République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA

FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE

Pour l'obtention du Diplôme de Magistér en Mathématiques

Option: Statistique

Présenté par

ABDEL OUAHAB DIDI

Titre

Théorèmes Limites et Stabilité des Equations Différentielles Stochastiques

Soutenu publiquement le: 16/06/2009

Devant le jury:

Président:	NECIR Abdelhakim	Professeur	U.M.K. BISKRA
Rapporteur:	MEZERDI Brahim	Professeur	U.M.K. BISKRA
Examinateur:	BAHLALI Seïd	Maître de Conférences	U.M.K. BISKRA
Examinateur:	MELKEMI Khaled	Maître de Conférences	U.M.K. BISKRA

Table des matières

0.1 Remerciements

C'est pour moi un trés grand plaisir d'exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, Monsieur Brahim Mezerdi, Professeur à l'université de Biskra. Ses qualités scientifiques et humaines, ses encouragements et sa disponibilité ont grandement contribué à l'élaboration de ce travail. La qualité du sujet proposé, les orientations dont j'ai bénéficié se sont avérées toujours pertinentes.

Mr Abdelhakim Necir, Professeur à l'université de Biskra a toujours manifesté un intérêt particulier pour mon travail. Ses encouragements ont eu une grande influence sur le reste de mon parcours. Je le remercie vivement de me faire l'honneur de présider mon jury de thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur Seid Bahlali, Maître de conférence à l'université de Biskra, qui m'a soutenu et a toujours eu une oreille attentive. Je le remercie d'accepter d'examiner mon travail.

Tous mes remerciements vont également à Monsieur Khaled Melkemi, Maître de conférence à l'université de Biskra qui a bien voulu se joindre au jury et examiner mon travail.

Mes vifs remerciement vont également à tous mes enseignants en graduation et en post-graduation à l'université de Biskra.

0.2 Résumé

On considère des équations différentielles stochastiques à coefficients non nécessairement Lipschitziens, pour lesquelles l'unicité forte est vérifiée. En utilisant le théorème sélection de Skorokhod, on établit plusieurs résultats de stabilité forte sous la perturbation, de la condition initiale, des coefficients, et d'autres paramètres. De plus, on montre que sous la condition d'unicité trajectorielle le schéma des approximations successives converge. Aussi un résultat de stabilité en contrôle stochastique est démontré. En ce sens que sous l'unicité forte, les fonctions de valeurs des problèmes strict et relaxé sont égales. Finalement on montre qu'au sens de Baire, presque toute les équations déffirentielles stochastiques avec des coefficients continus et bornées admettent une solution forte unique.

Mots clés : Equation différentielle stochastique - Mouvement Brownien - Unicité forte - Contrôle stochastique - Propriété générique.

0.3 Abstract

We consider stochastic differential equations with non Lipschitz coefficients, for which pathwise uniqueness holds. By using Skorokhd selection theorem, we establish various stability results, under the perturbation of the initial condition, the coefficients and other parameters. Moreover, we prove that under pathwise uniqueness, the scheme of successive approximations converges. In stochastic control, it is proved that the values functions of the strict and relaxed control problems are the same. At the end, we porove that in the sense of Baire, almost all the stochastic differential equations with continuous coefficients have the property of existence and uniqueness.

Keywords : Stochastic differential equaion - Brownian motion - Strong uniqueness - Stochastic control - Generic property.

0.4 Introduction

On considère l' équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t = \sigma(t, X_t)\, dB_t + b(t, X_t)\, dt, \\ X_0 = x. \end{cases} \qquad ((1))$$

telle que

$$\sigma : \mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r.$$

$$b : \mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,$$

sont deux fonctions mesurables, B est Mouvement Brownien r-dimensionelle, défini sur un espace de probabilité avec la filtration $\mathcal{F}_t$ satisfaisant les conditions habituelles. Dans ce travail nous supposons que l'équation admet une solution forte unique $X_t(x)$ pour toute valeur initiale $x \in \mathbb{R}^d$.

Il est bien connu que si les coefficients sont continus et Lipschitziens,alors l' équation (1) admet une solution forte unique $X_t(x)$ qui est continue par rapport à la condition initiale et aux coefficients. De plus, on peut construire la solution par plusieurs schémas numériques.

Notre but dans ce travail est d'étudier les propriétés de la stabilité forte de la solution de (1), sous l'unicité forte de la solution et des hypothèses minimales sur les coefficients. ces conditions minimales assurent l'existence de la solution faible , telle que σ, b sont continues dans la variable d'état [19], ou l'éllipcité uniforme de coefficients de diffusion [15]. D'aprés de théorème de Yamada-Watanabe [15], l'existence de solution faible et l'unicité forte impliquent l'existence de la solution forte unique . Dans ce travail nous suivrons de près les références [1,2].

Ce travail est constitué de trois chapitres :

Le premier chapitr contient quelques éléments de calcul stochastique, processus stochastique, quelque définitions (mouvment Brownien,matingale,...) , formule et intégrale d'Ito, les équations différentielles stochastiques (solution forte,solution faible),quelque inégalités.

Le deuxiéme chapitre contient cinq sections, et est organisé comme suit. La premiére section est un rappel du théorème de Skorokhod, dans la deuxiéme section on étudie la variation de la solution par rapport à la valeur initiale ,on etude la variation de la solution par rapport aux paramètres dans la troisième section. L'extension du résultat ci-dessus à l'espace de Hölder est l'objet de section 4, La cinquième section est consacrée à l'étude des approximations successives. on sait d'aprés la théorie des équations différentielles ordinaires avec des coefficients continus et bornés que l'unicité forte n'est pas suffisante pour la convergence des approximations successives. Alors sous l'uinicité forte on donne la condition nécessaire et suffisante de la convergence. De plus on introduit la classe des modules de continuité pour lesquels le schéma des approximations successives converge.

Le troisième chapitre contient quatre section et est oganisé comme suit. Dans la première section, on étude la stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques dirigées par semi-martingales continues. Notons qu' on ne suppose pas l'unicité forte des équations approximées. Dans la deuxième section on a une application au contrôle optimal des diffusions. On prouve sous l'unicité forte de les trajectoires associés aux contrôles relaxés sont approximées dans L^2 par les trajectoires associées aux contrôles ordinaires. Ce résultat est l'extention du théorème de S.Mèléard [17] prouvé sous la condition de Lipschitz. L' extention des même resultats précédents dans le cas ou les coefficients sont seulement mesurable est l'objet de la section 3. La quatriéme section est consacrée aux propriétés génériques. On montre qu'au sens de Baire, presque toute les équations différentielles stochastiques à coefficients continus et bornés, admettent une solution forte unique.

0.5 Notations

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	espace de probabilité
$P(.)$	la probabilité d'un événement
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$	la tribu de Borel
$\mathcal{B}(\mathbb{U})$	la tribu borélienne engendrée par les ouverts de $\mathbb{U}$
$C(I, S)$	l'espace des fonctions continues de I dans S
$\mathbb{E}(X/\mathcal{G})$	l'espeance conditionnelle de$X$ sachant $\mathcal{G}$
$Var\,(X)$	la variance de X
$B(t)$	Un Mouvement Brownien standard
δ_x	la mesure de Dirac au point $x \in \mathbb{R}^n$
EDS	équation différentielles stochastiques
$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R}^n)$	l'ensemble des var-aléatoires X à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}$-mesurables el que $\mathbb{E}\,\lvert X\rvert^p < +\infty$, pour $p \in [1, +\infty[$
P.p.s	la noation presque sûrement pour la mesure P
I_n	la matrice unité d'ordre n
$a \vee b$	$\max\{a, b\}$
$a \wedge b$	$\min\{a, b\}$
$\mathbb{E}(.)$	l'espérance mathématique
$M^2\,[0, T]$	l'ensemble des martingales de carré intégrable
$\mathcal{U}_{ad}^f\,[0, T]$	l'ensemble des contrôles admissibles faible
$\mathcal{U}_{ad}^F\,[0, T]$	l'ensemble des contrôles admissibles Forte

Chapitre 1

Processus aléatoires et équations différentielles stochastiques

1.1 Processus aléatoires

soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et (E, ξ) un espace mesurable. Soit T un ensemble ,par exemple $T = \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^d$.

On considère une application :

$$\begin{aligned} X : T \times \Omega &\to E \\ (t, \omega) &\to X(t, \omega) \end{aligned}$$

On lui associe , pour tout $t \in T$, sa coordonnée d'indice t,notée X_t ou encore $X(t)$,qui est définie comme l'application $\omega \to X(t, \omega)$ de Ω dans E.

On dira que X est un processus aléatoire défini sur Ω indexé par T et à valeurs dans E si ses coordonnées sont des variables aléatoires sur Ω **i.e** si : $X : \omega \to X(t, \omega)$ est une variable aléatoire pour tout $t \epsilon T$.

Ce cadre englobe à la fois le cas oû $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$,on dit alors aussi que X est une suite aléatoire.

Le cas oû $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$, on dit alors que X est une fonction aléatoire , et celui oû $T = \mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{R}^d$, on dit que X est un champ aléatoire.

Bien sûr dans le cas d'un ensemble d'indice fini, $T = \{1, ..., n\}$, $X = (X_1, ..., X_n)$ est un vecteur aléatoire.

exemple 1.1.1

Avec $\xi_i, i \geq 1$ une suite de variables aléatoires réelles sur Ω et $T = \mathbb{N}$, la suite des sommes partielles

$$X(t, \omega) = \sum_{i \leq t} \xi_i$$

intervient dans nombreux problèmes.

1.1.1 Loi des processus aléatoires

En particulier , on désire considérer la trajectoire de X , **i.e :** l'application (encore notée X) : $\omega \rightarrow (X(t, \omega))_{t \epsilon T}$,de Ω dans l'ensemble E^T des applications de T dans E .

Rappelons que la tribu produit $\underset{t \epsilon T}{\otimes} \xi$ est la tribu sur E^T engendré par les cylindres mesurables de dimension finie **i.e** : les sous ensembles de E^T de la forme : $C = \prod_{t \epsilon T} A_t$ avec $A_t \epsilon \xi$ et $card\{t : A_t \neq E\} < \infty$.

On peut vérifier que si X est un processus aléatoire, sa trajectoires

$\omega \rightarrow (X(t, \omega))_{t \epsilon T}$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\left(E^T, \underset{t \epsilon T}{\otimes} \xi\right)$.

On appelle loi de processus aléatoire X la mesure de probabilité P_X sur $\underset{t \epsilon T}{\otimes} \xi$, image de P par X ,définie par :

$$P_X(A) = P(X \epsilon A), \ A \epsilon \underset{t \epsilon T}{\otimes} \xi$$

1.1.2 Existence de processus aléatoires

Pour assurer l'existence de processus aléatoires ,rappelons deux résultats classiques.

Le premier affirme l'existence d'une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi prescrite.

Théorème 1.1.1 *soit (E, ξ, P) un espace de probabilité quelconque, il existe une unique probabilité P sur $\left(E^{\mathbb{N}}, \xi^{\otimes\mathbb{N}}\right)$ tq $P(C) = \prod\limits_{n\epsilon\mathbb{N}} P(A_n)$ pour tout cylindre mesurable $C = \prod\limits_{n\epsilon\mathbb{N}} (A_n)$.*

Si Q est une probabilité sur E^T et $J\epsilon T$, on note Q/J la projection de Q sur E^J.**i.e** l'image de Q par la projection de E^T sur E^J.

On a bien sûr la propriété de compatibilité, si $I \subset J; (Q/J)/I$.

Théorème 1.1.2 *(Prolongement de Kolmogorov) Soit T un ensemble d'indices quelconque ,et E un espace polonais (**i.e** métrisable, séparable,complet). Considérons une famille Q_I de probabilités sur $B(E)^{\otimes I}$ indexée par les sous ensembles finis I de T , qui soit compatible au sens oû :$(Q_J)/I = Q_I$,$I \subset J \subset T$: J fini. Alors il existe une unique probabilié R sur la tribu borelienne de E^T telle que $R/I = Q_I, I \subset T$ fini.*

1.2 Mouvement Brownien et Martingales

Définition 1.2.1 *On appelle Mouvement Brownien toute fonction aléatoire réelle continue $B = (B(t); t \geq 0)$ à accroissements indépendants gaussiens et $B(t) - B(s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, $0 \leq t \leq s$, avec $B(0) = 0$.*

Définition 1.2.2 *(Martingale) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité muni d'une filtration $\mathcal{F}$, une fonction aléatoire réelle $M = (M(t); t \geq 0)$ est appellée une $\mathcal{F}$-martingale ou simplement une martingale, si elle est adaptée et intégrable ,et si :*

$$\mathbb{E}(M(t) \backslash \mathcal{F}_s) = M(s), \ \boldsymbol{P}.p.s, \forall s < t$$

C'est une fonction qui reste constante en moyenne conditionnelle ,elle n'a tendance ni à croitre ni à décroitre.

