

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Mesure des risques</b>	<b>4</b>
1.1	LE RISQUE . . . . .	4
1.1.1	Types de risques . . . . .	5
1.1.2	Nature des Risques . . . . .	6
1.2	MESURE DE RISQUE . . . . .	6
1.2.1	Mesure de risque . . . . .	7
1.2.2	Principes du calcul de la prime . . . . .	8
1.2.3	Propriétés désirables . . . . .	8
1.2.4	VaR (Value-at-Risk) . . . . .	10
<b>2</b>	<b>La théorie des valeurs extrêmes</b>	<b>13</b>
2.1	Statistiques d'ordre ou loi des records . . . . .	13
2.2	Quelques rappels concernant les distributions . . . . .	14
2.2.1	Fonction des quantiles . . . . .	14
2.2.2	fonction de répartition empirique . . . . .	15
2.2.3	Fonction des quantiles empiriques . . . . .	15
2.2.4	Les lois de probabilités . . . . .	15
2.3	Le théorème de Fisher-Tippett . . . . .	17
2.4	Distribution généralisée de valeurs extrêmes . . . . .	18
2.5	Le Max-domaine d'attraction . . . . .	19
2.5.1	Caractérisation des domaines d'attraction . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Théorie des copules</b>	<b>21</b>
3.1	Généralités sur les copules bivariées . . . . .	21
3.1.1	Définition d'une copule bivariee . . . . .	22
3.1.2	Propriétés immédiates des copules . . . . .	23
3.2	Copules et variables aléatoires . . . . .	24
3.2.1	Le théorème de Sklar et ses applications . . . . .	24
3.2.2	Les Propriétés fondamentales des copules . . . . .	29
3.2.3	Copules associées à une copule . . . . .	29
3.3	Familles paramétriques de copules usuelles bivariées . . . . .	30
3.3.1	Les copules elliptiques . . . . .	30
3.3.2	Les copules aux valeurs extrêmes . . . . .	35
3.3.3	Les copules Archimédiennes et Archimax . . . . .	36
3.3.4	La copule empirique . . . . .	40

---

4.3.3	Les copules Archimédiennes et Archimax . . . . .	36
4.3.4	La copule empirique . . . . .	40
4.4	Copules des valeurs extrêmes bivariées . . . . .	41
4.4.1	Caractérisation d'une copule BEV . . . . .	41
4.4.2	Familles paramétriques usuelles des copules BEV . . . . .	42
4.5	Les mesures de concordance . . . . .	43
4.5.1	Fonction de concordance . . . . .	44
4.5.2	Propriétés de la fonction de concordance . . . . .	44
4.5.3	Mesures de concordance . . . . .	45
4.5.4	Le tau de kendall . . . . .	46
4.5.5	Le rho de Spearman . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Estimation non paramétrique d'une copule et application</b>	<b>47</b>
5.1	Dépendance . . . . .	47
5.1.1	Dépendance ou corrélation . . . . .	47
5.2	Copule . . . . .	48
5.3	Processus de copule empirique . . . . .	48
5.4	Estimation non paramétrique d'une copule . . . . .	49
5.5	Les formulations non-paramétriques des coefficients de Kendall et Spearman . . . . .	51
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>52</b>
	<b>□ Bibliographie</b>	<b>53</b>

# Table des figures

1.1	Représentation graphique de la VaR <sup>[23]</sup> . . . . .	11
2.1	Densité des distributions $\Lambda, \Phi_1$ et $\Psi_1$ . <sup>[27]</sup> . . . . .	18
3.1	Densité de la copule de Galambos de paramètre 2 . . . . .	26
3.2	Contour de la densité du Copule de Galamos . . . . .	26
3.3	Densité du copule Normale . . . . .	31
3.4	Contour de la densité du Copule Normale . . . . .	32
3.5	Copule Normale . . . . .	32
3.6	Contour du Copule Normale . . . . .	33
3.7	Densité du copule de Student à 2 dl . . . . .	34
3.8	Contour de la densité du Copule de Student . . . . .	34
3.9	Contour du Copule de Student . . . . .	35
3.10	Densité du copule de Frank de paramètre 3 . . . . .	38
3.11	Contour de la densité du Copule de Frank . . . . .	38
3.12	Densité de la copule de Clayton de paramètre 2 . . . . .	39
3.13	Contour de la Densité du copule de Clayton . . . . .	39
4.1	Nuage des points de deux variables dépendantes . . . . .	49
4.2	Quantiles quantiles des deux variables . . . . .	50
4.3	L'estimation non paramétrique d'une copule . . . . .	51

# Liste des tableaux

3.1	quelques familles classiques de copules archimédiennes . . . . .	37
-----	--	----

# Introduction Générale

Les relations de la dépendance entre les variables aléatoires sont l'un des sujets les plus étudiés dans la probabilité et la statistique. La nature de la dépendance peut prendre une variété de formes et à moins que quelques suppositions spécifiques soient faites au sujet de la dépendance, aucun modèle statistique significatif ne peut être contemplé.

Pour étudier le comportement simultané des composantes d'un vecteur aléatoire on peut faire appel à la fonction de répartition jointe qui caractérise totalement le comportement stochastique de  $X$ . Par exemple, dans plusieurs applications de l'analyse multivariée classique, on émet souvent l'hypothèse que  $H$  est la fonction de répartition d'une loi normale multivariée. Cet usage du modèle normal est souvent justifié par la simplicité relative des calculs à effectuer. Toutefois il est notoire, notamment en économie, que la loi normale s'ajuste très mal à certains types de données.

Dans l'étude moderne de la dépendance, on utilise fréquemment le fait que toute l'information à propos de la structure de dépendance de  $X$  est contenue dans une fonction appelée la copule. Le concept de copule est un outil puissant et flexible puisqu'il permet de modéliser la dépendance sans tenir compte de l'effet du comportement des marges, c'est-à-dire des fonctions de répartition  $F_1, \dots, F_d$  des variables  $X_1, \dots, X_d$  prises individuellement.

Jusqu'à présent la plupart des techniques utilisées présentaient certains inconvénients. Nous pouvons, à titre d'exemple, citer l'utilisation de distributions bidimensionnelles comme la Pareto bivariée. Mais dans ce cas précis, les lois marginales seront nécessairement des lois de Pareto. L'idéal serait donc de pouvoir créer des distributions multivariées et à fortiori bivariées en choisissant nous-mêmes nos lois marginales.

La théorie des copules va nous permettre de répondre à toutes ces attentes.

Le mot copule, dont la signification en latin est littéralement lien, a été employé pour la première fois en 1959 par Abe Sklar dont le théorème constitue la clef de voûte de toute la théorie.

Ces copules sont tout simplement, et sans rentrer dans les détails, des fonctions qui vont constituer un véritable lien entre la distribution multivariée et les lois marginales.

Mais bien que cette théorie date de la fin des années 50, les exemples d'application ne sont pourtant pas légion, et les mémoires d'actuariat traitant du sujet sont quasiment inexistantes. A vrai dire seuls deux articles parus relativement récemment ( « Fitting bivariate loss distributions with copulas » de Klugman-Parsa et « Understanding relationship using copulas » de Frees-Valdez) ont une approche actuarielle des copules. En ce qui concerne les bases théoriques et mathématiques proprement dites, l'ouvrage de Nelsen « An introduction to copulas » fait figure de référence.

La distribution normale multivariée a souvent servi de modèle. Ce type de distribution est attrayant dans la mesure où les lois marginales sont elles aussi normales et que la dépendance est entièrement déterminée par le coefficient de corrélation.

Mais malheureusement la loi normale n'est pas toujours la plus appropriée à l'étude de certains phénomènes. Pour pallier à ceci de nombreuses distributions bivariées ont été développées, nous pensons notamment à la Pareto bivariée ou bien à la la loi Gamma comme mentionnées ci-dessus. Mais, encore une fois, ces lois n'ont pas que des avantages. D'une part, le "paramètre d'association" se retrouve souvent dans les lois marginales, d'autre part ces lois marginales sont de la même famille.

Les copules vont nous permettre la construction de distributions bivariées (multivariées) qui n'ont pas tous ces défauts. Les copules, qui ne sont ni plus ni moins que des fonctions, vont nous permettre d'établir un lien entre les lois marginales et la distribution bivariée (multivariée).

Le but de notre travail est d'estimer une copule, on a deux méthodes d'estimation : estimation paramétrique et estimation non paramétrique, nous nous basons sur cette dernière c'est-à-dire on va faire une estimation non paramétrique d'une copule pour voir la dépendance entre les risques.

Nous allons appliquer une méthodologie analytique, mathématique et statistique pour arriver à notre but. Le plan retenu comporte quatre chapitres :

- Le premier chapitre présente la théorie de la mesure des risques ; au début nous présentons le risque son type et sa nature après nous définissons la mesure de risque et nous donnons quelques propriétés désirables qu'une mesure du risque devrait réaliser, enfin nous donnons une idée simple sur le VaR Value-at-Risk.

• La théorie des valeurs extrêmes est l'objectif du deuxième chapitre : Où nous nous intéressons aux quelques définitions de Statistiques d'ordre, les distributions de probabilités et Le théorème de Fisher-Tippett après nous examinerons la distribution généralisée de valeurs extrêmes et le Max-domaine d'attraction.

• Le troisième chapitre est consacré à la théorie des copules de façon générale et aux copules des valeurs extrêmes bivariées en particulier. Dans la première section nous présentons d'abord les copules bivariées ainsi que leurs propriétés élémentaires, dans la deuxième section , le lien entre ces copules et les variables aléatoires via le théorème de Sklar. Les familles paramétriques usuelles des copules bivariées sont données dans la troisième section. Les quatrième et cinquième sections traitent respectivement des copules des valeurs extrêmes et des notions de concordance et à travers des mesures de concordance telles que le tau de Kendall et le rho de Spearman.

• Au sein du quatrième chapitre, nous proposons une estimation non paramétrique d'une copule à partir d'un couple de variables aléatoires dépendantes et nous présentons aussi les formulations non-paramétriques des coefficients de Kendall et Spearman.

Les outils utilisés pour mener à bien cette étude sont les logiciels R et SWP.

# Chapitre 1

## Mesure des risques

Avant d'expliquer qu'est ce que une mesure de risque nous donnons une idée générale sur le risque, son type et sa nature

### 1.1 LE RISQUE

**RISQUE.** Danger, inconvénient possible : courir un risque ; s'exposer à un risque. Préjudice, sinistre éventuel, que les compagnies d'assurance garantissent moyennant le paiement d'une prime. Risque social, perte de l'emploi, diminution du niveau de vie familial, maladie, accident, maternité, invalidité, vieillesse, décès, que la politique moderne de sécurité sociale vise à prévenir ou à réparer. A tout risque, à tout hasard. A ses risques et périls, en assumant toute la responsabilité d'une chose, d'une entreprise.

Dans un sens général, l'assurance fait référence à l'effet de transférer (totalement ou partiellement) l'impact économique de mésaventures imprévues, la notion centrale dans les mathématiques actuarielles est la notion de risque. Un risque peut être décrit comme un événement qui peut ou ne peut pas avoir lieu (donc, un événement aléatoire) et cela provoque des conséquences financières adverses. Il contient toujours un élément d'incertitude : le moment de son événement (comme dans l'assurance-vie), ou l'événement lui-même, ou la nature et sévérité de ses conséquences (comme dans l'assurance automobile).

L'actuaire modèle un risque de l'assurance par une variable aléatoire qui représente le montant aléatoire d'argent la compagnie d'assurances devra payer pour indemniser l'assuré et/ou les tiers pour l'événement du péril de l'assuré. Des remarques au-dessus, les variables aléatoires qui modèlent les risques de l'assurance peuvent être assumées généralement pour être non négatives. Cela mène à la définition cérémonieuse suivante.



**Définition 1** *Un risque  $X$  est une variable aléatoire non négative qui représente le montant aléatoire d'argent payé par une compagnie d'assurances pour indemniser un sinistré, un bénéficiaire et/ou un tiers dans l'exécution d'un contrat d'assurance.*<sup>[11]</sup>

### 1.1.1 Types de risques

Le risque est polymorphe. Avant d'aborder sa quantification, il convient de connaître ses différentes formes, natures ou manifestations.

#### Risque de baisse

Le risque de baisse de la valeur d'un titre se décompose en deux parties l'une dite systématique qui correspond au risque global du marché et l'autre spécifique au titre particulier dite non systématique. Nous verrons plus loin que le risque systématique est loin d'être négligeable puisqu'il est responsable de 73 à 90% du rendement moyen [à reformuler cf p.105 de "Principes de Finance Moderne"].

La diversification au sein d'un portefeuille, si elle est bien menée, permet d'éliminer le risque non systématique.

#### Risque de liquidité (ou de contrepartie)

Si un titre est peu liquide, il est fort probable qu'un décalage de cours important aura lieu au premier problème. Il faut toujours garder à l'esprit que pour qu'un échange ait lieu, il faut qu'il y ait accord entre deux parties. Autrement dit, si vous souhaitez vendre à un prix donné, il faut qu'une autre partie accepte d'acheter à ce prix. Si personne ne souhaite acheter, vous ne pouvez pas vendre ou vous devez accepter de vendre moins cher. Donc si de nombreuses personnes souhaitent vendre alors qu'aucun acheteur ne se présente... le cours s'effondre.

Le risque lié à la liquidité est donc loin d'être négligeable.

#### Risque de change

Le risque de change est lié aux fluctuations des monnaies entre elles, donc aux investissements réalisés en monnaies étrangères. Ainsi, si vous achetez des valeurs sur le NYSE par exemple lorsque le dollar est en hausse, donc cher par rapport à l'euro, vous risquez de voir vos éventuelles plus-values partir en fumée lorsque vous reconvertirez le fruit de votre vente de dollars en euros si le dollar venait de baisser.

### 1.1.2 Nature des Risques

#### Risques de crédit

Incapacité d'un débiteur (entreprise, institution financière, particulier. . .) à respecter ses engagements financiers vis à vis de sa banque.

