichlet est de trouver une solution à

$$\triangle_\infty u = 0 \; dans \; \Omega$$

$$u = g \; dans \; \partial\Omega$$

Dans un domaine borné Ω. (dans deux variables de l'équation est officiellement classé comme un parabolique ; mais les valeurs limites sont prescrites comme que pour les équations elliptique) le difficulté ici est le concept de la solution, parce que u n'est pas toujours de la classe C^2, nous reviendrons à la notion de solutions later suppose maintenant que $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ est un lipschitz fonction continue qui est

$$|g(\zeta_1) - g(\zeta_2)| \leqslant \; L\,|\zeta_1 - \zeta_2|$$

quand $\zeta_1, \zeta_2 \in \partial\Omega$ .Nous pouvons étendre g à définir dans Ω en utilisant l'une des formules

$$g\,(x) = \max_{\zeta\in\partial\Omega}\left(g\,(\zeta) - L\,(|x-\zeta|)\right) \quad ou \quad g\,(x) = \min_{\zeta\in\partial\Omega}\left(g\,(\zeta) + L\,(|x-\zeta|)\right),$$

La fonction étendu possède le théorème de même lipschitz constante L , d'aprés le théorème de Rademacher ∇g existe et $|\nabla g| \leqslant L$, par conséquent on peut supposer que $g \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap w^{1,\infty}(\Omega)$.
Maintenant, nous voulons construire la solution en laissant $p \to \infty$.
soit $p > n$. Comme nous savons qu'il est une fonction $p-$harmonique $u_p \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap w^{1,\infty}(\Omega)$ unique de telle sorte que $u_p = g$ sur $\partial\Omega$.
(depuis $p > n$. la régularité de Ω ne joue aucun rôle maintenant) nous avons

$$\begin{aligned}\left\{\int_\Omega |\nabla u_p|^s\, dx\right\}^{\frac{1}{s}} &\leqslant \left\{\int_\Omega |\nabla u_p|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \left\{\int_\Omega |\nabla g|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant |\Omega|^{\frac{-1}{p}} L\end{aligned}$$

Aussitôt que $p > s$. On utilisatons des arguments de compacité, nous pouvons conclure ce qui suit .
il existe une sous suite u_{p_k} et une fonction $u_\infty \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap w^{1,\infty}(\Omega)$ telle que $u_{p_k} \to u_\infty$ uniformément dans Ω et $\nabla u_{p_k} \to \nabla u_\infty$ faiblement dans chaque $L^s(\ \Omega)$, en particulier. $u_\infty = g$ dans $\partial\Omega$
u_∞ ainsi obtenue est appelée solution variationnelle de l'équation .
Plusieurs questions se posent, Esque u_∞ unique ou cela dépend de la suite choisie particulièrement ? comment est u_∞ liée à la limite d'équation $\triangle_\infty u = 0$? Est il une solution au moins , il découle directement de la construction que u_∞ possède une propriété en minimisant .

Lemme 2.4.1 *Si $D \subset \Omega$ est un sous domaine et si $v \in C\left(\overline{D}\right) \cap w^{1,\infty}(\Omega)$ à la limite des valeurs $v = u_\infty$ dans ∂D, alors*

$$\|\nabla u_\infty\|_{L^\infty(\ D)} \leqslant \|\nabla v\|_{L^\infty(\ D)}$$

Supposer que $u \in C^2(\Omega)$ dans laquelle Ω est un domain dans $\mathbb{R}^2$
Si $\triangle_\infty u = 0$ dans Ω, alors $\nabla u \neq 0$ dans Ω , exept quand u réduit à une constante.

Chapitre 3

Les solutions périodiques de l'équation p-laplacien de type Liénard avec un argument de déviation

3.1 Introduction

Dans l'étude des systèmes dynamiques et équations différentielles, une équation de Liénard est une équation différentielle non linéaire du second ordre, du nom du physicien français Alfred-Marie Liénard.
Pendant le développement de la technologie des tubes radio et vide, les équations de Liénard ont été intensément étudiés, car ils peuvent être utilisés pour modéliser des circuits oscillants.
Dans ce chapitre, nous utilisons les théories du degré *(voir,* [12] *)* pour établir de nouveaux résultats sur l'existence de $p-$périodiques des solutions pour le type de Liénard p-laplacien équation avec un argument de deviation de la forme :

$$\left(\varphi_p\left(x'\left(t\right)\right)\right)' + f\left(x\left(t\right)\right)x'\left(t\right) + g\left(t, x\left(t-\tau\left(t\right)\right)\right) = e\left(t\right), \tag{3.1}$$

Où $p > 1$ et $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par $\varphi_p\left(s\right) = \left|s\right|^{p-2} s$ pour $s \neq 0$ et $\varphi_p\left(0\right) = 0$,

τ et e sont $T-$périodique g est T-périodique dans le premier argument et $T > 0$,

3.2 Solutions périodiques de l'équation différentielle de Liénard généralisée

Considérons l'équation différentielle de Liénard généralisée

$$x'' + f(x)x' + g(x) = e(t) \tag{3.2}$$

où

$$f(x) = \sum_{j=0}^{p} c_j x^j,\ \ g(x) = \sum_{s=0}^{n} d_s x^s$$

p et n étant des entiers positifs, c_j, $j = 1, 2, ..., p$ et d_s, $s = 1, 2, ..., n$ des constantes et $e(t)$ une fonction périodiqiue de période 2π. Les solutions d'équations différentielles de ce type ont été étudiées par R. GOMORY*(voir,* [13] *)* qui a lié leurs existence à la nature des points critiques à l'infini de l'équation autonome correspondante $(e(t) = 0)$ (cf. aussi [2]*)*). GOMORY a ainsi obtenu le résultat suivant :
Si :

1) $e(t) \in C^1[0, 2\pi]$et est périodique de période 2π .
2) $p \geq n > 0$.
3) n est impair.
4) on n'a pas simultanément d_n et p impair.

l'équation différentielle possède au moins une solution périodique de période 2π .

Théorème 3.2.1 *Si :*

1) $e(t) \in C^0[0, 2\pi]$*et est périodique de période* 2π *.*
2) n *est impair.*
3) $d_n < 0$.

l'équation différentielle

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \tag{3.3}$$

où

$$f(x)=\sum_{j=0}^{p}c_jx^j,\ \ g(x)=\sum_{s=0}^{n}d_sx^s$$

p et n entiers positifs, possède au moins une solution périodiqiue de période 2π.

Théorème 3.2.2 *Si :*

1) $e(t)\in C^1[0,2\pi]$*et est périodique de période* 2π *.*

2) $p>0$ *est pair.*

3) $n>0$ *est impair.*

4) $d_n>0$,

l'équation différentielle

$$x''+f(x)x'+g(x)=e(t) \tag{3.4}$$

où

$$f(x)=\sum_{j=0}^{p}c_jx^j,\ \ g(x)=\sum_{s=0}^{n}d_sx^s$$

les $c_j$et $d_s$étant des constantes, possède au moins une solution périodiqiue de période 2π.

Preuve. Voir tous les détailles et les preuves des théorèmes dans [3] ■

3.3 Les solutions périodiques de l'équation p-laplacien de type Liénard avec un argument de déviation

Dans les études précédentes, la base d'ètude est l'hypothèse suivante :(H), il existe une constante $L>0$ tels que

(H) $\quad |g(t,u)-g(t,v)|\leqslant L|u-v|$ (g lipschitzien continue) *pour tout* $t,u,v\in\mathbb{R}$,

a été considérée comme fondamentale pour l'existence de solutions périodiques du l'équation (3.1)
Cependant, au meilleur de notre connaissance, peu d'auteurs ont considéré l'équation (3.1) sans l'hypothèse (H) (voir [21], [15]).
Ainsi, il est la peine de continuer à enquêter sur l'existence des solutions périodique de l'équation. (3.1) dans ce cas le but principal de ce parti est d'établir des conditions suffisantes pour l'existence des solutions $T-$périodiques du l'équation (3.1)

les résultats de ce partie sont nouveaux et ils se complètent les résultats déjà connus dans [17] .
En particulier, nous n'avons pas besoin de l'hypothèse (H) .
Nous notons

$$C_T^1 = C_T^1[0,T] = \{x \in C^1[0,T], x(0) = x(T),, x'(0) = x'(T), T > 0\}$$
$$|x|_k = \left(\int_0^T |x(t)|^k dt\right)^{\frac{1}{k}}, \qquad |x|_\infty = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|$$

pour l'équation de valeur limite périodique

$$\left(\varphi_p(x'(t))\right)' = \widetilde{f}(t,x,x') \quad , \; x(0) = x(T) \quad , x'(0) = x'(T), \tag{3.5}$$

quand $\widetilde{f} \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ on a le lemme suivant

Lemme 3.3.1 *(voir [14]) Soit Ω un ouvert borné dans C_T^1.Si les conditions suivantes sont satisfaites*

$i)$ Pour tout $\lambda \in]0,1[$ l'équation

$$\left(\varphi_p(x'(t))\right)' = \lambda\widetilde{f}(t,x,x') \quad , \; x(0) = x(T) \quad , x'(0) = x'(T),$$

na pas de solution sur $\partial\Omega$.

$ii)$ L'équation

$$F(a) = \frac{1}{T}\int_0^T \widetilde{f}(t,a,0)\,dt = 0,$$

n'a pas de solutions sur $\partial\Omega \cap \mathbb{R}$.

iii) Le degré topologique de Brouwer de F

$$d\left(F,\Omega\cap\mathbb{R},0\right)\neq 0.$$

alors le problème de la limite périodique valeur (3.5) *a au moins une solution périodique sur* $\overline{\Omega}$.