En particulier :

$$\mathbb{E}M(t) = \mathbb{E}M(0)$$

exemple 1.2.1 *Soit X une variable aléatoire réelle intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni d'une filtration $\mathcal{F}$, alors :*

$$X(t) = \mathbb{E}(X/\mathcal{F}_t), \ t\epsilon\mathbb{R}_+$$

est une martingale, d'après la propriété de conditionnements successifs de l'espérance conditionnelle, si $s \leq t$:

$$\mathbb{E}(X(t) \backslash \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \backslash \mathcal{F}_t) \backslash \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X \backslash \mathcal{F}_s).$$

Puisque $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, une telle martingale est appellée une martingale régulière.

Définition 1.2.3 *(Martingale locale) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité muni d'une filtration $\mathcal{F}$,une fonction aléatoire réelle $X = (X(t); t \geq 0)$ est appellée une Martingale locale , si elle est adaptée ,et s'il existe une suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\geq 1}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ **p.s** ,et le processus arrêté X^{τ_n} est une Martingale pour tout n.*

Définition 1.2.4 *(semi Martingale) une semi Martingale est un processus adapté X admettant une décomposition sous la forme :$X = X_0 + M + A$.*

où M est une Martingale locale nulle en 0 ,et A est un processus adapté à variation finie et nul en 0.

1.3 Quelques inégalités

L'ingalité de Doob

soit M une martingale de carrée intégrable, continue à droite. Pour tout $t > 0, \lambda > 0$:

$$P\left(\max_{0\leq s\leq t} |M(s)| \geq \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^2} E\left[M(t)^2\right]$$

Cette inégalité est à comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev : pour toute variable aléatoire réelle X (que l'on prend d'abitude centrée) $P(|X| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2} E[X^2]$.

L'inégalité de B D G :(Burkholder-Davis-Gundy) :

Soit $p > 0$ un réel, il existe deux constantes positives c_p et C_p telle que :
pour toute martingale locale continue X,nulle en zéro :

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{P/2}\right] \leq E\left[\sup_{t\geq 0}|X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_\infty^{P/2}\right]$$

en particulier : si $T > 0$:

$$c_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{P/2}\right] \leq E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|X_t|^p\right] \leq C_p E\left[\langle X, X\rangle_T^{P/2}\right]$$

1.4 L'intégrale stochastique

On cherche maintenant à définir la variable aléatoire : $\int_0^t \theta_s dB_s$ quand $\{\theta_s, s \geq 0\}$est un processus stochastique.

Définition 1.4.1 *on dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un bon processus s'il est $\left(\mathcal{F}_t^B\right)_{t\geq 0}$-adapté et si :*

$$\forall t > 0,\ \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < \infty$$

On note $\left\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\right\}$ la filtration naturelle du Mouvement Brownien B.

1.4.1 Cas de processus étagées

Les processus étagées sont les processus du type : $\theta_t^n = \sum_{i=0}^{P_n} \theta_i \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t)$, oû $P_n \epsilon \mathbb{N}$, $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{P_n}$ et $\theta_i \epsilon L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, P)$, $\forall i\epsilon \{0, \ldots, P_n\}$.

On voit immédiatement que θ^n est un bon processus ,on définit alors :

$$I_t(\theta^n) = \int_0^t \theta_s^n dB_s = \sum_{i=0}^{n} \theta_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)$$

et on vérifie que pour $i \neq j$:

$$\mathbb{E}\left(\theta_i\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)\theta_j\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)\right) = 0$$

et que :

$$\mathbb{E}\left[I_t\left(\theta^n\right)\right] = 0 \text{ et } Var\left[I\left(\theta^n\right)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\theta_s^n\right)^2 ds\right].$$

1.4.2 Cas général

Soit θ un bon processus, on note d'abord qu'il existe $\{\theta^n, n > 0\}$ suite de processus étagées telle que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\theta_s - \theta_s^n\right)^2 ds\right] \to 0 \text{ quand } n \nearrow +\infty$$

Puisque pour tout $t > 0$,il existe une variable aléatoire $I_t(\theta)$ de carré intégrable telle que :

$$\mathbb{E}\left[\left|I_t(\theta) - I_t(\theta^n)\right|^2\right] \to 0 \text{ si } n \nearrow +\infty$$

avec $I_t(\theta^n)$ définit comme au paragraphe précédent.

On pose alors naturellement $I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s$ pour tout $t \geq 0$, et par indépendance on remarque d'abord que

$$\mathbb{E}\left[I_t\left(\theta^n\right)\right] = \sum_{i=0}^{P_n} \mathbb{E}\left(\theta_i\right) \mathbb{E}\left[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right] = 0$$

de sorte, en passant à la limite que : $\mathbb{E}\left[I_t(\theta)\right] = 0$.

De même on obtient :

$$\begin{aligned} Var\left[I_t(\theta)\right] &= \lim Var\left[I_t\left(\theta^n\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[I_t\left(\theta^n\right)^2\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{P_n} \theta_i^2\left[t_{i+1} - t_i\right]\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] \end{aligned}$$

1.5 Formule d'Itô

1.5.1 Première formule d'Itô

Soit $\phi \epsilon C_b^2$ alors on a **p.s** :

$$\phi\left(B\left(t\right)\right) = \phi\left(B\left(0\right)\right) + \int_0^t \phi'\left(B\left(s\right)\right) dB\left(s\right) + \frac{1}{2}\int_0^t \phi''\left(B\left(s\right)\right) ds,\ \forall t$$

Le dernier terme est nouveau, comparé à la formule classique, il est dû à la variation quadratique de B.

1.5.2 Deuxième formule d'Itô

Soit ϕ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de class C^1par rapport à t, de classe C^2 par rapport à x, on a :

$$\phi\left(t, B_t\right) = \phi\left(0, B\left(0\right)\right) + \int_0^t \phi_t'\left(s, B_s\right) ds + \int_0^t \phi_B'\left(s, B_s\right) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \phi_{BB}''\left(s, B_s\right) ds\ .$$

1.6 Les équations différentielles stochastiques

Soient : $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Un Mvt-Brownien B et une variable aléatoire X_0 définis sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, avec X_0 et B indépendants.

L'équation :

$$\begin{cases} dX\left(t\right) = b\left(X\left(t\right)\right) dt + \sigma\left(X\left(t\right)\right) dB\left(t\right) \\ X\left(0\right) = X_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

est appelée une équation différentielle stochastique.

Les coefficients b et σ sont appelés respectivement dérive et coefficient de diffusion. Il s'agit d'une équation homogène, puisque les coefficients ne dépendent pas du temps,mais on considèrera aussi des équations inhomogènes.

La solution d'une équation différentielle stochastique est appelée processus de diffusion, ou plus simplement diffusion.

Notons $\mathcal{F}_t$ la tribu engendrée par $B\left(s\right) : s \leq t$ et par X_0, complétée par les ensembles négligeables pour P.

1. L'équation de Langevin :

$$dX_t = \sigma dB_t - bX(t)\,dt \tag{1.2}$$

2. Mouvement Brownien géometrique :

$$dX_t = \sigma X_t dB_t + uX(t)\,dt \tag{1.3}$$

Définition 1.6.1 *On appelle solution forte de l' équation différentielle stochastique **(1.1)**, toute fonction aléatoire $X = (X(t)\,;\ t \geq 0)$, définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que :*

1. X est adapté à la filtration $\mathcal{F}$.
2. $\int\limits_0^t \left[b(X(s))^2 + \sigma(X(s))^2\right] ds < \infty$ **p.s** $\forall t \geq 0$, et on a P**.p.s** :

$$X(t) = X(0) + \int\limits_0^t b(X(s))\,ds + \int\limits_0^t \sigma(X(s))\,dB(s)\,,\ t \in [0, \infty[\tag{1.1}$$

la condition d'intégrale finie dans le point **2** de la définition est que les intégrales dans **(1.4)** sont dans M^2_{Loc}. Si bien que X est un processus d'Itô.

Pour l'équation **(1.2)** ci-dessus admet, $V(t) = e^{-bt}V(0) + \int\limits_0^t e^{-b(t-s)}\sigma dB(s)$ une solution forte, tandis que

$$X(t) = X(0)\exp\left\{\sigma B(t) + \left(\frac{u^2 - \sigma^2}{2}\right)t\right\}$$

est une solution forte de **(1.3)**.

1.6.1 Existence et unicité de solutions fortes

Théorème 1.6.1 *Supposons $X_0 \in L^2$ et b, σ lipshitziennes i.e) :*

$$|b(x) - b(y)| + |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K\,|x - y|$$

*alors l'équation **(1.1)** admet une unique solution $X \in M^2$. Telle que M^2 l'espace des fonctions aléatoires progressivement mesurables telle que :*

$$\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}_+} X^2(t,\omega)\,dt < \infty$$

Preuve. L'Unicité :
Si X et $Y \in M^2$ sont deux solutions.

$$X(t)-Y(t)=\int_0^t [b(X(s))-b(Y(s))]\,ds+\int_0^t [\sigma(X(s))-\sigma(Y(s))]\,dB(s)$$

et en utilisant $(a+b)^2 \leq (a^2+b^2)$, l'inégalité deSchwarz,la propriété d'isométrie de l'intégrale stochastique et la condition de Lipshitz :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)-Y(t)]^2 &\leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t [b(X(s))-b(Y(s))]\,ds\right]^2+\\ &+2\mathbb{E}\left[\int_0^t [\sigma(X(s))-\sigma Y(s)]\,dB(s)\right]^2\\ &\leq 2t\mathbb{E}\left[\int_0^t [b(X(s))-b(Y(s))]^2\,ds\right]ds+\\ &+2\mathbb{E}\left[\int_0^t [\sigma(X(s))-\sigma(Y(s))]^2\,ds\right]\\ &\leq 2(T+1)K^2\mathbb{E}\int_0^t [X(s)-Y(s)]^2\,ds,\ \ t\leq T\end{aligned} \tag{1.5}$$

■

Lemme 1.6.1 *(de Gronwall)*

Soit $X(t)$ une fonction positive localement -intégrable définie sur $\mathbb{R}^+$, tell que :

$$X(t)\leq a+b\int_0^t X(s)\,ds, t\geq 0$$

avec a et b des constantes positives alors :

$$X(t)\leq a\exp(bt)$$

alors avec $X(0) = Y(0)$ et lemme de Grounwall implique que :

$$E\left([X(t) - Y(t)]^2\right) = 0 \ , \text{ pour tout } t$$

d'oû l'unicité de théorème.

L'existence :
On construit une suite de fonctions aléatoires : $\{X_n(.)\}_{n\geq 0}$ par le procédé d'itération de Picard ;

$$\begin{cases} X_0(t) = X_0, \\ X_{n+1}(t) = X_0 + \int_0^t b(X_n(s))\, ds + \int_0^t \sigma(X_n(s))\, dB(s), \end{cases}$$

Alors : $X_n \,\epsilon M^2$, on a l'identité.

$$\begin{aligned} X_{n+1}(t) - X_n(t) &= \int_0^t [b(X_n(s)) - b(X_{n-1}(s))]\, ds \\ &\quad + \int_0^t [\sigma(X_n(s)) - \sigma(X_{n-1}(s))]\, dB(s) \end{aligned}$$

et en utilisant les mêmes arguments qui nous ont menés à **(1.5)**, on obtient :

$$\mathbb{E}\left|X_{n+1}(t) - X_n(t)\right|^2 \leq C_T \int_0^t \mathbb{E}\left|X_n(s) - X_{n-1}(s)\right|^2 ds, \ t \leq T$$

avec : $C_T = 2(T+1)K^2$.
On vérifie alors par recurrence que :

$$\mathbb{E}\left|X_{n+1}(t) - X_n(t)\right|^2 \leq aC_T^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

oû la quantité : $a := \max \mathbb{E}\left|X_1(t) - X_0(t)\right|^2 \leq CstT^3 E(X_0^2)$ est finie.
Finalement $||X_{n+1} - X_n||^2_{M^2[0,T]} \leq a\frac{(C_T T)^n}{n!}$.
Donc

$$||X_{n+p} - X_n||_{M^2[0,T]} \leq a^{\frac{1}{2}} \sum_{k\geq n} \left(\frac{(C_T T)^k}{k!}\right)^{\frac{1}{2}}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers ∞ :la suite $\{X_n(.)\}_{n\geq 0}$ est de Cauchy , elle converge donc dans l'espace de Hilbert $M^2[0,T]$, $\forall T>0$ vers une limite : $X=(X(t)\,,\ t\geq 0)$.

