

MEMOIRE

Présenté à

L'Université Mohamed Khider Biskra
Faculté des Sciences et des Sciences de l'Ingénieur
Département de Génie Mécanique

En vue de l'obtention du titre de

Magistère en Génie Mécanique

Option

Construction Mécanique

Par

BERKANE Houda

Sujet :

**INFLUENCE DE L'EFFET THERMIQUE SUR LES
CARACTERISTIQUES DE LA COUCHE LIMITE
LAMINAIRE SUR UNE PAROI LISSE**

Soutenu le : 04 Mai 2005, Devant la commission d'examen composée de :

Dr. BELBACHA Eldjemaï	Maître de conférences à l'Univ. de Batna	Président
Dr. ATMANI Rachid	Maître de conférences à l'Univ. de Biskra	Rapporteur
Dr. HECINI Mabrouk	Maître de conférences à l'Univ. de Biskra	Examineur
Dr. MOUMMI Nouredine	Maître de conférences à l'Univ. de Biskra	Examineur
Mr. BRIMA A/Hafid	Chargé de cours à l'Univ. de Biskra	Invité

REMERCIEMENTS

Le moment est venu d'exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur, Dr. *R. ATMANI*, pour son enthousiasme et son soutien sans faille durant la réalisation de ce mémoire. Il a toujours été disponible pour me prodiguer ses conseils.

Je tiens également à remercier chaleureusement Mr. *A. BRIMA* qui m'a fait découvrir la mécanique des fluides. Je le remercie également pour la collaboration fructueuse que nous avons eu, pour son soutien dans les moments difficiles, et pour ses nombreux conseils qui m'ont été d'un grand intérêt.

J'exprime ma profonde gratitude au Dr. *J. BELBACHA* qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire. Je lui suis très reconnaissante pour l'attention qu'il a porté à ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements au Dr. *M. HECINI* et au Dr. *N. MOUMMI* pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à ce mémoire, en acceptant de l'examiner.

L'occasion m'est donnée ici de remercier ma sœur *Hassiba*, M^{elles}. *R. Fouzia*, et *G. Soufia* pour toute l'aide qu'elles m'ont apporté, notamment en Mathématiques et Analyse Numérique, et pour leur disponibilité.

Je souhaite remercier aussi M^{me}. *A. BACHA*, M^{rs}. *E. ACHOURI*, *Y. DJABLOUNE*, *D. YAHIA*, pour leur aide en programmation.

J'exprime ma gratitude à ma famille qui m'a toujours soutenue et encouragée dans la voie que je m'étais fixée. Je remercie particulièrement mes parents qui m'ont stimulée et encouragée pendant mes études.

Mes vifs remerciements vont également à tous mes enseignants en graduation, et en post graduation. J'adresse un amical remerciement le plus sincère à tous mes collègues et mes amis, notamment, *M. Zineb*, *S. SALIMA*, *Z. Nafissa*, *B. Sonia*, *B. Siham*, *D. Oula*, pour leur sympathie et leur soutien.

TABLE DES MATIERES

Remerciements	i
Table des matières	ii
Liste des figures	vi
Liste des tableaux	ix
Nomenclature	x
Introduction	01

Chapitre 1 : PROPRIETES GENERALES DES FLUIDES ET MODELES D'ECOULEMENTS

1.1 Propriétés physiques d'un fluide	03
1.1.1 Notion de fluide.....	03
1.1.2 Viscosité	03
1.1.3 Conductivité thermique.....	05
1.2 Types d'écoulements	07
1.2.1 Ecoulements incompressibles et compressibles.....	07
1.2.2 Ecoulements laminaires et turbulents.....	07
1.2.3 Ecoulements stationnaires et instationnaires.....	08
1.2.4 Ecoulements unidimensionnels et bidimensionnels.....	08
1.3 Equations fondamentales	09
1.3.1 Equation de continuité.....	09
1.3.2 Equation de quantité de mouvement.....	10
1.3.3 Equation d'énergie	12
1.4 Effet de fluide visqueux	14
1.4.1 Hypothèses de "Prandtl 1904".....	14
1.4.2 Description de l'écoulement autour d'une paroi.....	14

Chapitre 2 :
COUCHE LIMITE LAMINAIRE : CONCEPTS DYNAMIQUE
ET THERMIQUE

2.1 Concept de couche limite.....	15
2.1.1 Couche limite dynamique.....	15
2.1.2 Couche limite thermique.....	16
2.1.3 Bilan advection-diffusion en couche limite isotherme.....	16
2.1.4 Bilan convection-diffusion en couche limite thermique.....	17
2.2 Paramètres caractéristiques de couche limite.....	18
2.2.1 Epaisseurs.....	18
2.2.1.1 Epaisseur conventionnelle de couche limite dynamique.....	18
2.2.1.2 Epaisseur conventionnelle de couche limite thermique.....	18
2.2.1.3 Epaisseur de déplacement.....	19
2.2.1.4 Epaisseur de quantité de mouvement.....	20
2.2.1.5 Epaisseur d'énergie cinétique, d'enthalpie et d'enthalpie d'arrêt.....	20
2.2.1.6 Facteur de forme.....	20
2.2.2 Frottements.....	21
2.2.2.1 Frottement local.....	21
2.2.2.2 Traînée visqueuse.....	21
2.2.2.3 Coefficient local de frottement-Coefficient de traînée.....	22
2.2.3 Transfert thermique.....	22
2.2.3.1 Coefficient pariétal de transfert de chaleur.....	22
2.2.3.2 Nombre de Nusselt.....	22
2.3 Equations de couche limite dynamique isovolume.....	23
2.3.1 Configuration de la couche limite.....	23
2.3.2 Forme adimensionnelle des équations locales.....	24
2.3.3 Hypothèses et modèle de "Prandtl".....	25
2.3.4 Couplage fluide parfait-couche limite.....	26

2.4 Equations de couche limite thermique.....	26
2.4.1 Situation du problème.....	26
2.4.2 Hypothèse fondamentale de couche limite thermique.....	27
2.4.3 Analyse adimensionnelle : équations générales de couche limite thermique	28
2.4.4 Couche limite de convection forcée en fluide incompressible.....	30

Chapitre 3 :

CALCUL DE COUCHE LIMITE DYNAMIQUE ISOVOLUME

3.1 Solution de Blasius des équations de couche limite.....	31
3.1.1 Situation du problème et mise en équation.....	31
3.1.2 Méthodes de résolution du problème.....	34
3.1.3 Présentation de l'organigramme de calcul.....	37
3.1.4 Evaluation de la couche limite dynamique.....	38
3.1.4.1 Evaluation des épaisseurs intégrales	39
3.1.4.2 Evaluation de la contrainte pariétale et du coefficient de frottement..	41
3.1.4.3 Evaluation de la traînée pariétale et du coefficient de traînée.....	41
3.2 Solution par la méthode intégrale des équations de la couche limite.	42
3.3 Contrôle actif de la couche limite dynamique.....	48
3.3.1 Aspiration et Soufflage avec une vitesse uniforme.....	48
3.3.2 Aspiration et Soufflage avec un profil linéaire de vitesse.....	50
3.4 Résultats et commentaires.....	52
3.4.1 Représentation graphique des résultats.....	52
3.4.1.1 Epaisseur conventionnelle de la couche limite dynamique.....	52
3.4.1.2 Epaisseur de déplacement.....	52
3.4.1.3 Epaisseur de quantité de mouvement.....	53
3.4.1.4 Coefficient de frottement.....	53
3.4.2 Commentaires et analyse des résultats.....	54

Chapitre 4 :
CALCUL DE COUCHE LIMITE THERMIQUE
EN CONVECTION FORCEE

4.1	Présentation du problème.....	56
4.2	Mise en équation.....	56
4.3	Méthodes de résolution.....	59
4.4	Convection forcée à grande vitesse.....	60
4.4.1	Solution en paroi adiabatique.....	61
4.4.1.1	Solution analytique.....	63
4.4.1.2	Solution numérique.....	65
4.4.2	Solution.....	69
4.4.3	Solution en paroi à flux de chaleur constant.....	71
4.5	Convection forcée à basse vitesse.....	76
4.5.1	Solution en paroi isotherme.....	76
4.5.1.1	Solution numérique.....	76
4.5.1.2	Solution analytique en paroi isotherme.....	77
4.5.2	Solution numérique en paroi à flux de chaleur constant.....	79
4.6	Interpolation des résultats.....	81
4.6.1	Evaluation des épaisseurs de la couche limite thermique.....	81
4.6.2	Rapport des épaisseurs \mathfrak{R}	86
4.7	Contrôle actif de la couche limite thermique.....	88
4.7.1	En convection forcée à grande vitesse.....	88
4.7.2	En convection forcée à basse vitesse.....	91
4.8	Commentaires et analyse des résultats	93
4.9	Conclusion	97
	CONCLUSION GENERALE	98
	BIBLIOGRAPHIE.....	

LISTE DES FIGURES

	page
1.1 Schéma de l'écoulement de couette plan.	04
1.2 Schéma de conduction thermique pure entre deux plans parallèles.	05
2.1 Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane.	15
2.2 Couche limite thermique sur une plaque plane.	16
2.3 Advection-Diffusion de quantité de mouvement en région de couche limite	17
2.4 Déficit de débit et épaisseur de déplacement.	19
3.1 Couche limite sur une plaque plane à incidence nulle dans un courant uniforme à l'infini : (a) Profils de vitesse ; (b) Déflexion des lignes de courant.	32
3.2 Représentation de la méthode de Moitié intervalle.	36
3.3 Organigramme de résolution de l'équation de "Blasius" pour la couche limite dynamique le long d'une plaque plane.	37
3.4 Distribution des vitesses dans la couche limite dynamique le long d'une plaque plane.	38
3.5 Les fonctions de Blasius, f et f'' .	38
3.6 Contrôle actif avec une vitesse uniforme V_0 d'une couche limite dynamique sur une plaque plane : (a) Aspiration, (b) Soufflage.	48
3.7 Soufflage avec un profil de vitesse linéaire d'une couche limite dynamique sur une plaque plane.	51
3.8 Influence du contrôle actif sur l'épaisseur conventionnelle de la couche limite dynamique δ le long d'une plaque plane à zéro incidence.	52
3.9 Influence du contrôle actif sur l'épaisseur de déplacement δ_1 en couche limite sur une plaque plane à zéro incidence.	52
3.10 Influence du contrôle actif sur l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 en couche limite sur une plaque plane à zéro incidence.	53

3.11	Influence du contrôle actif sur le coefficient de frottement en couche limite sur une plaque plane à zéro incidence.	53
4.1	Solution numérique du problème ordinaire avec conditions aux limites.	60
4.2	Distribution de températures sur une couche limite thermique le long d'une plaque plane adiabatique.	61
4.3	Organigramme de résolution de l'équation de chaleur.	68
4.4	Distribution de température en couche limite sur une plaque plane adiabatique avec dissipation pour divers nombres de Prandtl.	69
4.5	Distribution de température sur une couche limite thermique le long d'une paroi isotherme.	69
4.6	Distribution de température en couche limite sur plaque plane isotherme avec dissipation pour divers nombres de Prandtl.	71
4.7	Distribution de température en couche limite sur une plaque plane avec un flux de chaleur en convection forcée à grande vitesse pour divers nombres de Prandtl.	75
4.8	Distribution de température en couche limite sur plaque plane isotherme sans dissipation pour divers nombres de Prandtl.	78
4.9	Distribution de température en couche limite sur plaque plane isotherme sans dissipation pour un nombre de Prandtl égale à l'unité.	78
4.10	Distribution de température en couche limite sur plaque plane avec flux de chaleur sans dissipation.	80
4.11	Influence du nombre de Prandtl sur l'épaisseur de couche limite thermique le long d'une paroi adiabatique en convection forcée à grande vitesse.	83
4.12	Influence du nombre de Prandtl sur l'épaisseur de couche limite thermique le long d'une paroi isotherme.	83
4.13	Influence du nombre de Prandtl sur l'épaisseur de couche limite thermique le long d'une paroi avec flux de chaleur.	84
4.14	Influence du nombre de Prandtl sur l'épaisseur d'enthalpie de couche limite thermique le long d'une paroi isotherme.	85
4.15	Influence du nombre de Prandtl sur l'épaisseur d'enthalpie de couche limite thermique le long d'une paroi avec flux de chaleur.	85

4.16	Influence de types de paroi et du nombre de Prandtl sur le rapport des épaisseurs dynamique et thermique en convection forcée à grande vitesse pour les métaux liquides.	86
4.17	Influence de types de paroi et du nombre de Prandtl sur le rapport des épaisseurs dynamique et thermique en convection forcée à grande vitesse pour les liquides et les gaz.	86
4.18	Influence de types de paroi et du nombre de Prandtl sur le rapport des épaisseurs dynamique et thermique en convection forcée à basse vitesse pour les métaux liquides.	87
4.19	Influence de types de paroi et du nombre de Prandtl sur le rapport des épaisseurs dynamique et thermique en convection forcée à basse vitesse pour les liquides et les gaz.	87
4.20	Distribution de température dans une couche limite le long d'une paroi adiabatique avec dissipation en présence du contrôle ($Pr \geq 1$).	88
4.21	Distribution de température dans une couche limite le long d'une paroi adiabatique avec dissipation en présence du contrôle ($Pr < 1$).	88
4.22	Distribution de température dans une couche limite sur une paroi isotherme avec dissipation en présence du contrôle ($Pr \geq 1$).	89
4.23	Distribution de température dans une couche limite sur une paroi isotherme avec dissipation en présence du contrôle ($Pr < 1$).	89
4.24	Distribution de température dans une couche limite sur une paroi avec flux de chaleur avec dissipation en présence du contrôle ($Pr \geq 1$).	90
4.25	Distribution de température dans une couche limite sur une paroi avec flux de chaleur avec dissipation en présence du contrôle ($Pr < 1$).	90
4.26	Distribution de température dans une couche limite sur une paroi isotherme sans dissipation en présence du contrôle ($Pr \geq 1$).	91
4.27	Distribution de température dans une couche limite sur une paroi isotherme sans dissipation en présence du contrôle ($Pr < 1$).	91
4.28	Distribution de température dans une couche limite sur une paroi avec flux de chaleur sans dissipation en présence du contrôle ($Pr \geq 1$).	92
4.29	Distribution de température dans une couche limite sur une paroi avec flux de chaleur sans dissipation en présence du contrôle ($Pr < 1$).	92