#### Risques Pays

Défaillance d'un pays émergent ou incapacité d'une autre partie localisée dans un pays émergent de faire face à ses engagements en raison de facteurs (politique, économique,...) échappant à son contrôle.

#### Risques de marché

Risque de perte suite à une évolution défavorable des paramètres de marché pouvant causer des impacts négatifs sur la position de la banque.

#### Risques opérationnels

Pertes résultant d'une inadéquation ou d'un échec au niveau des processus, des personnes, des systèmes (erreurs humaines, pannes systèmes, fraudes, litiges. . .) ou perte résultant d'événements externes (catastrophes naturelles, incendies, . . .)

#### Risque de modèle

Risque de perte liée à l'utilisation d'un modèle inapproprié ou erroné pour la valorisation de positions ou le calcul d'indicateurs de risques.

## 1.2 MESURE DE RISQUE

Depuis que les risques sont modélisés comme variables aléatoires non négatives, en mesurant, la mesure du risque est équivalente à une correspondance  $\rho$  entre l'espace de variables aléatoires et les nombres réels non négatifs  $\mathbb{R}^+$ . Le nombre réel qui dénote une mesure du risque générale à associer au risque  $X$  sera dénoté comme désormais  $\rho(X)$ . Donc, une mesure de risque n'est autre qu'un nombre réel non négatif d'un risque.

C'est essentiel de comprendre quel aspect de la nature hasardeuse à associé au résultat incertain que la mesure du risque essaie de mesurer. Aucune mesure du risque ne peut saisir l'image entière du danger inhérent dans quelque situation vécue, mais chacun d'eux se concentrera sur un aspect particulier du risque. Il y a une parallèle avec statistiques mathématiques où les caractéristiques de distributions peuvent avoir

des significations tout à fait différentes et utilisée pour exemple, la moyenne mesuré, la tendance centrale, le désaccord mesuré, l'étendue, le skewness à asymétrie et le peakedness mesuré l'épaisseur des queues.

**Définition 2** Une mesure du risque  $\rho$  est utile pour dresser une carte, un risque  $X$  à un nombre réel non négatif  $\rho(X)$ , peut être infini, représenter l'argent supplémentaire qui doit être ajouté à  $X$  pour le rendre acceptable.<sup>[11]</sup>

### 1.2.1 Mesure de risque

Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable. Soit  $X$  une fonction mesurable à valeurs réelles définie sur  $\Omega$ .

Pour un scénario  $\omega \in \Omega$ , la position  $X(\omega)$  s'interprète comme une perte (si  $X(\omega) < 0$ , alors  $-X(\omega)$  s'interprète comme un gain).

On note  $L^\infty$  l'ensemble des positions  $X$  telle que  $\|X\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$  est fini. Soit  $\rho$  une fonction définie sur  $A \subset L^\infty$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Pour une position  $X$ ,  $\rho(X)$  s'interprète comme le montant des fonds propres exigés associé à cette position.

**Exemple 3** On peut considérer :

- $\rho_{\max}(X) = \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$ ,
- $\rho(X) = \sup_{p \in P} E_p[X]$ , où  $P$  est un ensemble de probabilités sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

**Définition 4** On dit que  $\rho$  est une mesure de risque monétaire si :

- $\rho$  est croissante :  $X \geq Y \implies \rho(X) \geq \rho(Y)$ .
- invariante par translation :  $\rho(X + m) = \rho(X) + m$  pour tout  $m \in \mathbb{R}$ .<sup>[1]</sup>

**Lemme 5** toute mesure de risque monétaire vérifie :

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty.$$

**Démonstration.**  $X \leq Y + \|X - Y\|_\infty \implies \rho[X] \leq \rho(Y) + \|X - Y\|_\infty$ . ■

L'idée est que  $\rho$  mesure la nature hasardeuse de  $X$  : grandes valeurs de  $\rho(X)$  nous dit que  $X$  est **dangereux**. Spécifiquement, si  $X$  est une perte possible de quelque portefeuille financier sur un horizon du temps, nous interprétons  $\rho(X)$  comme le montant de capital qui devrait être ajouté comme un tampon à ce portefeuille afin qu'il devienne acceptable à un contrôleur du risque interne ou externe. Dans un tel cas  $\rho(X)$  est le capital du risque du portefeuille. Les telles mesures du risque sont utilisées pour déterminer des vivres et des exigences du capital afin d'éviter l'insolvabilité.

### 1.2.2 Principes du calcul de la prime

Les mesures du risque sont à bien des égards apparentées aux principes de calcul de la prime actuarielles. Pour une compagnie d'assurances exposée à une responsabilité  $X$ , un  $\Pi$  du principe de calcul de la prime donne le  $\Pi$  du montant minimum  $\Pi[X]$  que l'assureur doit, dans son intérêt, faire payer par l'assuré. Les principes de la prime sont donc des exemples proéminents de mesures du risque possibles. Leur caractéristique est que le nombre qui résulte de leur application à quelque risque de l'assurance  $X$  est candidat pour la prime associée au contact qui fournit la couverture contre  $X$ .

### 1.2.3 Propriétés désirables

La définition est très générale, les mesures de risques doivent satisfaire de certains axiomes, tels que ceux discutés dans cette section. Parmi le groupe énorme de caractéristiques statistiques qui peuvent être associées à l'attente des risques, médiane, désaccord, moyenne dérivation absolue, coefficient de variation, que Gini mesure, etc. seulement quelques-uns qualifient comme mesures du risque acceptables. Une approche axiomatique à l'étude de mesures du risque dans l'économie peut être trouvée dans **Fishburn (1982)**. Dans science actuarielle, **Goovaerts, De Vijlder et Hazendonck (1984)** ont innové l'étude systématique des propriétés que tout principe de la prime devrait posséder. Par la suite, les nombreux auteurs ont suggéré des plusieurs exigences que toute mesure du risque devrait satisfaire. Nous fournissons ci-après une liste d'exigences raisonnables (non indépendantes) qu'une mesure du risque devrait réaliser.

Pour deux risques quelconques  $X$  et  $Y$ , les propriétés suivantes peuvent être formulées :

#### Invariance par translation

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c, \text{ pour toute constante } c.$$

Si on ajoute (ou on retranche) un montant certain  $c$  au résultat d'un centre de profit, respectivement le besoin en capital décroît ou augmente du même montant.

#### Sous-additivité

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

La fusion de deux centres de profit ne crée pas de risque supplémentaire. Au contraire, la diversification tend à réduire le risque global. Cette propriété permet

ainsi une gestion décentralisée du besoin en capital dans les différents centres de profit sans courir le risque d'un besoin global supérieur à la somme des besoins individuels de chacun des centres. Si cette propriété n'était pas respectée, une société ne respectant pas un certain niveau requis de capital pourrait être incitée à se scinder artificiellement en deux entités afin de réduire son besoin en capital.

### Homogénéité positive

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \quad \forall \lambda \geq 0.$$

De même qu'une fusion ne crée pas de risque supplémentaire ( $\rho(\lambda X) \leq \lambda \rho(X)$ ), une fusion sans diversification ne réduit pas le besoin global en capital.

### Convexe

Une mesure de risque  $\rho$  est dite **convexe** si pour tout  $\theta \in [0, 1]$

$$\rho(\theta X + (1 - \theta) Y) \leq \theta \rho(X) + (1 - \theta) \rho(Y).$$

Une mesure de risque  $\rho$  convexe et positivement homogène est dite **cohérente**.

### Monotonie

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{Y} \implies \rho(X) \geq \rho(Y)$$

Si les pertes encourues avec le risque  $X$  sont toujours supérieures à celles obtenues avec  $Y$ , le besoin en capital pour  $X$  doit être supérieur à celui pour  $Y$ .

### Propriété de borne supérieure

$$\rho(X) \leq \max(X)$$

le besoin en capital est borné par la perte maximale possible.

### Conservatisme

$$\rho(X) = \rho(X^-)$$

où  $X^-$  désigne la partie négative de  $X$ , ( $X^- = \min(X, 0)$ ).

Elle est définie par **Artzner et al. [1999]** notamment pour la détermination du besoin en capital, et conduit à ne prendre en compte que les valeurs négatives de  $X$ , traduisant ainsi une forte aversion au risque.

**Lemme 6** *si  $\rho$  est une mesure de risque positivement homogène, alors elle est convexe si et seulement si elle est **sous additive***

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

### 1.2.4 VaR (Value-at-Risk)

#### Le concept de la Valeur en Risque

La notion de Valeur en Risque (Value et Risk) fut introduite au milieu des années quatre-vingts par les groupes bancaires américains au moment où se développaient les marchés dérivés. La naissance des produits dérivés représentait un nouveau challenge pour le management des risques dans la mesure où les outils traditionnels destinés à quantifier le degré d'exposition au risque devenaient obsolètes. Ainsi, par exemple, deux contrats de dérivés avec la même valeur spéculative pouvaient présenter des niveaux de risque différents. A l'aide de la Value at Risk ou VaR, les banques ont développé un indicateur global de perte économique qui pouvait quantifier le risque d'un portefeuille composé d'actifs financiers différents.

La dernière décennie a vu un intérêt croissant dans le quantile de distributions de la probabilité de la part des praticiens. Depuis que les quantiles ont une simple interprétation quant à la certitude ou la probabilités ils ont trouvé leur voie pour l'entraînement de la gestion du risque du courant dans la forme du concept de VaR. Le concept du **yh**is a été introduit pour répondre à la question suivante : combien perdre dans un jour est-ce que nous pouvons attendre, une semaine, une année. Avec une probabilité donnée ? Dans le monde financier d'aujourd'hui, le VaR est devenu la mesure du risque base : son importance est une question depuis que les régulateurs acceptent ce modèle comme la base pour mettre des exigences capitales pour l'exposition du risque du marché. Un traitement du manuel de VaR est donné dans **Jorion (2000)**.

#### Définitions

Il existe de nombreuses statistiques appliquées à la mesure du risque. L'écart type est une mesure du risque total ; la duration et la valeur d'un point de base sont utilisées par les gestionnaires d'obligations ; les delta, gamma et rho résument les différents risques de positions détenues en option. Ces mesures du risque sont des instruments spécifiques et ne prennent pas en compte les différentes corrélations qui existent entre

ces différentes classes d'actifs. Ils décrivent le montant de la perte si un événement intervient telle qu'une variation de taux sur le cours d'une obligation, mais ne nous indiquent jamais la probabilité d'occurrence d'une telle perte.

La valeur en risque remplit ce rôle : elle enveloppe les différentes mesures de risque évoquées précédemment et incorpore une probabilité de perte. Ainsi, le concept de Value at Risk peut se définir de manière assez simple : d'une part, elle détermine la probabilité de distribution des pertes ou profits d'un portefeuille pour horizon donné, et d'autre part, elle résume cette distribution à l'aide d'une simple statistique.

Il convient de faire attention à ne pas assimiler la Value at Risk comme étant la perte maximale qu'on risque de subir ; la Value at Risk synthétise en un simple nombre un seuil de perte qui ne peut être franchi qu'avec un niveau de probabilité fixé à priori.

En pratique, l'horizon temporel retenu est une journée ou un mois. Typiquement, la statistique résumant la perte que peut subir un portefeuille sur un horizon spécifié est la limite supérieure d'un intervalle de confiance. Occasionnellement, d'autres statistiques tel que l'écart-type des pertes ou profits, peuvent être utilisées.

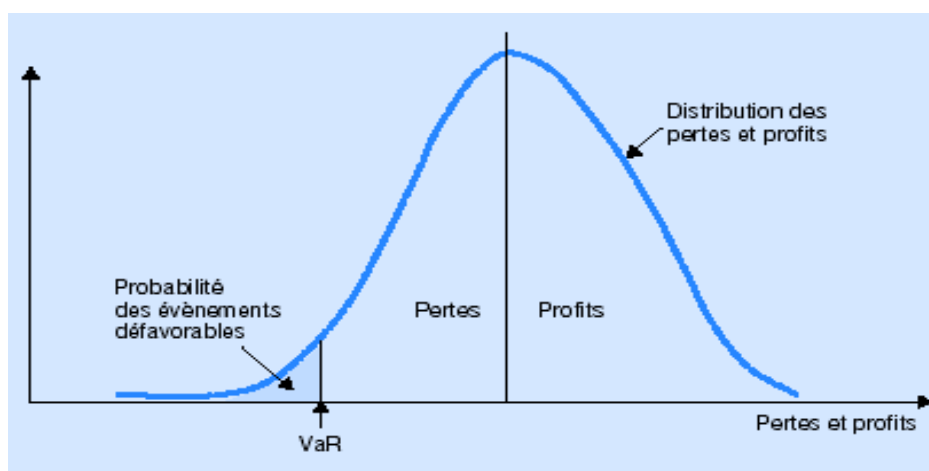


FIG. 1.1 – Représentation graphique de la VaR<sup>[23]</sup>

De manière analytique, la définition se résume de la manière suivante :

**Définition 7** *La Value at Risk (VaR) est la perte maximale qui ne devrait être dépassée qu'avec une probabilité donnée sur un horizon donné.*<sup>[21]</sup>

*La VaR est toujours accompagnée du degré de confiance (en général 95% ou 99%) et de l'horizon (en général 1.3.5.10 ou 30 jours).*

$$VaR_{\alpha}(X) = F^{-1}(\alpha)$$

$$VaR_{\alpha}(X) = -\inf \{x : F(x) \geq \alpha\}.$$

De manière pratique, la mise en œuvre de la VaR consiste à faire varier la probabilité  $\alpha$  et à déterminer le capital minimal associé en début de période qui permette de faire face à la perte maximale en fin de période. On obtient donc rétrospectivement le niveau de capital en deçà duquel l'organisation est en ruine avec une probabilité supérieure à  $\alpha$ . La VaR utilisée dans ce contexte n'est autre que la probabilité de ruine évoquée plus haut.