Proposition 3.3.2 *Soit* $\varphi:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ *est une fonction continue satisfaite les conditions suivantes :*

(H_1) *Pour tout* $x_1,x_2\in\mathbb{R}^N$, $x_1\neq x_2$

$$\left\langle \varphi\left(x_1\right)-\varphi\left(x_2\right),x_1-x_2\right\rangle \ >0,$$

(H_2) *il existe une fonction* $\alpha:[0,+\infty[\,\to[0,+\infty[\,,\ \alpha\left(s\right)\to+\infty$

comme $s\to+\infty$ *telle que*

$$\left\langle \varphi\left(x\right),x\right\rangle \geqslant\alpha\left(\left|x\right|\right)\left|x\right|,\quad pour\ tout\quad x\in\mathbb{R}^N,$$

Il est bien connu que dans ces deux conditions φ est un homéomorphisme du $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$, satisfaites (H_1) , et $\left|\varphi^{-1}\left(y\right)\right|\to+\infty$ comme $|y|\to+\infty$ *(voir,* [5] *ch 3)*
Donnons d'abord l'opérateur φ comment satisfaite les conditions(H_1) et (H_2) comme un exemple.

Exemple 3.3.3 *Pour* $p>1$ *soit* $\varphi_p:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ *telle que*

$$\varphi_p\left(x\right)=\left|x\right|^{p-2}x\ \ pour\ \ x\neq0,\quad\varphi_p\left(0\right)=0,$$

alors φ_p *est un homéomorphisme du dans avec inverse*
$\varphi_{p^\star}\left(x\right)=\left|x\right|^{p^\star-2}x$, *où* $p^\star=\frac{p}{p-1}$.*Soit* $x\ ,y\in\mathbb{R}^N$
à partir de l'inégality

$$\left\langle \varphi_p\left(x\right)-\varphi_p\left(y\right),\ x\ -y\right\rangle \ \geqslant\left(\left|x\right|^{p-1}-\left|y\right|^{p-1}\right)\left(\left|x\right|-\left|y\right|\right)\geqslant0,$$

il est immédiat que

$$\left\langle \varphi_p(x) - \varphi_p(y), x - y \right\rangle = 0 \ \ \textit{implique} \ \ x = y,$$

et ainsi (H_1) *est satisfaite à partir de*

$$\left\langle \varphi_p(x) - \varphi_p(y), x - y \right\rangle = |x|^p = |x|^{p-1}|x|$$

(H_2) *suit*

Définition 3.3.4 *Si* $I = [0, T]$, $f : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *on dit que est carathéodory si*

- *Pour tout* $t \in I$, $f(t, ., .)$ *est continue.*
- *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $f(t, x, y)$ *est measurable dans* I .
- *Pour tout* $\rho > 0$ *il existe* $\alpha_\rho \in L^1(I, \mathbb{R})$ *tel que , pour tout* $t \in I$

  et $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$, $|x| \leqslant \rho$

$$|f(t, x, y)| \leqslant \alpha_\rho(t)$$

$Quelques\ résultats\ pré\lim inaires$

Si nous allons maintenant considérer le simple problème périodique aux limites

$$\left(\varphi_p(u')\right)' = h(t) \quad , \ u(0) = u(T) \quad , u'(0) = u'(T), \tag{3.6}$$

où $h \in L^1$ tel que $\int_0^T h(s)\, ds = 0$, et soit u est une solution du (3.6), par l'intégration de 0 à T , on trouve

$$\varphi_p(u'(t)) = a + H(h)(t), \tag{3.7}$$

où

$$H(h)(t) = \int_0^t h(s)\, ds,$$

et $a \in \mathbb{R}^N$ est un constant. Les conditions aux limites implique que

$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi_p^{-1}\left(a+H\left(h\right)\right)\left(t\right)dt=0 \quad ,$$

On fixe $I \in C$,nous allons définis

$$G_I\left(a\right)=\frac{1}{T}\int_0^T \varphi_p^{-1}\left(a+I\left(t\right)\right)dt,$$

et si les conditions (H_1) et (H_2) sont satisfait alors la fonction $G_I\left(a\right)$ a les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $I \in C$,l'équation

$$G_I\left(a\right)=0, \tag{3.5}$$

a une solution unique $\widetilde{a}\left(I\right)$.

(ii) La fonction $\widetilde{a} : C \rightarrow \mathbb{R}^N$ est continue et définie un ensemble bornée dans un ensemble bornée.

Soit $a : L^1 \rightarrow \mathbb{R}^N$ définie par

$$a\left(h\right)=\widetilde{a}\left(H\left(h\right)\right) \quad , \tag{3.6}$$

il est clear que a continue et l'image d'un borné de L^1 par φ_p^{-1} est borné de $\mathbb{R}^N$ et compact.on intègre (3.7) on trouve

$$u\left(t\right)=u\left(0\right)+H\left\{\varphi_p^{-1}\left[\left(a\left(h\right)+H\left(h\right)\right)\right]\right\}\left(t\right), \tag{3.7}$$

tel que $\varphi_p^{-1} : C \rightarrow C$ continue, $\varphi_p^{-1}\left(v\right)\left(t\right)=\varphi_p^{-1}\left(v\left(t\right)\right)$ et l'image d'un borné par φ_p^{-1} est borné.

On considère

$$P : C_T^1 \rightarrow C_T^1 \; , \quad u \rightarrow u\left(0\right) \quad , \quad Q : L^1 \rightarrow L^1 \quad , h \rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T h\left(s\right)ds,$$

alors il est clear si $u \in C_T^1$ solutions du (3.6) donc u vérifier la résumé de l'équation suivante

$$u=Pu+Qh+K\left(h\right), \tag{3.8}$$

tel que $K : L^1 \to C_T^1$ (en général non linéair) défini par

$$K(h)(t) = H\left\{\varphi_p^{-1}\left[\left(a\left(I-Q\right)h\right) + H\left(\left(I-Q\right)h\right)\right]\right\}(t) \quad t \in I, \tag{3.8}$$

D'aprés la définition du l'application a on trouve

$$H\left\{\varphi_p^{-1}\left[\left(a\left(I-Q\right)h\right) + H\left(\left(I-Q\right)h\right)\right]\right\}(T) = 0 \quad ,$$

comme $a(0) = \widetilde{a}(0)$, d'aprés (3.8) et puisque

$$\int_0^T \varphi_p^{-1}\left(\widetilde{a}(I) + I(t)\right) dt = 0 \quad \textit{pour tout } t \in I \;\; \textit{alors},$$

$$K(0) = 0,$$

tel que K est continue et transforme un ensemble équi-intégrable de L^1 à un ensemble relativement compact de C_T^1.

Si nous allons finalement considérer une fonction différentielle $N(u,\lambda)$ du problème périodique

$$\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = N(u,\lambda) \quad , \; u(0) = u(T) \quad , u'(0) = u'(T), \tag{3.9}$$

tel que $\lambda \in [0,1]$ et $N : C_T^1 \times [0,1] \to L^1$ est continue l'image d'un borné par N est équi-intégrable. Alors on défini une fonction $G : C_T^1 \times [0,1] \to C_T^1$ par

$$G\ (u,\lambda) = Pu + QN(u,\lambda) + (KoN)(u,\lambda), \tag{3.11}$$

Nous obtenons que G est compact. Donc (3.9) est équivalent à problème suivante :

$$u = G\ (u,\lambda), \tag{3.10}$$

Dans le cas particulier, si $g :\ I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times [0,1]$ est carathéodory et si on note par $N_g\ : C_T^1 \times [0,1] \to L^1$ l'opérateur de Nemystki assossiant à g qui défini par

$$N_g(u,\lambda) = g\left(t, u(t), u'(t), \lambda\right),$$

tel que N_g est continue l'image d'un borné par N_g est équi-intégrable.
On applique degré de leray-schauder à (3.10)

Preuve. (du lemme sur $\mathbb{R}^N$ 3.3.1)Nous supposons que $\varphi_p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est continue et satisfaite,les conditions (H_1)-(H_2)du proposition 3.3.2 notre premier objectif dans cette partie est d'étendre un théorème démontré dans pour les équations semi-linéaires pour le problème, quasilinéair

$$\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \widetilde{f}\left(t, u, u'\right) \qquad u\left(0\right) = u\left(T\right), u'\left(0\right) = u'\left(T\right), \tag{3.11}$$

où $\widetilde{f} : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est carathéodory. $u = x\left(t\right)$, on insére dans (3.11) un paramètre λ

$$\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \lambda N_{\widetilde{f}}\ \left(u\right) + \left(1-\lambda\right) QN_{\widetilde{f}}\ \left(u\right) \qquad u\left(0\right) = u\left(T\right), u'\left(0\right) = u'\left(T\right), \tag{3.12}$$

où $N_{\widetilde{f}} : C_T^1 \to \mathbb{R}^N$ est l'opérateur de Nemytski associé à $\widetilde{f}$. Explicitement.

$$\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \lambda\widetilde{f}\left(t, u, u'\right) + \left(1-\lambda\right)\left[\frac{1}{T}\int_0^T \widetilde{f}\left(s, u\left(s\right), u'\left(s\right)\right) ds\right],$$

$$u\left(0\right) = u\left(T\right), u'\left(0\right) = u'\left(T\right) \quad pour \quad \lambda \in \left]0, 1\right],$$