LISTE DES TABLEAUX

	Page
3.1 Comparaison des résultats de couche limite sur plaque plane obtenus par deux méthodes différentes.	47
3.2 Comparaison des caractéristiques de la couche limite dynamique en absence et en présence du contrôle avec une vitesse uniforme.	50
3.3 Comparaison des caractéristiques de la couche limite dynamique en absence et en présence du contrôle avec un profil de vitesse linéaire.	51
4.1 le rapport pour les divers milieux fluides et différents types de paroi en convection forcée dans une couche limite laminaire sur une plaque plane avec et sans contrôle actif.	82

NOMENCLATURE

Caractères usuels

a	diffusivité thermique	m^2 / s
c	célérité du son	m / s
C_p	chaleur spécifique à pression constante	$m^2 / s^2 k$
D	traînée visqueuse par unité d'envergure	kg / s^2
$\overline{\overline{D}}$	tenseur de taux de déformations	$1 / s$
e	énergie interne par unité de masse	m^2 / s^2
f	fonction de Blasius	
\vec{f}	vecteur des forces appliquées au fluide	kgm / s^2
g	accélération de la pesanteur	m / s^2
H	facteur de forme	
h	enthalpie par unité de masse	m^2 / s^2
k	coefficient de transfert de chaleur pariétal	$w / m^2 sk$
k_1	constante d'intégration	
L	longueur de la plaque	m
m	la masse	kg
\vec{n}	vecteur unitaire normal à un élément de surface	
p	pression	kg / ms^2
$\overline{\overline{P}}$	tenseur des contraintes totales	kg / ms^2
Q	flux de chaleur	$w / m^2 s$
\vec{q}	vecteur densité de flux de chaleur	m^2 / s^2
\mathfrak{R}	rapport des épaisseurs dynamique et thermique	
r	facteur thermique	
S	distance entre deux plans parallèles	m
ds	élément de surface	m^2
T	température dimensionnelle	k

T_f	température de frottement	k
t	le temps	s
U, V	composantes de vitesse	m/s
\vec{v}	vecteur unitaire tangent à un élément de surface	
w	envergure de la plaque	m

Caractères grecs

γ	coefficient de dilatation cubique à pression constante	
δ	épaisseur de la couche limite dynamique	m
δ_1	épaisseur de déplacement	m
δ_2	épaisseur de quantité de mouvement	m
δ_3	épaisseur d'énergie cinétique	m
δ_T	épaisseur de la couche limite thermique	m
Δ	épaisseur d'enthalpie	m
Δ_2	épaisseur d'enthalpie d'arrêt	m
$\varepsilon, \varepsilon'$	nombres infiniment petits	
λ	conductivité thermique	w/mks
μ	viscosité dynamique	kg/ms
ν	viscosité cinématique	m^2/s
η	coordonnée réduite	
θ	température adimensionnelle	
ρ	masse volumique	kg/m^3
Σ	surface de contrôle	m^2
τ	tenseur des contraintes visqueuses	kg/ms^2
Ω	volume de contrôle	m^3
ϕ	densité de flux par unité de surface	m^2/s^2
ψ	fonction de courant	m^2/s
Φ	fonction de dissipation visqueuse	$1/s^2$

Nombres sans dimensions

C_f	coefficient de frottement local	$\tau_p/(1/2)\rho U_E^2$
C_D	coefficient de traînée	$D/(1/2)\rho \Sigma U_\infty^2$
Eu	nombre d'Euler	$\rho U_0^2/C_p T_0$
Ec	nombre d'Eckert	$U_0^2/C_p T_0$
Fr	nombre de Froude	$U_0^2/g_0 L$
Gr	nombre de Grashof	$g\alpha\Delta T L^3/\nu^2$
M	nombre de Mach	V/c
Nu	nombre de Nusselt	kL/λ
Pe	nombre de Peclet	$Pr \cdot Re$
Pr	nombre de Prandtl	$\mu C_p/\lambda$
Re	nombre de Reynolds	$\rho U_0 L/\mu$

Indices

E	relatif à l'interface
L	relatif à une valeur globale
x	relatif à une valeur locale
\max	relatif à une valeur maximale
p	relatif à la paroi
∞	loin de la paroi

INTRODUCTION

Un des problèmes que doit résoudre la mécanique des fluides est celui de l'action d'un courant sur un solide. En effet, plongé dans un fluide en mouvement, un solide subit de la part de celui-ci une action sur la surface de contact dont la détermination est de première importance dans des domaines aussi variés comme la propulsion des navires et des avions, le mouvement des projectiles, les turbomachines...etc. Car toutes les réalisations techniques baignent dans des fluides comme l'air, l'eau et les fluides industriels. Ce problème, dit de la résistance des fluides.

La première approximation de la mécanique des fluides (fluide parfait), conduit au paradoxe d'**Alembert** qui, pour un mouvement stationnaire, s'annonce de la façon suivante: La résultante R des pressions du fluide sur un obstacle est perpendiculaire à la vitesse U_∞ de l'écoulement à l'infini, ce qui est contraire à l'observation courante.

La deuxième approximation (fluide visqueux), conduit à des équations plus complexes et on ne connaît que peu de solutions exactes. En particulier, on aboutit pratiquement à la résolution du problème de la résistance des fluides, par une schématisation qui est l'introduction de la notion de couche limite.

Le concept de la couche limite est introduit par "**Prandtl**" qui montre que les écoulements visqueux, pour la plupart, peuvent être découpés en deux zones :

- Une zone proche à la paroi où les forces visqueuses et d'inertie sont du même ordre de grandeur ; appelée région de couche limite,
- la région extérieure où les forces visqueuses sont négligeables devant les forces d'inertie.

Ce concept impose de regarder l'écoulement, et donc de le modéliser différemment en fonction de la région qu'on désire étudier, les ordres de grandeur des principaux termes étant différents.

Le transfert thermique entre le fluide et la paroi est d'une importance

primordiale dans la couche limite ; il existe également une zone mince près de la paroi où les variations de température sont rapides ; c'est la couche limite thermique.

Dans cette étude on s'intéresse à l'influence de l'effet thermique sur les caractéristiques de la couche limite laminaire pour des fluides incompressibles sur une paroi lisse. L'effet de température se traduit par : le type de paroi, et la valeur du nombre de "Prandtl" qui permet de choisir le matériau le mieux approprié à une application faisant intervenir un transfert diffusif de chaleur dans un fluide en mouvement.

Pour arriver à cet objectif on propose les chapitres suivants :

Dans le premier chapitre on présente une étude théorique sur quelques propriétés du fluide, et des différents types d'écoulements puis un rappel des équations fondamentales de la mécanique des fluides.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la couche limite laminaire tant au niveau de l'écoulement dynamique que thermique, et les différentes caractéristiques de ces couches. Les idées de base sur lesquelles repose le concept de la couche limite sont exposées avec les simplifications des équations conduisant aux formes régissant les écoulements de type couche limite.

A partir du troisième chapitre nous résolvons les équations de la couche limite dynamique à l'aide de la méthode de "Blasius" et de la méthode approchée. Ensuite on détermine les caractéristiques de cette couche. Le problème est traité en présence et en absence du contrôle actif.

Une fois que le problème dynamique est résolu, on peut résoudre l'équation d'énergie en convection forcée aux grandes et basses vitesses, pour divers types de parois et différents nombres de "Prandtl".

Une conclusion générale est donnée pour commenter les résultats obtenus et pour proposer des perspectives à notre étude.

Chapitre 1 :

PROPRIETES GENERALES DES FLUIDES ET MODELES D'ECOULEMENTS

1.1 Propriétés physiques d'un fluide.

1.1.1 Notion de fluide.

Un fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. Un fluide est donc un milieu continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

Les liquides et gaz habituellement étudiés sont isotropes, mobiles et visqueux. La propriété physique qui permet de faire la différence entre les deux est la compressibilité.

- L'isotropie assure que les propriétés sont identiques dans toutes les directions de l'espace.
- la mobilité fait qu'ils n'ont pas de forme propre et qu'ils prennent la forme du récipient qui les contiennent.
- la viscosité caractérise le fait que tout changement de forme d'un fluide réel s'accompagne d'une résistance (frottements).

1.1.2 Viscosité.

La notion de viscosité est associée à la résistance qu'oppose tout fluide à sa mise en mouvement. Pour préciser cette propriété de façon plus quantitative, nous considérons l'expérience de "Couette" en écoulement plan. Telle qu'elle est schématisée à la figure (1.1), cette expérience concerne un fluide visqueux disposé entre deux plans parallèles distants d'une hauteur S . Elle consiste à déplacer

relativement à l'autre, l'une des deux parois d'un mouvement permanent de translation rectiligne dans son propre plan. Pour simplifier, on suppose la paroi inférieure fixe et la paroi supérieure mobile à la vitesse U_0 .

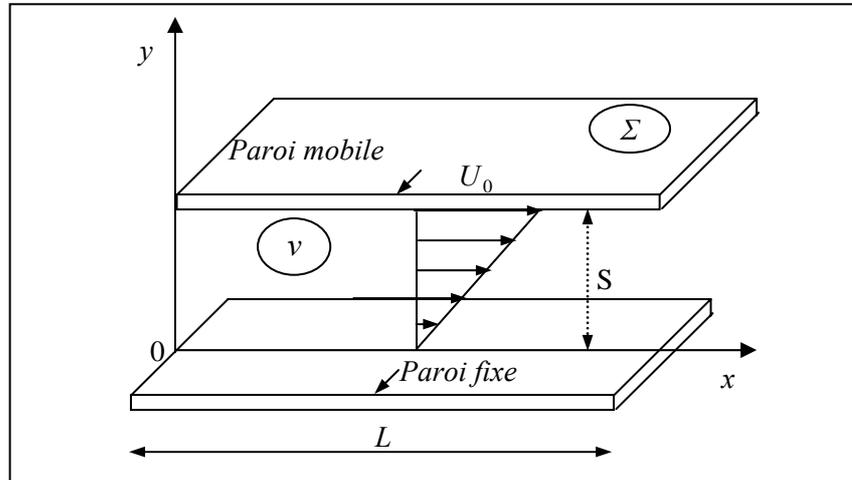


Fig.1.1: Schéma de l'écoulement de couette plan.

En l'absence de toute autre force extérieure (gravité, pression), le mouvement du fluide résulte exclusivement du déplacement du plan mobile.

En régime permanent, l'expérience révèle, pour certains fluides, que le profil de vitesses qui s'établit entre les deux plaques est linéaire. En outre pour maintenir le mouvement uniforme de la paroi supérieure, il faut exercer sur une aire Σ de celle-ci une force tangentielle dont le module F est tel que :

$$F/\Sigma \propto U_0/S$$

En désignant par μ le coefficient de proportionnalité appelé *viscosité dynamique* du fluide, on écrira :

$$\frac{F}{\Sigma} = \mu \frac{U_0}{S} \quad (1.1)$$

Cette relation s'applique bien aux fluides usuels. Elle est à l'origine d'un *comportement rhéologique* que nous qualifierons de *newtonien*.

On introduit également le coefficient de *viscosité cinématique* :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.2)$$

1.1.3 Conductivité thermique.

Rappel des différents modes de transfert de chaleur.

Si l'on en juge par leurs origines physiques, deux modes fondamentaux de transfert de chaleur peuvent être distingués :

- *Le rayonnement*, qui repose sur un mécanisme de propagation énergétique à distance par ondes électromagnétiques émises par des corps chauds. Ce phénomène intéresse des applications où les écarts de température sont élevés.

- *La conduction*, qui résulte d'un transfert de proche en proche par agitation moléculaire à travers une surface d'échange.

Selon l'usage pratique du thermicien, on introduit également la notion de *convection thermique* chaque fois qu'un échange de chaleur siège dans un fluide en mouvement. On distingue alors différents modes de convection selon que ce mouvement résulte du seul échauffement du milieu (*convection naturelle*) ou de forces d'origines différentes (*convection forcée et convection mixte*).

Manifestation élémentaire de la conduction.

Nous considérons (figure 1.2), un fluide au repos entre deux parois planes parallèles distantes de S . Pour tout instant $t < 0$, le système fluide -plaques est en équilibre thermique à la température T_0 .

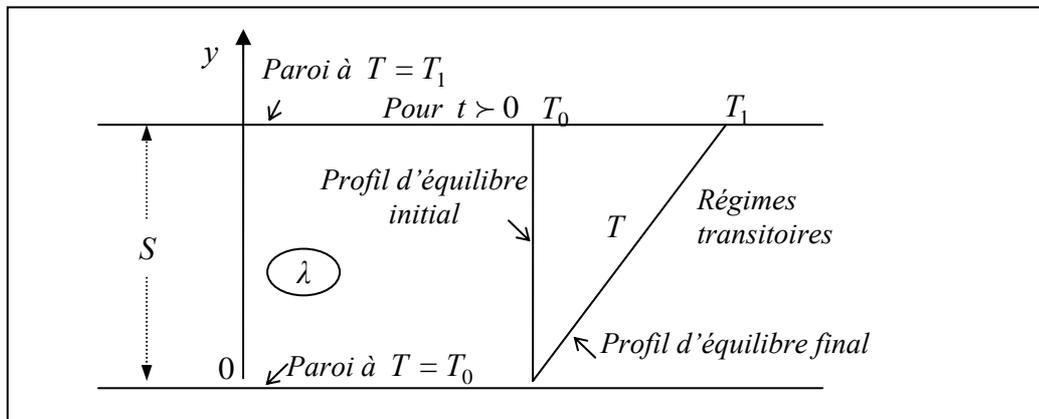


Fig.1.2 : Schéma de conduction thermique pure entre deux plans parallèles [04].