L'avantage de la VaR est d'être un concept simple et facile à calculer. Elle vérifie les propriétés d'**invariance par translation**, d'**homogénéité positive**, de **monotonie**, de **borne supérieure** et de **conservatisme**. En revanche, elle n'est **pas sous-additive** et ne tient pas compte de la sévérité de la ruine, ce qui constitue la critique la plus souvent formulée à son égard. Cependant cette mesure de risque peut faire sens dans un objectif de solvabilité.



## Chapitre 2

# La théorie des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes ( TVE ) est basée sur l'approximation asymptotique des lois des maxima convenablement normalisés de vecteurs aléatoires dont les composantes sont des variables supposées i.i.d. Les deux dernières décennies ont vu le développement de la modélisation statistique des valeurs extrêmes. En témoignent les nombreux ouvrages récents : Joe H. (1997), Embrechet et al (1998), Kotz et Nadarajah (2000), Réiss et Thomas (2005)) et beaucoup de revues. Les modèles des valeurs extrêmes sont appliquées à une grande variété de problèmes tels l'environnement ( vitesse du vent, extrêmes pluviométriques et de températures,...), la pluviométrie, la finance et l'assurance ( Mesure du risque, Valeur à risque VaR, modèle de volatilité stochastique) et même internet.

La modélisation statistique des valeurs extrêmes revêt deux aspects : l'estimation de la structure conjointe (en dimension supérieure à 1) et l'estimation des distributions marginales. En théorie univariée la distribution des valeurs extrêmes généralisées (GEV) (generalized extreme values en anglais) permet de résumer toutes les distributions limites possibles de la loi asymptotique du maximum d'un échantillon. En revanche, dans le cas bivarié ( et multivarié en général ) il n'existe pas une telle famille paramétrique. Cependant lorsque les distributions marginales sont connues il est possible de les caractériser par une fonction convexe dite fonction de dépendance de Pickands.

### 2.1 Statistiques d'ordre ou loi des records

Soit  $X$  une variable aléatoire de densité de probabilité (continue)  $f(x)$ . Si l'on tire plusieurs échantillons contenant chacun " $n$ " observations, la position de l'observation la plus à gauche dépend de l'échantillon : c'est une variable aléatoire.

Plus généralement, pour une valeur de "n" donnée, on définit  $X_{(k,n)}$ , la "**statistique d'ordre k**" de  $X$  comme la position de l'observation occupant la position  $k$  à partir de la gauche.

**Définition 8** La statistique d'ordre de l'échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est le réarrangement croissant de  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  et on la note  $(X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n})$ .<sup>[27]</sup>

Deux cas importants de la statistique d'ordre sont les statistiques du minimum et du maximum, et dans une moindre mesure la médiane de l'échantillon ainsi que les différents quantiles et les différentes observations de l'échantillon.

Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  une suite des v.a i.i.d (indépendantes identiquement distribuées) on note par :

$$\begin{aligned} W_n &= X_{1,n} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i \\ M_n &= X_{n,n} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i \end{aligned}$$

Des fonctions importantes des statistiques d'ordre sont :

1. L'étendue, définie comme l'écart entre les deux observations extrêmes :

$$X_{n,n} - X_{1,n}$$

2. Le milieu de l'étendue :

$$\frac{(X_{1,n} + X_{n,n})}{2}$$

**Remarque 9** Même si les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, les statistiques d'ordre ne sont pas indépendantes (par définition).

## 2.2 Quelques rappels concernant les distributions

### 2.2.1 Fonction des quantiles

**Définition 10** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et  $F_X$  sa fonction de répartition. On appelle fonction quantile de  $X$  la fonction, notée  $Q_X$ , de  $]0, 1[$  dans  $\mathbb{R}$ , qui à  $t \in ]0, 1[$  associe<sup>[10]</sup> :

$$Q_X(t) = \inf\{x, t.q. F_X(x) \geq t\}$$

La fonction des quantiles est un moyen de décrire la dispersion d'une loi. Si on réalise un grand nombre de tirages indépendants de la même loi (un échantillon), on doit s'attendre à ce qu'une proportion des valeurs soient inférieures à  $Q_X(t)$ . Les fonctions des quantiles sont souvent utilisées en statistiques. On calcule en particulier fréquemment des intervalles de dispersion, compris comme devant contenir une forte proportion des données.

### 2.2.2 fonction de répartition empirique

**Définition 11** Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un échantillon de variables *i.i.d* à valeurs dans  $\mathbb{R}$  avec pour fonction de répartition  $F(x)$ . La fonction de distribution empirique  $F_n(x)$  basée sur l'échantillon  $(X_1, \dots, X_n)$  est une fonction en escalier définie<sup>[1]</sup> par

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}}.$$

Dans le cas d'une distribution bivariable, en supposant l'échantillon noté  $\{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)\}$ , celle ci s'écrit :

$$F_n(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}} 1_{\{Y_i \leq y\}}.$$

### 2.2.3 Fonction des quantiles empiriques

La fonction des quantiles empiriques d'un échantillon est la fonction des quantiles de sa distribution empirique.

**Définition 12** Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un échantillon et  $(X_{1,n}, \dots, X_{n,n})$  le vecteur de ses statistiques d'ordre. **La fonction des quantiles empiriques** de l'échantillon est la fonction  $\hat{Q}$  qui, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , vaut  $X_{i,n}$  sur l'intervalle  $]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$  :

$$\forall t \in \left] \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right], \quad \hat{Q}(t) = X_{i,n}$$

### 2.2.4 Les lois de probabilités

#### La loi du minimum

La loi de probabilité de  $X_{1,n}$  est donnée par :

$$P(X_{1,n} \leq x) = 1 - P(X_{1,n} > x) = 1 - [1 - F(x)]^n.$$

**La loi du maximum**

La loi de probabilité de  $X_{n,n}$  est donnée par :

$$P(X_{n,n} \leq x) = [F(x)]^n.$$

**La loi d'une observation**

La loi de probabilité d'une observation  $X_{i,n}$  est donnée par

$$P(x \leq X_{i,n} \leq x+h) = n C_{n-1}^{i-1} [F(x)]^{i-1} \times [1 - F(x+h)]^{n-i} \times f(x) h$$

et puisque on a :

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(x \leq X \leq x+h)}{h}.$$

Alors la densité d'une observation  $X_{i,n}$  est :

$$f_{X_{i,n}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(x)]^{i-1} \times [1 - F(x+h)]^{n-i} \times f(x)$$

où  $f$  est la densité de  $X_i$ .

**La loi conjointe d'un couple**

La loi conjointe du couple  $(X_{k,n}, X_{l,n})$ , où  $k < l$  est :

$$\begin{aligned} P(x_k < X_{k,n} \leq x_k + h_1, x_l < X_{l,n} \leq x_l + h_2) &= C_n^{k-1} [F(x_k)]^{(k-1)} \\ &\times (n-k+1) f(x_k) h_1 \times C_{n-k}^{l-k-1} [F(x_l) - F(x_k + h_1)]^{(l-k-1)} \\ &\times (n-l+1) f(x_l) h_2 \times [1 - F(x_l + h_2)]^{(n-l)}. \end{aligned}$$

Puisque on a :

$$f(X_{k,n}, X_{l,n}) = \lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \rightarrow 0}} \frac{P(x_k < X_{k,n} \leq x_k + h_1, x_l < X_{l,n} \leq x_l + h_2)}{h_1 h_2}$$

Alors la densité est :

$$\begin{aligned} f_{(X_{k,n}, X_{l,n})}(x_k, x_l) &= \frac{n!}{(k-1)!(l-k-1)!(n-l)!} \times [F(x_k)]^{(k-1)} \\ &\times [F(x_l) - F(x_k + h_1)]^{(l-k-1)} \times [1 - F(x_l + h_2)]^{(n-l)} \\ &\times f(x_k) \times f(x_l). \end{aligned}$$

### 2.3 Le théorème de Fisher-Tippett

Un des résultats fondamentaux de la T.V.E. est le théorème suivant établi en 1928 par Fisher et Tippett, Ce théorème permet de caractériser la loi de distribution des extrêmes :

**Définition 13** (*lois de même type*) : On dit que deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont de même type s'il existe des constantes réelles  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$  tels que <sup>[27]</sup> :

$$Y \stackrel{\text{loi}}{=} aX + b$$

i.e, si  $F$  et  $G$  sont les distributions respectives des variables  $X$  et  $Y$  alors on a

$$F(ax + b) = G(y).$$

**Théorème 14** Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de v.a indépendantes et de même loi. Supposons qu'il existe une suite  $(a_n, b_n)$  telle que  $a_n > 1$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  et une distribution non-dégénérée  $G$  telles que

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\text{loi}} G.$$

Alors  $G$  est du même type q'une des trois distributions suivantes :

- Loi de Weibull :

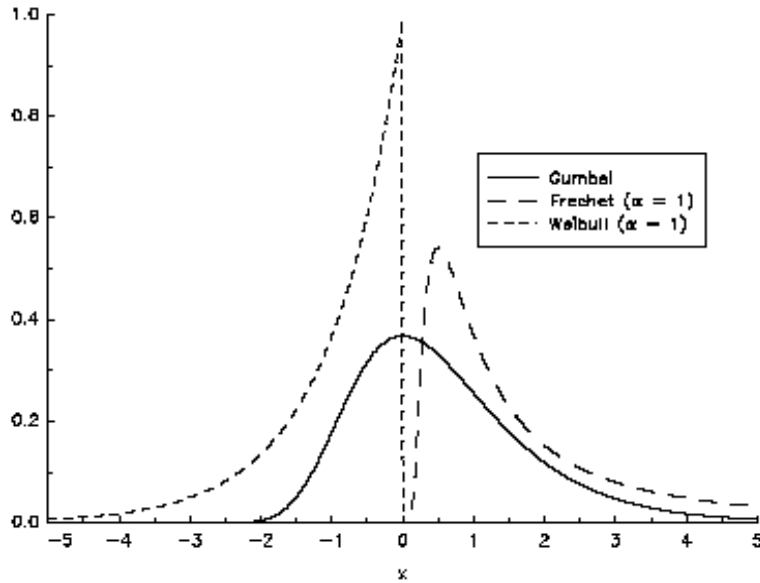
$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x^\alpha)\} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

- Loi de Gumbel :

$$\Lambda(x) = \exp\{-\exp(-x)\} \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Loi de Fréchet :

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-x^{-\alpha}\} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

FIG. 2.1 – Densité des distributions  $\Lambda$ ,  $\Phi_1$  et  $\Psi_1$ .<sup>[27]</sup>

Ce théorème présente un intérêt important, car si l'ensemble des distributions est 'grand', l'ensemble des distributions de valeurs extrêmes est lui très petit. Stuart Coles fait le parallèle suivant entre le théorème de limite centrale et celui de Fisher-Tippett

Les trois lois de probabilité ci-dessus sont appelées **distributions de valeurs extrêmes** .

## 2.4 Distribution généralisée de valeurs extrêmes

Etant donné qu'il est difficile de travailler avec trois distributions à la fois **Von Mises (1954)** et **Jenkinson (1955)** ont proposé une famille paramétrique de distribution ou distribution *GEV- Generalized Extreme Value* - qui permet d'unifier les trois types extrêmes ci-dessus.

**Théorème 15** (*d'unification des trois types*) :S'il existe des constantes  $a_n > 1$  et  $b_n \in \mathbb{R}$  et une distribution limite non-dégénérée  $H$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr \left[ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right] = H(x); \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors  $H$  est de la forme :

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp \left\{ -(1 + \xi x)^{\frac{-1}{\xi}} \right\} & \text{si } 1 + \xi x > 0 \\ \exp \{-\exp(-x)\} & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

où  $\xi$  est le paramètre de forme.

### Cas particuliers

– Si  $\xi > 0$  alors

$$H_\xi(x) = \exp \left\{ - (1 + \xi x)^{\frac{-1}{\xi}} \right\} = \Phi_{\frac{1}{\xi}}(x)$$

(distribution de Fréchet de paramètre  $\frac{1}{\xi}$ ).

– Si  $\xi = 0$  alors

$$H_\xi(x) = \exp \{ - \exp(-x) \} = \Lambda(x).$$

(distribution de Gumbel).

– Si  $\xi < 0$  alors

$$H_\xi(x) = \exp \left\{ - (-x)^{\frac{-1}{\xi}} \right\} = \Psi_{\frac{-1}{\xi}}(x)$$

(distribution de Weibull de paramètre  $\frac{-1}{\xi}$ ).

Ainsi le paramètre de forme donne, à travers ses différentes valeurs possibles, une grande flexibilité à la distribution GEV de sorte à prendre en compte les trois types.

## 2.5 Le Max-domaine d'attraction

La recherche du domaine d'attraction peut être considérée comme l'étude réciproque de la recherche de la distribution des valeurs extrêmes associée éventuellement à une distribution. Dans le cas univarié, le problème consiste à répondre à la question suivante : étant donné une loi  $H$  de type extrême (donc appartenant à l'une des trois familles **Fréchet**, **Gumbel** et **Weibull**) quels sont les critères vérifiés par une distribution quelconque  $F$  pour que la loi du maximum de la suite de variables aléatoires i.i.d. de loi  $F$  converge vers  $H$  ?

Dans le cas les distributions marginales sont identiques, la recherche du domaine d'attraction d'une distribution multivariée peut être comme une extension du cas univarié.

### 2.5.1 Caractérisation des domaines d'attraction

On dit qu'une distribution  $F$  appartient au max-domaine d'attraction de  $H$ , et on note  $F \in MDA(H)$  si la distribution du maximum normalisée converge vers  $H$ . Voici des exemples :

–  $MDA(\Lambda)$  : Exponentielle, Gaussienne, Gamma, Lognormale, etc.(i.e par exemple l'exponentielle appartient au max-domaine d'attraction de  $\Lambda$ )

- $MDA(\Phi_\alpha)$  : Cauchy, Pareto,  $\alpha$ -stable ( $\alpha < 2$ ), etc.
- $MDA(\Psi_\alpha)$  : Uniforme, Beta, etc.