(et d'après l'unicité dans **(1.4)** la limite ne dépend pas de T).

Avec l'hypothèse de lipshitz , on peut passer à la limite dans **(1.6)** et on obtient **(1.4)**.

Les autres propriétés définissant les solutions fortes sont clairement satisfait.

exemple 1.6.1 *:*

L'équation suivante admet une solution unique que l'on peut expliciter :

$$dX(t)=\sqrt{1+X(t)^2}dB(t)+\left(\sqrt{1+X(t)^2}+X(t)/2\right)dt$$

d'après le théorème on a l'existence et l'unicité de la solution .en fait , la solution donnée par :

$$X(t)=\sinh\left(B(t)+t+\sinh^{-1}(X_0)\right)$$

Comme on le vérifie en appliquant la formule d'Itô.

On a deuxième formule d'Itô .soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ de class C^1par rapport à t,de classe C^2 par rapport à B,on a :

$$f(t,B_t)=f(0,B_0)+\int_0^t f_t'(s,B_s)\,ds+\int_0^t f_B'(s,B_s)\,dB_s+\frac{1}{2}\int_0^t f_{BB}''(s,B_s)\,ds.$$

On pose :

$$\begin{array}{l} f(t,B_t)=\sinh\left(B(t)+t+\sinh^{-1}(X_0)\right), \\ f_t'(t,B_t)=\sinh\left(B(t)+t+\sinh^{-1}(X_0)\right), \\ f_B'(t,B_t)=\sinh\left(B(t)+t+\sinh^{-1}(X_0)\right), \\ f_{BB}''(t,B_t)=\sinh\left(B(t)+t+\sinh^{-1}(X_0)\right), \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(t,B_t) = X_0 &+ \int_0^t cinh\left(B(s)+s+\sinh^{-1}(X_0)\right)ds \\ &+ \int_0^t cinh\left(B(s)+s+\sinh^{-1}(X_0)\right)dB_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \sinh\left(B(s)+s+\sinh^{-1}(X_0)\right)ds \end{aligned}$$

et $cinhx = \sqrt{1+\sinh^2 x}$

$$\begin{aligned} f(t,B_t) = X_0 + \int_0^t \sqrt{1+f(s,B_s)^2}ds + \int_0^t \sqrt{1+f(s,B_s)^2}dB_s \\ + \frac{1}{2}\int_0^t f(s,B_s)\,ds \end{aligned}$$

$$df(t,B_t) = \sqrt{1+f(t,B_t)^2}dB_t + \left[\sqrt{1+f(t,B_t)^2} + \frac{1}{2}f(t,B_t)\right]dt.$$

1.6.2 Solutions faibles

Jusqu'à maintenant, on s'est donné l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, la filtration complètée $(\mathcal{F}_t\ , t \geq 0)$, le Mouvement Brownien B, la condition initiale X_0.

Par le procèdé des itérations de Picard **(1.6)** , on a construit la solution à l'aide de ces ingrédients.

C'est le concept de solution forte , la solution est alors une fonctionnelle de X_0 et B.

$$X(t) = F(t;\ X_0,\ B)$$

Pour certaines fonctions, dont nous verrons un exemple ci dessous, on ne peut pas trouver de solution forte , mais par contre on peut définir la notion dans un sens plus faible.

Définition 1.6.2 *on appelle solution faible de l'équation différentielle stochastique* ***(1.1)****, tout triplet :* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $(\mathcal{F}_t\ , t \geq 0)$, $(B, X_0, X(.))$, *constitué* *d'un espace de probabilité , d'une filtration , d'un $(\mathcal{F}_t\ , t \geq 0)$-Mouvement-Brownien B indépendant de la variable aléatoire X_0, et d'un processus aléatoire $X(.)$ adapté à la filtration telle que les point 1) e 2) de la définition du solution forte soient vérifiés.*

Remarque 1.6.1

1. Les données du problème consistent ici uniquement en les fonctions b et σ,ainsi que la loi de la condition initiale X_0, au contraire, le Mouvement Brownien B est une partie intégrante de la solution , au même titre que : X, Ω, $\mathcal{F}$.
2. Cette définition laisse la possibilité pour la solution de "contenir plus de hasard" que la condition initiale et le Mouvement Brownien qui conduit l'équation , la filtration $\mathcal{F}$ sera en générale plus grande que la filtration Brownien augmentée par X_0 cela est imporant dans certaines applications, oû le processus à modéliser dépend non seulement du Mvt-Brownien B qui intervient dans l'équation différentielle stochastique, mais aussi d'autres facteurs aléatoires.
3. Bien sûr Une solution forte est aussi une solution faible de la même équation.
4. Puisqu'on s'est donné le choix de l'espace probabilisé Ω, c'est moins le processus X que sa loi qui importe. Ainsi, la notion d'unicité naturellement assortie à celle de solution faible, est l'unicité en loi du processus aléatoire solution.

exemple 1.6.2 *(de Tanaka)*

Définissons la foncion signe : $sgn(x) = +1$ si$x \geq 0$, $sgn(x) = -1$ si $x < 0$. L'équation différentielle stochastique :

$$X(t) = \int_0^t sgn(X(s))\, dB_s \tag{1.7}$$

possède une solution faible unique en loi, mais elle n'admet pas de solution forte.

Preuve. L'unicité en loi résultat de ce que tout solution est necessairement un Mouvement Brownien. En effet , pour toute solution X, on vérifie facilement que $\exp\left\{uX(t) - u^2t/2\right\}$ est une maringale,et donc que :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i\left[X(t_i) - X(t_{i-1})\right]\right\}\right] = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i^2\left[t_i - t_{i-1}\right]/2\right\}$$

pour toute suite croissante $(t_i, i \leq n)$ positive ,et toute suite $(u_i, i \leq n)$. ■

Existence :
soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace sur lequel est définie un Mouvement Brownien X et $\mathcal{F} = \mathcal{F}^X$ la filtration propre de X .Par le même raisonnement qui ci-dessus, le processus B définie par :

$$B(t) := \int_0^t sgn(X_s)\, dX_s$$

et encore Mouvement Brownien.par différentiation, $dB(t) = sgn(X)\, dX_t$, et puisque $1/sgnx = sgnx$ on a l'égalité.

1.7 Quelque définitions

Unicité forte
On dit que l'équation (1.1) admet une solution forte unique,si pour chaque deux solutions fortes $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ on a :

$$P\left\{\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |X_t - Y_t| > 0\right\} = 0$$

c'est à dire

$$P\left\{X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{R}_+\right\} = 1$$

Unicité faible :

Définition 1.7.1

On dit que l'équation (1.1) admet une solution faible unique, si pour chaque deux solutions faibles
$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, P, B, (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}\right)$ et $\left(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \left(\tilde{\mathcal{F}}_t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}, \tilde{P}, \tilde{B}, \left(\tilde{X}_t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}\right)$: il y'a coincidence des distributions des processus X et $\tilde{X}$.
C'est à dire, pour tout $A \in \xi$ on a :

$$P\left\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\right\} = P\left\{\omega \in \Omega / Y(\omega) \in A\right\}$$

Les théorèmes fondamentaux de Yamada-Watanabe suivants, nous donnent la relation entre les solutions faibles et les solutions fortes :

Théorème 1.7.1 *(Yamada-Watanabe) :*

L'unicité forte implique l'unicité faible.

Preuve. :vior [11],[13]. ■

Théorème 1.7.2 *(Yamada-Watanabe) :*

L'exitence faible plus l'unicité forte entraine l'exitence et l'unicité forte.

Preuve. :voir [11],[13]. ■

Les théorèmes de Yamada-Watanabe jouent un rôle clé dans la démonstration des résultats d'exitence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques à coefficients non lipschitziens.

Chapitre 2

Stabilité des solutions des EDS

2.1 Théorème de Skorokhod

L'outil fondamental utilisé dans les preuves est le théorème seléction de Skorokhod qu' on le presente dans les deux lemmes suivantes :

Lemme 2.1.1 ([11]) *Soit* (S, ρ) *un espace polonais (métrisable ,séparable ,complet),* p_n ,

$n = 1, 2, \ldots$et p des mesures de probabilité sur$(S, B(S))$ telle que : $p_n \to p$. Alors il existe un espace de probabilité $\left(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P}\right)$, et une suite de variables aléatoires, $X_n, n = 1, 2, \ldots$et X définissent sur $\left(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P}\right)$ dans $(S, B(S))$ telle que :

i) $\hat{P}_{X_n} = P_n, n = 1, 2, \ldots$et $\hat{P}_X = P,$
ii) X_n converge vers X , $\hat{P}.p.s.$

Lemme 2.1.2 ([11] *page18*) :

Soit $(X_n(t))$ $n = 1, 2, \ldots$une suite de processus continues d- dimensionnelle satisfaisant les deux conditions suivantes :

i) Il existe deux constantes positives M et γ telle que $E[|X_n(0)|^\gamma] \leq M$ pour toute $n \in \mathbb{N}$.

ii) Il existe des contantes positives α, β, M_K :

$k = 1, 2, \ldots$ telles que :$E\left[|X_n(t) - X_n(s)|^{\alpha}\right] \leq M_K |t-s|^{1+\beta}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall t, s \in [0, k]$ $\quad , k = 1, 2, \ldots$

Alors il existe une sous suite (n_k) , et un espace de probabilité $\left(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P}\right)$ et une suite de processus continues de dimension d, $\hat{X}_{n_k}, k = 1, 2, \ldots, \hat{X}$ définissent sur $\left(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P}\right)$ telle que :

1. Les lois de $\hat{X}_{n_k}$ et X_{n_k} sont coincide $\forall$ $k = 1, 2, \ldots$
2. $\hat{X}_{n_k}(t)$ converge vers $\hat{X}(t)$ uniformément en tout intervale finie $\hat{P}.p.s.$

2.2 Variation de solution par rapport de condition initiale

Définition 2.2.1

Si on a l'unicité forte de l 'équation (1) et on a deux solutions faibles de l 'équation (1) :$(X.B.(\Omega.\mathcal{F}.P).\mathcal{F}_t)$ et $\left(\grave{X}.B.(\Omega.\mathcal{F}.P).\hat{\mathcal{F}_t}\right)$ de même espace de probabilité et Mouvment Brownien (avec possibilté des filtrations différentes) telle que :
$P\left[X_0 = \acute{X_0}\right] = 1$ alors X et $\acute{X}$ sont indistinguable.

Dans la theorie des équations différentielles ordinaires à coefficients continus, l' unicité de la solution est suffisante pour la dépendence et la continuité de la solution par rapport à la condition initiale, le théorème suivant est analogue au resultat ci-dessus dans le cas stochastique.

