

Table des matières

0.1	Introduction	3
1	Notions générales sur les ondelettes classiques	5
1.1	Bases orthogonales	5
1.1.1	Analyse multirésolution et Espace d'approximation	5
1.1.2	Espace d'ondelette W_j	11
1.2	Bases biorthogonales	22
1.2.1	Analyse multirésolution biorthogonale	22
1.2.2	Algorithme d'analyse et de synthèse de Mallat	29
1.2.3	La régularité, le nombre de moments nuls	31
1.3	Approche optimale	32
1.3.1	Analyse du problème	32
1.3.2	La nécessité des bases non stationnaire	33
2	Bases d'ondelettes orthogonales non Stationnaire	37
2.1	Analyse multi-résolution non stationnaire	37
2.1.1	propriétés de base	38
2.2	Exemple: Construction d'AMRNS à travers les B-splines exponentielles	42
2.3	Application: Approximation optimale par les bases non stationnaire	54
2.3.1	L'algorithme de choix du meilleure base	54

3	Bases d'ondelettes biorthogonales non stationnaire	61
3.1	Analyse multirésolution non stationnaire biorthogonal	61
3.1.1	Construction d'un système d'ondelettes biorthogonal non stationnaire à l'aide des B-splines exponentielles	63
3.2	Propriétés fondamentales	72
3.2.1	Régularité de fonctions d'échelle	72
3.2.2	Stabilité des ondelettes biorthogonales non stationnaire	73
4	Conclusion	82

0.1 Introduction

Au cours des années 1980, les ondelettes sont devenues un outil indispensable dans une grande variété d'applications tel que le traitement du signal, traitement d'images, calcul numérique... etc. Les fondements de bases théoriques des ondelettes et analyses multirésolution ont été développées par Y. Meyer et S. Mallat. La construction d'ingrid Daubechies des familles de bases d'ondelettes orthogonales et à supports compact dans $L^2(\mathbb{R})$, ont un grand impact dans le domaine de traitement du signal numérique. Ceci est dû aux bonnes propriétés d'approximation, et la facilité de leur implementation. Ces dernières sont devenues un outil populaire pour la multitude de problèmes de traitement du signal avec succès par exemple; la compression de données, débruitage, classification... etc.

L'intérêt majeur de la construction d'une base d'ondelettes orthogonale est de trouver une meilleure approximation d'une fonction à partir de sa projection sur cette base. Les bases d'ondelettes orthogonales nous offrent une représentation creuse d'une fonction régulière avec des singularités isolées. De plus ces singularités sont immédiatement identifiées dans ces bases. Ces propriétés expliquent l'intérêt des ondelettes dans les différents champs d'applications. Cependant, ces représentations sont pleine lorsqu'il s'agit des fonctions qui possèdent des singularités non isolés (ou des oscillations rapide).

Le but de notre travail est d'étudier de nouvelles base d'ondelettes non-stationnaire afin de traiter cette classe de fonctions. Nous étudions également les propriétés biorthogonales et les algorithmes de décomposition et de reconstruction associés.

Notre mémoire est constitué des chapitres suivants:

Dans le premier chapitre, nous présentons les notions sur la théorie des ondelettes; nous rappelons les principales propriétés des ondelettes dans lesquelles sont introduites à travers l'analyse multirésolution dans $L^2(\mathbb{R})$. Après la représentation de l'algorithme de Mallat, on explicite les propriétés prises en compte dans le choix d'une ondelette, en particulier le nombre de moments nuls et la régularité. Enfin nous illustrons à travert un exemple la nécessité des bases non stationnaire dans une étude concernant l'approximation optimale d'une fonction donnée.

le deuxième chapitre, traite les bases d'ondelettes orthogonales non stationnaire. Il s'agit d'une généralisation où l'ondelette mère change complètement à chaque échelle (*niveau*), ainsi nous décrivons la construction d'une base d'ondelette non stationnaire orthogonale avec certaines propriétés spécifiques. De plus, nous examinons un exemple concret pour le cas des B-splines exponentielles. Enfin nous étudions le lien entre les bases non stationnaire et l'approximation optimale d'une fonction donnée.

Le dernier chapitre, consiste à présenter une étude sur les bases d'ondelettes biorthogonales non stationnaire. Nous décrivons d'une part des notions fondamentales concernant l'analyse multirésolution biorthogonale non stationnaire, la construction d'une base d'ondelette biorthogonale non stationnaire. D'autre part, nous exposons une méthode de construire une base d'ondelette biorthogonale non stationnaire basée sur les B-splines exponentielles. Enfin nous étudions quelques propriétés mathématiques; telles que la régularité et la stabilité des bases d'ondelettes non stationnaire biorthogonales.

Chapitre 1

Notions générales sur les ondelettes classiques

1.1 Bases orthogonales

L'objectif original de la théorie des ondelettes est de construire des bases orthogonales dans $L^2(\mathbb{R})$. La question qui se pose est comment créer une base orthonormée d'ondelette?. Pour répondre à cette question, il faut savoir qu'il existe plusieurs façons d'introduire les ondelettes. L'une des procédures principale est l'analyse multirésolution.

1.1.1 Analyse multirésolution et Espace d'approximation

La notion d'analyse multirésolution a été introduite en 1986 par S.Mallat [24]⁽¹⁾, et décrite de manière approfondie dans le livre d'Yves. Meyer[28]⁽²⁾. La définition suivante présente les propriétés mathématiques des espaces multirésolutions.

⁽¹⁾ S. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans.Amer Math. Soc.*, 315:69-87, September 1989.

⁽²⁾Y. Meyer.Ondelettes et Opérateurs, Tom I. Paris, Hermann, 1990.

Définition 1.1.1 Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ (en abrégé, **AMR**), est une suite de sous-espaces fermés emboîtés $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant :

(a) $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1} \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$.

(b) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.

(c) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

(d) $f \in V_0 \iff f(2^j \cdot) \in V_j$.

(e) $\exists \phi \in V_0$ avec $\int \phi(t) dt \neq 0$ telle que la famille $\phi_0 = \{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base de Riesz de V_0 .

Interprétation

V_j est une grille du signal de taille 2^j . Cela revient à dire que la projection d'un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ dans V_j , est une approximation du signal à la résolution 2^j .

(a) Signifie qu'une approximation à une résolution donnée 2^{j+1} , contient toute l'information nécessaire pour obtenir les approximations (*plus grossières*) aux résolutions inférieures 2^j .

(b) Indique que, pour une résolution infinie, l'approximation du signal converge bien vers le signal original (*la densité de $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ dans $L^2(\mathbb{R})$*).

(c) Dit que pour une résolution nulle (*infinitement grossières*), on perd toute l'information sur la fonction que l'on veut analyser.

(d) Permet d'assurer que la dilatée de l'approximation d'un signal f à une résolution donnée est bien une approximation du signal à la résolution juste inférieure. autrement dit; les espaces $V_j, j \in \mathbb{Z}$ sont reliés entre eux, tels que le passage de l'un à l'autre soit le résultat d'un changement d'échelle.

(e) Implique que pour tous $j \in \mathbb{Z}$, l'espace V_j est invariant par translation.

La propriété de base de Riesz, est un compromis qui permet de conserver l'équivalence en norme d'énergie ($\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$), cela signifie:

qu'il existe deux constantes A et B ; $0 < A, B < +\infty$, telles que, pour toute suite réelle $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$,

$$A \cdot \|c_k\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \|f\|_{L^2} \leq B \cdot \|c_k\|_{l^2(\mathbb{Z})}, \quad (1.1)$$

avec

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(t - k) \in V_0. \quad (1.2)$$

Autrement dit que, cette propriété exprime la stabilité du développement d'une fonction de l'espace V_0 , sur la base ϕ_0 .

Convention : Nous supposons que, pour toute fonction ϕ de la définition 1.1.1, on a:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = \sqrt{2\pi} \cdot \hat{\phi}(0) = 1 \quad (1.3)$$

Là où, $\hat{\phi}$: dénote la transformée de fourier de ϕ .

Les translatées et dilatées de ϕ , sont des fonctions notées $\phi_{j,k}$, définies par:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \quad (1.4)$$

avec la propriété,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \phi_{j,k} \in V_j \text{ et } \|\phi_{j,k}(t)\| = 1 \quad (1.5)$$

ϕ : la fonction d'échelle, parfois nous appellerons fonction *d'échelle génératrice*, ou *raffinement*.

Proposition 1.1.1 Soit $\{V_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ une **AMR** de $L^2(\mathbb{R})$, ϕ est la fonction d'échelle associée. Supposons que $j \in \mathbb{Z}$, et on considère la famille $S = \{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, où $\phi_{j,k}$ définit par (1.4). Alors, S est une base orthonormale pour V_j .

Preuve.

D'après la propriété (1.5), on sait que:

$$\phi_{j,k} \in V_j \text{ et } \|\phi_{j,k}(t)\| = 1.$$

Supposons que $k, l \in \mathbb{Z}$ avec $k \neq l$, le produit;

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,l}(t) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} 2^{j/2} \phi(2^j t - k) \cdot 2^{j/2} \phi(2^j t - l) \cdot dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(u) \cdot \phi(u - (l - k)) du \\ &= \langle \phi(u), \phi(u - (l - k)) \rangle. \end{aligned}$$

Or, $l - k \neq 0$ et $\phi(u)$, $\phi(u - (l - k))$, sont deux éléments distincts d'une base orthonormée pour V_0 , ce qui implique

$$\langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,l}(t) \rangle = 0.$$

Finalement S est un ensemble de fonctions orthonormées dans V_j . Pour montrer que S forme une base pour V_j , il suffit de vérifier que les éléments de S sont linéairement indépendants. En effet ; voir que S couvre V_j , et soit f un élément de V_j , alors via à la propriété d'échelle (d), nous savons que $f(2^{-j}\cdot) \in V_0$, et quand la famille S est une base orthonormée pour V_0 , d'où:

$$f(2^{-j}t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(t - k)$$

implique

$$f(t) = \frac{1}{2^{j/2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{j,k}(t).$$

■

Corollaire 1.1.1 *Si $f \in V_j$, et*

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_{j,k}(t), \quad (1.6)$$

alors

$$c_k = \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle. \quad (1.7)$$

L'ensemble des fonctions $\phi_{j,k}$ constitue une base inconditionnelle de V_j . c'est à dire que V_j formé par une combinaison linéaire de $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, avec $j \in \mathbb{Z}$. Les propriétés (d) et (e) nous permettent d'en déduire que la famille $\phi_j = \{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, est également une base de Riesz de l'espace V_j , avec les mêmes constantes A et B , que pour la base $\phi_0 = \{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Proposition 1.1.2 *Soit ϕ est la fonction d'échelle associée à $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, une **AMR** de $L^2(\mathbb{R})$, alors ϕ satisfait l'équation d'échelle*

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k), \quad (1.8)$$

où,

$$h_k = \langle \phi(t), \phi_{1,k}(t) \rangle. \quad (1.9)$$

De plus, nous avons

$$\phi_{j,l}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2l} \cdot \phi_{j+1,k}(t). \quad (1.10)$$

Les coefficients h_k , $k \in \mathbb{Z}$, s'appellent coefficients d'échelle. On note par $\mathbf{h} = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, le filtre d'échelle pour tous $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve.

Par construction $\phi \in V_0$ et $V_0 \subset V_1$. D'après la proposition 1.1.1, la fonction ϕ , peut être exprimée comme une combinaison linéaire des éléments de la base $\phi_1 = \{\phi_{1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_1 , d'où il existe une suite réelle $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que ϕ vérifie la relation à deux échelles suivante:

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{1,k}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k)$$

De corollaire 1.1.1, on aura;

$$h_k = \langle \phi(t), \phi_{1,k}(t) \rangle = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \cdot \phi(2t - k) dt.$$

Donc, nous pouvons établir la validité de (1.8). Remplaçons t par $2t - l$ dans (1.8), on obtient:

$$\phi(2t - l) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2(2^j t - l) - k).$$

D'où,

$$\phi(2t - l) = \sqrt{2} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \cdot \phi(2^{j+1}t - (k + 2l)). \quad (1.11)$$

Posons $m = k + 2l$, l'équation (1.11) devient;

$$2^{j/2} \cdot \phi(2t - l) = 2^{(j+1)/2} \cdot \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2l} \cdot \phi(2^{j+1}t - m)$$

Donc

$$\phi_{j,l}(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2l} \cdot \phi_{j+1,m}(t).$$

Inversement; nous pouvons montrer, si ϕ satisfait l'équation d'échelle (1.8), alors les propriétés d'échelle et l'emboîtement d'une **AMR**, est satisfaites. ■

Le filtre \mathbf{h} contenant toutes les propriétés, sur les fonctions d'échelle de l'**AMR**. Ainsi que la stabilité de la base de l'espace V_1 , assure le fait que la suite $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, est dans $l^2(\mathbb{Z})$. Ces coefficients ont les propriétés suivantes:

$$(i) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2} \quad (ii) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k-2l} = \delta_{0,l} \quad (iii) \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^2 = 1$$

On suppose que $V_j = \overline{\text{span}} \{ \phi(2^j \cdot - k) \}_{k \in \mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$, et $\phi \in V_0$ satisfait l'équation d'échelle (1.8), alors

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_j \subset V_{j+1} \quad \text{et} \quad f \in V_0 \iff f(2^j \cdot) \in V_j.$$

Rappelons que; une **AMR** est entièrement déterminée par sa fonction d'échelle ϕ qui engendre une base orthonormée pour chaque espace V_j . Alors, de manière à pouvoir utiliser la famille $\{ \phi(\cdot - k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$, pour l'approximation des fonctions simples, comme les fonctions constantes, on suppose que les translatées entières de la fonction d'échelle, forment une partition de l'unité, c'est à dire:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(t - k) = 1. \quad (1.12)$$

Cela est aussi utilisé pour prouver qu'une ϕ donnée, génère une **AMR**.

Dans de nombreux cas, l'expression analytique de $\phi(t)$, n'est pas disponible, et sa connaissance n'est nullement obligatoire, car dans la plupart des applications, on ne travaille jamais avec ϕ , mais directement avec les h_k . [9]⁽¹⁾

Projection dans l'espace V_j

Soit $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ une **AMR** de $L^2(\mathbb{R})$, avec

$$V_j = \left\{ \text{e.vect. engendré par } \{ \phi_{j,k} \}_{k \in \mathbb{Z}} \right\} \cap L^2(\mathbb{R}).$$

La projection de $f \in L^2$ dans V_j , est donnée par:

$$P_{f,j}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle \cdot \phi_{j,k}(t) \quad (1.13).$$

⁽¹⁾I.Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm.Pure, Applied Math*, XLI(41):909-996, 1988.

Projection des fonctions de V_{j+1} dans V_j

Proposition 1.1.3 Soit $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ une AMR de $L^2(\mathbb{R})$, avec ϕ est la fonction d'échelle associée. Supposons que $f_{j+1} \in V_{j+1}$ s'écrit sous la forme:

$$f_{j+1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{j+1,k} \quad (1.14)$$

Si f_j : la projection de f_{j+1} dans V_j , alors f_j a la forme

$$f_j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \phi_{j,l}.$$

Cette relation peut s'écrire comme

$$f_j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{k-2l} \phi_{j,l} \quad (1.15)$$

Preuve. Voir [32]⁽¹⁾ ■

1.1.2 Espace d'ondelette W_j

Dans beaucoup d'applications, il est nécessaire que nous enregistrons les détails, quand nous nous déplaçons d'un espace approximatif au prochain. Si f_j et $f_{j+1} \in L^2$, les projections (*les approximations*) de $f \in L^2$ dans V_j et V_{j+1} respectivement, alors la fonction résiduelle g_i est définie par:

$$g_i(t) = f_{j+1}(t) - f_j(t)$$

g_i ; représente la projection orthogonale de f , dans un espace W_j nommé "Espace d'ondelette" (*ou détails*). Alors les ondelettes apparaissent naturellement comme un moyen d'écrire la différence entre les deux espaces V_j et V_{j+1} consécutifs.

On construit pour cela l'espace W_0 tel que:

$$V_1 = V_0 \oplus W_0 \quad (1.16)$$

⁽¹⁾D. K. Ruch and P. J. van Fleet, *Wavelet Theory An Elementary Approach with Application*. Wiley.Canada 2009

La famille $\psi_0 = \{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, forme une base de Riesz de W_0 . Ceci impose que la fonction ψ soit dans l'espace V_1 , et s'écrive comme une combinaison linéaire de $\phi_1 = \{\phi(2 \cdot -k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, telle que;

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2t - k), \quad (1.17)$$

de cette manière, nous apparaissent le deuxième filtre discret \mathbf{g} , tel que $\mathbf{g} = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. On écrit les translatées et dilatées de ψ , comme

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad (1.18)$$

Les fonctions ϕ et ψ sont alors définies par les seules données des filtres discrets \mathbf{h} et \mathbf{g} , tel que

$$g_k = (-1)^k \cdot h_{1-k} \quad (1.19)$$

Grâce à la relation (1.18), de plus (1.19) on obtient,

$$\psi_{j,l}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_{1+2^j l - k} \cdot \phi_{j+1,k} \quad (1.20)$$

Le résultat suivant, dû à Stéphane Mallat [24]⁽¹⁾ et Yves Meyer [27]⁽²⁾, identifie le complément orthogonal W_j à V_j dans V_{j+1} et établit une base orthonormal pour W_j .

Théorème 1.1.1 *Soit $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est une AMR, et ϕ la fonction d'échelle satisfait l'équation*

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \cdot \phi(2t - k).$$

On considère que les coefficients h_k sont des nombres réels pour tous $k \in \mathbb{Z}$. La fonction d'ondelette $\psi \in V_1$ soit donnée par (1.17). Si

$$W_j = \overline{\text{span}} \{ \psi_{j,k}(t) \}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad (1.21)$$

alors W_j est le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} . Autrement dit,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (1.22)$$

De plus, la famille $\{ \psi_{j,k}(t) \}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthonormée pour W_j .

⁽¹⁾S. Mallat, *Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $l^2(\mathbb{R})$* , Trans. Amer. Math. Soc. 315 (1989), 69-87.

⁽²⁾Yves Meyer, *Wavelets and Operators*, Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1992.

Preuve. [1]⁽¹⁾ ■

La base de riesz ϕ_j de V_j , doit être complétée par une base $\psi_j = \{\psi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de W_j , de manière à former une base de riesz pour V_{j+1} .

Somme orthogonale infinie des espaces d'ondelettes

Théorème 1.1.2 Soit $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ est une **AMR** de $L^2(\mathbb{R})$, et $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ les espaces ondelettes sont définis par (1.21), alors:

la famille $\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Preuve. Voir l'ouvrage de [38]⁽²⁾ ■

Alors nous pouvons conclure que; pour tout $f \in L^2$,

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_j,$$

où $w_j \in W_j$, et w_j est orthogonal à w_l pour tous $j \neq l$, c'est à dire

$$\forall j \neq l, \quad W_j \perp W_l.$$

De plus, on remarque que La relation (1.16), se transpose à (1.22), pour toutes les échelles j . Alors, par itérations de cette relation, on obtient

$$W_l = V_j \oplus W_j \oplus W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_{l-1}, \quad j < l$$

En faisant tendre l vers $+\infty$ (j vers $-\infty$), on obtient deux relations

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} W_l} \quad \text{et} \quad L^2(\mathbb{R}) = V_j \oplus \overline{\bigoplus_{l \geq j} W_l}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

La réunion des bases de Riesz de chacun des espaces de ces sommes directes fournit ainsi plusieurs bases d'ondelettes:

$$\Gamma = \{\psi_{j,k}\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \Gamma_j = \{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{l,k}\}_{l \geq k, k \in \mathbb{Z}}$$

Pour tous $j \in \mathbb{Z}$, les W_j ne forment pas une famille d'espaces emboîtées comme les V_j , mais les propriétés d'invariance par translation et d'échelle sont conservées.

⁽¹⁾A.Bogges and F. J. Narcowich, *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N J, 2001.

⁽²⁾David F. Walnut, *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2002.

Projection des fonctions de V_{j+1} dans W_j

Pour se décomposer une fonction $f_{j+1} \in V_{j+1}$, nous employons le fait que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j,$$

et par la suite on écrit

$$f_{j+1} = f_j + w_j$$

où f_j et w_j sont orthogonales, telles que; f_j et w_j sont les projections orthogonales de f_{j+1} dans V_j et W_j respectivement. Nous avons déjà une formule (1.15) pour f_j . Reste à chercher une autre pour w_j , pour cela nous proposons ce qui suit:

Proposition 1.1.4 *Etant donnée $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ une AMR de $L^2(\mathbb{R})$, avec ϕ la fonction d'échelle associée, et l'espace W_j donné par (1.21), avec ψ la fonction d'ondelette correspondante.*

Supposons que $f_{j+1} \in V_{j+1}$ est de la forme:

$$f_{j+1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \cdot \phi_{j+1,k},$$

où, $\phi_{j+1,k}$ sont données par (1.4), et

$$a_k = \langle f_{j+1}, \phi_{j+1,k} \rangle.$$

Si w_j est la projection orthogonale de f_{j+1} dans W_j , alors;

$$\begin{aligned} w_j &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \cdot \psi_{j,l} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g_{k-2l} \right) \cdot \psi_{j,l} \\ w_j &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (-1)^k h_{1+2l-k} \right) \cdot \psi_{j,l} \quad (1.23) \end{aligned}$$

Chaque entier j , correspond à un niveau de résolution. c'est pourquoi l'expression "niveau de résolution j ", fera référence à l'espace W_j , où, plus généralement aux fonctions $\{\psi_{j,l}\}_{l \in \mathbb{Z}}$, et aux coefficients $\{c_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$.

Corollaire 1.1.2 *L'orthogonalité est définie sur la base des fonctions d'échelle $\{\phi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_j , et la base d'ondelettes $\{\psi_{j,k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de W_j par:*

$$\forall k, l \in \mathbb{Z}; \quad \langle \phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle = \delta_{k,l}$$

$$\forall j, k, l, m \in \mathbb{Z}; \quad \langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m}$$

$$\forall k, l \in \mathbb{Z}; \quad \langle \phi_{j,k}, \psi_{j,l} \rangle = 0$$

Reconstruction

C'est un processus simple pour retrouver $f_{j+1} \in V_{j+1}$, d'après les projections de f_{j+1} dans V_j et W_j .

