

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

**UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA**

FACULTÉ des SCIENCES EXACTES et des SCIENCES de la NATURE et de la VIE

**DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES**



Thèse

Présentée en vue de l'obtention du :

DIPLÔME DE DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Option : **Mathématiques Appliquées**

Par

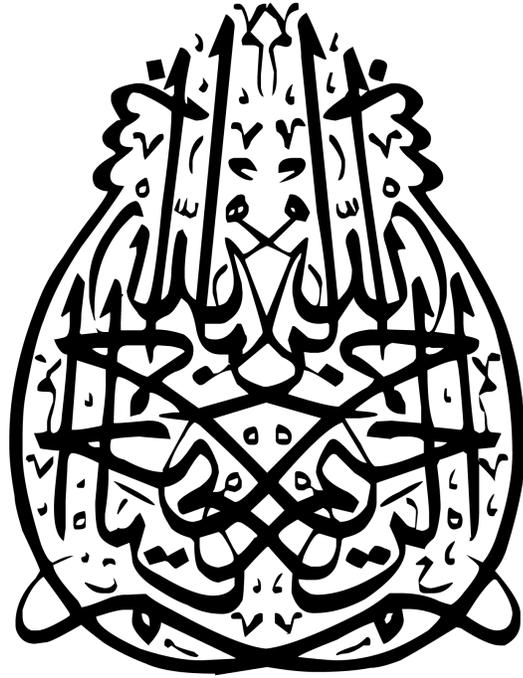
Laiadi abdelkader

Titre :

Sur quelques problèmes d'écoulements à  
surfaces libres avec tension de surface

Soutenue le 18 /04 /2018 devant le jury composé de

Mokhtari Zouhir	Professeur	Université de Biskra	Président
Merzougui Abdelkrim	M.C.A	Université de M'sila	Encadreur
Benterki Djamel	Professeur	Université de Setif-1	Examineur
Gasmi Abdelkader	Professeur	Université de M'sila	Examineur
Khelfallah Nabil	M.C.A	Université de Biskra	Examineur
Khelil Naceur	M.C.A	Université de Biskra	Examineur



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse, Docteur **Merzougui Abdelkrim**, pour ses conseils, sa grande disponibilité et sa générosité avec laquelle il m'a fait partager ses travaux, ses idées et ses intuitions. La pertinence de ses questions et de ses remarques ont toujours su me motiver et me diriger dans mes recherches. Je lui témoigne enfin ma profonde reconnaissance pour m'avoir fait confiance en me proposant de venir travailler avec lui, et pour son soutien constant au cours de ces années.

J'exprime mes plus sincères remerciements au Professeur **Mokhtari Zouhir**, qui a accepté de présider le jury de cette thèse. Je le remercie profondément pour les suggestions importantes qu'il m'a faites.

Mes plus vifs remerciements s'adressent à Messieurs les Professeurs **Benterki Djamel**, **Gasmi Abdelkader**, **Khelfallah Nabil** et **Khelil Naceur** qui m'ont fait l'honneur de participer au jury. Je les remercie très chaleureusement.

Je voudrais remercier aussi Dr. **Yahia Djabrane** chef de département de mathématiques et tous les professeurs des mathématiques.

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens à remercier naturellement tout mes amis, pour leur soutien tout au long de mes études.

Enfin, et à ce stade, ils doivent déjà se sentir oubliés, je pense à ma mère, mon père, mes frères et toute ma famille. Leurs amour, affection et soutien sont au-dessus de tous les remerciements.

Et pour finir, je pense à mes préférés et favoris collaborateurs : ma femme et mes enfants.

## Abstract

The main of this thesis is to study the problems of free surface potential flow of an in viscid incompressible fluid. The flow is assumed to be study two dimensional and irrotational. The problems are formulated as an integral equation for the unknown shapes of the free surface. This equation is then discretized and the resulting algebraic equations are solved by Newton's method. We take into account the effect of surface tension and the effect of gravity. In this case, the problem is characterized by two-parameters : the inverse Weber number and the Froude number . These problems is solved numerically by using boundary integral equation technique. More specifically, the numerical method used is based on an integro-differential equation reformulation. In our thesis, we studied three problems :

- 1- Free surface flow over a triangular depression.
- 2- Free surface flow over a two triangular depressions.
- 3- Free surface flow under a sluice gate.

**Keywords :** Free surface flow, potential flow, Froude number, Weber number, integro-differential equation, surface tension, gravity.

## Résumé

Le but de cette thèse est d'étudier les problèmes d'un écoulement potentiel, bidimensionnel à surface libre d'un fluide incompressible et non visqueux. On suppose que l'écoulement est stationnaire et irrotationnel. Les problèmes reviennent à la résolution de l'équation de Laplace dans le domaine de l'écoulement avec des conditions aux limites non linéaires sur la surface libre de forme inconnue. On tient compte de l'effet de la tension de surface et l'effet de la gravité. Dans ce cas, le problème se caractérise par l'inverse de nombre de Weber et le nombre de Froude . Il résout numériquement. Nous adoptons la méthode numérique en utilisant d'équation integro-différentielle. Le problème se réduit à un système algébrique de  $N$  équations non linéaires qu'on résout par la méthode de Newton. Dans notre travail, on a étudié trois problèmes :

- 1- Ecoulement à surface libre sur une dépression triangulaire.
- 2- Ecoulement à surface libre au dessus de deux dépressions triangulaires.
- 3- Ecoulement à surface libre sous un barrage.

**Mots clés :** Ecoulement à surface libre, écoulement potentiel, nombre de Froude, nombre de Weber, équation integro-différentielle, tension de surface, gravité.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>vi</b>
<b>Notations</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions préliminaires sur la mécanique des fluides</b>	<b>4</b>
1.1 Introduction . . . . .	4
1.2 Description lagrangienne . . . . .	4
1.2.1 Vitesse et accélération . . . . .	5
1.3 Description eulérienne . . . . .	5
1.4 Définitions . . . . .	6
1.4.1 Dérivée partielle et dérivée matérielle . . . . .	6
1.4.2 Écoulement stationnaire . . . . .	8
1.4.3 Écoulement uniforme . . . . .	8
1.4.4 Écoulement irrotationnel . . . . .	8
1.4.5 Débit volumique et débit massique . . . . .	9
1.5 Lignes fluides . . . . .	9
1.5.1 Les trajectoires . . . . .	9
1.5.2 Lignes de courant . . . . .	10

1.6	Equations de base pour un écoulement potentiel des fluides incompressibles.	11
1.6.1	Formule de Green-Ostogradsky . . . . .	11
1.6.2	Equation de conservation de la masse . . . . .	11
1.6.3	Fluide incompressible . . . . .	13
1.6.4	Fonction de courant dans le cas d'un écoulement plan . . . . .	13
1.6.5	Ecoulement plan d'un fluide incompressible avec potentiel de vitesse .	15
1.7	Equations des quantités de mouvement . . . . .	16
1.7.1	Loi de comportement . . . . .	16
1.7.2	Théorème de transport . . . . .	16
1.7.3	Equation de Navier-Stokes . . . . .	17
1.7.4	Equation d'Euler . . . . .	20
1.7.5	Equation de Bernoulli . . . . .	21
1.7.6	Solutions pour des écoulements potentiels bidimensionnels à base de la théorie de la variable complexe. . . . .	22
1.7.7	Potentiel complexe et vitesse complexe . . . . .	23
1.8	Analyse dimensionnelle . . . . .	23
1.8.1	Théorème $\pi$ de Vaschy-Buckingham . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Problème d'un écoulement à surface libre sur une dépression triangulaire</b>	<b>25</b>
2.1	Introduction . . . . .	25
2.2	Formulation du problème . . . . .	27
2.3	L'équation intégrro-différentielle . . . . .	35
2.4	Procédure numérique . . . . .	40
2.4.1	Calcul numérique de $\tau$ . . . . .	40
2.4.2	Forme de la surface libre . . . . .	41
2.5	Résultats et discussion . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Résolution numérique d'un problème d'écoulement à surface libre au dessus de multiple obstacles</b>	<b>49</b>

3.1	Introduction . . . . .	49
3.2	Formulation du problème . . . . .	52
3.3	L'équation intégro-différentielle . . . . .	58
3.4	Procédure numérique . . . . .	59
3.4.1	Forme de la surface libre . . . . .	61
3.5	Résultats et discussion . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Ecoulement à surface libre sous un barrage avec l'effet de la tension de surface et de la gravité</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	Formulation du problème . . . . .	68
4.3	L'équation intégro-différentielle . . . . .	73
4.4	Procédure numérique . . . . .	75
4.4.1	Forme de la surface libre . . . . .	77
4.5	Résultats et discussion . . . . .	78
	<b>Conclusion</b>	<b>84</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>86</b>
	<b>Annexe A : Abréviations et Méthode de Newton</b>	<b>90</b>
4.6	Méthode de Newton . . . . .	90
4.6.1	Algorithme de Newton pour la résolution de systèmes non linéaires $F(X)=0$ . . . . .	92
4.6.2	Résolution d'un système linéaire $AX = b$ par la méthode de Jordon avec stratégie du pivot total implicite . . . . .	93
4.7	Méthode de trapèze . . . . .	93

# Table des figures

2.1	Le plan complexe $z = x + iy$ , la forme de la surface libre $EF$ est obtenue pour $Fr = 5, \delta = 2$ et $\gamma = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	26
2.2	Le plan complexe $f = \phi + i\psi$ . . . . .	29
2.3	Le demi plan supérieur $\zeta = \alpha + i\beta$ . . . . .	34
2.4	Le chemin $\Gamma$ dans $\zeta$ -plan . . . . .	36
2.5	Forme de la surface libre pour $Fr = \infty$ et pour quelques valeurs de l'inverse du nombre de Weber $\delta$ . . . . .	43
2.6	Forme de la surface libre pour $\delta = 0$ et pour quelques valeurs du nombre de Froude $Fr$ . . . . .	44
2.7	Forme de la surface libre pour $Fr = 0.5$ et pour quelques valeurs de $\delta$ ( cas subcritique). . . . .	45
2.8	Forme de la surface libre pour $Fr = 1.2$ et pour quelques valeurs de $\delta$ ( cas supercritique). . . . .	46
2.9	Forme de la surface libre pour $Fr = 1.5$ et pour quelques valeurs de $\delta$ . . . . .	47
2.10	Forme de la surface libre pour $\delta = 0$ et pour quelques valeurs de $Fr$ . . . . .	48
3.1	Le plan complexe $z = x + iy$ . . . . .	51
3.2	Le plan complexe $f = \phi + i\psi$ . . . . .	53
3.3	Le plan complexe $\zeta = \alpha + i\beta$ . . . . .	57
3.4	Forme de la surface libre pour $\delta = 0$ a) cas subcritique pour $Fr = 0.2, 0.6$ et 0.9. b) cas supercritique pour $Fr = 1.1, 1.5$ et 2. . . . .	62

3.5	Forme de la surface libre pour quelques valeurs de $\delta$ . c) cas subcritique pour $Fr = 0.2$ . d) cas supercritique pour $Fr = 5$ . . . . .	63
3.6	Forme de la surface libre pour $Fr = \infty$ et $\delta = 1, 10$ et $100$ . . . . .	64
4.1	Ecoulement sous un barrage dans le plan complexe $z = x + iy$ . . . . .	67
4.2	Le plan complexe $f = \phi + i\psi$ . . . . .	69
4.3	Le plan complexe $\zeta = \alpha + i\beta$ . . . . .	72
4.4	Forme de la surface libre pour a) $\delta = 0.7, Fr = 2$ b) $\delta = 10, Fr = 2$ . La flèche indique la position du point de séparation $C$ où l'écoulement quitte l'ouverture du barrage. . . . .	80
4.5	Forme de la surface libre pour c) $\delta = 1, Fr = 2.5$ d) $\delta = 1, Fr = 1$ . La flèche indique la position du point de séparation $C$ où l'écoulement quitte l'ouverture du barrage. . . . .	81
4.6	Forme de la surface libre pour $\delta = 5, Fr = 1.5$ et $\phi_C = 0.075$ . . . . .	82
4.7	La variation du degré de contraction $C_c$ en fonction de l'inverse du nombre de Weber $\delta$ . . . . .	82
4.8	L'effet de la tension de surface sur la forme de la surface libre à droite $CD$ . .	83

## Notations

$T$	Tension de surface.
$Fr$	Nombre de Froude.
$\delta$	Inverse de nombre de Weber.
$g$	Gravité.
$H$	Hauteur du fluide à l'infini.
$\vec{V}$	Vecteur de vitesse.
$U$	Vitesse à l'infini.
$u; v$	Composantes du vecteur vitesse.
$\xi$	Vitesse complexe conjugué.
$f$	Fonction potentielle complexe.
$\phi$	Fonction potentiel de vitesse.
$\psi$	Fonction de courant.
$q$	Module de la vitesse.
$t$	Temps.
$Q_v$	Débit volumique.
$Q_m$	Débit massique.
$\rho$	Densité du fluide.
$p_0$	Pression atmosphérique.
$p$	Pression du fluide.
$\vec{\tau}$	Tenseur des contraintes visqueuses.
$\vec{\sigma}$	Tenseur des contraintes.
$\vec{e}_T; \vec{n}$	Vecteur unitaire tangentiel et normal.
$\vec{1}$	Tenseur identité.
$\vec{\zeta}$	Tenseur de vitesse de déformation.
$\mu, \eta$	Coefficients de viscosité.

$K$	Courbure de la surface libre.
$R$	Rayon de courbure.
$\vec{\gamma}$	Accélération.
$\theta$	Angle de pente de la vitesse.
div	Divergence.
$\Delta$	Laplacien.
$rot$	Rotationnel.
$\vec{\text{grad}}$	Gradient.
$\frac{d}{dt}, \frac{D}{Dt}$	Dérivée matérielle.
$\frac{\partial}{\partial t}$	Dérivée par rapport au temps.
$ds; dv$	Element de surface, élément de volume.

# Introduction

Plusieurs applications dans la mécanique des fluides comportent l'intersection des surfaces libres avec des parois rigides. Un exemple classique est l'écoulement produit par l'intersection de la ligne de courant (surface de l'eau) avec la coque d'un bateau. Dans cette thèse nous nous restreignons aux écoulements potentiels et bidimensionnels. On suppose également qu'il n'y a pas de vitesse dans la troisième dimension. La raison pour laquelle on suppose que les problèmes d'écoulement soient bidimensionnels est que la théorie de fonctions analytiques puisse être appliquée, ce qui permet aux solutions numériques d'être obtenues. On suppose également que l'écoulement est stationnaire et irrotationnel et le fluide est incompressible et non visqueux. L'étude et les résultats sont présentés sur la nature des singularités qui peuvent se produire à l'intersection des surfaces libres et les parois rigides.

Comme nous allons le voir, les problèmes reviennent à la résolution de l'équation de *Laplace* dans le domaine de l'écoulement avec des conditions aux limites non linéaires sur la surface libre qui est de forme inconnue. Nous adoptons une méthode numérique de discrétisation de tout le plan de l'écoulement en utilisant des transformations conformes qui réduisent le problème de discrétisation uniquement sur la surface libre.

Lorsque les effets de la force de la tension de surface et de la gravité sont négligés. La solution du problème est obtenue explicitement et la forme de la surface libre est déterminée paramétriquement en utilisant la théorie des lignes de courant libres et des transformations conformes voir Gurevich [21]. Dans le cas où l'effet de la tension de la surface est prise en compte ou la force de gravité est non nulle, le problème ne peut être résolu que par une approche numérique à cause du terme non linéaire figurant dans la condition au bord de la surface libre. La solution est obtenue en utilisant la méthode d'équations intégrales qui a été

traitée par plusieurs auteurs, citons : King et bloor [33], Forbes et Schwartz [15], Jean Marc Vanden-Broeck [44] et P. Guayjarernpanishk et J. Asavanant [20]. Le problème est caractérisé par l'inverse du nombre de *Weber*  $\delta$  si la tension de la surface est non nulle ( $T \neq 0$ ) et le nombre de *Froude*  $Fr$  si la gravité n'est pas négligeable ( $g \neq 0$ ).

Ce travail est composé de quatre chapitres et annexe :

**Le premier chapitre** contient quelques notions préliminaires concernant les écoulements potentiels, bidimensionnels et les équations générales du mouvement des fluides.

Dans **le deuxième chapitre**, on étudie le problème d'un écoulement potentiel, bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux passant au dessus d'une dépression de forme triangulaire. Si les effets de la tension de surface et la force de gravité ne sont pas négligeables, dans ce cas, le problème sera caractérisé par l'inverse du nombre de *Weber*  $\delta$  et le nombre de *Froude*  $Fr$ . Nous adoptons la méthode numérique d'équation integro-différentielle. Le problème se réduit à un système algébrique de  $N$  équations non linéaires qu'on résout par la méthode de *Newton*. On constate que l'algorithme converge pour tout  $\delta > 0$  et pour tout  $Fr > 0$ . On détermine la solution pour chaque valeur de l'inverse du nombre de *Weber*  $\delta > 0$  et pour chaque nombre de *Froude*  $Fr > 0$ .

**Le troisième chapitre** traite le problème d'un écoulement au-dessus de deux obstacles de formes triangulaires, en tenant compte de l'effet de la tension de surface et l'effet de la gravité. Dans ce cas, on peut résoudre ce problème numériquement en se basant sur la même méthode décrite dans le chapitre précédent. On constate que d'après les résultats obtenus que la solution du problème existe et elle est unique pour tout l'inverse du nombre de *Weber*  $\delta$  et tout nombre de *Froude*  $Fr$ .

Dans **le quatrième chapitre**, on présente l'étude du problème d'un écoulement potentiel d'un fluide incompressible et non visqueux sous un barrage d'ouverture inclinée faisant un angle  $\gamma$  avec l'horizontal telle que  $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$  dans le cas où l'on tient compte particulièrement de l'effet de la tension de surface et l'effet de la gravité. La solution exacte du problème envisagée est impossible à obtenir à cause de la présence du terme non linéaire intervenant dans l'équation de *Bernoulli*. Pour cette raison, on résout le problème par une approche

numérique. La méthode utilisée dans ce chapitre est la même utilisée dans les chapitres précédents. La solution sera déterminée pour chaque valeurs de  $\delta$  et  $Fr$ . Notons qu'il existe deux surfaces libres, la première avant l'ouverture du barrage avec des ondes mais la deuxième après l'ouverture est sans ondes. Ces résultats ont été confirmés par P. Guayjarernpanishk [20] et Vanden Broeck [44] dans le cas la gravité n'est pas négligé et la tension de la surface est nulle.

Ce travail est complété par une annexe où on présente la méthode de *Newton* pour la résolution d'un système d'équation non linéaire et la règle de trapèze.

# Chapitre 1

## Notions préliminaires sur la mécanique des fluides

### 1.1 Introduction

Pour décrire en terme de mathématiques l'état d'un fluide en mouvement est qu'en chaque point  $P(x, y, z)$  du domaine de l'écoulement et à chaque instant on puisse déterminer un certain nombre de propriétés physiques : pression  $p$ , masse volumique  $\rho$ , vitesse  $V...$  etc et que toutes ces quantités qui sont des fonctions des variables  $x, y, z$  et de l'instant  $t$  soient des fonctions continues en ces variables.

### 1.2 Description lagrangienne

Cette méthode consiste à étudier les différentes quantités ( masse volumique  $\rho$ , température  $\mathcal{T}$ , pression  $p...$  etc ) pour chaque particule individuellement, lors de son mouvement.

Dans la description lagrangienne, on décrit le mouvement par les trajectoires des particules d'identités déterminées. On rappelle que la trajectoire est le lieu géométrique des positions de la particule au cours du temps. L'identité d'une particule est donnée par sa position initiale  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ . La description du mouvement est donc de déterminer le vecteur position

$\vec{x}(M_0, t)$  à tout instant  $t$  pour toutes les particules du fluide

$$\vec{x} = \vec{x}(M_0, t) \quad \text{où} \quad \vec{x} = \vec{x}(x_0, y_0, z_0, t)$$

c'est-à-dire

$$x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t)$$

### 1.2.1 Vitesse et accélération

#### Vitesse

Pour une particule fluide donnée, i.e., pour  $\vec{P}$  fixé, la vitesse est donnée par :

$$\vec{V}(\vec{P}, t) = \left. \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right|_{\vec{P}}$$

soit, en notation tensorielle :

$$v_i(p_j, t) = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{p_j}$$

#### Accélération

Pour une particule fluide donnée, i.e., pour  $\vec{P}$  fixé, l'accélération est donnée par :

$$\vec{\gamma}(\vec{P}, t) = \left. \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right|_{\vec{P}}$$

soit, en notation tensorielle :

$$\gamma_i(p_j, t) = \left. \frac{\partial v_i}{\partial t} \right|_{p_j}$$

## 1.3 Description eulérienne

La méthode *d'Euler* consiste à décrire l'écoulement en donnant les composantes du vecteur vitesse et autres quantités physiques en chaque point de l'espace, i.e., on fixe un point dans

l'espace et on remarque les variations des quantités liées aux particules du fluide passant par ce point.

- A l'instant  $t_1$ , on détermine en  $M$  une particule  $P_1$  de vitesse  $\vec{V}$  et d'autres caractéristiques physiques  $K$ .

- A l'instant  $t_2 = t_1 + dt$ , on trouve au même point  $M$  de l'espace, une autre particule  $P_2$  de vitesse et des caractéristiques physiques différentes.

Donc, on a en  $M$  et à l'instant  $t_1$

$$\vec{V} = \vec{V}(P_1, t_1) = \vec{V}(x, y, z, t_1)$$

et

$$K = K(P_1, t_1) = K(x, y, z, t_1)$$

et à l'instant  $t_2$ , on a en même point  $M$

$$\vec{V} = \vec{V}(P_2, t_2) = \vec{V}(x, y, z, t_2)$$

$$K = K(P_2, t_2) = K(x, y, z, t_2)$$

## 1.4 Définitions

### 1.4.1 Dérivée partielle et dérivée matérielle

Puisque dans la description *d'Euler*, le champ vecteur vitesse  $\vec{V} = \vec{V}(X, t)$  et les autres caractéristiques sont données en fonction du point  $X$  de l'espace et du temps  $t$  indépendamment de la particule du fluide qui occupe le point  $X$  au temps. On doit différencier entre deux formes de dérivées par rapport au temps.

**1- Dérivée partielle**  $\frac{\partial}{\partial t}$  : la dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial t}$  est une dérivée partielle usuelle en considérant  $X$  et  $t$  comme variables indépendantes.

**2- Dérivée matérielle**  $\frac{D}{Dt}$  : la dérivée matérielle  $\frac{D}{Dt}$  est la dérivée partielle par rapport au

temps d'une caractéristique d'une particule donnée.

A l'instant  $t$ , une particule  $P$  occupe le point de l'espace  $M_1(x, y, z)$  et à l'instant  $t + \Delta t$ , la même particule  $P$  occupe un autre point de l'espace  $M_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ .

Alors, on a

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta x.e_1 + \Delta y.e_2 + \Delta z.e_3$$

et

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

La relation entre  $\frac{\partial}{\partial t}$  et  $\frac{D}{Dt}$  est donné par :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad})$$

En effet, la différentielle totale d'une quantité  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x, y, z, t)$  est

$$DK = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial z} dz$$

par suite

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

Lorsque les points  $M_1$  et  $M_2$  représentent les positions successives d'une même particule de fluide, aux instants successives  $t$  et  $t + \Delta t$ , on trouve les quantités

$$\frac{dx}{dt} = v_1, \frac{dy}{dt} = v_2, \frac{dz}{dt} = v_3$$

avec  $v_1, v_2, v_3$  sont les composantes de la vitesse  $\vec{v}$  de la particule.