A l'instant $t=0$, la plaque supérieure est portée à une température $T_1 \neq T_0$, condition qui est maintenue inchangée pour tout $t > 0$. On suppose que l'écart de température $|T_1 - T_0|$ est tel qu'il n'engendre aucun mouvement du fluide à l'échelle macroscopique, de sorte que l'échange de chaleur est de type purement conductif. Après une phase transitoire au cours de laquelle la différence de température diffuse à travers l'épaisseur du fluide, un régime permanent est atteint (figure 1.2). Le nouvel état thermique qui s'établit entre plaques se caractérise par :

- Une distribution linéaire de champ de température :

$$\frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \frac{y}{S}$$

- Un flux de chaleur entre plaques, dont l'intensité Q à travers une surface Σ parallèle aux plaques est telle que :

$$Q/\Sigma \simeq |T_1 - T_0|/S$$

Cette dernière relation permet d'introduire un coefficient de proportionnalité positif λ appelé *conductivité thermique* du fluide, tel que :

$$\frac{Q}{\Sigma} = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{S} \quad (1.3)$$

Comme pour la relation de "Newton" (1.1), l'équation (1.3) doit être généralisée à un transfert de chaleur s'exerçant selon une direction quelconque. Cela conduit à introduire le vecteur densité de flux de chaleur \vec{q} représentant le flux de chaleur par unité de surface, dont l'expression est alors donnée par *la loi de "Fourier"* :

$$\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}T}$$

Il est possible d'introduire un coefficient appelé *diffusivité thermique* et défini par :

$$a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$$

où C_p représente la chaleur spécifique à pression constante.

La diffusivité thermique et la viscosité cinématique ayant mêmes dimensions, leur rapport définit une grandeur adimensionnelle appelée nombre de "Prandtl":

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu C_p}{\lambda}$$

Le nombre de "Prandtl" est une propriété physique du fluide dont la valeur permet de comparer les transferts de quantité de mouvement associés aux forces visqueuses aux transferts de chaleur par conduction.

1.2 Types d'écoulements.

1.2.1 Ecoulements incompressibles et compressibles.

On dit qu'un fluide est incompressible si sa masse spécifique varie faiblement avec la pression ou la température. Pour juger de l'effet de compressibilité dans un fluide en mouvement il faut faire intervenir à la fois la célérité du son et la vitesse de l'écoulement. Le rapport de ces deux grandeurs définit un paramètre adimensionnel appelé *nombre de "Mach"* :

$$M = \frac{V}{c} \tag{1.4}$$

Le nombre de Mach permet de distinguer les régimes *subsoniques* ($M < 1$), *supersonique* ($1 < M \lesssim 5$) et *hypersonique* ($M \gtrsim 5$). En outre, pour des écoulements à nombre de Mach inférieur à 0.2 le résultat du calcul de la vitesse fait en considérant le fluide incompressible ne diffère pas de plus de 1% de la valeur trouvée en prenant en compte la compressibilité [03]. C'est la raison pour laquelle on distingue au sein du régime subsonique, la plage des écoulements incompressibles et celle des écoulements où les effets de compressibilité dû au mouvement ne peuvent être négligés.

1.2.2 Ecoulements laminaires et turbulents.

On dit qu'un écoulement est *laminaire* lorsque le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée. L'écoulement est *turbulent* lorsque le déplacement est irrégulier et que des fluctuations aléatoires de vitesse se superposent

au mouvement moyen du fluide. Les deux types d'écoulements peuvent être observés par exemple dans le cas d'un filet d'eau s'échappant d'un simple robinet. Lorsque la vitesse est faible, l'écoulement est régulier et laminaire. Au contraire, pour des débits importants et à vitesse plus élevée, on constate que les filets d'eau oscillent autour d'une position moyenne et l'écoulement prend un aspect irrégulier et turbulent.

On établit un critère qui permet de classer a priori les écoulements, c'est la valeur de *nombre de Reynolds*. Dans un écoulement à faible valeur de "Reynolds" ($Re \ll 1$), les écoulements sont observés aux faibles vitesses. Il s'agit en général d'écoulements très stables, aux profils bien définis, appelés écoulement *rampant* lorsque l'écoulement qualifié de laminaire quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds (jusqu'à $2000 \div 2300$). Au contraire, dans les écoulements à grand nombre de "Reynolds" ($Re \gg 1$), les écoulements correspondants sont beaucoup moins stables, ils sont observés aux fortes vitesses, sont des écoulements turbulents.

1.2.3 Ecoulements stationnaires et instationnaires.

On dit qu'un écoulement est *stationnaire* si toutes les variables décrivant le mouvement sont indépendantes du temps. Ainsi la pression p , la vitesse V , la densité ρ , l'énergie e d'un écoulement stationnaire sont des quantités indépendantes du temps. Un écoulement est dit *instationnaire* si les variables décrivant le mouvement dépendent du temps.

1.2.4 Ecoulements unidimensionnels et bidimensionnels.

Dans certains cas particuliers intéressants, le problème physique réel tridimensionnel peut se ramener à l'étude d'un écoulement théorique bidimensionnel ou unidimensionnel. C'est pour ça, on peut considérer l'écoulement de grande étendue suivant l'axe des (z) comme un écoulement bidimensionnel suivant les axes des (x) et (y), et toutes les grandeurs cinématiques ne dépendent alors que de deux variables d'espace.

1.3 Equations fondamentales.

Dans son ensemble, la mécanique des fluides est gouvernée par trois équations fondamentales : l'équation de continuité, l'équation de quantité de mouvement et l'équation d'énergie.

1.3.1 Equation de continuité.

Considérons un volume matériel Ω . La masse contenue dans ce volume est :

$$m = \int_{\Omega} \rho dv$$

où ρ désigne la densité locale. Si le volume matériel ne contient ni sources ni puits, la masse qui se trouve dans Ω est constante et on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho dv = 0 \quad (1.5)$$

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de transport au volume Ω :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho dv = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \iint_{\Sigma} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds$$

Σ est la surface de contrôle. D'après (1.5) on peut écrire :

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \iint_{\Sigma} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad (1.6)$$

Si le volume Ω ne contient pas de surface de discontinuité, l'intégrale sur Σ peut être remplacée par une intégrale de volume et "le théorème de Green-Ostrogradsky" permet d'écrire :

$$\iint_{\Sigma} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) dv$$

dans ces conditions, l'équation (1.6) devient :

$$\iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V}) \right] dv = 0$$

Le volume d'intégration est arbitraire et par conséquent l'intégrale doit être identiquement nulle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad (1.7)$$

L'équation (1.7) est souvent appelée *équation de continuité* (forme différentielle).

1.3.2 Equation de quantité de mouvement.

Pour un volume arbitraire Ω , la quantité de mouvement, définie pour une particule de fluide par le produit mV , doit être conservée. Cette conservation, sous sa forme générale, peut être exprimée par l'équation suivante, sous forme intégrale :

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot \vec{V}) dv + \iint_{\Sigma} (\rho \vec{v} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{V} ds = \iiint_{\Omega} \rho \cdot \vec{f} dv + \iint_{\Sigma} \vec{n} \cdot \bar{P} ds \quad (1.8)$$

où \vec{v} est le vecteur unité tangent à la surface Σ , et \bar{P} définit le tenseur des contraintes totales appliquées en un point du fluide et qui s'écrit de la manière suivante :

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

L'équation (1.8) s'écrit sous la forme différentielle comme suit :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \vec{V} = \vec{f} - \nabla \cdot \bar{P}$$

Où \vec{f} représente le vecteur des forces appliquées au fluide (forces massiques).

Dans le cas d'un écoulement idéal, donc sans frottements internes, ou pour un fluide au repos, le tenseur des contraintes totales se réduit uniquement à l'effet de la pression hydrostatique p , et cela devient :

$$\overline{P}_{idéal} = - \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

Pour un fluide incompressible, newtonien et visqueux, le tenseur ci-dessus présente alors des contraintes visqueuses, dont le tenseur est $\overline{\tau}$, et cela devient :

$$\overline{P}_{visq} = \overline{P}_{idéal} + \overline{\tau}$$

Le tenseur des contraintes visqueuses, selon l'hypothèse de "Newton", est une fonction linéaire du taux de déformation \overline{D} :

$$\overline{\tau} = 2\mu \overline{D}$$

Avec \overline{D} défini de la manière suivante :

$$\overline{D} = \left[\nabla \otimes \vec{V} + (\nabla \otimes \vec{V})^T \right]$$

En tenant compte de la condition d'incompressibilité, défini par $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, on aboutit aux *équations de Navier-Stokes*, qui expriment la conservation de la quantité de mouvement d'un fluide incompressible, newtonien et visqueux et dont l'expression est :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \cdot \vec{V} = \vec{f} - \nabla \cdot p + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

1.3.3 Equation d'énergie.

L'énergie cinétique du fluide contenu dans un élément de volume dv d'un volume Ω est $\rho[(V^2/2)]dv$, d'après le théorème de l'énergie cinétique on a :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega} \frac{\rho V^2}{2} dv = P_e + P_i \quad (1.9)$$

avec P_e : puissance des forces extérieures :

$$P_e = \iiint_{\Omega} u_i f_i dv + \iint_{\Sigma} u_i \sigma_{ij} n_j ds$$

P_i : puissance des forces intérieures :

$$P_i = \iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dv$$

Si on appelle e l'énergie interne du fluide par unité de masse, l'énergie totale du fluide contenu dans l'élément de volume dv du volume Ω est $\rho[e + (V^2/2)]dv$. Le premier principe de la thermodynamique s'exprime sous la forme :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dv = P_e + P_T \quad (1.10)$$

avec P_T puissance thermique fournie au fluide du volume Ω .

La puissance thermique P_T peut être fournie au fluide soit par rayonnement, soit par conduction à travers la surface Σ . Nous négligeons le rayonnement et par conséquent, si λ désigne la conductivité thermique du fluide, on a :

$$P_T = \iint_{\Sigma} \lambda \overrightarrow{\text{grad}T} \cdot \vec{n} ds \quad (1.11)$$

En retranchant de l'équation (1.10) l'équation (1.9) obtenue par application du théorème de l'énergie cinétique, on obtient :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega} \rho e \, dv = -P_i + P_T$$

c'est-à-dire, d'après (1.11), et en exprimant P_i comme suit :

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} \, dv + \iint_{\Sigma} \rho e (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, ds = - \iiint_{\Omega} \rho \operatorname{div} \vec{V} \, dv + \iiint_{\Omega} \Phi \, dv + \iint_{\Sigma} \lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T} \cdot \vec{n} \, ds$$

En transformant les intégrales de surfaces en intégrales de volume, on montre qu'on doit avoir en tout point :

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \operatorname{div} \rho e \vec{V} = -\rho \operatorname{div} \vec{V} + \Phi + \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T})$$

ce qui peut s'écrire en tenant compte de l'équation de continuité (1.7) :

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \operatorname{div} \vec{V} = \Phi + \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T})$$

Cette équation, appelée *équation d'énergie*, est utilisée, en fait, sous une forme équivalente, obtenue en introduisant l'enthalpie $h = e + (p/\rho)$ du fluide (par unité de masse) à la place de l'énergie interne et qui s'écrit :

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \Phi + \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T})$$

En introduisant la chaleur massique à pression constante $C_p = \frac{\partial h}{\partial t}$ et le coefficient de dilatation cubique à pression constante γ ; on écrit enfin l'équation d'énergie sous la forme suivante :

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \gamma T \frac{Dp}{Dt} + \Phi + \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T})$$

1.4 Effet du fluide visqueux.

1.4.1 Hypothèses de "Prandtl 1904".

La faible valeur du terme de viscosité pour les fluides usuels et la bonne concordance loin des obstacles, entre les solutions en fluide parfait et les écoulements réels, ont conduit "Prandtl" à envisager l'hypothèse suivante : Dans un écoulement suffisamment rapide ou suffisamment étendu, les forces de viscosité ne jouent que dans un très petit domaine au voisinage des surfaces fixes qui limitent l'écoulement. Sur ces surfaces fixes, la vitesse du fluide est nulle. A l'extérieur du domaine appelé *couche limite*, les vitesses du fluide sont celles de l'écoulement en fluide parfait qui ne tient pas compte des forces de viscosité.

1.4.2 Description d'un écoulement autour d'une paroi.

Lorsqu'un fluide se déplace en contournant un obstacle fixe, les champs de vitesse et de pression sont perturbés par ce dernier. Si la vitesse au loin est petite, l'effet de la viscosité, qui est l'adhérence du fluide sur la surface, se traduit par de faibles gradients pariétaux de la vitesse et ces gradients se font sentir légèrement mais très loin de l'obstacle. Si au contraire la vitesse est grande, le freinage à la paroi est intense et les gradients pariétaux élevés, mais la viscosité contribue à leur décroissance rapide avec la distance à la surface. Dans ce dernier cas, il existe une zone de fluide contiguë appelée *couche limite dynamique*, dans laquelle se produit l'accommodation entre la nullité de la vitesse (sur la paroi) et la pleine vitesse locale du fluide libre, là où les gradients de vitesse sont si modérés que le fluide peut être considéré, en première approximation, comme sans viscosité. La couche limite dynamique est une zone dans laquelle la rotationnalité est très forte à la paroi et s'estompe à la frontière; on schématise en parlant d'une frontière et d'une épaisseur de couche limite dynamique. Si l'obstacle n'a pas la même température que le fluide, il existe aussi une *couche limite thermique* dans laquelle la température varie depuis la température de la surface jusqu'à la température du fluide libre. L'épaisseur de cette couche limite thermique n'est pas celle de la couche dynamique, elle peut être plus grande, plus petite ou à peu près égale.