Supposons que f_j et w_j , sont les projections de f_{j+1} dans V_j et W_j respectivement, alors on a les identités suivantes:

$$f_{j+1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \cdot \phi_{j+1,k}, \quad (1.24)$$

$$f_j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \cdot \phi_{j,l} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{k-2l} \right) \cdot \phi_{j,l}, \quad (1.25)$$

$$w_j(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \cdot \psi_{j,l}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \cdot (-1)^k \cdot h_{1+2l-k} \right) \cdot \psi_{j,l}(t), \quad (1.26)$$

tel que

$$f_{j+1}(t) = f_j(t) + w_j(t).$$

Nous obtenons,

$$b_l = \langle f_j(t), \phi_{j,l}(t) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \cdot h_{k-2l},$$

$$c_l = \langle w_j(t), \psi_{j,l}(t) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \cdot (-1)^k \cdot h_{1+2l-k},$$

avec

$$a_k = \langle f_{j+1}(t), \phi_{j+1,k}(t) \rangle \quad (1.27)$$

Pour la reconstruction, nous supposons que b_l, c_l sont connus, et nous utilisons ces valeurs pour déterminer les coefficients a_k , avec $k, l \in \mathbb{Z}$. En effet; d'après

$$f_{j+1}(t) = f_j(t) + w_j(t),$$

nous employons les relations (1.24 – 1.26), pour écrire

$$f_{j+1}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \cdot \phi_{j,l}(t) + c_l \cdot \psi_{j,l}(t).$$

Utilisons maintenant l'identité (1.27) on aura

$$\begin{aligned} a_k &= \langle f_{j+1}(t), \phi_{j+1,k}(t) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \cdot \phi_{j,l}(t) + c_l \cdot \psi_{j,l}(t), \phi_{j+1,k}(t) \right\rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \cdot \langle \phi_{j,l}(t), \phi_{j+1,k}(t) \rangle + c_l \cdot \langle \psi_{j,l}(t), \phi_{j+1,k}(t) \rangle. \end{aligned}$$

Nous savons que, d'après la proposition **1.1.4** on a

$$\langle \phi_{j,l}(t), \phi_{j+1,k}(t) \rangle = h_{k-2l},$$

d'autre part, si on utilise (1.20) et (1.18) on obtient:

$$\langle \psi_{j,l}(t), \phi_{j+1,k}(t) \rangle = g_{k-2l} = (-1)^k \cdot h_{1+2l-k},$$

d'où, par substitution

$$a_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \cdot h_{k-2l} + c_l \cdot (-1)^k \cdot h_{1+2l-k}. \quad (1.28)$$

Une vue fréquentielle

En pratique, le filtre d'échelle, peut être interprété comme un filtre passe-bas⁽¹⁾. D'autre part les ingénieurs se réfèrent souvent au filtre d'ondelettes comme un filtre passe-haut⁽²⁾.

⁽¹⁾ **Filtre passe-bas:** est un filtre qui supprime les hautes fréquences à partir d'une fréquence donnée.

⁽²⁾ **Filtre passe-haut:** fait l'inverse. Il supprime les fréquences basses pour ne laisser passer que, les fréquences élevées.

Fonction de transfert H pour la fonction d'échelle

Une fonction ϕ de $L^2(\mathbb{R})$, satisfait l'équation d'échelle:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k),$$

sa transformée de Fourier $\hat{\phi}(\omega)$, est défini par

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega/2} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (1.29)$$

Posons

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}, \quad (1.30)$$

alors l'équation d'échelle peut s'écrire dans le domaine de fourier comme

$$\hat{\phi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (1.31)$$

Comme $\hat{\phi}(0) \neq 0$, on peut appliquer récursivement (1.31), ce qui conduit à une relation généralisée entre la fonction d'échelle et la fonction H :

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} H\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \quad (1.32)$$

Pour la convergence de ce produit infini, il existe de nombreux auteurs, se sont intéressés à sujet, en particulier [15]⁽¹⁾

Définition 1.1.2 *La fonction H définie en (1.30), est appelée Fonction de transfert (ou symbole), elle est interprétée comme la réponse impulsionnelle d'un filtre numérique.*

$H(\omega)$ peut s'écrire comme un polynôme trigonométrique en z . Si on pose

$$z = e^{-i\omega},$$

on obtient,

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k z^k. \quad (1.33)$$

De plus, la fonction H , contient de l'information au sujet des propriétés du support de la fonction d'échelle.

⁽¹⁾M. W. Frazier. *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*. Editors S. Axler F.W. Gehring K.A. Ribert. Springer

Théorème 1.1.3 Soit ϕ la fonction d'échelle a support compact, dans laquelle produite une **AMR**, alors;

$$\overline{\text{supp}(\phi)} = [0, N] \quad \forall N \geq 1 \quad (1.34)$$

si et seulement si,

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^N h_k z^k$$

Preuve. [38]⁽¹⁾ ■

Soit $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ une **AMR** de $L^2(\mathbb{R})$, ϕ la fonction d'échelle associé, alors on a les propriétés;

(a) $\|\hat{\phi}\| = 1$ (b) $\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (c) $H(0) = 1$ (d) H est une fonction 2π -periodique telle que,

$$H(\omega + 2\pi n) = H(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

La fonction de stabilité

Définition 1.1.3 On définit une fonction 2π -périodique notée **A**, et appelée fonction de stabilité par:

$$\mathbf{A}(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\omega + 2\pi l) \right|^2 \quad (1.35)$$

Cette fonction, nous permet d'assurer l'orthogonalité de $\{\phi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, en terme de $\hat{\phi}(\omega)$. plus précisément, pour mieux comprendre, il suffit de voir le théorème suivant:

Théorème 1.1.4 Soit $\phi(t)$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Alors, la famille $\{\phi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormal, si et seulement si, **A** est une fonction constante. En particulier nous avons;

$$\mathbf{A}(\omega) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\omega + 2\pi l) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (1.36)$$

Preuve. Voir [32]⁽²⁾ ■

⁽¹⁾D. F. Walnut, *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2002

⁽²⁾David K.Ruch and Patrick J.van Fleet *Wavelet Theory An Elementary Approach with Application*. Wiley.Canada 2009

Corollaire 1.1.3 *Supposons que ϕ la fonction d'échelle produit une AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$, alors;*

$$\hat{\phi}(2\pi l) = 0 \quad \forall l \neq 0$$

Preuve. On a,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\omega + 2\pi l) \right|^2 = \left| \hat{\phi}(\omega) \right|^2 + \sum_{l \neq 0} \left| \hat{\phi}(\omega + 2\pi l) \right|^2$$

Dans le cas $\omega = 0$: alors, par substitution on obtient,

$$\mathbf{A}(0) = \left| \hat{\phi}(0) \right|^2 + \sum_{l \neq 0} \left| \hat{\phi}(2\pi l) \right|^2.$$

D'autre part, d'après la propriété (b), on a $\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Mais, $\mathbf{A}(0) = \frac{1}{2\pi}$, d'où:

$$\hat{\phi}(2\pi l) = 0 \quad \forall l \neq 0$$

■

Remarque 1.1.1 *Une autre conséquence tirée d'après le théorème 1.1.4, c'est bien la relation (1.8). Cela signifie que nous pouvons écrire la constante, comme une somme de $\phi(t - k)$ termes, pour toute fonction d'échelle ϕ . C'est une approximation utile comme propriété de la fonctions d'échelle.*

Théorème 1.1.5 *Soit $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ et \mathbf{A} la fonction de stabilité définit en (1.35), alors la famille $\{\phi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base de riesz de V_0 , si et seulement s'il existe des constantes $0 < \alpha < \beta$ telle que $\alpha < \mathbf{A}(\omega) < \beta$.*

Preuve. Il y'a plusieurs auteurs qu'ils ont travaillé sur ce sujet, en particulier [32]⁽¹⁾ ■

⁽¹⁾David K.Ruch and Patrick J.van Fleet Wavelet Theory *An Elementary Approach with Application*. Wiley. Canada 2009

L'orthogonalité et la fonction H

Théorème 1.1.6 *On considère ϕ , la fonction d'échelle produit une AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$, alors sa fonction de transfert H satisfait:*

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (1.37)$$

Preuve. Voir [25]⁽¹⁾ ■

Les propriétés de filtre d'échelle ((i), (ii), (iii), voir page 10), peuvent également être écrites en termes du fonction de transfert H , par la relation (1.37), qu'elle appelée condition de quadrature. Si nous posons

$$z = e^{-i\omega},$$

la condition d'orthogonalité (1.37), peut s'écrire comme

$$|H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1.$$

De plus, le polynôme $H(z)$, doit contenir un facteur de $1 + z$.

Théorème 1.1.7 *Supposons qu'une fonction de transfert H de degré fini satisfait (1.37), $H(0) = 1$, et $H(z)$ à la forme*

$$H(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^N \cdot S(z)$$

Où,

$$\max_{|z|=1} |S(z)| \leq 2^{N-1} \quad (1.38)$$

Alors il existe une fonction d'échelle ϕ , génère une AMR $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$, telle que H représente sa fonction de transfert.

Fonction de transfert G pour la fonction d'ondelette

Nous avons vu que la fonction de transfert H , peut être utilisée pour déterminer, si ϕ est orthogonale à ses translatées entières, et solutionner l'équation d'échelle. Il s'avère que la fonction de transfert G pour la fonction d'ondelette ψ , peut être employée d'une manière semblable.

⁽¹⁾S.Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Editions de L'Ecole polytechnique Décembre 2009. 91128 Palaiseau Cedex

Définition 1.1.4 Soit ψ fonction ondelette satisfait l'équation (1.17), nous définissons la fonction de transfert G associée à ψ comme:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \cdot e^{-ik\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \cdot h_{1-k} \cdot e^{-ik\omega} \quad (1.39)$$

Si nous posons $z = e^{-i\omega}$, $G(\omega)$ devient

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \cdot h_{1-k} \cdot z^k \quad (1.40)$$

Proposition 1.1.5 Soit ϕ fonction d'échelle produit une **AMR** $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$, et la fonction ondelette ψ définie par (1.17). Alors pour tout $\omega \in \mathbb{R}$;

- (a) $\hat{\psi}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$
- (b) $G(\omega) = -e^{-i\omega} \cdot \overline{H(\omega + \pi)}$
- (c) $G(0) = 0$
- (d) pour $z = e^{-i\omega}$, le polynôme $G(z)$ doit avoir le facteur $1 - z$.

De plus, si \mathbf{h} et \mathbf{g} , les filtre d'échelle et d'ondelette (resp.), alors nous avons :

- (i) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \cdot h_{1-k} = 0$
- (ii) $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Théorème 1.1.8 On considère $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ une **AMR** de $L^2(\mathbb{R})$, avec les fonctions d'échelle ϕ et ondelette ψ , alors leurs polynômes associés $H(\omega)$ et $G(\omega)$ ont satisfait les relations suivantes:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad |G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (1.41)$$

$$H(\omega) \cdot \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \cdot \overline{G(\omega + \pi)} = 0 \quad (1.42)$$

Maintenant comme nous savons, $\hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, pour la fonction ϕ , on peut calculer $\hat{\psi}(0)$ à partir de la fonction G . telle que

$$\hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \cdot dt = 0. \quad (1.43)$$

L'**AMR** de Haar est orthonormée. Elle est très simple, et les algorithmes qui l'utilisent sont très rapides, mais dans certaines applications on souhaite que la fonction ϕ soit plus lisse. On utilise alors par exemple les **AMR** orthonormées construites

par I. Daubechies[8]⁽¹⁾. Leur inconvénient est d'avoir un support un peu plus grand (*mais toujours compact*), et surtout de ne pas être symétriques. L'**AMR** de Haar est la seule **AMR** orthonormée dont la fonction ϕ est à support compact et symétrique. Pour compenser ce défaut, on peut satisfaire des **AMR** non orthonormales. si bien que les familles d'ondelettes non orthogonales ont reçu l'appellation d'ondelettes biorthogonales. D'abord ils existent deux bases d'ondelettes sont utilisées, une pour l'analyse (*la base duale*) et l'autre pour la reconstruction.

1.2 Bases biorthogonales

1.2.1 Analyse multirésolution biorthogonale

Définition 1.2.1 Soient $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ deux sous-espaces de $L^2(\mathbb{R})$, satisfaisant chacune, les critères ((a) – (e)) de la définition 1.1.1.

Si la famille $\{\phi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de Riesz de l'espace V_0 qu'elle engendre, et que la famille $\{\tilde{\phi}(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de Riesz de \tilde{V}_0 . Alors, nous disons que $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ forment une multirésolution biorthogonales de $L^2(\mathbb{R})$, avec la condition de dualité suivante: (voir[5]⁽²⁾)

$$\left\langle \tilde{\phi}(t - m), \phi(t - k) \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}(t - k) \cdot \phi(t - k) dt = \delta_{m,k} ; \quad \forall m, k \in \{0, 2^j - 1\}. \quad (1.44)$$

De plus, on dit que les deux familles $\{\tilde{\phi}(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\phi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont orthogonales entre elles.

nous définissons les espaces duals \tilde{V}_j et V_j comme suit:

$$\tilde{V}_j = \overline{\text{span}} \left\{ \tilde{\phi}_{j,k}(t) \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad V_j = \overline{\text{span}} \left\{ \phi_{j,k}(t) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad (1.45)$$

avec

$$\tilde{\phi}_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \tilde{\phi}(2^j t - k) \quad \text{et} \quad \phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \phi(2^j t - k). \quad (1.46)$$

⁽¹⁾I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.

⁽²⁾A. Cohen. *Wavelet Methods in Numerical Analysis*, volume VII. In handbook of numerical analysis edition, 1999.

Autrement dit que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\{\tilde{\phi}_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont des espaces de Riesz de \tilde{V}_j et V_j (resp.).

$\tilde{\phi}$ et ϕ : sont les fonctions d'échelles satisfaisant les équations de la dilatation:

$$\tilde{\phi}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k \tilde{\phi}(2t - k) \quad \text{et} \quad \phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k) \quad (1.47)$$

Projections biorthogonales

Définition 1.2.2 Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, \tilde{V}_j l'espace dual de V_j .

les projections de f dans \tilde{V}_j et V_j est donné par:

$$\tilde{f}_j(t) = \tilde{P}_{f,j}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_{j,k} \cdot \tilde{\phi}_{j,k}(t) \quad \text{et} \quad f_j(t) = P_{f,j}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \cdot \phi_{j,k}(t)$$

où,

$$\tilde{a}_{j,k} = \langle f(t), \tilde{\phi}_{j,k}(t) \rangle \quad \text{et} \quad a_{j,k} = \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle$$

Théorème 1.2.1 Soient $\tilde{\phi}$ et ϕ des fonctions de type (1.47). Ces fonctions sont des générateurs duales si et seulement si:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_l \cdot h_{l-2k} = \delta_{k,0} \quad (1.48)$$

De manière analogue à ceux détaillés dans la section précédente, on peut définir les fonctions d'ondelettes $\tilde{\psi}$ et ψ comme:

$$\tilde{\psi}(t) = \sqrt{2} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_k \tilde{\phi}(2t - k) \quad \text{et} \quad \psi(t) = \sqrt{2} \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2t - k), \quad (1.49)$$

avec

$$\tilde{g}_k = (-1)^k \cdot \tilde{h}_{1-k} \quad \text{et} \quad g_k = (-1)^k \cdot h_{1-k}, \quad (1.50)$$

et

$$\tilde{\psi}_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \tilde{\psi}(2^j t - k) \quad \text{et} \quad \psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \cdot \psi(2^j t - k). \quad (1.51)$$

Les deux familles d'ondelettes $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment des bases de deux espaces de détails \tilde{W}_j et W_j (resp.). C'est à dire;

$$\tilde{W}_j = \overline{\text{span}} \left\{ \tilde{\psi}_{j,k}(t) \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad W_j = \overline{\text{span}} \left\{ \psi_{j,k}(t) \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad (1.52)$$

vérifiant:

$$\tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j \quad \text{et} \quad V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

avec

$$\tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j+1} \quad \text{et} \quad V_j \subset V_{j+1}.$$

La biorthogonalité de la décomposition implique que W_j est orthogonal à \tilde{V}_j , mais à priori W_j n'est pas orthogonal à V_j , de même \tilde{W}_j est orthogonal à V_j et non à \tilde{V}_j dans le cas général. Autrement dit que les sous espaces complémentaires sont définis différemment, puisqu'ils sont complémentaires au sous espaces duals.

$$\tilde{V}_j \perp W_j \quad \text{et} \quad \tilde{W}_j \perp V_j \quad (1.53)$$

Et par conséquent,

$$\tilde{W}_j \perp W_k \quad \text{pour} \quad j \neq k$$

Cela se traduit dans le choix des fonctions d'échelle et ondelettes par

$$\langle \phi_{j,k}(t), \tilde{\phi}_{j,l}(t) \rangle = \delta_{k,l} \quad \forall k, l \in \mathbb{Z} \quad (1.54)$$

$$\langle \psi_{j,k}(t), \tilde{\psi}_{l,m}(t) \rangle = \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m} ; \quad \forall j, k, l, m \in \mathbb{Z} \quad (1.55)$$

$$\langle \phi_{j,k}(t), \tilde{\psi}_{j,l}(t) \rangle = 0 ; \quad \forall k, l \in \mathbb{Z} \quad (1.56)$$

$$\langle \tilde{\phi}_{j,k}(t), \psi_{j,l}(t) \rangle = 0 ; \quad \forall k, l \in \mathbb{Z} \quad (1.57)$$

Dans ces conditions nous disons que $(\phi, \tilde{\phi}, \psi, \tilde{\psi})$, est un système biorthogonal.

Décomposition et reconstruction

Soient $\tilde{\phi}$ et ϕ les fonctions d'échelle qui produisent une **AMRB** $\{\tilde{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ et $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ avec les fonctions d'ondelettes $\tilde{\psi}$, ψ associées (*resp.*).

Décomposition

Proposition 1.2.1 *Pour tout $j, k, l \in \mathbb{Z}$ on a:*

$$\phi_{j,k}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} \cdot \phi_{j+1,l}(t) \quad \text{et} \quad \tilde{\phi}_{j,k}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{l-2k} \cdot \tilde{\phi}_{j+1,l}(t),$$

de même pour

$$\psi_{j,k}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} \cdot \phi_{j+1,n}(t) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}_{j,k}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{n-2k} \cdot \phi_{j+1,n}(t),$$

tels que les coefficients h_k, \tilde{h}_k et g_k, \tilde{g}_k sont définis par (1.47) et (1.49) respectivement.

Preuve. Voir l'ouvrage de [38]⁽¹⁾ ■

La proposition suivante montre comment déterminer f_j et g_j (resp. \tilde{f}_j et \tilde{g}_j), à partir la connaissance de f_{j+1} (resp. \tilde{f}_{j+1}).

Proposition 1.2.2 *Supposons que $f_{j+1} \in V_{j+1}$ et $\tilde{f}_{j+1} \in \tilde{V}_{j+1}$ prennent les formes*

$$f_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j+1,k} \cdot \phi_{j+1,k}(t) \quad \text{et} \quad \tilde{f}_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_{j+1,k} \cdot \tilde{\phi}_{j+1,k}(t). \quad (1.58)$$

Alors les projections de f_{j+1} et \tilde{f}_{j+1} dans V_j et \tilde{V}_j (resp.) est;

$$f_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \cdot \phi_{j,k}(t) \quad \text{et} \quad \tilde{f}_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_{j,k} \cdot \tilde{\phi}_{j,k}(t).$$

D'autre part, les projections de f_{j+1} et \tilde{f}_{j+1} dans W_j et \tilde{W}_j (resp.) est comme suit

$$g_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \cdot \phi_{j,k}(t) \quad \text{et} \quad \tilde{g}_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_{j,k} \cdot \tilde{\phi}_{j,k}(t),$$

où,

$$a_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{l-2k} \cdot a_{j+1,l} \quad \text{et} \quad c_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{l-2k} \cdot a_{j+1,l}$$

et

$$\tilde{a}_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} \cdot \tilde{a}_{j+1,l} \quad \text{et} \quad \tilde{c}_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{l-2k} \cdot \tilde{a}_{j+1,l}$$

Preuve. [32]⁽²⁾ ■

⁽¹⁾David F. Walnut, *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2002.

⁽²⁾D. K. Ruch and P. J. van Fleet, *Wavelet Theory, An Elementary Approach with Application*. Wiley.Canada 2009

Reconstruction

La reconstruction multi-échelles consiste à faire le travail inverse.

Supposons que nous avons une fonction $f \in V_{j+1}$ dont les coefficients de sa projection sont

$$a^j = \{a_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ dans } V_j \quad \text{et} \quad c^j = \{c_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ dans } W_j.$$

La question qui se pose est; comment déterminer les coefficients $\{a_{j+1,m}\}$ de f dans V_{j+1} ? Pour résoudre ce problème, nous avons besoin d'imiter l'algorithme de la reconstruction dans le cadre orthogonal, qui utilise les équations d'échelle de la proposition 1.2.1, alors:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \cdot \phi_{j,k}(t) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \cdot \psi_{j,k}(t),$$

d'où

$$\begin{aligned} \langle f(t), \tilde{\phi}_{j+1,m}(t) \rangle &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \langle \phi_{j,k}(t), \tilde{\phi}_{j+1,m}(t) \rangle + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \langle \psi_{j,k}(t), \tilde{\phi}_{j+1,m}(t) \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} \langle \phi_{j+1,l}(t), \tilde{\phi}_{j+1,m}(t) \rangle + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{l-2k} \langle \phi_{j+1,l}(t), \tilde{\phi}_{j+1,m}(t) \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} h_{m-2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} g_{m-2k} \end{aligned}$$

mais,

$$\langle f(t), \tilde{\phi}_{j+1,m}(t) \rangle = a_{j+1,m},$$

alors la formule de la reconstruction devient

$$a_{j+1,m} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} h_{m-2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} g_{m-2k} \quad (1.59)$$

Remarque 1.2.1 *La reconstruction multi-échelles consiste à calculer f à partir de son approximation la plus grossière de tous ses détails. Cela est rendu possible grâce aux relations de reconstruction satisfaites par ϕ et $\tilde{\phi}$:*

$$\begin{aligned} \phi_{j+1,m} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{m-2k} \cdot \phi_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{m-2k} \cdot \psi_{j,k} \\ \tilde{\phi}_{j+1,m} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \cdot \tilde{\phi}_{j,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{m-2k} \cdot \tilde{\psi}_{j,k} \end{aligned}$$

Condition de biorthogonalité dans le domaine fréquentiel

Nous souhaitons maintenant relier la condition concernant les filtres \mathbf{h} et $\tilde{\mathbf{h}}$ (voir (1.48)), pour les fonctions d'échelle duales ϕ et $\tilde{\phi}$, à leurs fonctions de transfert H et \tilde{H} (*resp.*). D'abord nous dérivons une similarité à théorème **1.2.1**.