On observe que, dans les deux cas, u est une solution du problème

$$\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \lambda\widetilde{f}\left(t, u, u'\right) \quad , u\left(0\right) = u\left(T\right) \quad , u'\left(0\right) = u'\left(T\right), \tag{3.13}$$

où u est une solution du (3.12), il est nécessaire que

$$\frac{1}{T}\int_0^T \widetilde{f}\left(s, u\left(s\right), u'\left(s\right)\right) ds = 0,$$

il s'ensuit que, pour $\lambda \in \left]0, 1\right]$, (3.12)et(3.13) ont les mêmes solutions.
Par ailleurs, il est facile de voir que f Carathéodory implique que $N : C_T^1 \times [0, 1] \to L^1$défini par

$$N\left(u, \lambda\right) = \lambda N_{\widetilde{f}}\ \left(u\right) + \left(1-\lambda\right) QN_{\widetilde{f}}\ \left(u\right),$$

est continue et on prend des ensembles bornés dans équi-intégrables.

aussi (3.12)problème peut être écrit sous la forme équivalente

$$u = G_{\widetilde{f}}(u, \lambda), \tag{3.14}$$

avec

$$G_{\widetilde{f}}(u, \lambda) = Pu + QN_{\widetilde{f}}\ (u) + \left(K\text{o}\left[\lambda N_{\widetilde{f}}\ (u) + (1-\lambda)\, QN_{\widetilde{f}}\ \right]\right)(u),$$
$$= Pu + QN_{\widetilde{f}}\ (u) + \left(K\text{o}\left[\lambda\,(Id - Q)\, N_{\widetilde{f}}\ \right]\right)(u),$$

Nous supposons que pour $\lambda = 1$, (3.14) n'a pas de solution sur $\partial\Omega$ car, autrement, nous avons fini avec la preuve. Maintenant, par hypothèse (1), il s'ensuit que (3.14) n'a pas de solutions pour $(u, \lambda) \in \partial\Omega \times]0, 1]$. Pour$\lambda = 0$, (3.12)est équivalent au problème

$$\left(\varphi_p\left(u'\right)\right)' = \frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, u\left(s\right), u'\left(s\right)\right) ds. \quad u\left(0\right) = u\left(T\right) \quad , u'\left(0\right) = u'\left(T\right), \tag{3.17}$$

et donc si u est une solution à ce problème, nous devons avoir

$$\int_0^T \widetilde{f}\left(s, u\left(s\right), u'\left(s\right)\right) ds = 0. \tag{3.15}$$

d'où

$$u'\left(t\right) = \ \varphi^{-1}\left(c\right),$$

Où

$c \in \mathbb{R}^N$ est un constante. On intègre le dernière équation sur I, nous obtenons que $\varphi^{-1}\ \ (c) = 0$, et donc $u\left(t\right) = d$ une constante.
Ainsi, par (3.15)

$$\int_0^T \widetilde{f}\left(s, d, 0\right) ds = 0,$$

qui, avec l'hypothèse 2, implique que $u = d \notin \partial\Omega$. Ainsi nous avons prouvé que (3.14) n'a pas de solution $(u, \lambda) \in \partial\Omega \times [0, 1]$. Ensuite, nous avons que pour chaque $\lambda \in [0, 1]$, le degré de Leray-Schauder
$d_{LS}\left[Id - G_f\left(., 1\right), \Omega, 0\right]$ est bien définie et, par les propriétés de ce degré, on a

$$d_{LS}\left[Id - G_{\widetilde{f}}\left(., 1\right), \Omega, 0\right] = d_{LS}\left[Id - G_{\widetilde{f}}\left(., 0\right), \Omega, 0\right], \tag{3.16}$$

Maintenant il est clair que

$$u = G_{\widetilde{f}}(u,1), \tag{3.17}$$

est équivalent3.11, et (3.16) dit que le problème 3.17aura une solution, si nous pouvons montrer que nous faisons

$$d_{LS}\left[Id - G_{\widetilde{f}}(.,0), \Omega, 0\right] \neq 0,.$$

alors on a

$$G_{\widetilde{f}}(u,0) = Pu + QN_{\widetilde{f}}\ (u) + K(0) = Pu + QN_{\widetilde{f}}\ (u),$$

ainsi nous obtenons

$$u - G_{\widetilde{f}}(u,0) = u - Pu - \int_0^T \widetilde{f}(s, u(s), u'(s))\, ds,$$

donc, par les propriétés du degré de Leray-Schauder que nous avons

$$d_{LS}\left[Id - G_{\widetilde{f}}(.,0), \Omega, 0\right] = (-1)^N d_B\left[F, \Omega \cap \mathbb{R}^N, 0\right],$$

où

la fonction F est définie par

$$F(a) = \frac{1}{T}\int_0^T \widetilde{f}(t, a, 0)\, dt = 0$$

et

d_B dénote le degré de Brouwer.
puisque, par hypothèse (3) ce dernier degré est différent de zéro, le théorème est démontré. ■
Notre théorème suivant est une conséquence du Lemme 3.3.1.

Théorème 3.3.5 *Supposer que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(A_1) *Il existe un constant positive d telle que*

$$x(g(t,x) - e(t)) < 0 \quad pour \quad |x| > d \quad et \quad t \in \mathbb{R}.$$

(A_2) *Il existe des constantes m_1 et m_2 telle que* $2^{1-p}\, m_1 T^p < 1$, *et l'une des conditions suivantes sont satisfaites*

(1) $g(t,x) - e(t) \geqslant -m_1 |x|^{p-1} - m_2 \quad , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ , x \geqslant d$

(2) $g(t,x) - e(t) \leqslant m_1 |x|^{p-1} + m_2 \quad , \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ , x \leqslant -d$

Alors équation (3.1) *a au moins un solution* $T-$*périodique .*

Preuve. Considérons l'équation de homotope du l'équation (3.5) suivante

$$\left(\varphi_p\left(x'(t)\right)\right)' + \lambda f\left(x(t)\right) x'(t) + \lambda g\left(t, x\left(t-\tau(t)\right)\right) = \lambda e(t) \quad \lambda \in (0,1), \quad (3.18)$$

Nous allons chercher à appliquer lemme3.3.1 , toce faire , il suffit de prouver que l'ensemble de tout les possibles de solutions $T-$périodique du l'équation (3.18) sont bornées. soit $x(t)$ est un solution T-périodique de l'équation (3.18).
En intégrant (3.18) à partir 0 à T. Nous avons

$$\int_0^T \left[g\left(t, x\left(t-\tau(t)\right)\right) - e(t)\right] dt = 0, \quad (3.19)$$

Comme $x(0) = x(T)$, il exist $t_0 \in [0,T]$ telle que $x'(t_0) = 0$ quand $\varphi_p(0) = 0$, on a

$$\left|\varphi_p\left(x'(t_0)\right)\right| = \left|\int_0^t \left(\varphi_p\left(x'(s)\right)\right)' ds\right| \leqslant \lambda \int_0^T \left|g\left(t, x\left(t-\tau(t)\right)\right) - e(t)\right| dt \ , \quad (3.20)$$

à partir (3.19), il exist un $\zeta \in [0,T]$ telle que

$$g\left(\zeta, x\left(\zeta - \tau(\zeta)\right)\right) - e(\zeta) = 0,$$

D'aprés (A_1), nous obtenons

$$\left|x\left(\zeta - \tau(\zeta)\right)\right| \leqslant d,$$

Soit $\zeta - \tau(\zeta) = mT + \overline{\zeta}$, où $\overline{\zeta} \in [0,T]$, et m est un nombre entier. Alors, on a

$$|x(t)| = \left|x\left(\overline{\zeta}\right) + \int_{\overline{\zeta}}^t x'(s)\, ds\right| \leqslant d + \int_{\overline{\zeta}}^t |x'(s)|\, ds, t \in \left[\overline{\zeta}, \overline{\zeta} + T\right],$$

et

$$|x(t)| = |x(t-T)| = \left| x\left(\overline{\zeta}\right) - \int_{t-\tau}^{\overline{\zeta}} x'(s)\,ds \right| \leqslant d + \int_{t-\tau}^{\overline{\zeta}} |x'(s)|\,ds \qquad t \in \left[\overline{\zeta}, \overline{\zeta}+T\right],$$

Associant les deux inégalités au-dessus, on trouve

$$|x|_{\infty} = \max_{t \in [0,T]} |x(t)| = \max_{t \in \left[\overline{\zeta}, \overline{\zeta}+T\right]} |x(t)|$$

$$\leqslant \max_{t \in \left[\overline{\zeta}, \overline{\zeta}+T\right]} \left\{ d + \frac{1}{2}\left(\int_{\overline{\zeta}}^{t} x'(s)\,ds + \int_{t-\tau}^{\overline{\zeta}} |x'(s)|\,ds \right) \right\} \leqslant d + \frac{1}{2}\int_0^T x'(s)\,ds, \quad (3.21)$$

On définit

$$\begin{array}{lcl} [x(t-\tau(t)) < -d] & = & \{t/t \in [0,T], x(t-\tau(t)) < -d\} \\ [x(t-\tau(t)) \geqslant -d] & = & \{t/t \in [0,T], x(t-\tau(t)) \geqslant -d\} \\ [x(t-\tau(t)) > d] & = & \{t/t \in [0,T], x(t-\tau(t)) > d\} \\ [x(t-\tau(t)) \leqslant d] & = & \{t/t \in [0,T], x(t-\tau(t)) \leqslant d\} \\ [-d \leqslant x(t-\tau(t)) \leqslant d] & = & \{t/t \in [0,T], -d \leqslant x(t-\tau(t)) \leqslant d\}. \end{array}$$

Alors 3.19 implique que

$$\int_{[x(t-\tau(t))<-d]} |g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)|\,dt = \int_{[x(t-\tau(t))<-d]} [g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)]\,dt$$

$$= -\int_{[x(t-\tau(t))\geqslant -d]} [g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)]\,dt, \qquad (3.22)$$

et

$$\int_{[x(t-\tau(t))>d]} [g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)]\,dt = -\int_{[x(t-\tau(t))>d]} [g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)]\,dt$$

$$= \int_{[x(t-\tau(t))\leqslant -d]} [g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)]\,dt, \qquad (3.26)$$