On déduit

$$\frac{DK}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x} v_1 + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial y} v_2 + \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial z} v_3$$

Ainsi, l'accélération  $\vec{\gamma}$  de la particule est

$$\vec{\gamma} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned} (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 + (\overrightarrow{\text{grad}} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{V} \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 + (\text{rot} \vec{V}) \wedge \vec{V} \end{aligned}$$

on trouve

$$\vec{\gamma} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 + (\text{rot} \vec{V}) \wedge \vec{V}$$

où  $\wedge$  désigne le produit vectoriel et  $\text{rot} \vec{V}$  est le rotationnel du vecteur  $\vec{V}$ .

### 1.4.2 Écoulement stationnaire

On appelle écoulement stationnaire ou encore écoulement permanent, un écoulement dont toutes les caractéristiques quantitatives sont indépendantes du temps, en particulier pour la vitesse  $\partial\vec{V}(x_1, x_2, x_3, t)/\partial t = 0$ . Cela signifie simplement que les lignes de courant n'évoluent pas au cours du temps. Il est facile de voir que dans un écoulement stationnaire les lignes de courant sont les mêmes que les trajectoires.

### 1.4.3 Écoulement uniforme

On appelle écoulement uniforme si les composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace, sinon il est non-uniforme.

### 1.4.4 Écoulement irrotationnel

On dit qu'un écoulement est irrotationnel si :

$$\text{rot} \vec{V} = 0$$

Cette équation va apporter des simplifications importantes dans les équations du mouvement. Nous rappelons qu'un champ vectoriel  $\vec{V}(x; y)$  dont le rotationnel est nul peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire. C-à-dire qu'il existe une fonction  $\phi(x; y)$  telle que :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\phi$$

$\phi$  représente le potentiel de vitesse.

Due à l'existence d'une fonction potentielle, les écoulements irrotationnels sont dit écoulements potentiels.

### 1.4.5 Débit volumique et débit massique

1. Soit  $S$  une surface fixe dans un domaine du fluide en mouvement. On suppose  $S$  est orientable et  $\vec{n}$  est sa normale unitaire en un point  $N$  de  $S$ . On appelle débit volumique ( ou flux du vecteur vitesse ) à travers la surface  $S$  le scalaire  $Q_v$  défini par :

$$Q_v = \int_S V(N, t) \cdot \vec{n} ds ; N \in S$$

2. On appelle débit massique ( ou flux de la quantité du mouvement ) à travers la surface  $S$  le scalaire  $Q_m$  défini par :

$$Q_m = \int \rho(N, t) V(N, t) \cdot \vec{n} ds ; N \in S$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide.

## 1.5 Lignes fluides

### 1.5.1 Les trajectoires

On appelle trajectoire de la particule, l'ensemble des positions occupées par la particule au cours du temps.

1. La description de *Lagrange* donne directement la trajectoire, en effet :

$$X = \mathcal{L}(X, t)$$

est l'équation paramétrée par  $t$  de la trajectoire de la particule identifiée par  $X$ .

2. Si le mouvement est décrit par la méthode *d'Euler* la connaissance des trajectoires revient à la description de *Lagrange* selon la méthode d'équivalence. Les trajectoires sont alors solution du système différentiel :

$$\frac{dX}{dt} = V$$

alors :

$$\frac{dx_1}{dv_1} = \frac{dx_2}{dv_2} = \frac{dx_3}{dv_3} = dt$$

### 1.5.2 Lignes de courant

La description eulérienne conduit elle aussi à une représentation du champ de vitesse, à un instant  $t$ , sous la forme d'une famille de lignes tangentes en chaque point au vecteur vitesse, que l'on appelle lignes de courant. L'équation des lignes de courant se déduit directement de cette définition en écrivant que : Un petit déplacement  $X$  sur la ligne de courant est colinéaire au vecteur vitesse :

$$\vec{V} \wedge dX = 0 \quad \text{soit} \quad \varepsilon_{jk} v_j dx_k = 0$$

En développant cette relation, on obtient :

$$\begin{cases} v_2 dx_3 - v_3 dx_2 = 0 \\ v_3 dx_1 - v_1 dx_3 = 0 \\ v_1 dx_2 - v_2 dx_1 = 0 \end{cases}$$

Les lignes de courant sont donc les intégrales du système différentiel :

$$\frac{dx_1}{v_1(X, t)} = \frac{dx_2}{v_2(X, t)} = \frac{dx_3}{v_3(X, t)}$$

Dans lequel  $t$  à la valeur fixée. Les lignes de courant ne peuvent pas se couper.

## 1.6 Equations de base pour un écoulement potentiel des fluides incompressibles.

### 1.6.1 Formule de Green-Ostogradsky

Soit un volume  $V_0$  de frontière la surface  $S$  et  $\vec{n}$  le vecteur normal à  $S$  pointant vers l'extérieur du volume  $V_0$ . Soit  $\vec{\mathcal{F}}$  un champ vectoriel défini dans un voisinage de  $V_0$ ; alors la formule de *Green -Ostogradsky* est donnée par :

$$\int_S (\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{n}) ds = \int_{V_0} \text{div} (\vec{\mathcal{F}}) dv$$

### 1.6.2 Equation de conservation de la masse

Considérons un fluide occupant un volume  $V_0$  de densité  $\rho(x, t)$  et de frontière une surface fermé  $S$ . La quantité (la masse) de fluide contenue dans ce volume est égale à

$$m(t) = \int_{V_0} \rho(x, t) dv$$

La variation de la masse contenue dans le volume  $V_0$  est donnée par :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho(x, t) dv = \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) dv \quad (1.1)$$

D'autre part, la variation de la masse est égale au flux massique qui passe à travers la surface  $S$ . Soit  $\vec{n}$  est le vecteur normal unitaire à un élément de surface de  $S$ ,  $\vec{V}$  le vecteur vitesse

alors le flux massique est donné par :

$$\int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds \quad (1.2)$$

En identifiant les deux expressions (1.1) et (1.2) on obtient :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho(x,t) dv = - \int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds$$

D'après le théorème de divergence ( *Green-Ostogradsky* ) :

$$\int_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \int_{V_0} \text{div} \rho \vec{V} dv$$

On obtient ainsi

$$\int_{V_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} \right) dv = 0$$

Puisque cette expression doit être vérifiée quel que soit le volume considéré, nous obtenons :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{V} = 0$$

Cette équation est connue sous le nom " équation de continuité". On peut écrire cette équation sous une autre forme. Nous avons en effet :

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = \rho \text{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho$$

Donc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \text{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho = 0$$

et par suite il vient :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{V} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{où } \frac{D\rho}{Dt} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho$$

### 1.6.3 Fluide incompressible

un fluide est dit incompressible si :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Par conséquent l'équation de continuité (1.3) devient :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho = 0$$

**Cas particulier :**

1. Ecoulement stationnaire, i-e  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . L'équation de continuité prend la forme  $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho = 0$ .

Il existe trois cas possibles :

- a)  $\vec{V} = 0$  et  $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho$  quelconque, l'équation est valable pour un fluide au repos.
- b)  $\vec{V} \neq 0$  et  $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho = 0$ .  $\rho$  est constant dans l'espace et dans le temps, i-e  $\rho = \text{const}$ .
- c)  $\vec{V}$  et  $\overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho$  sont orthogonaux en tout point de l'écoulement.

### 1.6.4 Fonction de courant dans le cas d'un écoulement plan

Dans un domaine  $D$ , un écoulement du fluide est dit :

a) Plan (ou bidimensionnel) si en tout point de ce domaine, à l'instant  $t$ , le vecteur vitesse  $\vec{V}$  est parallèle à un plan donné ( $p$ ).

Dans le cas des fluides incompressibles - que l'écoulement soit stationnaire ou non - l'équation de continuité se réduit alors à :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.4)$$

L'équation (1.4) exprime la condition pour qu'il existe une fonction  $\psi(x, y, t)$ , dite fonction de courant et définie, à une constante près, par les expressions

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = u \quad (1.5)$$

En effet, l'équation (1, 4) est la condition nécessaire et suffisante pour que l'expression :

$$-vdx + udy$$

Soit une différentielle exacte d'une fonction de  $x$  et de  $y$ . De la relation (1.5), on peut déduire :

$$u \frac{\partial\psi}{\partial x} + v \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0. \quad (1.6)$$

Ainsi, à un instant  $t_0$  donné, le vecteur-vitesse  $(u, v)$ , tangent à la ligne de courant, est normal au vecteur  $\left[ \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y} \right]$ , lui même normal à ligne de courant  $\psi(x, y, t_0) = \text{const}$ . Ceci revient à dire que les lignes de courant ont pour équation :

$$\psi(x, y, t_0) = \text{const}$$

Dans ce le flux à travers une courbe finie  $\mathcal{C}$  qui part d'une ligne de courant pour obtenir une autre est donné par :

$$q_v = \int_{\mathcal{C}} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dl$$

où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal à  $\mathcal{C}$  en tous ces points et orienté dans le sens de l'écoulement. Ainsi

$$q_v = \int_{\mathcal{C}} \left( -\frac{dy}{dl} u + \frac{dx}{dl} v \right) dl = \int_{\mathcal{C}} (vdx - udy)$$

Les relations (1.5) donnent :

$$q_v = \int_{\mathcal{C}} d\psi = \psi_2 - \psi_1$$

### 1.6.5 Écoulement plan d'un fluide incompressible avec potentiel de vitesse

Résumons les fait exposés :

**1-** Dans le cas d'un écoulement plan d'un fluide incompressible, l'équation de conservation de la masse, est donnée par (1.4), ceci implique qu'il existe une fonction de courant  $\psi(x, y, t)$  vérifiant (1.5).

Tandis que le caractère irrotationnel du mouvement i.e  $rot \vec{V} = 0$ , que traduit l'équation :

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1.7)$$

entraîne l'existence d'une fonction potentiel  $\phi(x, y, t)$  vérifiant

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.8)$$

**2-** Quand le double caractère d'incompressibilité et d'irrotationnalité est rempli, les fonctions  $\phi$  et  $\psi$ , vérifient :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.9)$$

Ces relations sont connues sous le nom de *Cauchy-Riemann*, qui permettent de trouver le potentiel de vitesse à partir de la fonction de courant ou inversement. On déduit aussi de la relation (1.9), que les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  vérifient toutes les deux l'équation de *Laplace* :

En effet, si on porte les valeurs de  $u$  et de  $v$  dans l'équation (1.4) on obtient :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.10)$$

et, si l'on les porte dans l'équation (1.7) on obtient :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.11)$$

## 1.7 Equations des quantités de mouvement

### 1.7.1 Loi de comportement

Il existe plusieurs types de lois de comportement. Nous nous intéresserons à la loi comportement des fluides dits *Newtoniens*. Cette loi s'écrit sous la forme

$$\vec{\sigma} = -p\vec{1} + \vec{\tau}$$

où  $p$  est la pression,  $\vec{1}$  le tenseur identité et  $\vec{\tau}$  le tenseur des contraintes visqueuses.  $\vec{\tau}$  est donné par la relation :

$$\vec{\tau} = 2\mu\vec{\zeta} + \eta\vec{1} \operatorname{div} \vec{V}$$

où  $\mu$  et  $\eta$  sont deux coefficients de viscosité de *Lamé* et  $\vec{\zeta}$  est le tenseur symétrique de vitesse de déformation linéaire avec

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{V} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}^t \vec{V} \right)$$

### 1.7.2 Théorème de transport

En Mécanique des Fluides, l'évolution des grandeurs matérielles est analysée à l'aide d'équations intégrales de bilan sur des domaines fluides macroscopiques. Le transport de ces grandeurs dans l'écoulement est explicité en suivant le mouvement ; il est par conséquent nécessaire d'établir l'expression de la dérivée particulière d'une intégrale volumique.

Soit  $\Omega_v$  un volume de frontière la surface  $S$  occupé à l'instant  $t$  par un fluide et soit  $F(M, t)$  une caractéristique ( scalaire, vecteur, tenseur ) définie au voisinage de  $\Omega_v$ .  $F(M, t)$  est une fonction du temps  $t$  et de la position  $M$  de chaque particule qui elle continue et dérivable.

Alors, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_v} F dv = \int_{\Omega_v} \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div} F \vec{V} \right) dv$$

$\vec{V}$  est le champ de vecteur vitesse. L'intégrand du second membre peut être transformé en utilisant l'identité

$$\operatorname{div} (F\vec{V}) = F \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \overrightarrow{\operatorname{grad}} F$$

et en introduisant la dérivée particulaire

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V} \overrightarrow{\operatorname{grad}} F$$

On écrira donc

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_v} F dv = \int_{\Omega_v} \left( \frac{dF}{dt} + F \operatorname{div} \vec{V} \right) dv$$

Appliquons le théorème de transport à une grandeur matérielle  $\rho F$  (où  $F$  apparaît comme une densité volumique) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_v} \rho F dv = \int_{\Omega_v} \left( \frac{\partial \rho F}{\partial t} + \operatorname{div} \rho F \vec{V} \right) dv$$

et développons le second membre :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_v} \rho F dv = \int_{\Omega_v} \left[ F \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} \right) + \rho \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{V} \overrightarrow{\operatorname{grad}} F \right) \right] dv$$

D'après le principe de conservation de la masse, on a :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{V} = 0$ . On obtient donc une forme particulière du théorème de transport :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_v} \rho F dv = \int_{\Omega_v} \rho \frac{dF}{dt} dv$$

### 1.7.3 Equation de Navier-Stokes

On considère le domaine fluide  $D$ , délimité par la surface  $S$ . Les forces agissantes sur une particule de fluide sont :

- 1) Forces de volume qui agissent sur la masse de la particule, par exemple forces de pesanteur.

Elles sont données par la formule

$$\vec{F}_V = \int_D \rho \vec{F} dv$$

où  $\vec{F}$  est la force par unité de volume.

2) Forces de surface qui agissent sur les surfaces de la particule, par exemple forces de pression, forces de viscosité. Elles sont données par :

$$\vec{F}_S = \int_S f(x, n) ds$$

où  $f(x, n)$  est la force par unité de surface. Il existe un tenseur des contraintes  $\vec{\sigma}$  tel que  $f(x, n) = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ ;  $\vec{n}$  étant le vecteur normal à  $ds$ .

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à ce domaine

$$\sum \vec{F} = \frac{D}{Dt} (m \vec{V})$$

où  $m \vec{V}$  est la quantité du mouvement de la particule. La quantité du mouvement totale dans  $D$  est

$$\int_D \rho \vec{V} dv$$

Donc

$$\sum \vec{F} = \frac{D}{Dt} \int_D \rho \vec{V} dv$$

D'après le théorème de transport on a :

$$\frac{D}{Dt} \int_D \rho \vec{V} dv = \int_D \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv$$

Alors

$$\int_D \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv = \int_D \rho \vec{F} dV + \int_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} ds$$

D'après la formule de divergence, on a :

$$\int_S \vec{\sigma} \cdot \vec{n} ds = \int_D \operatorname{div} \vec{\sigma} dv$$

Ce qui donne :

$$\int_D \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dv = \int_D \left( \rho \vec{F} dv + \operatorname{div} \vec{\sigma} \right) dv$$

Puisque  $D$  est quelconque

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} + \operatorname{div} \vec{\sigma}$$

Quant les forces de volume dérivent d'un potentiel  $\mathcal{U}$  on a :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} \mathcal{U}$$

on aura alors

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\rho \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mathcal{U} + \operatorname{div} \vec{\sigma} \quad (1.12)$$

par ailleurs les fluides considérés sont *Newtoniens* on a :  $\vec{\sigma} = -p \vec{1} + \vec{\tau}$ . Donc

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\sigma} &= \operatorname{div} \left( -p \vec{1} \right) + \operatorname{div} \vec{\tau} \\ &= -p \operatorname{div} \vec{1} - \vec{1} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p + \operatorname{div} \vec{\tau} \\ &= -\overrightarrow{\operatorname{grad}} p + \operatorname{div} \vec{\tau} \end{aligned}$$

où  $p$  est la pression,  $\vec{1}$  le tenseur identité et  $\vec{\tau}$  le tenseur des contraintes visqueuses.

L'équation (1.12) devient alors :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \underbrace{-\rho \overrightarrow{\operatorname{grad}} \mathcal{U}}_{\text{force de volume}} - \underbrace{\overrightarrow{\operatorname{grad}} p}_{\text{force de pression}} + \underbrace{\operatorname{div} \vec{\tau}}_{\text{force de viscosité}}$$

si le fluide est de type *Newtonien* on aura :

$$\vec{\tau} = 2\mu \vec{\zeta} + \eta \vec{1} \operatorname{div} \vec{V}$$

où  $\mu$  est le coefficient de viscosité dynamique,  $\eta$  est un second coefficient et  $\vec{\zeta}$  est le tenseur symétrique de vitesse de déformation linéaire.

En utilisant les relations

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}}^t \vec{V} \right)$$

et

$$\text{div} \left( \overrightarrow{\text{grad}}^t \vec{V} \right) = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \text{div} \vec{V} \right)$$

On obtient alors, en supposant  $\mu$  et  $\eta$  constants

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\rho \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{U} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{V} + (\mu + \eta) \overrightarrow{\text{grad}} \left( \text{div} \vec{V} \right) \quad (1.13)$$

Cette équation est connue sous le nom de « équation de *Lamb* ».

### Cas des fluides incompressibles

Dans le cas d'un fluide incompressible, on a  $\text{div} \vec{V} = 0$ . L'équation (1.13) devient alors :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\rho \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{U} - \overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \Delta \vec{V}$$

Cette équation est connue sous le nom de « équation de *Navier-Stokes* ».

### 1.7.4 Equation d'Euler

Si on néglige la viscosité, l'équation de *Navier-Stokes* devient :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} p$$

Cette équation est développée par *Euler* est nommée après lui.

L'équation *d'Euler* peut être écrite sous une autre forme on a tout d'abord :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{V}$$

donc

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left( \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \vec{F} \quad (1.14)$$

Sachant que l'on a l'égalité suivante :

$$\left(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2}\right) + \left(\text{rot} \vec{V}\right) \wedge \vec{V}$$

En substituant cette équation dans l'équation (1.14) on a :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{F} - \left(\text{rot} \vec{V}\right) \wedge \vec{V} \quad (1.15)$$

### 1.7.5 Equation de Bernoulli

A partir de l'équation *d'Euler* pour un fluide incompressible et parfait et lorsque les forces de volume dérivent d'un potentiel l'équation (1.15) s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2}\right) + \left(\text{rot} \vec{V}\right) \wedge \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p - \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{U}$$

On a alors :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \mathcal{U}\right) + \left(\text{rot} \vec{V}\right) \wedge \vec{V} = 0$$

et dans le cas d'un écoulement permanent ( stationnaire ), on peut écrire :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \mathcal{U}\right) + \left(\overrightarrow{\text{grad}} \wedge \vec{V}\right) \wedge \vec{V} = 0$$

où  $\left(\text{rot} \vec{V}\right) \wedge \vec{V} = \left(\overrightarrow{\text{grad}} \wedge \vec{V}\right) \wedge \vec{V}$ . On projette cette équation sur une ligne de courant de vecteur unitaire  $\vec{s}$ , on a alors :

$$\frac{\partial}{\partial s} = \vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$$

ce qui donne :

$$\vec{s} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \mathcal{U}\right) + \vec{s} \cdot \left(\overrightarrow{\text{grad}} \wedge \vec{V}\right) \wedge \vec{V} = 0$$

Comme  $\vec{s}$  et  $\vec{V}$  sont colinéaires  $\vec{s} \cdot \left(\overrightarrow{\text{grad}} \wedge \vec{V}\right) \wedge \vec{V} = 0$

Ainsi, on aura :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \mathcal{U} \right) = 0$$

Le long d'un filet fluide on a alors :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \mathcal{U} = \text{const} \quad \text{le long d'une ligne de courant.}$$

Les forces de volume se réduisent le plus souvent à la seule force de pesanteur, dans ce cas, on a :

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const} \tag{1.16}$$

En général, la constante change avec la ligne de courant.

### 1.7.6 Solutions pour des écoulements potentiels bidimensionnels à base de la théorie de la variable complexe.

La théorie de variables complexes offre une méthode très puissante pour l'obtention de solutions de l'équation de *Laplace*. Au lieu de considérer  $\phi$  et  $\psi$  comme étant des fonctions de  $x$  et  $y$ , on utilise une nouvelle variable  $z$ , qui représente la variable complexe :  $z = x + iy$

Dans le plan des  $x$  et  $y$ , toute fonction  $f(z)$  de la variable  $z$  peut s'écrire :

$$f(z) = f(x + iy) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

On rappelle qu'une fonction  $f(z)$  est dite analytique au point  $z$  s'il existe un cercle de centre  $z$  et de rayon non nul tel que, les fonctions  $\phi(x, y)$  et  $\psi(x, y)$  ont des dérivées partielles continues vérifiant (1.9). On démontre que toute fonction analytique en un point possède en ce point une dérivée et réciproquement.

D'une manière plus générale, si une fonction  $f(z)$  est analytique en un point  $z$ , elle admet une suite illimitée de dérivées successives qui sont des fonctions analytiques au point  $z$ .

L'existence et la continuité des dérivées d'un ordre quelconque permettent de déduire, des

relations (1.9), les équations (1.10) et (1.11).

### 1.7.7 Potentiel complexe et vitesse complexe

En un point  $M(x, y)$  d'un écoulement plan à la fois incompressible (existence d'une fonction de courant  $\psi(x, y)$ ) et irrotationnel (existence d'une fonction potentiel  $\phi(x, y)$ ); les composantes  $u$  et  $v$  du vecteur vitesse  $\vec{V}(x, y)$  satisfont aux relations (1.9). La fonction complexe définie par :

$$f(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y)$$

qui est, au point  $z$ , une fonction analytique; nous l'appellerons fonction potentiel complexe. La dérivée  $\frac{df}{dz}$ , qui est aussi une fonction analytique est donnée par l'expression :

$$\xi(z) = \frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv$$

Cette dérivée est appelée vitesse complexe au point  $z$ , l'image conjuguée de la fonction complexe  $\vec{V} = u + iv$ , qui représente le vecteur vitesse au point  $z$ .

## 1.8 Analyse dimensionnelle

Avant de résoudre un problème, nous devons écrire l'équation qui régit le phénomène en variables non dimensionnelles. Pour cela, nous introduisons quelques notions et théorèmes pour passer d'une équation physique en variables dimensionnelles à une équation dont les variables sont sans dimensions physiques.

Nous utilisons le théorème  $\pi$  de *Vaschy-Buckingham*, qui montre comment on rend sans dimension une équation physique. L'emploi des variables non dimensionnelles réduit le nombre de paramètres qui détermine la solution d'un problème. Si un phénomène physique dépend de  $N$  variables dimensionnelles, on peut rendre ces variables sans dimensions en les réduisant à  $N - k$ , avec ( $k = 1, \dots, 4$ ). Les quatre variables universellement connues sont la longueur  $L$ , la masse  $m$ , la température  $\mathcal{T}$  et le temps  $t$ . Nous démontrons que les variables non di-

mensionnelles peuvent être sélectionnées de plusieurs manières. Elles paraissent relativement avec peu de paramètres non dimensionnels dans chaque cas.

### 1.8.1 Théorème $\pi$ de Vaschy-Buckingham

Le théorème  $\pi$  de *Vaschy-Buckingham* est un théorème fondamental à l'analyse dimensionnelle, il a été énoncé et publié par *Vaschy* et *Buckingham* en 1914, il peut être énoncé comme suit : soit un phénomène physique comprenant  $N$  variables, dans les dimensions des quelles interviennent  $k$  grandeurs fondamentales, l'équation :

$$f(q_1, q_2, \dots, q_N) = 0$$

qui régit le phénomène peut se mettre sous forme

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-k}) = 0$$

où les  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{N-k}$  sont des variables sans dimensions indépendants (nombre de *Reynold*, *Froude*, *Weber*, etc...).

Il ya une série de terme  $\pi$  possible. Certains termes  $\pi$  sont cependant particulièrement intéressants à mettre en évidence.