On sait que la relation,

$$\forall \omega \in \mathbb{R}; \quad |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1,$$

est équivalente à

$$\forall \omega \in \mathbb{R}; \quad H(\omega) \cdot |H(\omega)| + H(\omega + \pi) \cdot |H(\omega + \pi)| = 1.$$

Dans le cas biorthogonal nous avons deux fonctions de transfert:

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k \cdot e^{-ik\omega} \quad \text{et} \quad H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \cdot e^{-ik\omega}, \quad (1.60)$$

en utilisant (1.48), alors la condition d'orthogonalité généralise à:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}; \quad \tilde{H}(\omega) \cdot \overline{H(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \cdot \overline{H(\omega + \pi)} = 1. \quad (1.61)$$

Si nous posons $z = e^{-i\omega}$ alors l'équation (1.61) devient:

$$\tilde{H}(z) \cdot H(z^{-1}) + \tilde{H}(-z) \cdot H(-z^{-1}) = 1, \quad (1.62)$$

avec $\tilde{H}(z)$, et $H(z)$ sont des polynômes trigonométriques.

Un résultat de D.k.Ruch et P.J.van Fleet, montre que si \tilde{H}, H , les fonctions des transfert définies par (1.60) et satisfaisant (1.61), alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_l \cdot h_{l-2k} = \delta_{k,0}.$$

On note par \tilde{G} et G les fonctions des transfert pour $\tilde{\psi}$ et ψ telle que:

$$\tilde{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_k \cdot e^{-ik\omega} \quad \text{et} \quad G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \cdot e^{-ik\omega} \quad (1.63)$$

\tilde{g}_k, g_k les filtres associés.

Avec $\tilde{H}(\omega)$, $\tilde{G}(\omega)$ est similaire à $H(\omega)$, $G(\omega)$ elles vérifient les relations suivantes:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \left. \begin{aligned} \tilde{H}(\omega) \cdot \overline{H(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \cdot \overline{H(\omega + \pi)} &= 1 \\ \tilde{G}(\omega) \cdot \overline{G(\omega)} + \tilde{G}(\omega + \pi) \cdot \overline{G(\omega + \pi)} &= 1 \\ \tilde{G}(\omega) \cdot \overline{H(\omega)} + \tilde{G}(\omega + \pi) \cdot \overline{H(\omega + \pi)} &= 0 \\ \tilde{H}(\omega) \cdot \overline{G(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \cdot \overline{G(\omega + \pi)} &= 0 \end{aligned} \right\} (1.64)$$

Nous imposons que $\tilde{H}(\omega)$, $H(\omega)$ vérifient (1.60) et $\tilde{G}(\omega)$, $G(\omega)$ données par

$$\tilde{G}(\omega) = -e^{-i\omega} \cdot \overline{H(\omega + \pi)} \quad \text{et} \quad G(\omega) = -e^{-i\omega} \cdot \overline{\tilde{H}(\omega + \pi)} \quad (1.65)$$

Alors, les relations:

$$\tilde{G}(\omega) \cdot \overline{G(\omega)} + \tilde{G}(\omega + \pi) \cdot \overline{G(\omega + \pi)} = 1 \quad (1.66)$$

$$\tilde{H}(\omega) \cdot \overline{G(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \cdot \overline{G(\omega + \pi)} = 0 \quad (1.67)$$

$$H(\omega) \cdot \overline{\tilde{G}(\omega)} + H(\omega + \pi) \cdot \overline{\tilde{G}(\omega + \pi)} = 0 \quad (1.68)$$

Sont satisfaites.

Les filtres \tilde{g} , et g associés à $\tilde{G}(\omega)$, et $G(\omega)$ (*resp.*) données par (1.63), sont définis par;

$$\tilde{g}_k = (-1)^k \cdot h_{1-k} \quad \text{et} \quad g_k = (-1)^k \cdot \tilde{h}_{1-k} \quad (1.69)$$

Comme nous avons vus dans le théorème 1.2.1, le lien entre les filtres $\tilde{\mathbf{h}}$ et \mathbf{h} d'une part, et les fonctions de transferts \tilde{H} et H d'une autre, existent aussi des relations également pour les fonctions \tilde{G} et G . En effet, si \tilde{G} , et G sont données par (1.65), alors $\forall k \in \mathbb{Z}$;

$$\tilde{H}(\omega) \cdot \overline{G(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \cdot \overline{G(\omega + \pi)} = 0 \iff \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{j-2k} \cdot g_j = 0, \quad (1.70)$$

et

$$\tilde{G}(\omega) \cdot \overline{H(\omega)} + \tilde{G}(\omega + \pi) \cdot \overline{H(\omega + \pi)} = 0 \iff \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{j-2k} \cdot h_j = 0. \quad (1.71)$$

Proposition 1.2.3 *En outre si \tilde{H} et H satisfont le théorème 1.2.1, alors*

$$\tilde{G}(\omega) \cdot \overline{G(\omega)} + \tilde{G}(\omega + \pi) \cdot \overline{G(\omega + \pi)} = 1 \iff \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_j \cdot g_{j-2k} = \delta_{k,0} \quad (1.72)$$

Nous sommes maintenant en position de définir formellement des filtres biorthogonal. En particulier, intéressé en construisant des paires, filtres d'échelles $(\tilde{\mathbf{h}}, \mathbf{h})$ et des filtres d'ondelettes $(\tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{g})$ pour les applications.

Définition 1.2.3 *Supposons que $\tilde{\mathbf{h}}, \mathbf{h}$ associés à \tilde{H} et H (resp.), vérifiant;*

$$\tilde{H}(\omega) \cdot \overline{H(\omega)} + \tilde{H}(\omega + \pi) \cdot \overline{H(\omega + \pi)} = 1, \quad (1.73)$$

avec

$$H(\pi) = \tilde{H}(\pi) = 0 \quad \text{et} \quad H(0) = \tilde{H}(0) = 0. \quad (1.74)$$

Alors nous disons que $\tilde{\mathbf{h}}$ et \mathbf{h} forme un pair de filtre biorthogonal.

Filtres symétrique

Définition 1.2.4 *Posons $\mathbf{h} = (h_l, \dots, h_L)$, composée de N filtres h_k , avec $h_k = 0$ pour $k < l$ et $k > L$. Nous disons que \mathbf{h} est un filtre symétrique si;*

$$h_k = \begin{cases} h_{-k} & \text{si } N \text{ impair} \\ h_{1-k} & \text{si } N \text{ pair} \end{cases} \quad (1.75)$$

Définition 1.2.5 *On considère un entier naturel n non nul. nous définissons le filtre spline $\tilde{\mathbf{h}}$ de la longueur $n + 2$, comme*

$$\tilde{h}_k = \frac{\sqrt{2}}{2^{n+2}} \cdot \begin{cases} \binom{n+1}{\frac{n+1}{2} - k} & \text{si } n \text{ impair avec } k = -\frac{n+1}{2}, \dots, \frac{n+1}{2} \\ \binom{n+1}{\frac{n}{2} + k} & \text{si } n \text{ paire avec } k = -\frac{n}{2}, \dots, \frac{n}{2} + 1 \end{cases} \quad (1.76)$$

Pour les autres valeurs de k , on se donne $\tilde{h}_k = 0$.

Remarque 1.2.2 *La relation (1.75) reste vraie si on remplace h_k par \tilde{h}_k .*

1.2.2 Algorithme d'analyse et de synthèse de Mallat

On pratique, pour aboutir à la décomposition ou à la reconstruction d'un signal, on utilise le plus souvent un algorithme en cascade dû à S. Mallat.

• **Pour la décomposition:**

Cet algorithme permet de calculer la suite des coefficients

$$a^j = \left\{ a_{j,k} = \langle f, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle \right\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad c^j = \left\{ c_{j,k} = \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \right\}_{k \in \mathbb{Z}},$$

à partir les coefficients

$$a^{j+1} = \{a_{j+1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Pour y parvenir, on utilise les relations suivantes:

$$a_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{l-2k} \cdot a_{j+1,l} \quad \text{et} \quad c_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{l-2k} \cdot a_{j+1,l}$$

Schématiquement nous pouvons résumer cet algorithme comme suit:

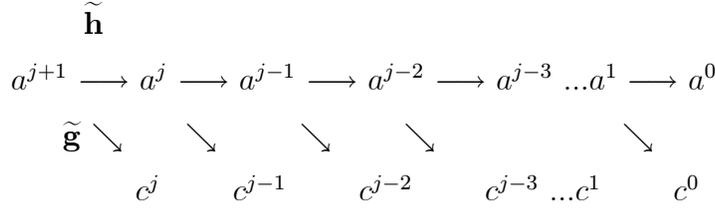


Figure 1.1 algorithme de pyramide biorthogonal

• **Pour la reconstruction :**

La transformer inverse se calcule en utilisant la formule de la reconstruction,

$$a_{j+1,m} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j,k} \cdot h_{m-2k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \cdot g_{m-2k}$$

Son algorithme correspond aussi schématiquement à:

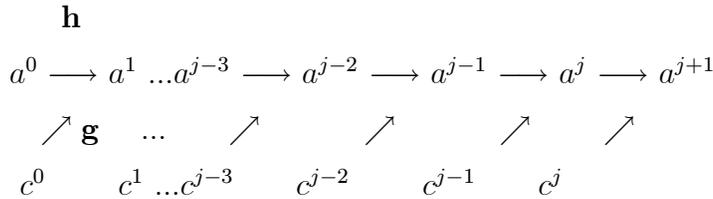


Figure 1.2 algorithme de pyramide biorthogonal inverse

Remarque 1.2.3 *Le pair de filtre (\mathbf{h}, \mathbf{g}) est utilisé pour ce processus de la reconstruction, par contre $(\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{g}})$ utilisé pour la décomposition. D'autre part, pour obtenir un Algorithme d'analyse et de synthèse de Mallat, dans le cas orthogonal, il suffit de prendre $\tilde{\phi} = \phi$ et $\tilde{\psi} = \psi$, car le cas biorthogonal, c'est le cas plus général.*

1.2.3 La régularité, le nombre de moments nuls

Dans la théorie des ondelettes il y'a plusieurs propriétés souhaitées pour une ondelette comme; l'orthogonalité, compacité du support, la taille du support (*minimum*), la symétrie, l'interpolation, ect... . Malheureusement, il n'est toujours pas possible de construire des ondelettes ayant toutes ces dernières. En particulier, il existe deux caractéristiques importantes: le nombre de moments nuls et la régularité.

L'introduction des contraintes de régularité dans la construction des ondelettes, permet d'améliorer la qualité de la reconstruction. Le nombre de moments nuls, caractérise la puissance d'approximation des ondelettes. Alors il existe une interdépendance entre les deux: le nombre de moments nuls de l'ondelette duale $\tilde{\psi}$ d'une part, et la régularité de l'ondelette d'autre part. Yves Meyer a montré que si une ondelette était p fois dérivable, l'ondelette duale avait nécessairement $p + 1$ moments nuls. La réciproque est fautive : l'ordre de régularité d'une ondelette peut être bien inférieur au nombre de moments nuls de l'ondelette duale.

Définition 1.2.6 *Le nombre de moments nuls d'une ondelette s'exprime de la manière suivante:*

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \cdot \psi(t) dt \quad \text{pour } 0 \leq k < p$$

dans ce cas nous disons que ψ a p moments nuls. Cela signifie que ψ est orthogonale à tous les polynômes de degré $p - 1$.

L'intérêt d'avoir p moment nul est d'obtenir des coefficients d'ondelettes $\langle f, \psi_{j,n} \rangle$ proche de zéro aux échelles fines 2^j . Effectivement, si f est localement de classe C^k alors $f(t)$ est localement bien approximé par un polynôme de Taylor de degré k , et si $k < p$ alors les ondelettes seront orthogonales à ce polynôme donc la transformée en ondelettes aura des petites valeurs proche de zéro.

1.3 Approche optimale

La majorité des méthodes de traitement d'image, dépend par les bases d'ondelettes et leurs propriétés d'approximation. Ces dernières sont des familles, qui nous offrent une représentation claire, pour la variété des fonctions régulières par morceaux (*image, signal, dans la pratique*), et de plus elles nous permettent d'identifier et de reconnaître des informations concernant la régularité de notre fonction. Dans cette section, nous proposons un exemple parmi une large classe de fonctions qui nécessitent les bases d'ondelettes non stationnaire.

1.3.1 Analyse du problème

Dans la théorie de l'approximation, il est important de choisir, dans un espace de fonctions donné, une base bien adaptée au problème traité. L'utilisation d'une base orthonormale, permet de rapprocher efficacement une fonction, avec seulement quelques nombres de vecteurs.

Dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}^{(1)}$ séparable, un signal f , est rapproché par:

$$f_m = \sum_{k=0}^{m-1} \langle f, e_{n_k} \rangle \cdot e_{n_k}, \quad (1.77)$$

où, les m vecteurs $\{e_{n_k}\}_{k=1, \dots, m-1}$, sont choisis de manière adaptative dans une base orthonormale $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{H} .

L'erreur d'approximation est donnée par:

$$\varepsilon_m(f) = \|f - f_m\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k \geq m} |\langle f, e_{n_k} \rangle|^2 \quad (1.78)$$

Le choix optimal f_m (qui réduit au minimum) correspond à l'ordre croissant de $\{e_{n_k}\}_{k=1, \dots, m-1}$, telle que:

$$|\langle f, e_{n_k} \rangle| \geq |\langle f, e_{n_{k+1}} \rangle|, \quad k \in \mathbb{N} \quad (1.79)$$

En admettant que, pour des constantes $C > 0$, et $r > 1/2$ on a:

$$|\langle f, e_{n_k} \rangle| \leq C \cdot k^{-r}, \quad k \geq m \quad (1.80)$$

⁽¹⁾ \mathcal{H} : est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, complet par rapport à la métrique induite.

Un peu de calcul:

La relation (1.80), implique

$$|\langle f, e_{n_k} \rangle|^2 \leq C^2 \cdot k^{-2r}, \quad k \geq m. \quad (1.81)$$

d'où,

$$\sum_{k \geq m} |\langle f, e_{n_k} \rangle|^2 \leq \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{C^2}{k^{2r}} \leq \int_m^{+\infty} \frac{C^2}{x^{2r}} dx,$$

mais

$$\int_m^{+\infty} \frac{C^2}{x^{2r}} dx = \frac{C^2}{2r-1} \cdot m^{1-2r}, \quad 2r-1 > 0,$$

alors

$$\sum_{k \geq m} |\langle f, e_{n_k} \rangle|^2 = \varepsilon_m(f) \leq \frac{C^2}{2r-1} \cdot m^{1-2r}. \quad (1.82)$$

D'abord, nous souhaitons m le plus petit possible pour obtenir une bonne approximation.

1.3.2 La nécessité des bases non stationnaire

Rappelons d'abord que, la base d'ondelette orthonormale

$$\{\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \cdot \psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$$

(avec support compact), est une famille particulière qui représente efficacement des signaux régulières par morceaux.

En premier, nous considérons l'exemple suivant:

$$X(t) = P(t) \cdot \chi_{[0,1]}(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.83)$$

où, $P(t)$: est un polynôme de degré $\leq N-1$.

Nous décomposons le signal X , sur la base orthonormale d'une ondelette mère ψ , à N moments nuls:

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \cdot \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (1.84)$$

La décomposition d'ondelette du signal X est donnée par:

$$X = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle X, \psi_{j,k} \rangle \cdot \psi_{j,k}. \quad (1.85)$$

Les moments nulles des fonctions $\psi_{j,k}$ montrent:

$$\langle X, \psi_{j,k} \rangle = 0, \quad \text{si } \text{int}(I_{j,k}) \cap \{0, 1\} = \emptyset \quad (1.86)$$

où

$$I_{j,k} = \text{supp}(\psi_{j,k}), \quad (1.87)$$

telle que (1.84), implique

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \cdot \psi_{j,k} dt = 0, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.88)$$

d'où

$$\int_{I_{j,k}} t^k \cdot \psi_{j,k} dt = 0, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.89)$$

Il signifie que, tous les coefficients d'ondelette, sont localisés autour 0 et 1. Ainsi, nous avons une représentation compacte de X .

Généralisation:

Cette propriété, peut être généralisée pour les signaux réguliers par morceaux f .

En effet;

En applique la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N-2} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a) (x-a)^i + \frac{1}{(N-1)!} \int_a^x f^{(N)}(t) (t-a)^{N-1} dt \quad (1.90)$$

Pour les grandes échelle 2^j , nous avons

$$\langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle = \int_{I_{j,k}} f(x) \cdot \psi_{j,k}(x) dt \quad (1.91)$$

$$\begin{aligned} \langle f(x), \psi_{j,k}(x) \rangle &= \int_{I_{j,k}} \left[\sum_{i=0}^{N-2} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a) (x-a)^i + \frac{1}{(N-1)!} \int_{2^{-j}k}^x (t-2^{-j}k)^{N-1} \cdot f^{(N)}(t) dt \right] \cdot \psi_{j,k}(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{N-2} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a) \left[\int_{I_{j,k}} (x-a)^i \cdot \psi_{j,k}(x) dx \right] + \\ &\quad \frac{1}{(N-1)!} \int_{I_{j,k}} \int_{2^{-j}k}^x (t-2^{-j}k)^{N-1} \psi_{j,k}(x) f^{(N)}(t) dt dx \end{aligned} \quad (1.92)$$

En applique, les propriétés des moments nuls, on obtient

$$\langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{I_{j,k}} \int_{2^{-j}k}^x \frac{(t - 2^{-j} \cdot k)^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \psi_{j,k}(x) \cdot f^{(N)}(t) dt \cdot dx \quad (1.93)$$

Plus précisément, on a:

$$\begin{aligned} |\langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle| &= \left| \int_{I_{j,k}} \int_{2^{-j}k}^x \frac{(t - 2^{-j}k)^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \psi_{j,k}(x) \cdot f^{(N)}(t) dt \cdot dx \right| \\ &\leq \frac{1}{(N-1)!} \int_{I_{j,k}} \int_{2^{-j}k}^x |\psi_{j,k}(x)| \cdot \left| (t - 2^{-j}k)^{N-1} \right| \cdot |f^{(N)}(t)| dx dt \\ |\langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle| &\leq \gamma_{N,p} \cdot (2^{-j})^{N-1/p} \cdot \|f^{(N)}\|_{L^p(I_{j,k})} \end{aligned} \quad (1.94)$$

où, $\gamma_{N,p}$: est une constante, indépendante de f .

Remarque 1.3.1 Cette inégalité montre que, si f est régulière par morceaux, alors on peut réarranger la suite $\{|\langle f, \psi_{j,k} \rangle|\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, telle que nous pouvons maîtriser la condition (1.80), (et d'ailleurs (1.82)), suivant un constant r qui lié à la régularité de f .

Conclusion 1.3.1 Cette remarque nous montre que, les coefficients $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$, dépendent de la fonction $f^{(N)}$.

Maintenant, afin d'illustrer ce fait, nous considérons un autre exemple comme suit:

$$Y(t) = \cos(\omega t) \cdot \chi_{[0,1]}(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.95)$$

tel que ω , est un nombre positif. Nous avons:

$$Y^{(N)}(t) = \omega^N \cdot Y_N(t) \quad (1.96)$$

Où Y_N : est une fonction bornée, définie par:

$$Y_N(t) = \begin{cases} (-1)^k \cdot \cos(\omega t) \cdot \chi_{[0,1]}(t) & \text{si } N = 2k \\ (-1)^{k+1} \cdot \sin(\omega t) \cdot \chi_{[0,1]}(t) & \text{si } N = 2k + 1 \end{cases} \quad (1.97)$$

La fonction Y est très oscillante, si la fréquence ω , est grande. Puis l'amplitude des coefficients $|\langle f, \psi_{j,k} \rangle|$, devient très grande aussi. En effet;

Le coefficient C en (1.82), dépend de la fonction $Y^{(N)}$, et devient très grand, lorsque Y dispose d'un motif très oscillant, c'est-à-dire ω , est grande.

Plus précisément, nous avons:

$$C \approx \gamma_{N,p} \cdot \omega^N \cdot \|Y_N\|_{L^p([0,1])} \quad (1.98)$$

Dans ce cas, nous déduisons le suivant:

- l'inégalité (1.82), n'en donne pas, garantie sur la qualité de l'approximation, pour les petites valeurs de m .
- Les égalités (1.93) et (1.96), montrent que la fonction est sensible aux oscillations de Y .

On peut considérer la norme $\|Y_N\|_{L^p([0,1])}$, comme un moyen de mesure de ces oscillations, relativement à la norme fonctionnelle $\|\cdot\|_{L^p([0,1])}$.

Une question naturelle à se poser est:

peut-on trouver une base qui donne une représentation raisonnable du signal Y ?

Le travail qui est présenté par le professeur k. Melkemi, dans [21]⁽¹⁾, nous donne des idées et éléments de réponse à cette question.

D'abord, nous étudions la représentation de la fonction Y , avec les fonctions $\psi_{j,k}$, satisfaisant les conditions semblables de moments nuls

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(\omega t) \cdot \psi_{j,k}(t) dt = 0 \quad \forall j, k \in \mathbb{Z} \quad (1.99)$$

Pour satisfaire à ces conditions, les fonctions $\psi_{j,k}$ sont générés par la dilatation et la translation d'une ondelette mère ψ , telle que la base est $\{\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$, si et seulement si $\omega = 0$. Ce qui prouve la limitation de ces bases d'ondelettes stationnaire.

Alors, dans le but de satisfaire les conditions (1.99), nous allons considérer les "bases d'ondelettes orthogonales non stationnaire" dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

⁽¹⁾k. Melkemi *A non stationary Wavelet bases: A best basis selection*. SETIT 2009

Chapitre 2

Bases d'ondelettes orthogonales non Stationnaire

Dans ce chapitre, nous faisons une étude concernant les ondelettes non stationnaire, ensuite nous décrivons la construction d'une base d'ondelette non stationnaire orthogonale avec certaines propriétés spécifiques. De plus, nous examinons un exemple concret pour le cas des B-splines exponentielles. Enfin nous étudions le lien entre les bases non stationnaire et l'approximation optimale d'une fonction donnée.