Chapitre 2 :

COUCHE LIMITE LAMINAIRE : CONCEPTS DYNAMIQUE ET THERMIQUE

2.1 Concept de couche limite.

Considérons l'écoulement d'un fluide avec une vitesse à l'infini amont U_∞ , et une température T_∞ sur une plaque plane à une température T_p . Au voisinage de la paroi, les valeurs de la vitesse et de la température sont différentes de celles de l'écoulement à potentiel et varient en fonction de la distance à la paroi y . Cette zone de gradients de vitesse et de température est appelée couche limite. Elle résulte d'un échange de quantité de mouvement et de chaleur entre le fluide et la paroi. Son épaisseur est généralement petite par rapport à l'ensemble de l'écoulement. On distingue deux types de couche limite : la couche limite dynamique et la couche limite thermique.

2.1.1 Couche limite dynamique.

Une des caractéristiques principales d'un fluide est la viscosité. Elle varie avec la température et ne s'annule jamais. À la paroi, la vitesse du fluide est nulle et on observe des forces de frottement qui freinent l'écoulement au voisinage de celle-ci (figure 2.1).

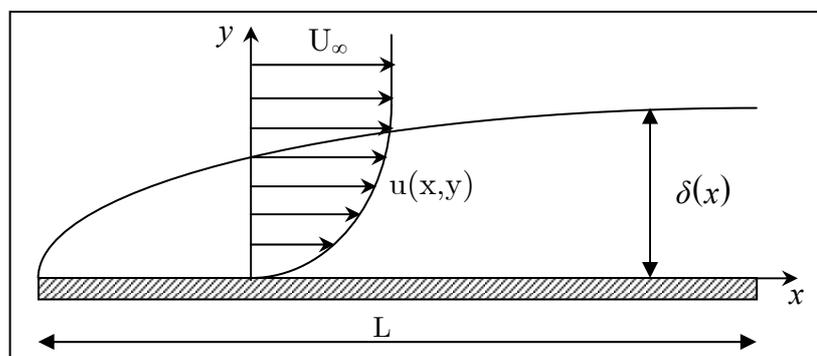


Fig.2.1 : Variation de l'épaisseur et de la vitesse de la couche limite dynamique sur une paroi plane [18].

2.1.2 Couche limite thermique.

Lorsqu'un fluide, de température T_∞ , s'écoule sur une paroi à température T_p , des échanges thermiques s'établissent. Les particules du fluide s'échauffent ou se refroidissent au contact de la paroi. Ces particules échangent de la chaleur de proche en proche avec leurs voisines et un gradient de température se forme (figure 2.2).

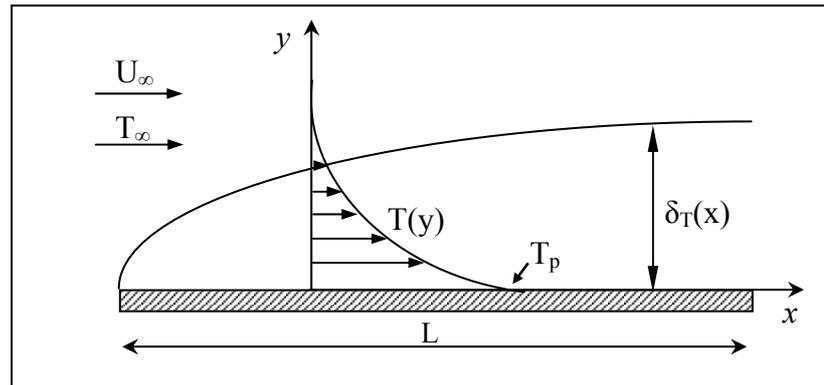


Fig.2.2 : Couche limite thermique sur une plaque plane [18].

2.1.3 Bilan advection-diffusion en couche limite isotherme.

Considérons une particule fluide en mouvement dans une région de couche limite, et intéressons-nous aux deux mécanismes d'advection et de diffusion, comme le montre la figure (2.3). En l'absence de décollement, l'advection s'effectue dans le sens général imposé par les conditions à l'infini amont le long des lignes de courant et ne s'éloignant que faiblement de la géométrie de l'obstacle.

Dans ces conditions, une échelle de temps représentative du transport advectif de quantité de mouvement sur la distance L peut être prise égale à :

$$T_a \approx L/U_\infty$$

La présence d'un obstacle fixe dans un écoulement de fluide visqueux se traduit, pour le milieu en mouvement, par un déficit ou "puits" de quantité de mouvement. Cette condition, imposée à la paroi, diffuse au delà dans tout le champ avec une diffusivité qui n'est autre que la viscosité cinématique ν du fluide. Si l'on désigne par δ la distance transversale caractéristique de cette diffusion. Au bord de fuite de l'obstacle,

l'échelle de temps correspondant au transfert diffusif de quantité de mouvement est donnée par : $T_d \approx \delta^2/\nu$

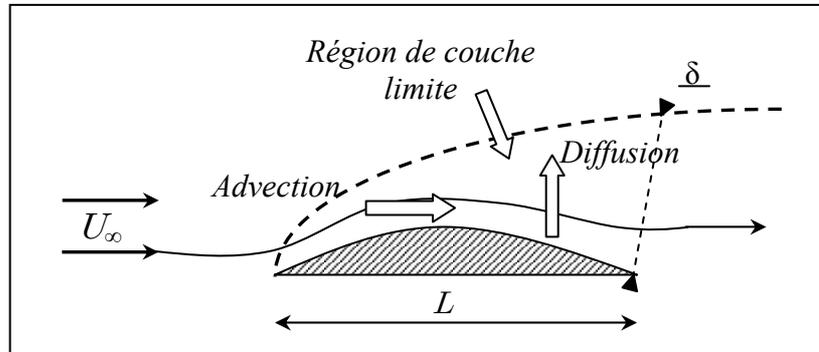


Fig.2.3 : Advection-Diffusion de quantité de mouvement en région de couche limite [04].

Lorsqu'aucune limitation transversale n'est imposée à l'expansion de la couche limite dans cette direction, il est légitime de considérer que les deux mécanismes ci-dessus agissent simultanément sur toute particule fluide évoluant dans la région de couche limite. En d'autres termes, advection et diffusion se produisent à même échelle de temps, ce qui amène directement le résultat suivant :

$$\frac{\delta}{L} \sim \sqrt{\frac{\nu}{U_\infty L}} \quad (2.1)$$

2.1.4 Bilan convection-diffusion en couche limite thermique.

La discussion précédente s'applique également à la diffusion de température lorsque la couche limite est le siège d'un transfert de chaleur en plus de celui de quantité de mouvement. C'est la situation que l'on rencontre chaque fois qu'il existe un déséquilibre thermique entre fluide et paroi. Notant dans ce cas l'échelle de longueur caractéristique du transfert diffusif de chaleur par δ_T , l'échelle de temps associée à la diffusion de cette grandeur peut être estimée par :

$$T_\theta = \frac{\delta_T^2}{a}$$

où a désigne la diffusivité thermique du fluide. L'échelle de temps du transport convectif étant inchangée, on a donc :

$$\frac{\delta_T}{L} = \sqrt{\frac{a}{U_\infty L}} \quad (2.2)$$

2.2 Paramètres caractéristiques de couche limite.

2.2.1 Epaisseurs.

2.2.1.1 Epaisseur conventionnelle de couche limite dynamique.

Nous désignerons désormais par $U_E(x)$ la vitesse obtenue en fluide parfait au point d'abscisse x sur l'obstacle. L'épaisseur conventionnelle de couche limite est égale à la distance transversale où la composante longitudinale de la vitesse atteint 99% de $U_E(x)$. Cette échelle varie en général avec l'abscisse le long de l'obstacle. En la désignant par $\delta(x)$, on a donc :

$$U[x, \delta(x)] = 0.99 \times U_E(x) \quad (2.3)$$

2.2.1.2 Epaisseur conventionnelle de couche limite thermique.

D'une façon analogue à l'épaisseur de couche limite dynamique, on définit l'épaisseur de la couche limite thermique δ_T . Soit le rapport adimensionnel :

$$\frac{T(x, y) - T_p(x)}{T_\infty - T_p(x)}$$

où $T(x, y)$ est la température au point courant de la couche limite, $T_p(x)$ celle de la paroi et T_∞ celle de fluide au loin de la paroi. Par définition donc, l'épaisseur de couche limite thermique est la distance transversale au bout de laquelle l'écart de température atteint 99% de la différence $(T_\infty - T_p)$. On a donc :

$$\frac{T(x, \delta_T) - T_p(x)}{T_\infty - T_p(x)} = 0.99 \quad (2.4)$$

2.2.1.3 Epaisseur de déplacement.

En raison du ralentissement du fluide à la paroi, le débit de fluide à travers l'épaisseur de couche limite est inférieur à ce qu'il serait, à distance égale, en fluide parfait, comme l'illustre la figure (2.4). En négligeant la variation des grandeurs en fluide parfait sur une distance transversale de l'ordre de l'épaisseur de couche limite, ce déficit peut être approximativement évalué par :

$$q_p - q_v = \int_0^{\delta} (\rho_E U_E - \rho U) dy$$

Par convention, on l'exprime à partir d'une épaisseur δ_1 telle que :

$$q_p - q_v = \rho_E U_E \delta_1$$

$$\delta_1(x) = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \right) dy \quad (2.5)$$

L'épaisseur δ_1 est appelée *Epaisseur de déplacement*. Comme l'illustre la figure ci-dessous, ce qualificatif fait référence à l'interprétation physique de cette grandeur qui correspond à la distance dont il conviendrait de déplacer la paroi pour conserver, en fluide parfait sur l'épaisseur $(\delta - \delta_1)$ le même débit qu'en fluide visqueux sur toute la section de couche limite

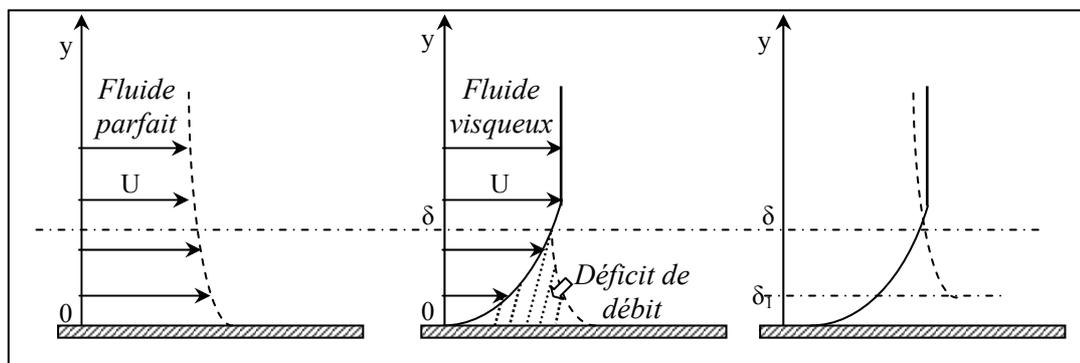


Fig.2.4 : Déficit de débit et épaisseur de déplacement [04].

2.2.1.4 Epaisseur de quantité de mouvement.

Le ralentissement du fluide à la paroi se traduit également par un déficit de quantité de mouvement. Pour en rendre compte et de façon analogue à l'épaisseur de déplacement, on introduit une deuxième échelle appelée *épaisseur de quantité de mouvement* notée δ_2 telle que :

$$\delta_2(x) = \int_0^\infty \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \left(1 - \frac{U}{U_E}\right) dy \quad (2.6)$$

Comme pour δ_1 cette nouvelle épaisseur permet d'exprimer la différence de flux de quantité de mouvement entre écoulements en fluide parfait et visqueux à même débit masse ρU sous la forme :

$$J_p - J_v \simeq \int_0^\delta \rho U U_E dy - \int_0^\delta \rho U^2 dy \equiv \rho_E U_E^2 \delta_2$$

2.2.1.5 Epaisseur d'énergie cinétique, d'enthalpie et d'enthalpie d'arrêt.

De façon similaire, on définit les épaisseurs caractéristiques suivantes :

$$\delta_3(x) = \int_0^\infty \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \left(1 - \frac{U^2}{U_E^2}\right) dy \quad (2.7)$$

$$\Delta = \int_0^\infty \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \left(\frac{h - h_E}{h_p - h_E}\right) dy \quad (2.8)$$

$$\Delta_2 = \int_0^\infty \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \left(\frac{h_i}{h_E} - 1\right) dy \quad (2.9)$$

Ces expressions représentent respectivement les épaisseurs d'énergie cinétique, d'enthalpie et d'enthalpie d'arrêt.

2.2.1.6 Facteur de forme.

Le rapport entre les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement est désigné sous le nom de *facteur de forme* :

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} \quad (2.10)$$

Cette grandeur prend des valeurs différentes selon la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement dans la couche limite. Pour une couche limite sur plaque plane, elle passe pratiquement du double au simple (d'environ 2,6 à 1,3). Le facteur de forme est également influencé par le gradient adverse, il permet de caractériser l'apparition du décollement qui correspond à une valeur de H voisine de 4 [04].