Nous voyons que les trois distributions de valeurs extrêmes sont très différentes en terme de max-domaine d'attraction :

1. Dans le max-domaine d'attraction de la distribution **Gumbel**, nous trouvons des distributions qui n'ont pas de queues épaisses (mais qui peuvent être leptokurtiques).
2. Dans le max-domaine d'attraction de la distribution **Frechet**, nous trouvons des distributions qui ont des queues épaisses.
3. Dans le max-domaine d'attraction de la distribution **Weibull**, nous trouvons des distributions à support fini, ce qui implique que le support du maximum soit borné à droite.

Cela a des implications d'un point de vue financier, puisque la problématique va être de choisir entre les distributions  $\Lambda$  et  $\Phi_\alpha$



## Chapitre 3

# Théorie des copules

### 3.1 Généralités sur les copules bivariées

Les copules constituent un outil statistique qui présente de nombreux avantages, tant pour les statisticiens que pour les financiers. Outre une grande souplesse dans la mise en oeuvre de l'analyse multivariée, les copules autorisent une sélection plus étendue des distributions conjointes des séries financières. Les fonctions copules permettent une représentation moins naïve de la dépendance statistique en finance fondée sur la mesure traditionnelle de corrélation qui présente des limites dans l'étude de l'interdépendance entre deux variables (cf. Embrechts et al. (1999)). En outre, elles autorisent des distributions de probabilités jointes moins restrictives, prenant mieux en compte certains faits en finance (leptokurticité, asymétrie, dépendance des queues). Elles permettent la construction de distributions multidimensionnelles assez générales et ce, indépendamment des lois des marginales qui peuvent avoir des lois différentes et quelconques. Par conséquent, elles permettent de s'affranchir de certaines hypothèses peu réalistes faites dans les études empiriques.

Par ailleurs, l'approche par les copules a beaucoup contribué dans l'analyse, dans la modélisation statistique multivariée. En effet, la théorie des copules permet une décomposition de la loi multidimensionnelle en ses marginales univariées et en une fonction de dépendance, rendant possibles des extensions naturelles de certains résultats obtenus dans le cas univarié au cas multivarié. Les distributions multidimensionnelles ainsi obtenues sont davantage en adéquation avec la réalité surtout dans l'utilisation financière des statistiques. Par souci de simplicité et du fait que la théorie multivariée est une extension du cas bivarié nous nous limiterons à la théorie bivariée des couples.

### 3.1.1 Définition d'une copule bivariée

Dans tout ce qui suit  $I$  désignera l'intervalle unité  $I = [0, 1]$ .

**Définition 16** On appelle copule bivariée toute fonction  $C$  définie de  $I^2 = [0, 1]^2$  dans  $I$  vérifiant les propriétés suivantes <sup>[12]</sup>

$$i) \forall u \in I, C(u, 0) = C(0, u) = 0 \text{ et } C(u, 1) = C(1, u) = u$$

$$ii) C \text{ est 2-croissante i.e. } : C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \\ \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I, \text{ avec } u_1 \leq u_2 \text{ et } v_1 \leq v_2.$$

#### Propriétés

• **Propriété (1)** traduit, en particulier, que toute copule est une distribution dont les distributions marginales sont de loi uniforme définie sur  $I = [0, 1]$ . En effet en considérant le vecteur aléatoire  $U = (U_1, U_2)$  où  $U_1$  et  $U_2$  sont deux variables aléatoires uniformes sur  $I = [0, 1]$  alors on a :

$$C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2).$$

• **Propriété (2)** est la 2-croissance ou inégalité du rectangle de la distribution  $C$ . Elle traduit le fait que si  $C$  admet une densité  $c(u, v)$  alors elle est positive,

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v} \geq 0.$$

#### Exemples de copules

•  $\forall u, v \in I$ , la fonction  $M(u, v) = \min(u, v)$  définit une copule.

En effet :

$$- \forall u, v \in I \text{ on a } \left\{ \begin{array}{l} \min(u, 0) = 0 = \min(0, v) \\ \text{et} \\ \min(u, 1) = u \text{ et } \min(1, v) = v \end{array} \right. \Rightarrow M \text{ vérifie (i)}$$

– De même  $\forall u, v, \acute{u}, \acute{v} \in I$ , avec  $u \leq v$  et  $\acute{u} \leq \acute{v}$

$$\text{on a } \left\{ \begin{array}{l} \min(\acute{u}, \acute{v}) \geq \min(\acute{u}, v) \\ \text{et} \\ \min(u, \acute{v}) \geq \min(u, v) \end{array} \right. \Rightarrow M \text{ vérifie (ii)}$$

Par conséquent  $M$  est une copule.

- De la même façon on établit que les fonctions :

$$\begin{aligned} W(u, v) &= \max(u + v - 1, 0) \\ &\text{et} \\ \Pi(u, v) &= uv \end{aligned}$$

définissent aussi des copules.  $M$ ,  $W$  et  $\Pi$  sont des copules usuelles.

### 3.1.2 Propriétés immédiates des copules

**Théorème 17 (Bornes de Fréchet) :** Pour toute copule  $C$  on a :

$$\forall u, v \in I; W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$$

**Démonstration.** En effet :

$$\left. \begin{array}{l} \forall u, v \in I, C(u, v) \leq C(u, 1) = u \\ \text{et} \\ C(u, v) \leq C(1, v) = v \end{array} \right\} \Rightarrow C(u, v) \leq \min(u, v) \quad (\text{a})$$

$$\begin{aligned} \text{La propriété (ii)} &\Rightarrow \forall u, v \in I, C(u, v) \geq C(u, 1) + C(1, v) - C(1, 1) \\ &\Rightarrow C(u, v) \geq u + v - 1 \text{ or } \forall u, v \in I, C(u, v) \geq 0 \\ &\Rightarrow C(u, v) \geq \max(u + v - 1, 0) \quad (\text{b}) \end{aligned}$$

$$(\text{a}) \text{ et } (\text{b}) \Rightarrow \max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v)$$

où

$$\begin{aligned} W(u, v) &= \max(u + v - 1, 0) \\ &\text{et} \\ M(u, v) &= \min(u, v) \end{aligned}$$

Les copules  $W$  et  $M$  sont appelées borne inférieure (respectivement borne supérieure) de Fréchet-Hoeffding ou copule minimale (respectivement copule maximale). Elles sont aussi notées respectivement  $C^-$  et  $C^+$ . ■

#### Conséquence du théorème 2

$$\forall u, v \in I; W(u, v) \leq \Pi(u, v) \leq M(u, v)$$

**Théorème 18 (Continuité d'une copule) :** Pour toute copule bivariée  $C$  on a  $\forall u, v, \acute{u}, \acute{v} \in I$ , on a :

$$|C(\acute{u}, \acute{v}) - C(u, v)| \leq |C(\acute{u}, \acute{v}) - C(u, \acute{v})| + |C(u, \acute{v}) - C(u, v)|$$

## 3.2 Copules et variables aléatoires

Un des problèmes auxquels les statisticiens se sont intéressés dans les années 50 est l'étude de la relation entre une distribution multivariée et les distributions marginales d'ordre inférieur (d'ordre 1 ou supérieur à 1). En 1959 Abel Sklar apporte une solution partielle à ce problème pour les distributions marginales univariées. Par un théorème qui porte son nom, Sklar établit que si  $H$  est une distribution conjointe de distributions marginales  $F(x)$  et  $G(y)$  alors il existe une copule  $C$  telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

Etant donné qu'une fonction de répartition est d'abord une distribution avant d'être continue à droite et à gauche nous donnons ici le théorème de Sklar dans sa version probabiliste.

### 3.2.1 Le théorème de Sklar et ses applications

L'outil fondamental de la théorie des copules est *le théorème de Sklar*. Il établit le lien entre la définition formelle ci-dessus des copules et les variables aléatoires, permettant ainsi l'application des copules dans la modélisation statistique.

#### Le théorème de Sklar

**Théorème 19** • Soit  $H$  une distribution bivariée dont les distributions marginales sont  $F$  et  $G$ . Il existe une copule bivariée  $C$  telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (1)$$

Si les distributions marginales  $F$  et  $G$  sont continues alors la copule  $C$  est unique.

• Réciproquement si  $C$  est une copule et  $F$  et  $G$  des distributions univariées alors la fonction  $H$  définie par (1) est la distribution conjointe dont les marges sont  $F$  et  $G$ .

Ce théorème permet d'associer à chaque distribution bidimensionnelle une copule. La relation (1) donne une représentation canonique de la distribution  $H$  en mettant en présence d'une part les marges  $F_1$  et  $F_2$  des directions unidimensionnelles et d'autre part la copule qui permet de "cimenter" ces marges. Si la distribution bivariée  $H$  est absolument continue, alors elle admet une densité

$$h(x, y) = \frac{\partial^2 C(F(x), G(y))}{\partial x \partial y} = c(F(x), G(y)) \cdot f(x) \cdot g(y).$$

où  $c(u, v)$  est la densité de la copule  $C$ . La copule  $C$  est dite copule des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  ou copule de la distribution  $H$ . On la note  $C_{XY}$  ou  $C_H$ .

### Application à la construction des copules

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de distributions respectives  $F$  et  $G$  supposées strictement monotones. On peut, à partir de leur distribution conjointe  $H$ , construire la copule associée aux deux variables  $X$  et  $Y$ . Introduisons, pour ce faire, la définition suivante pour généraliser cette construction aux distributions pas nécessairement strictement monotones.

**Définition 20 (définition de la pseudo-inverse ou l'inverse généralisée) :** Soit  $F$  une distribution, on définit la pseudo-inverse  $F^{(-1)}$  de  $F$  telle que :<sup>[12]</sup>

- 1 – Si  $t \in \text{Im}F$ , alors  $F^{(-1)}(t) = \{x \in \mathbb{R} / F(x) = t\}$
- 2 – Si  $t \notin \text{Im}F$ , alors  $F^{(-1)}(t) = \inf \{x / F(x) \geq t\} = \sup \{x / F(x) \leq t\}$ .

**Remarque 21** Si la fonction  $F$  est strictement croissante alors la notion de pseudo-inverse coïncide avec la notion d'inverse ou de réciproque i.e.  $F^{(-1)} = F^{-1}$ . En utilisant la notion de pseudo-inverse dans le théorème de Sklar on obtient le résultat suivant.

**Corollaire 22** Soit  $H$  une distribution bivariable dont les distributions marginales univariées sont  $F$  et  $G$  de pseudo-inverses respectives  $F^{-1}$  et  $G^{-1}$ . Alors il existe une copule  $C$  telle que

$$\forall (u, v) \in I^2; C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

Le corollaire 3 donne ainsi une procédure de construction d'une copule associée à un couple de variables aléatoires connaissant la distribution conjointe et les distributions marginales continues.

**Exemple 23 (Exemples de construction de copules)**

- **La copule de Galambos :** Pour tout réel  $\theta \geq 1$ , la distribution bivariable

$$H_\theta(x, y) = \exp \left\{ - \left[ (x + y) - \left( x^{-\theta} + y^{-\theta} \right)^{\frac{-1}{\theta}} \right] \right\}$$

définie sur  $[0, +\infty[ \times [0, +\infty[$  admet pour marges :

$$F(x) = G(x) = \exp(-x); \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

soit

$$\forall u \in [0, 1[, \quad F^{-1}(u) = G^{-1}(u) = -\ln u.$$

La copule associée est telle que :

$$C_\theta(u, v) = uv \exp \left\{ - \left[ (-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right\}; \quad \theta \geq 1,$$

c'est la copule de Galambos

Densité de la copule de Galambos de paramètre 2

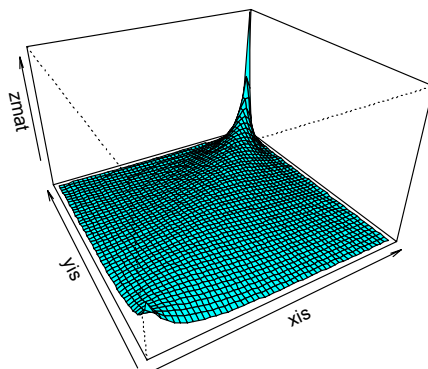


FIG. 3.1 – Densité de la copule de Galambos de paramètre 2

Contour de la densité du Copule de Galamos

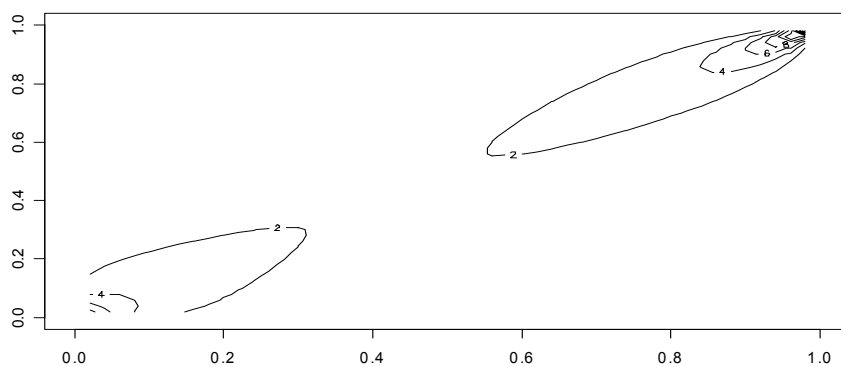


FIG. 3.2 – Contour de la densité du Copule de Galamos

- **Autre exemple de copule :** Pour la distribution

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} & \text{sur } [-1, 1] \times [0, +\infty[ \\ 1 - e^{-y} & \text{sur } ]1, +\infty[ \times [0, +\infty[ \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On vérifie que  $F^{-1}(u) = 2u - 1$  et  $G^{-1}(v) = -\ln(1 - v)$ . Par conséquent la copule associée est telle que :

$$C(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}; \quad \forall (u, v) \in I^2$$

- **La copule copule normale :** Soit  $H_\rho$  une distribution normale bivariée de coefficient de corrélation  $\rho$  telle que  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ;

$$H_\rho(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \exp \left\{ \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \left( \frac{t_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - \frac{2\rho(t_1 - \mu_1)(t_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left( \frac{t_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right) \right\} dt_1 dt_2. \quad (A)$$

Supposons que  $H_\rho$  est la loi conjointe de v.a normales  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  et  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  (en effet, on établira par la suite que la distribution conjointe de deux lois gaussiennes n'est pas automatiquement une loi gaussienne.)