2.1 Analyse multi-résolution non stationnaire

L'analyse multirésolution non stationnaire, est introduit par Carl de Boor, Ronald A. DeVore, et Amos Ron[2]⁽¹⁾, il s'agit d'un ensemble de sous espaces d'approximations emboîtés, et invariants par translation, où chaque espace est généré par une fonction d'échelle différente.

Définition 2.1.1 *Une analyse multirésolution non-stationnaire de $L^2(\mathbb{R})$, (en abrégé, AMRNS), est une suite de sous-espace fermés emboîtés $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant les*

⁽¹⁾C. Boor, R. DeVore, and A. Ron. On the construction of (pre)wavelets. *Constructive Approximation, Special Issue on Wavelets*, 09, 123–166, 1993.

conditions suivantes: [37]⁽¹⁾

Pour tout $j \geq j_0$, $j_0 \in \mathbb{Z}$

(1) $V_j \subset V_{j+1}$.

(2) $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$.

(3) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.

(4) chaque espace V_j est invariant par translation, relative à la dilatation $2^{-j} \cdot \mathbb{Z}$, c-à-d;

$$f(x) \in V_j \implies f(x - 2^{-j}k) \in V_j, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

(5) La famille $\{\phi_j(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, est une base de riesz pour V_j , pour chaque j .

Nous allons appeler les fonctions $(\phi_j)_{j \geq j_0}$; fonctions d'échelle. Notons que dans l'AMR standard[2]⁽²⁾, les fonctions ϕ_j , seraient tous égaux à une seule fonction ϕ .

2.1.1 propriétés de base

D'après la définition, nous constatons que $V_j \subset V_{j+1}$, pour tout $j \geq j_0$, mais la fonction d'échelle ϕ_j , n'est pas une version dilatée de ϕ_{j_0} dans V_{j_0} . Ce fait actuellement, présente une distinction avec l'AMR classique.

l'inclusion $V_j \subset V_{j+1}$, assure l'existence d'une suite $(h_k^{[j]})_{k \in \mathbb{Z}}$ de $l^2(\mathbb{Z})$, avec $j \geq j_0$, notée $\mathbf{h}^{[j]}$, satisfaite l'équation d'échelle:

$$\phi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{[j]} \cdot \phi_{j+1}(2x - k). \quad (2.1)$$

Cette équation peut s'écrire, dans le domaine fréquentiel, sous la forme

$$\widehat{\phi}_j(\omega) = \frac{1}{2} H^{[j]} \left(\frac{\omega}{2} \right) \cdot \widehat{\phi}_{j+1} \left(\frac{\omega}{2} \right), \quad (2.2)$$

où,

$$\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

⁽¹⁾C. Vonesch, T. Blu, and M. Unser, "Generalized Daubechies wavelet families," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 9, pp. 4415–4429, 2007.

⁽²⁾C. de Boor, R. DeVore, and A. Ron, "On the construction of multivariate (pre)wavelets," *Constructive Approximation*, vol. 9, pp123–166. June (1993).

\widehat{f} : dénote la transformée de fourier d'une fonction f , et

$$H^{[j]}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{[j]} e^{-i\omega}. \quad (2.3)$$

Convention : Nous imposons que, pour toute fonction ϕ_j de la définition 2.1.1, on a:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_j(t) dt = \widehat{\phi}_j(0) = 1. \quad (2.4)$$

Comme $\widehat{\phi}_j(0) \neq 0$, on peut appliquer récursivement (2.2), ce qui conduit à la relation: (Voir [16]⁽¹⁾, et [37]⁽²⁾)

$$\widehat{\phi}_j(\omega) = \prod_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2} H^{[j+k]} \left(\frac{\omega}{2^{1+k}} \right), \quad (2.5)$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$, $j \geq j_0$.

D'après les travaux de [37], le produit infini en (2.5) converge pour chaque valeur de ω . En outre, quand la fonction d'échelle stationnaire $\widehat{\phi}$ correspondante est dans $L^2(\mathbb{R})$, les fonctions $(\widehat{\phi}_j)_{j \geq j_0}$ sont dans $L^2(\mathbb{R})$ et $\|\phi_j - \phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0$, lorsque $j \rightarrow +\infty$.

La deuxième condition (*la densité*), garantit la convergence de l'analyse.

Chaque espace d'approximation V_j , est généré par ϕ_j , $j \geq j_0$, cela conduit à:

$$V_j = \overline{\text{span}} \{ \phi_{j,k}(x) \}_{j,k \in \mathbb{Z}}, \quad (2.6)$$

avec

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \cdot \phi_j(2^j x - k) \quad (2.7)$$

La contrainte de base de Riesz entraîne que; à chaque échelle $j \geq j_0$, il existe des constantes $0 < A_j \leq B_j < \infty$, telle que, pour tout $\mathbf{h}^{[j]} \in l^2(\mathbb{Z})$;

$$A_j \cdot \|\mathbf{h}^{[j]}\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq B_j \cdot \|\mathbf{h}^{[j]}\|_{l^2(\mathbb{Z})}, \quad (2.8)$$

telle que f est une fonction de l'espace V_j , et

$$\mathbf{h}^{[j]}(e^{-i\omega}) = H^{[j]}(\omega).$$

⁽¹⁾B.Han and Z.Shen, Characterization of Sobolev Spaces of arbitrary Smoothness using non stationary tight Wavelet frames. *N SERC, Grant RGP228051*. Canada (2007).

⁽²⁾C. Vonesch, T. Blu, and M. Unser, "Generalized Daubechies wavelet families," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 9, pp. 4415–4429, (2007).

Les valeurs du couple (A_j, B_j) , sont appelées les bornes de Riesz (*inférieure et supérieure resp.*). Ils sont égaux dans notre cas (*la base est orthogonale*), et leur valeur est égale à 1, si la base est normalisée (*c'est-à-dire orthonormée*).

La relation d'orthogonalité entre les fonctions de base, pourra donc s'écrire, pour chaque $j \geq j_0, j \in \mathbb{Z}$, comme:

$$\langle \phi_j, \phi_j(\cdot - k) \rangle = \delta_{0,k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (2.9)$$

avec

$$\delta_{0,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Pour les filtres d'échelle $\mathbf{h}^{[j]}$, leurs transformés en z , satisfaire l'équation:

$$\mathbf{h}^{[j]}(z) \cdot \overline{\mathbf{h}^{[j]}(z)} + \mathbf{h}^{[j]}(-z) \cdot \overline{\mathbf{h}^{[j]}(-z)} = 4, \quad (2.10)$$

où, $z = e^{-i\omega}$. Ainsi que $\mathbf{h}^{[j]}$, peut exprimer en z par

$$\mathbf{h}^{[j]}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{[j]} \cdot z^k \quad (2.11)$$

Pour chaque V_j , à chaque niveau (*échelle j*), on peut définir son complément orthogonal W_j dans V_{j+1} , comme suit:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (2.12)$$

$$\overline{\bigoplus_{j \geq j_0} W_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (2.13)$$

L'orthogonalité de W_j à V_j , implique évidemment, que W_j sera orthogonal à W_{j+1} , c-à-d:

$$W_j \perp W_k, \quad \forall j \neq k \quad (2.14)$$

Les sous espaces de détails W_j , ne forment pas une famille d'espace emboîtés comme les V_j , mais les propriétés d'échelle, et l'invariance par translation (*dilaté par 2^{-j}*), sont conservés. De plus, pour chaque échelle $j \geq j_0, j \in \mathbb{Z}$, il existe une fonction ψ_j de $L^2(\mathbb{R})$ appelée ondelette.

Les ondelettes non stationnaire ψ_j , $j \in \mathbb{Z}$ ($j \geq j_0$), ont obtenu d'après les fonctions d'échelle non stationnaire ϕ_j , telles que

$$\psi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k^{[j]} \phi_{j+1}(2x - k), \quad (2.15)$$

la où; g_k peut être construit à partir h_k , par la relation:

$$g_k^{[j]} = (-1)^k h_{1-k}^{[j]}. \quad (2.16)$$

Les fonctions dilatées et translatées $\psi_{j,k}$ définissent par

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi_j(2^j x - k), \quad (2.17)$$

engendrent W_j .

Dans le cadre des ondelettes non-stationnaire, la stabilité des bases d'ondelette $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}, j \geq j_0\}$, n'est pas impliquée par la stabilité de la fonction d'échelle. Par conséquent, cette famille forme une base de Riesz pour l'espace $\bigoplus_{j \geq j_0} W_j$. De plus, la famille

$$\Gamma = \{\phi_{j_0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi_j(2^j \cdot -k)\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}, \quad (2.18)$$

devient une base de Riesz pour l'espace $L^2(\mathbb{R})$ (voir [20]⁽¹⁾, et [17]⁽²⁾).

La décomposition en ondelette d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, à échelle j_0 , est donnée par

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^{[j_0]} \cdot \phi_{j_0,k} + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k^{[j]} \cdot \psi_{j,k}, \quad (2.19)$$

où,

$$x_k^{[j]} = \langle f, \phi_{j,k} \rangle \quad \text{et} \quad y_k^{[j]} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle. \quad (2.20)$$

C'est la même formule que dans la théorie classique, mais il faut conserver; que les ondelettes $\psi_{j,k}$ sont dilatées et translatées par l'ondelette mère ψ_j , dans laquelle change complètement en fonction de l'échelle j .

⁽¹⁾Y. J. Lee and J.Yoon. Analysis of Compactly Supported Nonstationary Biorthogonal Wavelet Systems Based on Exponential B-Splines. *Hindawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis*, Article ID 593436, 17 pages, 2011.

⁽²⁾R. Q. Jia and J. Wang, "Stability and linear independence associated with wavelet decompositions," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 117, no. 4, pp.1115–1124, 1993.

2.2 Exemple: Construction d'AMRNS à travers les B-splines exponentielles

Un exemple d'analyse multirésolution non-stationnaire $(V_j)_{j \geq j_0}$, peut être construit à partir des B-splines exponentielles. Ces dernières et les polynômes, ont été considéré, très utiles dans un certain nombre d'applications telles que; la conception assistée par ordinateur, la forme géométrique, la préservation d'ajustement d'une courbe, l'interpolation d'un signal [12], [36]. De plus, elles ont été utilisées comme un ingrédient clé pour la construction des ondelettes. En particulier, dans l'approximation et la représentation des signaux acoustiques.

C'est quoi les B-splines exponentielles ?

De nombreux auteurs sont capables de répondre à cette question, en raison que; les B-splines exponentielles (B-splines de Chebyshev) représentent un axe principal dans leur domaine de recherche. Citons notamment, N. Dyn et A. Ron [13], K. Melkmi [22]⁽¹⁾ et, plus récemment; C. Vonesch, T. Blu, M. Unser [37]⁽²⁾, et Y. J. Lee et J. Yoon [20]⁽³⁾. Dans ce mémoire nous nous focaliserons particulièrement sur certaines propriétés concernant ces dernières.

On considère l'opérateur différentiel linéaire d'ordre n ($n \in \mathbb{N}^*$), à coefficients constants, défini sur $C^\infty(\mathbb{R})$ par:

$$T_\gamma^n = \prod_{i=1}^n (D - \gamma_i \cdot I) \quad (2.21)$$

D : désigne l'opérateur de dérivation, et I : est l'identité.

Le noyau de cet opérateur différentiel,

$$\mathcal{B}_\gamma^n = \ker T_\gamma^n, \quad (2.22)$$

⁽¹⁾K. Melkemi. *Orthogonalité des B-splines de Chebyshev cardinales dans un espace de Sobolev pondéré*. PhD thesis Université Joseph Fourier de Grenoble, France (1999).

⁽²⁾C. Vonesch, T. Blu, and M. Unser, "Generalized Daubechies wavelet families," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 9, pp. 4415–4429, 2007.

⁽³⁾Y. J. Lee and J. Yoon. Analysis of Compactly Supported Nonstationary Biorthogonal Wavelet Systems Based on Exponential B-Splines. *Hindawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis*, Article ID 593436, 17 pages, 2011.

est un espace EC (*espace de Chebyshev généralisé*) [22], sur \mathbb{R} tout entier. On utilise la notation $\eta^{[\theta]}$ au lieu de $\underbrace{\eta, \dots, \eta}_{\theta\text{-fois}}$. Il y'a une possibilité de trouver une permutation σ , de $\{1, \dots, n\}$, telle que

$$(\gamma_{\sigma(1)}, \dots, \gamma_{\sigma(n)}) = (\eta_1^{[n_1]}, \dots, \eta_r^{[n_r]}),$$

où, η_1, \dots, η_r sont des réels distincts et n_1, \dots, n_r des entiers positives, tels que $n_1 + \dots + n_r = n$. En peut construire alors la famille des fonctions:

$$e^{\eta_i x}, x e^{\eta_i x}, \dots, x^{n_i-1} e^{\eta_i x},$$

pour tout $i = 1, \dots, r$, cette famille forme une base pour l'espace $\mathcal{B}_{\eta_i}^{n_i}$, telle que

$$\mathcal{B}_\gamma^n = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{B}_{\eta_i}^{n_i}.$$

À titre d'exemple:

Si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) = (0, 0, a, -a)$, on peut écrire $\gamma = (\eta_1^{[2]}, \eta_2^{[1]}, \eta_3^{[1]})$ avec $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = a$, $\eta_3 = -a$, cela signifie que la base est: $e^{0 \cdot x}, x e^{0 \cdot x}, e^{a \cdot x}, e^{-a \cdot x}$ c-à-d: $1, x, e^{a \cdot x}, e^{-a \cdot x}$.

Cependant, Il est logique d'adopter de nouveaux choix de bases dans cet espace. Pour ce but, nous désignons par f_i l'élément de l'espace $\mathcal{B}_{(\gamma_1, \dots, \gamma_i)}^i$ pour $i = 1, \dots, n$, qui satisfait les conditions initiales:

$$f_i^{(j)}(0) = 0 \text{ si } j = 0, \dots, i-2 \text{ et } f_i^{(i-1)}(0) = 1 \quad (2.23)$$

Les fonctions f_1, \dots, f_n ainsi définies, forment une base de \mathcal{B}_γ^n .

En particulier, si $\gamma_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$; la base précédente est la base (f_1, \dots, f_n) de polynôme P_{n-1} , définie par:

$$f_i(x) = \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}. \quad (2.24)$$

Les fonctions $f_n, f_n(\cdot + 1), \dots, f_n(\cdot + n - 1)$, forment aussi une base de l'espace \mathcal{B}_γ^n .

Définition 2.2.1 On définit l'espace des splines cardinales de Chebyshev associé à l'opérateur T_γ^n , par:

$$S_\gamma^n = \{S \in C^{n-2}(\mathbb{R}); S_{|[k, k+1[} \in \mathcal{B}_{\gamma_{|[k, k+1[}}^n, k \in \mathbb{Z}\} \quad (2.25)$$

Pour le choix $n = 1$: dans ce cas, nous pouvons exprimer les éléments de S_γ^1 à partir des translattées entières de la fonction β_γ^1 qui définie par,

$$\beta_\gamma^1(x) = e^{\gamma x} \cdot \chi_{[0,1[}(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.26)$$

avec $\gamma = \gamma_1 \in \mathbb{R}$. En effet, si S est un élément de S_γ^1 , nous connaissons une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$S(x) = a_k e^{\gamma x}, \quad x \in [k, k+1[, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.27)$$

alors, S peut s'écrire sous la forme

$$S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \beta_\gamma^1(x - k), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.28)$$

avec,

$$c_k = a_k e^{\gamma k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (2.29)$$

On peut remarquer que, si nous définissons G_γ^1 (la fonction de Green associée à l'opérateur T_γ^1) par:

$$G_\gamma^1(x) = e^{\gamma x} \chi_{[0, \infty[}(x) \quad (2.30)$$

La fonction β_γ^1 , peut s'exprimer comme

$$\beta_\gamma^1(x) = G_\gamma^1(x) - G_\gamma^1(x - 1), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.31)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction de Green G_γ^n associée à l'opérateur T_γ^n , est définie par;

$$G_\gamma^n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.32)$$

où, f_n est l'élément de l'espace \mathcal{B}_γ^n , dont les conditions initiales sont données par la relation (2.23), par conséquent, si $\gamma_i = 0$, pour tout $i = 1, \dots, n$;

$$G_\gamma^n(x) = \frac{x_+^{n-1}}{(n-1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.33)$$

où, $x_+ = \max\{x, 0\}$.

Pour généraliser la notion de B-spline, on peut utiliser l'opérateur aux différences $\Delta_\gamma^n [13]^{(1)}$, qui définit comme suit:

⁽¹⁾N. Dyn and A. Ron, Cardinal translation invariant Tchebycheffian B-splines. *Approximation Theory and its Applications*, 6(2):1-12, 1990.

Définition 2.2.2 On définit l'opérateur aux différences Δ_γ^n d'ordre n associé à γ , pour tout $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par:

$$\Delta_\gamma^n = \Delta_{\gamma_n}^1 \circ \Delta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})}^{n-1},$$

où, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Delta_\theta^1 h(x) = h(x) - e^\theta h(x-1) \quad x \in \mathbb{R}$$

Proposition 2.2.1 Pour tout $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$\beta_\gamma^n = \Delta_\gamma^n \cdot G_\gamma^n, \quad (2.34)$$

appartient à l'espace S_γ^n des splines associées à l'espace \mathcal{B}_γ^n .

Remarque 2.2.1 On se donne la relation suivante:

$$\Delta_\gamma^n h(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} e^{\gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} + \dots + \gamma_{i_k}} \right] h(x-k)$$

pour tout fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, avec la convention;

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} e^{\gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} + \dots + \gamma_{i_k}} = 1 \quad \text{pour } k = 0.$$

Alors, si nous posons $h = G_\gamma^n$, on peut écrire $\beta_\gamma^n(x)$ sous la forme

$$\beta_\gamma^n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} e^{\gamma_{i_1} + \gamma_{i_2} + \dots + \gamma_{i_k}} \right] G_\gamma^n(x-k), \quad (2.35)$$

cette relation montre que:

- Si $x < 0$, $\beta_\gamma^n(x) = 0$.
- Si $x \geq n$, $x - k$ est positive pour chaque valeur de $k = 0, \dots, n$. Le calcul de $\beta_\gamma^n(x)$

revient donc à appliquer l'opérateur Δ_γ^n à une fonction de l'espace \mathcal{B}_γ^n .

Après cette introduction, nous arrivons maintenant à un résultat central concernant la réponse à notre question.

Définition 2.2.3 La fonction β_γ^n est appelée la *B-spline de Chebyshev d'ordre n associée* à l'opérateur T_γ^n .

Proposition 2.2.2 [30]⁽¹⁾ *Pour tout $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$, la B-spline β_γ^n s'obtient, comme convolution des n B-splines d'ordre 1, $\beta_{\gamma_i}^1$, $i = 1, \dots, n$, c'est-à-dire:*

$$\beta_\gamma^n = \beta_{\gamma_1}^1 * \dots * \beta_{\gamma_n}^1 \quad (2.36)$$

Où, pour $n \geq 2$,

$$\beta_\gamma^n(x) = \int_0^1 e^{\gamma_n t} \cdot \beta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})}^{n-1}(x-t) dt \quad (2.37)$$

Chacune des B-splines d'ordre 1, étant strictement positive sur l'intervalle $[0; 1[$, on obtient le résultat suivant:

Corollaire 2.2.1 *Le support de toute B-spline de Chebyshev β_γ^n , d'ordre n est égal à $[0; n]$. De plus β_γ^n est strictement positive sur l'intérieur de son support.*

Corollaire 2.2.2 *Soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$, pour tout entier k , $1 \leq k \leq n-2$, nous avons:*

$$T_{(\gamma_1, \dots, \gamma_k)}^k \beta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_n)}^{n-1} = \Delta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_k)}^k \beta_{(\gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n)}^{n-k} \quad (2.38)$$

Proposition 2.2.3 *Pour tout spline $S \in S_\gamma^n$, il existe une unique suite $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, de nombres réels telle que:*

$$S(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot \beta_\gamma^n(x-k), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.39)$$

Définition 2.2.4 - *On définit la B-spline adjointe de β_γ^n , comme la B-spline β_γ^{n*} associé à l'opérateur T_γ^{n*} (l'adjoint de T_γ^n définit en (2.21)). Cet opérateur est donné par:*

$$T_\gamma^{n*} = (-1)^n \prod_{i=1}^n (D + \gamma_i \cdot I). \quad (2.40)$$

- *l'espace adjoint des splines de Chebyshev S_γ^{n*} associé à l'opérateur T_γ^n , est définit comme l'espace des splines cardinales associées à T_γ^{n*} .*

⁽¹⁾H. G. ter Morsche. *Interpolational and extramal extramal properties of L-spline functions.* PhD thesis, Eindhoven University of Technology, (1982).

Conséquences:

- Si $\beta_\gamma^{n*} = \ker T_\gamma^{n*}$, l'espace S_γ^{n*} définit par

$$S_\gamma^{n*} = \{f \in C^{n-2}(\mathbb{R}); f_{|[k,k+1[} \in \mathcal{B}_\gamma^{n*}, k \in \mathbb{Z}\}$$

- D'après l'égalité (2.40), on obtient:

$$\mathcal{B}_\gamma^{n*} = \beta_{-\gamma}^n$$

- Soit

$$\beta_{\gamma_1}^{1*}(x) = e^{\gamma x} \cdot \chi_{[0,1[}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

et, en utilisant (2.39), alors;

$$\mathcal{B}_\gamma^{n*}(x) = \int_0^1 e^{-\gamma_n t} \cdot \beta_{(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})}^{n-1}(x-t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Un lien bien précis entre les deux B-splines β_γ^n et β_λ^{n*} , apparaît dans la proposition suivante:

Proposition 2.2.4 *Pour tout $n \geq 2$ et tout $\gamma \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\beta_\gamma^{n*}(x) = e^{-\sum_{k=1}^n \gamma_k} \cdot \beta_\gamma^n(n-x) \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.41)$$

Pour $n = 1$, la relation (2.41) est vérifiée seulement sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Cette égalité (2.41), annonce les résultats suivants:

- Elle montre que; Si $\sum_{k=1}^n \gamma_k = 0$, alors β_γ^{n*} est l'image de β_γ^n par la symétrie par rapport à l'axe $x = n/2$.