**1-** Rapport de deux grandeurs physiques de même espace ( $\frac{d}{D}, \frac{h}{H}$  etc ...)

**2-** Certain produit sans dimension ( nombre de *Froude*  $Fr$ , inverse de nombre de *Weber*  $\delta$ ...).

Donc on peut écrire :

$$f(\pi_1, \pi_2, \dots, \omega_1, \omega_2, \dots) = 0$$

$\pi$  : Produit sans dimension ( $Fr, \delta, \dots$ )

$\omega$  : Rapport de deux grandeurs physiques de même espace ( $\frac{d}{D}, \frac{h}{H}$  etc ...)

# Chapitre 2

## Problème d'un écoulement à surface libre sur une dépression triangulaire

### 2.1 Introduction

Considérons un écoulement stationnaire, bidimensionnel à surface libre dans le demi plan supérieur au dessus d'un obstacle triangulaire faisant un angle  $\gamma$  avec l'horizontal telle que  $0 < |\gamma| < \frac{\pi}{2}$ . Le fluide est considéré comme incompressible, non visqueux et l'écoulement est irrotationnel et uniforme à l'infini de vitesse  $U$  et d'élevation  $H$  (FIG.2.1).

En l'absence de la gravité et de la tension de surface, la solution du problème est obtenue explicitement et la forme de la surface libre est donnée paramétriquement via la méthode des lignes de courant en utilisant les transformations conformes, voir [22]. Si nous tenons compte de l'effet de la tension de surface ou l'effet de la gravité, le problème ne peut être résolu que par une approche numérique à cause du terme non linéaire figurant dans la condition au bord de la surface libre. La solution est obtenue en utilisant une méthode d'intégrale introduite par S.N. Hanna et M.N. Abdel-Malek [23], Frédéric Dias et Vanden-Broeck [10] et Forbes [17]. Dans ce travail, nous étudions le problème d'un écoulement à surface libre sur une dépression de forme triangulaire en tenant compte de la tension de surface et la force de gravité.

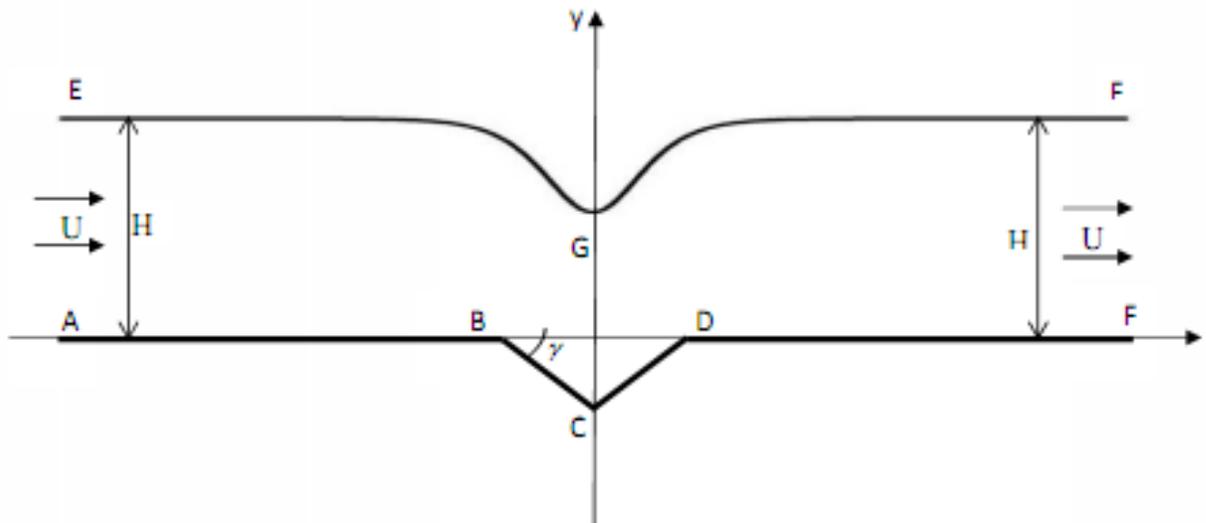


FIG. 2.1 – Le plan complexe  $z = x + iy$ , la forme de la surface libre  $EF$  est obtenue pour  $Fr = 5$ ,  $\delta = 2$  et  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ .

Comme nous le verrons, l'écoulement sera caractérisé par les trois paramètres :

– l'inverse de nombre de *Weber*  $\delta$  défini par :

$$\delta = \frac{T}{\rho U^2 H}$$

Ici  $T$  est la tension de surface et  $\rho$  est la densité du fluide.

– Le nombre de *Froude*  $Fr$  qui est défini par :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}$$

Où  $g$  est l'accélération de gravité,  $U$  et  $H$  sont respectivement la vitesse et la profondeur du fluide à l'infini et l'angle non dimensionnelle  $\gamma$ .

La solution du problème sera déterminer pour chaque valeur du nombre de *Froude*  $Fr$  et pour chaque nombre de *Weber*  $\delta$ .

Notons que dans tout ce qui suit, les variables notées avec  $(\sphericalangle)$  sont des variables avec leurs dimensions physiques et les variables sans  $(\sphericalangle)$  sont sans dimensions.

## 2.2 Formulation du problème

Soit un écoulement bidimensionnel, irrotationnel sur un plan horizontal  $x'ox$  d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au-dessus d'un creux triangulaire. Les cotés  $BC$  et  $CD$  du triangle font un angle  $\gamma$  (respectivement  $-\gamma$ ) avec l'axe des  $x$  où  $0 < |\gamma| < \frac{\pi}{2}$ . La ligne de courant libre est  $EGF$  (FIG.2.1). Nous supposons que lorsque  $x$  tend vers l'infini, la vitesse s'approche de la vitesse uniforme  $\tilde{U}$  et d'élévation  $\tilde{H}$ .

Le plan  $x'ox, y'oy$  du couple  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  sera considéré comme plan de la variable complexe  $\tilde{z} = \tilde{x} + i \tilde{y}$ . Soit  $\vec{V} = (\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}))$  le champ du vecteur vitesse de l'écoulement.

Nous introduisons la fonction potentielle de vitesse  $\tilde{\phi}$  et la fonction de courant  $\tilde{\psi}$ , alors les conditions de *Cauchy-Riemann* sont données par :

$$\begin{cases} \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \\ \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \end{cases} \quad (2.1)$$

La fonction potentielle complexe  $\tilde{f}$  définie par :

$$\tilde{f} = \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) + i \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

La relation (2.1) implique que la fonction complexe  $\tilde{\xi} = \tilde{u} - i \tilde{v}$  et la fonction potentielle  $\tilde{f}$  sont des fonctions analytiques de variable  $\tilde{z} = \tilde{x} + i \tilde{y}$ . On transforme le plan de l'écoulement réel dans le plan complexe  $z$  (FIG.2.1) au plan de l'écoulement  $\tilde{f}$  tels que les points  $A, E, G$  et  $F$  dans plan complexe  $z$  se transforment aux points  $A = E = -\infty, G = 0$  et  $F = +\infty$  dans le plan  $\tilde{f}$ . Sans perte de généralité, on choisit  $\tilde{\phi} = 0$  au point  $G$  et  $\tilde{\psi} = 0$  sur la surface libre  $EGF$ . Il s'ensuit que  $\tilde{\psi} = -1$  sur la ligne de courant  $ABCDF$  (FIG.2.2).

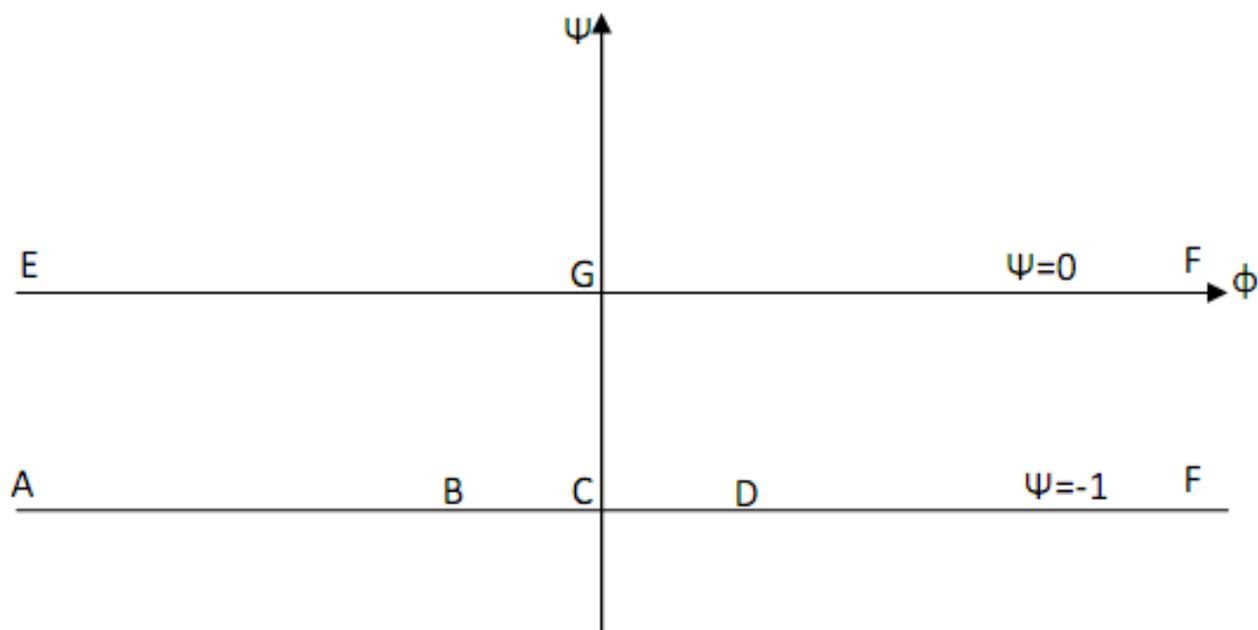


FIG. 2.2 – Le plan complexe  $f = \phi + i\psi$

Les effets de la tension de surface et la gravité sont non négligeables. Dans ce cas, La condition de *Bernoulli* sur la surface libre est donnée par :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} + \tilde{g}\tilde{y} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\rho}} + \tilde{g}\tilde{H} = \text{const} \quad \text{sur } EF \quad (2.2)$$

Où  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{q} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}$ ,  $\tilde{p}_0$  désignent respectivement la pression du fluide sur la surface libre, le module de vitesse et la pression atmosphérique qui est constante au dessus de la surface libre et  $\tilde{g}$  désigne la gravité.

La relation entre  $\tilde{p}$  et  $\tilde{p}_0$  est donnée par la loi de *Laplace* :

$$\tilde{p} - \tilde{p}_0 = \frac{\tilde{T}}{\tilde{R}} = \tilde{K}\tilde{T} \quad (2.3)$$

Où  $\tilde{K}$  est la courbure de la surface libre,  $\tilde{R}$  est le rayon de courbure et  $\tilde{T}$  dénote la tension de surface. Par convention de signe,  $\tilde{K}$  est négatif si le centre rayon de courbure est en dehors du fluide et de signe positif dans le cas contraire. Dans notre cas,  $\tilde{K}$  est de signe négatif.

Avant de résoudre le problème, nous allons écrire l'équation (2.2) en variables non dimensionnelles, pour cela, on choisit  $\tilde{U}$  comme unité de vitesse et  $\tilde{H}$  comme unité de longueur et on pose :

$$u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}}, v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}}, K = \tilde{K}\tilde{H}, \tilde{g} = g\tilde{H}, y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{H}} \quad (2.4)$$

En substituant (2.3) et (2.4) dans (2.2) on trouve :

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \delta K + \frac{1}{Fr^2}(y - 1) = \frac{1}{2} \quad (2.5)$$

Avec les conditions :

$$\begin{cases} v = 0 & \text{sur } \psi = -1 \text{ et } -\infty < \phi < \phi_B \text{ et } \phi_D < \phi < +\infty \\ v = u \tan |\gamma| & \text{sur } \psi = -1 \text{ et } \phi_B < \phi < \phi_C \text{ et } \phi_C < \phi < \phi_D \end{cases} \quad (2.6)$$

On note par :  $\xi$  le vecteur de vitesse où  $\xi = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}} - i \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}} = u - iv$ , comme  $u - iv$  est analytique dans le domaine de l'écoulement,  $\xi$  peut s'écrire sous forme :

$$\xi = u - iv = e^{\tau - i\theta} \quad (2.7)$$

Où  $\theta$  désigne l'angle entre le vecteur de vitesse et l'horizontale et  $e^\tau = q$ . Avant d'écrire l'équation (2.5) par les nouvelles variables  $\tau$  et  $\theta$ , nous montrons que :

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| e^\tau$$

En effet, désignons par  $\vec{\eta}$  le vecteur de vitesse de coordonnées  $(e^\tau \cos \theta, e^\tau \sin \theta)$ .

En coordonnées intrinsèques on a :

$$\vec{\eta} = \vec{e}_T |\vec{\eta}| = |\zeta| \vec{e}_T$$

Où  $\vec{e}_T$  est le vecteur unitaire tangentiel, on déduit que :

$$\vec{e}_T = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

On a aussi par définition :

$$\frac{d\vec{e}_T}{ds} = K \vec{N} = \frac{1}{R} \vec{N}$$

Où  $\vec{N}$  désigne le vecteur unitaire normal à la courbe et  $ds$  élément de longueur d'arc de la ligne de courant  $EF$  donc :

$$1 = R \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = R \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| \frac{1}{|\vec{\eta}'|}$$

i.e.

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| e^{-\tau} \quad (2.8)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| &= \left| -\frac{d\theta}{dt} \sin \theta \vec{i} + \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \vec{j} \right| \\ &= \left| \frac{d\theta}{dt} e^{-i\theta} \right| \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

En substituant l'expression ci-dessus dans (2.8) on trouve :

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\theta}{dt} \right| e^{-\tau}$$

Comme

$$\begin{aligned}
 \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\theta}{dy} \frac{dy}{dt} \\
 &= \frac{d\theta}{d\phi} \left[ \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\phi}{dy} \frac{dy}{dt} \right] \\
 &= \frac{d\theta}{d\phi} e^{2\tau}
 \end{aligned}$$

Sur la surface libre ( $EF$ ).

Comme

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{\eta} = \frac{dx}{dt} \overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt} \overrightarrow{j} = e^\tau \cos \theta \overrightarrow{i} + e^\tau \sin \theta \overrightarrow{j}$$

Donc :

$$K = \frac{1}{R} = - \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| e^\tau$$

Comme  $K$  est de signe négatif.

On a :  $q = |\overrightarrow{\eta}| = e^\tau$ , alors la condition de *Bernoulli* (2.5) en variables non dimensionnelles sur la ligne de courant libre  $EF$  s'écrit :

$$\frac{1}{2} e^{2\tau} - \delta e^\tau \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| + \frac{1}{Fr^2} (y - 1) = \frac{1}{2} \quad \text{sur } EF \quad (2.9)$$

Le domaine occupé par le fluide dans le plan de la variable  $f$  est une bande infinie dans la région  $-1 < \psi < 0$  et  $-\infty < \phi < +\infty$ . La transformation conforme d'une bande infinie dans le plan  $f$  au demi plan supérieur d'un autre plan complexe  $\zeta$  est donnée par la relation :

$$\zeta = \alpha + i\beta = e^{-\pi f} = e^{-\pi(\phi+i\psi)} = e^{-\pi\phi} (\cos(\pi\psi) - i \sin(\pi\psi)) \quad (2.10)$$

Le plan complexe  $\zeta$  est donnée dans la figure (FIG.2.3).

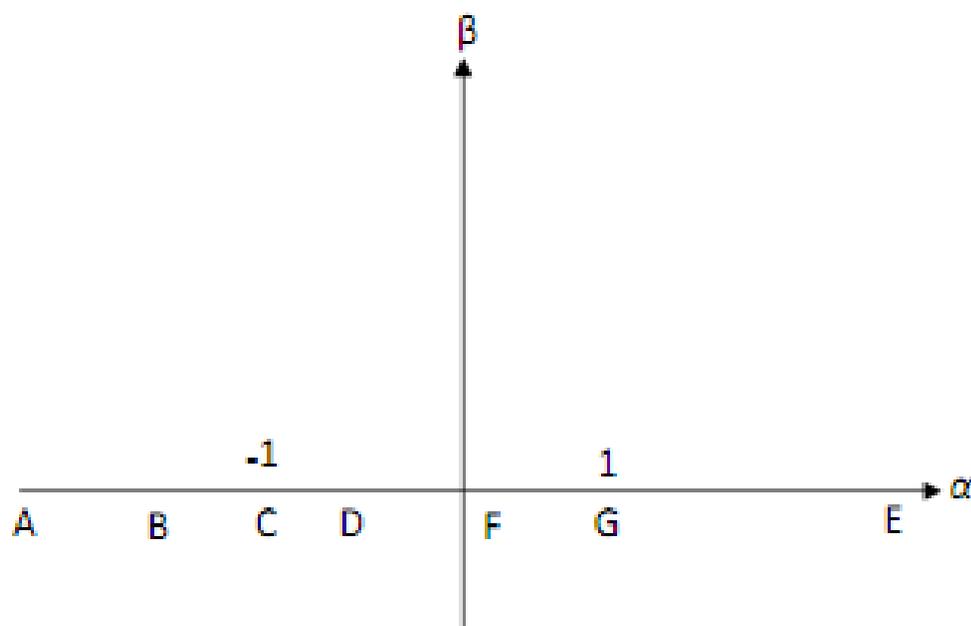


FIG. 2.3 – Le demi plan supérieur  $\zeta = \alpha + i\beta$

Les conditions aux limites (2.6) dans le plan  $\zeta$  deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = 0, \beta = 0, -\infty < \alpha < \alpha_B < 0 \text{ et } \alpha_D < \alpha < 0 \\ \theta = \gamma, \beta = 0, \alpha_B < \alpha < \alpha_C < 0 \\ \theta = -\gamma, \beta = 0, \alpha_C < \alpha < \alpha_D \\ \theta = \text{inconnue}, \beta = 0, 0 < \alpha < +\infty \end{array} \right. \quad (2.11)$$

Nous cherchons  $\xi(\tau, \theta)$  qui vérifie l'équation (2.9) avec les conditions (2.11). Ce qui termine la formulation du problème.

## 2.3 L'équation intégrro-différentielle

L'équation (2.9) a été dérivée par des nouvelles variables complexes  $\tau$  et  $\theta$  sur la surface libre. Maintenant, une équation intégrale est dérivée. L'équation différentielle définira une équation qui sera résolue numériquement. Le domaine d'écoulement du problème a une région d'image constituée de la moitié supérieure du plan complexe  $\zeta$ . Une équation intégrale en variables  $\tau$  et  $\theta$  doit être établie en utilisant le théorème de Cauchy dans le plan  $\zeta$ . Soit l'intégral de la forme :

$$\oint_{\Gamma} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta \quad (2.12)$$

Où  $\alpha_0$  est une image point d'un point sur la surface libre, c'est-à-dire  $\alpha_0 \in EF$ . Le chemin  $\Gamma$  consiste un grand arc  $\Gamma_R$  de rayon  $R$ , Centrée à l'origine, ( Voir (FIG.2.4) ).

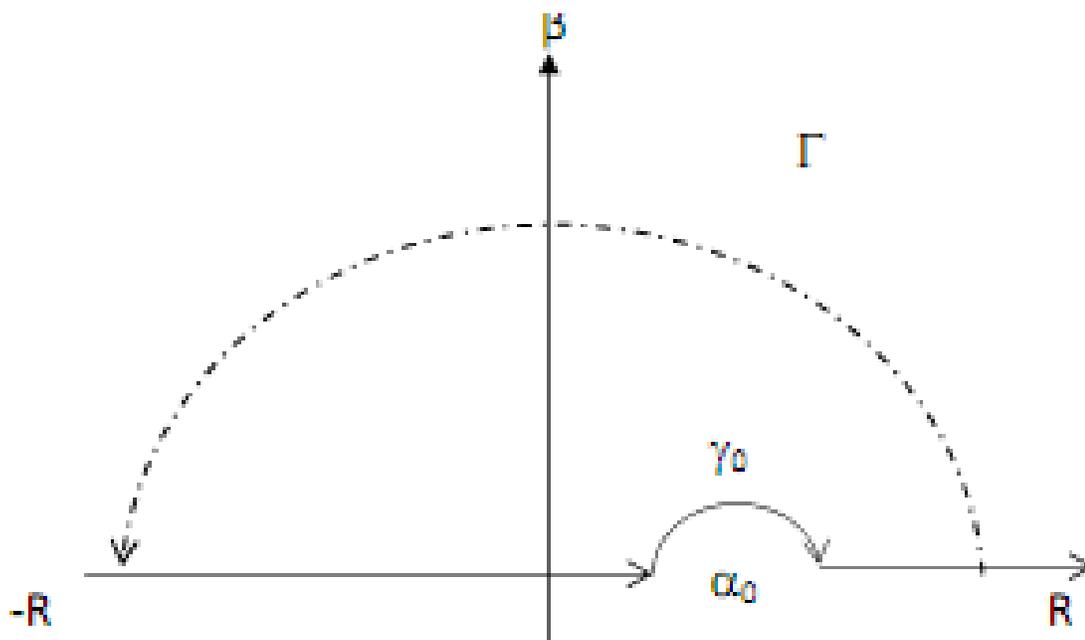


FIG. 2.4 – Le chemin  $\Gamma$  dans  $\zeta$ -plan

En décomposant l'intégrale (2.12) sur le contour  $\Gamma$  on trouve :

$$\oint_{\Gamma} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta = \int_{\Gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \int_{\gamma_0} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\zeta \quad (2.13)$$

La première intégrale est une intégrale d'une fonction analytique sur le chemin fermé  $\Gamma$ . Donc, le théorème de Cauchy implique que l'intégrale du côté gauche de (2.13) est égale à zéro. L'équation (2.13) devient alors :

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \int_{\gamma_0} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\zeta = 0 \quad (2.14)$$

Commençons par la deuxième intégrale sur  $\gamma_0$ . On pose  $\zeta = \alpha_0 + re^{i\lambda}$  et  $d\zeta = ire^{i\lambda}d\lambda$ , alors :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta &= \int_{\pi}^0 \frac{\tau(\alpha_0 + r \cos \lambda, r \sin \lambda) - i\theta(\alpha_0 + r \cos \lambda, r \sin \lambda)}{re^{i\lambda}} ire^{i\lambda} d\lambda \quad (2.15) \\ &= \int_{\pi}^0 [\tau(\alpha_0 + r \cos \lambda, r \sin \lambda) - i\theta(\alpha_0 + r \cos \lambda, r \sin \lambda)] id\lambda \end{aligned}$$

Lorsque  $r \rightarrow 0$ , alors :

$$i(\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0)) \int_{\pi}^0 d\lambda = -\pi i(\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0))$$

En remplaçant ce résultat dans (2.14), on obtient :

$$(\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0)) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \frac{1}{\pi i} \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha$$

La limite de (2.14), lorsque  $R \rightarrow \infty$ , alors, la troisième intégrale du côté droit de (2.14)

devient :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi i} \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha$$

Les intégrales des côtés droits de (2.14) et de (2.15) sont les valeurs principales de Cauchy. Comme  $R \rightarrow \infty$ ,  $|\beta| \rightarrow \infty$ . À partir de (2.7), on constate que  $\phi \rightarrow -\infty$ . Comme  $\phi \rightarrow -\infty$ , l'écoulement est uniforme avec une vitesse non dimensionnelle tendant vers 1, c'est-à-dire  $u - iv \rightarrow 1$ . Dans (2.14), ceci implique que  $\tau - i\theta \rightarrow 0$ . Par conséquent, la limite de la première intégrale du côté droit de (2.14), lorsque  $R \rightarrow \infty$ , devient :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta = 0$$

Maintenant (2.14) se réduit à :

$$\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (2.16)$$

En prenant la partie réelle de (2.16), la relation intégrale entre  $\tau$  et  $\theta$ , sur la surface libre  $EF$ , s'écrit alors :

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha, \quad (2.17)$$

où  $\theta(\alpha) = \theta(\alpha, 0)$  et  $\tau(\alpha) = \tau(\alpha, 0)$  sont utilisés pour simplifier la notation. En utilisant les conditions aux limites (2.11), l'intégrale (2.17) est séparée en cinq parties, on a alors :

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\alpha_B} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_B}^{\alpha_C} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_C}^{\alpha_D} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_D}^0 \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_0^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \right]$$

En utilisant (2.11), on obtient :

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{-1 - \alpha_0}{\alpha_B - \alpha_0} \right| + \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{\alpha_D - \alpha_0}{-1 - \alpha_0} \right| - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (2.18)$$

Cette équation est définie sur le long de la surface libre, donc en utilisant (2.10), avec  $\psi = 0$ , on a :

$$\alpha = e^{-\pi\phi}, \alpha_0 = e^{-\pi\phi_0} \quad (2.19)$$

En substituant (2.19) dans (2.18) on trouve :

$$\tau'(\phi_0) = -\frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1 + e^{-\pi\phi_0}}{e^{-\pi\phi_B} + e^{-\pi\phi_0}} \right| + \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_D} + e^{-\pi\phi_0}}{1 + e^{-\pi\phi_0}} \right| + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\phi \quad (2.20)$$

avec  $\tau'(\phi_0) = \tau(e^{-\pi\phi_0})$  et  $\widehat{\theta}(\phi) = \theta(e^{-\pi\phi})$ . La condition de *Bernoulli* (2.9) s'écrit maintenant en termes de  $\tau'$  et  $\widehat{\theta}$ , comme :

$$\frac{1}{2} e^{2\tau'} - \delta e^{\tau'} \left| \frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \phi} \right| + \frac{1}{Fr^2} (y - 1) = \frac{1}{2} \quad \text{sur } EF \quad (2.21)$$

Ensuite nous calculons la valeur de  $y$  sur la surface libre  $EF$  en utilisant la relation (2.10) et la relation :

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{u - iv} = e^{-\tau + i\theta} \quad (2.22)$$

Par intégration, on obtient

$$y(\alpha) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{e^{-\tau(\alpha_0)} \sin \theta(\alpha_0)}{\alpha_0} d\alpha_0 \quad \text{pour } 0 < \alpha < +\infty \quad (2.23)$$

En utilisant (2.19), on réécrit (2.23) comme :

$$\widehat{y}(\phi) = 1 + \int_{-\infty}^\phi e^{-\tau'(\phi_0)} \sin \widehat{\theta}(\phi_0) d\phi_0 \quad (2.24)$$

Où  $-\infty < \phi < +\infty$  et  $\widehat{y}(\phi) = y(e^{-\pi\phi})$ .