Théorème 2.2.1

Soient $\sigma(t, x)$ et $b(t, x)$ deux fonctions continues satisfaisant la condition de la croissance au plus linéaire :
i) $\forall$ $T \geq 0$,il existe $M > 0$ telle que :
$|\sigma(t, x)| + |b(t, x)| \leq M(1 + |x|)$ $\forall t \in [0, T]$
Alors si on a l'unicité forte de l 'équation (1) on a

$$\lim_{x \to x_0} E\left[\sup_{t \le T} |X_t(x) - X_t(x_0)|^2\right] = 0, \forall T \ge 0.$$

Preuve. : ■

On suppose que la conclusion de notre théorème est faux . Alors il existe un nombre positif δ et une suite (x_n) qui converge vers x telle que :

$$\inf_n E\left[\sup_{t \le T} |X_t(x_n) - X_t(x)|^2\right] \ge \delta \qquad ((2.1))$$

On indique par X^n(resp X) la solution de (1) correspondant la valeur initiale x_n (resp ,x) par les arguments standart de le théorie des équations différentielles stochastiques ([13] page289), on peut voir que la suite (X^n, X, B) satisfie les conditions i) et ii) du lemme 2.1.2 avec $\alpha = 4, \beta = 1$. Alors il existe un espace de probabilité $\left(\hat{\Omega}.\hat{\mathcal{F}}.\hat{P}\right)$ et une suite de processus stochastique $\left(\hat{X}^n, \hat{Y}^n, \hat{B}^n\right)$ définis sur $\left(\hat{\Omega}.\hat{\mathcal{F}}.\hat{P}\right)$ telle que :

1. Les lois de (X^n, X, B) et $\left(\hat{X}^n, \hat{Y}^n, \hat{B}^n\right)$ coincident $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Il existe une sous suite $\left(\hat{X}^{n_k}, \hat{Y}^{n_k}, \hat{B}^{n_k}\right)$ qui converge vers $\left(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{B}\right)$ uniformément pour tout intervalle finie $\hat{P}$ *.p.s.*

Si on indique par $\hat{\mathcal{F}}_t^n = \sigma\left(\hat{X}_s^n, \hat{Y}_s^n, \hat{B}_s^n, s \le t\right)$ et $\hat{\mathcal{F}}_t = \sigma\left(\hat{X}_s, \hat{Y}_s, \hat{B}_s, s \le t\right)$ alors $\left(\hat{B}_t^n, \hat{\mathcal{F}}_t^n\right)$ et $\left(\hat{B}_t, \hat{\mathcal{F}}_t\right)$ sont des Mouvment Brownien.

D'après la propriété 1) on a X_t^n et X_t satisfont l 'équation (1) avec des valeurs initiales x_n et x , et on peut preuver par ([15] *page* 89) que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \ge 0$:

$$\hat{E}\left|\hat{X}_t^n - x_n - \int_0^t \sigma\left(s, \hat{X}_s^n\right) d\hat{B}_s^n - \int_0^t b\left(s, \hat{X}_s^n\right) ds\right|^2 = 0$$

D'autre part , $\hat{X}^n$ verifie l 'équation différentielle stochastique :

$$\hat{X}_t^n = x_n + \int_0^t \sigma\left(s, \hat{X}_s^n\right) d\hat{B}_s^n + \int_0^t b\left(s, \hat{X}_s^n\right) ds$$

avec les mêmes relations ,on obtient :

$$\hat{Y}_t^n = x + \int_0^t \sigma\left(s, \hat{Y}_s^n\right) d\hat{B}_s^n + \int_0^t b\left(s, \hat{Y}_s^n\right) ds$$

Par l 'utilusation de propriété 2) et théorème limite de skorokhod [19 $page$ 32] alors on a :

$$\int_0^t \sigma\left(s, \hat{X}_s^{n_k}\right) d\hat{B}^{n_k} \underset{K\to\infty}{\to} \int_0^t \sigma\left(s, \hat{X}_s\right) d\hat{B}_s \text{ en probabilité}$$

et

$$\int_0^t b\left(s, \hat{X}_s^{n_k}\right) ds \underset{K\to\infty}{\to} \int_0^t b\left(s, \hat{X}_s\right) ds \text{ en probabilité}$$

Ainsi $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ satisfont la même équation différentielle stochastique (1) sur $\left(\hat{\Omega}.\hat{\mathcal{F}}.\hat{P}\right)$ avec le même Mouvment Brownien $\hat{B}$ et même valeur initiale, alors d' après l'unicite forte, on conclue que : $\forall t :\ \hat{X}_t = \hat{Y}_t\ \hat{P}\ .p.s$ par integrablite uniforme on a :

$$\begin{aligned} \delta &\leq \lim \inf_{n\,\in\,\mathbb{N}} E\left[\sup_{t\leq T}\left|X_t\left(x_n\right) - X_t\left(x\right)\right|^2\right] \\ &\leq \lim \inf_{k\,\in\,\mathbb{N}} \hat{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\hat{X}_t^{n_k} - \hat{Y}_t^{n_k}\right|^2\right] = \hat{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\hat{X}_t - \hat{Y}_t\right|^2\right] \end{aligned}$$

contradiction avec (2.1).

2.3 Variation de solutions par rapport à un paramètre :

On considère une famille de fonctions dépandant d'un paramètre λ et on considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t^\lambda = \sigma\left(\lambda, t, X_t^\lambda\right) dB_t + b\left(\lambda, t, X_t^\lambda\right) dt \\ X_0^\lambda = \varphi(\lambda) \end{array} \right. \tag{(2.2)}$$

Théorème 2.3.1

On suppose que $\sigma(\lambda, t, x)$ et $b(\lambda, t, x)$ sont deux fonctions continues, $\forall$ $T \geq 0$ et pour toute ensemble compact K il existe $L > 0$ telle que :

i) $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \sup\limits_{x \in K} \sup\limits_{t \leq T} \left(\left|\sigma(\lambda, t, x) - \sigma(\lambda_0, t, x)\right| + \left|b(\lambda, t, x) - b(\lambda_0, t, x)\right|\right) = 0$

ii) $\varphi(\lambda)$ est continue en $\lambda = \lambda_0$

iii) $\sup\limits_{t \leq T} \left(\left|\sigma(\lambda, t, x)\right| + \left|b(\lambda, t, x)\right|\right) \leq L(1 + |x|)$ uniformémemt en λ

si l' unicité forte de l'équation (2.2) est vérifie a λ_0 alors :

$\lim_{\lambda \to \lambda_0} E\left[\sup_{t \leq T} \left|X_t^\lambda - X_t^{\lambda_0}\right|^2\right] = 0, \forall T \geq 0.$

Preuve. On suppose que la conclusion de notre théorème est faux .Alors il existe un nombre positif δ et une suite (λ_n) converge vers λ telle que : ■

$$\inf_n E\left[\sup_{t \leq T} \left|X_t(\lambda_n) - X_t(\lambda)\right|^2\right] \geq \delta \tag{(2.3)}$$

On indique par X^n(resp X) la solution de (1) correspondant le paramètre λ_n (resp λ), par les arguments standart de la théorie de les équations differentielles stochastiques ([13] $page289$) on peut voir que la suite (X^n, X, B) satisfie les conditions i) et ii) de lemme 2.1.2 avec $\alpha = 4, \beta = 1$. alors il existe un espace de probabilité $\left(\hat{\Omega}.\hat{\mathcal{F}}.\hat{P}\right)$ et suite de processus stochastique$\left(\hat{X}^n, \hat{Y}^n, \hat{B}^n\right)$ définit sur $\left(\hat{\Omega}.\hat{\mathcal{F}}.\hat{P}\right)$ telle que :

1. Les lois de (X^n, X, B) et $\left(\hat{X}^n, \hat{Y}^n, \hat{B}^n\right)$ sont coincide $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Il existe une sous suite $\left(\hat{X}^{n_k}, \hat{Y}^{n_k}, \hat{B}^{n_k}\right)$ converge vers $\left(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{B}\right)$uniformément

   pour toute intervale finie $\hat{P}$ $.p.s$

si on indique par $\hat{\mathcal{F}}_t^n = \sigma\left(\hat{X}_s^n, \hat{Y}_s^n, \hat{B}_s^n, s \leq t\right)$ et $\hat{\mathcal{F}}_t = \sigma\left(\hat{X}_s, \hat{Y}_s, \hat{B}_s, s \leq t\right)$ alors $\left(\hat{B}_t^n, \hat{\mathcal{F}}_t^n\right)$ et $\left(\hat{B}_t, \hat{\mathcal{F}}_t\right)$ sont des Mouvments Browniens.

D 'après la propriété 1) on a X_t^n et X_t satisfont l'équation (1) avec des paramètres $\lambda_n$et λ, on peut preuver par ([15] *page* 89) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \geq 0$:

$$\hat{E}\left|\hat{X}_t^n - \varphi(\lambda_n) - \int_0^t \sigma\left(\lambda_n, s, \hat{X}_s^n\right) d\hat{B}_s^n - \int_0^t b\left(\lambda_n, s, \hat{X}_s^n\right) ds\right|^2 = 0$$

D'autre part , $\hat{X}^n$ vérifie l 'équation différentielle stochastique :

$$\hat{X}_t^n = \varphi(\lambda_n) + \int_0^t \sigma\left(\lambda_n, s, \hat{X}_s^n\right) d\hat{B}_s^n + \int_0^t b\left(\lambda_n, s, \hat{X}_s^n\right) ds$$

Avec les mêmes relations ,on obtient :

$$\hat{Y}_t^n = \varphi(\lambda) + \int_0^t \sigma\left(\lambda, s, \hat{Y}_s^n\right) d\hat{B}_s^n + \int_0^t b\left(\lambda, s, \hat{Y}_s^n\right) ds$$

Par l' utilusation de la propriété (2) et du théorème de skorokhod [19 *page* 32], alors on a :

$$\int_0^t \sigma\left(\lambda_n, s, \hat{X}_s^{n_k}\right) d\hat{B}_s^{n_k} \underset{K\to\infty}{\rightarrow} \int_0^t \sigma\left(\lambda, s, \hat{X}_s\right) d\hat{B}_s \text{ en probabilité}$$

et

$$\int_0^t b\left(\lambda_n, s, \hat{X}_s^{n_k}\right) ds \underset{K\to\infty}{\to} \int_0^t b\left(\lambda, s, \hat{X}_s\right) ds \text{ en probabilite}$$

et $\varphi(\lambda_n) \underset{n\to\infty}{\to} \varphi(\lambda)$ puisque φ continue en λ

Ainsi $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ satisfont la même équation differéntielle stochastique (2.2) sur $\left(\hat{\Omega}.\hat{\mathcal{F}}.\hat{P}\right)$avec le même Mouvment Brownien $\hat{B}$ et la valeur initiale , alors d 'après l'unicité forte , on conclue que : $\forall t\ \hat{X}_t = \hat{Y}_t\ \hat{P}\ .p.s$ par l' integrabilité uniforme on a :

$$\begin{aligned} &\delta \leq \liminf_{n\,\in\,\mathbb{N}} E\left[\sup_{t\leq T}\left|X_t^n - X_t\right|^2\right] \\ &\leq \liminf_{k\,\in\,\mathbb{N}} \hat{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\hat{X}_t^{n_k} - \hat{Y}_t^{n_k}\right|^2\right] = \hat{E}\left[\sup_{t\leq T}\left|\hat{X}_t - \hat{Y}_t\right|^2\right] \end{aligned}$$

contradiction avec (2.3).

Remarque 2.3.1

Malgré que (2.2) ne possède pas l 'unicité forte de la solution pour $\lambda \neq \lambda_0$,de plus leur solutions sont continues par rapport le parametre λ en λ_0.

la même méthode peut appliquer pour voir la convergence de shémas d'approximation comme le shema d' Eulere. l'appximation par l'équation [9], et sous la méthode [7] et l' approximation polygonale [12].

2.4 Extension du résultat à l'espace de Hölder

Soit $\alpha > 0$ on indique par $\mathcal{C}^\alpha\left([0,1];\mathbb{R}^d\right)$ l 'ensemble de fonctions continues $\alpha -$ Hölder muni de la norme définit par :

$$\|f\|_\alpha = \sup_{0\leq t\leq 1}|f(t)| + \sup_{0\leq s<t\leq 1}\frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

D' après ([13] $page 53$) les solutions de (1) sont $\alpha -$ Hölder continues $\forall \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$.

soit X, (resp X^n) indique la solution de (1) correspendent de valeur inliale x (resp x_n) et $Y_n = X - X_n$.

Lemme 2.4.1

$\forall\ p > 1$, $\delta > 0$ et $\forall\ \gamma < \frac{p-1}{2p}$ alors on a les estimateurs suivantes :

i) $\sup_n E\left|Y_n(t) - Y_n(s)\right|^{2p} \leq c(p)\left|t-s\right|^p$,

ii) $\sup_n P\left(\sup_{s<t} \frac{|Y_n(t)-Y_n(s)|}{|t-s|^\gamma} > \delta\right) \leq c(p,\gamma)\,\delta^{-2p}$.

Preuve. ■

i) est conséquence de formule d' Itô ,et ii) conséquence simple de lemme de Garcia - Rodemich - Rusmy ([20] *page* 49).