- Si $\gamma_k = 0, k = 1, \dots, n$ (*cas polynomial*), la B-spline est symétrique par rapport à l'axe $x = n/2$. la relation (2.41) confirme cette propriété, car $\beta_\gamma^{n*} = \beta_\gamma^n$ dans ce cas.

- Elle nous donne une condition nécessaire et suffisante sur l'opérateur T_γ^n pour que la B-spline associée soit symétrique.

Corollaire 2.2.3 *Les opérateurs différentiels d'ordre n à coefficients réels constants dont la B-spline associée est symétrique, (par rapport à l'axe $x = n/2$), sont les opérateurs de la forme suivante:*

$$D^{\theta_0} \prod_{i=1}^r (D^2 - \eta_i^2 I)^{\theta_i},$$

où les nombres $\eta_1, \dots, \eta_r \in \mathbb{R}^*$ satisfont $\eta_i^2 \neq \eta_j^2$ pour $i \neq j$, avec les entiers $\theta_0 \in \mathbb{N}$, et $\theta_1, \dots, \theta_r \in \mathbb{N}^*$ satisfont

$$\theta_0 + 2 \sum_{i=1}^r \theta_i = n.$$

Preuve. Voir [22]⁽¹⁾ ■

Pour le lecteur intéressé par plus de détails, et pour mieux comprendre ces notions, on peut consulter [22]. Précisément, ce qui concerne la construction des polynômes exponentiels, qui sont des fonctions de la forme $P(t) \cdot e^{\gamma t}$ où $P(t)$ est un polynôme, et λ est un paramètre complexe, consulter aussi [37]⁽²⁾.

Les résultats précédents, restent valides, dans le cas complexe, si $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$.

Remarque 2.2.2 *La B-spline exponentielle, est une généralisation d'une B-spline polynomiale.*

Conclusion 2.2.1 *Nous définissons les fonctions splines, par le remplacement des polynômes avec des éléments de l'espace de chebyshev, et préservant un grand nombre de leurs propriétés importantes. Autrement dit; on remplace l'espace des polynômes, par un espace de Chebyshev approprié, telle que les B-splines de Chebyshev possèdent essentiellement les mêmes propriétés que les B-splines polynomiales, comme la compacité du support, positivité sur l'intérieur du support, ect... .*

Cette généralisation est utile, puisque les paramètres γ_k offrir un certain nombre de degré de liberté.

Proposition 2.2.5 *Etant donné un paramètre-vecteur $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$, la transformée de Fourier de la B-spline β_γ^n , est donnée par*

$$\widehat{\beta_\gamma^n}(\omega) = \prod_{k=1}^n F(\gamma_k - i\omega) \quad (2.42)$$

⁽¹⁾K. Melkemi. *Orthogonalité des B-splines de Chebyshev cardinales dans un espace de Sobolev pondéré.* PhD thesis Université Joseph Fourier de Grenoble, France (1999).

⁽²⁾C. Vonesch, T. Blu, and M. Unser, "Generalized Daubechies wavelet families," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 9, pp. 4415–4429, 2007.

où, F est la fonction définie sur \mathbb{C} , par

$$F(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

Preuve.

Indication: En utilisant la relation (2.36), puis on applique l'une des propriétés classiques de la transformation de Fourier; $\widehat{u * v} = \widehat{u} \cdot \widehat{v}$ (récursivement). Alors pour prouver l'identité (2.42), il suffit de vérifier que, pour $k = 1, \dots, n$;

$$\widehat{\beta_{\gamma_k}^1}(\omega) = F(\gamma_k - i\omega).$$

Cette démonstration est bien détaillé dans [22]⁽¹⁾ ■

· Le cas $\gamma = 0$, correspond à la B-spline polynômiale.

Dans le domaine temporel, on obtient la fonction $\beta_\gamma^n \in L^2(\mathbb{R})$, dont son support est $[0, n]$ (compact)[2]⁽²⁾, comme nous illustrons dans la **Fig.2.1** pour $n = 2$. De plus, cette fonction est $(n - 2)$ -fois continûment différentiable (de classe C^{n-2})[14]⁽³⁾. D'autre part, Sur chaque intervalle $[k, k + 1]$, β_γ^n coïncide avec une fonction dans G_γ^n .

Les translatées de β_γ^n , sont linéairement indépendants si et seulement si

$$\gamma_k - \gamma_j \notin 2\pi i\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \forall k, j \quad (2.44)$$

En outre, lorsque nous conservons la condition (2.42), chaque $f \in G_\gamma^n$, peut être exprimée comme une combinaison linéaire des translatées de β_γ^n .

D'autre part, de la transformée de Fourier de β_γ^n , nous voyons que

$$\begin{aligned} \widehat{\beta_\gamma^n}(\omega) &= \prod_{k=1}^n \frac{e^{\gamma_k - i\omega} - 1}{\gamma_k - i\omega} \\ &= \left[\prod_{k=1}^n \frac{e^{\frac{\gamma_k - i\omega}{2}} + 1}{2} \right] \cdot \left[\prod_{k=1}^n \frac{e^{\frac{\gamma_k - i\omega}{2}} - 1}{\frac{\gamma_k}{2} - i\frac{\omega}{2}} \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

⁽¹⁾K. Melkemi. *Orthogonalité des B-splines de Chebyshev cardinales dans un espace de Sobolev pondéré.* PhD thesis Université Joseph Fourier de Grenoble, France (1999).

⁽²⁾C. de Boor, R. A. DeVore, and A. Ron, "On the construction of multivariate pre wavelets," *Constructive Approximation*, vol. 9, no. 2-3, pp. 123–166, 1993.

⁽³⁾N. Dyn and D. Levin, "Analysis of asymptotically equivalent binary subdivision schemes," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 193, no. 2, pp.594–621, 1995.

Le second facteur sur le côté droit de (2.45) est reconnu en tant que $\beta_{\frac{\gamma}{2}}^n\left(\frac{\omega}{2}\right)$, et donc

$$\widehat{\beta}_{\gamma}^n(\omega) = A_{\frac{\gamma}{2}}(\omega) \cdot \widehat{\beta}_{\frac{\gamma}{2}}^n\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad (2.46)$$

avec A_{γ} : est un polynôme trigonométrique, 4π -périodique, définit par

$$A_{\gamma}(\omega) = \prod_{k=1}^n \frac{e^{\gamma_k - i\frac{\omega}{2}} + 1}{2} \quad (2.47)$$

Notons que $\widehat{\beta}_{\frac{\gamma}{2}}^n\left(\frac{\omega}{2}\right)$: représente la transformée de Fourier de la fonction $2 \cdot \beta_{\frac{\gamma}{2}}^n(2x)$, du support $\left[0, \frac{n}{2}\right]$, de plus, elle est par morceaux dans G_{γ}^n , (avec des points de discontinuités à des demi-entiers).

Nous fixons le vecteur γ , et définir les espaces V_j , dans lesquels engendrés par ϕ_j , avec

$$\phi_j = \beta_{\gamma \cdot 2^{-j}}^n(2^j \cdot) \quad (2.48)$$

Les générateurs ϕ_j , alors satisfaire aux équations de raffinement non-stationnaire

$$\widehat{\phi}_j(\omega) = 2 \cdot A_{\gamma \cdot 2^{-j-1}}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \cdot \widehat{\phi}_{j+1}(\omega) \quad (2.49)$$

Nous observons que $2 \cdot A_{\gamma \cdot 2^{-j-1}}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$, peut être écrite comme

$$2^{-n} \cdot \sum_{k=0}^n \delta_k\left(e^{\gamma_1 \cdot 2^{-j}}, \dots, e^{\gamma_n \cdot 2^{-j}}\right) \cdot e^{-ik\omega \cdot 2^{-j-1}},$$

où, $\delta_k(x_1, \dots, x_n)$: est le polynôme homogène symétrique de degré k .

Alors, nous pouvons, considérer les espaces invariants par translation V_j , définis par

$$V_j = \left\{ f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{[j]} \cdot \beta_{\gamma \cdot 2^{-j}}^n(2^j x - k); \quad h_k^{[j]} \in l^2(\mathbb{Z}) \right\} \quad (2.50)$$

Remarque 2.2.3 Si nous voulons normalisée la base ϕ_j , c-à-d $\|\phi_j\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$, et d'après les définitions précédent en peut réécrire

$$\phi_j = \rho_j \cdot \left(e^{2^{-j}\gamma_1} \beta_1 * e^{2^{-j}\gamma_2} \beta_1 * \dots * e^{2^{-j}\gamma_n} \beta_1 \right), \quad (2.51)$$

telle que β_1 indique la B-spline de premier ordre, c'est-à-dire:

$$\beta_1(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.52)$$

et ρ_j : est le facteur de normalisation .[36]⁽¹⁾

Une façon pratique de représenter une B-spline exponentielle d'ordre n , est avec le polynôme de Laurent comme suit:

$$\mathbf{h}^{[j]}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{[j]} \cdot z^k = 2\mu_j \prod_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(1 + e^{\gamma_k \cdot 2^{-j-1}} z \right), \quad j \geq j_0 \quad (2.53)$$

où, μ_j est le facteur de normalisation définie par:

$$\mu_j = \prod_{k=1}^n \left(\frac{2}{1 + e^{\gamma_k \cdot 2^{-j-1}}} \right) \quad (2.54)$$

La relation entre la reproduction des polynômes exponentiels par ϕ_j , et les zéros du polynôme de Laurent $\mathbf{h}^{[j]}(z)$ correspondants, est bien détaillée dans [37]⁽²⁾.

Nous définissons (*par convention*) l'espace $W_{-\infty}$, avec l'identité

$$W_{-\infty} = \bigcap_j V_j, \quad (2.55)$$

et obtenir de cette façon, la décomposition:

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{-\infty \leq j < +\infty} W_j, \quad (2.56)$$

est valable pour la décomposition en ondelette, sur la base de toute B-spline exponentielle.

Un problème intéressant et important dans le cadre des bases d'ondelette non stationnaire, est le problème de la stabilité. En effet;

Soit, ψ_j la fonction d'ondelette à support compact, associée à $\phi_j = \beta_{\gamma \cdot 2^{-j}}^n(2^j \cdot)$.

Alors, l'espace d'ondelettes W_j , définit par:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (2.57)$$

⁽¹⁾M. Unser and T. Blu, "Cardinal exponential splines. I. Theory and filtering algorithms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 4, pp. 1425–1438, 2005.

⁽²⁾C. Vonesch, T. Blu, and M. Unser, "Generalized Daubechies wavelet families," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 9, pp. 4415–4429, 2007.

est un espace invariant par translation, relative à la dilatation $2^{-j} \cdot$, générée par ψ_j . D'après (2.51), et (2.53) nous pouvons en déduire que, pour chaque $j \geq j_0$, les translatées entières de ϕ_j , sont linéairement indépendants si et seulement si [2]⁽¹⁾:

$$(\gamma_k - \gamma_l) \notin 2^{j+1}\pi i\mathbb{Z}, \text{ pour } \gamma_k \neq \gamma_l, k, l = 1, \dots, n. \quad (2.58)$$

D'autre part, d'après R. Q. Jia et J. Wang [17]⁽²⁾, un concept lié l'indépendance linéaire, avec la notion de la stabilité de ϕ_j , c'est-à-dire;

Si les translatées entières de ϕ_j , sont linéairement indépendants, la stabilité de ϕ_j est immédiate, Autrement dit que $\{\beta_{\gamma_{2^{-j}}}^n(2^j \cdot -k), k \in \mathbb{Z}\}$, est une base de Riesz pour V_j .

La densité des B-splines exponentielles, dans les espaces $L^2(\mathbb{R})$, est prouvé dans [7]⁽³⁾.

Un exemple pour la construction des B-splines exponentielles β_γ^n :

Si $n = 2$, et $\gamma = (\gamma_1, \gamma_1) \in \mathbb{R}^2$, avec $\gamma_1 = \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm 1$, nous retirons la figure suivante:

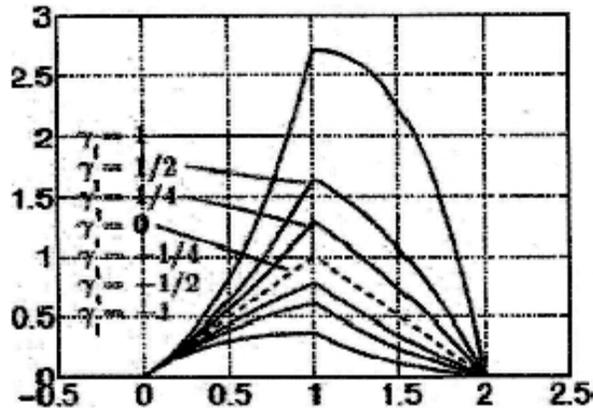


Fig.2.1.

⁽¹⁾C. de Boor, R. A. DeVore, and A. Ron, "On the construction of multivariate pre wavelets," *Constructive Approximation*, vol. 9, no. 2-3, pp. 123-166, 1993.

⁽²⁾R. Q. Jia and J. Wang, "Stability and linear independence associated with wavelet decompositions," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 117, no. 4, pp. 1115-1124, 1993.

⁽³⁾Khalidov and M. Unser, "From differential equations to the construction of wavelet-like bases," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, pp. 1256-1267, April 2006.

En particulier si $\gamma_1 = 0$, on obtient la B-spline de second-ordre (*fonction triangle* Λ)⁽¹⁾, telle que;

$$\beta_\gamma^2(x) = x \cdot \chi_{[0,1[}(x) + (2 - x) \cdot \chi_{[1,2[}(x).$$

Un autre exemple:

Pour $n = 3$, et $\gamma = (0, ia, -ia)$ avec $a = 2.5, \pi, 3.8, 4.3$, on obtient la **Fig.2.2** ⁽²⁾

Le cas: $a = \pi, \gamma = (0, i\pi, -i\pi)$ la B-spline β_γ^n définie par:

$$\beta_\gamma^n(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(\pi x)}{\pi^2} & \text{si } x \in [0, 1] \\ \frac{2}{\pi^2} & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$$

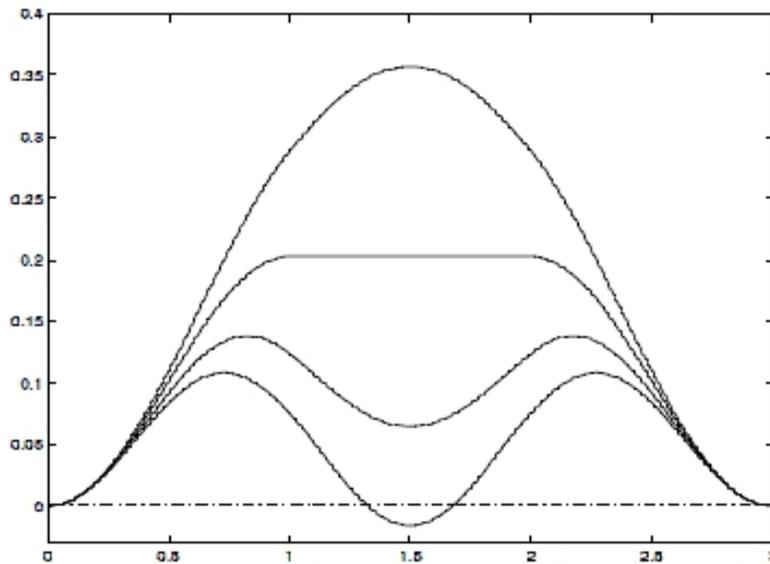


Fig.2.2

$${}^{(1)}\Lambda(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

⁽²⁾M.L. Mazure and K. Melkemi, Orthonormality of Cardinal Chebyshev B-Spline Bases in Weighted Sobolev Spaces *Constr. Approx.* 18: 387–415 New York 2002.

2.3 Application: Approximation optimale par les bases non stationnaire

2.3.1 L'algorithme de choix du meilleure base

Afin de résoudre le problème qui nous avons vu dans la section dernière du premier chapitre, nous étudions ici une méthode d'approximation adaptative, dans le but de sélectionner une meilleure représentation, pour une fonction donnée, à partir le fait des bases d'ondelettes non stationnaire orthogonales. De plus elle est optimale, dans le sens que la meilleure base est déterminée par la minimisation d'une certaine norme. Notre critère de sélection est basé sur la théorie des espaces Chebyshevian. dans ce cadre nous citons quelque définitions et propriétés indispensables.

Espace invariant par translation

Définition 2.3.1 Soit \mathcal{V} sous-espace de $C^\infty(\mathbb{R})$. Cet espace est dit invariant par translation si, pour tout élément $f \in \mathcal{V}$, et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(x + \alpha)$ appartient aussi à \mathcal{V} .

Afin d'obtenir un algorithme rapide, nous considérons les espaces de Chebyshev invariants par translation.

Espace de Chebyshev invariant par translation

Proposition 2.3.1 On considère l'espace $\mathcal{V} = G_k$ invariant par translation. Supposons également qu'il existe un intervalle $I = [a; b]$, $a < b$, telle que la restriction $G_{k|I}$ de G_k à I soit un EC-espace de dimension $k + 1$. Alors G_k est le noyau d'un opérateur différentiel linéaire d'ordre $k + 1$ à coefficients constants.

Preuve. Voir [21]⁽¹⁾ ■

⁽¹⁾k. Melkmi *A non stationary Wavelet bases: A best basis selection.* SETIT 2009

Alors, l'espace de Chebyshev invariant par translation, est le noyau d'un opérateur différentiel T_γ à coefficients réels et constants, qu'il s'écrit comme:

$$T_\gamma = \prod_{i=1}^N \left(\frac{d}{dx} - \gamma_i \cdot I \right), \quad (2.59)$$

telle que,

$$G_k = \ker T_\gamma. \quad (2.60)$$

Maintenant, nous considérons le vecteur $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \in \mathbb{C}^N$, satisfait les conditions suivantes:

$$(A1) \quad \gamma = \bar{\gamma}.$$

$$(A2) \quad \gamma_k - \gamma_l \notin 2^{j+1} \cdot i\pi\mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \forall j \geq j_0, \quad k, l = 1, \dots, N.$$

$$(A3) \quad \text{Il existe un vecteur } \lambda \in \mathbb{R}^N, \text{ tels que } \gamma_k = i\lambda_k \quad \forall k = 1, \dots, N.$$

A l'intérêt de:

–La première condition (A1); s'assure que l'opérateur T_γ a des coefficients réels.

–Pour la deuxième (A2); assure la stabilité de la base

$$\{\phi_{j_0 k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j,k}^\gamma(x) = 2^{j/2} \cdot \psi_j^\gamma(2^j x - k)\}_{j > j_0, k \in \mathbb{Z}} \quad (2.61)$$

Au sens de la norme L^2 .

La dernière condition (A3); est une restriction aux espaces trigonométriques. Elle nous permet de s'adapter aux différentes structures (*oscillations, régularité*) de la fonction analysée.

Nous signalons que la formule de Taylor, est un outil très important, pour approximer une fonction f de l'espace des fonctions $C^N([a, b])$, par l'espace de Chebyshev noté $\ker T_\gamma^N$, définit par la relation (2.21).

Le théorème suivant nous donne la formule de Taylor généralisée[22]⁽¹⁾

⁽¹⁾K. Melkemi. *Orthogonalité des B-splines de Chebyshev cardinales dans un espace de Sobolev pondéré*. PhD thesis Université Joseph Fourier de Grenoble, France (1999).

Formule de Taylor généralisée

Théorème 2.3.1 *Pour chaque fonction $f \in C^N([a, b])$ alors, existe une fonction $u_f \in G_\gamma$, telle que:*

$$f(x) = u_f(x) + \int_a^b G_\gamma(x-t) \cdot T_\gamma f(t) dt, \quad (2.63)$$

où,

$$u_f(x) = \sum_{k=1}^N T_{k-1} f(a) G_k(x-a), \quad x \in [a, b] \quad (2.64)$$

G_γ est la fonction de Green associée à l'opérateur T_γ , définie par la relation (2.32).

La fonction de Green satisfera l'inégalité suivante: [33]⁽¹⁾

$$|G_\gamma(x-y)| \leq k \cdot \frac{(x-y)_+^{N-1}}{(N-1)!}, \quad \forall x, y \in [a, b] \quad (2.65)$$

tel que k est un constant positif.

Grâce au condition (A3), le nombre k ne dépend pas de γ . On utilise les bases d'ondelettes non stationnaire, avec la propriété (1.99), on obtient (*pour j grand*);

$$\langle f, \psi_{j,k}^\gamma \rangle = \langle u_f, \psi_{j,k}^\gamma \rangle + \left\langle \int_a^b G_\gamma(x-t) \cdot T_\gamma f(t) dt, \psi_{j,k}^\gamma \right\rangle, \quad (2.66)$$

mais,

$$\langle u_f, \psi_{j,k}^\gamma \rangle = 0, \quad (2.67)$$

donc,

$$\langle f, \psi_{j,k}^\gamma \rangle = \int_{I_{j,k}} \int_{2^{-j}k}^x \cdot G_\gamma(x-2^{-j}k) \cdot \psi_{j,k}^\gamma(x) \cdot T_\gamma f(t) dt \cdot dx \quad (2.68)$$

$$|\langle f, \psi_{j,k}^\gamma \rangle| \leq \int_{I_{j,k}} \int_{2^{-j}k}^x |G_\gamma(x-2^{-j}k)| \cdot |\psi_{j,k}^\gamma(x)| \cdot |T_\gamma f(t)| dt \cdot dx \quad (2.69)$$

D'après la relation (2.65), en peut montrer que

$$|\langle f, \psi_{j,k}^\gamma \rangle| \leq C' \cdot 2^{-j \cdot N} \cdot \|T_\gamma f\|_{L^p(I_{j,k})}, \quad (2.70)$$

avec C' est un constant positif, et indépendant de γ .

⁽¹⁾L. L. Schumaker. *Spline Functions : Basic Theory*. Wiley, (1981).

À titre d'exemple:

La base bien-adaptée à représenter les fonctions polynômiales par morceaux, est l'ondelette associée à l'opérateur $\frac{\partial^N}{\partial x^N}$.