En substituant (2.24) dans (2.21), on définit une équation integro-différentielle non linéaire en fonction de l'inconnue  $\widehat{\theta}$  donnée par :

$$\frac{1}{2}A^2 \exp \left( 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\phi \right) - \delta A \exp \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\phi \right) \left| \frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \phi} \right| + \quad (Eq 1)$$

$$\frac{1}{Fr^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{A} \exp \left( - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\phi \right) \right] \sin \widehat{\theta}(\phi) d\phi = \frac{1}{2}$$

$$\text{où } A = \left| \frac{(e^{-\pi\phi_B} + e^{-\pi\phi_0})(e^{-\pi\phi_D} + e^{-\pi\phi_0})}{(1 + e^{-\pi\phi_0})(1 + e^{-\pi\phi_0})} \right|^{\frac{\gamma}{\pi}}$$

## 2.4 Procédure numérique

### 2.4.1 Calcul numérique de $\tau$

On cherche la solution du problème numériquement puisque l'équation integro-différentielle est non linéaire et la présence de force de la tension de surface et la force de la gravité. Les points de la surface libre dans le plan potentiel complexe  $f$  sont représentés par  $\psi = 0$  et  $-\infty < \phi < +\infty$ . En discrétisant l'intervalle  $]-a, a[$  en  $N$  points, où  $a > 0$  un nombre assez grand.

$$\phi_I = \left[ \frac{-(N-1)}{2} + (I-1) \right] \Delta_h, I = 1, \dots, N, \quad (2.25)$$

Où  $\Delta_h > 0$  est le pas de discrétisation. Soit l'intégrale dans (2.20) suivant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\phi$$

pour calculer cette intégrale, on utilise la règle de trapèze avec une sommation sur  $\phi_I$  telle que  $\phi_0$  est le point milieu d'un sous-intervalle qui est défini comme suit :

$$\phi_M = \frac{\phi_{I+1} + \phi_I}{2}, I = 1, \dots, N-1 \quad (2.26)$$

Tout d'abord, (2.20) peut être réécrite comme :

$$\tau_I^M = -\frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1 + e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_B} + e^{-\pi\phi_M}} \right| + \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_D} + e^{-\pi\phi_M}}{1 + e^{-\pi\phi_M}} \right| + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_M}} d\phi$$

Où  $\tau_I^M = \tau'(\phi_M)$  pour simplifier la notation. Ensuite, l'utilisation de la règle de trapèze donne :

$$\tau_I^M = -\frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1 + e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_B} + e^{-\pi\phi_M}} \right| + \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_D} + e^{-\pi\phi_M}}{1 + e^{-\pi\phi_M}} \right| + \sum_{j=1}^N \frac{\theta_j e^{-\pi\phi_j} \omega_j \Delta_h}{e^{-\pi\phi_j} - e^{-\pi\phi_M}}, \quad I = 1, \dots, N-1 \quad (2.27)$$

Où  $\omega_j$  est la fonction de poids, telle que :

$$\omega_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = 1, N \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et  $\theta_j = \widehat{\theta}(\phi_j)$ . En substituant (2.27) dans (2.21), on obtient un système de  $N$  équations non linéaires à  $N$  inconnues  $\theta_I$  pour  $I = 1, \dots, N$ , donné par :

$$h_I(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = \frac{1}{2} e^{2\tau_I^M} - \delta e^{\tau_I^M} \frac{\theta_{I+1} - \theta_I}{\Delta_h} + \frac{1}{Fr^2} (y_I - 1) - \frac{1}{2} = 0, \quad I = 1, \dots, N. \quad (S1)$$

Où la dérivée,  $\frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \phi}$ , aux points de milieu (2.26), est approximée par une différence finie, par :

$$\frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \phi} \approx \frac{\theta_{I+1} - \theta_I}{\Delta_h}, \quad I = 1, \dots, N-1$$

Pour résoudre ce système on utilise la méthode de *Newton*.

## 2.4.2 Forme de la surface libre

Pour déterminer la forme de la surface libre, on utilise la relation suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} + i \frac{\partial y}{\partial \phi} = \xi^{-1} = e^{-\tau + i\theta}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \phi} = e^{-\tau} \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} = e^{-\tau} \sin \theta \end{cases} \quad (2.28)$$

Ainsi, la forme de la surface libre est obtenue en intégrant numériquement les relations (2.28) et en utilisant la méthode *d'Euler* ce qui donne

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_{I+1} = y_I + \Delta_h e^{-\tau_M} \sin \theta_M, I = 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} x_1 = \text{assez grand} \\ x_{I+1} = x_I + \Delta_h e^{-\tau_M} \cos \theta_M, I = 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$

Où  $\theta_M = \frac{\theta_{I+1} + \theta_I}{2}$ . Les résultats présentés ici sont obtenus pour  $N = 301$ .

## 2.5 Résultats et discussion

On utilise la méthode de résolution décrite ci-dessus pour résoudre le système non linéaire (2.21) pour différentes valeurs des trois paramètres le nombre de *Froude*  $Fr$ , l'inverse de nombre de *Weber*  $\delta$  et l'angle  $\gamma$ . On trouve la solution du problème pour chaque valeurs des nombres  $Fr$ ,  $\delta$  et  $\gamma$ . Nous signalons que la plus part de ces résultats ont été obtenus pour  $N = 251$ ,  $\Delta_h = 0.1$  et  $\gamma = -\frac{\pi}{4}$ . La figure 2.5 présente l'effet de la tension de surface sur la forme de la surface libre où la force de gravité est négligeable. L'effet de la gravité ( $\delta = 0$ ) sur la forme de surface libre est représenté dans la figure 2.6. La figure 2.7 montre qu'il existe des solutions sans ondes dont l'écoulement qui est subcritique ( $Fr < 1$ ) et supercritique ( $Fr > 1$ ). La forme de la surface libre est représentée dans la figure 2.7 pour  $Fr = 0.5$  ( voir (FIG.2.7) ) et dans la figure 2.8 pour  $Fr = 1.2$  ( voir (FIG.2.8) ) pour quelques valeurs de l'inverse du nombre de *Weber*  $\delta$ . Dans le cas  $\gamma$  est positif ( $\gamma > 0$ ), on choisit  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ . Les résultats sont représentés dans les figures 2.9 et 2.10 pour différentes valeurs de  $Fr$  et  $\delta$ .

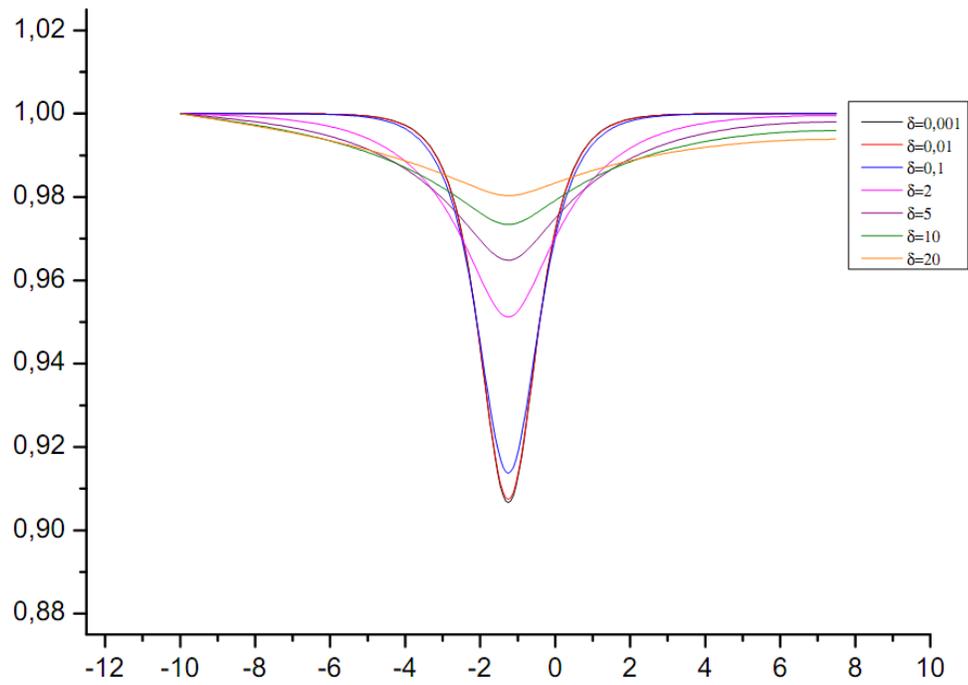


FIG. 2.5 – Forme de la surface libre pour  $Fr = \infty$  et pour quelques valeurs de l'inverse du nombre de Weber  $\delta$ .

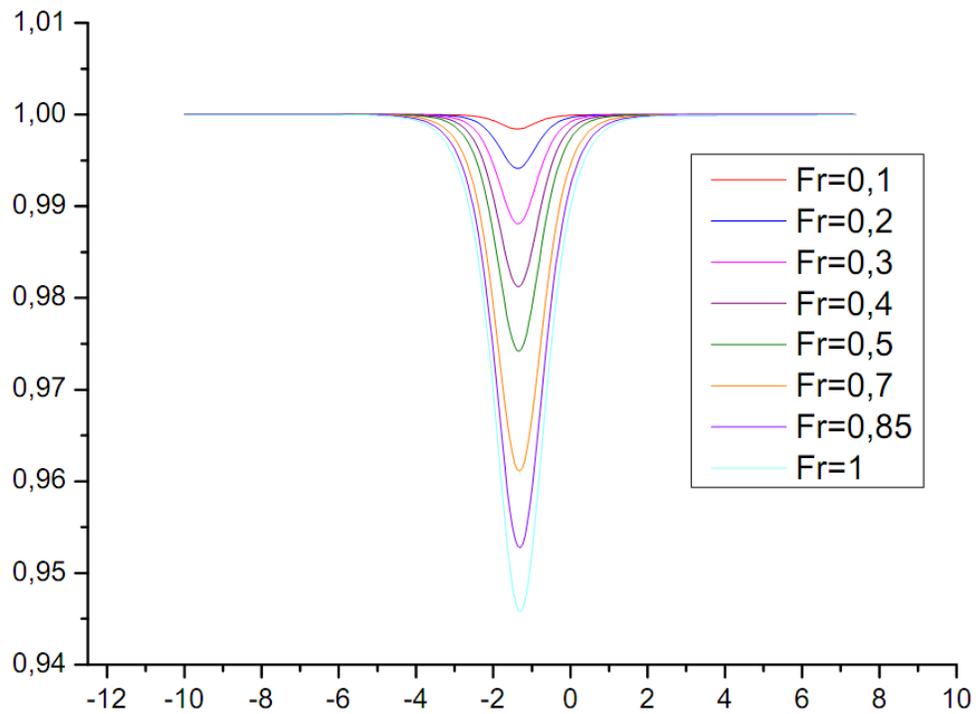


FIG. 2.6 – Forme de la surface libre pour  $\delta = 0$  et pour quelques valeurs du nombre de Froude  $Fr$ .

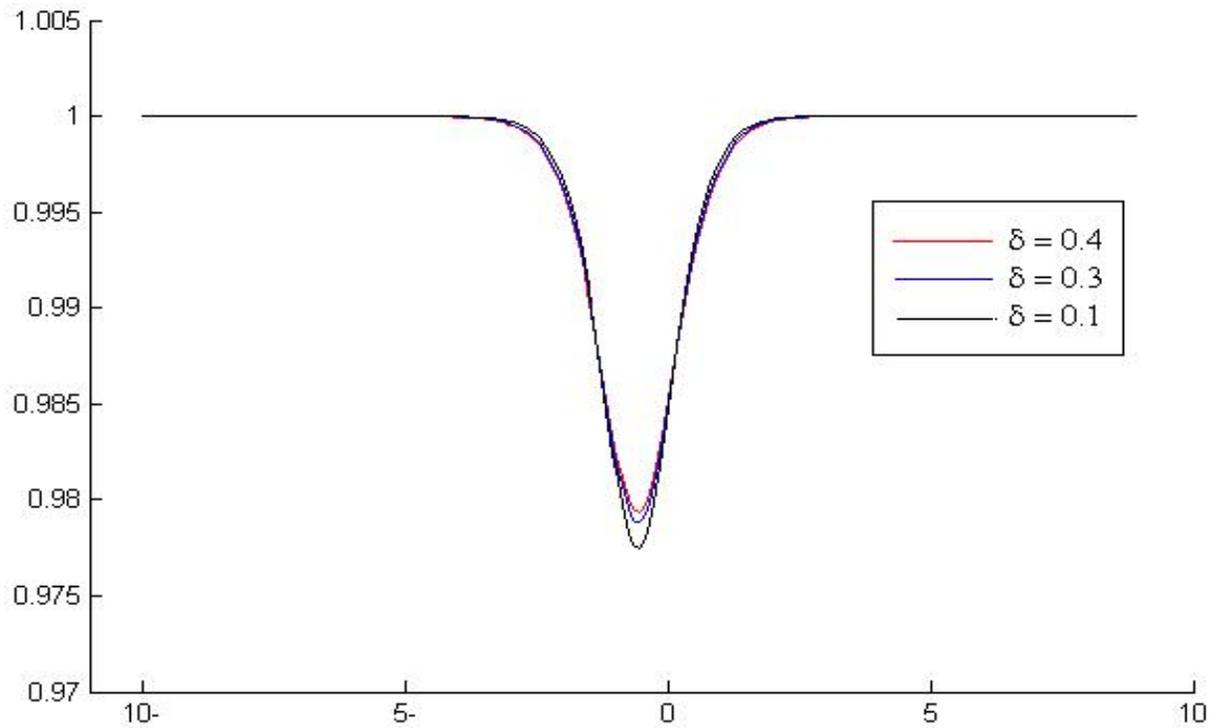


FIG. 2.7 – Forme de la surface libre pour  $Fr = 0.5$  et pour quelques valeurs de  $\delta$  (cas subcritique).

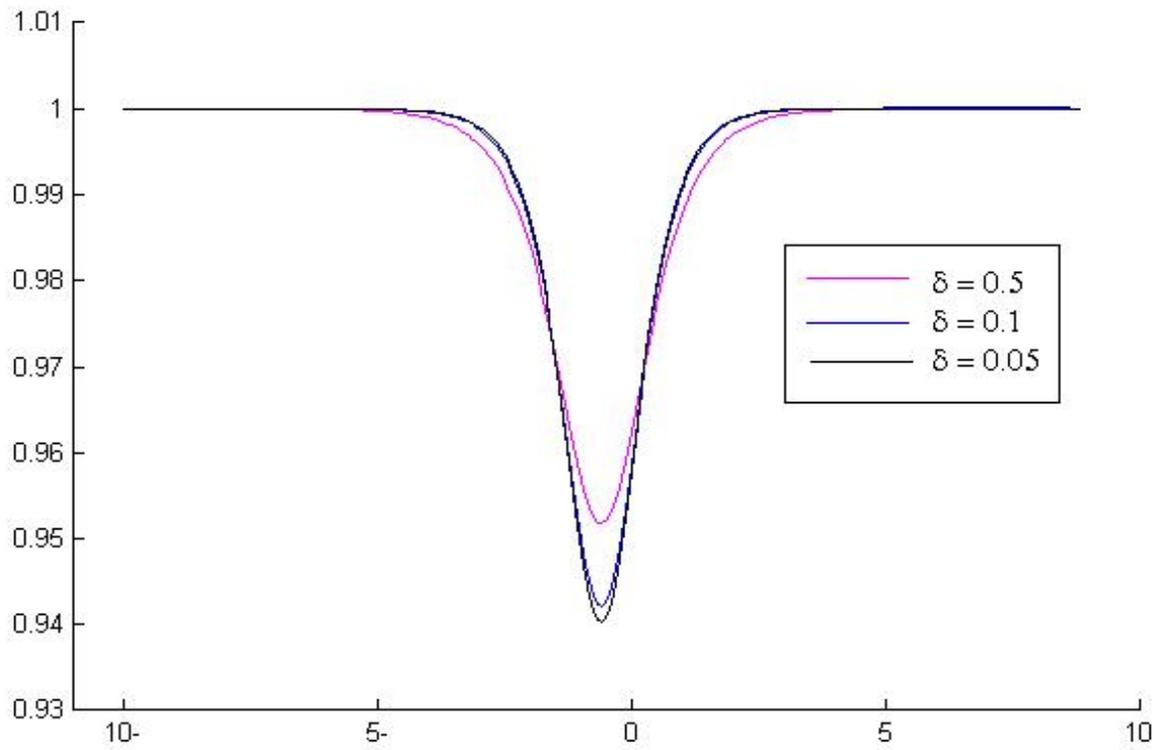


FIG. 2.8 – Forme de la surface libre pour  $Fr = 1.2$  et pour quelques valeurs de  $\delta$  ( cas supercritique).

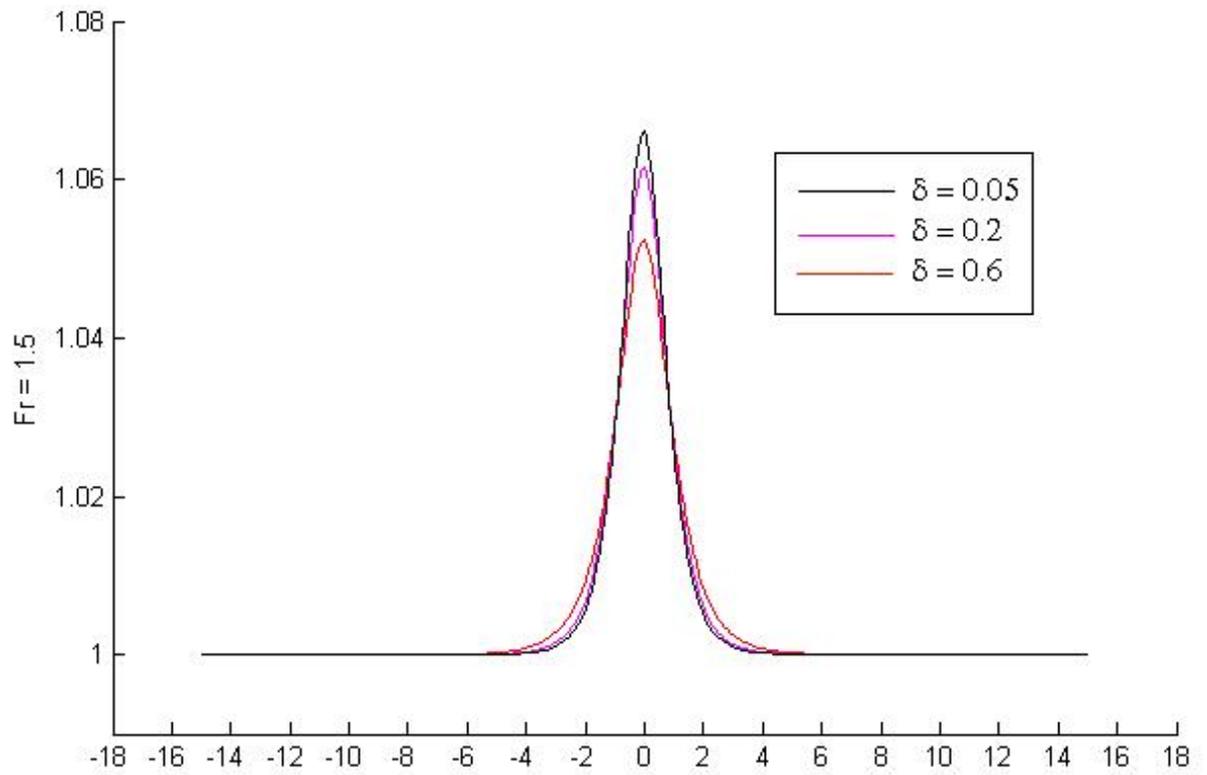


FIG. 2.9 – Forme de la surface libre pour  $Fr = 1.5$  et pour quelques valeurs de  $\delta$ .

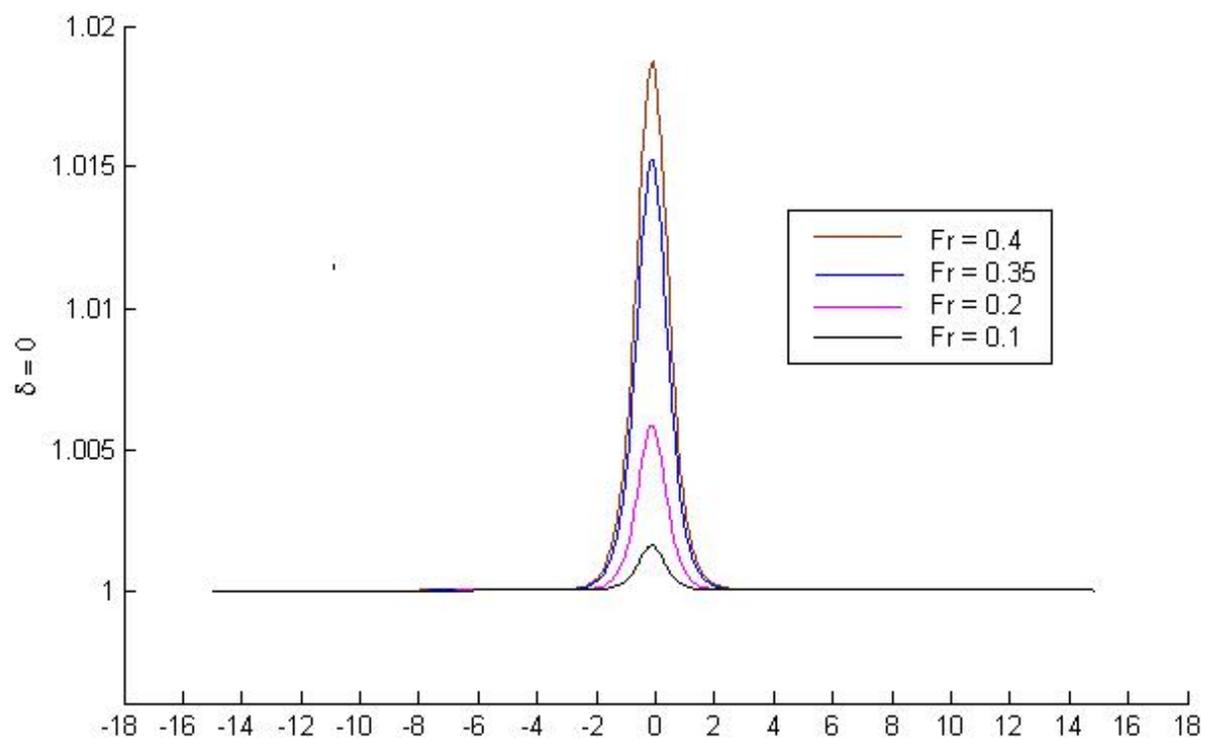


FIG. 2.10 – Forme de la surface libre pour  $\delta = 0$  et pour quelques valeurs de  $Fr$ .