Maintenant supposons que $(A_2)(1)$ (ou $(A_2)(2)$ est vérifier ,nous allons considérer deux cas suivantes

Cas 1 : si (A_2) (1)vérifier, alors (3.22) implique

$$\int_{[x(t-\tau(t))<-d]} |g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)| \, dt, \leqslant \int_{[x(t-\tau(t))\geqslant -d]} |g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)| \, dt,$$

$$\leqslant \int_{[-d\leqslant x(t-\tau(t))\leqslant d]} |g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)| \, dt + \int_{[x(t-\tau(t))>d]} |g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)| \, dt \, ,$$

$$\leqslant T (\max \{|g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)| : t \in \mathbb{R}, -d \leqslant x \leqslant d\}) + \int_0^T (m_1 |x(t-\tau(t))|^{p-1} + m_2) dt,$$

$$\leqslant T (\max \{|g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)| : t \in \mathbb{R}, -d \leqslant x \leqslant d\} + m_2) + T \; m_1 |x|_\infty^{p-1} \, ,$$

alors

$$\int_0^T |g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)| \, dt \; = \int_{[x(t-\tau(t))>d]} |g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)| \, dt$$
$$+ \int_{[\_-d\leqslant x(t-\tau(t))\leqslant d]} |g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)| \, dt \; +$$
$$\int_{[x(t-\tau(t))\leqslant -d]} |g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)| \, dt$$

$$\leqslant 2 \left[T (\max \{|g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)| : t \in \mathbb{R}, -d \leqslant x \leqslant d\} + m_2) + T \; m_1 |x|_\infty^{p-1}\right], \tag{3.27}$$

Ce qui implique que

$$\int_0^T |g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)| \, dt \leqslant 2 \left[\theta + T m_1 |x|_\infty^{p-1}\right], \tag{3.23}$$

où $0 = T (\max \{|g(t, x \;) - e(t)| : t \in \mathbb{R}, -d \leqslant x \leqslant d\} + m_2)$.

Cas 2 : si (A_2) (2) est vérifié, on utilisons un argument similaire à celui dans la preuve du cas (1), on a 3.23 est vérifiée.

Comme $x(t)$ périodique, multipliant $x(t)$ et (3.18) puis on intégre de 0 à T,et d'aprés (3.23) nous obtenons

$$\int_0^T |x'(t)|^p \, dt = - \int_0^T \left(\varphi_p (x'(t))\right) x(t) \, dt$$

$$= \lambda \int_0^T f(x(t)) \, x(t) \, x'(t) \, dt + i \int_0^T (g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)) \, x(t) \, dt$$

$$\leqslant |x|_\infty \int_0^T |g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)|\, dt$$

$$\leqslant 2\left[\theta + Tm_1 |x|_\infty^{p-1}\right] |x|_\infty . \tag{3.24}$$

Pour $x(t) \in C(R, R)$ avec $x(t+T) = x(t)$,et $0 < r \leqslant s$, en utilisant l'inégalité de Holder, nous obtenons

$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^r\, dt\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\frac{1}{T}\left(\int_0^T (|x(t)|^r)^{\frac{s}{r}}\, dt\right)^{\frac{r}{s}} \left(\int_0^T 1dt\right)^{\frac{(s-r)}{s}}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^s\, dt\right)^{\frac{1}{s}},$$

Donc

$$|x|_r \leqslant T^{\frac{(s-r)}{sr}} |x|_s \ \textit{pour}\ 0 < r \leqslant s \tag{3.25}$$

alors, d'aprés $(3.21), (3.24), (3.25)$. On a

$$\left(\int_0^T |x'(t)|\, dt\right)^p \leqslant T^{p-1} |x'(t)|_p^p = T^{p-1}\int_0^T |x'(t)|^p\, dt \leqslant T^{p-1} 2\left[\theta + Tm_1 |x|_\infty^{p-1}\right] |x|_\infty$$

$$\leqslant T^{p-1} 2\left[\theta + Tm_1\left(d + \frac{1}{2}\int_0^T |x'(s)|\, ds\right)^{p-1}\right]\left(d + \frac{1}{2}\int_0^T |x'(s)|\, ds\right), \tag{3.26}$$

comme $2^{1-p}T^p m_1 < 1$ et $p > 1$, alors d'aprés (3.26) nous pouvons choisir une constante positive M_1 telle que

$$\int_0^T |x'(s)|\, ds \leqslant M_1, |x|_\infty \leqslant d + \frac{1}{2}\int_0^T |x'(s)|\, ds \leqslant M_1 ,$$

d'aprés (3.20) et (3.23), on a

$$|x'|_\infty^{p-1} = \max_{t\in[0,T]}\left\{\left|\varphi_p(x'(t))\right|\right\} = \max_{t\in[0,T]}\left\{\left|\int_{t_0}^t (\varphi_p(x'(t)))'\, ds\right|\right\},$$

$$\leqslant \int_0^T |g(t, x(t-\tau(t))) - e(t)|\, dt,$$

$$\leqslant 2\left[\theta + Tm_1 |x|_\infty^{p-1}\right],$$

$$\leqslant 2\left[\theta + Tm_1 M_1^{p-1}\right],$$

Ce qui implique qu'il existe une constant positive telle que pour toute

$$|x'(t)| \leqslant M_2,$$

Alors on sait que Eq. (3.18) n'a pas de solution sur $\partial\Omega$ comme $\lambda \in (0,1)$ et quand $x(t) \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}$, $x(t) = M_2 + 1$ ou $x(t) = -M_2 - 1$, d'aprés(A_1), nous pouvons voir que

$\frac{1}{T}\int_0^T \{-g(t, M_2 \ + 1) + e(t)\}\, dt > 0$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \{-g(t, -M_2 \ - 1) + e(t)\}\, dt < 0,$$

Alors la conition (ii) est aussi satisfaitte, on défini

$$H(x,\mu) = \mu x - (1-\mu)\frac{1}{T}\int_0^T (g(t,x) - e(t))\, dt,$$

et quand $x \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}$, $\mu \in [0,1]$ on a

$$xH(x,\mu) = \mu x^2 - (1-\mu)\, x\frac{1}{T}\int_0^T (g(t,x) - e(t))\, dt > 0,$$

donc $H(x,\mu)$ est un invariance par homotope et

$$\begin{aligned} d(F, \Omega \cap \mathbb{R}, 0) &= d\left\{-\frac{1}{T}\int_0^T (g(t,x) - e(t))\, dt \ , \Omega \cap \mathbb{R}, 0\right\}, \\ &= d(x, \Omega \cap \mathbb{R}, 0) \neq 0, \end{aligned}$$

la condition (iii) est satisfaite. Et d'aprés le lemme précédent 3.3.1 il existe au moins une solution avec périod T. ■

un argument similaire entraîne

Corollaire 3.3.6 *Supposer que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(A_1') *Il existe un constant positive d telle que*

$$x\,(g\,(t,x) - e\,(t)) > 0 \quad pour \quad |x| > d \quad et \quad t \in \mathbb{R}.$$

(A_2') *Il existe des constantes m_1 et m_2 telle que $2^{1-p}\ m_1 T^p < 1$,*

et l'une des conditions suivantes sont satisfaites

(1) $\;g\,(t,x) - e\,(t) \geqslant -m_1\,|x|^{p-1}\ -m_2 \;\;,\quad \forall t \in \mathbb{R}\ ,x \leqslant -d$

(2) $\;g\,(t,x) - e\,(t) \leqslant m_1\,|x|^{p-1}\ +m_2 \;\;,\quad \forall t \in \mathbb{R}\ ,x \leqslant d$

Corollaire 3.3.7 *Alors Eq (3.1) a au moins un solution $T-$périodique .*

Exemples et remarques Soit $p = \sqrt{2}$, $g\,(t,x) = \frac{-1}{(100+\cos^2 t)|x|^{p-2}x}$ pour tout $t \in \mathbb{R}, x > 0$, *et* $g\,(t,x) = -x^{32}\ (x-1)$ pour tout
$t \in \mathbb{R}, x \leqslant 0$.

Alors, cette équation du p-Laplacien de type Liénard

$$\left(\varphi_p x'\,(t)\right)' + x^4\,(t)\,x'\,(t) + g\,(t, x\,(t - |\cos\,(t)|)) = \cos t \;\text{ a au moins un solution } 2\pi\text{−périodique.} \tag{3.27}$$

Preuve. D'aprés (3.18) ,il est simple de vérifier que toutes les conditions nécessaires dans le théorème 3.3.5 sont satisfaites.par conséquent, l'équation (**??**)a au moins un solution $2\pi-$périodique . ∎

Remarque 3.3.8 *On a $p = \sqrt{2}$, $g\,(t,x) = \frac{-1}{(100+\cos^2 t)}\ |x|^{p-2}\,x$ pour tout $t \in \mathbb{R}, x > 0$, et $\;g\,(t,x) = -x^{32}\ (x-1)$ pour tout*
$t \in \mathbb{R},\ x \leqslant 0$.
*il est clair de voir que (H_1) ne tiennent pas pour l'équation (**??**), de sorte que les résultats obtenus dans [(voir[20]) − 8] et les références citées ne pouvent pas être appliquable à l'équation (3.27) cela implique que les résultats de cette étude sont essentiellement nouveau.*

Chapitre 4

Solutions périodiques dans l'équation différentielle neutrale p-Laplacian avec plusieurs arguments de déviation

4.1 Introduction

Les équations différentielles fonctionnelles FDE sont des équations différentielles pour les fonctions x d'une variable scalaire qui contient les termes avec x et x' évalués à différents arguments. le nombre de FDE utilisé dans le domaine des sciences et dans les zones qu'ait été accroissement rapide au cours des trois dernières années. Les applications vont de cinétique des enzymes et de la physiologie de réseaux alimentaires et le contrôle de chasse à la baleine, de la conception de circuits électroniques à l'optique laser, et d'études la circulation automobile à la théorie des cycles économiques.

on dit une équation est NFDE(neutral functional differential equation), si elle est à la forme suivante :

$$\frac{d}{dt}D\left(x\left(t\right)\right)=f\left(t,x\left(t\right),x\left(t-\tau\right)\right), \quad D\left(x\left(t\right)\right)=x\left(t\right)+A\left(t\right)x\left(t-\sigma\right)$$

σ et τ sont des constantes positifs, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ une fonction de matrice continue, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonction vectorielle continue.