Nous allons maintenant revenir à notre problème initial, précisément au signal Y , défini en (1.95). Nous observons que la base associée à l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 \cdot I$, est la plus appropriée pour représenter le signal Y . En effet, dans ce cas tous les coefficients $\langle Y, \psi_{j,k}^\gamma \rangle$, sont nuls si,

$$\{0, 1\} \cap \text{int}(I_{j,k}) = \phi \quad (2.71)$$

Approximation optimale

Nous présentons ici, la définition suivante:

Définition 2.3.2 *La meilleure base d'ondelette non stationnaire, quelle représente une fonction f relativement à la norme $\|\cdot\|$, c'est bien la base non stationnaire associée à l'opérateur T_γ , minimisant la norme $\|T_\gamma f\|$.*

L'observation suivante est très importante pour décrire un algorithme qui sélectionne le meilleur choix de base à un signal donné.

Remarque 2.3.1 *Un opérateur différentiel T satisfait les conditions (A1) – (A3), si et seulement s'il existent $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d$; nombres positifs, avec $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_d$, tels que:*

$$T = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{r_0} \prod_{k=1}^d \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \theta_k^2 \cdot I \right)^{r_k}, \quad (2.72)$$

où, les nombres entiers $\{r_k\}_{k=0,1,\dots,d}$, satisfont

$$r_0 + 2 \sum_{k=1}^d r_k = N \quad (2.73)$$

Remarque 2.3.2 *En outre, pour chaque fonction f dans l'espace de Sobolev H^N nous avons*

$$\widehat{Tf}(\omega) = \left[(i\omega)^{r_0} \prod_{k=1}^d (\theta_k^2 - \omega^2)^{r_k} \right] \cdot \widehat{f}(\omega) \quad (2.74)$$

Dans ce travail, nous considérons la norme L^2 (c-à-d: $p = 2$), pour beaucoup de raisons. D'abord, elle est:

- Norme herbertien unique dans les espaces de L^p .
- l'ondelette d'analyse, employer souvent cette norme.
- L'autre raison principale, est la propriété d'isométrie de cette norme, avec la transformée de fourier.

Maintenant nous proposons l'idée suivante:

Pour minimiser $\|Tf\|_{L^2}$ (voir la définition 2.3.2), il suffit de faire le même travail pour $\left\| \widehat{Tf} \right\|_{L^2}$, tel que;

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{Tf}(\omega) \right|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} \left[\omega^{2r_0} \prod_{k=1}^d (\theta_k^2 - \omega^2)^{2r_k} \right] \left| \widehat{f}(\omega) \right|^2 d\omega \quad (2.75)$$

Afin de résoudre ce problème d'optimisation, nous essayons de le traduire dans sa forme générale. En effet;

On considère $\mathcal{D}_N(\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions positives mesurables, et soit $g \in \mathcal{D}_N(\mathbb{R})$ vérifie la condition

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^k \cdot g(t) dt < +\infty, \quad k = 0, \dots, 2N \quad (2.76)$$

nous définissons la fonction

$$E_g(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t) \left[\prod_{k=1}^N (t - x_k)^k \right] dt, \quad (2.77)$$

pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \in \mathbb{R}^N$.

Le problème est posé comme suit:

Trouver $\alpha \in \mathbb{R}^N$, tel que

$$E_g(\alpha) = \min_{x \in \mathbb{R}^N} E_g(x) \quad (2.78)$$

La résolution de ce problème, est basée sur le théorème suivant:

Théorème 2.3.2 *Le problème (2.78), a une solution unique α , conforme à une permutation de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$.*

Preuve. L'idée principale de la preuve, est comme suit:

En premier nous résolvons l'équation:

$$\nabla E_g(x) = 0,$$

puis, nous montrons que le (hessian) $\nabla^2 E_g(\alpha)$ est une matrice définie positive. Nous considérons dans notre calcul que,

$$\alpha_i \neq \alpha_j, \quad \forall i \neq j$$

et cette propriété ne dépend pas de g .

Pour plus détails ; nous nous référons le lecteur à [23]⁽¹⁾. ■

⁽¹⁾K. Melkemi. Generalized expectation : a new approach, *Research report. LMA Biskra, MCS#5/08, 2008.*

Conclusion 2.3.1 *La résolution du problème dernière, assuré la minimisation de la norme $\left\| \widehat{Tf} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}$, ce qui implique également, la minimisation de la norme $\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R})}$, à cause de la propriété d'isométrie entre les deux normes. revenant maintenant à la relation (2.70), (avec $p = 2$), qu'elle est équivalente pratiquement à (1.80), et par la suite à (1.82). En applique la définition 2.3.2, d'autre part, nous savons que C' positif, et indépendant de γ , alors reste à trouver un minimum j_0 , pour j ($j \geq j_0$), qui lié avec l'opérateur T_γ (j_0 depend de γ), afin d'obtenir une meilleure base d'ondelette non stationnaire.*

Chapitre 3

Bases d'ondelettes biorthogonales non stationnaire

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction de ce mémoire, dans ce chapitre nous essayons de décrire d'une part, les notions fondamentales concernant l'analyse multirésolution biorthogonale non stationnaire, la construction d'une base d'ondelette biorthogonale non stationnaire. D'autre part, nous exposons une méthode de construire une base d'ondelette non stationnaire basée sur les B-splines exponentielles. Enfin nous étudions quelques propriétés mathématiques; telles que la régularité et la stabilité des bases d'ondelettes non stationnaire biorthogonales.

3.1 Analyse multirésolution non stationnaire biorthogonal

Une façon naturelle et commode, pour introduire les ondelettes, est de suivre la notion d'analyse multirésolution.

Cependant et puisque les fonctions d'échelle qui nous intéressent, sont non-stationnaire, alors nous utilisons la structure d'analyse multirésolution non-stationnaire, introduite par [2]⁽¹⁾.

⁽¹⁾C. de Boor, R. A. DeVore, and A. Ron, "On the construction of multivariate pre wavelets," *Constructive Approximation*, vol. 9, no. 2-3, pp. 123–166, 1993.

Étant donné un entier $j_0 \in \mathbb{Z}$, et ϕ_j ($j \geq j_0$), la fonction d'échelle à support compact, dans $L^2(\mathbb{R})$. Nous savons qu'une suite de sous-espaces V_j , définit par:

$$V_j = \overline{\text{span}} \{ \phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \cdot \phi_j(2^j x - k), k \in \mathbb{Z} \}, j \geq j_0 \quad (3.1)$$

Forme une analyse multirésolution non-stationnaire, dans $L^2(\mathbb{R})$, si les conditions suivantes sont remplies:

Pour tous $j \geq j_0, j_0 \in \mathbb{Z}$

- (1) $V_j \subset V_{j+1}$.
- (2) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
- (3) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$.
- (4) chaque V_j est invariant par translation, relative à la dilatation $2^{-j} \cdot \mathbb{Z}$, c-à-d;

$$f(x) \in V_j \implies f(x - 2^{-j}k), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

- (5) La famille $\{ \phi_j(2^j x - k) \}_{k \in \mathbb{Z}}$, est une base de riesz pour V_j , pour chaque j .

La propriété d'emboîtement pour les sous-espaces V_j , implique l'existence d'une séquence, de $l^2(\mathbb{Z})$;

$$\mathbf{h}^{[j]} = \left(h_k^{[j]} \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad (3.2)$$

qui satisfait l'équation de raffinement (*d'échelle*) non stationnaire

$$\phi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{[j]} \cdot \phi_{j+1}(2x - k), j \geq j_0. \quad (3.3)$$

La fonction d'échelle $\tilde{\phi}_j \in L^2(\mathbb{R})$, avec le filtre associé

$$\tilde{\mathbf{h}}^{[j]} = \left(\tilde{h}_k^{[j]} \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad (3.4)$$

est appelée, la fonction duale de ϕ_j , si elle satisfait la condition:

$$\langle \phi_j, \tilde{\phi}_j(\cdot - k) \rangle = \delta_{0,k} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.5)$$

Soient $\{V_j\}_{j \geq j_0}$ et $\{\tilde{V}_j\}_{j \geq j_0}$, une paire d'**AMRNS** de $L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire chacune des deux, satisfait les critères (1) – (5), et ils sont générés par les fonctions duales ϕ_j , et $\tilde{\phi}_j$, respectivement avec $j \geq j_0$. Le concept des ondelettes biorthogonales, est de trouver des espaces de complément W_j , et \tilde{W}_j , pour V_j , et \tilde{V}_j , respectivement, satisfaisant

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad \text{et} \quad \tilde{V}_j = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j, \quad (3.6)$$

avec

$$W_j \perp \widetilde{V}_j \text{ et } \widetilde{W}_j \perp V_j. \quad (3.7)$$

Les ondelettes biorthogonales correspondantes, sont données par:

$$\widetilde{\psi}_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widetilde{g}_k^{[j]} \cdot \widetilde{\phi}_{j+1}(2x - k) \text{ et } \psi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k^{[j]} \cdot \phi_{j+1}(2x - k), \quad (3.8)$$

telle que

$$\widetilde{g}_k^{[j]} = (-1)^k \cdot h_{1-k}^{[j]} \text{ et } g_k^{[j]} = (-1)^k \cdot \widetilde{h}_{1-k}^{[j]}. \quad (3.9)$$

Notons par;

$$\mathbf{g}^{[j]} = \left(g_k^{[j]} \right)_{k \in \mathbb{Z}} \text{ et } \widetilde{\mathbf{g}}^{[j]} = \left(\widetilde{g}_k^{[j]} \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad (3.10)$$

les filtres d'ondelettes (*symboles*), associés aux ψ_j , et $\widetilde{\psi}_j$ respectivement.

3.1.1 Construction d'un système d'ondelettes biorthogonal non stationnaire à l'aide des B-splines exponentielles

Etant données ϕ_j , $j \geq j_0$, des fonctions d'échelle, représentent les B-splines exponentielles qui sont définies par la relation (2.51).

La première étape dans cette construction, est de trouver leurs fonctions d'échelle duales $\widetilde{\phi}_j \in L^2(\mathbb{R})$, $j \geq j_0$, avec la superposition, $\widetilde{\phi}_j$ et ϕ_j génèrent (resp.) $\left(\widetilde{V}_j \right)_{j \geq j_0}$ et $\left(V_j \right)_{j \geq j_0}$ multirésolutions duales. En effet;

On désigné par $\widetilde{\mathbf{h}}^{[j]}$, le symbole associé à $\widetilde{\phi}_j$. Une condition nécessaire pour que, ϕ_j et $\widetilde{\phi}_j$, à satisfaire la condition (3.5) est:

$$\mathbf{h}^{[j]}(z) \cdot \overline{\widetilde{\mathbf{h}}^{[j]}(z)} + \mathbf{h}^{[j]}(-z) \cdot \overline{\widetilde{\mathbf{h}}^{[j]}(-z)} = 4 \quad (3.11)$$

Ainsi, la construction de $\widetilde{\phi}_j$ commence avec la construction de la fonction **symbole duale**

$$\widetilde{\mathbf{h}}^{[j]}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widetilde{h}_k^{[j]} \cdot z^k, \quad (3.12)$$

telle que la relation (3.11) est satisfaite. Pour trouver $\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}$, on applique une méthode analogue à la méthode classique [4]⁽¹⁾, à l'exception de la principale différence, que $\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}$, $j \geq j_0$, sont dépendants de l'échelle.

Toutefois, afin d'assurer l'existence de $\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}$ pour satisfaire la condition (3.11), nous avons besoin de prouver que $\mathbf{h}^{[j]}$, n'a pas de racines de signes opposés. Pour ce but; dénotant

$$n = 2M + r, \quad r \in \{0, 1\} \quad (3.13)$$

et méttant $z = e^{-i\omega}$, et $y = \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$, ce qui implique y en z :

$$y = \frac{-(1-z)^2}{4z}. \quad (3.14)$$

D'après la relation (2.53), nous représentons $\mathbf{h}^{[j]}$, comme suit:

$$\mathbf{h}^{[j]}(e^{-i\omega}) = 2 \cdot e^{-iM\omega} \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right) \prod_{k=1}^M (1 - \theta_{j,k} \cdot y), \quad (3.15)$$

la où,

$$\theta_{j,k} = \frac{4}{e^{\gamma_k 2^{-j-1}} + e^{-\gamma_k 2^{-j-1}} + 2}. \quad (3.16)$$

En effet, nous sommes à la recherche d'un polynôme de Laurent $\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}$ sous la forme:

$$\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}(e^{-i\omega}) = \mathbf{h}^{[j]}(e^{-i\omega}) \cdot Q^{[j]}(y), \quad (3.17)$$

vérifie la condition (3.11). Par conséquent, si nous définissons

$$P^{[j]}(y) = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{h}^{[j]}(e^{-i\omega}) \cdot \overline{\mathbf{h}^{[j]}(e^{-i\omega})}, \quad (3.18)$$

c'est-à-dire

$$P^{[j]}(y) = (1-y)^r \cdot \prod_{k=1}^M (1 - \theta_{j,k} \cdot y)^2. \quad (3.19)$$

Alors le problème pour trouver $\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}(z)$, est équivalent à la construction de $Q^{[j]}(y)$, qui résout le problème de Bezout,

$$P^{[j]}(y) \cdot Q^{[j]}(y) + P^{[j]}(1-y) \cdot Q^{[j]}(1-y) = 1, \quad \forall y \in [0, 1] \quad (3.20)$$

⁽¹⁾A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau, "Biorthogonal bases of compactly supported wavelets," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 45, no. 5, pp. 485-560, 1992.

nous devons maintenant prouver qu'il n'y a pas de zéro commun de $P^{[j]}$ et $P^{[j]}(1 - \cdot)$ sur $[0, 1]$. En effet;

On considère le paramètre $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$, et nous proposons le suivant:

Proposition 3.1.1 *Soient les polynômes $P^{[j]}$, $j \geq j_0$, définissent par (3.19). Supposons que pour tout $j \geq j_0$,*

$$(\gamma_k - \gamma_l) \notin 2^{j+1}\pi i\mathbb{Z}, \quad k, l = 1, \dots, n, \quad \text{avec } \gamma_k \neq \gamma_l \quad (3.21)$$

alors $P^{[j]}$ et $P^{[j]}(1 - \cdot)$, n'ont pas de racines communes sur $[0, 1]$.

Preuve. Supposons que $P^{[j]}$ et $P^{[j]}(1 - \cdot)$, ont une racine commune sur $[0, 1]$. Ceci est équivalent à l'existence d'un certain nombre $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que

$$\mathbf{h}^{[j]}(z_0) = \mathbf{h}^{[j]}(-z_0) = 0. \quad (3.22)$$

D'après la relation (2.53), en déduire que, pour certains $\gamma_k \neq \gamma_l$;

$$1 + e^{-2^{-j-1}\gamma_k} \cdot z_0 = 0 \quad \text{et} \quad 1 + e^{-2^{-j-1}\gamma_l} \cdot (-z_0) = 0 \quad (3.23)$$

Il suit que $(\gamma_k - \gamma_l) \in 2^{j+1}\pi i\mathbb{Z}$, ce qui contredit l'hypothèse initiale. ■

En vertu de la **proposition 3.1.1**, le théorème de Bezout garantit l'existence d'un polynôme unique $Q^{[j]}$ de degré $n - 1$, qui satisfait l'équation (3.20) [37]⁽¹⁾, (voir aussi [32]⁽²⁾). c'est-à-dire la recherche de $Q^{[j]}$ est possible. Toutefois, si les fonctions d'échelle duales correspondants, ont le support le plus court possible, alors le degré de $Q^{[j]}$ doit être contraint de $n - 1$. D'autre part, il est intéressant de constater que;

$$Q^{[j]}(y) = \mathbf{g}^{[j]}(z) \cdot \tilde{\mathbf{g}}^{[j]}(z), \quad \text{avec} \quad y = \frac{-(1-z)^2}{4z}. \quad (3.24)$$

Alors, on peut définir les polynômes de Laurent appropriés par

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h}^{[j]}(z) &= 2\mu_j \cdot \mathbf{g}^{[j]}(z) \cdot \prod_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(1 + e^{\gamma_k 2^{-j-1}} z \right), \\ \tilde{\mathbf{h}}^{[j]}(z) &= 2\mu_j \cdot \tilde{\mathbf{g}}^{[j]}(z) \cdot \prod_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(1 + e^{\gamma_k 2^{-j-1}} z \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

⁽¹⁾C. Vonesch, T. Blu, and M. Unser, "Generalized Daubechies wavelet families," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 9, pp. 4415–4429, 2007.

⁽²⁾D. K. Ruch and P. J. van Fleet, *Wavelet Theory, An Elementary Approach with Application*. Wiley, Canada 2009.

de sorte que les longueurs des $\mathbf{h}^{[j]}$, et $\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}$, sont très proches. Cela nous permet de construire, les fonctions d'échelle non-stationnaire ϕ_j , et $\tilde{\phi}_j$. En particulier, si $\mathbf{g}^{[j]} = 1$, la fonction résultante ϕ_j , devient une B-spline exponentielle d'ordre n . D'autre part, nous écrivons les correspondants, de $\mathbf{h}^{[j]}$, et $\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}$, qui sont obtenus par la mise en $\gamma_k = 0$ pour $k = 1, \dots, n$, (resp.) comme suit:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h}(z) &= 2^{1-n} \cdot (1+z)^n \cdot \mathbf{g}(z), \\ \tilde{\mathbf{h}}(z) &= 2^{1-n} \cdot (1+z)^n \cdot \tilde{\mathbf{g}}(z) \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Pour simplifier la représentation, nous écrivons

$$\mathbf{g}^{[j]}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k^{[j]} \cdot z^k, \text{ et } \mathbf{g}(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \cdot z^k \quad (3.27)$$

Définition 3.1.1 Une fonction $\Phi \in L^2(\mathbb{R})$ à support compact, est dite d'ordre L , si et seulement si, sa transformée de Fourier satisfait la condition;

$$\forall l = 0, \dots, L-1, \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \widehat{\Phi}^{(l)}(2\pi k) = 0.$$

Où, de façon équivalente,

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \widehat{\Phi}(\omega + 2\pi k) = O(\omega^L)$$

La définition actuelle de l'ordre, devient équivalent à des conditions classiques de Strang-Fix [34]⁽¹⁾ si l'on ajoute l'exigence selon laquelle $\widehat{\Phi}(0) \neq 0$. Cette dernière condition est automatiquement satisfaite, si Φ est d'ordre $L \geq 1$, et génère une base de Riesz.

Lemme 3.1.1 Soient $\mathbf{g}^{[j]} = \left(g_k^{[j]} \right)_{k \in \mathbb{Z}}$, et $\mathbf{g} = (g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ avec $j \geq j_0$, alors

$$\|\mathbf{g}^{[j]} - \mathbf{g}\|_1 = O(2^{-j}) \quad (3.28)$$

Preuve. Voir [37]⁽²⁾ ■

⁽¹⁾G. Strang and G. Fix, "A Fourier analysis of the finite element variational method," *in constructive aspects of functional analysis* (G. Geymonat, ed.), pp. 793–840, Rome: Edizioni Cremonese, 1973.

⁽²⁾C. Vonesch, T. Blu, and M. Unser, "Generalized Daubechies wavelet families," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 9, pp. 4415–4429, 2007.

En ce qui concerne $\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}$ avec $j \geq j_0$, la fonction d'échelle $\tilde{\phi}_j$ qui est associée, elle est définie en terme de la transformée de Fourier comme

$$\widehat{\tilde{\phi}}_j(\omega) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \tilde{H}^{[j+k]} \left(\frac{\omega}{2^{k+1}} \right), \quad (3.29)$$

où,

$$\tilde{H}^{[j]}(\omega) = \tilde{\mathbf{h}}^{[j]}(e^{-i\omega}), \quad (3.30)$$

sachant que $\widehat{\tilde{\phi}}_j(\omega) \rightarrow 1$, lorsque $k \rightarrow \infty$.

En fait, $\tilde{\phi}_j$ est la seule fonction associée à $\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}$ tel que $\tilde{\phi}_j$ est une fonction duale de ϕ_j . Bien que le produit infini (3.29), converge simplement, et $\tilde{\phi}_j$ est dans $L^2(\mathbb{R})$, quand $\tilde{\phi}$ est un élément de $L^2(\mathbb{R})$ [37]. Il reste de prouver que, $\tilde{\phi}_j$ est effectivement une fonction duale de ϕ_j .

Les résultats suivants traitent ce problème.

Par souci de simplicité, en utilisant $\mathbf{g}^{[j]}$ et $\tilde{\mathbf{g}}^{[j]}$, définis par (3.25), nous introduisons la notation:

$$G_{k,j} = \sup_{m \geq j} \max_{\omega} \left| \prod_{l=1}^k \mathbf{g}^{[m+l-1]} \left(e^{-i\omega 2^l} \right) \right|^{1/k}, \quad \text{et} \quad \tilde{G}_{\tilde{k},j} = \sup_{m \geq j} \max_{\omega} \left| \prod_{l=1}^{\tilde{k}} \tilde{\mathbf{g}}^{[m+l-1]} \left(e^{-i\omega 2^l} \right) \right|^{1/\tilde{k}} \quad (3.31)$$

Lemme 3.1.2 Soient $\tilde{\phi}_j$, et $\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}$ ont défini par (3.29) et (3.25) respectivement, avec $j \geq j_0$. Supposons que, pour certains entier $\tilde{k} > 0$ tel que

$$\tilde{G}_{\tilde{k},j} < 2^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

alors,

$$\left| \widehat{\tilde{\phi}}_j \right| < c \cdot (1 + |\cdot|)^{-n + \log_2 \tilde{G}_{\tilde{k},j}} \quad (3.32)$$

ce qui implique que $\tilde{\phi}_j \in L^2(\mathbb{R})$. En outre, la fonction $\tilde{\phi}_j$ peut être définie comme (3.29).

Puis ce lemme vaut aussi pour ϕ_j .

Preuve.