# Chapitre 3

## Résolution numérique d'un problème d'écoulement à surface libre au dessus de multiple obstacles

### 3.1 Introduction

En mécanique des fluides, les écoulements à surface libre autour des objets de différentes formes sont intensivement étudiés due à leurs importance d'application. Plus particulièrement, les écoulements dans un canal au-dessus des obstacles. Les obstacles dans le fond du canal sont de formes assez réguliers, Forbes et Schwartz [15] considèrent un écoulement au-dessus d'un demi-cercle, L.K. Forbes traite le problème d'écoulement au-dessus d'un objet semi-elliptique [16], alors que F. Dias et J.V. Vanden-Broeck [10] traitent le problème au dessus d'un triangle. La recherche de la solution explicite de ces problèmes est difficile à traiter à cause de la non-linéarité de la condition sur la surface libre qui est de forme inconnue sauf dans des cas particuliers, alors il les ont étudiés numériquement.

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier un écoulement bidimensionnel, irrotationnel à surface libre au-dessus de deux triangles avec des angles inclinés  $\gamma$  et  $\beta$  telle que  $-\frac{\pi}{2} < \gamma < 0$  et  $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$  respectivement. Le fluide est supposé incompressible, non visqueux et l'écoulement est uniforme à l'infini de vitesse  $U$  et d'élévation  $L$  (FIG.3.1).

Si l'effet des forces de gravité ou bien les tensions de surface ne sont pas négligées, le problème ne peut être résolu exactement. Pour résoudre ce problème, nous utilisons la même technique utilisée dans le chapitre II .

Comme nous allons le voir, l'écoulement sera caractérisé par les paramètres suivants : l'inverse de nombre de *Weber*  $\delta$  défini par :

$$\delta = \frac{T}{\rho U^2 L}$$

Ici  $T$  est la tension de surface et  $\rho$  est la densité du fluide, le nombre de *Froude*  $Fr$  donné par :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

Où  $g$  est l'accélération de gravité,  $U$  et  $L$  sont respectivement la vitesse et la profondeur du fluide à l'infini et les angles non dimensionnelles  $\gamma$  et  $\beta$ .

La solution du problème sera déterminée pour chaque valeurs du nombre de *Froude*  $Fr$  et l'inverse de nombre de *Weber*  $\delta$ .

Notons que dans tout ce qui suit, les variables notées avec ( $\sphericalangle$ ) sont des variables avec leurs dimensions physiques et les variables sans ( $\sphericalangle$ ) sont sans dimensions.

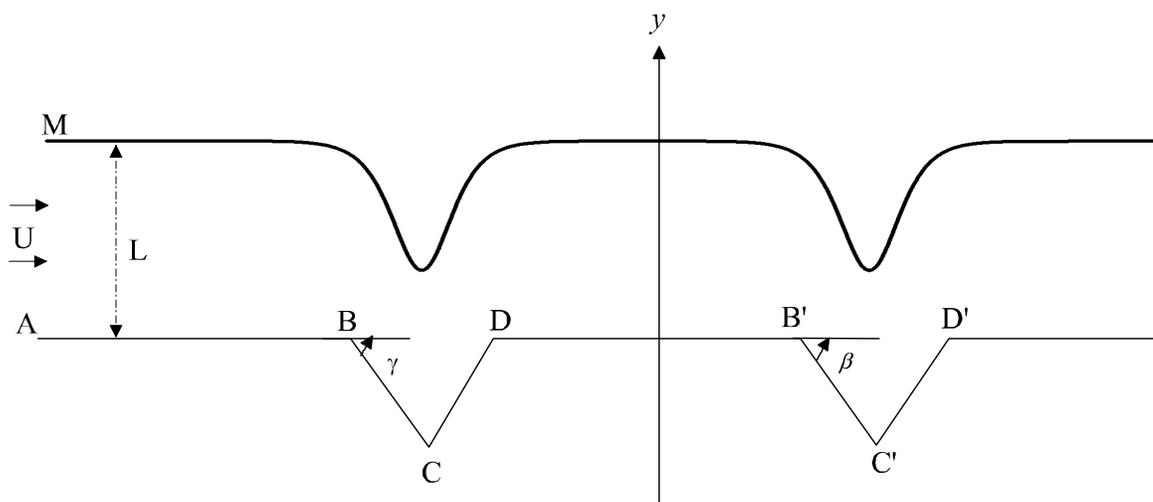


FIG. 3.1 – Le plan complexe  $z = x + iy$

## 3.2 Formulation du problème

Considérons un écoulement bidimensionnel potentiel d'un fluide incompressible et non visqueux, passant au-dessus de deux triangles. Nous choisissons comme cadre de référence l'axe des  $x$  le long du fond rigide et les horizontales  $AB, DB'$  et  $D'E$ , l'axe des  $y$  est perpendiculaire à l'axe des  $x$ . L'écoulement est limité au-dessus par la ligne de courant libre  $MN$  et en dessous par deux triangles isocèles  $BCD, B'C'D'$  faisant des angles  $\gamma$  et  $\beta$  avec l'horizontal ( voir (FIG.3.1) ) avec  $-\frac{\pi}{2} < \gamma < 0$  et  $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$ . Nous supposons que lorsque  $x \rightarrow \infty$ , la vitesse s'approche de la vitesse uniforme  $\tilde{U}$  et d'élévation  $\tilde{L}$ .

L'axe des  $x$  et l'axe des  $y$  forment un plan de la variable complexe  $\tilde{z} = \tilde{x} + i \tilde{y}$ . On note par  $\vec{V} = (\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}))$  le champ du vecteur vitesse de l'écoulement.

Les fonctions  $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$  qui définissent respectivement la fonction potentielle et la fonction de courant vérifient la condition de *Cauchy-Riemann* donnée par :

$$\begin{cases} \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \\ \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \end{cases} \quad (3.1)$$

La fonction potentielle complexe  $\tilde{f}$  est définie par :

$$\tilde{f} = \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) + i \tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$$

On note par  $\tilde{\xi}$  la vitesse complexe

$$\tilde{\xi} = \tilde{u} - i\tilde{v} = \frac{d\tilde{f}}{d\tilde{z}}$$

Il en résulte de la formule (3.1) que les fonctions  $\tilde{f}$  et  $\tilde{\xi}$  de la variable  $\tilde{z} = \tilde{x} + i \tilde{y}$  sont des fonctions analytiques de  $\tilde{z}$ . On transforme le plan de l'écoulement réel dans le plan complexe  $z$  (FIG.3.1) au plan de l'écoulement  $\tilde{f}$ . Sans perte de généralité, on choisit  $\tilde{\psi} = 0$  sur la surface libre  $MN$  et  $\tilde{\psi} = -1$  sur la ligne de courant  $ABCDB'C'D'E$  ( voir (FIG.3.2) ).

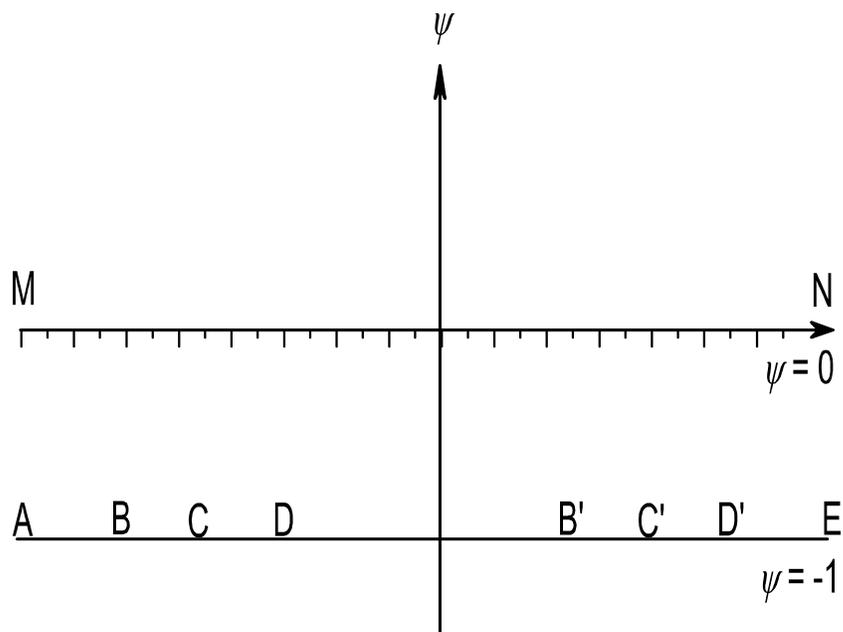


FIG. 3.2 – Le plan complexe  $f = \phi + i\psi$

Le problème est de déterminer la fonction potentielle de vitesse  $\tilde{\phi}$  qui satisfait l'équation de *Laplace* donnée par :

$$\Delta \tilde{\phi} = 0 \quad \text{dans le domaine de l'écoulement}$$

Avec les conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad \text{sur } AB, DB' \text{ et } D'E \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} + \tilde{g}\tilde{z} = cte \quad \text{sur la surface libre } MN \end{array} \right.$$

La condition de *Bernoulli* sur la surface libre  $MN$  est donnée par :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} + \tilde{g}\tilde{y} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\rho}} + \tilde{g}\tilde{L} = const \quad \text{sur } MN \quad (3.2)$$

Où  $\tilde{p}, \tilde{q} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}$  désignent respectivement la pression du fluide et le module de la vitesse sur la surface libre,  $\tilde{p}_0$  est la pression atmosphérique qui est constante au-dessus de la surface libre et  $\tilde{g}$  est la gravité.

La relation entre  $\tilde{p}$  et  $\tilde{p}_0$  est donnée par la loi de *Laplace* :

$$\tilde{p} - \tilde{p}_0 = \frac{\tilde{T}}{\tilde{R}} = \tilde{K}\tilde{T} \quad (3.3)$$

Où  $\tilde{K}$  est la courbure de la surface libre,  $\tilde{R}$  est le rayon de courbure et  $\tilde{T}$  dénote la tension de surface. Dans notre cas,  $\tilde{K}$  est de signe négatif. On choisit  $\tilde{U}$  comme unité de vitesse et  $\tilde{L}$  comme unité de longueur et on pose :

$$u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}}, v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}}, K = \tilde{K}\tilde{L}, \tilde{g} = g\tilde{L}, y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{L}} \quad (3.4)$$

En substituant (3.3) et (3.4) dans (3.2) on trouve :

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \delta K + \frac{1}{Fr^2}(y - 1) = \frac{1}{2} \quad (3.5)$$

Avec les conditions :

$$\begin{cases} v = 0 \text{ sur } -\infty < \phi < \phi_B, \phi_D < \phi < \phi_{B'}, \phi_{D'} < \phi < +\infty \text{ et } \psi = -1 \\ v = u \tan |\gamma| \text{ sur } \phi_B < \phi < \phi_C, \phi_C < \phi < \phi_D \text{ et } \psi = -1 \\ v = u \tan |\beta| \text{ sur } \phi_{B'} < \phi < \phi_{C'}, \phi_{C'} < \phi < \phi_{D'} \text{ et } \psi = -1 \end{cases} \quad (3.6)$$

On note par  $\xi$  le vecteur de vitesse où  $\xi = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}} - i \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}} = u - iv$ , comme  $u - iv$  est analytique dans le domaine de l'écoulement,  $\xi$  peut s'écrire sous la forme :

$$\xi = u - iv = e^{\tau - i\theta} \quad (3.7)$$

Où  $\theta$  désigne l'angle entre le vecteur de vitesse et l'horizontale.

Nous avons :

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| e^\tau$$

Alors la condition de *Bernoulli* (3.5) en variables non dimensionnelles sur  $MN$  s'écrit :

$$\frac{1}{2}e^{2\tau} - \delta e^\tau \left| \frac{\partial\theta}{\partial\phi} \right| + \frac{1}{Fr^2}(y - 1) = \frac{1}{2} \text{ sur } MN \quad (3.8)$$

Le domaine occupé par le fluide dans le plan de la variable  $f$  est une bande infinie dans la région  $-1 < \psi < 0$  et  $-\infty < \varphi < +\infty$ . La transformation conforme d'une bande infinie dans le plan  $f$  au demi plan supérieur complexe  $\zeta$  est donnée par la relation :

$$\zeta = \alpha + i\beta = e^{-f\pi} = e^{-\pi(\phi + i\psi)} = e^{-\pi\phi} (\cos(\pi\psi) - i \sin(\pi\psi)) \quad (3.9)$$

Le plan complexe  $\zeta$  est donné dans la figure 3.3 ( voir (FIG.3.3) ).

Les conditions aux limites (3.6) dans le plan  $\zeta$  deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \quad -\infty < \alpha < \alpha_B, \alpha_D < \alpha < \alpha_{B'}, \alpha_{D'} < \alpha \leq 0 \\ \theta = |\gamma| \quad \alpha_B < \alpha < \alpha_C, \alpha_C < \alpha < \alpha_D \\ \theta = |\beta| \quad \alpha_{B'} < \alpha < \alpha_{C'}, \alpha_{C'} < \alpha < \alpha_{D'} \\ \theta = \text{inconnue} \quad 0 < \alpha < +\infty \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Nous cherchons  $\xi(\tau, \theta)$  qui vérifie l'équation (3.8) avec les conditions (3.10).

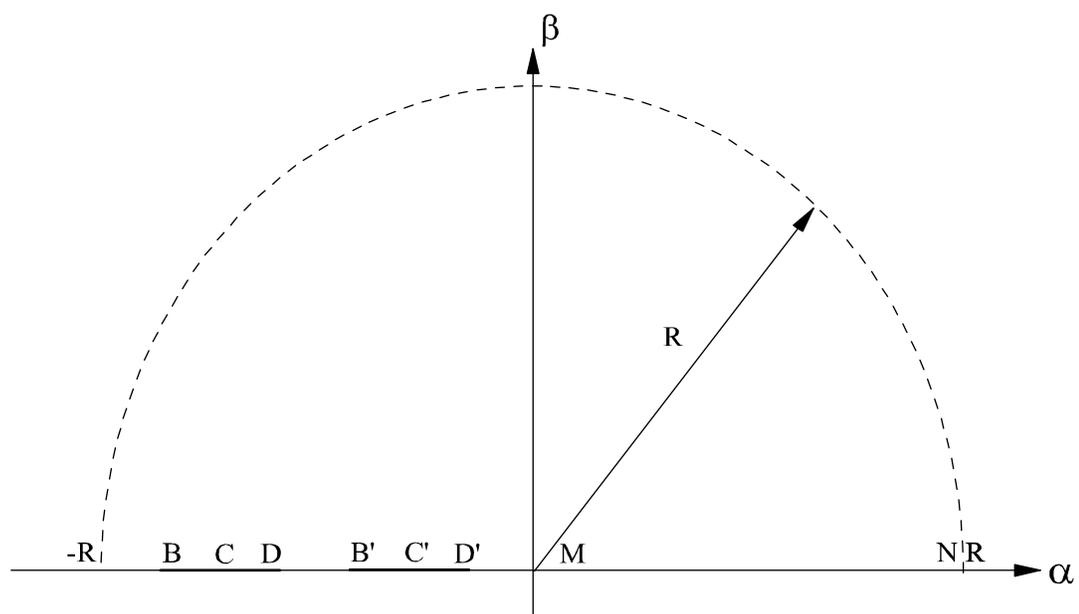


FIG. 3.3 – Le plan complexe  $\zeta = \alpha + i\beta$

### 3.3 L'équation intégró-différentielle

En utilisant la formule de *Cauchy* et d'après le chapitre précédent ( voir (2.17) ) on a :

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha, \quad (3.11)$$

Pour simplifier la notation, on note par  $\theta(\alpha) = \theta(\alpha, 0)$  et  $\tau(\alpha) = \tau(\alpha, 0)$ . En utilisant Les conditions aux limites (3.10), l'intégrale (3.11) est séparée en huit parties, on a alors :

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \left[ \begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\alpha_B} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_B}^{\alpha_C} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_C}^{\alpha_D} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \\ & \int_{\alpha_D}^{\alpha_{B'}} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_{B'}}^{\alpha_{C'}} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_{C'}}^{\alpha_{D'}} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \\ & \int_{\alpha_{D'}}^0 \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_0^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \end{aligned} \right]$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \tau(\alpha_0) = & -\frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{\alpha_C - \alpha_0}{\alpha_B - \alpha_0} \right| + \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{\alpha_D - \alpha_0}{\alpha_C - \alpha_0} \right| - \frac{\beta}{\pi} \log \left| \frac{\alpha_{C'} - \alpha_0}{\alpha_{B'} - \alpha_0} \right| + \\ & \frac{\beta}{\pi} \log \left| \frac{\alpha_{C'} - \alpha_0}{\alpha_{D'} - \alpha_0} \right| - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \end{aligned} \quad (3.12)$$

Cette équation est définie sur le long de la surface libre, donc en utilisant (3.9), avec  $\psi = 0$ , on a :

$$\alpha = e^{-\pi\phi}, \alpha_0 = e^{-\pi\phi_0} \quad (3.13)$$

En substituant (3.13) dans (3.12) on trouve :

$$\begin{aligned} \tau'(\phi_0) = & -\frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_C} + e^{-\pi\phi_0}}{e^{-\pi\phi_B} + e^{-\pi\phi_0}} \right| + \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_D} + e^{-\pi\phi_0}}{e^{-\pi\phi_C} + e^{-\pi\phi_0}} \right| - \frac{\beta}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_{C'}} + e^{-\pi\phi_0}}{e^{-\pi\phi_{B'}} + e^{-\pi\phi_0}} \right| \\ & + \frac{\beta}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_{C'}} + e^{-\pi\phi_0}}{e^{-\pi\phi_{D'}} + e^{-\pi\phi_0}} \right| + \int_{-\infty}^{\phi} \frac{\hat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\phi \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pour  $-\infty < \phi < +\infty$

avec  $\tau'(\phi_0) = \tau(e^{-\pi\phi_0})$  et  $\widehat{\theta}(\phi) = \theta(e^{-\pi\phi})$ . La condition de *Bernoulli* (3.8) s'écrit maintenant en termes de  $\tau'$  et  $\widehat{\theta}$ , comme :

$$\frac{1}{2}e^{2\tau'} - \delta e^{\tau'} \left| \frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \phi} \right| + \frac{1}{Fr^2}(y-1) = \frac{1}{2} \quad \text{sur } MN \quad (3.15)$$

Pour déterminer l'ensemble des points  $(x, y)$  de la surface libre  $MN$  on utilise (3.7) et la relation

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{u-iv} = e^{-\tau+i\theta}.$$

Par intégration, on obtient :

$$\begin{cases} x(\alpha) = x_\infty - \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{e^{-\tau(\alpha_0)} \cos \theta(\alpha_0)}{\alpha_0} d\alpha_0 \\ y(\alpha) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{e^{-\tau(\alpha_0)} \sin \theta(\alpha_0)}{\alpha_0} d\alpha_0 \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq \alpha < +\infty \quad (3.16)$$

En utilisant (3.13), on réécrit (3.16) comme :

$$\begin{cases} \widehat{x}(\phi) = x_\infty + \int_{-\infty}^\phi e^{-\tau'(\phi_0)} \cos \widehat{\theta}(\phi_0) d\phi_0 \\ \widehat{y}(\phi) = 1 + \int_{-\infty}^\phi e^{-\tau'(\phi_0)} \sin \widehat{\theta}(\phi_0) d\phi_0 \end{cases} \quad \text{pour } -\infty < \phi < +\infty \quad (3.17)$$

Où  $\widehat{x}(\phi) = x(e^{-\pi\phi})$  et  $\widehat{y}(\phi) = y(e^{-\pi\phi})$ .

En substituant (3.17) dans (3.15), on définit une équation integro-différentielle non linéaire en fonction de l'inconnue  $\widehat{\theta}$  donnée par (Eq.1) du chapitre II.

### 3.4 Procédure numérique

Dans le cas où la gravitation et les tensions de surface sont non nulles et la présence d'un terme non linéaire dans l'équation de *Bernoulli*, On résout le problème numériquement. On introduit la discrétisation de l'intervalle  $]-a, a[$  en  $N$  points, où  $a > 0$  un nombre assez grand

$$\phi_I = \left[ \frac{-(N-1)}{2} + (I-1) \right] \Delta_h, I = 1, \dots, N, \quad (3.18)$$

Où  $\Delta_h > 0$  est le pas de discrétisation.

Pour calculer l'intégrale dans (3.14), on utilise la règle de trapèze avec une sommation sur  $\phi_I$  telle que  $\phi_0$  est le point milieu d'un sous-intervalle défini comme suit :

$$\phi_M = \frac{\phi_{I+1} + \phi_I}{2}, I = 1, \dots, N - 1 \quad (3.19)$$

L'équation (3.14) peut être réécrite par :

$$\begin{aligned} \tau_M = & -\frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_C} + e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_B} + e^{-\pi\phi_M}} \right| + \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_D} + e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_C} + e^{-\pi\phi_M}} \right| - \frac{\beta}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_{C'}} + e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_{B'}} + e^{-\pi\phi_M}} \right| \\ & + \frac{\beta}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_{C'}} + e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_{D'}} + e^{-\pi\phi_M}} \right| + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\theta}(\phi)e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\phi \end{aligned}$$

Où  $\tau_M = \tau'(\phi_M)$ . En utilisant la règle de trapèze ce qui donne :

$$\begin{aligned} \tau_M = & -\frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_C} + e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_B} + e^{-\pi\phi_M}} \right| + \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_D} + e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_C} + e^{-\pi\phi_M}} \right| - \frac{\beta}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_{C'}} + e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_{B'}} + e^{-\pi\phi_M}} \right| \\ & + \frac{\beta}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_{C'}} + e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_{D'}} + e^{-\pi\phi_M}} \right| + \sum_{j=1}^N \frac{\theta_j e^{-\pi\phi_j} \Delta_h \omega_j}{e^{-\pi\phi_j} - e^{-\pi\phi_M}}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

Avec  $I = 1, \dots, N - 1$  et  $\omega_j$  est une fonction de poids donnée par :

$$\omega_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = 1, N \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et  $\theta_j = \widehat{\theta}(\phi_j)$ . En substituant (3.20) dans (3.15), on obtient un système d'équations non linéaires à  $N$  inconnues  $\theta_I$  pour  $I = 1, \dots, N$  donné par (S1) du chapitre II. La dérivée,  $\frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \phi}$ , aux points de milieu (3.19), est approximée par :

$$\frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \phi} \approx \frac{\theta_{I+1} - \theta_I}{\Delta_h}, I = 1, \dots, N - 1$$

Pour résoudre ce système on utilise la méthode de *Newton*.