2.2.2 Frottement.

2.2.2.1 Frottement local.

Sous les approximations de couche limite, le tenseur des contraintes visqueuses se réduit en situation bidimensionnelle plane à :

$$\tau_{ij} = \mu \begin{pmatrix} 2\frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} & 2\frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} \approx \mu \begin{pmatrix} \approx 0 & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} & \approx 0 \end{pmatrix}$$

Il apparaît ainsi une contrainte prépondérante τ_{xy} , qui n'est autre que la contrainte de cisaillement s'exerçant dans la direction de l'advection sur une facette de normale y . La valeur prise par cette contrainte à la paroi introduit le frottement pariétal local :

$$\tau_p(x) = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (2.11)$$

2.2.2.2 Traînée visqueuse.

Par intégration du frottement pariétal sur toute la surface mouillée de l'obstacle, on obtient la traînée visqueuse par unité d'envergure en écoulement bidimensionnel plan :

$$D = \int_0^L \tau_p(x) dx \quad (2.12)$$

2.2.2.3 Coefficient local de frottement-Coefficient de traînée.

Le coefficient local de frottement est défini à partir de la contrainte pariétale locale normée par la pression dynamique soit :

$$C_f(x) = \frac{\tau_p(x)}{\frac{1}{2}\rho U_E^2} \quad (2.13)$$

Le coefficient de traînée s'obtient de façon similaire à partir d'une surface de référence et d'une pression dynamique. Cette dernière est le plus souvent définie à partir de la vitesse à l'infini de sorte que le coefficient correspondant s'écrit :

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho \Sigma U_\infty^2} \quad (2.14)$$

2.2.3 Transfert thermique.

2.2.3.1 Coefficient pariétal de transfert de chaleur.

Conformément à la loi de Fourier, λ désignant la conductivité thermique du fluide, la densité de flux de chaleur échangé à la paroi vaut :

$$\phi_p(x) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (2.15)$$

Il est d'usage de l'exprimer à partir de l'écart de températures entre la paroi (T_p) et le fluide à l'infini (T_∞) introduisant ainsi le *coefficient de transfert de chaleur pariétal* k tel que :

$$\phi_p(x) = k[T_p(x) - T_\infty] \quad (2.16)$$

2.2.3.2 Nombre de Nusselt.

En introduisant une longueur de référence L le coefficient de transfert de chaleur peut être mis sous forme adimensionnelle, le groupement s'appelant alors *Nombre de Nusselt* :

$$Nu = \frac{kL}{\lambda} \quad (2.17)$$

2.3 Equations de couche limite dynamique isovolume.

Nous allons procéder ici à une simplification des équations générales de sorte à établir, pour la région de couche limite, un nouveau modèle d'écoulement, "intermédiaire" entre ceux de Navier-Stokes et d'Euler.

Nous nous limitons au cas de l'écoulement bidimensionnel plan permanent en l'absence de forces extérieures de volume. Dans ces conditions les équations générales de Navier-Stokes s'écrivent en projections cartésiennes :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.18)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2.19.a)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \quad (2.19.b)$$

2.3.1 Configuration de couche limite.

Il s'agit d'envisager la simplification des équations précédentes sous les hypothèses suivantes :

- Grand Nombre de Reynolds global ($\text{Re} \gg 1$)
- Géométrie d'écoulement particulière avec aplatissement suivant la direction normale à l'advection.
- Facteur d'aplatissement fonction du nombre de Reynolds global.

Convenant de prendre l'axe des x pour direction privilégiée de l'advection, nous traduisons mathématiquement les hypothèses précédentes par les relations suivantes :

$$\frac{y}{x} \approx \varepsilon(\text{Re}) \quad \text{et} \quad \frac{V}{U} \approx \varepsilon'(\text{Re})$$

où ε et ε' sont deux "infinitement" petits, fonctions du nombre de "Reynolds" global dont l'ordre reste à déterminer.

Pour cela, nous particularisons les expressions de ces quantités aux fonctions puissances suivantes :

$$\varepsilon(\text{Re}) = \text{Re}^{-n} \quad m > 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon'(\text{Re}) = \text{Re}^{-n}, \quad n > 0$$

de sorte que les seuls exposants m et n fixent l'ordre des infiniment petits.

2.3.2 Forme adimensionnelle des équations locales.

Nous désignons par L l'échelle de longueur caractéristique de l'advection telle que, par définition $x \sim L$, et par U_∞ celle de vitesse, telle que $U \sim U_\infty$. Nous introduisons les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} x^* &= x/L & U^* &= U/U_\infty \\ y^* &= y/\varepsilon L = \text{Re}^m \times y/L & V^* &= V/\varepsilon' U_\infty = \text{Re}^n \times V/U_\infty \end{aligned}$$

On aura soin de noter qu'en raison de la distorsion d'échelles introduite sur y et V , les grandeurs étoilées figurant dans les expressions précédentes sont toutes de même ordre (~ 1). Pour la pression, on supposera qu'il en est de même pour la grandeur normée par ρU_∞^2 et l'on posera ainsi :

$$P^* = P / \rho U_\infty^2 \sim 1$$

Après substitution dans les équations de "Navier-Stokes" on obtient :

$$\frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \text{Re}^{m-n} \times \frac{\partial V^*}{\partial y^*} = 0 \quad (2.20)$$

$$U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + \text{Re}^{m-n} \times V^* \frac{\partial U^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \text{Re}^{2m-1} \times \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^{*2}} \quad (2.21.a)$$

$$U^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + \text{Re}^{m-n} \times V^* \frac{\partial V^*}{\partial y^*} = -\text{Re}^{m+n} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \text{Re}^{2m-1} \times \frac{\partial^2 V^*}{\partial y^{*2}} \quad (2.21.b)$$

2.3.3 Hypothèses et modèle de "Prandtl".

A grand nombre de Reynolds le système d'équations (2.21) peut se simplifier. Notons en premier lieu que, pour éviter toute dégénérescence physiquement inacceptable, il convient d'imposer $m = n$. En effet, dans le cas contraire, l'équation de continuité donnerait pour $Re \rightarrow \infty$ soit $(\partial U / \partial x = 0)$, soit $(\partial V / \partial y = 0)$ selon le signe de la différence $(m - n)$. L'une comme l'autre de ces simplifications n'est pas représentative de la réalité physique.

On obtient ainsi les hypothèses de Prandtl :

- Dans la région de couche limite les distorsions géométriques et cinématiques sont de même ordre :

$$\frac{y}{x} \sim \frac{V}{U}$$

- Pour le bilan de quantité de mouvement longitudinale, les forces d'inertie, de pression et de viscosité sont de même ordre dans la région de couche limite.

$$\frac{y}{x} \sim \frac{V}{U} \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

En conséquence directe des hypothèses précédentes et en revenant à une formulation dimensionnelle, les équations constitutives du modèle de Prandtl pour l'écoulement de couche limite s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.22) \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (2.23.a) \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (2.23.b) \end{array} \right.$$

2.3.4 Couplage fluide parfait-couche limite.

Notant par $P_E(x)$ la répartition de la pression en fluide parfait à la frontière de la couche limite, celle-ci "s'imprime" telle quelle sur toute l'épaisseur de la zone conduisant à la répartition $P_S(x)$ le long de la paroi solide. La solution interne se présente donc comme une correction du seul champ de vitesse, les deux projections de l'équation de la dynamique pouvant se regrouper sous la formulation unitaire suivante :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_E}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

En application du *théorème de "Bernoulli"* pour l'écoulement irrotationnel externe, on peut écrire le long de la frontière libre de couche limite :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dP_E}{dx} = U_E \frac{dU_E}{dx}$$

de sorte que l'équation de "Prandtl" peut encore s'écrire :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = U_E \frac{dU_E}{dx} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (2.24)$$

2.4 Equations de couche limite thermique.

2.4.1 Situation du problème.

Nous abordons ici l'aspect thermique en situation de couche limite. En évolution isovolume, cette question perd beaucoup de son intérêt dans la mesure où le rôle de la température est réduit à celui d'un simple contaminant passif. Ce résultat provient directement du découplage des problèmes dynamique et thermique propre à cette situation. Nous abandonnerons provisoirement l'hypothèse de fluide incompressible au profit de celle d'un comportement thermodynamique de gaz parfait. Nous supposerons cependant que les propriétés physiques du fluide restent constantes. Les hypothèses de mouvement permanent, bidimensionnel plan seront

elles maintenues. Enfin les forces extérieures de volumes se réduiront aux seules forces de gravité.

Dans ces conditions, les équations générales s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} = 0 \quad (2.25)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) \quad (2.26.a)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right) \quad (2.26.b)$$

$$\rho C_p \left(U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = U \frac{\partial P}{\partial x} + V \frac{\partial P}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \Phi \quad (2.27)$$

Où Φ représente la fonction de dissipation mécanique égale ici à :

$$\Phi = 2\mu \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2$$

La question que nous nous proposons est d'examiner et de savoir si le concept de couche limite dynamique peut être étendu dans ce cas au transfert thermique afin d'envisager une simplification des équations précédentes analogue à celle du modèle de Prandtl pour l'évolution isovolume.

2.4.2 Hypothèse fondamentale de couche limite thermique.

Comme pour les phénomènes dynamiques, le concept de couche limite thermique est fondamentalement lié à l'existence d'une direction privilégiée du transport convectif de chaleur par rapport à celle du transfert thermique. Pour la couche limite dynamique, la condition de grand nombre de Reynolds est requise. En effet, la comparaison à même référence de longueur des phénomènes diffusifs dynamiques et thermiques introduit le nombre de Prandtl conjointement au nombre de "Reynolds".

L'épaisseur caractéristique de diffusion thermique est $\delta_T \propto \delta / \sqrt{\text{Pr}}$. Or nous savons que $\delta_T \propto \delta / \sqrt{\text{Re}}$ ce qui conduit bien à $\delta_T \propto \delta / \sqrt{\text{Pe}}$ où $\text{Pe} = \text{Pr} \times \text{Re}$ est le nombre de "Peclet" de l'écoulement.

Nous pouvons ainsi énoncer que :

L'approximation de couche limite thermique assurant l'équivalence entre convection et diffusion ne peut s'envisager que pour des situations telles que :

$$\text{Pr} \times \text{Re} \gg 1$$

2.4.3 Analyse adimensionnelle : Equations générales de couche limite thermique.

En nous appuyant sur l'analyse du cas isovolume, nous introduisons les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L} & y^* &= \frac{y}{L} \sqrt{\text{Re}} & U^* &= \frac{U}{U_0} & V^* &= \frac{V}{U_0} \sqrt{\text{Re}} \\ g_x^* &= \frac{g_x}{g_0} & g_y^* &= \frac{g_y}{g_0} & P^* &= \frac{P}{P_0} & T^* &= \frac{T}{T_0} \end{aligned}$$

La référence de température (ou d'écart de température) est notée T_0 et g_0 désigne la norme de l'accélération de la pesanteur, seule force à distance retenue. Par substitution dans les équations de la dynamique on obtient, compte tenu des résultats antérieurs :

$$\begin{aligned} U^* \frac{\partial U^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial U^*}{\partial y^*} &= \text{Fr}^{-1} g_x^* - \text{Eu} \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^{*2}} \\ U^* \frac{\partial V^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial V^*}{\partial y^*} &= \text{Fr}^{-1} \sqrt{\text{Re}} g_y^* - \text{Eu Re} \frac{\partial P^*}{\partial y^*} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial y^{*2}} \end{aligned}$$

On peut ainsi tirer trois séries de conclusions :

- La distorsion d'échelles géométriques et cinématiques en $\sqrt{\text{Re}}$ assure l'équivalence des termes d'inertie et de viscosité, comme dans le cas incompressible. On notera toutefois que le nombre de Reynolds global est défini maintenant en référence à la valeur locale de la masse volumique par :

$$\text{Re} = \rho \frac{U_0 L}{\mu}$$

- La comparaison des différents termes de l'équation de la dynamique fait intervenir à présent les nombres de "Froude" et "d'Euler" respectivement définis par :

$$Fr = \frac{U_0^2}{g_0 L} \quad \text{et} \quad Eu = \frac{p_0}{\rho U_0^2}$$

- En l'absence de forces de gravité, l'hypothèse de grand nombre de Reynolds conduit à l'absence de gradient transversal de pression dans la couche limite ($\partial P / \partial y \approx 0$). La comparaison des termes de gravité et de pression figurant dans l'équation en projection selon y conduit, en fluide pesant, à énoncer la condition suivante :

En présence de force de gravité, le gradient transversal de pression suit une loi hydrostatique dans la couche limite à condition que :

$$Eu \times Fr \gg 1/\sqrt{\text{Re}}$$

Comme dans le cas incompressible, la pression est alors une donnée du problème de couche limite fournie par la solution externe en fluide parfait.

En appliquant le même traitement à l'équation de l'enthalpie, on obtient :

$$U^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = Eu Ec \left(U^* \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + V^* \frac{\partial P^*}{\partial y^*} \right) + Ec \left(\frac{\partial U^*}{\partial y^*} \right)^2 + \text{Pr}^{-1} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$$

qui introduit les nombres "d'Eckert" et de "Prandtl" définis respectivement par :

$$Ec = \frac{U_0^2}{C_p T_0} \quad \text{et} \quad \text{Pr} = \frac{\mu C_p}{\lambda}$$

Avec les hypothèses qui viennent d'être présentées et en revenant aux grandeurs dimensionnées, les équations locales de couche limite laminaire dynamique et thermique s'écrivent, en régime permanent et écoulement bidimensionnel plan de fluide à masse volumique variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} = 0 \\ \rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \rho g_x - \frac{dP_E}{dx} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ \frac{dP}{dy} = \rho g_y \\ \rho C_p \left(U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = U \frac{dP_E}{dx} + \rho V g_y + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \end{array} \right.$$

2.4.4 Couche limite de convection forcée en fluide incompressible.

Ce cas correspond physiquement à des écoulements de faible vitesse en présence d'écarts de température suffisamment minimes pour pouvoir assimiler cette grandeur à un contaminant passif du bilan de quantité de mouvement (forces de gravité négligeables). Dans ces conditions, les équations de couche limite deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (2.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\frac{dP_E}{dx} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (2.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C_p \left(U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = U \frac{dP_E}{dx} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Le problème dynamique est évidemment celui de la situation isovolume antérieure, et le couplage avec l'équation de l'enthalpie se fait par l'intermédiaire du terme de dissipation. Il s'agit pour cette équation d'un terme source qui traduit un effet d'échauffement cinétique.

Chapitre 3 :

CALCUL DE COUCHE LIMITE DYNAMIQUE ISOVOLUME

Dans ce chapitre nous calculons les propriétés essentielles de la couche limite dynamiques en utilisant la méthode de "Blasius" et la méthode "Intégrale" pour la résolution du modèle présenté au chapitre précédent, ensuite, nous étudions l'influence du contrôle sur le comportement de la couche limite en ayant recours à quelques procédés tels que le soufflage ou l'aspiration des fluides avec une vitesse uniforme ou linéairement variée.