Soit $S \in \mathbb{N}$. Nous définissons $\tilde{u}_{j,S}$ par

$$\tilde{u}_{j,S}(\omega) = \left[\prod_{l=0}^S \frac{1}{2} \tilde{H}^{[j+l-1]} \left(\frac{\omega}{2^l} \right) \right] \cdot \chi_{[-\pi, \pi]} \left(\frac{\omega}{2^S} \right) \quad (3.33)$$

Pour $\gamma_k \in \mathbb{C}$, avec $k = 1, \dots, n$, on considère l'ensemble $\omega_{\gamma_k, j}$ définie comme

$$\omega_{\gamma_k, j} = \omega + i \cdot \gamma_k \cdot 2^{-j-1}.$$

Puis, nous obtenons l'identité

$$\prod_{l=1}^S \frac{1}{2} \left| 1 + e^{\gamma 2^{-j-l-1}} \cdot e^{-i \frac{\omega}{2^l}} \right| = \prod_{l=1}^S \frac{1}{2^S} \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega_{k,j}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_{k,j}}{2^{S+1}}\right)} \right|. \quad (3.34)$$

Ici, nous pouvons voir qu'il existe $\tau > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ tel que si:

$$S \geq M \quad \text{et} \quad \left| \frac{\omega}{2^{S+1}} \right| \leq \tau,$$

alors,

$$\left| \sin\left(\frac{\omega_{k,j}}{2^{S+1}}\right) \right| \geq \frac{1}{2} \left| \frac{\omega_{k,j}}{2^{S+1}} \right|.$$

Aussi, il est clair que

$$\left| \sin\left(\frac{\omega_{k,j}}{2}\right) \right| \leq c_1 \cdot \left| \frac{\omega_{k,j}}{2} \right|,$$

pour certains $c_1 > 0$, indépendant de ω , mais dépend de γ_k . Par conséquent, nous avons

$$\frac{1}{2^S} \left| \frac{\sin\left(\frac{\omega_{k,j}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_{k,j}}{2^{S+1}}\right)} \right| \leq c_1 \cdot \left| \frac{\frac{\omega_{k,j}}{2^{S+1}}}{\sin\left(\frac{\omega_{k,j}}{2^{S+1}}\right)} \right| \leq c_2, \quad (3.35)$$

avec $c_2 > 0$, en fonction de γ_k . Ensuite, considérons le cas de

$$\tau < \left| \frac{\omega}{2^{S+1}} \right| \leq \frac{\pi}{2},$$

et soit $\epsilon > 0$, un nombre suffisamment petit pour que $\epsilon < \tau/2$.

Notant que:

$$|\sin(\omega)| \geq \frac{2}{\pi} \cdot |\omega|,$$

pour tous

$$\tau < |\omega| < \frac{\pi}{2}.$$

Pour un j suffisamment grand ($j \geq J$);

$$\begin{aligned} 2^S \cdot \left| \sin(\omega_{k,j} \cdot 2^{-S-1}) \right| &\geq 2^S \cdot \left[2^{-1} \cdot \left| \sin(\omega \cdot 2^{-S-1}) \right| - \left| \sin(\gamma_k \cdot 2^{-j-S-2}) \right| \right] \\ &\geq c_3 \cdot (|\omega| - \epsilon) \geq c_4 \cdot |\omega|, \end{aligned} \quad (3.36)$$

on obtient alors que

$$\frac{1}{2^S} \left| \frac{\sin(\omega_{k,j} \cdot 2^{-1})}{\sin(\omega_{k,j} \cdot 2^{-S-1})} \right| \leq \frac{c}{1 + |\omega|}, \quad (3.37)$$

Pour $c > 0$ en fonction de γ_k . Par conséquent, nous rappelons le fait que

$$\tilde{H}^{[j]}(\omega) = \tilde{\mathbf{h}}^{[j]}(e^{-i\omega}) \quad (3.38)$$

avec $\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}$ défini par (3.25). Nous obtenons pour tout $j \geq J$,

$$|\tilde{u}_{j,S}(\omega)| \leq \frac{c}{(1 + |\omega|)^S} \cdot \prod_{l=1}^S \left| \tilde{\mathbf{g}}^{[J+l-1]}(e^{-i\omega 2^{-l}}) \right| \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega 2^{-S}). \quad (3.39)$$

Ici, en utilisant le même argument, de la proposition 4.8 en [4]⁽¹⁾. Nous pouvons obtenir

$$\prod_{l=1}^n \tilde{\mathbf{g}}^{[J+l-1]}(e^{-i\omega 2^{-l}}) \leq c \cdot (1 + |\omega|)^{\log_2 \tilde{\mathbf{G}}_{\tilde{k},j}}. \quad (3.40)$$

Alors, on peut conclure que,

$$|\tilde{u}_{j,S}(\omega)| \leq c \cdot (1 + |\omega|)^{-n + \log_2 \tilde{\mathbf{G}}_{\tilde{k},j}} \quad (3.41)$$

pour tout $j \geq J$, où $c > 0$, est indépendant de S .

D'après la convergence de $\tilde{u}_{j,S}(\omega)$ vers $\widehat{\phi}_j$, lorsque $S \rightarrow \infty$, on obtient la relation (3.32), avec $j \geq J$.

Maintenant, pour $j < J$, on applique un argument inductif, basé sur l'équation d'échelle

$$\widehat{\phi}_j(\omega) = \tilde{H}^{[j]} \left(\frac{\omega}{2} \right) \cdot \widehat{\phi}_{j+1} \left(\frac{\omega}{2} \right), \quad (3.42)$$

on obtient le résultat voulu.

Le cas de $\widehat{\phi}_j$, peut être fait de manière similaire. ■

Lemme 3.1.3 Soient $\mathbf{h}^{[j]}$, et $\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}$, $j \geq j_0$, définis par (3.25). Supposons que pour certains entiers k , $\tilde{k} > 0$,

$$G_{k,j}, \tilde{G}_{\tilde{k},j} < 2^{\frac{1}{2}(n-1)}, \quad (3.43)$$

avec $G_{k,j}$, $\tilde{G}_{\tilde{k},j}$, définissent par (3.31), alors, pour tout $j \geq j_0$, on a

$$\langle \phi_{j,l}, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle = \delta_{l,k}, \quad l, k \in \mathbb{Z} \quad (3.44)$$

⁽¹⁾A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau, "Biorthogonal bases of compactly supported wavelets," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 45, no. 5, pp. 485–560, 1992.

Preuve.

Rappelant la définition de $\tilde{u}_{j,S}$ en (3.33), et définissant $u_{j,S}$ par

$$u_{j,S}(\omega) = \left[\prod_{l=0}^S \frac{1}{2} H^{[j+l-1]}(\omega 2^{-l}) \right] \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega 2^{-S}) \quad (3.45)$$

nous voyons que $u_{j,S}, \tilde{u}_{j,S}$ convergent simplement vers $\widehat{\phi}_j, \widetilde{\phi}_j$, respectivement.

De plus, en passant par (3.11), nous pouvons obtenir la relation

$$\begin{aligned} \widehat{u_{j,S} \cdot \widetilde{u_{j,S}}}(l) &= \int_0^{\pi \cdot 2^{S+1}} \left[\prod_{l=0}^S \frac{1}{4} H^{[j+l-1]}(\omega 2^{-l}) \cdot \widetilde{H}^{[j+l-1]}(\omega 2^{-l}) \right] \cdot e^{i l \omega} d\omega \\ &= \int_0^{\pi \cdot 2^S} \left[\prod_{l=0}^{S-1} \frac{1}{4} H^{[j+l-1]}(\omega 2^{-l}) \cdot \widetilde{H}^{[j+l-1]}(\omega 2^{-l}) \right] \cdot e^{i l \omega} d\omega \\ &= \widehat{u_{j,S-1} \cdot \widetilde{u_{j,S-1}}}(l) \end{aligned} \quad (3.46)$$

La répétition de ce processus donne l'identité:

$$\widehat{u_{j,S} \cdot \widetilde{u_{j,S}}}(l) = \widehat{u_{j,1} \cdot \widetilde{u_{j,1}}}(l) = 2\pi \delta_{0,l} \quad (3.47)$$

Nous utilisons le **Lemme 3.1.3**, avec $\phi_j, \widetilde{\phi}_j \in L^2(\mathbb{R})$, alors d'après le théorème de la convergence dominé de Lebesgue, il est immédiat que, $u_{j,S}$ et $\tilde{u}_{j,S}$ convergent vers $\widehat{\phi}_j$, et $\widetilde{\phi}_j$ (resp.), en L^2 . Cela implique que $u_{j,S} \cdot \widetilde{u_{j,S}} \rightarrow \widehat{\phi}_j \cdot \widetilde{\phi}_j$, dans L^1 , lorsque $S \rightarrow \infty$.

Maintenant, si on applique le théorème de Plancherel, nous arrivons à la conclusion

$$\langle \phi_j, \widetilde{\phi}_j(\cdot - k) \rangle = \delta_{0,k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

■

Ce résultat prouve que

$$\langle \phi_{j,0}, \widetilde{\phi}_{j,k} \rangle = \delta_{0,k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.48)$$

Pour certains j , en fait pour j (*assez grand*) garantit la condition (3.43), mais la proposition suivante prouve que cette condition de dualité est en effet valable pour toute $j \geq j_0$, sous certaines conditions appropriés sur les symboles \mathbf{h} , et $\widetilde{\mathbf{h}}$ dans (3.26).

Dans l'analyse qui suit, il est utile d'utiliser la notation

$$G_k = \max_{\omega} \left| \prod_{l=1}^k \mathbf{g} \left(e^{-i\omega r 2^l} \right) \right|^{1/k}, \text{ et } \tilde{G}_{\tilde{k}} = \max_{\omega} \left| \prod_{l=1}^{\tilde{k}} \tilde{\mathbf{g}} \left(e^{-i\omega r 2^l} \right) \right|^{1/\tilde{k}} \quad (3.49)$$

avec \mathbf{g} , et $\tilde{\mathbf{g}}$ ont défini par (3.26).

Proposition 3.1.2 $\mathbf{h}^{[j]}$, et $\tilde{\mathbf{h}}^{[j]}$, $j \geq j_0$, soient données dans (3.25). Supposons que pour certains entiers $k, \tilde{k} > 0$,

$$G_k, \tilde{G}_{\tilde{k}} < 2^{\frac{1}{2}(n-1)} \quad (3.50)$$

Preuve.

Avec $G_k, \tilde{G}_{\tilde{k}}$, en (3.31), alors pour tout $j \geq j_0$ on a:

$$\langle \phi_{j,0}, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle = \delta_{0,k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

nous utilisons le **Lemme 3.1.1**, nous constatons que, lorsque $n \rightarrow \infty$, $\mathbf{g}^{[j]}$ et $\tilde{\mathbf{g}}^{[j]}$ convergent uniformément sur $|z| = 1$, vers \mathbf{g} et $\tilde{\mathbf{g}}$ respectivement. Ainsi, on peut en déduire qu'il existe un entier $J \in \mathbb{N}$ (*grand*) tels que

$$G_{k,j}, \tilde{G}_{\tilde{k},j} < 2^{\frac{1}{2}(n-1)}, \quad \forall j \geq J. \quad (3.51)$$

Il résulte de **lemme 3.1.3** que pour tout $j \geq J$,

$$\langle \phi_{j,0}, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle = \delta_{0,k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Pour le cas $j < J$;

Cette propriété peut être obtenue, si en utilisant un argument inductif basé sur l'équation d'échelle non-stationnaire. Plus précisément, on applique (2.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,0}, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n^{[j]} \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{l-2k}^{[j]} \cdot \langle \phi_{j+1,n}, \tilde{\phi}_{j+1,l} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n^{[j]} \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{l-2k}^{[j]} \cdot \delta_{n,l} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n^{[j]} \cdot \tilde{h}_{n-2k}^{[j]} = \delta_{0,k} \end{aligned} \quad (3.52)$$

■

3.2 Propriétés fondamentales

3.2.1 Régularité de fonctions d'échelle

Définition 3.2.1 Pour un k donné, $k = n+s$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $s \in [0, 1]$. L'espace de Holder \mathbf{H}^k [19]⁽¹⁾ est défini comme l'espace des fonctions f , n -fois continûment différentiable, dont la n -ième dérivée $f^{(n)}$, satisfait la condition de Lipschitz;

$$\sup_{x,h \in \mathbb{R}} \frac{|f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)|}{|h|^s} \leq c \quad (3.53)$$

En particulier, la régularité de f , peut être également analysé par l'estimation de la décroissance de f autour ∞ . Si,

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq c \cdot (1 + |\omega|)^{-1-k-\epsilon}, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (3.54)$$

pour une petite arbitraire $\epsilon > 0$, alors f appartient à l'espace \mathbf{H}^k (voir [11]⁽²⁾).

Dans le théorème suivant, sous certaines conditions plus précis sur les G_k , (voir (3.50)), nous obtenons la régularité des fonctions d'échelle non-stationnaire $\widetilde{\phi}_j$, $j \geq j_0$, de type (3.29). La régularité de ϕ_j , peut être démontré d'une manière similaire.

Théorème 3.2.1 Supposons que le polynôme de Laurent $\widetilde{\mathbf{h}}$ dans (3.26), peut être réécrit comme

$$\widetilde{\mathbf{h}}(z) = 2^{-\widetilde{k}} \cdot (1+z)^{\widetilde{k}+1} \cdot \widetilde{\mathbf{g}}(z), \quad \widetilde{k} < m, \quad (3.55)$$

telle que $\widetilde{G}_{\widetilde{k}} < 1$, pour certain $\widetilde{k} \in \mathbb{N}$. Soit $\widetilde{\phi}_j$, $j \geq j_0$, être donnée dans (3.29), avec le symbole $\widetilde{\mathbf{h}}^{[j]}$ dans (3.25), alors $\widetilde{\phi}_j \in \mathbf{H}^{\widetilde{k}+\widetilde{\nu}}$, pour certains $\widetilde{\nu} \in (0, 1)$.

Preuve.

On peut écrire le polynôme de Laurent $\widetilde{\mathbf{h}}^{[j]}$, (voir (3.25)), comme

$$\widetilde{\mathbf{h}}^{[j]}(z) = 2\eta_j \cdot \widetilde{\mathbf{g}}^{[j]}(z) \cdot \prod_{n=1}^{\widetilde{k}+1} \frac{1}{2} \left(1 + e^{\lambda_n \cdot 2^{-j-1}} z \right), \quad \widetilde{k} < m. \quad (3.56)$$

⁽¹⁾H. O. Kim, R.Y. Kim, Y. J. Lee, J. Yoon, "Quasi-interpolatory refinable functions and construction of biorthogonal wavelet systems", *Adv Comput Math*,33:255–283 (2010).

⁽²⁾G.Deslauriers,S. Dubuc, Symmetric iterative interpolation processes. *Constr.Approx.*5,49–68 (1989)

D'autre part, d'après le **lemme 3.1.1**, nous pouvons déduire que $\tilde{\mathbf{g}}^{[j]}(z) \rightarrow \tilde{\mathbf{g}}(z)$, uniformément sur $|z| = 1$, lorsque $j \rightarrow \infty$. Aussi, on implique que $\tilde{G}_{k,j}^r$ (voir (3.31)), converge vers $\tilde{G}_k^r (< 1)$, lorsque $j \rightarrow \infty$. Ainsi, il existe un J assez grand ($J \in \mathbb{N}$), tel que $\tilde{G}_{k,j}^r < 1$, pour tout $j \geq J$, ce qui signifie que $\log_2 \tilde{G}_{k,j}^r < 0$. Par conséquent, rappelant à partir de (3.32) que

$$\left| \widehat{\phi}_j \right| < c \cdot (1 + |\cdot|)^{-\tilde{k}-1+\log_2 \tilde{G}_{k,j}^r}, \quad (3.57)$$

nous voyons que pour tout $j \geq J$, $\tilde{\phi}_j \in \mathbf{H}^{\tilde{k}+\tilde{\nu}}$ avec $\tilde{\nu} \in (0, 1)$. Puis nous considérons le cas de $j < J$.

Par l'application d'un argument inductif basé sur l'équation d'échelle

$$\tilde{\phi}_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{[j]} \cdot \tilde{\phi}_{j+1}(\cdot - k), \quad (3.58)$$

nous montrons que $\tilde{\phi}_j \in \mathbf{H}^{\tilde{k}+\tilde{\nu}}$, pour tout $j < J$. ■

Remarque 3.2.1 *Il est connu d'après A. Cohen, I. Daubechies, et J.-C. Feauveau [4]⁽¹⁾ que, la transformée de Fourier de $\tilde{\phi}$ avec le symbole $\tilde{\mathbf{h}}$ – défini en (3.55) – peut être estimée avec*

$$\left| \widehat{\tilde{\phi}} \right| < c \cdot (1 + |\cdot|)^{-\tilde{k}-1+\log_2 \tilde{G}_k^r}. \quad (3.59)$$

Alors, de la convergence de $\tilde{G}_{k,j}^r$ vers \tilde{G}_k^r , quand $j \rightarrow \infty$, on peut déduire que les fonctions $\tilde{\phi}_j$, $j \geq j_0$, ont la même régularité que $\tilde{\phi}$.

Pour avoir plus de détails sur la régularité optimale de $\tilde{\phi}$, nous renvoyons le lecteur à [33].

3.2.2 Stabilité des ondelettes biorthogonales non stationnaire

Pour chaque $j \geq j_0$, grâce à la condition (2.58), les translatées entières $\phi_j(\cdot - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, sont linéairement indépendante, et en particulier, l'ensemble $\{\phi_j(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$

⁽¹⁾A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau, "Biorthogonal bases of compactly supported wavelets," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 45, no. 5, pp. 485–560, 1992.

forme une base de Riesz pour V_j , ce qui implique, l'existence des constantes $A_j, B_j > 0$ tel que

$$A_j \leq [\widehat{\phi}_j, \widehat{\phi}_j] \leq B_j \quad (3.60)$$

avec le produit, définit par (voir [3]⁽¹⁾):

$$[\widehat{\phi}_j, \widehat{\phi}_j] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}_j(\cdot + 2\pi k) \right|^2.$$

Le groupe C.Vonesch, T.Blu, et M.Unser prouve en [37]⁽²⁾, qu'il existe des constantes $0 < A, B < \infty$ indépendantes de $j \geq j_0$ (mais dépendantes de j_0), telle que

$$A \leq [\widehat{\phi}_j, \widehat{\phi}_j] \leq B, \quad \forall j \geq j_0 \quad (3.61)$$

Néanmoins, dans le cadre des ondelettes non-stationnaire, la stabilité de ϕ_j , n'implique pas la stabilité globale des bases d'ondelettes $\{\psi_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$.

Alors pour cela, en essaye de prouver que la famille $\{\psi_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$, est une Base de Riesz pour $\bigoplus_{j \geq j_0} W_j$. En outre, nous montrons que l'ensemble

$$\Gamma = \{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}},$$

devient une base de Riesz pour l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Dans ce qui suit, nous allons utiliser les notations $\phi^{\mathbf{h}}, \widetilde{\phi}^{\widetilde{\mathbf{h}}}$ se réfèrent aux fonctions d'échelle duales, basées sur la m -ième ordre de polynôme B-spline, et $\psi^{\mathbf{h}}, \widetilde{\psi}^{\widetilde{\mathbf{h}}}$ pour les ondelettes biorthogonales correspondants (à savoir, $\lambda_k = 0$, pour tout $k = 1, \dots, m$).

Lemme 3.2.1 Soient ψ_j et $\widetilde{\psi}_j$ une paire de fonctions ondelettes biorthogonales associés à ϕ_j et $\widetilde{\phi}_j$ (resp.), $j \geq j_0$, alors ψ_j (resp. $\widetilde{\psi}_j$) converge vers $\phi^{\mathbf{h}}$ (resp. $\widetilde{\phi}^{\widetilde{\mathbf{h}}}$), dans $L^2(\mathbb{R})$, lorsque $j \rightarrow \infty$, avec la convergence considéré $O(2^{-j})$.

Preuve.

⁽¹⁾C. de Boor, R. A. DeVore, and A. Ron, "Approximation From Shift-Invariant Subspaces Of $L^2(\mathbb{R}^d)$," *transactions of the american mathematical society*, Vol 341, no.2, 1994

⁽²⁾C. Vonesch, T. Blu, and M. Unser, "Generalized Daubechies wavelet families," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 9, pp. 4415–4429, 2007.

Avec les filtres d'échelle $\mathbf{h}^{[j]}$ et \mathbf{h} , de $\phi^{[j]}$, et $\phi^{\mathbf{h}}$ respectivement, à partir de (3.8), il est clair que

$$\|\psi_j - \psi^{\mathbf{h}}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\mathbf{h}^{[j]} - \mathbf{h}\|_1 \cdot \|\phi_j\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\mathbf{h}\|_1 \cdot \|\phi_j - \phi^{\mathbf{h}}\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad (3.62)$$

Il a été prouvé dans [37]⁽¹⁾, que

$$\|\phi_j - \phi^{\mathbf{h}}\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(2^{-j}) \quad (3.63)$$

lorsque $j \rightarrow \infty$. Ainsi, par le **Lemme 3.1.1**, il est clair que

$$\|\psi_j - \psi^{\mathbf{h}}\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(2^{-j}) \quad (3.64).$$

De manière similaire, nous pouvons montrer la convergence de $\tilde{\psi}_j$, vers $\tilde{\phi}^{\tilde{\mathbf{h}}}$, lorsque $j \rightarrow \infty$. ■

Proposition 3.2.1 *Supposons que ψ_j et $\tilde{\psi}_j$ sont une paire de fonctions ondelettes biorthogonales associée à ϕ_j et $\tilde{\phi}_j$, $j \geq j_0$. On considère:*

$$\psi_{j,k} = 2^{j/2} \cdot \psi_j(2^j \cdot -k) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}_{j,k} = 2^{j/2} \cdot \tilde{\psi}_j(2^j \cdot -k). \quad (3.65)$$

Alors, les deux familles, $\{\psi_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$, et $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$, forment bases de Riesz pour W_j et \tilde{W}_j , respectivement. En outre, il existe des constantes $C, D, \tilde{C}, \tilde{D} > 0$ indépendantes de $j \geq j_0$ (mais dépendantes de j_0), de telle sorte que

$$C \leq [\hat{\psi}_j, \hat{\psi}_j] \leq D, \quad \text{et} \quad \tilde{C} \leq [\hat{\tilde{\psi}}_j, \hat{\tilde{\psi}}_j] \leq \tilde{D} \quad (3.66)$$

Preuve.