### 3.4.1 Forme de la surface libre

Pour déterminer la forme de la surface libre, on utilise la relation suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} + i \frac{\partial y}{\partial \phi} = e^{-\tau + i\theta}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \phi} = e^{-\tau} \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} = e^{-\tau} \sin \theta \end{cases} \quad (3.21)$$

Ainsi, en utilisant la méthode *d'Euler* ce qui donne :

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_{I+1} = y_I + \Delta_h e^{-\tau_M} \sin \theta_M, I = 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x_1 = \text{assez grand} \\ x_{I+1} = x_I + \Delta_h e^{-\tau_M} \cos \theta_M, I = 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$

$$\text{Où } \theta_M = \frac{\theta_{I+1} + \theta_I}{2}.$$

## 3.5 Résultats et discussion

Nous utilisons la méthode numérique précédente pour résoudre le système non linéaire (3.15) pour différentes valeurs de trois paramètres  $Fr$ , l'inverse de nombre de *Weber*  $\delta$  et les angles  $\gamma$  et  $\beta$ . On trouve la solution du problème pour chaque valeur de  $Fr, \delta, \gamma$  et  $\beta$ . Les résultats ont été trouvés pour  $N = 301, \Delta_h = 0.15$  et  $\gamma = \beta = -\frac{\pi}{4}$ . La figure 3.4 présente l'effet de la gravité sur la forme de la surface libre où la tension de surface est nulle ( $T = 0$ ). La figure 3.5 montre la nature d'écoulement et la forme de la surface libre pour quelques valeurs de  $\delta$ . La forme de la surface libre, où le nombre de *Froude*  $Fr$  est plus grand ( $g = 0$ ), est représenté dans la figure 3.6 pour  $\delta = 1, 10$  et  $100$ .

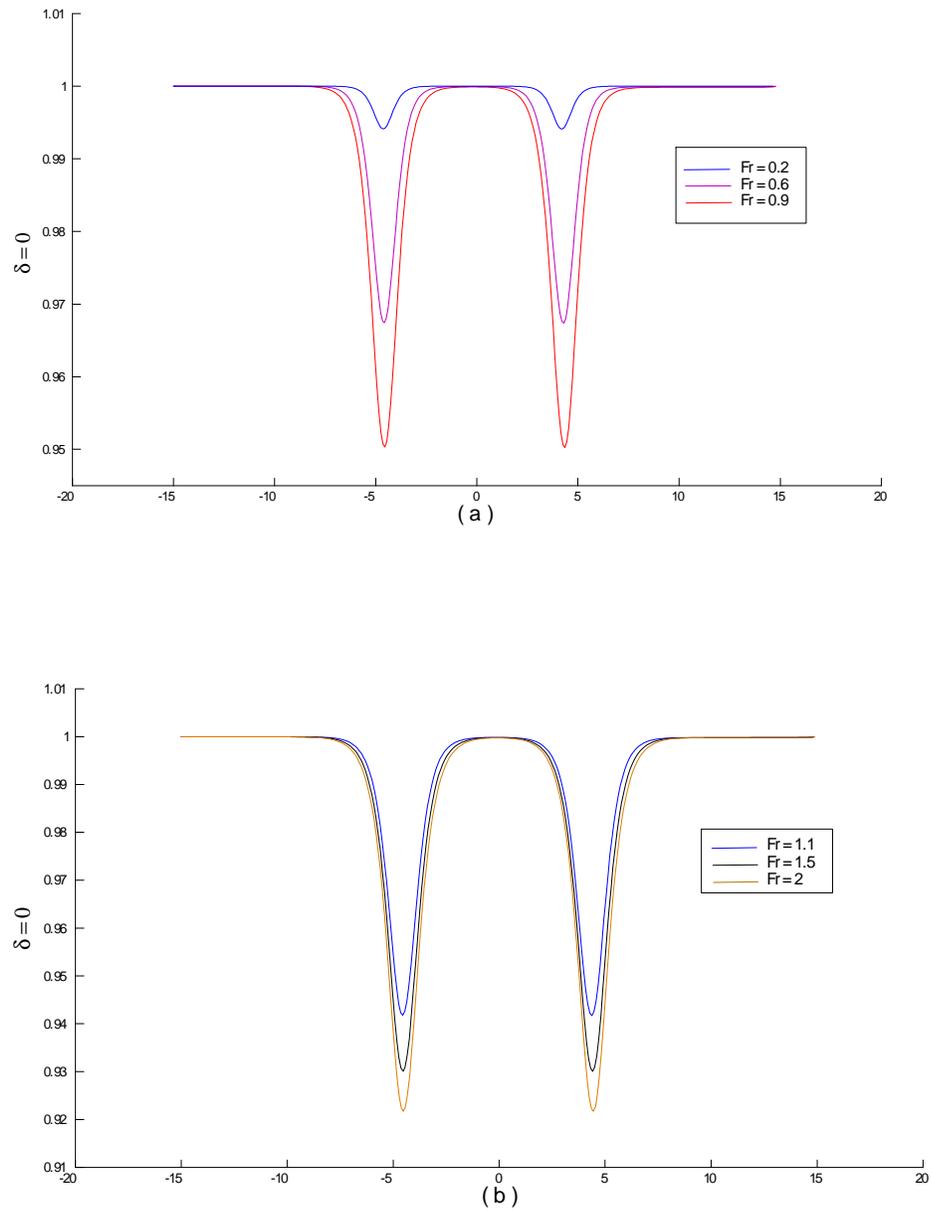


FIG. 3.4 – Forme de la surface libre pour  $\delta = 0$  a) cas subcritique pour  $Fr = 0.2, 0.6$  et  $0.9$ . b) cas supercritique pour  $Fr = 1.1, 1.5$  et  $2$ .

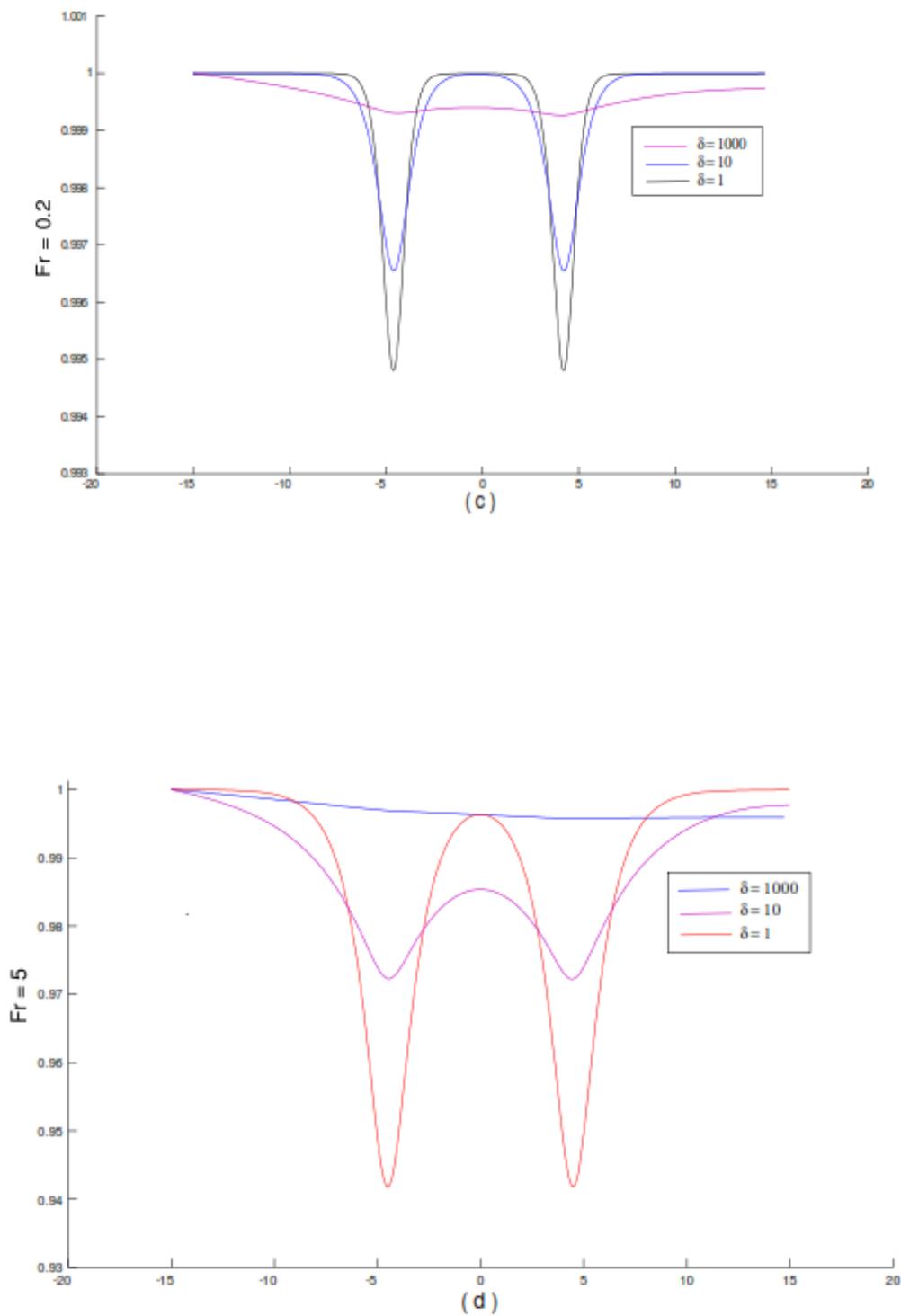


FIG. 3.5 – Forme de la surface libre pour quelques valeurs de  $\delta$ . *c*) cas subcritique pour  $Fr = 0.2$ . *d*) cas supercritique pour  $Fr = 5$ .

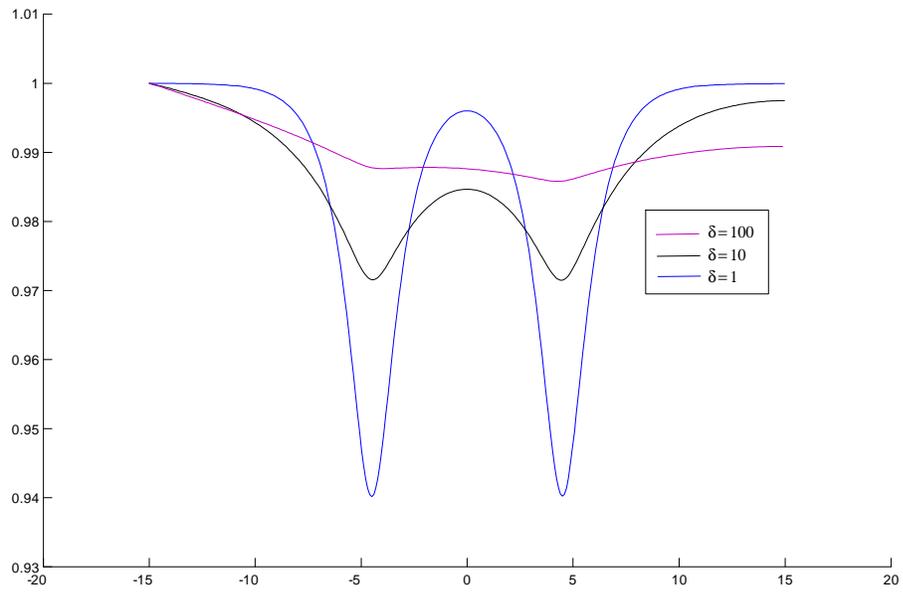


FIG. 3.6 – Forme de la surface libre pour  $Fr = \infty$  et  $\delta = 1, 10$  et  $100$ .

# Chapitre 4

## Écoulement à surface libre sous un barrage avec l'effet de la tension de surface et de la gravité

### 4.1 Introduction

Les problèmes d'écoulement à surface libre sous un barrage ont une grande importance dans la mécanique du fluide. La résolution numérique de ces problèmes a été traitée par plusieurs auteurs, J.-M. Vanden-Broeck en 1986 [45] et B. J. Binder et J.M. Vanden-Broeck en 2005 [6]. Dans l'année 1996, Asavanant et Vanden-Broeck [4] ont trouvé la solution du problème avec deux surfaces libres en adoptant la méthode de troncation de la série. Vanden-Broeck (1997) [44] a étudié ce problème avec l'effet de la gravité où l'ouverture du barrage est verticale en utilisant la méthode intégro-différentielle. P. Guayjarernpanishk et J. Asavanant (2009) [20] ont étudié le problème dans le cas où l'ouverture du barrage est inclinée d'un angle  $\gamma$  en tenant compte seulement de l'effet de la gravité.

Dans notre travail, on s'intéresse au problème d'un écoulement bidimensionnel et irrotationnel d'un fluide incompressible et non visqueux sous un barrage d'ouverture inclinée d'un angle  $\gamma$  telle que  $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$  en tenant compte de l'effet de la tension de surface et de la gravité. Nous supposons que lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , l'écoulement est uniforme de vitesse  $U$  et d'élévation  $H$

( voir (FIG.4.1) ).

La solution exacte du problème envisagée est impossible à obtenir à cause de la présence du terme non linéaire intervenant dans l'équation de *Bernoulli*. Pour cette raison, on résout le problème par une approche numérique. La technique de résolution utilisée est la même dans les chapitres précédents.

Comme nous le verrons, l'écoulement sera caractérisé par les trois paramètres : l'inverse de nombre de *Weber*  $\delta$  défini par :

$$\delta = \frac{T}{\rho U^2 H}$$

Ici  $T$  est la tension de surface et  $\rho$  est la densité du fluide.

Le nombre de *Froude*  $Fr$  est défini par :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gH}}$$

Où  $g$  est la gravité,  $U$  et  $H$  sont respectivement la vitesse et la profondeur du fluide à l'infini.

Et l'angle non dimensionnelle  $\gamma$ .

On cherche la solution du problème pour chaque valeurs de ces trois paramètres.

Notons que dans tout ce qui suit, les variables notées avec ( $\sphericalangle$ ) sont des variables avec leurs dimensions physiques et les variables sans ( $\sphericalangle$ ) sont sans dimensions.

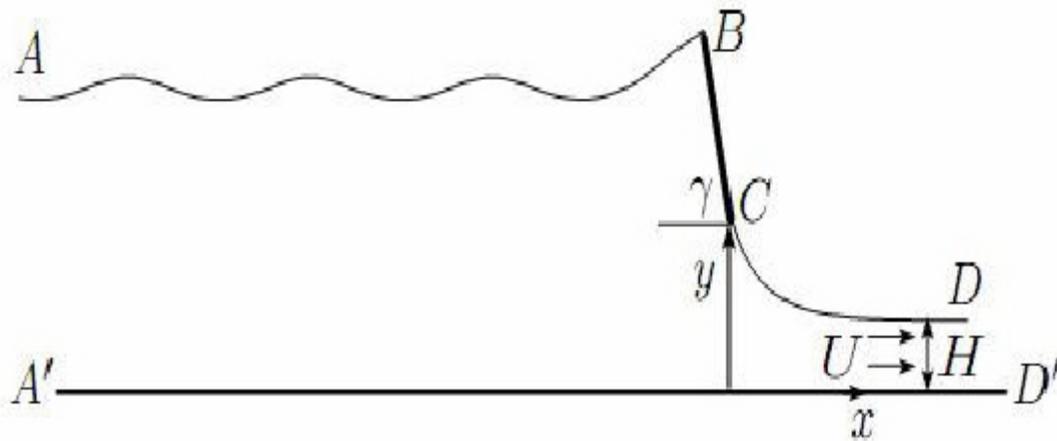


FIG. 4.1 – Ecoulement sous un barrage dans le plan complexe  $z = x + iy$

## 4.2 Formulation du problème

On considère un écoulement potentiel bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, à surface libre sous un barrage d'ouverture inclinée  $BC$  faisant un angle  $\gamma$  avec l'horizontale où  $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ . On prend comme repère de coordonnées le fond du barrage sur l'axe  $x'ox$  et l'axe verticale  $y'oy$ . L'écoulement est limité en dessus par les lignes de courant libres  $AB, CD$  et  $BC$  et en dessous par la paroi rigide  $A'D'$  ( voir (FIG.4.1) ). Nous supposons que lorsque  $\tilde{x} \rightarrow +\infty$ , l'écoulement est uniforme de vitesse  $\tilde{U}$  et d'élévation  $\tilde{H}$ . Notons par  $\tilde{\xi} = \tilde{u} - i\tilde{v}$ , où  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  sont respectivement les composantes du vecteur vitesse dans la direction de  $x'ox$  et de  $y'oy$  et par  $\tilde{f} = \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) + i\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y})$  la fonction potentielle complexe, où  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\psi}$  désignent respectivement la fonction potentielle et la fonction de courant.

Sans perte de généralité, on choisit  $\tilde{\phi} = 0$  au point  $B$  et  $\tilde{\psi} = 0$  sur la surface libre  $ABCD$ . Il s'ensuit que  $\tilde{\psi} = -1$  sur la ligne de courant  $A'D'$  ( voir (FIG.4.2) ).

En utilisant le fait que l'écoulement est potentiel, les composantes du vecteur vitesse sont alors données en fonction de  $\tilde{\phi}$  et  $\tilde{\psi}$  par les relations :

$$\begin{cases} \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{y}} \\ \tilde{v} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \end{cases} \quad (4.1)$$

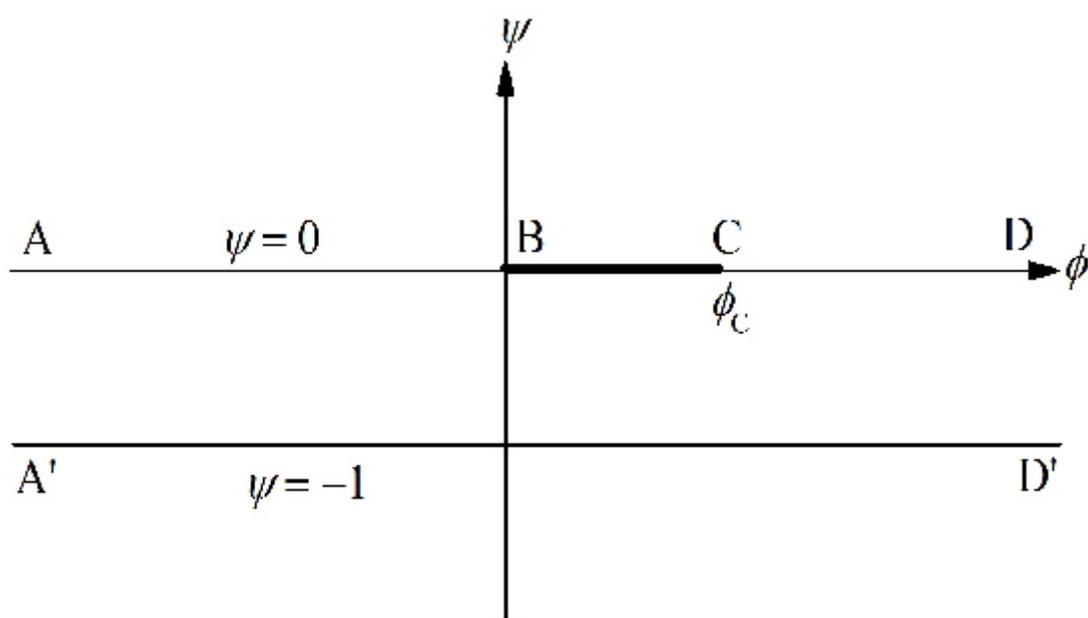


FIG. 4.2 – Le plan complexe  $f = \phi + i\psi$

Les conditions de *Cauchy-Riemann* montrent que la vitesse complexe  $\tilde{\xi} = \tilde{u} - i \tilde{v}$  et la fonction potentielle  $\tilde{f}$  sont des fonctions analytiques de variable  $\tilde{z} = \tilde{x} + i \tilde{y}$ .

On note par  $\tilde{p}_0$  est la pression atmosphérique qui est constante au dessus de la surface libre et  $\tilde{p}$  est la pression du fluide sur la surface libre. L'équation de *Bernoulli* sur la surface libre est donnée par :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} + \tilde{g}\tilde{y} = const \quad (4.2)$$

Où  $\tilde{q} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}$  est le module de vitesse et  $\tilde{g}$  est la gravité.

La relation entre  $\tilde{p}$  et  $\tilde{p}_0$  est donnée par la loi de *Laplace* :

$$\tilde{p} - \tilde{p}_0 = \frac{\tilde{T}}{\tilde{R}} = \tilde{K}\tilde{T} \quad (4.3)$$

Notons que lorsque  $\tilde{x} \rightarrow +\infty$  la surface libre est une droite parallèle à l'axe  $x'ox$  donc  $\tilde{p}_0 = \tilde{p}$ .

Où  $\tilde{K}$  est la courbure de la surface libre,  $\tilde{R}$  est le rayon de courbure et  $\tilde{T}$  dénote la tension de surface.

Pour rendre l'équation (4.2) en variables non dimensionnelles, nous choisissons  $\tilde{U}$  comme unité de vitesse et  $\tilde{H}$  comme unité de longueur et on pose :

$$u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}}, v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}}, K = \tilde{K}\tilde{H}, y = \frac{\tilde{y}}{\tilde{H}} \quad (4.4)$$

En substituant (4.3) dans (4.2) on trouve :

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \delta K + \frac{1}{Fr^2}y = c \quad (4.5)$$

Où  $c$  est constante.

Avec les conditions :

$$\begin{cases} v = 0 & \text{sur } \psi = -1 \\ v = -u \tan \gamma & \text{sur } \psi = 0, 0 < \phi < \phi_C \end{cases} \quad (4.6)$$

On note par :  $\xi = u - iv$  le vecteur vitesse, comme  $u - iv$  est analytique, on définit la fonction  $\tau - i\theta$  par la relation :

$$\xi = u - iv = e^{\tau - i\theta} \quad (4.7)$$

Où  $\theta$  désigne l'angle entre le vecteur de vitesse et l'horizontale. Nous avons :

$$K = \frac{1}{R} = - \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| e^{\tau}$$

$K$  est de signe négatif puisque le centre de courbure est en dehors du fluide.

Alors la condition de *Bernoulli* (4.5) en variables non dimensionnelles sur les lignes de courant libres  $AB$  et  $CD$  s'écrit :

$$\frac{1}{2}e^{2\tau} - \delta e^{\tau} \left| \frac{\partial\theta}{\partial\phi} \right| + \frac{1}{Fr^2}y = c \quad \text{sur } AB \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{2}e^{2\tau} - \delta e^{\tau} \left| \frac{\partial\theta}{\partial\phi} \right| + \frac{1}{Fr^2}(y - 1) = \frac{1}{2} \quad \text{sur } CD \quad (4.9)$$

Le domaine occupé par le fluide dans le plan de la variable  $f$  est une bande infinie dans la région  $-1 < \psi < 0$  et  $-\infty < \varphi < +\infty$ . La transformation conforme d'une bande infinie dans le plan  $f$  au demi plan supérieur  $\zeta$  est donnée par la relation :

$$\zeta = \alpha + i\beta = e^{-f\pi} = e^{-\pi(\phi+i\psi)} = e^{-\pi\phi} (\cos(\pi\psi) - i \sin(\pi\psi)) \quad (4.10)$$

Le plan complexe  $\zeta$  est donnée dans la figure (FIG.4.3).