3.1 Solution de Blasius des équations de couche limite.

3.1.1 Situation du problème et mise en équation.

Nous étudierons la configuration la plus simple et qui fut historiquement la première application de la théorie de "Prandtl". C'est celle d'une couche limite sur une plaque plane, infiniment mince, de longueur L et d'envergure w disposée parallèlement à un écoulement uniforme de vitesse U_∞ d'un fluide visqueux (ν) et non pesant. Le mouvement est supposé permanent et le rapport de forme (w/L) tel qu'il autorise une approche bidimensionnelle plane. Enfin le nombre de "Reynolds" global $U_\infty L/\nu$ est pris suffisamment grand pour justifier les approximations de couche limite.

En fluide parfait, l'obstacle se confondant avec une portion de ligne de courant, l'écoulement reste celui d'un champ de vitesse uniforme en tout point, de valeur U_∞ auquel correspond bien évidemment un champ de pression constante. En application du théorème de "Bernoulli" le long de la plaque, on en déduit que $dP_E/dx = 0$.

Comme le schématise la figure suivante (3.1), le caractère visqueux du fluide réel provoque une répartition transversale (profil) de vitesse s'accompagnant d'une déflexion des lignes de courant (b). Ce sont ces caractéristiques qu'il s'agit de déterminer ainsi que la loi correspondante de frontière de couche limite.

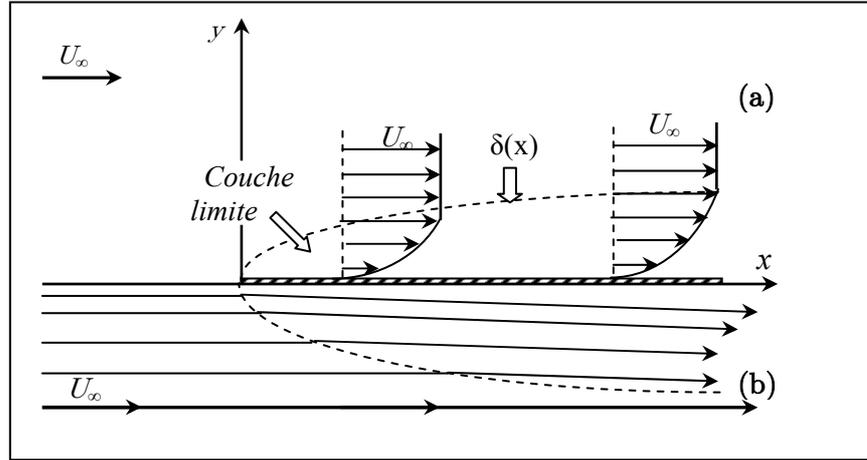


Fig.3.1 : Couche limite sur une plaque plane à incidence nulle dans un courant uniforme à l'infini : (a) Profils de vitesse ; (b) Déflexion des lignes de courant [04].

En application du modèle de "Prandtl" et puisque le gradient longitudinal de pression est nul, la correction de vitesse au sein de la couche limite est régie par les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$U(x, 0) = V(x, 0) = 0 \quad (\text{représentent l'effet de l'adhérence}).$$

$$U(x, \infty) = U_\infty (\equiv C^{te}). \quad (\text{vitesse uniforme; pas de déformation de lignes de courant}).$$

La solution d'affinité correspond à une fonction de courant de la forme :

$$\psi = U_\infty g(x) f(\eta) \quad (3.1)$$

où la variable η est définie par $\eta = y/g(x)$. En observant que :

$$d\eta = -y \frac{g'(x)}{g^2(x)} dx + \frac{dy}{g(x)}$$

on en déduit immédiatement que $\partial\eta/\partial x = -\eta g'/g$ et $\partial\eta/\partial y = 1/g$. Les composantes du vecteur vitesse s'obtient par :

$$\begin{cases} U = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y} = U_\infty f' \\ -V = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x} = U_\infty g' (\eta f' - f) \end{cases}$$

ainsi que :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = -U_\infty \frac{g'}{g} \eta f'' \\ \frac{\partial U}{\partial y} = U_\infty \frac{f''}{g} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = U_\infty \frac{f'''}{g^2} \end{cases} \quad (3.2)$$

La substitution de ces expressions dans l'équation de la dynamique, conduit après simplifications à la relation :

$$\frac{U_\infty}{\nu} g g' = -\frac{f'''}{f f''}$$

qui, en raison de la séparation des variables ne peut être satisfaite que pour :

$$\frac{U_\infty}{\nu} g g' = Cte \equiv K \quad \text{et} \quad -\frac{f'''}{f f''} = Cte \equiv K$$

Le choix de la constante $K \neq 0$; reste arbitraire et en suivant la proposition de "Blasius" [04], nous prendrons $K = 1/2$. Le changement de variable est alors fixé par $\eta = y\sqrt{U_\infty/\nu x}$ et l'équation différentielle résolvante du champ de vitesse devient :

$$2f''' + f f'' = 0 \quad (3.3)$$

Les conditions aux limites après transformation, imposent que :

$$\left. \begin{aligned} U = 0 &\Leftrightarrow f' = 0 \\ V = 0 &\Leftrightarrow (\eta f' - f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \end{aligned} \right\} \text{(à la paroi)} \quad (3.4)$$

$$f' = 1 \quad \text{(loin de la paroi)}$$

Nous avons donc transformé le problème aux dérivées partielles initial en un problème différentiel ordinaire avec des conditions aux limites définies en deux points. La similitude des profils de vitesse est une propriété remarquable puisqu'une fonction unique détermine la forme de tous les profils. La solution analytique de cette équation n'est pas possible, c'est donc à travers une résolution numérique qu'on obtient la solution de notre problème.

3.1.2 Méthodes de résolution du problème.

Des méthodes très variées permettant la résolution numérique des équations de la couche limite. Si l'on s'intéresse seulement à des problèmes différentiels avec des conditions aux limites spécifiées en deux points, comme celui défini par l'équation (3.3) munie des conditions aux limites (3.4), les formules de type "Runge-Kutta" sont parmi les plus utilisées, elles sont faciles à programmer, en général stables, elles utilisent une largeur du pas peut être modifiée sans difficultés, en plus de ça la connaissance de la valeur initiale suffit à intégrer l'équation différentielle. Mais, elles demandent plus de temps de calcul que les autres méthodes de précision comparables. Si f, f' et f'' sont tous connus dans une certaine position (η_i) , la formule de "Runge-Kutta" du quatrième ordre est préférable à utiliser pour obtenir la solution à $(\eta_{i+1} = \eta_i + h)$ positions. Pour se préparer à l'utilisation de cette méthode, l'équation du troisième ordre (3.3), doit être écrite en trois équations de premier ordre :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{df}{d\eta} &= p \\ \frac{dp}{d\eta} &= q \\ \frac{dq}{d\eta} &= -\frac{1}{2}fq \end{aligned} \right. \quad (3.5)$$

En appliquant les formules de "Runge-Kutta" pour chacune des équations précédentes, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 f_i = h p_i \\ \Delta_1 p_i = h q_i \\ \Delta_1 q_i = -\frac{1}{2} h f_i q_i \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 f_i = h \left(p_i + \frac{1}{2} \Delta_1 p_i \right) \\ \Delta_2 p_i = h \left(q_i + \frac{1}{2} \Delta_1 q_i \right) \\ \Delta_2 q_i = -\frac{1}{2} h \left(f_i + \frac{1}{2} \Delta_1 f_i \right) \left(q_i + \frac{1}{2} \Delta_1 q_i \right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_3 f_i = h \left(p_i + \frac{1}{2} \Delta_2 p_i \right) \\ \Delta_3 p_i = h \left(q_i + \frac{1}{2} \Delta_2 q_i \right) \\ \Delta_3 q_i = -\frac{1}{2} h \left(f_i + \frac{1}{2} \Delta_2 f_i \right) \left(q_i + \frac{1}{2} \Delta_2 q_i \right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_4 f_i = h \left(p_i + \frac{1}{2} \Delta_3 p_i \right) \\ \Delta_4 p_i = h \left(q_i + \frac{1}{2} \Delta_3 q_i \right) \\ \Delta_4 q_i = -\frac{1}{2} h \left(f_i + \frac{1}{2} \Delta_3 f_i \right) \left(q_i + \frac{1}{2} \Delta_3 q_i \right) \end{array} \right.$$

Finalement, les valeurs de f, f' et f'' sont calculées pour (η_{i+1}) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{i+1} = f_i + \frac{1}{6} (\Delta_1 f_i + 2\Delta_2 f_i + 2\Delta_3 f_i + \Delta_4 f_i) \\ p_{i+1} = p_i + \frac{1}{6} (\Delta_1 p_i + 2\Delta_2 p_i + 2\Delta_3 p_i + \Delta_4 p_i) \\ q_{i+1} = q_i + \frac{1}{6} (\Delta_1 q_i + 2\Delta_2 q_i + 2\Delta_3 q_i + \Delta_4 q_i) \end{array} \right.$$

Il faut noter que, l'intégration numérique des équations (3.5) ne peut pas démarrer pour la valeur de $\eta = 0$ parce que q est inconnue en ce point. Les conditions aux limites (3.4) concernent seulement les valeurs de f et p pour $\eta = 0$. La résolution par la méthode de "Runge-Kutta", exige de démarrer avec la méthode de "Moitié intervalle" présentée sur la figure (3.2), pour fixer la valeur de q à

$\eta = 0$. La condition aux limites pour η tend vers l'infini est inapplicable, on va limiter notre ordre d'intégration numérique à une valeur maximale η_{\max} . La condition : $\eta \rightarrow \infty \Rightarrow f' \rightarrow 1$, devient :

$$1 - p \leq \varepsilon \text{ pour } \eta = \eta_{\max} \quad (3.6)$$

Au début du calcul, on choisit une valeur arbitraire de q_0 avec une incrémentation positive $\Delta_1 q_0$. Pour les conditions $f = p = 0$ et q_0 pour $\eta = 0$. Les équations (3.5) sont intégrées jusqu'à η proche de η_{\max} . La dernière valeur calculée de p est notée p_{\max} . Si ce point est inférieur à 1, on remplace q_0 par $q_0 + \Delta_1 q_0$ et on répète l'intégration à partir de $\eta = 0$.

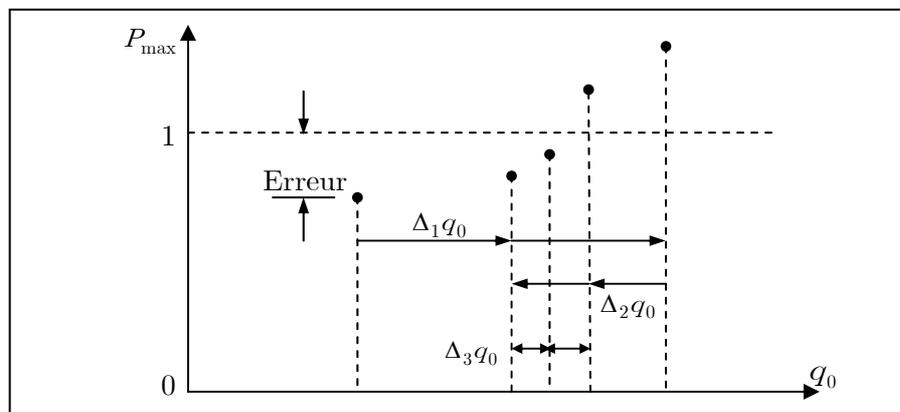


Fig.3.2 : Représentation de la méthode de Moitié intervalle [05].

Si la valeur de p_{\max} est supérieur à 1, on prend $\left(\Delta_2 q_0 = \frac{\Delta_1 q_0}{2}\right)$ pour inverser la direction et on remplace q_0 par $(q_0 + \Delta_2 q_0)$. On répète le calcul avec cette valeur négative jusqu'à ce que p_{\max} sera inférieur à 1 (figure 3.2). Puis on inverse la direction, en mettant $\left(\Delta_3 q_0 = -\frac{\Delta_2 q_0}{2}\right)$ et en remplaçant q_0 par $(q_0 + \Delta_3 q_0)$ jusqu'à ce que la valeur de p_{\max} sera supérieure à 1 tant que q_0 est positive, ou p_{\max} sera inférieure à 1 lorsque q_0 est négative. A la fin de chaque itération on calcul $(1 - p_{\max})$ comme l'erreur indiquée sur la figure (3.2) et on vérifie si l'erreur est positive et aussi si elle est inférieure ou égale à la valeur estimée de epsilon. Quand les deux conditions précédentes sont vérifiées, la condition aux limites est satisfaite, et l'itération est terminée.

3.1.3 Présentation de l'organigramme de calcul.

L'organigramme présenté sur la figure (3.3) traduit les étapes de calcul précédentes.