Depuis ψ_j et $\tilde{\psi}_j$, sont des fonctions à support compact, il existe alors, des constantes $D_j, \tilde{D}_j > 0$, telle que

$$[\hat{\psi}_j, \hat{\psi}_j] \leq D_j, \quad \text{et} \quad [\hat{\tilde{\psi}}_j, \hat{\tilde{\psi}}_j] \leq \tilde{D}_j. \quad (3.67)$$

Notons que, la condition de dualité

$$\langle \psi_j(\cdot - k), \tilde{\psi}_j \rangle = \delta_{0,k},$$

⁽¹⁾C. Vonesch, T. Blu, and M. Unser, "Generalized Daubechies wavelet families," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 9, pp. 4415–4429, 2007.

est équivalent à

$$\left[\widehat{\psi}_j, \widehat{\psi}_j \right] = 1 \quad (3.68)$$

alors, par l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons

$$\left[\widehat{\psi}_j, \widehat{\psi}_j \right] \cdot \left[\widehat{\psi}_j, \widehat{\psi}_j \right] \geq 1. \quad (3.69)$$

Mettons: $C_j = \widetilde{D}_j^{-1}$, nous obtenons à partir (3.67), que

$$C_j \leq \left[\widehat{\psi}_j, \widehat{\psi}_j \right] \leq D_j, \quad (3.70)$$

en suite, nous montrons que les bornes de Riesz C_j et D_j , $j \geq j_0$, sont dans un certain intervalle $[C, D]$, avec $0 < C, D < \infty$. Pour cela, nous voyons que la fonction 2π périodique $\left[\widehat{\psi}_j, \widehat{\psi}_j \right]$, est de la forme

$$\left[\widehat{\psi}_j, \widehat{\psi}_j \right] (\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{[j]} \cdot e^{-k\omega}, \quad \text{où } c_k^{[j]} = \langle \psi_j, \psi_j(\cdot - k) \rangle. \quad (3.71)$$

Ici, par le **Lemme 3.2.1** ψ_j converge vers $\psi^{\mathbf{h}}$ en $L^2(\mathbb{R})$, lorsque $j \rightarrow \infty$. Ainsi, il s'ensuit que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k^{[j]}$ converge vers $c_k = \langle \psi^{\mathbf{h}}, \psi^{\mathbf{h}}(\cdot - k) \rangle$, quand $j \rightarrow \infty$. En outre, depuis ψ_j est à support compact, uniquement un nombre fini de $c_k^{[j]}$ est non nul. Ce qui donne:

$$\left[\widehat{\psi}_j, \widehat{\psi}_j \right] (\omega) \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot e^{-k\omega} = [\psi^{\mathbf{h}}, \psi^{\mathbf{h}}] (\omega), \quad \text{quand } j \rightarrow \infty \quad (3.72)$$

Par conséquent, nous déduisons que les bornes de Riesz C_j et D_j , convergent vers $C_{\psi^{\mathbf{h}}}$ et $D_{\psi^{\mathbf{h}}}$ (resp.), quand $j \rightarrow \infty$, dans lesquelles représentent, les bornes de Riesz (*supérieure et inférieure*) de $\psi^{\mathbf{h}}$. Alors nous pouvons conclure que:

$$C \leq \left[\widehat{\psi}_j, \widehat{\psi}_j \right] \leq D \quad \forall j \geq j_0, \quad (3.73)$$

avec $C, D > 0$, des constantes indépendantes de $j \geq j_0$.

De la même manière, il peut être prouvé que

$$\widetilde{C} \leq \left[\widehat{\psi}_j, \widehat{\psi}_j \right] \leq \widetilde{D} \quad \forall j \geq j_0, \quad (3.74)$$

avec $\widetilde{C}, \widetilde{D} > 0$, des constantes indépendantes de $j \geq j_0$, aussi. ■

La proposition ci-dessus discute la stabilité des fonctions d'ondelettes à chaque niveau, mais le vrai problème qui se pose est; comment assurer la stabilité globale de la famille, $\{\psi_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$ (resp. $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$).

Les résultats suivantes traitent ce problème.

Notation 3.2.1 notons que:

$$\Omega = \{(j, k) \in \mathbb{Z}^2, j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}\} \quad (3.75)$$

Lemme 3.2.2 Supposons que ψ_j et $\tilde{\psi}_j$ sont une paire de fonctions ondelettes biorthogonales, associée à ϕ_j et $\tilde{\phi}_j$, $j \geq j_0$. Alors il existe deux constantes $D, \tilde{D} > 0$ en fonction de j_0 , tel que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$\sum_{(j,k) \in \Omega} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq D \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \text{ et } \sum_{(j,k) \in \Omega} |\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle|^2 \leq \tilde{D} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (3.76).$$

Preuve.

On considère

$$\psi_{j,k}^{\mathbf{h}} = 2^{j/2} \cdot \psi^{\mathbf{h}}(2^j \cdot - k) \quad (3.77)$$

et mentionnons que $\psi^{\mathbf{h}}$, a le même support que ψ_j pour tout $j \geq j_0$.

Mettons,

$$S_k = \text{supp } \psi^{\mathbf{h}}(\cdot - k) \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Alors, nous observons que:

$$\begin{aligned} |\langle f, \psi_{j,k} - \psi_{j,k}^{\mathbf{h}} \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot (\psi_{j,k}(x) - \psi_{j,k}^{\mathbf{h}}(x)) dx \right| \\ &\leq 2^{-j/2} \cdot \int_{S_k} |f(2^{-j}x) \cdot [\psi_j(x-k) - \psi_j^{\mathbf{h}}(x-k)]| dx \\ &\leq 2^{-j/2} \cdot \|\psi_j - \psi_j^{\mathbf{h}}\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \left(\int_{S_k} |f(2^{-j}x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq c \cdot 2^{-j} \left(\int_{2^{-j}S_k} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Où le dernier borne, est obtenue par le **lemme 3.2.1** Puis, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{(j,k) \in \Omega} |\langle f, \psi_{j,k} - \psi_{j,k}^{\mathbf{h}} \rangle|^2 &\leq c \cdot \sum_{(j,k) \in \Omega} 2^{-2j} \cdot \int_{2^{-j} S_k} |f(x)|^2 dx \\
&= c \cdot \sum_{j \geq j_0} 2^{-2j} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq c \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (3.79)
\end{aligned}$$

Mettre tout cela ensemble, il est immédiat que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{(j,k) \in \Omega} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{(j,k) \in \Omega} |\langle f, \psi_{j,k}^{\mathbf{h}} \rangle|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{(j,k) \in \Omega} |\langle f, \psi_{j,k} - \psi_{j,k}^{\mathbf{h}} \rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq D_{\psi^{\mathbf{h}}} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} + c \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = D \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (3.80)
\end{aligned}$$

Pour une certaine constante $D > 0$, $D_{\psi^{\mathbf{h}}}$ est la borne supérieure de riesz, de $\psi^{\mathbf{h}}$. De même, nous pouvons prouver la seconde relation en (3.78). ■

Nous arrivons maintenant à des résultats centraux dans ce travail.

Théorème 3.2.2 *Supposons que ψ_j et $\tilde{\psi}_j$ sont une paire de fonctions ondelettes biorthogonales associée à ϕ_j et $\tilde{\phi}_j$, $j \geq j_0$. Alors, les deux familles, $\{\psi_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$ et $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$, forment des bases de Riesz, pour les espaces $\bigoplus_{j \geq j_0} W_j$, et $\bigoplus_{j \geq j_0} \tilde{W}_j$, respectivement.*

Preuve.

Soit f une fonction dans l'espace $\bigoplus_{j \geq j_0} W_j$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et **Lemme 3.2.2**, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \lim_{J \rightarrow \infty} \sum_{j=j_0}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \cdot \overline{\langle f, \psi_{j,k} \rangle} \\
&\leq \left(\sum_{(j,k) \in \Omega} |\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{(j,k) \in \Omega} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \tilde{D}^{1/2} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \left(\sum_{(j,k) \in \Omega} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \right)^{1/2} \quad (3.81)
\end{aligned}$$

pour $\tilde{D} > 0$. Mettons $C = \tilde{D}^{-1}$, nous avons

$$C \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{(j,k) \in \Omega} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \quad (3.82)$$

D'après le **lemme 3.2.2**, nous concluons

$$C \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{(j,k) \in \Omega} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq D \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (3.83)$$

Pour $D > 0$. En outre, il est clair que $\psi_{j,k}; (j,k) \in \Omega$, sont linéairement indépendantes, ce qui prouve que la famille, $\{\psi_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$, constitue une base de Riesz pour l'espace $\bigoplus_{j \geq j_0} W_j$ (Voir [6]⁽¹⁾). De même, on peut montrer que $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$ forme une base de Riesz pour $\bigoplus_{j \geq j_0} \widetilde{W}_j$. ■

De la convergence de $\phi_j \rightarrow \phi^{\mathbf{h}}$, et $\tilde{\phi}_j \rightarrow \tilde{\phi}^{\mathbf{h}}$, dans $L^2(\mathbb{R})$, quand $j \rightarrow \infty$, nous pouvons conclure que, la projection biorthogonale $P_j f$ avec $f \in L^2(\mathbb{R})$, sur l'espace $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, tel que

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle \cdot \phi_{j,k} \in V_j, \quad (3.84)$$

converge vers f sur L^2 , quand $j \rightarrow \infty$.

$P_j f$: représente une approximation de f , à une résolution de 2^{-j} .

Alors sur la base de cette observation, nous obtenons les résultats suivantes.

Théorème 3.2.3 *On se donne ψ_j et $\tilde{\psi}_j$; une paire de fonctions d'ondelettes biorthogonales associée à ϕ_j et $\tilde{\phi}_j$ (resp.), avec $j \geq j_0$. Alors l'ensemble*

$$\Gamma = \{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}},$$

forme une base de Riesz pour l'espace $L^2(\mathbb{R})$. Ce résultat s'applique d'une manière égale à l'ensemble

$$\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\phi}_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}.$$

Preuve.

Pour une fonction donnée $f \in L^2(\mathbb{R})$, Pour simplifier la notation, nous définissons les suites:

$$\mathbf{c} = \left(\langle f, \phi_{j_0,k} \rangle \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \text{ et } \mathbf{d}_j = \left(\langle f, \psi_{j,k} \rangle \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad j \geq j_0 \quad (3.85)$$

⁽¹⁾C. K. Chui, An Introduction to Wavelets, of *Wavelet Analysis and Its Applications*, vol. 1 Academic Press, Boston, Mass, USA, 1992.

De même, pour les séquences:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \left(\langle f, \tilde{\phi}_{j_0,k} \rangle \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \text{ et } \tilde{\mathbf{d}}_j = \left(\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \quad j \geq j_0 \quad (3.86)$$

Il a été prouvé dans [37]⁽¹⁾, qu'il existe des constantes $\tilde{A}, \tilde{B} > 0$, tel que

$$\tilde{A} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \|\tilde{\mathbf{c}}\|_2^2 \leq \tilde{B} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (3.87)$$

En outre, par le **théorème 3.2.2**,

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \|\tilde{\mathbf{d}}_j\|_2^2 \leq \tilde{D} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (3.88)$$

Pour une certaine constante $\tilde{D} > 0$, alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le **théorème 3.2.2**, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \lim_{J \rightarrow \infty} \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\phi}_{j_0,k} \rangle \cdot \langle f, \phi_{j_0,k} \rangle + \sum_{j=j_0}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle \cdot \langle f, \psi_{j,k} \rangle \right] \\ &\leq \left(\|\mathbf{c}\|_2^2 + \sum_{j=j_0}^{\infty} \|\mathbf{d}_j\|_2^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\|\tilde{\mathbf{c}}\|_2^2 + \sum_{j=j_0}^{\infty} \|\tilde{\mathbf{d}}_j\|_2^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \max(\tilde{B}, \tilde{D})^{1/2} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \left(\|\mathbf{c}\|_2^2 + \sum_{j=j_0}^{\infty} \|\mathbf{d}_j\|_2^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Mettons: $E = \max(\tilde{B}, \tilde{D})^{-1}$. Nous avons

$$\mathbf{E} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \|\mathbf{c}\|_2^2 + \sum_{j=j_0}^{\infty} \|\mathbf{d}_j\|_2^2 \quad (3.90)$$

Il est clair que, d'après l'lemme **3.1.5**, nous pouvons conclure

$$\mathbf{E} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \|\mathbf{c}\|_2^2 + \sum_{j=j_0}^{\infty} \|\mathbf{d}_j\|_2^2 \leq \mathbf{F} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (3.91)$$

Pour une certaine constante $F > 0$. Cela prouve que l'ensemble Γ , constitue une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$ voir [7]⁽²⁾. De même, nous pouvons montrer que $\tilde{\Gamma}$, constitue une base de Riesz de $L^2(\mathbb{R})$. ■

⁽¹⁾C. Vonesch, T. Blu, and M. Unser, "Generalized Daubechies wavelet families," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 9, pp. 4415–4429, 2007.

⁽²⁾O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, Boston, Mass, USA, 2003.

La décomposition en ondelettes d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, à échelle j_0 , donc définie par:

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k^{[j_0+1]} \cdot \phi_{j_0,k} + \sum_{j \geq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k^{[j+1]} \cdot \psi_{j,k} \quad (3.92)$$

où,

$$x_k^{[j+1]} = \langle f, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle \quad \text{et} \quad y_k^{[j+1]} = \langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \quad (3.93)$$

C'est la même formule que dans la théorie classique, mais nous inscrivons que les ondelettes $\psi_{j,k}$ (resp. $\tilde{\psi}_{j,k}$) sont dilatées et translatées par l'ondelette mère ψ_j (resp. $\tilde{\psi}_j$), qu'elle change complètement en fonction de l'échelle j .

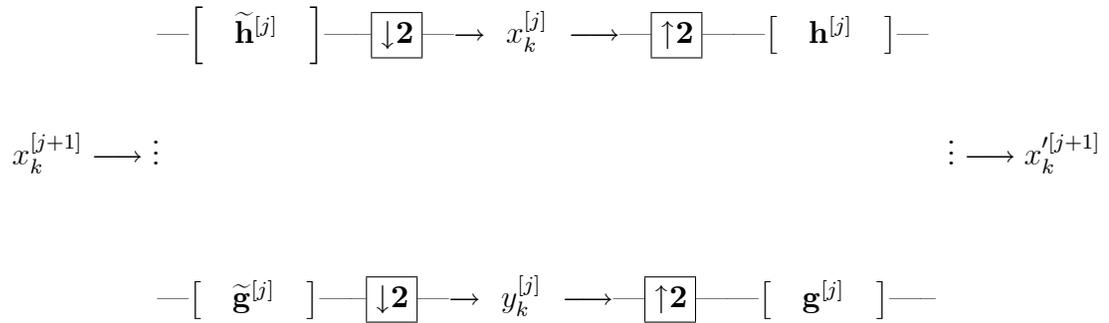


Fig.3.1. bancs de filtres à reconstruction parfaite non-stationnaire

Illustration du Fig. 3.1

Les bancs de filtre dans la **Fig.3.1.**, mettent en œuvre les opérations de décomposition et de reconstruction en terme de séquences discrètes $(x_k^{[j+1]})_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(y_k^{[j+1]})_{k \in \mathbb{Z}}$, à différentes échelles j . La partie supérieure gauche du banc de filtre calcule $(x_k^{[j]})_{k \in \mathbb{Z}}$, d'après $(x_k^{[j+1]})_{k \in \mathbb{Z}}$, tandis que le cadre en bas à gauche, donne les coefficients d'ondelettes $(y_k^{[j]})_{k \in \mathbb{Z}}$. Il s'agit d'un filtre de reconstruction tel que $x_k'^{[j+1]} = x_k^{[j+1]}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, dû à la condition de biorthogonalité (3.11), et la définition des filtres $\tilde{\mathbf{g}}^{[j]}$ et $\mathbf{g}^{[j]}$. La seule différence avec la transformée en ondelettes rapide dû à S. Mallat[26]⁽¹⁾, est que les filtres dépendent du paramètre d'échelle j .

⁽¹⁾S. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, pp. 674–693, July 1989.

Chapitre 4

Conclusion

Dans ce travail, nous avons élaboré soigneusement une étude sur les ondelettes non stationnaire à travers l'analyse multirésolution non stationnaire approprié.

Dans le premier chapitre, nous avons parlé de quelques notions générales dont nous avons besoin dans notre collaboration sur les ondelettes classiques; Précisément, nous avons rappelé les principales propriétés des ondelettes orthogonales et biorthogonales dans lesquelles sont introduites à travers l'analyse multirésolution dans $L^2(\mathbb{R})$. Après la représentation de l'algorithme de Mallat, en plus nous avons discuté dans ce chapitre sur certaines caractéristiques inéluctables voire importantes qui ont été pris en compte dans le choix d'une ondelette, en particulier le nombre de moments nuls et la régularité.

Dans le deuxième chapitre, nous avons fait une étude sur les bases d'ondelettes orthogonales non stationnaire. Il s'agit d'une généralisation où l'ondelette mère change complètement à chaque échelle, ainsi nous avons décrit la manière de construction d'une base d'ondelette non stationnaire orthogonale avec certaines propriétés spécifiques. En plus, nous avons examiné un exemple concret pour l'analyse multirésolution non stationnaire à travers les B-splines exponentielles. Ensuite nous avons étudié une application bien détaillée concernant le lien entre les bases non stationnaire et l'approximation optimale d'une fonction donnée.

Pour ce qui est du dernier chapitre, il a été consisté à présenter une étude sur les bases d'ondelettes biorthogonales non stationnaire. D'abord nous avons illustré des notions fondamentales concernant l'analyse multirésolution biorthogonale non station-

naire, puis nous avons exposé une méthode de construire une base d'ondelette non stationnaire basée sur les B-splines exponentielles, ensuite nous avons étudié quelques propriétés mathématiques; telles que la régularité et la stabilité des bases d'ondelettes non stationnaire biorthogonales.

Bibliographie

- [1] I. A. Bogge and F. J. Narcowich, *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
- [2] C. Boor, R. DeVore, and A. Ron. On the construction of (pre)wavelets. *Constructive Approximation, Special Issue on Wavelets*, 09, 123–166, 1993.
- [3] C. de Boor, R. A. DeVore, and A. Ron, “Approximation From Shift-Invariant Subspaces Of $L^2(\mathbb{R}^d)$,” *transactions of the american mathematical society*, Vol 341, no.2, 1994.
- [4] A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau, “Biorthogonal bases of compactly supported wavelets,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 45, no. 5, pp. 485–560, 1992.
- [5] A. Cohen. *Wavelet Methods in Numerical Analysis*, volume VII. In handbook of numerical analysis edition, 1999.
- [6] C. K. Chui, *An Introduction to Wavelets*, vol. 1 of *Wavelet Analysis and Its Applications*, Academic Press, Boston, Mass, USA, 1992.
- [7] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser, Boston, Mass, USA, 2003.
- [8] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1992.
- [9] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure, Applied Math*, XLl(41):909-996, 1988.

- [10] I. Daubechies and J. Lagarias, Two-scale difference equations I Existence and global regularity of solutions, *SIAM J. Math. Anal.* 22, 1388-1410, 1991.
- [11] G.Deslauriers,S. Dubuc, Symmetric iterative interpolation processes. *Constr. Approx.* 5 ,49–68, 1989.
- [12] N. Dyn, D. Levin, and A. Luzzatto, “Refining oscillatory signals by non-stationary subdivision schemes,” in *Modern Developments in Multivariate Approximation*, vol. 145 of *International Series of Numerical Mathematics*, pp. 125–142, Birkhäuser, Basel, Switzerland, 2003.
- [13] N. Dyn and A. Ron. Cardinal translation invariant Tchebycheffian B-splines. *Approximation Theory and its Applications*, 6(2):1-12, 1990.
- [14] N. Dyn and D. Levin, “Analysis of asymptotically equivalent binary subdivision schemes,” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 193, no. 2, pp.594–621,1995. 1995.
- [15] M. W. Frazier, *An Introduction to Wavelets Through Linear Algebra*. Editors S. Axler F.W.Gehring K.A. Ribert. Springer.
- [16] B.Han and Z.Shen, Characterization of Sobolev Spaces of arbitrary Smoothness using non stationary tight Wavelet frames. *NSERC, Grant RGP228051*. Canada 2007.
- [17] R. Q. Jia and J. Wang, “Stability and linear independence associated with wavelet decompositions,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 117, no. 4, pp.1115–1124, 1993.
- [18] Khalidov and M. Unser, “From differential equations to the construction of wavelet-like bases,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, pp. 1256–1267, 2006.
- [19] H. O. Kim, R.Y. Kim ,Y. J. Lee , J. Yoon, "Quasi-interpolatory refinable functions and construction of biorthogonal wavelet systems", *Adv Comput Math*, 33:255–283, 2010.

- [20] Y. J. Lee and J. Yoon. Analysis of Compactly Supported Nonstationary Biorthogonal Wavelet Systems Based on Exponential B-Splines. *Hindawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis*, Article ID 593436, 17 pages, 2011.
- [21] K. Melkemi, A non stationary Wavelet bases: Abest basis selection. *SETIT* 2009.
- [22] K. Melkemi. *Orthogonalité des B-splines de Chebyshev cardinales dans un espace de Sobolev pondéré*. PhD thesis Université Joseph Fourier de Grenoble, France 1999.
- [23] K. Melkemi. Generalized expectation : a new approach. *Research report. LMA Biskra. MCS#5/08, 2008*.
- [24] S. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer Math. Soc.*, 315:69-87, September 1989.
- [25] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Editions de L'Ecole polytechnique. 91128 Palaiseau Cedex. Décembre (2009).
- [26] S. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, pp. 674–693, July 1989.
- [27] Y. Meyer. *Wavelets and Operators*. Advanced mathematics. Cambridge University Press, 1992.
- [28] Y. Meyer. *Ondelettes et Opérateurs*, TOM I. Paris, Hermann, (1990).
- [29] V. Maxim. *Restauration des signaux bruités observés sur des plans d'expérience aléatoires*. Doctorat thesis. Université Joseph Fourier. de Grenoble, France 2003.
- [30] H. G. ter Morsche. Interpolational and extramal proprieties of L-spline functions. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, (1982).
- [31] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, (1976).

- [32] D. K. Ruch and P. J. van Fleet, *Wavelet Theory, An Elementary Approach with Application*. Wiley.Canada (2009).
- [33] L. L. Schumaker. *Spline Functions : Basic Theory*. Wiley, (1981).
- [34] G. Strang and G. Fix, “A Fourier analysis of the finite element variational method,” in *Constructive aspects of functional analysis (G. Geymonat, ed.)*, pp. 793–840, Rome: Edizioni Cremonese, 1973.
- [35] F.Truchelet, *Ondelettes pour le signal numérique*, Edition Hermes, Paris 1998
- [36] M. Unser and T. Blu, “Cardinal exponential splines. I. Theory and filtering algorithms,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 4, pp. 1425–1438, 2005.
- [37] C. Vonesch, T. Blu, and M. Unser, “Generalized Daubechies wavelet families,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 9, pp. 4415–4429, 2007.
- [38] F. D. Walnut, *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhäuser, Boston, (2002).