Lemme 2.4.2

sous les hypothèses de théorème 2.2.1 ,$\forall \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, $\forall \varepsilon > 0$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\|X_n - X\right\|_\alpha > \varepsilon\right) = 0$$

Preuve.

$$\begin{aligned} P\left(\left\|X_n - X\right\|_\alpha > \varepsilon\right) &= P\left(\sup_{0\leq t\leq 1}\left|X_n(t) - X(t)\right| + \sup_{s<t}\frac{|Y_n(t)-Y_n(s)|}{|t-s|^\alpha} > \varepsilon\right) \\ &\leq P\left(\sup_{0\leq t\leq 1}\left|X_n(t) - X(t)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(\sup_{s<t}\frac{|Y_n(t)-Y_n(s)|}{|t-s|^\alpha} > \frac{\varepsilon}{2}\right) \end{aligned}$$

■

D'aprés le théorème 2.2.1 , le premier terme à gauche tend vers 0 si n tend vers ∞.

Soit $\eta > 0$ telle que $\alpha + \eta < \frac{p-1}{2p}$ et $\mu > 0$ on a :

$$P\left(\sup_{s<t}\frac{|Y_n(t)-Y_n(s)|}{|t-s|^{\alpha}}>\frac{\varepsilon}{2}\right)=P\left(\sup_{s<t}\frac{|Y_n(t)-Y_n(s)|}{|t-s|^{\alpha}}>\frac{\varepsilon}{2};|t-s|<\ \mu\right)$$
$$+P\left(\sup_{s<t}\frac{|Y_n(t)-Y_n(s)|}{|t-s|^{\alpha}}>\frac{\varepsilon}{2};|t-s|\ \ >\mu\right)$$
$$\leq P\left(\sup_{s<t}\frac{|Y_n(t)-Y_n(s)|}{|t-s|^{\alpha+\eta}}>\frac{\varepsilon}{2}\mu^{-\eta}\right)+2P\left(\sup_{0\leq t\leq 1}|X_n(t)-X(t)|>\frac{\varepsilon}{4}\mu^{\alpha}\right)$$
$$\leq c\left(\frac{\varepsilon}{2}\mu^{-\eta}\right)^{-2p}+2P\left(\sup_{0\leq t\leq 1}|X_n(t)-X(t)|>\frac{\varepsilon}{4}\mu^{\alpha}\right).$$

si on prend μ trés petit et d'aprés le téorème 2.2.1 on arrive à le résultat.

2.5 Unicité forte et approximations successives

Soient σ et b les mêmes de théorème 2.2.1 , et on considère l 'équation différentielle stochastique (1) ,la suite de les approximations successives associée de (1) et définit comme le suit :

$$\begin{cases} X_t^{n+1}=x+\int_0^t\sigma(s,X_s^n)\,dB_s+\int_0^t b(s,X_s^n)\,ds \\ X^0=x \end{cases} \qquad ((2.4))$$

Si les coefficients sont continues lipschitziens alors (X^n) converge en moyenne quadratique vers la solution unique de (1) (voir[11]).

Maintenant si les coefficients sont non Lipschitziens et on à seulement que l'équation (1) admet solution forte unique, est ce que la suite (X^n) converge vers X?

la réponse est négative dans le cas déteministe ,voir ([4]pp.114,124).

Le but de le théoréme suivant est établir et additionner la condition nécessaire et suffisante qui assure le convergence des approximations successives.

Théorème 2.5.1 *Soient σ et b comme le théorème 2.2.1 , sous l 'unicité forte de l'équation différentielle stochastique (1) ,(X^n) converge en moyenne quadratique vers la solution de (1) si et seulment si $X^{n+1} - X^n$ converge vers* 0.

Lemme 2.5.1

Soit (X^n) définit par (2.4) alors :

1. $\forall P > 1$, $\sup_n E\left[\sup_{t\leq T} |X_t^n|^{2P}\right] < \infty$,
2. $\forall > 1, \forall T > 0$ il existe un constant C independant de n telle que $\forall s < t$

$$E\left[|X_n(t) - X_n(s)|^{2P}\right] \leq C\,|t-s|^p$$

Preuve. ■

1. $\forall T > 0$, $\forall n \geq 0$,on a :

$$|X_t^n|^{2P} \leq C_1\left[|x|^{2p} + \left|\int_0^t b\left(s, X_s^{n-1}\right)ds\right|^{2p} + \left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)dB_s\right|^{2p}\right]$$

Par l'appliquation de l'inégalité de Hölder on a :

$$\left|\int_0^t b\left(s, X_s^{n-1}\right)ds\right|^{2p} \leq \left[\sum_{i=1}^d\left(\int_0^t b_i\left(s, X_s^{n-1}\right)ds\right)^2\right]^p$$
$$\leq t^p\left[\int_0^t \left|b\left(s, X_s^{n-1}\right)\right|^2 ds\right]^p \leq t^{2p-1}\int_0^t \left|b\left(s, X_s^{n-1}\right)\right|^{2p} ds.$$

Et d'après Burkholder-Davis-Gundy et l' inégalite de Hölder on montre l 'estimateur suivant :

$$E\left[\sup_{t\leq T}\left|\int_0^t \sigma\left(s, X_s^{n-1}\right) dB_s\right|^{2p}\right] \leq C_2 E\left[\left(\int_0^T \left|\sigma\left(s, X_s^{n}\right)\right|^2 ds\right)^p\right]$$
$$\leq C_2 T^{P-1} E\left[\left(\int_0^T \left|\sigma\left(s, X_s^{n-1}\right)\right|^{2P} ds\right)\right]$$

Alors on obtient :

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n|^{2P}\right] \leq C_3\left[|x|^{2p} + C_4 E\int_0^T \left(|\sigma|^{2p} + |b|^{2p}\right)\left(s, X_s^{n-1}\right) ds\right]$$

Et par l'utilusation du condition de la croissance au plus linéaire on a :

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n|^{2P}\right] \leq C_5\left(1 + |x|^{2p}\right) + C_5\int_0^T E\left[\sup_{s\leq t}|X_s^n|^{2P}\right] dt$$

telle que les constants C_k depend seulement de T, m, d

si on étire l 'inégalite precédente on a :

$$E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n|^{2P}\right] \leq C_5\ \left(1 + |x|^{2p}\right)\left[1 + CT + \frac{(CT)^2}{2\downharpoonleft} + \ldots + \frac{(CT)^n}{n\downharpoonleft}\right]$$

Alors

$$\sup_n E\left[\sup_{t\leq T}|X_t^n|^{2P}\right] \leq C_5\left(1 + |x|^{2p}\right)\exp\left(CT\right)$$

2 si on fixé $s < t$ dans $[0, T]$,et par l 'utilusation des même arguments de le preuve précedent on a :

$$E\left[\left|X_n(t)-X_n(s)\right|^{2P}\right] \leq C_6\left|t-s\right|^{p-1}\int_s^t\left(1+E\left[\sup_{v\leq u}\left|X_v^{n-1}\right|^{2P}\right]\right)du$$

alors par utilusation du résultat précedente on obtient :

$$E\left[\left|X_n(t)-X_n(s)\right|^{2P}\right] \leq C_7\left|t-s\right|^{p}$$

telle que C_7 depand de x, p, d, T.

Preuve. (du theorème 2.5.1) ■

On suppose que $X^{n+1}-X^n$ converge vers 0 et il existe $\delta > 0$ telle que :

$$\inf_n E\left[\max_{0\leq t\leq T}\left|X_t^n - X_t\right|^2\right] \geq \delta \qquad ((2.5))$$

D'après le lemme 2.5.2 la famille (X^n, X^{n+1}, X, B) satisfie les conditions i) et ii) de lemme 2.1.2

Alors par le théorème selection de Skorokhod,il existe un espace de probabilité $\left(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P}\right)$ et une suite de processus stochastique $\left(\hat{X}^n, \hat{Z}^n, \hat{Y}^n, \hat{B}^n\right)$définit sur $\left(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{P}\right)$ telle que :

i) les lois de (X^n, X^{n+1}, X, B) et$\left(\hat{X}^n, \hat{Z}^n, \hat{Y}^n, \hat{B}^n\right)$ sont coincide $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) il existe une sous suite $\{n_k\}$ telle que $\left(\hat{X}^{nk}, \hat{Z}^{nk}, \hat{Y}^{nk}, \hat{B}^{nk}\right)$ converge vers $\left(\hat{X}, \hat{Z}, \hat{Y}, \hat{B}\right)$ uniformément sur tout intervale finie $\hat{P}$, $p, s.$

Mais on sais que $X^{n+1}-X^n$converge vers 0,alors on peut voir tout simplement que :

$$\hat{X} = \hat{Z}, \quad \hat{P}, p, s.$$

Par utilusation de meme arguments du preuve de théorème (2.2.1) on peut voir que :

$$\hat{Z}^{nk} = x + \int_0^t \sigma\left(s, X_s^{nk}\right) d\hat{B}_s^{nk} + \int_0^t b\left(s, X_s^{nk}\right) ds$$

$$\hat{Y}^{nk} = x + \int_0^t \sigma\left(s, Y_s^{nk}\right) d\hat{B}_s^{nk} + \int_0^t b\left(s, Y_s^{nk}\right) ds$$

on prend la limite de k tend vers ∞ on obtient :

$$\hat{X}_t = x + \int_0^t \sigma\left(s, \hat{X}_s\right) d\hat{B}_s + \int_0^t b\left(s, \hat{X}_s\right) ds$$

$$\hat{Y}_t = x + \int_0^t \sigma\left(s, \hat{Y}_s\right) d\hat{B}_s^{nk} + \int_0^t b\left(s, \hat{Y}_s\right) ds$$

D'autre terme $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ sont deux solutions de l'equation (1).alors d 'aprés l'unicité forte on a :

$$\hat{X} = \hat{Y} \quad \hat{P}, p, s.$$

$$\begin{aligned} \delta \leq \liminf_{k \in \mathbb{N}} E\left[\max_{t\leq T}\left|X_t^{nk} - X_t\right|^2\right] &\leq \liminf_{k \in \mathbb{N}} \hat{E}\left[\max_{t\leq T}\left|\hat{X}_t^{n_k} - \hat{Y}_t^{n_k}\right|^2\right] \\ &= \hat{E}\left[\max_{t\leq T}\left|\hat{X}_t - \hat{Y}_t\right|^2\right] \end{aligned}$$

contradiction avec (2.5).

Si on a l'unicité forte, la série $\sum X^{n+1} - X^n$ converge si et seulement si $X^{n+1} - X^n$ converge vers 0. comme généralisation de la condition de K.Kawabata [14] .on suppose le suivant :

condition A)

1. il existe deux fonctions mesurables m et ρ telle que :

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|^2+|b(t,x)-b(t,y)|^2 \le m(t)\,\rho\left(|x-y|^2\right)$$

et m et dans L^1_{loc}.

1. ρ est une fonction continue ,non décoissent,concave,définit sur $\mathbb{R}_+$telle que :

$$\int_{0^+} \frac{du}{\rho(u)} = +\infty$$

Théorème 2.5.2

Si σ et b satisfont la condition A),alors les approximations successives converge en moyenne quadratique vers la solution unique de (1).
Sous la condition A), l'unicité forte est vérifie (voir[22]).

Maintenant il suffit que preuver que $X^{n+1}-X^n$converge vers 0 en moyenne quadratique.vers 0.
Soit :

$$\varphi_n(t) = E\left[\max_{0\le s\le t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]$$

par l'utilusation de l' inégalité de Doob et schwartz on obtient :

$$\varphi_{n+1}(t) \le (8+2T)\,E\left[\int_0^t \left|\sigma\left(s,X_s^{n+1}\right)-\sigma\left(s,X_s^n\right)\right|^2 ds+\int_0^t \left|b\left(s,X_s^{n+1}\right)-b\left(s,X_s^n\right)\right|^2 ds\right]$$

puisque ρ est non décroissant, concave alors :

$$\varphi_{n+1}(t) \le (8+2T)\int_0^t \rho\left(\varphi_n(s)\right) m(s)\,ds$$

Soit la suite Ψ_n définie par :

$$\begin{cases} \Psi_0(t) = u(t) \\ \Psi_{n+1}(t) = (8+2T)\int_0^t \rho\left(\Psi_n(s)\right) m(s)\,ds \ ,\forall t\in[0,T] \end{cases}$$

Par l'utilisation du lemme dans ([4] page 114-124) voir aussi [14], il est possible de choisir une fonction u telle que :

1. $\forall t \in [0,T]\ u(t) \geq \varphi_0(t)$
2. $u(t) \geq (8+2T) \int\limits_0^t \rho(u(s))\, m(s)\, ds$

On peut prouver que $\varphi_n(s) \leq \Psi_n(s)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$ et la suite Ψ_n est décroissante.