4.2 Quelques résultats préliminaires sur le degré topologique

Dans le chapitre précédent, on a étudié l'équation p-laplacien avec un argument de déviation suivante :

$$\left(\varphi_p\left(x'\left(t\right)\right)\right)' + f\left(x\left(t\right)\right)x'\left(t\right) + g\left(t, x\left(t - \tau\left(t\right)\right)\right) = e\left(t\right) \tag{4.1}$$

En utilisant le théorème de continuation Mawhin, quelques résultats sur l'existence de solution périodique sont obtenus.
Mais le correspondant problème de l'équation différentielle p-Laplacien avec des arguments déviation a été étudiée beaucoup moins souvent.
La raison en est que l'opérateur différentiel $\left(\varphi_p\left(u\right)\right)' = \left(|u|^{p-2}u\right)'$ $(p \neq 2)$ n'est plus linéaire, de sorte que la théorie de la degré de coïncidence *(voir,* [12] *)* ne peut pas être appliqué directement.
Dans cette partie, on étude l'existence du solutions périodiques dans p-Laplacien neutre fonctionnellement les équations différentielles avec plusieurs arguments de déviation

$$\left(\varphi_p\left(x\left(t\right) - cx\left(t-\sigma\right)\right)'\right)' = f\left(x\left(t\right)\right)x'\left(t\right) + \sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(t\right)g\left(x\left(t - \tau_j\left(t\right)\right)\right) + p\left(t\right) \tag{4.2}$$

Où $\varphi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_p\left(u\right) = |u|^{p-2}u$; $f\ , g \in C\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$; $\beta_j\left(t\right), \tau_j\left(t\right)\left(j = 1, 2, ..., n\right)$, $p\left(t\right)$ sont des fonctions continues et périodiques définies sur $\mathbb{R}$ avec une période de $T > 0$, σ, $c \in \mathbb{R}$ sont des constantes telles que $|c| \neq 1$.
à l'aide de la théorie du coincidence de degré *(voir,* [12] *)*, nous obtenons un nouveau résultat à garantir l'existence du solutions périodiques.
premièrement, on défini les notations suivante : $T > 0$ est un constant

$C_T = \{\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \quad \varphi(t+T) = \varphi(t)\}$ avec le norme $|\varphi|_0 = \max_{t\in[0,T]} |\varphi(t)|$

$X = Y = \left\{x = (x_1(.), x_2(.))^T \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : x(t+T) = x(t)\right\}$avec le norme$\|x\| = \max\{|x_1|_0, |x_2|_0\}$, X et Y sont des espaces de Banach, on défini aussi les opérateur A et L se forme suivante :

$$A : C_T \to C_T, \quad (Ax)(t) = x(t) - cx(t-\sigma) =,$$
$$L : D(L) \subset C_T \to C_T, Lx = \begin{pmatrix} (Ax_1)' \\ x_2' \end{pmatrix} \text{ où } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Lemme 4.2.1 (voir [8]) *Si* $|c| \neq 1$, *alors* A *a un unique inverse continue bornée et satisfait les conditions suivantes :*

(1) $\int_0^{2\pi} |[A^{-1}f](t)|\, dt \leqslant \frac{1}{|1-|c||} \int_0^{2\pi} |f(s)|\, ds \quad , \quad \forall f \in C_{2\pi}$;

(2) $Ax'' = (Ax)''$, $\forall x \in C^2_{2\pi} = \{x : x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ x(t+2\pi) = x(t)\}$.

d'aprés le lemme 4.2.1, on peut écrire Eq. (4.2) se la forme suivante :

$$\begin{cases} (Ax_1)'(t) = \varphi_q(x_2(t)) = |x_2(t)|^{q-2} x_2(t) \\ x_2'(t) = f(x_1(t)) A^{-1}\left(\varphi_q(x_2(t))\right) + \sum_{j=1}^n \beta_j(t) g(x_1(t-\tau_j(t))) + p(t) \end{cases} \tag{4.3}$$

où$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,on peut voir facilement que $x = (x_1(.), x_2(.))$ est un solution $T-$périodique de Eq (4.3), alors $x_1(t)$ est un solution $T-$périodique de Eq (4.2). on obtenir facilement $\ker L = \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Im} L = \left\{y \in Y : \int_0^T y(s)\, ds = 0\right\}$alors L est un opérateur de Frédholm avec zéro indice , on défini deux opérateur P, Q par :

$$P : X \to \ker L, \quad Px = \begin{pmatrix} (Ax_1)(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \quad Q : Y \to \operatorname{Im} Q \subset \mathbb{R}^2,\ Qy = \frac{1}{T}\int_0^T y(s)\, ds.$$

alors $\operatorname{Im} P = KerL, \ker Q = \operatorname{Im} L$.On défini $L_p = L \mid_{D(L)\cap KerP}$et $L_p^{-1} : \operatorname{Im} L \to D(L)$,telle que L_p^{-1} est l'inverse du L_p,alors

$$\left[L_p^{-1}y\right](t) = \begin{pmatrix} (A^{-1}Fy_1)(t) \\ (Fy_2)(t) \end{pmatrix}$$

$$[Fy_1](t) = \int_0^t y_1(s)\,ds, \quad [Fy_2](t) = \int_0^t y_2(s)\,ds. \tag{4.4}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Lemme 4.2.2 (voir [9])*Soit* $g \in C_T^0, \tau \in C_T^1$ *et* $\tau' < 1, \forall t \in [0,T]$, *alors* $g(\sigma(t)) \in C_T^0$ *et* $\sigma(t+T) = \sigma(t) + T, \forall t \in [0,T]$ *,ou* $\sigma(t)$ *fonction inverse du* $t - \tau(t)$.

Définitions et notations

$D(L) = X \cap C^2[0,T]$, X et Y deux espaces de Banach.

Définition 4.2.3 *Un opérateur* L *linéaire borné* $L : X \to Y$ *est appelé opérateur de Frédholm si il a un noyau et un conoyau de dimension finie et si son image est fermé. L'indice d'un opérateur de Frédholm est*

$$ind(L) = \dim KerL - co\dim \operatorname{Im} L$$

Proposition 4.2.4 *Soit* X *et* Y *deux espaces vectoriels normés,* $L : D(L) \subset X \to Y$ *application linéaire, et* $N : X \to Y$ *application linéaire , on dit que* L *est un opérateur de Frédholm d'un zéro indice si*

(a) $\dim KerL = co\dim \operatorname{Im} L < +\infty \quad \left(co\dim \operatorname{Im} L = \dim \frac{Y}{\operatorname{Im} L}\right)$

(b) $\operatorname{Im} L$ *est fermé dans* Y.

La théorème suivante est la base du propriétés du coincidence degré
Soit X , Z sont des espaces normés, $\Omega \subset X$ est une ensemble ouverte borné $L : domL \subset X \to Z$ est un opérateur d'indice zéro, $N : \overline{\Omega} \subset X \to Z$

Théorème 4.2.5

1 $(Existence\ théorème)\,.si\ d\left[(L,N),\Omega\right]\neq 0, alors\ 0\in(L-N)\left(domL\cap\Omega\right).$

2 $(\Pr opriétie\ \ Excision\ \ ).si\ \Omega_0\subset\Omega\ \ est\ un\ ouvert\ tel\ que\ (L-N)^{-1}(0)\subset\Omega_0, alors$ $d\left[(L,N),\Omega\right]=d\left[(L,N),\Omega_0\right]$

3 $(\Pr opriétie\ \ d'additivitié)\,.si\ \Omega=\Omega_1\cup\Omega_2,\Omega_1 et\ \Omega_2\ \ sont\ des\ ouverts\ tel\ que\ \Omega_1\cap\Omega_2=\phi, alors$

$d\left[(L,N),\Omega\right]=d\left[(L,N),\Omega_1\right]+d\left[(L,N),\Omega_2\right].$

Proposition 4.2.6 • *Si L est un opérateur de Frédholm d'un zéro indice alors il existe un projecteur continu $P:X\rightarrow X$ et $Q:Y\rightarrow Y$ telle que*

$$\operatorname{Im}P=KerL,$$

$$\operatorname{Im}L=KerQ=\operatorname{Im}(I-Q),$$

il résulte que $L\mid_{D(L)\cap KerP}:\ (I-P)\,X\rightarrow\operatorname{Im}L$ est inversible, on note l'inverse par K_P.Si Ω est un ouvert borné dans X, on dit que N est $L-$compact dans $\overline{\Omega}$ si $QN\left(\overline{\Omega}\right)$ est borné et $K_P\,(I-Q)\,N:\overline{\Omega}\rightarrow X$ est compacte.
comme $\operatorname{Im}Q$ est isomorphe à $Ker\ L$ alors il existe un isomorphisme $J:\operatorname{Im}Q\rightarrow Ker\ L$

Lemme 4.2.7 (voir[12])*Soit X et Y deux espaces de Banach , $L:D(L)\subset X\rightarrow Y$ est un opérateur de Frédholm d'indice zéro, $\Omega\subset X$ ensembe ouvert borné,et $N:\overline{\Omega}\rightarrow Y$ est $L-$compact dans $\overline{\Omega}$, si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) $Lx\neq\lambda Nx,\forall x\in\partial\Omega\cap D(L)\ \ ,\forall\lambda\in(0,1)$

(2) $Nx\notin\operatorname{Im}L,\ \forall x\in\partial\Omega\cap KerL$

(3) $d\left\{JQN,\Omega\cap KerL,0\right\}\neq 0$ *où* $J:\operatorname{Im}Q\rightarrow KerL$ *est un isomorphisme.*

alors équation $Lx=Nx$ admet un solution dans $\overline{\Omega}\cap\ D(L)$.