La copule associée à  $H_\rho$  est alors donnée par  $\forall u, v \in I$ ;

$$C_\rho(u, v) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi_1^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi_2^{-1}(v)} \exp \left\{ \frac{1}{2(1-\rho^2)} \left( \left( \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - \frac{2\rho(x - \mu_1)(y - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left( \frac{y - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right) \right\} dx dy$$

où  $\Phi_i^{-1}, i = 1, 2$  est la fonction quantile de la loi  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ .

En particulier si  $X_1 = X_2 \sim N(0, 1)$  loi normale standard de corrélation  $\rho$  on a :

$$C_\rho(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \exp \left\{ \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)} \right\} dx dy$$

copule de Gauss de corrélation  $\rho$ . Comme sa distribution, la copule de Gauss est souvent caractérisée par sa densité  $c_\rho$ . Soit  $h_\rho$  la densité associée à la distribution  $H_\rho$ , de sa représentation canonique (A) on déduit que :  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ;

$$h_\rho(x, y) = f(x)g(y)c_\rho(F(x), G(y));$$

d'où

$$\begin{aligned} C_\rho(u, v) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} c_\rho(F(x), G(y)) \end{aligned}$$

Par suite :  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ;

$$c_\rho(F(x), G(y)) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{x^2 + y^2}{2}\right\}$$

### Application à la modélisation multivariée des distributions

Le corollaire précédent signifie d'autre part que si  $H$  est une distribution bivariée continue de distributions marginales  $F$  et  $G$  dont les inverses sont  $F^{-1}$  et  $G^{-1}$  alors la fonction  $C$  définie telle que :

$$\forall (u, v) \in I^2, C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

est l'unique copule vérifiant la représentation canonique de H. En effet l'unicité résulte des propriétés suivantes :

#### Propriétés

- i) Si  $X$  est une v.a.c. de distribution  $F$  alors la variable  $Y = F(X)$  est de loi uniforme  $U_{[0,1]}$ .
- ii) Si  $F$  est une distribution continue d'inverse  $F^{-1}$  et  $X$  une v.a.c. telle que :  $X \sim U_{[0,1]}$  alors  $F^{-1}(X) \sim F$ .

#### Conséquence :

Si  $(X, Y) \sim H$  de marges  $F$  et  $G$  alors  $H(F(X), G(Y)) \sim C$ .

Réciproque si  $(U, V) \sim C$  alors  $H(F^{-1}(X), G^{-1}(Y)) \sim H$ .

#### Conclusion

Toute copule est une distribution indépendante de ses distributions marginales.

De plus  $\forall (u, v) \in I^2$ ;  $C(u, 1) = C(1, u) = u$  signifie que les distributions marginales de cette distribution sont de lois uniformes.



### 3.2.2 Les Propriétés fondamentales des copules

Comme l'a souligné Fisher dans "Encyclopedia Statistical Sciences" les copules sont d'un grand intérêt pour le statisticien pour deux raisons principales : d'une part elles permettent de construire des familles de distributions multivariées à partir des distributions marginales univariées données ( théorème de Sklar) et d'autre part elles constituent un outil de mesure de dépendance entre distributions univariées tout en restant invariantes sous des transformations strictement monotones de celles-ci. les résultats suivant résumant les propriétés fondamentales des copules.

#### **Théorème 24** (*caractérisation de la copule indépendante*)

Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a.c et  $C_{XY}$  la copule associée. Alors  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si  $C_{XY} = \Pi$ .

En effet :

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ;

$$H(x, y) = F(x)G(y).$$

Or  $\forall (u, v) \in I^2$ ;

$$C_{XY}(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

$$\implies C_{XY}(u, v) = F(F^{-1}(u))G(G^{-1}(v)) = uv = \Pi(u, v).$$

Si  $C_{XY} = \Pi$  alors  $\forall (u, v) \in I^2$ ,

$$C_{XY}(u, v) = \Pi(u, v) = uv$$

$\implies \forall x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$H(x, y) = C_{XY}(F(x), G(y)) = \Pi[F(x), G(y)] = F(x)G(y)$$

$\implies$  les variables  $x$  et  $y$  sont indépendantes.

### 3.2.3 Copules associées à une copule

A partir de la copule  $C$  nous pouvons construire des autres copules

#### **La copule de survie**

Soit  $X$  une variable aléatoire de distribution  $F$ , on note  $\hat{C}$  la copule de survie associée à  $C$  qui vérifie la relation suivante :  $\forall (u, v) \in I^2$  :

$$\hat{C}(S_1(x_1), S_2(x_2)) = \Pr\{X_1 > x_1, X_2 > x_2\} = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

où  $S(x) = 1 - F(x)$ , la fonction de survie.

### La copule duale

Soit  $X$  une variable aléatoire de distribution  $F$ , on note  $\tilde{C}$  la *copule duale* de  $C$  qui vérifie la relation suivante :  $\forall (u, v) \in I^2$  :

$$\tilde{C}(F_1(x_1), F_2(x_2)) = \Pr\{X_1 \leq x_1 \text{ ou } X_2 \leq x_2\} = u + v - C(u, v).$$

**Remarque 25**  $\tilde{C}$  n'est pas une copule car  $\tilde{C}(1, 0) = 1 \neq 0$ .

### La co-copule

Soit  $X$  une variable aléatoire de distribution  $F$ , on note  $C^*$  la *co-copule* de  $C$  qui vérifie la relation suivante :  $\forall (u, v) \in I^2$  :

$$C^*(S_1(x_1), S_2(x_2)) = \Pr\{X_1 > x_1 \text{ ou } X_2 > x_2\} = 1 - C(1 - u, 1 - v).$$

### La copule mixte

Soit  $X$  une variable aléatoire de distribution  $F$ , on note  $\check{C}$  et  $\ddot{C}$  les *copules mixtes* qui vérifient les relations suivantes :  $\forall (u, v) \in I^2$  :

$$\begin{aligned} \check{C}(S_1(x_1), F_2(x_2)) &= \Pr\{X_1 > x_1, X_2 \leq x_2\} = u - \hat{C}(u, v) \\ &= 1 - v - C(1 - u, 1 - v). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{C}(F_1(x_1), S_2(x_2)) &= \Pr\{X_1 \geq x_1, X_2 > x_2\} = u - C^*(u, v) \\ &= v - 1 + C(1 - u, 1 - v). \end{aligned}$$

## 3.3 Familles paramétriques de copules usuelles bivariées

Nous exposons dans la présente section les principales copules paramétriques. Ces copules présentent un intérêt particulier dans la gestion des risques, de par le fait qu'elles autorisent la construction de modèles paramétriques ou semi-paramétriques dont l'estimation sera abordée ultérieurement.

### 3.3.1 Les copules elliptiques

**Définition 26** On appelle *copule elliptique* toute copule de la forme :  $\forall (u, v) \in I^2$  [12]

$$\begin{aligned} C_\rho(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi_{g,1}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi_{g,2}^{-1}(v)} g\left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) dx dy \\ &= H_\rho\left(\Phi_{g,1}^{-1}(u), \Phi_{g,2}^{-1}(v)\right) \end{aligned}$$

où  $H_\rho$  est la distribution conjointe des variables  $X$  et  $Y$ ,  $\Phi_{g,1}^{-1}$  et  $\Phi_{g,2}^{-1}$  les fonctions quantiles respectives et  $\rho$  leur coefficient de corrélation.

### Copules élliptiques classiques

**La Copule normale bivariée** Tout comme les distributions normales et binormales, un des types de copules beaucoup utilisées dans la modélisation financière est la copule normale bivariée. Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables normales standard de corrélation  $\rho$  leur copule est donnée par :

$$C_\rho(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2\sqrt{1-\rho^2}}\right\} dx dy$$

où  $\Phi^{-1}$  est la fonction quantile de la loi normale standard  $N(0, 1)$ .

Densité du copule Normal

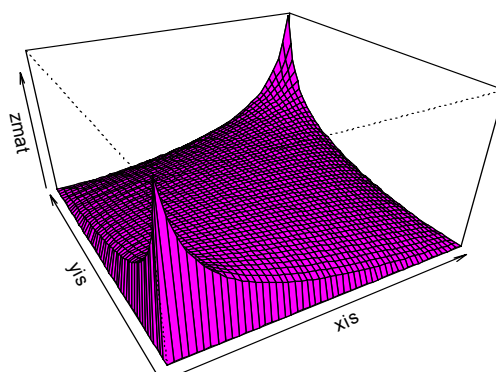


FIG. 3.3 – Densité du copule Normale

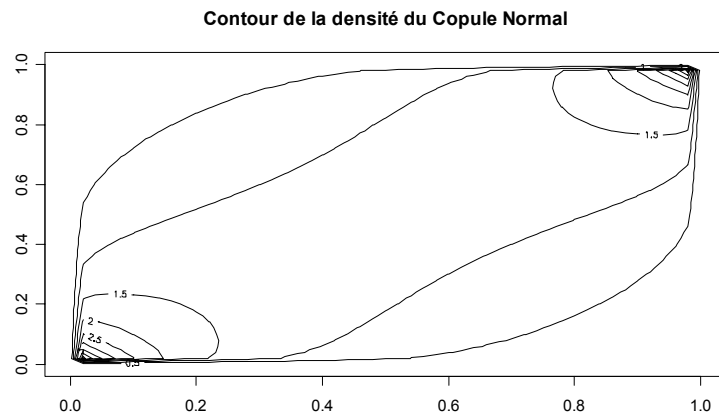


FIG. 3.4 – Contour de la densité du Copule Normale

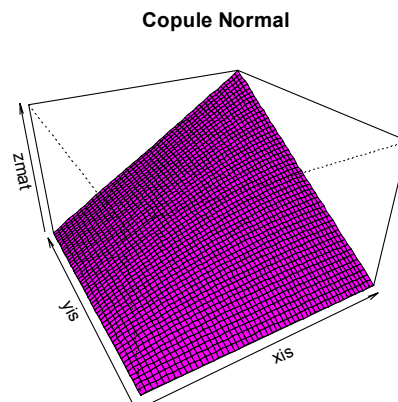


FIG. 3.5 – Copule Normale

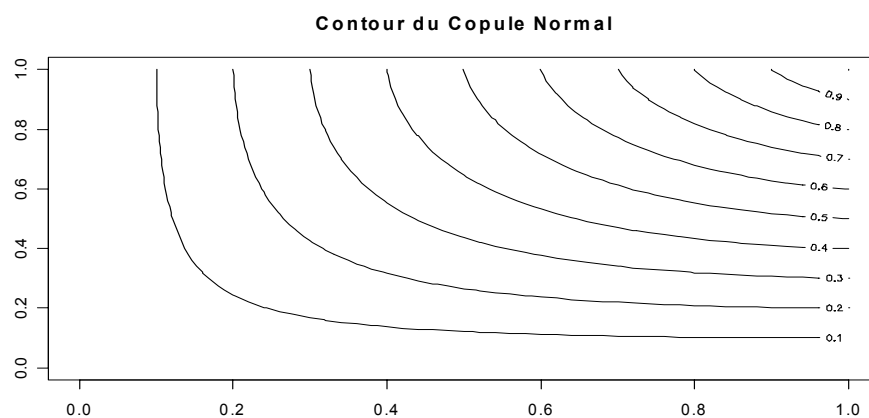


FIG. 3.6 – Contour du Copule Normale

**La Copule de Student** (Copule  $t$ ). Soit  $\rho$  une matrice symétrique définie positive avec  $\text{diag}(\rho) = 1$  et  $t_{\rho,v}$  la distribution de Student bivariée standard à  $v$  degrés de liberté et matrice de corrélation. La copule de Student associée à cette distribution est alors définie de la façon suivante :

$$C_{\rho}(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \exp\left\{\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2\sqrt{1-\rho^2}}\right\} dx dy$$

où  $t_v^{-1}$  est la fonction inverse de la distribution standard de Student à  $v$  degrés de liberté.