On pose $\Psi(t) = \lim \Psi_n(t)$, cette convergence est uniforme et Ψ et satisfait à l'équation :

$$\Psi(t) = (8+2T) \int\limits_0^t \rho(\Psi(s))\, m(s)\, ds, \forall t \in [0,T]$$

la condition A) 2) implique que $\Psi = 0$ alors $\lim \varphi_n(t) = 0$.

Exemples

Quelques exemple de fonctions non lipschtziennes,et satisfont la condition A 2) :

$\star$) $\rho(u) = u\, |\log(u)|^{\alpha}, (0 < \alpha < 1)$.
$\star\star$) $\rho(u) = u\, |\log(u)|\, |\log|\log(u)||^{\alpha}, (0 < \alpha < 1)$.

Définissons une autre classe de modules de continuté $g(t,x)$ non nécessairement décomposé sous la forme $l(t).m(x)$,(voir [21] [8]).

soit Ξ l'ensemble de fonctions $g :]0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant à :

i) g est continue,non décroissent,concave,par rapport à la deuxieme variable.

ii) $\lim\limits_{t \to 0} g(t,0) = 0$.

iii) si $F : [0,T] \to \mathbb{R}_+$est continue telle que $F(0) = 0$,et si $F(t) \leq \int\limits_0^t g(s, F(s))\, ds$ alors $F = 0$ sur $[0,T]$.

Théorème 2.5.3 *Soient σ et b deux fonctions continues satisfaisant la condition de la croissance au plus linéaire (2), aussi on suppose qu'il existe $g \in \Xi$ telle que :*

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|^2+|b(t,x)-b(t,y)|^2 \leq g\left(t,|x-y|^2\right)$$

alors l'unicité forte est vérifie et la suite X^nconverge vers la solution unique de (1).

Preuve. ■

i) L'unicitè forte est conséquence immédiate de la propriété de la fonction g.

Montrons la convergence des approximations successives,d'après théorème 2.5.1 il suffit de prouver que :

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\max_{0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]=0$$

Soit

$$\varphi_n(t)=E\left[\max_{0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]$$

et

$$A_T=\{t\in[0,T]:\lim\varphi_n(t)=0\}$$

Certainement A_T est non vide puisque $(0\in A_T)$, il reste à établir que A_T est ouvert et fermé dans $[0\ T]$.

1) premièr étape : A_T est fermé.
soit $0<t_1\in\bar{A}_T$,$\varepsilon>0$ et $\delta\leq\min(t_1,\varepsilon)$,pour sa il existe $t_0\in A_T$telle que $t_1-t_0\leq\delta$.
Certainement A_T est un intervale contient 0,(puisque $t\to\varphi_n(t)$ est une fonction décroissante), il suffit montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\max_{t_1-\delta\leq s\leq t_1}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]=0.$$

Par l'inégalité de Doob et la condition de non explosion , il existe $n_0\in\mathbb{N}$ telle que $\forall n\geq n_0$:

$$E\left[\max_{t_1-\delta\leq s\leq t_1}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]\leq\varepsilon+12\left(8+2T\right)K_T\left(1+H\right)\delta$$

telle que

$$H=\sup_n E\left[\sup_{t\leq T}\left|X_t^n\right|^2\right]<\infty,$$

(voir lemme 2.5.1) ce qui montre que $t_1\in A_T$.

2) Deuxiéme étape : A_T est ouvert .
Soit $t_0\in A_T; t_0\neq T$et $t_0\neq 0$.

On va preuver qu'il existe $r>0$ telle que $t_0+r\in A_T$ ce qui signifier $\exists r>0$ telle que :

$$\lim\varphi_n\left(t\right)=0\forall\in\left[0,t_0+r\right[$$

Puisque A_T est un intervalle (et $t_0\in A_T$) il suffit de voir que :

$$\lim_{n\to\infty}E\left[\max_{t_0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]=0$$

Il est facile de voir que il existe une suite. (ε_n) de nombres réels positifs décoissante vers 0 telle que :

$$E\left[\max_{t_0\leq s\leq t}\left|X_s^{n+1}-X_s^n\right|^2\right]\leq 3\varepsilon_n+ct:\forall t\leq T-t_{0.}$$

telle que c est une constante dépendant seulement de T et x.

Soit :

$$M=\sup\left\{g\left(t,v\right):\left(t,v\right)\in\left[t_0,T\right]\times\left[0,3\varepsilon_0+2H\right]\right\}$$

$$r=\min\left(T-t_0,\frac{2H}{3\left(8+2T\right)\sup\left(c,M\right)}\right)$$

On considère l'équation différentielle ordinaire suivante

$$(*)\begin{cases}\grave{u}\left(t\right)=g_1\left(t,u\left(t\right)\right) & t\in\left[t_0,t_0+r\right]\\ u\left(t_0\right)=0\end{cases}$$

avec $g_1(t,u(t)) = 3(8+2T)\,g(t,u(t))$

On définit l'approximation de $(*)$ par :

$$\begin{cases} u_0(\tau) = 3\varepsilon_0 + 3(8+2T)\sup(c,M)(\tau - t_0) \\ u_{n+1}(\tau) = 3\varepsilon_{n+1} + \int\limits_0^\tau g_1(t,u_n(t))\,dt \end{cases}$$

On peut montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_n(\tau))$ est une suite positive décroissante, par l'application du théorème de convergence monotone et la continuté de g_1,on obtient :

$$u(\tau) = \lim_{n\to\infty} u_n(\tau) = \lim_{n\to\infty} 3\varepsilon_n + \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^\tau g_1(t,u_{n-1}(t))\,dt = \int\limits_0^\tau g_1(t,u(t))\,dt$$

Puisque $g_1 \in \Xi$,alors :

$$u(\tau) = 0, \forall\tau \in [t_0, t_0 + r].$$

et soit

$$\Psi_n(t) = E\left[\max_{t_0\le s\le t}\left|X_s^{n+1} - X_s^n\right|^2\right]$$

On remarque que $\Psi_n(t)$ est majoreé par $u_n(t)$, $\forall t \in [t_0, t_0 + r]$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n(t) = 0,$$

ce qui implique que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0, \forall t \in [t_0, t_0 + r].$$

Ainsi on arrive à le preuve.

On rappelle la condition donnée par S.Nakao, qui assure l'unicité forte, mais que les approximations successives ne convergent pas.

Soient σ et b deux fonctions mesurables bornées à valeurs dans $\mathbb{R}$ et σ à variation bornée telle que $\sigma \ge \varepsilon$ pour quelque $\varepsilon > 0$.

Le problème de la convergence des approximations successives reste ouvert pour une classe importante d'équations différentielles stochastiques.

Chapitre 3

Quelques applications et propriétés génériques

3.1 Stabilité de les équations stochastiques dirigées par des semi-martingales continues

Dans cette section , on considère une équation différentielle stochastique dirigée par semi-martingale continue . On établit le résultat de continuté par rapport aux processus directeurs sous la condition d' unicité forte de la solution.

Soient

$$\begin{gathered} b : [0,1] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ \sigma : [0,1] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times r} \end{gathered}$$

deux fonctions continues et bornées .
On considère l'équation différentielle stochastique :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = \sigma\left(t, X_t\right) dM_t + b\left(t, X_t\right) dA_t \\ X_0 = x \end{array} \right. \tag{(3.1)}$$

telle que A_t un est processus adapté continu à variation bornée . M_t est une martingale locale continue. Par la propiété de l'unicité forte si $(X, M, A, (\Omega, \mathcal{F}, P), \mathcal{F}_t)$

et$\left(\acute{X}, \acute{M}, \acute{A}, (\Omega, \mathcal{F}, P), \acute{\mathcal{F}}_t\right)$ deux solutions faibles de (3.1) telle que $(M, A) = \left(\acute{M}, \acute{A}\right)$ P, p, s alors $X = \acute{X} \quad P, p, s.$

Soit (M^n) une suite de $(\mathcal{F}_t, P)$ -martingales locales, (A^n) une suite de processus continus $\mathcal{F}_t-$adaptés à variation bornée.
On considère l' équation suivante :

$$\begin{cases} dX_t^n = \sigma(t, X_t^n) \, dM_t^n + b(t, X_t^n) \, dA_t^n \\ X_0^n = x \end{cases} \qquad ((3.2))$$

On suppose que la suite (A, A^n, M, M^n) satisfait aux conditions suivantes :
(H_1) la famille (A, A^n, M, M^n) est bornée en probabilité sur $C[0,1]^4$.
(H_2) $M^n - M \to_{n\to\infty} 0$ en probabilité sur $C[0,1]$.
(H_4) $Var(A^n - A) \to_{n\to\infty} 0$ en probabilité.

Théorème 3.1.1 *Si les conditions H_1, H_2, H_3sont satisfaites et l' unicité forte est vérifiée alors :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{0\le t\le 1} |X_t^n - X_t| > \varepsilon\right] = 0$$

On a besoin des lemmes suivants donnés dans [9].

Lemme 3.1.1

Soit$\{f_n(t), f(t), t \in [0,1]\}$une famille de processus continus et soit$\{c_n(t), c(t), t \in [0,1]\}$ une famille de processus continus à variation bornée telle que :

$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en probabilité dans $C[0,1]$.
$\lim_{n\to\infty} c_n = c$ en probabilité dans $C[0,1]$.

alors on à le résultat suivant :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{0\le t\le 1} \left|\int_0^t f_n dc_n - \int_0^t f dc\right| > \varepsilon\right] = 0$$

Lemme 3.1.2

On considère la famille de filtrations $(\mathcal{F}_t^n), (\mathcal{F}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles. Soit $\{f_n(t), f(t), t \in [0,1]\}$ suite de processus continus adaptés et $\{N_n(t), N(t), t \in [0,1]\}$ une suite de martingales locale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t^n), (\mathcal{F}_t)$ respectivement . On suppose que :

$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en probabilité dans $C[0,1]$.
$\lim_{n\to\infty} N_n = N$ en probabilité dans $C[0,1]$.

Alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left[\sup_{0\le t\le 1}\left|\int_0^t f_n dN_n - \int_0^t f dN\right| > \varepsilon\right] = 0$$

Preuve. du théorème 3.1.1 : ■

On suppose que la conclusion de notre théorème et fausse. Alors il existe $\varepsilon > 0$ telle que :

$$\inf_n P\left[\|X^n - X\|_\infty > \varepsilon\right] \ge \varepsilon$$

Il est clair que la famille $Z^n = (X^n, X, A^n, A, M^n, M)$ est tendue dans $\left[C\left([0,1];\mathbb{R}^d\right)\right]^6$ alors :

d'aprés théorème limite de Skorokod, il existe un espace de probabilité $\left(\acute{\Omega}, \acute{\mathcal{F}}, \acute{P}\right)$,et une suite de processus stochastiques $\acute{Z}^n = \left(\acute{X}^n, \tilde{X}^n, \acute{A}^n, \tilde{A}^n, \acute{M}^n, \tilde{M}^n\right)$ définit sur $\left(\acute{\Omega}, \acute{\mathcal{F}}, \acute{P}\right)$ vérifiant :

i) loi(Z^n) =loi$\left(\acute{Z}^n\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) il existe une sous suite $\left(\acute{Z}^{n_k}\right)$ de $\left(\acute{Z}^n\right)$ converge $\acute{P}, p, s$ vers $\acute{Z} = \left(\acute{X}, \tilde{X}, \acute{A}, \tilde{A}, \acute{M}, \tilde{M}\right)$,dans $\left[C\left([0,1];\mathbb{R}^d\right)\right]^6$. soit G_t^n le σ algèbre complète engendrée par$\acute{Z}_t^n$ $(t \in [0,1])$,on pose $\acute{\mathcal{F}}_t^n = \cap_{s<t} G_s^n$ d'une manière analogue on va définir la σ algèbre $\left(\acute{\mathcal{F}}_t, t \in [0,1]\right)$ pour le processus limite $\acute{Z}$.