Théorème 4.2.8 *On suppose qu'il existe un constant positive D et $r\geqslant 0$ telle que :*

$[H_1]$ $\Gamma(t)>0,\forall t\in\mathbb{R}$

$[H_2]$ $g(x)>0,\forall x\in\mathbb{R},x\left[g(x)+\frac{\overline{P}}{\overline{\Gamma}}\right]<0, lorsque\ x\in\mathbb{R}\ avec\ |x|>D$

$[H_3]$ $\lim_{|\ x|\to+\infty} \frac{|F(x)|}{|x|^{p-1}} \leqslant r$, *telle que* $F(x) = \int_0^x f(s)\, ds$.

Alors Eq (4.2) *a au moins un solution* $T-$*périodique, si* $\frac{T^{\frac{1}{q}} r^{\frac{1}{p}} |c|^{\frac{1}{p}}}{|1-|c||} < 1$.

On défini les notations suivantes :

$$\overline{h} = \frac{1}{T} \int_0^T h(s)\, ds \quad , \quad \widetilde{h} = \int_0^T |h(s)|\, ds \quad , \ \forall h \in C_T,$$

$$\Gamma(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j(\mu_j\ (t)\ )}{1-\tau_j'(\mu_j\ (t))},\ \Gamma_1(t) = \sum_{j=1}^n \left| \frac{\beta_j(\mu_j\ (t)\ )}{1-\tau_j'(\mu_j\ (t))} \right|,$$

telle que $\tau_j \in C_T^1$ et $\tau_j'(t) < 1, \forall t \in [0,T]$ $(j = 1, 2, ..., n)$ donc la fonction $t \to \tau_j(t)$ admet un inverse unique noté $\mu_j\ (t)$ $(j = 1, 2, ..., n)$.

Preuve.

On voir facilement que Eq (4.3) a un solution $T-$périodique ssi l'équation

$$Lx = Nx$$

a

un solution $T-$périodique, où

$N : C_T \to C_T$,

$$(Nx)(t) = \begin{pmatrix} \varphi_q(x_2(t)) \\ f(x_1(t))\, A^{-1}\left(\varphi_q(x_2(t))\right) + \sum_{j=1}^n \beta_j(t)\, g(x_1(t-\tau_j(t))) + p(t) \end{pmatrix}$$

dans (4.4) , on remarque que N est $L-$compact dans $\overline{\Omega}$, où Ω n'importe quel ouvert borné dans C_T.

on prend $\Omega_1 = \{x : x \in C_T\ \ , \ Lx = \lambda Nx,\ \lambda \in [0,T]\}$.

$\forall x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \in \Omega_1$, alors x doit satisfaire

$$\begin{cases} (Ax_1)'(t) = \lambda\varphi_q(x_2(t)) = \lambda |x_2(t)|^{q-2} x_2(t), \\ x_2'(t) = \lambda f(x_1(t))\, A^{-1}\left(\varphi_q(x_2(t))\right) + \lambda \sum_{j=1}^n \beta_j(t)\, g(x_1(t-\tau_j(t))) + \lambda p(t) \end{cases} \tag{4.5}$$

D'aprés la première équation de (4.5) nous pouvons connaître que $x_2(t) = \varphi_p\left(\frac{1}{\lambda}(Ax_1)'(t)\right)$, qui, avec la deuxième équation de (4.5), implique

$$\left(\varphi_p\left(\frac{1}{\lambda}(Ax_1)'(t)\right)\right)' = \lambda f(x_1(t))\, A^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}Ax_1'(t)\right) + \lambda\sum_{j=1}^{n}\beta_j(t)\, g(x_1(t-\tau_j(t))) + \lambda p(t)\,, i.e$$

$$\left(\varphi_p\left((Ax_1)'(t)\right)\right)' = \lambda^{p-1} f(x_1(t))\, x_1'(t) + \lambda^p\sum_{j=1}^{n}\beta_j(t)\, g(x_1(t-\tau_j(t))) + \lambda^p p(t)\,, \tag{4.6}$$

On intègre les membres du (4.6) dans $[0, T]$

$$\int_0^T f(x_1(t))\, x_1'(t)\, dt + \lambda\sum_{j=1}^{n}\beta_j(t)\, g(x_1(t-\tau_j(t))) = -\lambda\overline{p}T. \tag{4.7}$$

comme

$$\int_0^T \beta_j(t)\, g(x_1(t-\tau_j(t)))\, dt = \int_{-\tau_j(0)}^{T-\tau_j(T)} \frac{\beta_j(\mu_j(s))}{1-\tau_j'(\mu_j(s))} g(x_1(s))\, ds,$$

Par l'application du Lemme 4.2.2 on trouve que $\frac{\beta_j(\mu_j(s))}{1-\tau_j'(\mu_j(s))} \in C_T$, $(j = 1, 2, ..., n)$

$$\int_0^T \beta_j(t)\, g(x_1(t-\tau_j(t)))\, dt = \int_0^T \frac{\beta_j(\mu_j(s))}{1-\tau_j'(\mu_j(s))} g(x_1(s))\, ds. \ (j = 1, 2, ..., n)\ ,$$

et avec $\int_0^T f(x_1(t))\, x_1'(t)\, dt = 0$ implique que (4.7) vérifier

$$\int_0^T \Gamma(t)\, g(x_1(t))\, dt = -\overline{p}T. \tag{4.8}$$

En utilisant théorème du l'intégrale de valeur moyenne, nous savons qu'il ya une constante $t_0 \in [0, T]$ telle que $g(x_1(t_0))\,\overline{\Gamma}\ T = -\overline{p}T$, c,à,d $g(x_1(t_0)) = -\frac{\overline{p}}{\overline{\Gamma}}$. par l'hypothèse $[H_2]$, on obtain qu'il existe un constant $D > 0$ telle que

$|x_1(t_0)| \leqslant D$.donc

$$|x_1|_0 \leqslant D + \int_0^T |x_1'(t)|\, dt. \tag{4.9}$$

d'autre part, on multiple les deux membre du (4.6) par $(Ax_1)(t)$ et on intègre sur $[0,T]$ on trouve

$$\begin{aligned} -\int_0^T \left|(Ax_1)'(t)\right|^p dt &= \lambda^{p-1}\int_0^T f(x_1(t))\,x_1'(t)\left[x_1(t)-cx_1(t-\sigma)\right]dt \\ &+\lambda^p\sum_{j=1}^n\int_0^T \beta_j(t)\,g(x_1(t-\tau_j(t)))\left[x_1(t)-cx_1(t-\sigma)\right]dt \\ &+\int_0^T p(t)\left[x_1(t)-cx_1(t-\sigma)\right] \end{aligned} \tag{4.10}$$

puisque $\int_0^T f(x_1(t))\,x_1(t)\,x_1'(t)\,dt=0$ et(2) du lemme 4.2.1, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_0^T |(Ax_1')(t)|^p dt = c\lambda^{p-1}\int_0^T f(x_1(t))\,x_1'(t)\,x_1(t-\sigma)\ \ dt \\ &-\lambda^p\sum_{j=1}^n\int_0^T \beta_j(t)\,g(x_1(t-\tau_j(t)))\left[x_1(t)-cx_1(t-\sigma)\right]dt \\ &-\lambda^p\int_0^T p(t)\left[x_1(t)-cx_1(t-\sigma)\right]dt \leqslant |c|\int_0^T f(x_1(t))\,x_1'(t)\,x_1(t-\sigma)\,dt \\ &+(1+|c|)\,|x_1|_0\left[\sum_{j=1}^n\int_0^T \frac{\left|\beta_j(\mu_j\ (s)\ )\right|}{1-\tau_j'(\mu_j\ (s))}g(x_1(s))\,ds+\widetilde{p}\right] \\ &=|c|\left|\int_0^T f(x_1(t))\,x_1'(t)\,x_1(t-\sigma)\,dt\right|+(1+|c|)\,|x_1|_0\left[\int_0^T \Gamma_1(t)\,g(x_1(t))\,dt+\widetilde{p}\right] \end{aligned} \tag{4.11}$$

Puisque $\frac{T^{\frac{1}{q}}r^{\frac{1}{p}}|c|^{\frac{1}{p}}}{|1-|c||}<1$, donc il existe un constant $\varepsilon>0$ telle que $\frac{T^{\frac{1}{q}}(r+\varepsilon)^{\frac{1}{p}}|c|^{\frac{1}{p}}}{|1-|c||}<1$
D'aprés l'hypothèse $[H_3]$ on trouve un contant $\rho>0$ (indépendant λ) telle que

$$|F(x)|\leqslant(r+\varepsilon)\,|x|^{p-1},\quad pour\quad |x|>\rho \tag{4.12}$$

Soit $E_1=\{t\in[0,T]:\ |x_1(t)|>\rho\ \}\,,E_2=\{t\in[0,T]:\ |x_1(t)|\leqslant\rho\ \}$ .Comme

$$\begin{aligned} \left|\int_0^T f(x_1(t))\,x_1'(t)\,x_1(t-\sigma)\,dt\right| &= \left|\int_0^T F(x_1(t))\,x_1'(t-\sigma)\,dt\right| \\ &\leqslant \int_0^T |F(x_1(t))\,x_1'(t-\sigma)|\,dt \\ &= \int_{E_1}|F(x_1(t))\,x_1'(t-\sigma)|\,dt+\int_{E_2}|F(x_1(t))\,x_1'(t-\sigma)|\,dt \end{aligned}$$

On trouve d'aprés (4.9) et(4.12) que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T f(x_1(t))\,x_1'(t)\,x_1(t-\sigma)\,dt\right| &\leqslant (r+\varepsilon)\int_0^T |x_1(t)|^{p-1}|x_1'(t-\sigma)|\,dt + F_\rho\int_0^T |x_1'(t-\sigma)|\,dt \\ &\leqslant (r+\varepsilon)\,|x_1|_0^{p-1}\int_0^T |x_1'(t-\sigma)|\,dt + F_\rho\int_{E_2} |x_1'(t-\sigma)|\,dt \\ &\leqslant (r+\varepsilon)\left(D+\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{p-1}\int_{-\sigma}^{T-\sigma}|x_1'(t)|\,dt + F_\rho\int_{-\sigma}^{T-\sigma}|x_1'(t \\ &= (r+\varepsilon)\left(D+\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{p-1}\int_0^T |x_1'(t)|\,dt + F_\rho\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\end{aligned} \tag{4.13}$$

telle que $F_\rho = \max_{|x|\leqslant\rho}|F(x)|$.