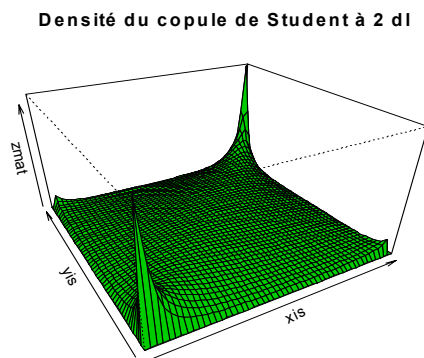


FIG. 3.7 – Densité du copule de Student à 2 dl

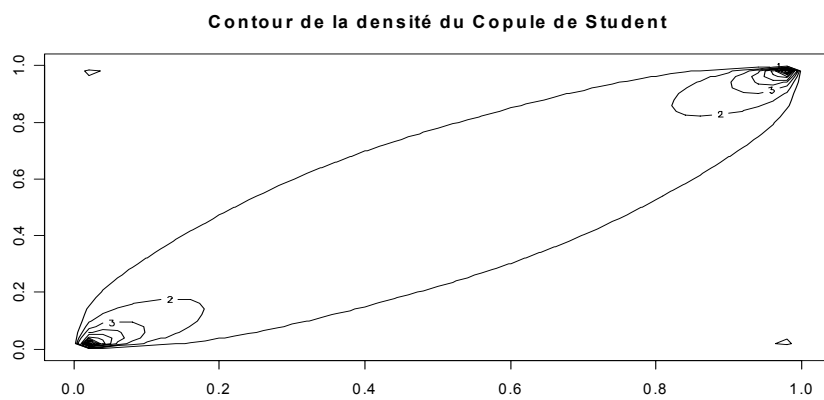


FIG. 3.8 – Contour de la densité du Copule de Student

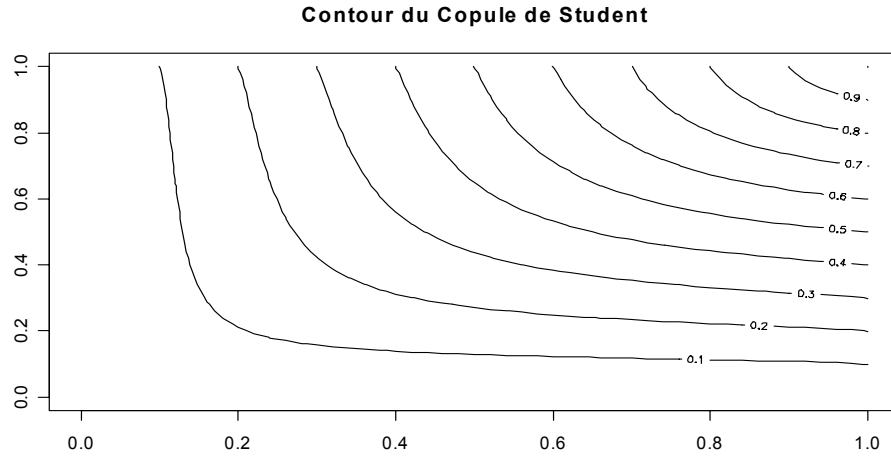


FIG. 3.9 – Contour du Copule de Student

**Remarque 27** Les copules normales et de Student sont des copules symétriques et relativement simples d'utilisation du fait que l'on connaît bien les distributions auxquelles elles sont associées. Elles sont souvent appelées copules implicites car n'ayant pas de forme analytique explicite et s'expriment par conséquent en fonction de distributions bivariées à eux associées par le théorème de Sklar.

**La copule mixte normale** C'est une combinaison convexe de deux copules normales. Soient  $(X_1, Y_1)$  et  $(X_2, Y_2)$  deux couples de variables de copules normales  $C_{\rho_1}$  et  $C_{\rho_2}$  respectivement. Soit  $(X, Y)$  un couple de variables, égal à  $(X_1, Y_1)$  avec une probabilité  $p$  et égal à  $(X_2, Y_2)$  avec une probabilité  $1 - p$ . La copule associée à  $(X, Y)$  est la copule  $C_p$  telle que :

$$C_p(u, v) = p C_{\rho_1}(u, v) + (1 - p) C_{\rho_2}(u, v).$$

$C_p$  est une copule élliptique.

### 3.3.2 Les copules aux valeurs extrêmes

**Caractérisation :**

On appelle copule des valeurs extrêmes toute copule  $C$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall (u, v) \in I^2, \forall t > 0; C(u^t, v^t) = C^t(u, v)$$

ou encore

$$\forall t > 0; C_t^{\frac{1}{t}}(u^t, v^t) = C(u, v).$$

**Exemple 28** *Considérons la copule de Galambos :*

$$\forall \theta \geq 1, C_\theta(u, v) = uv \exp \left\{ - \left[ (-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right\}$$

$\forall t > 0$ , on a :

$$\begin{aligned} C_\theta(u^t, v^t) &= u^t v^t \exp \left\{ - \left[ (-\ln u^t)^{-\theta} + (-\ln v^t)^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right\} \\ &= u^t v^t \exp \left\{ - \left[ (-t \ln u)^{-\theta} + (-t \ln v)^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right\} \\ &= u^t v^t \exp \left\{ -t \left[ (-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right\} \\ &= \left( uv \exp \left\{ - \left[ (-\ln u)^{-\theta} + (-\ln v)^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}} \right\} \right)^t \\ &= C_\theta^t(u, v) \end{aligned}$$

donc est une copule bivariée de valeurs extrêmes notée BEV.

### 3.3.3 Les copules Archimédiennes et Archimax

#### Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes ont un double avantage. Outre le fait que la plupart de ces copules ont une expression analytique, elles permettent de prendre en compte un large éventail de structures de dépendance.

**Définition 29** *On appelle copule archimédienne toute copule de la forme :*<sup>[19]</sup>

$$C(u, v) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) & \text{si } \varphi(u) + \varphi(v) \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec  $\varphi$  une fonction de classe  $C^2$  qui vérifie  $\varphi(1) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(u) < 0$  et  $\varphi''(u) > 0 \forall u \in [0, 1]$  où  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$  est une fonction convexe décroissante telle que  $\varphi(1) = 0$  et  $\varphi^{-1}$  la pseudo-inverse de  $\varphi$ . On pose  $\varphi(0) = +\infty$  si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$  et  $\varphi^{-1}(t) = 0$  si  $t \geq \varphi(0)$ .



La fonction  $\varphi$  est dite générateur archimédien de la copule  $C$ . Si  $\varphi(0) = +\infty$  alors la copule  $C$  est dite strictement archimédienne auquel cas  $\varphi^{-1}$  coïncide avec la fonction réciproque de  $\varphi$ .

### Familles classiques de copules archimédiennes

**Exemple 30**  $\forall \theta \geq 0$  et  $\forall t > 0$  la fonction  $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$  satisfait à la caractérisation ci-dessus avec  $\varphi_\theta^{-1}(t) = \exp\left(-t^{\frac{1}{\theta}}\right)$ , elle définit donc un générateur archimédien et la copule  $C_\theta$  associée est telle que :

$$C_\theta(u, v) = \varphi_\theta^{-1}(\varphi_\theta(u) + \varphi_\theta(v)) = \exp\left\{-\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right\}.$$

C'est la copule de Gumbel.

Le cas particulier  $\theta = 1$  correspond à la copule indépendante  $\Pi(u, v) = uv$ .

Le tableau suivant donne quelques familles classiques de copules archimédiennes

Famille	Générateur $\varphi(u)$	Copule $C(u, v)$
Indépendante	$-\ln u$	$uv$
Clayton	$u^{-\theta} - 1$	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{\frac{-1}{\theta}}; \theta > 0$
Gumbel	$(-\ln u)^\theta; \theta \geq 1$	$\exp\left\{-\left((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right\}$
Franck	$-\log\left(\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$	$\frac{-1}{\theta} \log\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right); \theta \neq 0$

TAB. 3.1 – quelques familles classiques de copules archimédiennes

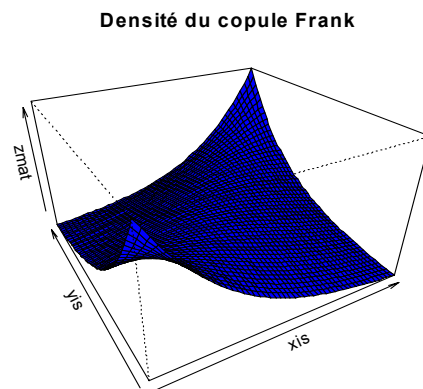


FIG. 3.10 – Densité du copule de Frank de paramètre 3

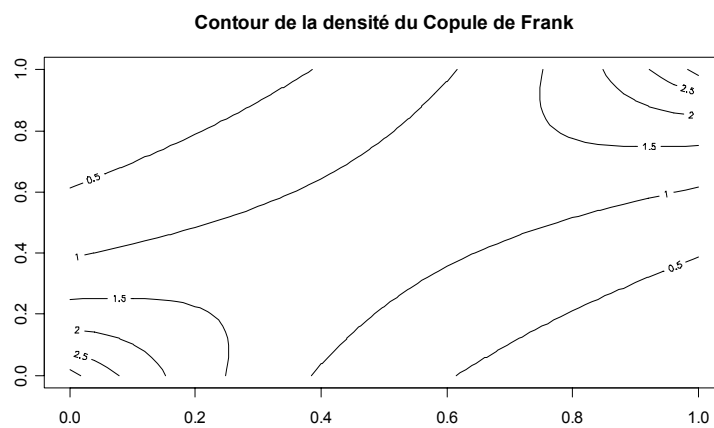


FIG. 3.11 – Contour de la densité du Copule de Frank

Densité de la copule de Clayton de paramètre 2

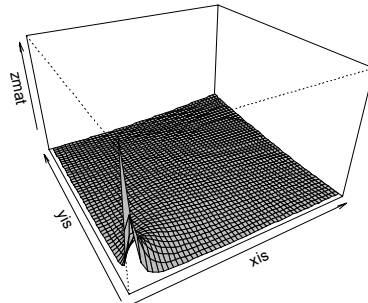


FIG. 3.12 – Densité de la copule de Clayton de paramètre 2

Contour de la Densité du copule de Clayton

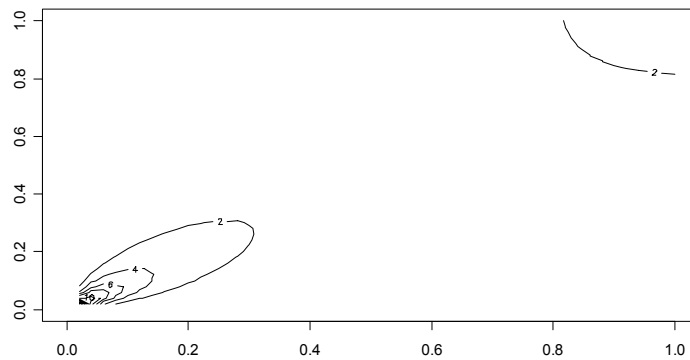


FIG. 3.13 – Contour de la Densité du copule de Clayton

### La famille Archimax

**Caractérisation** Une fonction bivariee est une *copule Archimax* si et seulement si elle est de la forme :

$$C_{\phi,A}(u,v) = \phi^{-1} \left[ (\phi(u) + \phi(v)) A \left( \frac{\phi(u)}{\phi(u) + \phi(v)} \right) \right]$$

pour tout  $u, v \in [0, 1]$ , où

- $A : [0, 1] \longrightarrow [\frac{1}{2}, 1]$  telle que :  $\max(t, 1-t) \leq A(t) \leq 1$  pour tout  $0 \leq t \leq 1$  ;
- $\phi : ]0, 1[ \longrightarrow [0, +\infty[$  est une fonction convexe, décroissante qui vérifie  $\phi(1) = 0$ .

$$\text{On adoptera la notion } \begin{cases} \phi(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) \\ \text{et} \\ \phi^{-1}(s) = 0 \text{ pour } s \geq \phi(0) \end{cases}$$

### Cas particuliers

- Pour  $\phi(t) = -\ln t$  on obtient

$$C_{\phi,A}(u,v) = C_A(u,v) = \exp \left[ -(\ln u + \ln v) A \left( \frac{\ln u}{\ln u + \ln v} \right) \right]$$

avec  $u, v \in [0, 1]$ . C'est la forme générale des copules des valeurs extrêmes.

- En choisissant  $A = 1$  on retrouvera la forme générale des copules archimédiennes

$$C_{\phi,A} = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v))$$

### 3.3.4 La copule empirique

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires continues, considérons un échantillon de taille "n" de ce couple. Posons :

$$E_n = \{(x_k, y_k), k = 1, \dots, n\}.$$

La copule empirique associée à cet échantillon est la fonction  $C_n$  donnée par :

$$C_n \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \sum \sum f_n \left( \frac{p}{n}, \frac{q}{n} \right)$$

où  $f_n$  est la fonction fréquence définie par :

$$f_n \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } (x_i, y_j) \in E_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 3.4 Copules des valeurs extrêmes bivariées

Pour parachever la théorie des valeurs extrêmes nous développons l'étude des copules BEV en établissant un lien entre les copules et les distributions BEV. Comme pour la théorie des distributions nous donnons les grandes familles usuelles de copules bivariées.

#### 3.4.1 Caractérisation d'une copule BEV

Le terme "copule des valeurs extrêmes" suggère l'existence d'un lien entre ces copules et une distribution BEV (chapitre 2). Considérons une distribution BEV  $H$  de distributions marginales respectives  $F$  et  $G$ . Le résultat suivant établit que la copule associée à  $H$  par sa représentation canonique  $H(x, y) = C(F(x), G(y))$  est une copule BEV.

**Théorème 31** Soit  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  une suite de couples aléatoires i.i.d de distribution commune  $H$ . Alors il existe des suites de constantes réelles  $a_n, c_n > 0$  et  $b_n, d_n \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\lim \Pr \left( \frac{M_{X_n} - b_n}{a_n} \leq x, \frac{M_{Y_n} - d_n}{c_n} \leq y \right) = G(x, y),$$

où  $G$  est une distribution non dégénérée si et seulement si les lois marginales de  $G$  sont des lois de valeurs extrêmes univariées et si la copule  $C$  qui est associée satisfait l'équation :

$$\forall t > 0 : \forall u, v \in I : C^t \left( u^{\frac{1}{t}}, v^{\frac{1}{t}} \right) = C(u, v).$$

**Théorème 32** Pour toute copule BEV  $C$  il existe une fonction convexe  $A$  définie de  $[0, 1]$  dans  $[\frac{1}{2}, 1]$  telle que

$$C(u, v) = \exp \left\{ -(\ln u + \ln v) A \left( \frac{\ln u}{\ln u + \ln v} \right) \right\}.$$

De plus  $A$  vérifie :

$$\max(t, 1 - t) < A(t) < 1, \forall t \in [0, 1].$$

Comme pour la distribution BEV,  $A$  est dite **générateur** ou **fonction de dépendance** de la copule .

### 3.4.2 Familles paramétriques usuelles des copules BEV

Comme pour les distributions BEV, il existe essentiellement deux grandes familles de modèles paramétriques usuels de copules BEV : le modèle mixte (Tawn 1988) et le modèle logistique (Gumbel 1960a). Les autres modèles proviennent généralement d'une extension symétrique ou asymétrique de ces deux modèles.