Donc $\left(\acute{\Omega},\acute{\mathcal{F}},\acute{\mathcal{F}}_t^n,\acute{P}\right)$, $\left(\acute{\Omega},\acute{\mathcal{F}},\acute{\mathcal{F}}_t,\acute{P}\right)$ sont des bases stochastiques et $\acute{M}_t^n,\tilde{M}_t^n$, (resp $\acute{M}_t,\tilde{M}_t$) sont des $\acute{\mathcal{F}}_t^n$(resp $\acute{\mathcal{F}}_t$) martingales locales continues.

Les processus $\acute{X}^n,\tilde{X}^n$ satisfont aux équations différentielles stochastiques suivantes :

$$\begin{cases} d\acute{X}_t^n=\sigma\left(t,\acute{X}_t^n\right)d\acute{M}_t^n+b\left(t,\acute{X}_t^n\right)d\acute{A}_t^n \\ \acute{X}_0^n=x \end{cases} \tag{(3.3)}$$

$$.\begin{cases} d\tilde{X}_t^n=\sigma\left(t,\tilde{X}_t^n\right)d\tilde{M}_t^n+b\left(t,\tilde{X}_t^n\right)d\tilde{A}_t^n \\ \tilde{X}_0^n=x \end{cases} \tag{(3.4)}$$

dans$\left(\acute{\Omega},\acute{\mathcal{F}},\acute{\mathcal{F}}_t^n,\acute{P}\right)$
par l'utilisation des lemmes 3.1.1,3.1.2 on peut voir que les limites de processus ci-dessus satisfont les équations suivantes :

$$\begin{cases} d\acute{X}_t=\sigma\left(t,\acute{X}_t\right)d\acute{M}_t+b\left(t,\acute{X}_t\right)d\acute{A}_t \\ \acute{X}_0=x \end{cases} \tag{(3.5)}$$

.

$$\begin{cases} d\tilde{X}_t=\sigma\left(t,\tilde{X}_t\right)d\tilde{M}_t+b\left(t,\tilde{X}_t\right)d\tilde{A}_t \\ \tilde{X}_0=x \end{cases} \tag{(3.6)}$$

par utilusation de les hypothèses $(H_2),(H_3)$,il est facile de voir que
$\acute{M}=\tilde{M}$ et $\acute{A}=\tilde{A}$ $\acute{P},p,s.$
Donc d' aprés l 'unicité forte, $\acute{X},\tilde{X}$ sont indistinguables, ce qui contredit l'hypothèse. Alors X^n converge vers la solution unique X.

3.2 Approximation en contrôle stochastique

Dans cette section, on utilise des idées développées dans la section 2, pour établir l'approximation du problème de contrôle relaxé . Les processus contrôlées sont solutions des équation différentielles stochastiques d'Ito :

$$\begin{cases} dX_t^u=\sigma\left(t,X_t^u\right)dB_t+b\left(t,X_t^u,u_t\right)dt \\ X_0^u=x. \end{cases} \tag{(3.7)}$$

u est un processus prévisible prenant ses valeurs dans un espace compact polonais E.

Le coût qu' on va minimiser sur le classe U de processus présivibles prennent leur valeurs dans E est défini par :

$$J(u) = E\left[\int_0^1 l\ \left(t, X_t^u, u_t\right) dt + g\left(X_1^u\right)\right]$$

Un control optimal u^*est un prosessus appartenant à U, tel que :

$$J(u^*) = \min\left\{J(u)\,; u \in U\right\}$$

D'habitude un contrôle optimal dans la classe U n'existe pas,sauf sous l'hypothèse de convexité , voir [5] .

Pour cela on transforme le problème initial on l'injectant dans une classe $\mathcal{R}$ de controles relaxés qui possède de bonnes propriètés de compacité.

soit V l'ensemble de mesures de probabilité sur $[0,1] \times E$ telle que leur projection sur $[0,1]$ coincide avec mesure de Lebesgue dt . V est muni de la topologie de la convergence faible de mesures de probabilité.

Définition 3.2.1

Un contrôle relaxé q est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble V.

1. Pour tout contrôle relaxé q on a la décomposition comme suivante : $q(\omega, dt, da) = dt\ q(\omega, t, da)$, telle que $q(\omega, t, da)$ est un processus predivisible à valeurs dans l'espace des mesures de probabilité sur E.

2. L'ensemble U de contrôles ordinaires est injecté dans l'ensemble $\mathcal{R}$ des contrôles relaxés par l'application $\Psi : U \to \mathcal{R}$

$$u \to \Psi(u)(dt, da) = dt.\delta_{u(t)}(da)$$

telle que δ_a est mesure de Dirac en a.

Lemme 3.2.1 *(chattering lemma)*

Soit q un contrôle relaxé, alors il existe une suite de processus predictable u^n leur valeurs dans E telle que la suite $dt\ \delta_{u^n(t)}da$ converge $dt\ q(\omega, t, da)\ P.p.s$

Preuve. : voir [5] ■

Maintenant on définis la dynamique et le coût assosié au contrôle relaxé $q \in \mathcal{R}$.

$\forall q \in \mathcal{R}$,on note par X^q la solution de :

$$\begin{cases} dX_t^q = \sigma(t, X_t^q)dB_t + \int\limits_E b(t, X_t^q, a)q(t, da)dt \\ X_0^q = x \end{cases} \tag{(3.8)}$$

le coût associé à (q, X^q) est défini par :

$$J(q) = E\left[\int\limits_0^1 \int\limits_E l(t, X_t^q, a)q(t, da)dt + g(X_1^q)\right]$$

Puisque l'espace V est compact, pour le preuve voir [5], alors un contrôle optimal existe dans le classe $\mathcal{R}$ de contrôles relaxés (même lorsque le contrôle entre dans le coefficient de diffusion σ). Sous l'unicité en loi, ce qui établit que la famille de loi de($dt.\delta_{u(t)}(da), X^u$) est dense dans l'ensemble de lois de $(dt\ q(t, da), X^q)$ dans $\mathcal{R} \times \mathbb{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ et :

$\inf\{J(u), u \in U\} = \inf\{J(q), q \in \mathcal{R}\}$

On donne maintenant le résultat d'approximation qui est une extension de théorème prouvé dans [17] (telle que les coeficients sont continus lipschitziens) . La nouveauté dans ce résultat est que l'approximation reste valide sous des conditions sur σ et b assurent l'unité forte.

on suppose les conditions suivants :

$b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times E \to \mathbb{R}^d$.
$\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r$.
sont des fonctions continues telles que :

$$\sup_{t \le 1}(|\sigma(t, x)| + |b(t, x, a)|) \le L(1 + |x|), \forall a \in E.$$

Théorème 3.2.1 *soit q un controle relaxé et X^qcorrespondant la solution de (3.8) .alors si on à l'unicité forte de l'equation (3.8) il existe une suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de processus prédictaple leur valeurs dans E.telle que :*

1. $dt.\delta_{u^n(t)}.(da)$ *converge vers* $dt.q(t,da)$, $P.p.s.$*dans* V.
2. $\lim_{n\to\infty} E\left[\sup_{t\leq 1}\left|X_t^{u^n}-X_t^q\right|^2\right]=0.$

Preuve. : ■

1. soit $q\in\mathcal{R}$ alors d'aprés le lemme 3.2.1 il existe une suite $(u^n)\subset U$ telle que $q^n=dt.\delta_{u^n(t)}.(da)$ converge vers $dt.q(t,da)$, $P.p.s$ dans V.
2. soit $X_t^{u^n}$, (resp X_t^q) les solutions de (3.7),(3.8) associe u^n, (resp q).

on suppose que 2) est fausse, alors il existe $\delta>0$ telle que :

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} E\left[\sup_{t\leq 1}\left|X_t^{u^n}-X_t^q\right|^2\right]\geq\delta$$

D'aprés le lemme 2.1.2 et la compacité de V. D'un autre côté la famille $Y^n=\left(q^n,q,X^{u^n},X^q,B\right)$ est tendue dans l'espace $V^2\times C^3$, telle que C indique l'espace de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^d$ muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors d'après théorème de Skorokhod il existe un espace de probabilité $(\Omega',\mathcal{F}',P')$ et une suite de processus (Y'^n) $=(q'^n,v'^n,X'^n,Y'^n;B'^n)$ telle que :

i) les lois de Y^n et Y'^n sont coincide $\forall n\in\mathbb{N}$

ii) il éxiste une sous suite Y'^{n_k} converge vers $Y'.P'.p.s$ dans l'espace $V^2\times C^3$ telle que $Y'=(q',v',X',Y',B')$.

par l'intégrablité uniforme on obtient :

$$\begin{aligned}\delta &\leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} E\left[\sup_{t\leq 1}\left|X_t^{u^n}-X_t^q\right|^2\right]= \qquad ((\mathrm{H}))\\ &= \liminf_{n\in\mathbb{N}} E'\left[\sup_{t\leq 1}\left|X_t'^n-Y_t'^n\right|^2\right]=E'\left[\sup_{t\leq 1}\left|X_t'-Y_t'\right|^2\right]\end{aligned}$$

telle que E'l'espérance par rapport à P'.

par la propriété i) on peut voir que X'^net Y'^nsatisfont les équations suivantes :

$$\begin{cases} dX_t'^n = \sigma\left(t, X_t'^n\right) dB_t'^n + \int\limits_E b\left(t, X_t'^n, a\right) q'^n\left(t, da\right) dt \\ X_0'^n = x \end{cases} \tag{(3.9)}$$

et

$$\begin{cases} dY_t'^n = \sigma\left(t, Y_t'^n\right) dB_t'^n + \int\limits_E b\left(t, Y_t'^n, a\right) v'^n\left(t, da\right) dt \\ Y_0'^n = x \end{cases} \tag{(3.10)}$$

si n tend vers ∞ et par l'utilisation du théorème selection de Skorokhod ([19] page 32) ,on peut voir que les processus X'et Y' satisfont les équations (3.11) et (3.12) respectivement :

$$\begin{cases} dX_t' = \sigma\left(t, X_t'\right) dB_t' + \int\limits_E b\left(t, X_t', a\right) q'\left(t, da\right) dt \\ X_0' = x \end{cases} \tag{(3.11)}$$

et

$$\begin{cases} dY_t'^n = \sigma\left(t, Y_t'^n\right) dB_t'^n + \int\limits_E b\left(t, Y_t'^n, a\right) v'^n\left(t, da\right) dt \\ Y_0'^n = x \end{cases} \tag{(3.12)}$$

on sait par 1) que $q^n \to q$ dans V $P.p.s.$,alors la suite (q^n, q) converge vers (q, q) dans V^2, aussi que loi(q^n, q) =loi(q'^n, v'^n) et $(q'^n, v'^n) \to (q', v')$ $P'.p.s$ dans V^2,alors $q' = v' P'.p.s.$

Alors X'etY' sont deux solutions de meme équation différentielle stochastique dérigée par le meme Mouvment BrownienB'.donc d'aprés l'unicité forte on à $X' = Y' P'.p.s$ et ce contraduction avec H.