Cas (1) : si $\int_0^T |x_1'(t)|\,dt = 0$, à partir (4.9) on obtient $|x_1|_0 < D$.
Cas (2) : si $\int_0^T |x_1'(t)|\,dt > 0$, alors nous savons que

$$\left(D+\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{p-1} = \left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{p-1}\left(1+\frac{D}{\int_0^T |x_1'(t)|\,dt}\right)^{p-1} \tag{4.14}$$

Maintenant, il existe un constant $\delta > 0$ telle que$(1+x)^I < 1+(1+I)\,x$,$\forall x\in[0,\delta]$
Si

$$\frac{D}{\int_0^T |x_1'(t)|\,dt} > \delta$$

alors $\int_0^T |x_1'(t)|\,dt < \frac{D}{\delta}$,donc à partir (4.9) on a $|x_1|_0 < \frac{D}{\delta}+D$
Si

$$\frac{D}{\int_0^T |x_1'(t)|\,dt} \leqslant \delta$$

alors d'aprés (4.14) nous connaissons

$$\begin{aligned}\left(D+\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{p-1} &\leqslant \left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{p-1}\left(1+\frac{pD}{\int_0^T |x_1'(t)|\,dt}\right) \\ &= \left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{p-1} + pD\left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{p-2}\end{aligned} \tag{4.15}$$

remplaçant (4.15) dans (4.13) , on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T f(x_1(t))\,x_1'(t)\,x_1(t-\sigma)\,dt\right| &\leqslant (r+\varepsilon)\left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^p \\ &+ (r+\varepsilon)\,pD\left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{p-1} + F_\rho\int_0^T |x_1'(t)|\,dt.\end{aligned} \tag{4.16}$$

en remplaçant (4.16) dans (4.11) , on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^T |(Ax_1')(t)|^p\,dt &= (r+\varepsilon)|c|\left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^p + (r+\varepsilon)pD\left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{p-1} + |c|F_\rho\int_0^T |x_1'(t) \\
&\quad dt + (1+|c|)\left(D+\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)\left(\int_0^T \frac{\Gamma_1(t)}{\Gamma(t)}\Gamma(t)\,g(x_1(t))\,dt+\widetilde{p}\right) \\
&\leqslant (r+\varepsilon)|c|\left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^p + (r+\varepsilon)|c|pD\left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{p-1} \\
&+ |c|F_\rho\int_0^T |x_1'(t)|\,dt + (1+|c|)\left(D+\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)\left(\left|\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right|_0\widetilde{p}+\widetilde{p}\right) \\
&\leqslant (r+\varepsilon)|c|\left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^p + (r+\varepsilon)|c|pD\left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{p-1} \\
&+ \left[|c|F_\rho + (1+|c|)\left(1+\left|\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right|_0\right)\widetilde{p}\right]\int_0^T |x_1'(t)|\,dt + (1+|c|)D\left(1+\left|\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right|_0\right)\widetilde{p}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

par une application du première parti du lemme4.2.2, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T |x_1'(t)|\,dt &= \int_0^T |(A^{-1}Ax_1')(t)|\,dt \\
&\leqslant \frac{\int_0^T |(Ax_1')(t)|\,dt}{|1-|c||} \\
&\leqslant \frac{T^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^T |(Ax_1')(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}}{|1-|c||}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

On applique l'inégalité célèbre suivante

$$(a+b)^k \leqslant a^k + b^k, \forall a>0,\ b>0,\ 0<k<1.$$

d'aprés (4.17) et (4.18) on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^T |x_1'(t)|\,dt &\leqslant \frac{T^{\frac{1}{q}}(r+\varepsilon)^{\frac{1}{p}}|c|^{\frac{1}{p}}}{|1-|c||}\int_0^T |x_1'(t)|\,dt, \\
&+ \frac{T^{\frac{1}{q}}(r+\varepsilon)^{\frac{1}{p}}(pD)^{\frac{1}{p}}|c|^{\frac{1}{p}}}{|1-|c||}\left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, \\
&+ \frac{T^{\frac{1}{q}}\left[|c|F_\rho+(1+|c|)\left(1+\left|\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right|_0\right)\widetilde{p}\right]^{\frac{1}{p}}}{|1-|c||}\left(\int_0^T |x_1'(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, \\
&+ \frac{T^{\frac{1}{q}}}{|1-|c||}\left[(1+|c|)D\left(1+\left|\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right|_0\right)\widetilde{p}\right]^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

comme $p>1$, $q>1$et

$$\frac{T^{\frac{1}{q}}r^{\frac{1}{p}}|c|^{\frac{1}{p}}}{|1-|c||} < 1$$

il y'a un constant $M_1 > 0$ telle que $\int_0^T |x_1'(t)|\, dt \leqslant M_1$.Il résulte d'aprés 4.9 que $|x_1|_0 \leqslant D + M_1$

Soit $M_2 = \max\left\{\frac{D}{\delta}, D + M_1\right\}$,alors $|x_1|_0 \leqslant M_2$
par la première équation de (4.5) on a $\int_0^T \varphi_q(x_2(t))\, dt = \int_0^T |x_2(t)|^{q-2} x_2(t)\, dt = 0$,

qui implique qu'il existe un constant $t_1 \in [0, T]$ telle que $x_2(t_1) = 0$.

Donc $|x_2|_0 \leqslant \int_0^T |x_2'(t)|\, dt$.

par la deuxième équation du (4.5) on obtient

$$x_2'(t) = \lambda f(x_1(t)) A^{-1}\left(\varphi_q(x_2(t))\right) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \beta_j(t)\, g(x_1(t - \tau_j(t))) + \lambda p(t)$$

$$= f(x_1(t))\, x_1'(t) \ + \lambda \sum_{j=1}^{n} \beta_j(t)\, g(x_1(t - \tau_j(t))) + \lambda p(t)$$

donc

$$|x_2|_0 \leqslant \int_0^T |f(x_1(t))\, x_1'(t)|\, dt + \sum_{j=1}^{n} \int_0^T \left|\beta_j(t)\, g(x_1(t - \tau_j(t)))\right| dt + \int_0^T |p(t)|\, dt$$

$$\leqslant f_{M_2} M_1 + g_{M_2} |\Gamma_1|_0\, T + \widetilde{p} = M$$

où $f_{M_2} = \max_{|x| \leqslant M_2} |f(x)|$, $g_{M_2} = \max_{|x| \leqslant M_2} |g(x)|$.

$M = \sqrt{M_2^2 + M_3^2}+1, \Omega = \left\{x = (x_1, x_2)^T : |x_1|_0 < M, |x_2|_0 < M\right\}$ et$\Omega_2 = \{x \in \partial\Omega : x \in \ker L\}$
alors

$$QNx = \frac{1}{T}\int_0^T \begin{pmatrix} |x_2|^{q-2} x_2 \\ f(x_1(t)) A^{-1}\left(\varphi_q(x_2)\right) + \sum_{j=1}^{n} \beta_j(t)\, g(x_1) + p(t) \end{pmatrix} dt$$