Nous donnons ici quelques unes d'entre elles en adoptant les notations :

$$\tilde{u} = -\ln u, \quad \tilde{v} = -\ln v$$

1. **Indépendante** : sa copule  $C_\theta(u, v)$  est :

$$C(u, v) = \Pi(u, v) = uv$$

Leur **générateur**  $A_\theta(t)$  est :

$$A(t) = 1$$

2. **Gumbel<sub>1</sub> ou logistique** :

$$C_\theta(u, v) = \exp \left\{ - \left( \tilde{u}^\theta + \tilde{v}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}$$

et

$$A_\theta(t) = \left[ t^\theta + (1-t)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}}$$

3. **Gumbel<sub>2</sub>** :

$$C_\theta(u, v) = uv \exp \left\{ \theta \frac{\tilde{u} \tilde{v}}{\tilde{u} + \tilde{v}} \right\}$$

et

$$A_\theta(t) = t^2 - \theta t + 1$$

4. **Galambos** :

$$C_\theta(u, v) = uv \exp \left\{ - \left( \tilde{u}^{-\theta} + \tilde{v}^{-\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \right\}$$

et

$$A_\theta(t) = 1 - \left[ t^{-\theta} + (1-t)^{-\theta} \right]^{\frac{-1}{\theta}}$$

5. **Husler-Reiss** :

$$C_\theta(u, v) = \exp \left\{ -\tilde{v} \Phi \left[ \frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} \theta \log \left( \frac{\tilde{v}}{\tilde{u}} \right) \right] - \tilde{u} \Phi \left[ \frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} \theta \log \left( \frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} \right) \right] \right\}$$

et

$$A_\theta(t) = t \Phi \left[ \frac{1}{\theta} + \frac{1}{2} \theta \log \left( \frac{t}{1-t} \right) \right] + (1-t) \Phi \left[ \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2} \theta \log \left( \frac{t}{1-t} \right) \right]$$

## 6. Logistique de Joe :

$$C_{\theta,\delta}(u, v) = \exp \left\{ - \left[ \tilde{u}^\theta + \tilde{v}^\theta - \left( \tilde{u}^{-\theta\delta} + \tilde{v}^{-\theta\delta} \right)^{\frac{-1}{\theta}} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}; \delta > 0; \theta \geq 1$$

et

$$A_\theta(t) = \left[ t^\theta + (1-t)^\theta - \left( t^{-\theta\delta} + (1-t)^{-\theta\delta} \right)^{\frac{-1}{\theta}} \right]^{\frac{1}{\theta}}, t > 0$$

## 7. Galambos :

$$C_{\theta,\delta}(u, v) = \exp \left\{ - \left[ \tilde{u}^\theta + \tilde{v}^\theta - \left( \tilde{u}^{-\theta\delta} + \tilde{v}^{-\theta\delta} \right)^{\frac{-1}{\theta}} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}; \delta > 0; \theta \geq 1$$

et

$$A_\theta(t) = 1 - \left[ t^{-\theta} + (1-t)^{-\theta} - \left( t^{\theta\delta} + (1-t)^{\theta\delta} \right)^{\frac{-1}{\theta}} \right]^{\frac{-1}{\theta}}$$

## 8. Marshal-Olkin :

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = u^{1-\alpha}v^{1-\beta} \min(u^\alpha, v^\beta) = \begin{cases} uv^{1-\beta} & \text{si } u^\alpha < v^\beta \\ u^{1-\alpha}v & \text{si } u^\alpha > v^\beta \end{cases}$$

et

$$A_{\alpha,\beta}(t) = \max\{1 - \alpha t, 1 - \beta(1-t)\}; \alpha \leq 1; \beta > 0$$

## 9. Tawn :

$$C_{\theta,\delta,\lambda}(u, v) = uv \exp \left\{ - (1-\delta) + (\theta-\delta)\tilde{u} + \left[ (\theta\tilde{u})^\lambda + (\delta\tilde{v})^\lambda \right]^{\frac{1}{\lambda}} \right\}$$

et

$$A_{\theta,\delta,\lambda}(t) = (1-\delta) + (\delta-\theta)t + \left[ (\theta t)^\lambda + \delta(1-t)^\lambda \right]^{\frac{1}{\lambda}}$$

### 3.5 Les mesures de concordance

La copule  $C$  d'un vecteur aléatoire continue  $(X, Y)$  est une paramétrisation, une normalisation de la distribution conjointe  $H$  après avoir éliminé les effets des marges. C'est donc une structure de dépendance entre les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  connaissant leurs distributions respectives. Cette structure permet des estimations des différents moyens d'étudier cette dépendance à travers les mesures de concordance (corrélation linéaire, la concordance, tau de Kendall et rho de spearman)

### 3.5.1 Fonction de concordance

#### Notion de concordance

**Définition 33** Deux observations  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  d'un couple de v.a.c  $(X, Y)$  sont dites : <sup>[3]</sup>

- Concordantes si

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0 \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 < y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 > y_2)$$

- Discordantes si

$$(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0 \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \text{ et } y_1 > y_2) \text{ ou } (x_1 > x_2 \text{ et } y_1 < y_2).$$

**Définition 34** Plus généralement, soit  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  un échantillon de "n" observations d'un couple  $(X, Y)$ , il existe  $C_n^2$  paires distinctes de couples  $(x_i, y_i)$  et  $(x_j, y_j)$  qui sont, soit concordantes, soit discordantes. Soit  $(X_1, Y_1)$  et  $(X_2, Y_2)$  deux couples aléatoires continues de lois conjointes  $H_1$  et  $H_2$  mais de marges communes  $F$  et  $G$  (i.e  $F$  pour  $X_1$  et  $X_2$ ,  $G$  pour  $Y_1$  et  $Y_2$ ).

**Définition 35** On appelle la fonction de concordance entre ces deux couples  $(X_1, Y_1)$  et  $(X_2, Y_2)$  par : <sup>[3]</sup>

$$Q = \Pr [(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \Pr [(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

C'est la différence entre la probabilité de concordance et celle de discordance.

Chaque distribution conjointe étant caractérisée par une copule unique par le théorème de Sklar le résultat suivant permet d'établir une relation entre toute fonction de concordance  $Q$  et les copules associées aux deux couples

### 3.5.2 Propriétés de la fonction de concordance

**Théorème 36** (1) Soient  $(X_1, Y_1)$  et  $(X_2, Y_2)$  deux couples de v.a. indépendants de distributions conjointes  $H_1$  et  $H_2$  avec des marges communes respectivement  $F$  et  $G$ . Soient  $C_1$  et  $C_2$  les copules associées aux distributions respectivement  $H_1$  et  $H_2$  Alors :

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1$$

**Corollaire 37** Soient  $C_1$  et  $C_2$  et  $Q$  données par le théorème (1), Alors

1-  $Q$  est symétrique i.e :

$$Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$$



2-  $Q$  conserve l'ordre i.e si

$$C_1 < \hat{C}_1 \text{ et } C_2 < \hat{C}_2 \text{ alors } Q(C_1, C_2) < Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$$

3-  $Q$  est invariante par rapport à la survie i.e

$$Q(C_1, C_2) = Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$$

Le résultat suivant donne les fonctions de dépendance des copules usuelles  $W$  et  $M$  prises deux à deux.

**Propriété Application :**

1. Pour les copules usuelles  $W$ ,  $\Pi$  et  $M$  on a :

$$Q(M, M) = 1; Q(M, \Pi) = \frac{1}{3} = Q(W, \Pi); Q(M, W) = 0 = Q(\Pi, \Pi)$$

et  $Q(W, W) = -1$ .

2. Pour toute copule  $C$  on a :

$$0 \leq Q(C, M) \leq 1; -1 \leq Q(C, W) \leq 1 \text{ et } \frac{-1}{3} \leq Q(C, \Pi) \leq \frac{1}{3}$$

### 3.5.3 Mesures de concordance

#### Caractérisation d'une mesure de concordance

Il existe un lien entre l'approche par les copules et la concordance :

**Définition 38 (d'une mesure de concordance)** Une mesure d'association  $K$  entre deux variables aléatoires continues  $X$  et  $Y$  de copule  $C$  est une mesure de concordance si elle vérifie les propriétés suivantes : <sup>[12]</sup>

- 1-  $K$  est définie pour tout couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires continues
- 2-  $-1 \leq K_{X,-X} \leq K_{X,Y} \leq 1 = K_{X,X}$
- 3-  $K_{X,Y} = K_{Y,X}$
- 4- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $K_{X,Y} = 0$
- 5-  $K_{-X,Y} = K_{X,-Y} = -K_{X,Y}$
- 6- Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux copules telles que  $C_1 < C_2$  alors on a :  $K_{C_1} < K_{C_2}$
- 7- Si  $\{(X_n, Y_n)\}$  est une suite de couples aléatoires dont la copule est  $C_n$  et si  $\{C_n\}$  converge vers  $C$  alors  $K_{C_n}$  converge vers  $K_C$ .

Deux des mesures de concordance sont plus connues et jouent un rôle très important en statistique non paramétrique : le tau de Kendall et le rho de Spearman.

### 3.5.4 Le tau de Kendall

**Définition 39 (Le tau de Kendall)** Soit  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  un échantillon de "n" observations d'un couple  $(X, Y)$ . On définit le tau de Kendall (version échantillon) par :

$$\tau = \frac{(\text{Nmb de paires concordantes}) - (\text{Nmb de paires discordantes})}{\text{Nmb total de paires}}$$

Soient  $(X_1, X_2)$  et  $(Y_1, Y_2)$  deux observations d'un couple aléatoire  $(X, Y)$ . Si  $(X_1, X_2)$  et  $(Y_1, Y_2)$  sont i.i.d. de loi  $H$ ; on définit le tau de Kendall (version population) par :<sup>[20]</sup>

$$\tau_{XY} = \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

**Remarque 40** Si les couples sont identiquement distribués i.e  $H_1 = H_2 = H$  alors  $\tau_{XY} = Q_{XY}$ .

### 3.5.5 Le rho de Spearman

Tout comme le tau de Kendall, le rho de Spearman est une mesure de dépendance basée sur la notion de concordance.

Soient  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$  et  $(X_3, Y_3)$  trois vecteurs aléatoires indépendants de même distribution  $H$  dont les distributions marginales sont  $F$  et  $G$  et dont la copule associée est  $C$ .

**Définition 41 (rho de Spearman).** Le rho de Spearman d'un vecteur de variables aléatoires est défini par :

$$\rho_{X,Y} = 3 \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - \Pr[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]$$

où  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$  et  $(X_3, Y_3)$  sont indépendants.<sup>[20]</sup>

De plus, si  $X$  a pour fonction de répartition  $F$  et  $Y$  a pour fonction de répartition  $G$ , alors le rho de Spearman s'écrit comme suit :

$$\rho_{X,Y} = \rho(F(X), G(Y))$$

où  $\rho$  est le coefficient de corrélation simple.

On note que le rho de Spearman est invariant pour toute transformation continue croissante de  $(X, Y)$ , tout comme le tau de Kendall.

## Chapitre 4

# Estimation non paramétrique d'une copule et application

### 4.1 Dépendance

Lorsque l'on évoque ce concept, le premier mot qui vient généralement à l'esprit est celui de coefficient de corrélation linéaire.

Ce coefficient de corrélation linéaire, également connu sous le nom de coefficient de corrélation de Pearson, est en effet le plus couramment utilisé.

Ce coefficient est tout à fait approprié lorsque nous étudions des distributions normales ou de student multivariées, mais celui-ci perd de son intérêt si le modèle est différent.

Malheureusement, les distributions dans le domaine de l'assurance suivent très rarement de telles lois.

Nous avons présenté dans le chapitre précédent deux autres coefficients de corrélation, à savoir le coefficient de Kendall et celui de Spearman.

Une mesure de dépendance doit en fait nous permettre de nous faire une idée de la structure de dépendance entre deux variables aléatoires, et celle-ci exprimée à l'aide d'un seul nombre.

#### 4.1.1 Dépendance ou corrélation

Il est important de rappeler que la dépendance et la corrélation sont des notions différentes. En effet, on a  $X$  et  $Y$  indépendantes  $\implies X$  et  $Y$  non corrélées ou  $\rho(X, Y) = 0$  mais la réciproque ne peut être vérifiée que dans le cas où les variables sont gaussiennes car la dépendance est alors entièrement caractérisée par le coefficient de corrélation.

## 4.2 Copules

Les copules présentent de nombreux avantages pour modéliser la dépendance entre risques. D'une part, elles permettent de décrire le comportement individuel de chaque risque et « couplent » les lois marginales pour obtenir la loi jointe. D'autre part, elles offrent une représentation fonctionnelle de la dépendance qui donne une description très complète de la forme de cette dernière.

Dans les applications liées à l'assurance, il existe très certainement une plus forte dépendance entre les gros sinistres qu'entre les petits. De telles asymétries ne peuvent être mises en valeur à l'aide des copules elliptiques.

Les Copules Archimédiennes sont définies de manière beaucoup plus simple que les copules elliptiques, en tout cas lorsque l'on étudie des phénomènes en deux dimensions. Nous nous limiterons à ce cas dans notre application ultérieure.