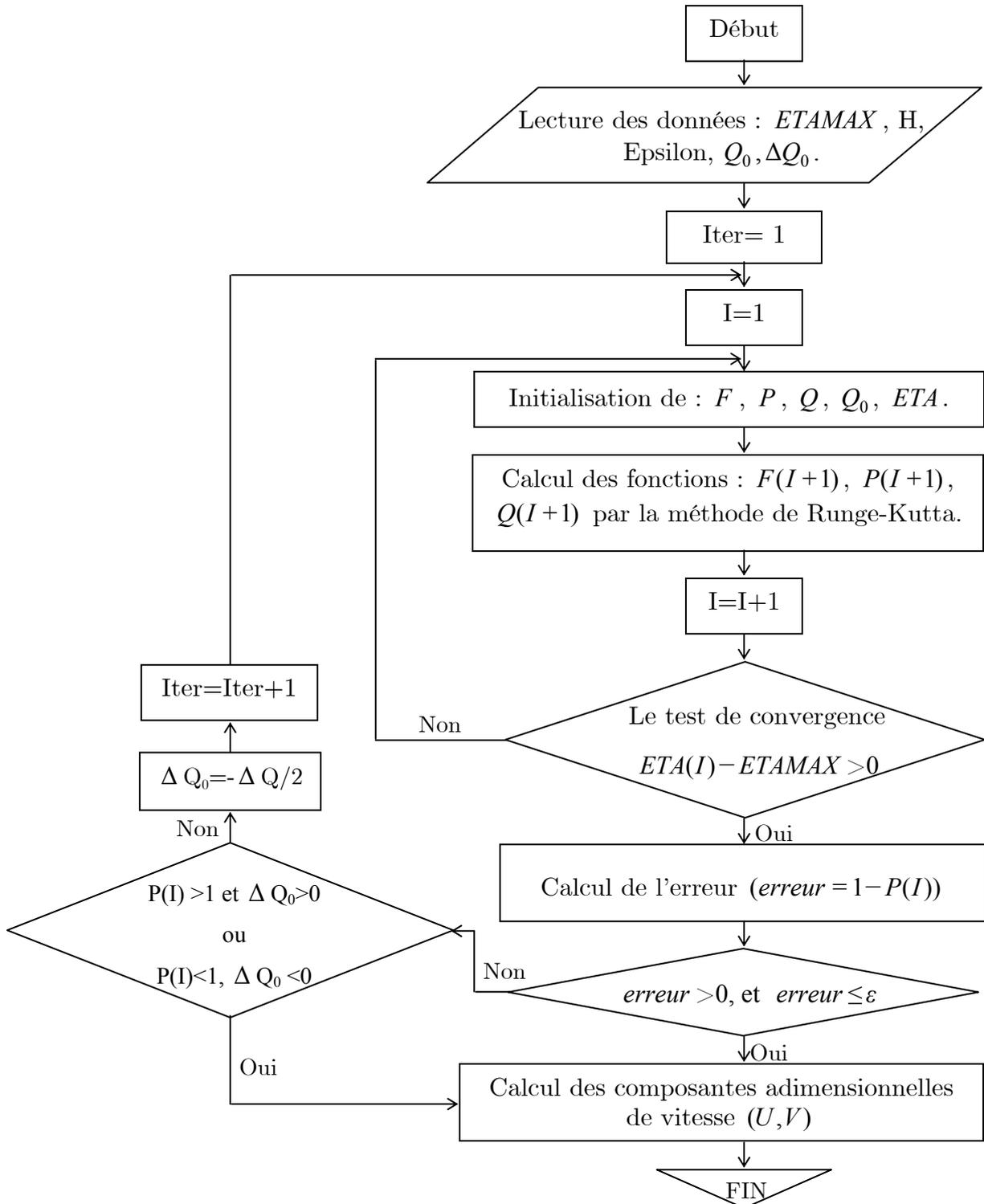


Fig.3.3 : Organigramme de résolution de l'équation de "Blasius" pour une couche limite dynamique le long d'une plaque plane.

3.1.4 Evaluation de la couche limite dynamique.

La détermination des fonctions f, f' et f'' permet le calcul de toutes les caractéristiques de la couche limite. La fonction $f(\eta)$ et sa dérivée seconde $f''(\eta)$ sont représentées sur la figure (3.5). Les courbes de $f = U/U_\infty$ et $\frac{V}{U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}$ en fonction de η sont représentées sur la figure (3.4). On note que f' varie de façon presque linéaire au voisinage de $\eta = 0$, puis tend asymptotiquement vers 1 lorsque η augmente et tend vers η_{max} . Pour $\eta = 5$, $f'(\eta) = 0.99$ et en ce point $U = 0.99U_E$. L'épaisseur de la couche limite δ est donnée par la relation suivante :

$$\delta \approx 5 \left(\frac{\nu x}{U_E} \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

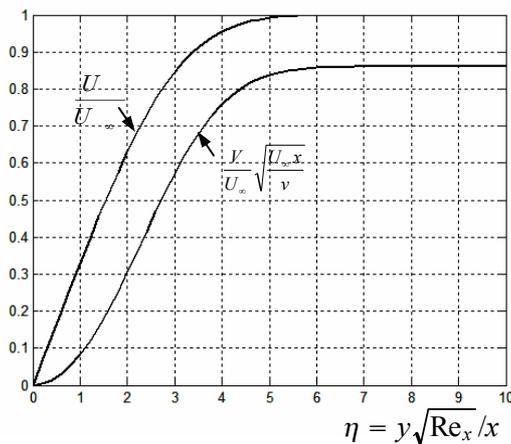


Fig.3.4 : Distribution des vitesses dans la couche limite dynamique le long d'une plaque plane.

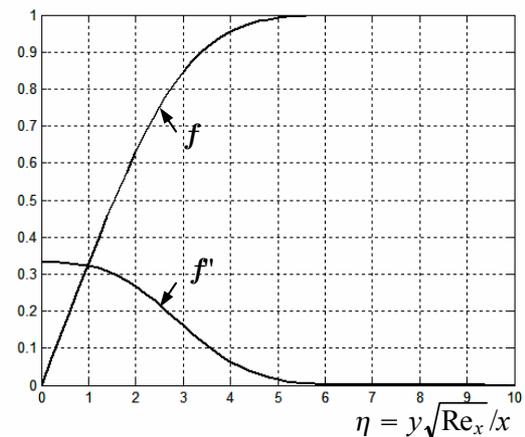


Fig.3.5 : Les fonctions de Blasius, f et f'' .

La composante normale du vecteur vitesse peut être déduite en fonction de (η) à l'aide de :

$$V = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} U_E \left(\frac{\nu}{U_E x} \right)^{1/2} (\eta f' - f)$$

Si l'on représente le produit :

$$\frac{V}{U_E} \left(\frac{U_E x}{\nu} \right)^{1/2} = \frac{V}{U_E} (\text{Re}_x)^{1/2} = \frac{1}{2} (\eta f' - f)$$

en fonction de η , on constate que cette fonction tend vers une valeur constante égale à 0.860 lorsque $\eta \rightarrow \infty$. Ainsi sur la frontière de la couche limite, la vitesse transversale garde une valeur non nulle telle que :

$$V_E = 0.860 \frac{U_E}{(\text{Re}_x)^{1/2}} \quad (3.8)$$

L'augmentation de l'épaisseur de la couche limite induit un déplacement du fluide dans la direction transversale.

3.1.4.1 Evaluation des épaisseurs intégrales.

L'épaisseur de déplacement est donnée dans le cas général par :

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \right) dy$$

En écoulement incompressible ($\rho = \rho_E$), cette expression devient :

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{U}{U_E} \right) dy$$

Pour calculer cette intégrale, on peut introduire la variable réduite :

$$\eta = y \left(\frac{U_E}{\nu x} \right)^{1/2} = \frac{y}{x} (\text{Re}_x)^{1/2}$$

on obtient :

$$\delta_1 = \frac{x}{(\text{Re}_x)^{1/2}} \int_0^{\eta_\infty} [1 - f'(\eta)] d\eta = \eta_\infty - f(\eta_\infty) + f(0)$$

L'épaisseur de déplacement s'écrit donc :

$$\delta_1 = 1.720 \frac{x}{(\text{Re}_x)^{1/2}} \quad (3.9)$$

Considérons à présent l'épaisseur de quantité de mouvement :

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{\rho U}{\rho_E U_E} \left(1 - \frac{U}{U_E}\right) dy$$

En écoulement incompressible, cette épaisseur est donnée par :

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{U}{U_E} \left(1 - \frac{U}{U_E}\right) dy$$

L'introduction de la variable réduite η conduit à :

$$\delta_2 = \frac{x}{(\text{Re}_x)^{1/2}} \int_0^{\eta_\infty} f'(\eta) (1 - f'(\eta)) d\eta$$

L'intégration analytique de cette expression donne :

$$\delta_2 = \frac{2x}{(\text{Re})^{1/2}} f''(0)$$

Le calcul numérique donne $f''(0) = 0.332$ et par conséquent :

$$\delta_2 = 0.664 \frac{x}{(\text{Re}_x)^{1/2}} \quad (3.10)$$

Le facteur de forme se déduit immédiatement des expressions (3.9) et (3.10) :

$$H = \frac{\delta_1}{\delta_2} = 2.59 \quad (3.11)$$

3.1.4.2 Evaluation de la contrainte pariétale et du coefficient de frottement.

La contrainte pariétale est donnée par :

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}$$

En utilisant la variable adimensionnelle η , la contrainte pariétale devient :

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right)_{y=0} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)$$

Comme $U = U_\infty f'(\eta)$, on trouve :

$$\tau_p = \mu U_\infty \frac{(\text{Re}_x)^{1/2}}{x} f''(0)$$

Le coefficient de frottement local défini par $C_f = \tau_p / ((1/2)\rho U_\infty^2)$ s'exprime sous la forme :

$$C_f = \frac{2f''(0)}{(\text{Re}_x)^{1/2}} = \frac{0.664}{(\text{Re}_x)^{1/2}}$$

3.1.4.3 Evaluation de la traînée pariétale et du coefficient de traînée.

Pour un seul coté de la plaque, la force de frottement est donnée par :

$$D = \int_0^L \tau_p dx \quad (3.12)$$

L'intégration de (3.12) conduit à :

$$D = 2\mu U_\infty f''(0) \left(\frac{U_\infty L}{\nu} \right)^{1/2}$$

Le coefficient de traînée est donnée par :

$$C_D = \frac{4f''(0)}{(U_\infty L/\nu)^{1/2}} = \frac{1.328}{(\text{Re}_L)^{1/2}}$$

3.2 Solution par la méthode intégrale des équations de la couche limite.

La résolution des équations locales de couche limite sous l'hypothèse d'affinité [04] n'est pas toujours possible, nous allons donc présenter une méthode de calcul susceptible de s'appliquer avec ou sans cette hypothèse. Elle repose sur l'emploi de l'équation intégrale de "Von Kármán" [03] :

$$\delta_1 U_E \frac{dU_E}{dx} + \frac{d}{dx} (U_E^2 \delta_2) = \frac{\tau_p}{\rho} \quad (3.13)$$

Cette équation à été obtenue à partir de l'intégration de l'équation de la couche limite suivant ox . Après avoir remplacé le frottement par sa valeur, on obtient

$$\int_0^\infty \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy = \int_0^\infty U_E \frac{\partial U_E}{\partial x} dy + \frac{1}{\rho} \int_0^\infty \frac{\partial \tau}{\partial y} dy$$

Intégrons par parties :

$$\int_0^\infty V \frac{\partial U}{\partial y} dy = [UV]_0^\infty - \int_0^\infty U \frac{\partial V}{\partial y} dy = - \left[U \int_0^\delta \frac{\partial U}{\partial x} dy \right]_0^\infty + \int_0^\infty U \frac{\partial U}{\partial x} dy$$

De l'équation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{donc} \quad V = - \int_0^\infty \frac{\partial U}{\partial x} dy$$

Ainsi :

$$\int_0^\infty V \frac{\partial U}{\partial y} dy = -U_E \int_0^\infty \frac{\partial U}{\partial x} dy + \int_0^\infty U \frac{\partial U}{\partial x} dy$$

Remplaçant dans l'équation initiale, il vient :

$$- \int_0^\infty \left(2U \frac{\partial U}{\partial x} - U_E \frac{\partial U}{\partial x} - U_E \frac{\partial U_E}{\partial x} \right) dy = \tau_p / \rho$$

Il est alors aisé de voir que le premier membre de cette égalité s'écrit encore :

$$\int_0^\infty \frac{d}{dx}(UU_E - U^2)dy + \int_0^\infty (U_E - U) \frac{dU_E}{dx} dy \equiv \frac{d}{dx} \left[U_E^2 \int_0^\infty \left(\frac{U}{U_E} - \frac{U^2}{U_E^2} \right) dy \right] \\ + U_E \frac{dU_E}{dx} \times \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_E} \right) dy$$

Il suffit d'introduire les définitions des épaisseurs δ_1 et δ_2 pour aboutir à l'équation de "Von Kármán" (3.13). La méthode de résolution de cette équation repose sur les étapes suivantes :

1. Choix d'un profil de vitesse adimensionnel $(U/U_E) = f(y/\delta)$.
2. Prescription des conditions aux limites.
3. Etablissement des expressions de $\delta_1(x), \delta_2(x)$ et τ_p en fonction de $\delta(x)$.
4. Substitution dans l'équation de "Von Kármán" et résolution pour une seule inconnue principale $\delta(x)$.

Nous reprenons la configuration de l'écoulement sur la plaque plane de "Blasius" afin de comparer les résultats issus des calculs par la méthode intégrale à ceux obtenus par résolution "exacte" des équations locales.

Les conditions aux limites sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \quad U(x, 0) = 0, \quad V(x, 0) = 0, \quad (\text{adhérence à la paroi}). \\ y = \delta \quad U(x, \delta) = U_E(x), \quad \frac{\partial U(x, \delta)}{\partial y} = 0 \quad (\text{à la frontière avec l'écoulement libre}). \end{array} \right. \quad (3.14)$$

$$(3.15)$$

avec $U_E(x) = U_\infty$ (vitesse de l'écoulement extérieur à la couche limite).

D'autre part, l'équation de la quantité de mouvement s'écrit, à l'intérieur de la couche limite, sous la forme :

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

Si on applique cette équation en $y = 0$, on obtient :

$$U(x, 0) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{y=0} + V(x, 0) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y=0}$$

en utilisant les conditions (3.14), on trouve :

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0 \quad (3.16)$$

Pour notre cas, la courbure du profil de vitesse est nulle à la paroi. On peut utiliser un profil de vitesse de type polynomial de troisième ordre :

$$U(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$$

Les dérivées première et seconde de ce profil sont respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= a_1 + 2a_2 y + 3a_3 y^2 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= 2a_2 + 6a_3 y \end{aligned}$$

Des conditions (3.14) on a : $U(x, 0) = 0$ donne immédiatement $a_0 = 0$, et $\left(\partial^2 U / \partial y^2 \right)_{y=0}$ donne $a_2 = 0$.