$QNx = 0$, alors $x_2 = 0$, $x_1 = M$ ou $-M$,mais quand $x_1 = M$ nous connaissons que

$$-\overline{p}T = \int_0^T \sum_{j=1}^{n} \beta_j(t)\, g(M)\, dt = g(M) \sum_{j=1}^{n} \int_{-\tau_j(0)}^{T - \tau_j(T)} \frac{\beta_j\left(\mu_j\ (s)\ \right)}{1 - \tau_j'\left(\mu_j\ (s)\right)} ds$$

$$= g\left(M\right)\sum_{j=1}^{n}\int_{0}^{T}\frac{\beta_j\left(\mu_j\left(s\right)\right)}{1-\tau_j'\left(\mu_j\left(s\right)\right)}ds = g\left(M\right)\overline{\Gamma}T$$

c,à,d, $g\left(M\right) = -\frac{\overline{p}}{\overline{\Gamma}}$.d'aprés l'hypothèse $\left[H_2\right]$, on sait que $\left|M\right| \leqslant D$,ce qui donne une contradiction.de même lorsque $x_1 = -M$,nous avons aussi $QNx \neq 0$,i.e.,$\forall x \in \Omega, x \notin \operatorname{Im} L$.donc les conditions (1)et(2)du Lemme 4.2.7 sont tous les deux satisfaits.
Ensuite, nous montrons que le condition (3)du Lemme 4.2.7 est aussi satisfaite.On défini l'isomorphisme $J : \operatorname{Im} Q \rightarrow KerL$ par

$$J\left(x_{1,}x_2\right)^T = \left(x_{1,}x_2\right)^T$$

Soit $H\left(\mu, x\right) = -\mu x + \left(1-\mu\right)JQNx, \left(\mu, x\right) \in \left[0,1\right] \times \Omega$ alors $\forall\left(\mu, x\right) \in \left[0,1\right] \times \left(\partial\Omega \cap \ker L\right),$

$$H\left(\mu, x\right) = \begin{pmatrix} -\mu x_1 + \frac{1-\mu}{T}\int_0^t\left[f\left(x_1\right)A^{-1}\left(\varphi_q\left(x_2\right)\right) + \sum_{j=1}^{n}\beta j\left(t\right)g\left(x_1\right) + p\left(t\right)\right]dt \\ \left(-\mu + \left(1-\mu\right)\mid x_2\mid^{q-2}\right)x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\mu x_1 + \left(1-\mu\right)\left[g\left(x_1\right)\sum_{j=1}^{n}\overline{\beta_j} + \overline{p}\right] + \frac{1-\mu}{T}\int_0^T f\left(x_1\right)A^{-1}\left(\varphi_q\left(x_2\right)\right)dt \\ \left(-\mu + \left(1-\mu\right)\mid x_2\mid^{q-2}\right)x_2 \end{pmatrix}$$

par le lemme 4.2.2, on voit que $\sum_{j=1}^{n}\overline{\beta_j} = \overline{\Gamma}$.
Donc$H\left(\mu, x\right) = \begin{pmatrix} -\mu x_1 + \left(1-\mu\right)\left[g\left(x_1\right)\overline{\Gamma} + \overline{p}\right] + \frac{1-\mu}{T}\int_0^T f\left(x_1\right)A^{-1}\left(\varphi_q\left(x_2\right)\right)dt \\ \left(-\mu + \left(1-\mu\right)\mid x_2\mid^{q-2}\right)x_2 \end{pmatrix}$

$\forall\left(\mu, x\right) \in \left[0,1\right] \times \left(\partial\Omega \cap \ker L\right),$

Si $H\left(\mu, x\right) = 0$, alors $x_2 = 0, x_1 = M$ ou $-M$.Semblable à la preuve haut nous pouvons voir que $H\left(\mu, x\right) \neq 0$.
Donc

$$d\{JQN, \Omega\cap\ker L, 0\} = d\{H\left(0, x\right), \Omega\cap\ker L.0\} = d\{H\left(1, x\right), \Omega\cap\ker L.0\} = d\{I, \Omega\cap\ker L.0\} \neq 0$$

■

Donc condition(3)du Lemme 4.2.7 est vérifié.par l'application du Lemme 4.2.7, nous concluons que l'équation $Lx = Nx$ a un solution $x\left(t\right) = \left(x_1\left(t\right), x_2\left(t\right)\right)^T$ dans $\overline{\Omega} \cap D\left(L\right)$, c,à,d., Eq (4.2) a un solution $T-$périodique $x_1\left(t\right)$.

Corollaire 4.2.9 *On suppose qu'il existe un constant positive D et $r \geqslant 0$ telle que :*

$[H_1]$ $\Gamma(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$[H_2]$ $g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x\left[g(x) + \frac{\overline{P}}{\overline{\Gamma}}\right] > 0,$ *lorsque* $x \in \mathbb{R}$ *avec* $|x| > D$

$[H_3]$ $\lim_{|x| \to +\infty} \frac{|F(x)|}{|x|^{p-1}} \leqslant r,$ *telle que* $F(x) = \int_0^x f(s)\, ds$.

Alors Eq (4.2) *a au moins un solution $T-$périodique, si* $\frac{T^{\frac{1}{q}} r^{\frac{1}{p}} |c|^{\frac{1}{p}}}{|1-|c||} < 1.$

Comme un application, on considère l'équation suivante

$$\left(\varphi_3\left(x(t) - 20x(t-\pi)\right)'\right)'$$

$$= x^2(t)\sin x(t)\, x'(t) + \left(1 - \frac{1}{3}\cos t\right) x^2\left(t - \frac{1}{3}\sin t\right) e^{x\left(t - \frac{1}{3}\sin t\right)} + \cos t - 1, \quad (4.19)$$

correspondant au théorème, on a

$p = 3$, $T = 2\pi$, $c = 20$, $f(x) = x^2 \sin x$, $F(x) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x - 2, g(x) + x^2 e^x,$

$$\beta(t) = 1 - \frac{1}{3}\cos t,\ \tau(t) = \frac{1}{3}\sin t,\ \Gamma(t) = \cos t - 1,\ donc\ r = 1,\ \overline{p} = -1.$$

$$\Gamma(t) = \frac{1 - \frac{1}{3}\cos\mu(t)}{1 - \frac{1}{3}\cos\mu(t)} = 1 > 0, \forall t \in [0, 2\pi], \overline{\Gamma} = 1$$

Où $\mu(t)$ est l'inverse du $t - \frac{1}{3}\sin t$,
alors

$$x\left[g(x) + \frac{\overline{p}}{\overline{\Gamma}}\right] = x\left[x^2 e^x - 1\right] > 0,\ pour\ \ |x| > 2\ et \frac{T^{\frac{1}{q}} r^{\frac{1}{p}} |c|^{\frac{1}{p}}}{|1-|c||} = \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \quad 5^{\frac{1}{3}}}{19} < 1.$$

Donc, par l'application du cette théorème on result que Eq (4.19) a au moins un solution $2\pi-$périodique.

Conclusion

Le présent travail a permis de donner un méthode trés important dans l'étude de l'existence des solutions du EDP telle que on s'intéresse de définir les théories et les propriéties de cette méthode et comment construire, on a aussi donné
un généralement dans l'espace Euclidien.
Il est aussi intéressant de voir comment appliquer ces résutats dans le cas au l'équation p-Laplacien de type Liénard avec argument de déviation et le cas l'équation p-Laplacien avec plusieurs arguments de déviation.
Ce travail donne de nouveaux résultats par le sujet, et donne une perspectrive de recherche dans ce domaine.

Bibliographie

[1] E. HEINZ , An elementary analytic theory of the degree of mapping in n-dimensionel space. J Math. Mech, 8(1959),231-247.

[2] J. CRONIN, The number of periodic solutions of nonautonomous systems. Duke Math J, 27(1960),183-194.

[3] J. Droniou, Degrés topologiques et applications, Departement de Mathématiques, UMR CNRS 5149, CC051, University Montpellier 2, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France, (2006).

[4] J. Mawhin, Degré Topologique et solutions périodiques des systèmes Différentielles non linéaires, Institut d'astrophysique, Université du Liège(1969).

[5] K. Deimling, "Nonlinear Functional Analyis", Springer-Verlag, Berlin, New York,1985.

[6] K. Hale Jack, Sjoerd M. Verduyn Lunel -Introduction to functional differential equations.

[7] L. Bingwen, Periodic solutions for Liénard type $P-$Laplacian equation with a deviating argument, ScienceDirect (2008) .

[8] Lu. Shiping, Ge. Weigao, Periodic solutions to neutral differential equation with deviating, Arguments, Appl.Math.Comput.152(2004) 17-27.

[9] Lu. Shiping, Ge. Weigao, Periodic solutions of neutral differential equation with multiple deviating, Arguments, Appl. Math. Comput. 156(2004) 705-717.

[10] P. Lindqvist, Notes on the p-Laplace equation, Department of mathematics, NorwegianUniversity of Science and Technology. No-7491 Trondheim, Normy.

[11] R. Agarwal, M. Meehan and D. O'ragan, Fixed point theory and applications, Cambridge University Press, 141 (2004).

[12] R.E. Gaines, J. Mawhin, Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations, Springer, Berlin, Lecture Notes in Mathematics, vol. 568, Springer-Verlag, Berlin, New York, (1977).

[13] R. E, GOMORY, Critical points at infinity and forced oscillations, Contr. to the theory of nonlin. oscill, 3, Ann of Math Stud, n° 36, Princeton Univ. Press, 1956, 85-126.

[14] R. Manasevich and J. Mawhin, Périodic solutions for Nonlinear systems with p-Laplacian-Like Operators, Journal of Differential Equations 145,367-393(1998).

[15] S. Lu, Existence of periodic solutions to a p-Laplacian Liénard differential equation with a deviating arguments , Nonlinear Anal, in press.Accepted Manuscript, Available online 9 January 2007.

[16] S. Lu, Z. Gui, On the existence of periodic solutions to p-Laplacian Rayleigh differential equation with a delay, J. Math. Anal. Appl. 325 (1)(2007) 685-702.

[17] S. Peng, Z. Xu, On the existence of periodic solutions for a class of p-Laplacian system, J. Math, Anal, Appl, 325 (1)(2007).

[18] T. Gallouët, R.Herbin, Equations au dérivées partielles,cour du Master2 de mathématiques,University de Marseille(13 Avril 2012).

[19] W. S. Cheung, J. Ren, Periodic solutions for P-Laplacian differential equation with multiple deviating arguments, Nonlinear Anal. 62 (4)(2005) 727-742.

[20] W. S. Cheung, J. Ren, Periodic solutions for P-Laplacian Liénard equation with a deviating argument, Nonlinear Anal. 59 (1-2)(2004).

[21] W. S. Cheung, J. Ren, On the existence of periodic solutions for p-Laplacian generalized Liénard equation, Nonlinear Anal. 60 (1)(2005).

[22] Zhu. Yanling, Lu. Shiping, Periodic solutions for P-Laplacian neutral functional differential equation with multiple deviating arguments, ScienceDirect(2007).