## 4.3 Processus de copule empirique

Pour répondre aux difficultés soulevées dans l'introduction, il est proposé ici d'appuyer une procédure de test sur une estimation non paramétrique  $C_n$  (où  $\hat{C}$ ) de la copule  $C$ . Spécifiquement, si  $(X_{11}, \dots, X_{1d}), \dots, (X_{n1}, \dots, X_{nd})$  est un échantillon aléatoire d'une population d-variée, on définit la copule empirique par

$$\hat{C}(u) = C_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^d 1\{F_{nj}(X_{ij}) \leq u_j\}$$

où

$$F_{nj}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(X_{ij} \leq x), \quad 1 \leq j \leq d$$

$F_{nj}$  sont les fonctions de répartition empiriques marginales. Il est facile de voir que l'estimateur  $C_n$  est entièrement fondé sur les rangs des observations, puisque

$$\begin{aligned} nF_{nj}(X_{ij}) &= R_{ij} \\ &\implies \\ F_{nj}(X_{ij}) &= \frac{R_{ij}}{n} \end{aligned}$$

quels que soient  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, d\}$

dans notre cas on va étudier un couple de variables aléatoires dépendant  $(X, Y)$  et notre échantillon  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  est aléatoire d'une population bivariée ( $d = 2$ )

L'estimation non paramétrique  $C_n$  ( $\hat{C}$ ) de la copule  $C$  est

$$\hat{C}(u, v) = C_n(u, v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1\{F_{1n}(X_i) \leq u\} 1\{F_{2n}(Y_i) \leq v\}$$

#### 4.4 Estimation non paramétrique d'une copule

On va générer un couple de variables aléatoires dépendantes  $(X, Y)$  et la taille de l'échantillon  $n = 1000$ .

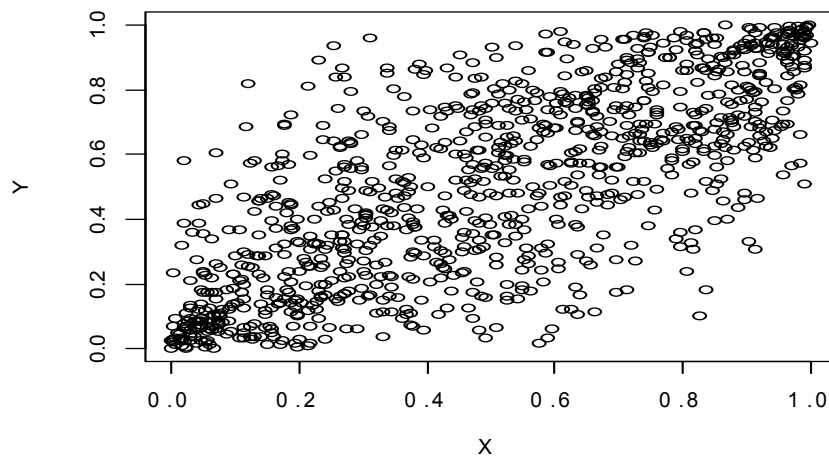


FIG. 4.1 – Nuage des points de deux variables dépendantes

Comme le montrent la simulation effectuée ci-dessus et le graphique représentant les deux variables, celle-ci présente une densité de probabilité plus élevée aux abords des points  $(0,0)$  et surtout  $(1,1)$ . Avec cette structure de dépendance, les gros et les petits sinistres auront tendance à survenir ensemble.

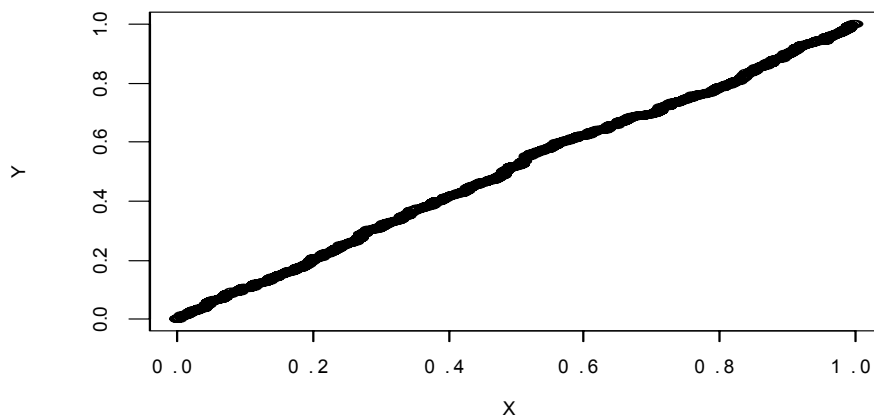


FIG. 4.2 – Quantiles quantiles des deux variables

Le graphique ci-dessus montre que les deux variables sont liées et l'une dépend de l'autre.

On introduit une fonction dans le logiciel R pour faire l'estimation non paramétrique d'une copule à partir du couple de variables aléatoires généré précédemment, après nous avons fait le bootstrap de la valeur obtenue ; le bootstrap est une technique d'inférence statistique basée sur une succession de rééchantillonnages (ce qui permet entre autres une très fine analyse de sensibilité).

Nous avons obtenue les résultats suivants :

Le graphe suivant présente la copule estimée (estimation non paramétrique d'une copule) avec des marges uniformes :

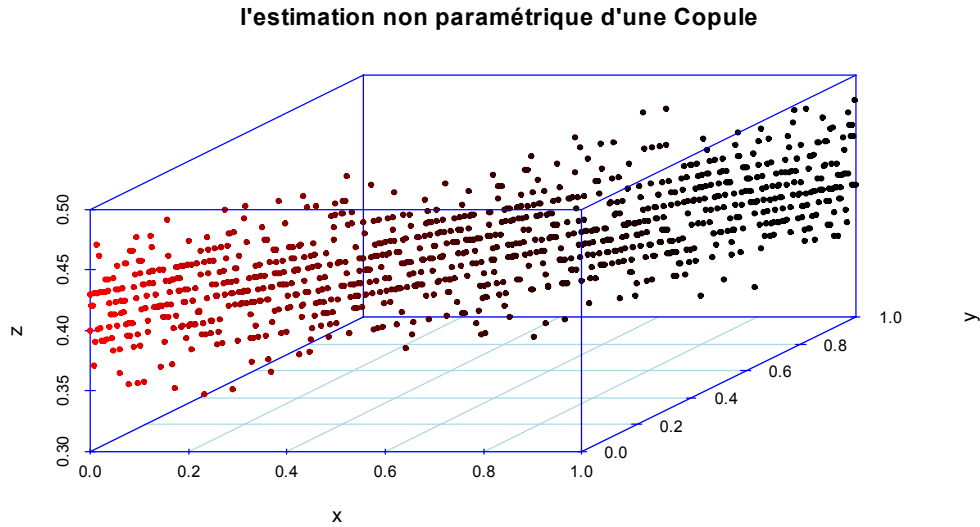


FIG. 4.3 – L'estimation non paramétrique d'une copule

Nous remarquons dans ce graphe qu'il y a une dépendance entre les variables

On peut conclure que la copule est un outil très puissant permettant de modéliser la structure de dépendance indépendamment des lois marginales.

#### 4.5 Les formulations non-paramétriques des coefficients de Kendall et Spearman

Les formulations non-paramétriques des coefficients de Kendall et Spearman peuvent être également définies à partir des copulas empiriques et s'établissent comme suit :

$$\tau = \frac{2n}{n-1} \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n C_n \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) C_n \left( \frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n} \right) - C_n \left( \frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} \right) C_n \left( \frac{i-1}{n}, \frac{j}{n} \right).$$

$$\rho = \left( \frac{12}{n^2-1} \right) \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_n \left( \frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - \frac{ij}{n^2} \right)$$

Nous avons obtenue les résultats pour les coefficients de Kendall et Spearman respectivement comme suit :

$$\tau = -0.3444566$$

et

$$\rho = 0.968071$$

# Conclusion Générale

Nous avons utilisé l'estimation non paramétrique pour estimer une copule.

Et nous avons vu que la copule est un outil très puissant permet de modéliser la structure de dépendance entre les variables aléatoires.

Les copules, même si elles demeurent un outil très puissant n'ont pour l'instant pas souvent été utilisées. L'exemple exposé dans ce mémoire traite des problèmes bivariés. En théorie, la méthode doit pouvoir être étendue à plus de deux dimensions. Mais, la plupart des articles parus à ce jour se contentent d'utiliser les copulas pour des travaux en deux dimensions.

Lorsque le nombre de dimensions est supérieur à deux, les auteurs se ramènent toujours à une copule elliptique (Normale ou de Student) pour la simple et bonne raison que les densités de ces copules sont "faciles" à calculer et que ces copules sont aisément simulables. Or, comme nous l'avons maintes fois répété, ce type de copules n'est pas forcément le plus adapté à l'étude de la sinistralité en assurance. Même s'il existe des extensions ,et encore sous certaines conditions, des copules Archimédiennes à plus de deux dimensions, établir les dérivées nécessiterait des calculs tout à fait fastidieux.

En outre, l'utilisation des copulas deviendrait quasi-impossible avec des logiciels de bureautique standard comme Excel. Ceci en limite donc le champ d'application possible.



# Bibliographie

- [1] **Belguise, O.** (2001). *Tempêtes : Etude des dépendances entre les branches Auto et Incendie avec la théorie des copulas*. Mémoire ULP-USA.
- [2] **Borovkov, A.A.** (1998). *Mathematical statistics*. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam.
- [3] **Cadoux, D. et Loizeau, J.M** *Capules et dépendances : Application pratique à la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non vie*. Working paper.
- [4] **Charpentier, A., Fermanian, J.D. and Scaillet O.** (2005). *Beta kernel estimation of copula density for censored data*. submitted.
- [5] **Charpentier, A.** (2006) *The estimation of copulas ; theory and practice*.
- [6] **Charpentier A.** (2006). *Dependence structures and limiting result, with applications in finance and insurance*. Thèse de Doctorat..
- [7] **Choulakian, V. DE Tibeiro, J.** (2000). *Copules archimédiennes et tableaux de contingence à variables qualitatives ordinales*. Revue de statistique appliquée ( Tome 48 n°4 p83-96).
- [8] **Daumont, O.** *Mesures de risque de marché*. Disponible dans : <http://cermics.enpc.fr/~delmas/Enseig/mrf-daumont.pdf>.
- [9] **Deheuvels, P.** (1979). *La fonction de dépendance empirique et ses propriétés - un test non paramétrique d'indépendance*. Académie Royale de Belgique-Bulletin de la Classe des Sciences-5<sup>ème</sup> Série.
- [10] **Del Barrio, E.** *Empirical and Quantile Processes in the Asymptotic Theory of Goodness-of-fit Tests*. Disponible dans : [www.ub.edu/stat/personal/cuadras/CuadrasGrup.pdf](http://www.ub.edu/stat/personal/cuadras/CuadrasGrup.pdf).
- [11] **Denuit, M. Dhaene, J. Goovaerts, M. et Kaas, R.** *Actuarial Theory for Dependent Risks* ; WILEY.
- [12] **Diakarya, B.** *Distributions et copules des valeurs extrêmes bivariées*. Disponible dans : <http://www.bf.refer.org/barro/version%20pdf.pdf>

- 
- [13] **Dutfoy, A. Lebrun, R.** *Modélisation de la dépendance par la théorie des copules : une généralisation de la transformation de Nataf.* Disponible dans : [documents.irevues.inist.fr/bitstream/.../CFM2007-0436.pdf](http://documents.irevues.inist.fr/bitstream/.../CFM2007-0436.pdf).
- [14] **Elmsiyah, C.** (2006). *Mesures de risque et gestion du capital dans le secteur financier.* Disponible dans : [www.univ-orleans.fr/leo/semmar7/elmsiyah.pdf](http://www.univ-orleans.fr/leo/semmar7/elmsiyah.pdf).
- [15] **Fantazzini, D.** *Copula's Conditional Dependence Measures for Portfolio Management and Value at Risk.* Department of Economics. University of Konstanz (Germany)
- [16] **Favre, A.C.** (2004). *Introduction à la théorie des copules.* Séminaire : 14-19 Mars.
- [17] **Föllmer, H. and Schied, A.** (2004). *Stochastic nance : An introduction in discrete time.* volume 27 de de Gruyter Studies in Mathematics.
- [18] **Laurent, J.P.** *De la mesure à l'analyse des risques.* disponible dans : [laurent.jeanpaul.free.fr/de\\_la\\_mesure\\_a\\_l\\_analyse\\_des\\_risques.pdf](http://laurent.jeanpaul.free.fr/de_la_mesure_a_l_analyse_des_risques.pdf).
- [19] **Malevergne, Y. Sornette, D.** (2006). *Exterme financial risks. From Dependence to Risk Management.* Springer.
- [20] **Merhy, C.** (2005). *Risk Management L'utilisation des copules en finance.* Notes de cours.
- [21] **Moresino, F.** *La Value at Risk (VaR).* Disponible dans : [campus.hesge.ch/risk\\_management/doc/...et.../VaR.pdf](http://campus.hesge.ch/risk_management/doc/...et.../VaR.pdf)
- [22] **Nelsen, R.B.** (2005). *An introduction to copulas.* Second Edition. Springer Series in Statistics.
- [23] **Ossé, A.** *Qu'est-ce que la Value-at-Risk ? Efficacité et limites d'un outil indispensable.* Conseil économique.
- [24] **Quessy, J.F.** (2005). *Méthodologie Et Application Des Copules : Tests D'adéquation, Tests D'indépendance, Et Bornes Pour La Valeur-à-Risque.* Thèse de doctorat. U. Laval Québec.
- [25] **Racicot, F.E. et Théorêt, R.** (2006). *La Value-at-Risk Modèles de la VaR, Simulation en Visual Basic (Excel) et autres mesures recentes du risque de marché.* Cahier de recherche.
- [26] **Roncalli, T.** (2001). *La Théorie des Extrêmes et les Gestions des Risques de Marché.* Cours ENSAI. France.
- [27] **Roncalli, T.** (2002) *Théorie des Valeurs Extrêmes ou Modélisation des Evènements Rares pour la Gestion des Risques.* Université Paris.
- [28] **Saporta, G.** (1990). *Probabilités, analyse des données et statistiques.* Technip.

- 
- [29] **Thomas, J.L. Neil, D.P.** (1996). *Risk measurement : An introduction to Value at Risk*. Disponible dans : [www.exinfm.com/training/pdfiles/valueatrisk.pdf](http://www.exinfm.com/training/pdfiles/valueatrisk.pdf).
- [30] **Totouom Tangho, D.** (2007). *Copules Dynamiques : Applications En Finance & En Economie*. Thèse de doctorat dans l'Ecole des Mines de Paris.