3.3 Cas des coeficients non continus

Dans cette section la continuté des coefficionts n'est plus supposée. On suppose que $d = r$, et σ et b vérifient les conditions suivantes :

a) σ et b sont deux fonctions bornées et borèliennes.

b) il existe $\lambda > 0$,telle que $\forall (t, x, \varepsilon) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$:$\varepsilon^* \sigma (t, x) \varepsilon \geq \lambda |\varepsilon|^2$

Théorème 3.3.1 *on suppose que $\sigma (t, x)$ et $b (t, x)$ satisfont les conditions a) et b) . Si l'unicité forte est vérifie, alors la conclusion de théorème 2.2.1 reste valide*

Preuve. La preuve est similaire à celle du théorème 2.2.1. La seule difficulté est de voir que : ∎

$$\int_0^t \sigma \left(s, \hat{X}_s^{n_k}\right) d\hat{B}_s^{n_k} \to_{k\to\infty} \int_0^t \sigma \left(s, \hat{X}_s\right) d\hat{B}_s. \text{ en probabilité.}$$

$$\int_0^t b \left(s, \hat{X}_s^{n_k}\right) ds \to_{k\to\infty} \int_0^t b \left(s, \hat{X}_s\right) ds. \text{ en probabilité.}$$

$\forall \varepsilon > 0$,on à :

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} P \left[\left| \int_0^t \sigma \left(s, \hat{X}_s^{n_k}\right) d\hat{B}_s^{n_k} - \int_0^t \sigma \left(s, \hat{X}_s\right) d\hat{B}_s \right| > \varepsilon \right] \leq \\ &\limsup_{k\to\infty} P \left[\left| \int_0^t \left(\sigma \left(s, \hat{X}_s^{n_k}\right) - \sigma \left(s, \hat{X}_s\right) \right) d\hat{B}_s^{n_k} \right| > \tfrac{\varepsilon}{2} \right] + \\ &\limsup_{k\to\infty} P \left[\left| \int_0^t \sigma \left(s, \hat{X}_s\right) d\hat{B}_s^{n_k} - \int_0^t \sigma \left(s, \hat{X}_s\right) d\hat{B}_s \right| > \tfrac{\varepsilon}{2} \right] \end{aligned}$$

D'aprés le théorème limite de Skorokhod[[19] page 32]ou le lemme 3,de chapitre 2 en [15], le deuxiéme terme tend vers 0.
Soit $\sigma^\delta (t, x) = \delta^{-d} \varphi (x/\delta) * \sigma (t, x)$ telle que $*$ la convolution dans $\mathbb{R}^d$ et φ une fonction indéfiniment différentiable à support dans la boule d'unité telle que $\int \varphi (x) dx = 1$.

on applique les inégalités de Doob et Chebychev on obtient :

$$P\left[\left|\int_0^t\left(\sigma\left(s,\hat{X}_s^{n_k}\right)-\sigma\left(s,\hat{X}_s\right)\right)d\hat{B}_s^{n_k}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right]\leq 4/\varepsilon^2 E\left[\int_0^t\left|\sigma\left(s,\hat{X}_s^{n_k}\right)-\sigma\left(s,\hat{X}_s\right)\right|^2 ds\right]\leq$$

$$16/\varepsilon^2\left\{\begin{array}{l} E\left[\int_0^t\left|\sigma\left(s,\hat{X}_s^{n_k}\right)-\sigma^\delta\left(s,\hat{X}_s^{n_k}\right)\right|^2 ds\right]+E\left[\int_0^t\left|\sigma^\delta\left(s,\hat{X}_s^{n_k}\right)-\sigma^\delta\left(s,\hat{X}_s\right)\right|^2 ds\right] \\ +E\left[\int_0^t\left|\sigma^\delta\left(s,\hat{X}_s\right)-\sigma\left(s,\hat{X}_s\right)\right|^2 ds\right] \end{array}\right\}$$

$$=16/\varepsilon^2\left\{I_1+I_2+I_3\right\}$$

D'aprés la contunité de σ^δ en x et la convergence de $\hat{X}^{n_k}$ vers $\hat{X}$ $\hat{P}.p.s$, alors I_2 tend vers 0 tend vers $\infty, \forall\delta>0$.

on connais que $\forall p>1$: $\sup_k E\left[\sup_{t\leq k}\left|\hat{X}_t^{n_k}\right|^p\right]<+\infty$.

alors $\lim_{M\to\infty} P\left[\sup_{t\leq k}\left|\hat{X}_t^{n_k}\right|^p>M\right]=0$.

On suppose que σ^δet σ possédent des supports compacts $[0,T]\times B(0,M)$ par l'appliquation de l'inégalité de Krylov ([15],chapitre 2, théorème 3.4),on obtient :

$I_1+I_3\leq N\left\|\sigma^\delta-\sigma\right\|_{d+1,M}$, telle que N ne dépene pas de δ et k ,et $\|.\|_{d+1,M}$,indique la norme sur$L^{d+1}([0,T]\times B(0,M))$ si δ tend vers 0,on obtient le resultat.

Par la même méthode, on montre la convergence de$\int_0^t b\left(s,\hat{X}_s^{n_k}\right)ds$ vers $\int_0^t b\left(s,\hat{X}_s\right)ds$.

ainsi on arrive à la preuve du théorème.

par utilisation de la même technique on a le théorème suivant.

Théorème 3.3.2 *on suppose $\sigma(t,x)$ et $b(t,x,a)$ satisfont les conditions a) et b),aussi on suppose que $a\to b(t,x,a)$ et continue, si on à l'unicité forte de l'équation (9),alors le resultat de le théorème 3.3.1 reste vrai.*

3.4 Généricité de l'existence et l'unicité

Comme on a vu dans les sections précédentes, l'unicité forte joue un rôle fondamental dans les preuves de plusieures résultats de stabilité . Alors il est naturel de se poser la question sur l'ensemble de toute les bonnes fonctions (σ,b) pour lesquelles l'unicité forte est vérifie pour l'équation différentielle stochastique $e(x,\sigma,b)$.

Une propriété P est générique pour une classe F des équations différentielles stochastiques, si elle est satisfaite par toute équation dans $F - A$, ou A est un ensemble de premiére catégorie (au sense de Baire) dans F. Les résultats des propriétés génériques pour les équations différentielles ordinaires, on peut les voir dans Orlicz [18] et aussi [16]. Pour les équations différentielles stochastiques voir [1],[10]. Dans cette section on va voir que le sous ensemble des coefficients continus et bornés pour lesquels l'unicité forte est vérifié pour $e(x, \sigma, b)$ est un ensemble résiduel . Le preuve est basée essentiellement sur le théorème (2.3.1) . De plus nous n'allons pas utiliser la fonction d'oscillation introduite par Lasota et York dans les équations différentielles ordinaires, et utilisée dans les équations différentielles stochastiques (voir [10]).

on va introduire quelque notations :

$$M^2 = \left\{ \varepsilon : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d ; \text{continue}, \forall T > 0, E\left[\sup_{t \le T} |\varepsilon_t|^2\right] < \infty \right\}$$

on définit une métrique sur M^2par :

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\left(E\left[\sup_{0 \le t \le n} |\varepsilon_t^1 - \varepsilon_t^2|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left(E\left[\sup_{0 \le t \le n} |\varepsilon_t^1 - \varepsilon_t^2|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Par l'utilisation de lemme de Borel-Cantelli, il est facile de voir que (M^2, d) est un espace métrique complet.

soit C_1 l'ensemble de les fonctions continues,bornées $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

on définit une métrique sur C_1comme le suit :

$$\rho_1(b_1, b_2) = \sum_{n \ge 1} 2^{-n} \frac{\|b_1 - b_2\|_{\infty,n}}{1 + \|b_1 - b_2\|_{\infty,n}}$$

telle que

$$\|h\|_{\infty,n} = \sup_{|x| \le n, t \le n} |h(x)|$$

Notons que la métrique $\rho_1$est compatible avec la topologie de la convergence uniforme sur les sous ensembles compcts de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.

Soit C_2 l'ensemble de les fonctions continues, bornées :
$\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r$ muni de la métrique ρ_2.

Il est clair que l'espace $\mathcal{R} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ muni de la métrique produit est un espace métrique complet .
Soit L le sous ensemble de $\mathcal{R}$ qui constitue en les fonctions $h(t,x)$ qui sont Lipschitziennes en ses arguments.

Proposition 3.4.1 *L est un sous ensemble dense dans $\mathcal{R}$.*

Preuve. Par les arguments de troncature et régularisation. ■
Le resultat important de cette section et le suivant.

Théorème 3.4.1

le sous ensemble U de $\mathcal{R}$ constitué de (σ, b) pour lesquelles l' unicité forte est vérifie de $e(x, \sigma, b)$ est un ensemble residuel dans $\mathcal{R}$.

Lemme 3.4.1 *$\forall (\sigma, b) \in L$ et $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ telle que pour tout $(\sigma', b') \in B((\sigma, b), \delta)$*

et toute paire solutions X, Y de $e(x, \sigma', b')$ (définis sur le même espace de probabilité et même Mouvment Brownien) on :
$d(X,Y) < \varepsilon.$

soit Z l'unique solution forte de $e(x, \sigma, b)$ définit sur le même espace de probabilité et même Mouvment Brownien,alors :
$d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$ le résultat suit d'aprés la continuité de Z par rapport aux coefficients, voir(théoréme 2.3.1).

Preuve. de théorème 3.4.1 : ■
on pose $\Im = \bigcap\limits_{k \geq 1} \bigcup\limits_{(\sigma,b) \in L} B((\sigma, b), \delta(1/k))$, $\Im$ est G_δ sous ensemble dense dans l'espace de Baire$(\mathcal{R}, \rho)$, pour tout $(\sigma, b) \in \Im$ l'unicité forte de $e(x, \sigma, b)$ est vérifie, alors U est un sous ensemble résiduel dans $\mathcal{R}$.

Remarque 3.4.1

M.T.Barlow [2] a démontré que $\mathcal{R} - \Im$ est non vide.

Bibliographie

[1] K.Bahlali, B.Mezerdi, Y.Ouknine, Some generic properties of stochastic differential equations. Stochastics & Stoch.Reports, Vol.57, pp.235-245 (1996).

[2] K.Bahlali, B. Mezerdi and Y. Ouknine, Pathwise uniqueness and approximation of solutions of stochastic differential equations, Sem.de proba., vol. XXXII, Lect. Notes in Math. 1686, Springer Verlag (1998), pp. 166-188.

[3] M.T Barlow, One dimensional stochastic différential equations with no strong solution.J.London Math.Soc.(2) 26 ;335-347.

[4] E.Coddington, N.Levinson, Theory of ordinary differential equation. McGraw-Hill New-york (1955).

[5] J.Dieudonne, Choix d'oeuvres mathématiques. Tome 1, Hermann Paris (1987).

[6] N.El Karoui, D.Hun Nguyen,M.Jeanblanc Pique, Compactification methods in the control of degenerate diffusions : exitence of an optimal controle. Stochastics, Vol.20, pp.169-219 (1987).

[7] M.Erraoaui,Y.Ouknine, Approximation des equations differentielles stochastiques par des equations a retard. Stochastics & Stoch. Reports Vol. 46,pp.53-63 (1994).

[8] M.Erraoaui,Y.Ouknine, Sur la convergence de la formule de Lie-Trotter pour les équations différentielles stochastiques.Annales de Clermont 2,série probabilités.

[9] T.C.Gard, A general uniqueness theorem for solutions of stochastic differential equations. SIAM jour.control & optim., vol .145,3,pp.445-457.

[10] I.Gyongy, The stability of stochastic partial différential equations and applications. Stochastic & Stoch. report, vol .27,pp.129-150 (1989).

[11] A.J.Heunis, On the prevalence of stochastic différential equations with unique strong solutions .The Annals of proba., vol.14,2,pp 653-662 (1986).

[12] N.Ikeda,S.Watanabe, Stochastic différential equations and diffusion processes.North-Holland, Amestardam (Kodansha Ltd, Tokyo) (1981).

[13] H.Kaneko,S.Nakao, A note on approximation of stochastic différential equations, Séminaire de proba.XXII, Lect.notes in math.1321, pp.155-162.Spinger Verlag (1988).

[14] I.karatzas, S.E.Sherve, Brownain motion and stochastic calculus.Springer Verlag, New-York Berlin Heidelberg(1988).

[15] S. Kawabata, On the sucssesive approximation of solutions of stochastic differential equations. Stochastics &stoch.reports, vol.30, pp.69-84(1990).

[16] N.V.Kylov : Controlled diffusion processes.SpringerVerlag,New-York Verlag,New-YorkBerlinHeidelberg (1980).

[17] A.Lazota, J.A.York, The generic property of existence of solutions of differential equations in Banach space. J.Diff.Equat.13 (1973) ,pp.1-12.

[18] S. Meleard :Martingale measure approximation,application to the control of diffusions. Prépublication du labo.de proba.,univ.Paris VI (1992).

[19] W.Orlicz : Zur theorie der Differentialgleichung y'=f(z,y). Bull. Acad. Polon. Sci.Ser.A (1932), pp.221-228.

[20] A.V.Skorokhod :Studies in the theory of random processes.Addison Westly (1965) originally published in Kiev in (1961).

[21] D.W.Strook, S.R.S Varadhan : Mutidimensional diffusios processes .Springer Verlag Berlin (1979).

[22] T.Yamada :On the seccessive approximation of solutions of stochastic différential equations .Jour.Math.Kyoto Univ. 21(3),pp.501-511 (1981).

[23] T.Yamada ,S.Watanabe :On the uniqueness of solutions of stochastic différential equation.Jour.Math.Kyoto Univ.11n1,pp.155-167 (1971).