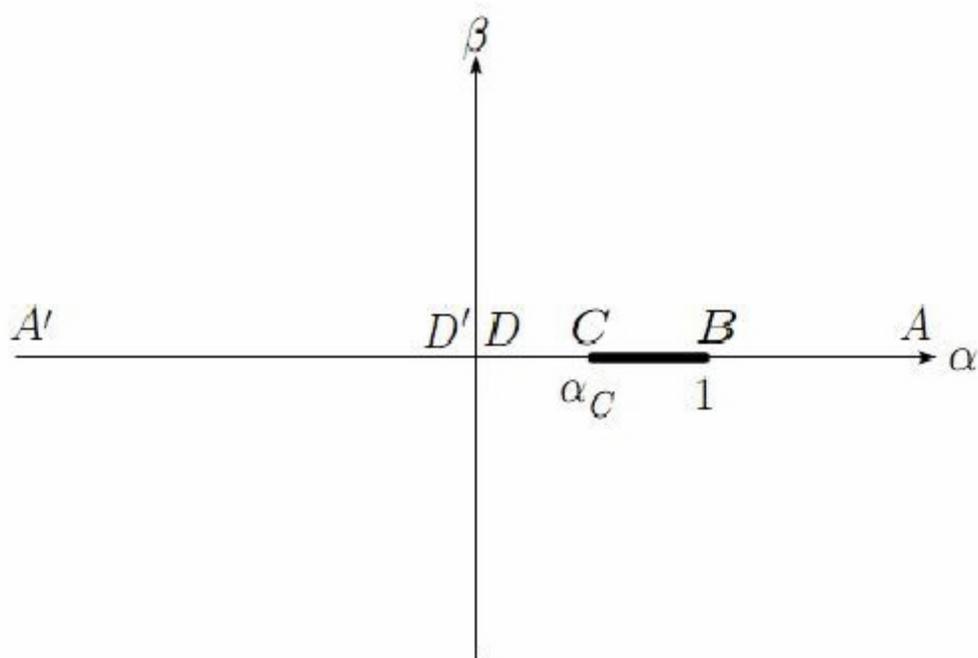


FIG. 4.3 – Le plan complexe  $\zeta = \alpha + i\beta$

Les conditions aux limites (4.6) dans le plan  $\zeta$  deviennent alors :

$$\begin{cases} \theta = 0 & \beta = 0 & \text{sur } \alpha < 0 \\ \theta = -\gamma & \beta = 0 & \text{sur } \alpha_C < \alpha < 1 \end{cases} \quad (4.11)$$

Nous cherchons  $\xi(\tau, \theta)$  qui vérifie les équations (4.8) et (4.9) avec les conditions (4.11).

### 4.3 L'équation intégro-différentielle

En utilisant la technique d'intégrale de Cauchy, dans le plan  $\zeta$  et l'équation (2.17) on a :

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha, \quad (4.12)$$

Où  $\theta(\alpha) = \theta(\alpha, 0)$  et  $\tau(\alpha) = \tau(\alpha, 0)$ . L'intégrale (4.12) est séparée en quatre parties, on a alors :

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\alpha_D} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_D}^{\alpha_C} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_C}^{\alpha_B} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_B}^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \right] \quad (4.13)$$

En utilisant (4.11), l'équation (4.13) devient :

$$\tau_1(\alpha_0) = \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_C - \alpha_0} \right| - \frac{1}{\pi} \int_1^{\alpha} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (4.14)$$

Pour  $\alpha \geq 1$  et

$$\tau_2(\alpha_0) = \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_C - \alpha_0} \right| - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha_C} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (4.15)$$

Pour  $0 < \alpha \leq \alpha_C$

En utilisant (4.10), avec  $\psi = 0$ , on a :

$$\alpha = e^{-\pi\phi}, \alpha_0 = e^{-\pi\phi_0} \quad (4.16)$$

En substituant (4.16) dans (4.14) et (4.15) on trouve :

$$\tau'_1(\phi_0) = \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1 - e^{-\pi\phi_0}}{e^{-\pi\phi_C} - e^{-\pi\phi_0}} \right| + \int_{-\infty}^0 \frac{\widehat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\phi \quad (4.17)$$

$$\tau'_2(\phi_0) = \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1 - e^{-\pi\phi_0}}{e^{-\pi\phi_C} - e^{-\pi\phi_0}} \right| + \int_{\phi_C}^{+\infty} \frac{\widehat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\phi \quad (4.18)$$

Où  $\tau'_1(\phi_0) = \tau_1(e^{-\pi\phi_0})$ ,  $\tau'_2(\phi_0) = \tau_2(e^{-\pi\phi_0})$  et  $\widehat{\theta}(\phi) = \theta(e^{-\pi\phi})$ . Les conditions de *Bernoulli* (4.8) et (4.9) s'écrivent maintenant en termes de  $\tau'$  et  $\widehat{\theta}$ , comme suit :

$$\frac{1}{2} e^{2\tau'_1} - \delta e^{\tau'_1} \left| \frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \phi} \right| + \frac{1}{Fr^2} y = c \quad \text{sur } AB \quad (4.19)$$

$$\frac{1}{2} e^{2\tau'_2} - \delta e^{\tau'_2} \left| \frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \phi} \right| + \frac{1}{Fr^2} (y - 1) = \frac{1}{2} \quad \text{sur } CD \quad (4.20)$$

Pour déterminer  $(x, y)$  sur les surfaces libres  $AB$  et  $CD$  nous utilisons (4.7) et la relation

$$\frac{dz}{df} = \xi^{-1} = e^{-\tau+i\theta}$$

Par intégration, on obtient :

$$x(\alpha) = x_B - \frac{1}{\pi} \int_1^\alpha \frac{e^{-\tau'_1(\alpha_0)} \cos \theta(\alpha_0)}{\alpha_0} d\alpha_0 \quad (4.21)$$

$$y(\alpha) = y_B - \frac{1}{\pi} \int_1^\alpha \frac{e^{-\tau'_1(\alpha_0)} \sin \theta(\alpha_0)}{\alpha_0} d\alpha_0 \quad (4.22)$$

Pour  $\alpha \geq 1$  et

$$x(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha_C} \frac{e^{-\tau'_2(\alpha_0)} \cos \theta(\alpha_0)}{\alpha_0} d\alpha_0 \quad (4.23)$$

$$y(\alpha) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_\alpha^{\alpha_C} \frac{e^{-\tau'_2(\alpha_0)} \sin \theta(\alpha_0)}{\alpha_0} d\alpha_0 \quad (4.24)$$

Pour  $0 < \alpha \leq \alpha_C$

En utilisant (4.16), on réécrit (4.21), (4.22), (4.23) et (4.24) comme suit :

$$\begin{aligned}\widehat{x}(\phi) &= x_B + \int_{-\infty}^{\phi} e^{-\tau_1'(\phi_0)} \cos \widehat{\theta}(\phi_0) d\phi_0 \\ \widehat{y}(\phi) &= y_B + \int_{-\infty}^{\phi} e^{-\tau_1'(\phi_0)} \sin \widehat{\theta}(\phi_0) d\phi_0\end{aligned}\quad (4.25)$$

Pour  $-\infty < \phi < 0$  et

$$\begin{aligned}\widehat{x}(\phi) &= \int_{\phi_C}^{\phi} e^{-\tau_2'(\phi_0)} \cos \widehat{\theta}(\phi_0) d\phi_0 \\ \widehat{y}(\phi) &= 1 - \int_{\phi_C}^{\phi} e^{-\tau_2'(\phi_0)} \sin \widehat{\theta}(\phi_0) d\phi_0\end{aligned}\quad (4.26)$$

Pour  $\phi_C < \phi < +\infty$

En substituant (4.25) et (4.26) dans (4.19) et (4.20), on définit une équation integro-différentielle non linéaire en fonction de l'inconnue  $\widehat{\theta}$ .

## 4.4 Procédure numérique

Puisque les équations (4.19) et (4.20) sont non linéaires. Les points de la surfaces libres  $AB$  et  $CD$  dans le plan complexe  $f$  sont représentés par  $-\infty < \phi < 0$  et  $\phi_C < \phi < +\infty$  respectivement. On introduit la discrétisation :

$$\phi_I^U = -(I-1)\Delta_1, I = 1, \dots, N_1, 0 < a < \phi < 0 \text{ avec } a \text{ assez grand}$$

et

$$\phi_I^D = \phi_C + (I-1)\Delta_2, I = 1, \dots, N_2, \phi_C < \phi < a$$

Où  $\Delta_1 > 0$  et  $\Delta_2 > 0$ . Où  $\theta_I^U, \theta_I^D$  sont les inconnues. On note :

$$\theta_I^U = \widehat{\theta}(\phi_I^U)$$

et

$$\theta_I^D = \widehat{\theta}(\phi_I^D)$$

Nous calculons la valeur  $\tau_M^U$  de  $\tau_1'$  en les points milieux qui sont données par :

$$\phi_M^U = \frac{\phi_{I+1}^U + \phi_I^U}{2}, I = 1, \dots, N_1 - 1 \quad (4.27)$$

et aussi la valeur  $\tau_M^D$  de  $\tau_2'$  en les points :

$$\phi_M^D = \frac{\phi_{I+1}^D + \phi_I^D}{2}, I = 1, \dots, N_2 - 1 \quad (4.28)$$

Les équations (4.17) et (4.18) peuvent être réécrites respectivement par :

$$\tau_M^U = \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1 - e^{-\pi\phi_M^U}}{e^{-\pi\phi_C} - e^{-\pi\phi_M^U}} \right| + \int_{-\infty}^0 \frac{\widehat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\phi$$

et

$$\tau_M^D = \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1 - e^{-\pi\phi_M^D}}{e^{-\pi\phi_C} - e^{-\pi\phi_M^D}} \right| + \int_{\phi_C}^{+\infty} \frac{\widehat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\phi$$

Où  $\tau_M^U = \tau'(\phi_M^U)$ ,  $\tau_M^D = \tau'(\phi_M^D)$ . L'utilisation de la règle de trapèze donne :

$$\tau_M^U = \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1 - e^{-\pi\phi_M^U}}{e^{-\pi\phi_C} - e^{-\pi\phi_M^U}} \right| + \sum_{j=1}^{N_1} \frac{\theta_j^U e^{-\pi\phi_j^U} \Delta_1 \omega_j}{e^{-\pi\phi_j^U} - e^{-\pi\phi_M^U}}, I = 1, \dots, N_1 - 1 \quad (4.29)$$

$$\tau_M^D = \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1 - e^{-\pi\phi_M^D}}{e^{-\pi\phi_C} - e^{-\pi\phi_M^D}} \right| + \sum_{j=1}^{N_2} \frac{\theta_j^D e^{-\pi\phi_j^D} \omega_j \Delta_2}{e^{-\pi\phi_j^D} - e^{-\pi\phi_M^D}}, I = 1, \dots, N_2 - 1 \quad (4.30)$$

Où  $\omega_j$  est la fonction de poids, telle que :

$$\omega_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = 1, N \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\theta_j^U = \widehat{\theta}(\phi_j^U)$  et  $\theta_j^D = \widehat{\theta}(\phi_j^D)$ . En substituant (4.29) et (4.30) dans (4.19) et (4.20) respectivement, on obtient un système de  $N$  équations non linéaires à  $N$  inconnues  $\theta_I$  pour

$I = 1, \dots, N$  ( $N = N_1$  ou  $N = N_2$ ). La dérivée,  $\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi}$ , aux points de milieu (4.27) et (4.28), est approximée par une différence finie, par :

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} \approx \frac{\theta_{I+1} - \theta_I}{\Delta_h}, I = 1, \dots, N - 1$$

Pour résoudre ce système on utilise la méthode de *Newton*.

#### 4.4.1 Forme de la surface libre

Pour déterminer la forme de la surface libre, on utilise la relation suivante :

$$\frac{dz}{df} = \frac{\partial x}{\partial \phi} + i \frac{\partial y}{\partial \phi} = e^{-\tau + i\theta}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \phi} = e^{-\tau} \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} = e^{-\tau} \sin \theta \end{cases} \quad (4.31)$$

Ainsi, la forme de la surface libre est obtenue en intégrant numériquement les relations (4.31) et en utilisant la méthode *d'Euler* ce qui donne

$$y_I^U = \hat{y}(\phi_I^U) = \begin{cases} y_1^U = y_B \\ y_{I+1}^U = y_I^U - \Delta_1 e^{-\tau_M^U} \sin \theta_M^U, I = 2, \dots, N_1 - 1 \end{cases}$$

Et

$$x_I^U = \hat{x}(\phi_I^U) = \begin{cases} x_1^U = x_B \\ x_{I+1}^U = x_I^U - \Delta_1 e^{-\tau_M^U} \cos \theta_M^U, I = 2, \dots, N_1 - 1 \end{cases}$$

Le point  $(x_B, y_B)$  de l'ouverture du barrage est donné par :

$$\begin{cases} x_B = -L \cos(\gamma) \\ y_B = 1 + L \sin(\gamma) \end{cases}$$

Où  $L$  est la longueur du coté  $BC$

$$y_I^D = \hat{y}(\phi_I^D) = \begin{cases} y_1^D = 1 \\ y_{I+1}^D = y_I^D + \Delta_2 e^{-\tau_M^D} \sin \theta_M^D, I = 2, \dots, N_2 - 1 \end{cases}$$

Et

$$x_I^D = \hat{x}(\phi_I^D) = \begin{cases} x_1^D = 0 \\ x_{I+1}^D = x_I^D + \Delta_2 e^{-\tau_M^D} \cos \theta_M^D, I = 2, \dots, N_2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{Ici } \theta_M^U = \frac{\theta_{I+1}^U + \theta_I^U}{2} \text{ et } \theta_M^D = \frac{\theta_{I+1}^D + \theta_I^D}{2}.$$

## 4.5 Résultats et discussion

Nous utilisons les méthodes de résolution décrites ci-dessus pour résoudre le problème numériquement.

On trouve les solutions du problème pour chaque valeurs de trois paramètres le nombre de *Froude*  $Fr$ , l'inverse de nombre de *Weber*  $\delta$  et l'angle  $\gamma$ . Nous signalons que la plus part de ces résultats ont été trouvés pour  $N_1 = N_2 = 601$ ,  $\Delta_1 = 0.028$ ,  $\Delta_2 = 0.02$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{6}$  et  $\phi_C = 0.2$ .

On détermine la forme des deux surfaces libres  $AB$  et  $CD$ .

La figure 4.4 présente l'effet de la tension de surface sur la forme des deux surfaces libres pour  $Fr = 2$ . On constate que, lorsque  $\delta$  croît le nombre d'ondes de la surface libre  $AB$  diminue. L'effet de la gravité ( où  $\delta = 1$  ) sur la forme de surface libre est représenté dans la figure 4.5. Notons que, lorsque  $Fr$  augmente l'amplitude des ondes sont décroissante c-à-dire lorsque  $Fr \rightarrow \infty$ , la courbe représentant la surface libre  $AB$  tends vers une droite. La figure 4.6 présente la forme des deux surfaces libres pour  $\phi_C = 0.075$ .

**Cas où l'ouverture du barrage est verticale**  $\gamma = \frac{\pi}{2}$

Vanden Broeck [44] a étudié le problème dans le cas où la gravité est non nulle et la tension de la surface est négligeable. Le coefficient de contraction  $C_c = \frac{H}{L}$  est le rapport de la profondeur du fluide à l'infini et de la largeur de l'orifice. La figure 4.7 montre la variation de  $C_c$  en fonction de l'inverse du nombre de Weber  $\delta$ . On remarque que le coefficient  $C_c$  croît

lorsque  $\delta$  est croît. Dans le cas où la gravité et la tension de surface sont nulles (  $g = 0$  et  $T = 0$  ), l'auteur *Batchelor* [5] en 1967 ( page 497 ) a calculé explicitement le coefficient de contraction dans ce cas et il a trouvé la valeur

$$C_c = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0.61102$$

L'effet de la tension de surface pour (  $F \rightarrow \infty$  ) sur la forme de la surface libre  $CD$  est représentée dans la figure (FIG.4.8). Lorsque  $\delta \rightarrow \infty$ , la forme de la surface libre tends vers une droite d'équation  $y = y_C$ .

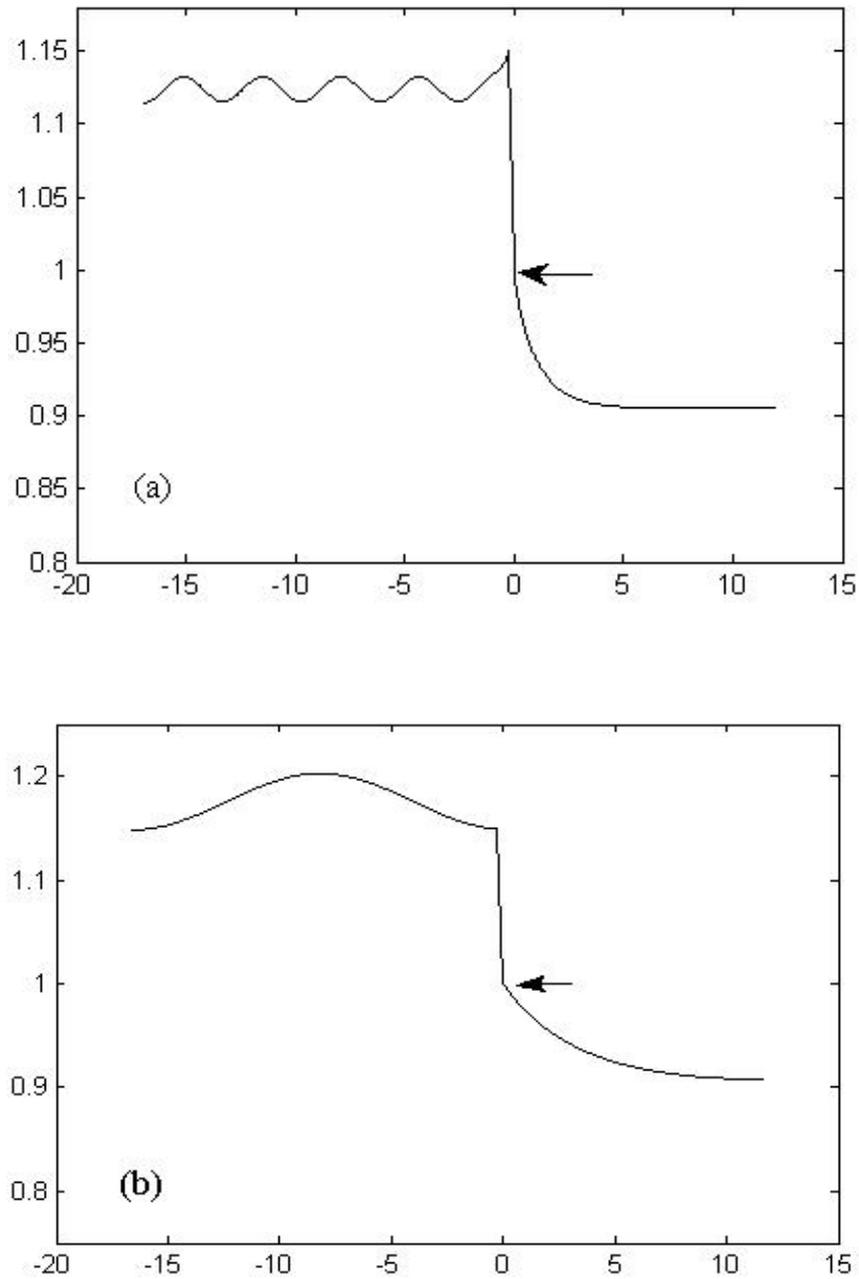


FIG. 4.4 – Forme de la surface libre pour *a)*  $\delta = 0.7, Fr = 2$  *b)*  $\delta = 10, Fr = 2$ . La flèche indique la position du point de séparation  $C$  où l'écoulement quitte l'ouverture du barrage.

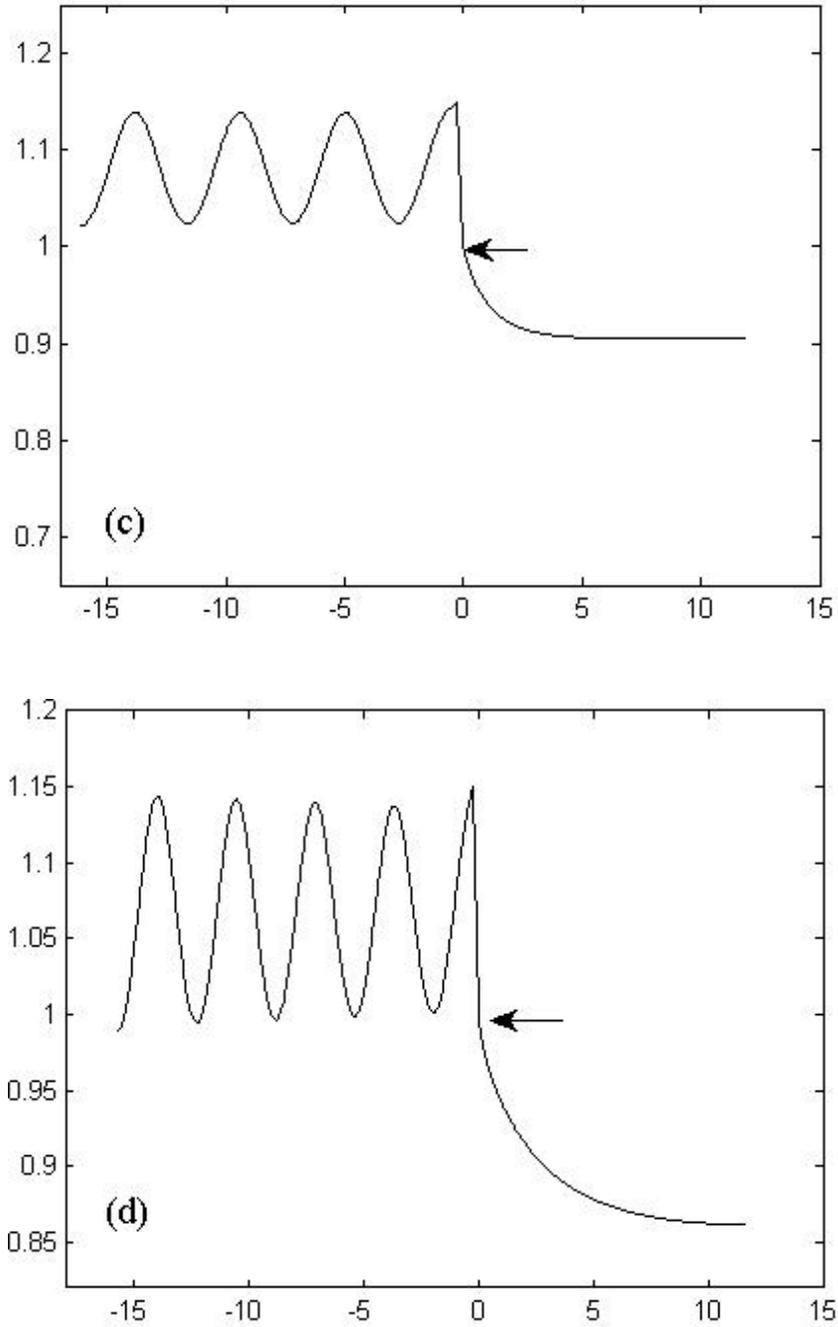


FIG. 4.5 – Forme de la surface libre pour *c)*  $\delta = 1, Fr = 2.5$  *d)*  $\delta = 1, Fr = 1$ . La flèche indique la position du point de séparation  $C$  où l'écoulement quitte l'ouverture du barrage.

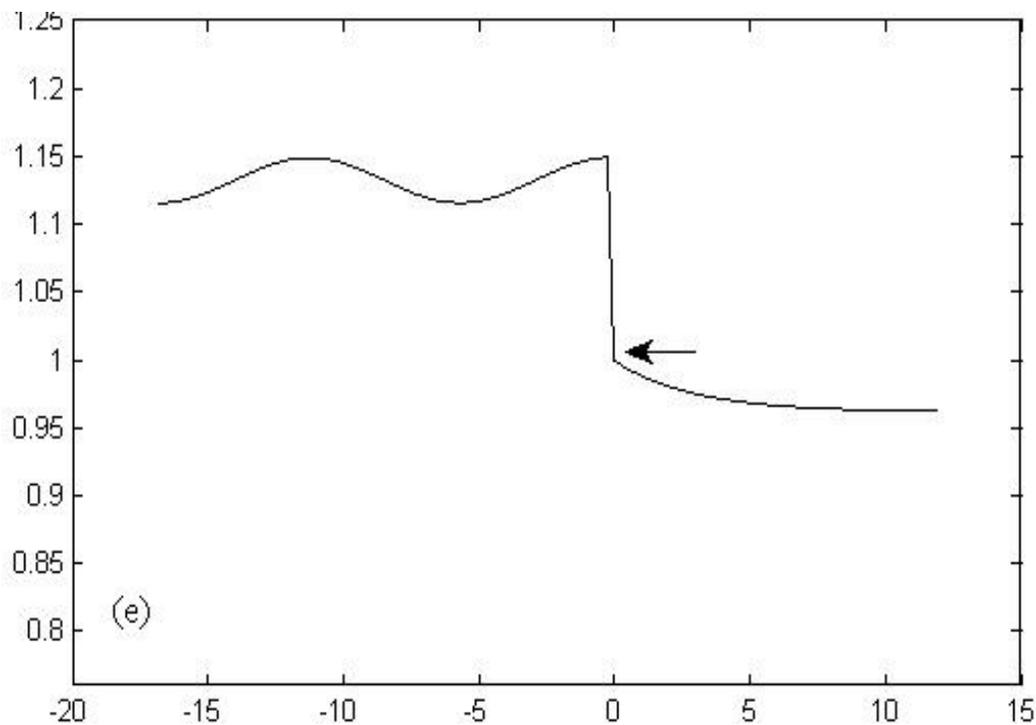


FIG. 4.6 – Forme de la surface libre pour  $\delta = 5$ ,  $Fr = 1.5$  et  $\phi_C = 0.075$ .

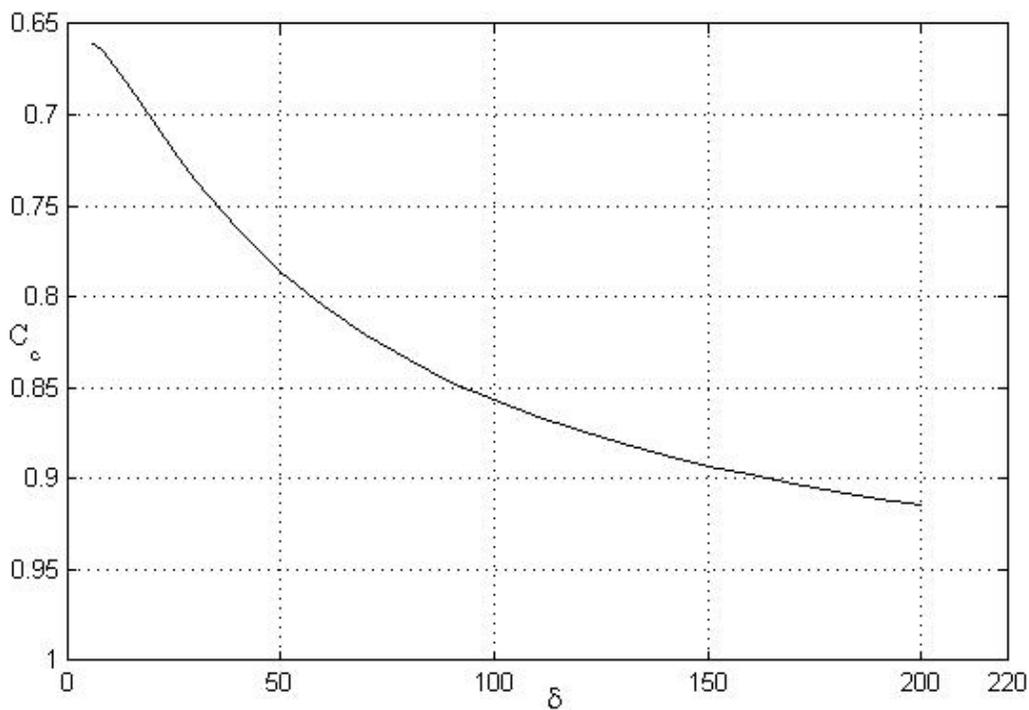


FIG. 4.7 – La variation du degré de contraction  $C_c$  en fonction de l'inverse du nombre de Weber  $\delta$ .

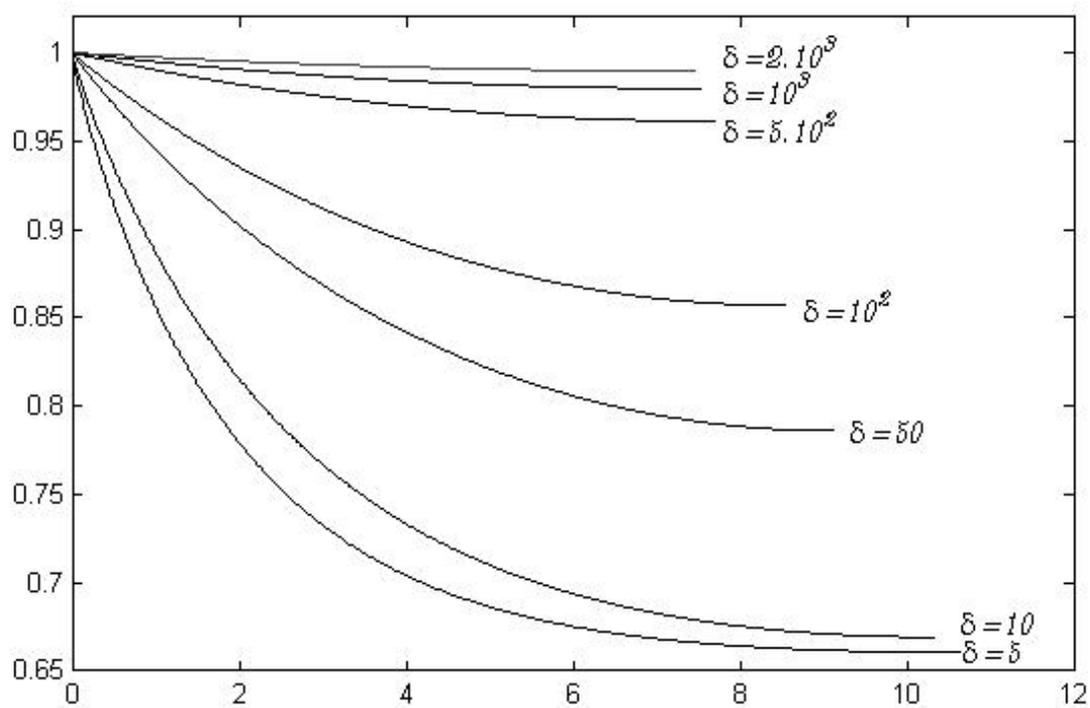


FIG. 4.8 – L'effet de la tension de surface sur la forme de la surface libre à droite  $CD$ .

# Conclusion

Les problèmes des écoulements à surface libre sont très difficiles et même impossible à résoudre explicitement, surtout si on inclut les effets de la tension de surface ou la force de gravité, cela est due a la non linéarité de la condition au bord de l'équation de *Bernoulli*, sur une surface qui est de forme inconnue. dans cette thèse on a étudié trois problèmes qui ont été résolus numériquement par la méthode d'équation intégral-différentielle. Les solutions de ces problèmes sont caractérisées par l'inverse du nombre de Weber  $\delta$  et le nombre de *Froude*  $Fr$ . Dans **le chapitre 2** on a étudié le problème d'un écoulement potentiel, bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux, sur une dépression de forme triangulaire, on a constaté que la solution existe et unique pour chaque valeur du nombre  $\delta$  et pour chaque valeur du nombre de *Froude*  $Fr$ . Les résultats sont présentés pour  $\gamma > 0$  (resp.  $\gamma < 0$ ) voir [Fig 2.5-Fig 2.10](#).

Dans **Le chapitre 3** on a présenté l'étude du problème d'un écoulement potentiel, bidimensionnel, passant au-dessus de deux triangles isocèles. Le problème après discrétisation se réduit à un système algébrique de  $N$  équations non linéaires qu' il a résolu par la méthode de *Newton*. Les résultats présentés (voir [Fig 3.4-Fig 3.6](#)) ont trouvés et discutés pour différentes valeurs de  $\delta, Fr$  pour  $\gamma = -\frac{\pi}{4}$ .

Dans **le chapitre 4** on a étudié le problème d'un écoulement bidimensionnel, irrotationnel sous un barrage d'ouverture inclinée faisant un angle  $\gamma$  avec l'horizontale où  $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ . Le problème considéré est caractérisé par la condition non linéaire donnée par l'équation de *Bernoulli* sur la surface libre qui est de forme inconnue. Ce problème a été déjà étudié par J. M. Vanden-Broeck [\[44\]](#) et P. Guayjarenpishk [\[20\]](#). Il existe deux surfaces libres avant et après l'ouverture du barrage. Les résultats dépendent des deux paramètres l'angle  $\gamma$  et le

point  $\phi_C$ . Notons que la forme de la surface libre à gauche contient des ondes, par contre celle de droite ne contient pas. On remarque que, lorsque le nombre de *Froude*  $Fr$  est plus grand, l'amplitude des ondes devient plus petite voir [Fig 4.4-Fig 4.6](#). Aussi le coefficient de contraction  $C_c$  décroît lorsque le nombre de *Froude*  $Fr$  décroît et lorsque la tension de surface tends vers l'infini la forme de la surface libre s'aplatie et tends vers une droite horizontale parallèle à l'axe  $x'Ox$ .

# Bibliographie

- [1] M.B. Abd-el-Malek, S.N. Hanna et M.T. Kamel, Approximate solution of gravity flow from a uniform channel over triangular bottom for large Froude number. *Appl. Math. Modelling.* 15. (1989) pp. 25-32.
- [2] Alex Doak et Jean-Marc Vanden-Broeck, Solitary gravity waves and free surface flows past a point vortex. *IMA Journal of Applied Mathematics* (2017) pp. 1–15.
- [3] C. D. Andersson et J.-M. Vanden-Broeck, Bow flows with surface tension. *Proc. R. Soc. Lond.* 452. (1996) pp. 1985-1997.
- [4] J. Asavanant et J. M. Vanden-Broeck, Nonlinear free-surface flow emerging from vessels and flows under a sluice gate. *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* 38. (1996) pp. 63-86.
- [5] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, London, 1967.
- [6] B. J. Binder et J. M. Vanden-Broeck, Free surface flows past surfboards and sluice gates. *European J. Appl. Math.* 16 (2005) pp. 601-619.
- [7] G. Birkhoff et E.H. Zarantonello, *Jet, Wakes and Cavities*, Academic Press Inc. New York, 1957.
- [8] G. D. Crapper, An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude. *J. Fluid Mech.* 2. (1957) pp. 532–540.
- [9] E. Cumberbatch et J. Norbury, Capillary modification of the singularity at a free-streamline separation point. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 32. (1979) pp. 303–312.
- [10] F. Dias. F et J.-M. Vanden-Broeck, Open channel flows with submerged obstructions. *J. Fluids.Mech.* 206. (1989) pp. 155–170.

- [11] F. Dias et J.M. Vanden Broeck, Nonlinear bow flow with spray. *J. Fluid Mech.* vol 255. (1993) pp. 91-102.
- [12] F. Dias et Kharif, Nonlinear gravity and capillary-gravity waves. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 31. (1999) pp. 301-346.
- [13] T. M. R. Ellis, *Fortran 77 Programming*. Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [14] N. Foukroun, R. Ait-Yahia-Djouadi et D. Hernane-Boukari, Solvability of a supercritical free surface flow problem under gravity-capillarity. *Applicable Analysis*. (2017) pp. 1-16.
- [15] L. K. Forbes et L. W. Schwartz, Free-surface flow over a semicircular obstruction. *J. Fluid Mech.* 114. (1982) pp. 299-314.
- [16] L. K. Forbes, Non-linear drag-free flow over a submerged semi-elliptical body. *J. Eng. Math.* 16. (1982) pp. 171-180.
- [17] L.K. Forbes, Free-surface flow over a semicircular obstruction, including the influence of gravity and surface tension, *J. Fluid. Mech.* 127. (1986) pp. 283-297.
- [18] A. Gasmi et H. Mekias, The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet *J. Phys . A : Math. Gen.* 36 No 3 (2003) pp. 851-862.
- [19] C. George. Hsiao et L. Wolfgang. Wendland, *Boundary integral equations*, Applied Mathematical sciences volume 164, Springer, 2008.
- [20] P. Guayjarernpanishk et J. Asavanant, Numerical solutions of flows under an inclined gate. *Thai Journal of Mathematics* Volume 7 Number 1. (2009) pp. 171-187.
- [21] F. Guechi, S. Boutechebak et H. Benseridi, Zero gravity of open channel flows. *Int. J. Open Problems Compt. Math.* Vol. 4, No. 1. ( 2011) pp. 151-157.
- [22] M. I . Gurevich, *Theory of Jets in Ideal Fluids*. Academic Press, New York and London, 1965.
- [23] S.N.Hanna, M.N.Abel-Malek et M.B.Abd-el-Malek, Super-critical free surface over trapezoidal obstacle. *Journal of Computational and applied Math.* 66. (1996) pp. 279-291.
- [24] G. C. Hocking, H. N. Nguyen, L. K. Forbes et T. E. Stokes, The effect of surface tension on free surface flow induced by a point sink. *ANZIAM J.* 57. (2016) pp 417–428.

- [25] G.C. Hocking, H.H.N. Nguyen, T.E. Stokes et L.K. Forbes, The effect of surface tension on free surface flow induced by a point sink in a fluid of finite depth. *Computers and Fluids*. 156. (2017) pp. 526–533.
- [26] R. J. Holmes et G. C. Hocking, A note on waveless subcritical flow past symmetric bottom topography. *Euro. Jnl of Applied Mathematics*. vol. 28. (2017) pp. 562–575.
- [27] R. J. Holmes et G. C. Hocking, A line sink in a flowing stream with surface tension effects. *Euro. Jnl of Applied Mathematics*. vol. 27. (2016) pp. 248–263
- [28] S. Horace, *lamb hydrodynamics*. Cambridge University Press, London, 1975.
- [29] A. Laiadi et A. Merzougui, Numerical solution for a free surface flow over multiple obstacles. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 6(1) Jan (2018) pp. 266-275.
- [30] A. Merzougui, H. Mekias et F. Guechi, A waveless two-dimensional flow channel against an inclined wall with surface tension effect. *J.Phys, A :Math.Theor.* 40. (2007) pp. 14317-14328.
- [31] A. Merzougui et A. Laiadi, Free surface flow over a triangular depression. *TWMS J. App. Eng. Math.* V.4, No.1. ( 2014) pp. 67-73.
- [32] Murray R. Spiegel, *Variables complexes cours et problèmes (série schaum)*, 1976.
- [33] A. C. King et M. I. G. Bloor, Free-surface flow over a step. *J. Fluid Mech.* 182. (1987) pp. 193-208.
- [34] Stéphane Ravier et Mattieu Rigaut, *Mécanique des fluides*, Ecole Normale Supérieure de LYON, janvier 2000.
- [35] S. Tooley et J.-M. Vanden Broeck, Waves and singularities in nonlinear capillary free-surface flows. *Journal of Engineering Mathematics*. 43. (2000) pp. 289–299.
- [36] Reul v. churchil et James W. Brown, *Complex variables and applications*, McGraw-Hill, Inc, New York, 1976.
- [37] J. Roussel, *Cours de Mécanique des fluides*. C.P.I.2-Chem.I.St2. 2005 - 2006.

- [38] Ravindra Pethiyagoda, Timothy J. Moroney et Scott W. McCue, Efficient computation of two-dimensional steady free-surface flows. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* (2017) pp. 1–20.
- [39] Jean-Marc Vanden-Broeck, The influence of surface tension on cavitating flow past a curved obstacle. *J.Fluid Mech.* Vol.133. (1983) pp. 255-264.
- [40] J.M. Vanden Broeck, The effect of surface tension on the shape of the Kirchhoff jet. *Phys. Fluids.* 27. (1984) pp. 1933-1936.
- [41] J.-M. Vanden-Broeck, Cavitating flow of a fluid with surface tension past a circular cylinder. *Phys. Fluids.* 3. (1990) pp. 263-266.
- [42] Jean Marc Vanden-Broeck, Gravity-capillary free surface flows. Cambridge University Press, 2010.
- [43] J.-M. Vanden-Broeck, The influence of capillarity on cavitating flow past a flat plate. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 34. (1981) pp. 465-473.
- [44] J. M. Vanden-Broeck, Numerical calculations of the free-surface flow under a sluice gate. *J. Fluid Mech.* 330. (1997) pp. 339-347.
- [45] J. M. Vanden-Broeck, Flow under a gate. *Phys. Fluids* 29. (1986) pp. 3148-3151.

# Annexe A : Abbreviations et Méthode de Newton

**Opérateur gradient :** Soit  $u$  une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , différentiable en  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

On appelle gradient de  $u$  en  $x$  le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}} u(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$ . Le gradient de  $u$  en  $x$  est noté  $\overrightarrow{\text{grad}} u(x) = \nabla u(x)$

**Opérateur divergence :** Soit  $V = (v_1, \dots, v_n)$ . On appelle divergence de  $V$  et on note  $\text{div}$  le champ scalaire défini par :  $\text{div} V(x) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$

**Opérateur laplacien :** Soit  $u$  un champ scalaire. On appelle laplacien de  $u$  et on note  $\Delta u$  le champ scalaire défini par :  $\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \text{div} \nabla u(x)$

**Opérateur rotationnel :** Soit  $V = (v_1, v_2, v_3)$ . On appelle rotationnel de  $V$  et on note  $\text{rot}$  le champ de vecteur dont les composantes sont données par :

$$\text{rot} u = \nabla \wedge u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

## 4.6 Méthode de Newton

La méthode de *Newton* consiste à résoudre le système d'équations non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \quad (S.1)$$

où les  $f_i$  sont fonctions réelles non linéaires des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . On peut noter le système suivant sous la forme :

$$F(X) = 0 \text{ où } X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in IR^n$$

Le problème est donc de trouver un ensemble de  $n$  valeurs réelles :

$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^t$  vérifiant simultanément les  $n$  équations du système (S.1). Notons que si chaque fonction  $f_i$  est continue et continûment différentiable alors, par un développement de *Taylor* dans le voisinage d'un estimé  $X^{(k)}$  proche de  $X^*$  ( obtenu à la  $k$ -ième itération ), on obtient :

$$\begin{aligned} f_i(X^*) &= f_i(X^{(k)}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \Big|_{X=X^{(k)}} (x_j^* - x_j^{(k)}) + \\ &\frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n (x_j^* - x_j^{(k)}) (x_r^* - x_r^{(k)}) \frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_j \partial x_r} \Big|_{X=X^{(k)}} + \dots = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (S.2)$$

si  $X^{(k)}$  est un estimé proche de  $X^*$  les termes  $(x_j^* - x_j^{(k)})^p$   $p \geq 2$ , sont négligeables.

Le système (S.2) s'écrit alors :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \Big|_{X=X^{(k)}} (x_j^* - x_j^{(k)}) = -f_i(X^{(k)}) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (S.3)$$

ou en terme matriciel

$$E^{(k)} \cdot \Delta X^{(k)} = F^{(k)} \quad (S.4)$$

avec

$$E_{ij}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j} \Bigg|_{X=X^k} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}, \Delta X_j^{(k)} = x_j^* - x_j^{(k)} \text{ et } F_i^{(k)} = -f_i(X^{(k)})$$

L'équation (S.4) est un système linéaire, où toutes les quantités sont connues sauf les  $\Delta X^{(k)}$ .

En utilisant la méthode de *Jordon* avec stratégie du pivot total implicite pour déterminer les  $\Delta X^{(k)}$  dont on présentera dans la suite son algorithme.  $\Delta X^{(k)}$  est l'estimé de l'erreur commise en approximant  $X^*$  par  $X^{(k)}$ . On peut donc obtenir un meilleur estimé  $X^{(k+1)}$  de  $X^*$  par

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X^{(k)} \quad (\text{S.5})$$

On continue jusqu'à ce que  $|f_i(X^{(k+1)})| < \epsilon$ .

#### 4.6.1 Algorithme de Newton pour la résolution de systèmes non linéaires $\mathbf{F}(\mathbf{X})=0$

Etant donnés  $X^{(0)}, \epsilon$

1. Calculer

$$E_{ij}^{(k)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(X)}{\partial X_j} \Bigg|_{X=X^k} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

$$F_i^{(k)} = -f_i(X^{(k)})$$

2. Résoudre le système linéaire :

$$\left. \sum_{j=1}^n E_{ij}^{(k)} \Delta X_j^{(k)} = F_i^{(k)} \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

3. Calculer

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + \Delta X_i^{(k)} \left. \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

4. Si

$$|f_i(X^{(k+1)})| < \epsilon \left. \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

est vérifié, arrêter

## 4.6.2 Résolution d'un système linéaire $AX = b$ par la méthode de Jordan avec stratégie du pivot total implicite

**Algorithme :**

- Choix du pivot

$$p_k = a_{l_k c_k} \quad \text{où } a_{l_k c_k} = \max_{ij} |a_{ij}|$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad i \neq l_1, l_2, \dots, l_{k-1}$$

$$j = 1, 2, \dots, n \quad j \neq c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$$

tel que  $k = 1, 2, \dots, n$

- Normalisation

$$a_{l_k j} = \frac{a_{l_k j}}{p_k} \quad j = 1, 2, \dots, n + 1$$

- Réduction

$$\left. \begin{array}{l} w = a_{i c_k} \\ a_{ij} = a_{ij} - w a_{l_k j} \end{array} \right\} j = 1, 2, \dots, n + 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ et } i \neq l_k$$

- Remise en ordre

$$x_{c_k} = a_{l_k, n+1} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

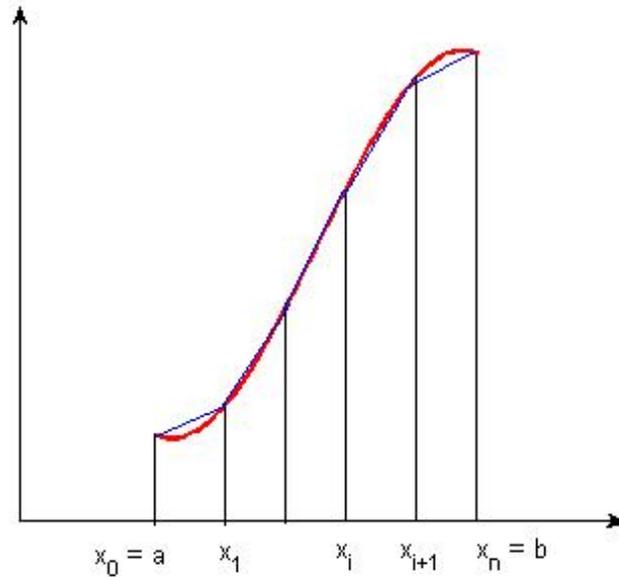
## 4.7 Méthode de trapèze

Soit l'intégrale sous forme :

$$\int_a^b f(x) dx$$

où  $f$  est une fonction de classe  $C^2$  sur l'intervalle  $[a, b]$  (c'est-à-dire deux fois dérivable et de dérivée seconde continue sur  $[a, b]$ ) dont on calcul l'intégrale précédente numériquement sur  $[a, b]$ . Soit  $n > 0$  un entier et  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  une subdivision régulière de  $[a, b]$  (c'est-à-dire telle que pour tout  $i$ ,  $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ ) voir figure ci-dessous.

La méthode des trapèzes consiste à remplacer  $f$  sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  par une fonction affine. Sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  la fonction  $f$  continue et dérivable sur  $[a, b]$  est substituée par la droite joignant les points  $(x_i, f(x_i))$  et  $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ .



Le schéma numérique de la méthode du trapèze est donné par :

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{\Delta_h}{2} (f(a) + f(b)) + \Delta_h \sum_{j=1}^{j=n-1} f(x_j)$$

où  $\Delta_h$  est le pas :  $\Delta_h = \frac{b-a}{n}$ . Et aussi on écrit l'intégrale précédente sous forme :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{j=n} \Delta_h \omega_j f(x_j)$$

Où  $\omega_j$  est la fonction de poids, telle que :

$$\omega_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = 0, n \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$