En appliquant aussi les conditions (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned} U_E &= a_1 \delta + a_3 \delta^3 \\ 0 &= a_1 + 3a_3 \delta^2 \end{aligned}$$

On déduit facilement :

$$a_1 = \frac{3}{2} \frac{U_E}{\delta}, \quad a_3 = -\frac{U_E}{2\delta^3}$$

Le profil de vitesse prend la forme suivante :

$$\frac{U}{U_E} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

utilisons ce profil pour calculer l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 ; définit par :

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{U}{U_E} \left(1 - \frac{U}{U_E} \right) dy$$

Il est commode d'introduire la variable : $\eta = \frac{y}{\delta}$

donc :

$$\frac{U}{U_E} = \frac{3}{2} \eta - \frac{1}{2} \eta^3 \quad (3.17)$$

l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 s'écrit :

$$\delta_2 = \delta \int_0^1 \left[\frac{U}{U_E} - \left(\frac{U}{U_E} \right)^2 \right] d\eta$$

En substituant (3.17) dans cette expression, on obtient :

$$\delta_2 = \frac{39}{280} \delta$$

Exprimons $(\tau_p / \rho U_E^2)$ à l'aide du profil de vitesse (3.17) :

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu U_E}{\delta} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{U}{U_E} \right)_{\eta=0}$$

donc :

$$\tau_p = \frac{3}{2} \frac{\mu U_E}{\delta}$$

$$\frac{\tau_p}{\rho U_E^2} = \frac{3}{2} \frac{\nu}{\delta U_E}$$

Substituons les expressions (3.18) et (3.19) dans l'équation de "Von Kármán" :

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_E^2}$$

$$\frac{39}{280} \frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2} \frac{\nu}{\delta U_E}$$

$$\frac{d\delta^2}{dx} = \frac{280}{13} \frac{\nu}{U_E}$$

Comme l'épaisseur de la couche limite est nulle au bord d'attaque, $\delta = 0$ en $x = 0$, cette équation donne après intégration :

$$\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\nu x}{U_E}$$

soit :

$$\frac{\delta}{x} = 4.63 \left(\frac{\nu}{U_E x} \right)^{1/2} = \frac{4.63}{(\text{Re}_x)^{1/2}}$$

Cette expression détermine complètement le profil de vitesse (3.17), l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 , la contrainte pariétale et le rapport $(\tau_p / \rho U_E^2)$ (3.19).

On obtient facilement :

$$\frac{\delta_2}{x} = \frac{39}{280} \frac{4.63}{(\text{Re}_x)^{1/2}} = \frac{0.644}{(\text{Re}_x)^{1/2}}$$

$$\frac{\tau_p}{\rho U_E^2} = \frac{3}{2} \frac{\nu}{U_E x} \frac{(\text{Re}_x)^{1/2}}{4.63} = \frac{0.323}{(\text{Re}_x)^{1/2}}$$

Ces expressions sont très proches des relations exactes. La comparaison des

résultats obtenus avec cette formulation est présentée dans le tableau (3.1), en référence aux valeurs de la "solution exacte" de Blasius.

Tab.3.1 : Comparaison des résultats de couche limite sur plaque plane obtenus par deux méthodes différentes.

profil	$\frac{\delta\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$\frac{\delta_1\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$\frac{\delta_2\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	H	$C_f\sqrt{\text{Re}_x}$
Méthode intégrale	4.63	1.73	0.644	2.68	0.644
Blasius	5.00	1.716	0.664	2.59	0.664

Commentaire.

On peut donc obtenir à l'aide de cette méthode approchée la plupart des résultats utiles en pratique, et ceci sans avoir à déterminer de façon exacte la forme du profil de vitesse.

Le choix du profil de vitesse est en fait arbitraire, pour d'autres types de polynômes de degré plus au moins élevé, on pourra se reporter à l'ouvrage de "Candel" [03], qui montre que le résultat n'est pas sensiblement influencé par le profil utilisé pour représenter la vitesse dans la couche limite.

3.3 Contrôle actif de la couche limite dynamique.

Il existe en général plusieurs techniques, qui ont été développées, pour le contrôle artificiel du comportement de la couche limite le long d'un corps. Parmi ces techniques, le soufflage ou l'aspiration d'un fluide par la surface du corps qui conduit au changement de la structure de la couche limite.

3.3.1 Aspiration et soufflage avec une vitesse uniforme.

L'écoulement de la couche limite en présence de l'aspiration ou du soufflage peut devenir auto similaire si la vitesse est uniformément distribuée.

On se propose d'étudier la couche limite sur une plaque plane avec aspiration ou soufflage du fluide avec une vitesse uniforme V_0 , en l'absence du gradient de pression (figure 3.6).

Les équations de la couche limite dans ce cas sont :

$$\begin{cases} \frac{dV_0}{dy} = 0 \\ V_0 \frac{dU}{dy} = \nu \frac{d^2 U}{dy^2} \end{cases}$$

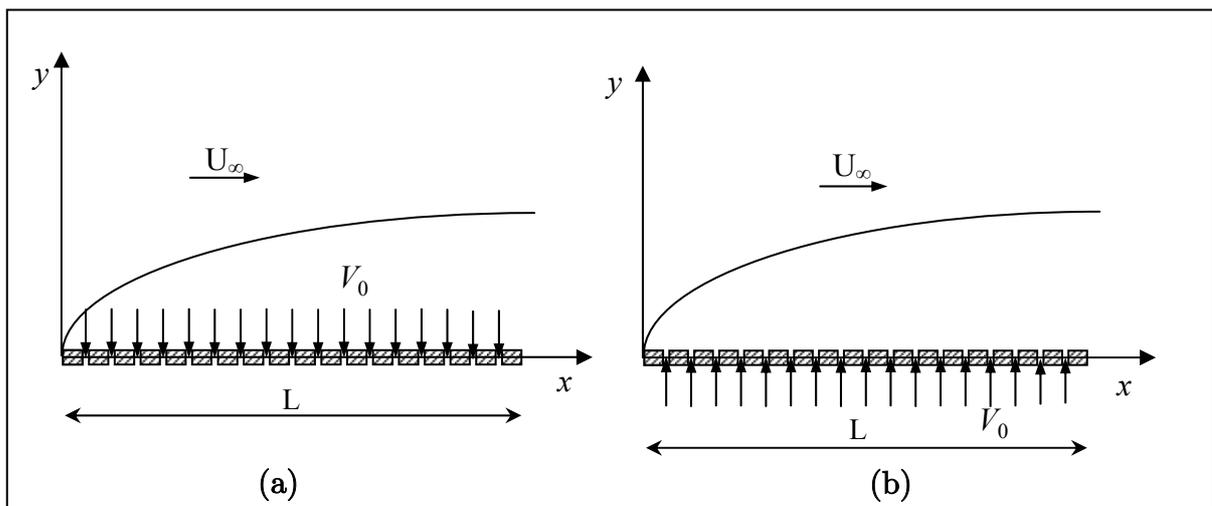


Fig.3.6 : Contrôle actif avec une vitesse uniforme V_0 d'une couche limite dynamique sur une plaque plane : (a) Aspiration, (b) Soufflage.

On a :

$$V_0 = -\frac{\partial \psi}{dx} = \frac{1}{2}(\eta f' - f)\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}}$$

puisque la composante U de vitesse est nulle au niveau ($\eta = 0$) :

$$U = 0 \quad \frac{U}{U_\infty} = f' = 0$$

on obtient :

$$V_0 = -\frac{1}{2}f\sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} \quad (3.18)$$

$$\frac{V_0}{U_\infty} = -\frac{1}{2}f\sqrt{\frac{1}{\text{Re}_x}}$$

Le rapport entre la vitesse de l'aspiration ou de soufflage et U_∞ doit être petit pour vérifier les hypothèses de "Prandtl" [26], on lui donne comme valeur :

$$\frac{V_0}{U_\infty} \simeq 0.0001$$

D'après l'équation (3.18), on peut déduire la valeur de f :

$$f = \pm 0.2 \quad (3.19)$$

f est positive pour le cas de l'aspiration et négative pour le cas du soufflage. En injectant cette valeur dans les conditions aux limites (3.4), elles deviennent :

$$U = 0 \Leftrightarrow f' = 0$$

$$V = V_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f = +0.2 & (\text{pour l'aspiration}) \\ f = -0.2 & (\text{pour le soufflage}) \end{cases}$$

Ensuite, on calcule la fonction f et ses deux dérivées, f' et f'' pour les deux procédés de contrôle.

Tab.3.2 : Comparaison des caractéristiques de la couche limite dynamique en absence et en présence du contrôle avec une vitesse uniforme.

Type du contrôle	$\frac{\delta\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$\frac{\delta_1\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$\frac{\delta_2\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	H	$C_f\sqrt{\text{Re}_x}$	$C_D\sqrt{\text{Re}_L}$
Aspiration	4.6	1.53	0.81224	1.885	0.81224	1.6245
Sans contrôle	5	1.72	0.66411	2.59	0.66411	1.328
Soufflage	5.4	1.96	0.52327	3.74	0.52327	1.0465

3.3.1 Aspiration et soufflage avec un profil linéaire de vitesse.

soit le profil suivant (figure 3.7) :

$$V = ax + b \quad (3.20)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} V(0) = 0 \\ V(x = L) = V_0 \end{cases}$$

L'introduction de ces conditions dans l'équation (3.20), donne :

$$V = \frac{V_0}{L}x$$

On détermine les valeurs de la vitesse en plusieurs points de la plaque, ensuite on calcule, pour chaque une de ces valeurs, la fonction f et on l'injecte sa valeur dans les conditions aux limites (3.4).

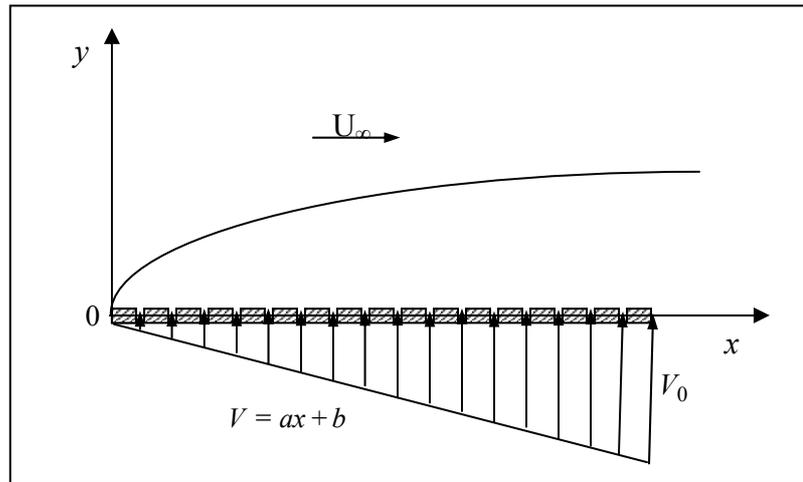


Fig.3.7 : Soufflage avec un profil de vitesse linéaire d'une couche limite dynamique sur une plaque plane.

La résolution de l'équation de Blasius avec ces nouvelles conditions nous a permis de déterminer les valeurs de f , f' et f'' pour chaque valeur de vitesse, on interpole ces résultats afin de déterminer les différentes caractéristiques de la couche limite pour ce type de contrôle.

Tab.3.3 : Comparaison des caractéristiques de la couche limite dynamique en absence et en présence du contrôle avec un profil de vitesse linéaire.

Type du contrôle	$\frac{\delta\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$\frac{\delta_1\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$\frac{\delta_2\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$C_f\sqrt{\text{Re}_x}$
Aspiration	$5.052 - 0.044x$	$1.715 - 0.024x$	$0.664 + 0.014x$	$0.664 + 0.014x$
Sans contrôle	5	1.71672	0.66411	0.66411
Soufflage	$4.948 + 0.044x$	$1.715 + 0.024x$	$0.664 - 0.014x$	$0.664 - 0.014x$

3.4 Résultats et commentaires.

3.4.1 Représentation graphique des résultats.

3.4.1.1 Epaisseur conventionnelle de la couche limite.

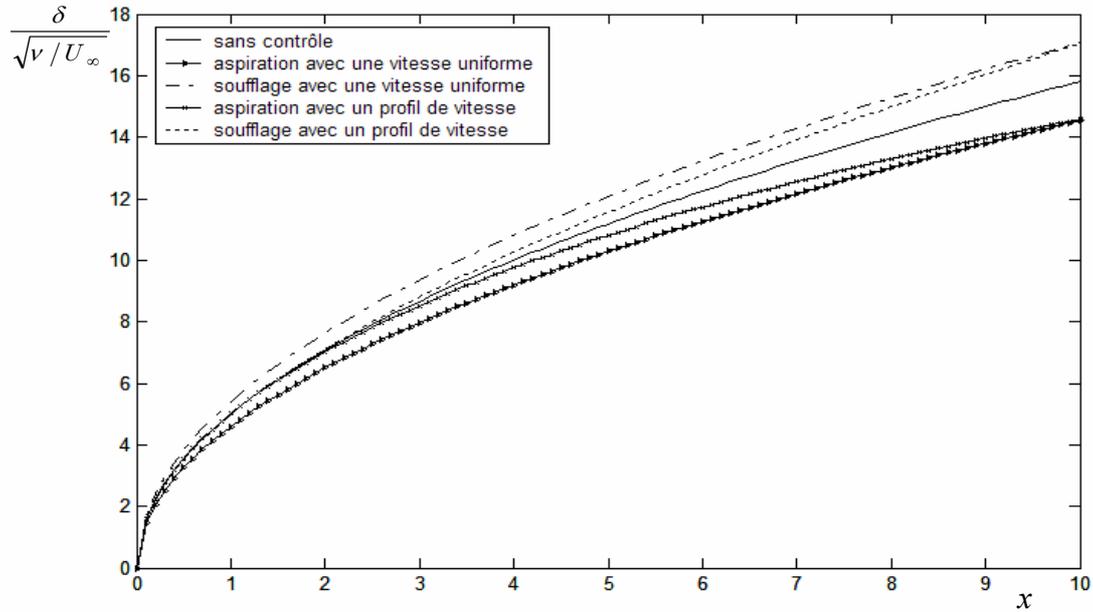


Fig.3.8 : Influence du contrôle actif sur l'épaisseur conventionnelle de la couche limite dynamique δ le long d'une plaque plane à zéro incidence.

3.4.1.2 Epaisseur de déplacement.

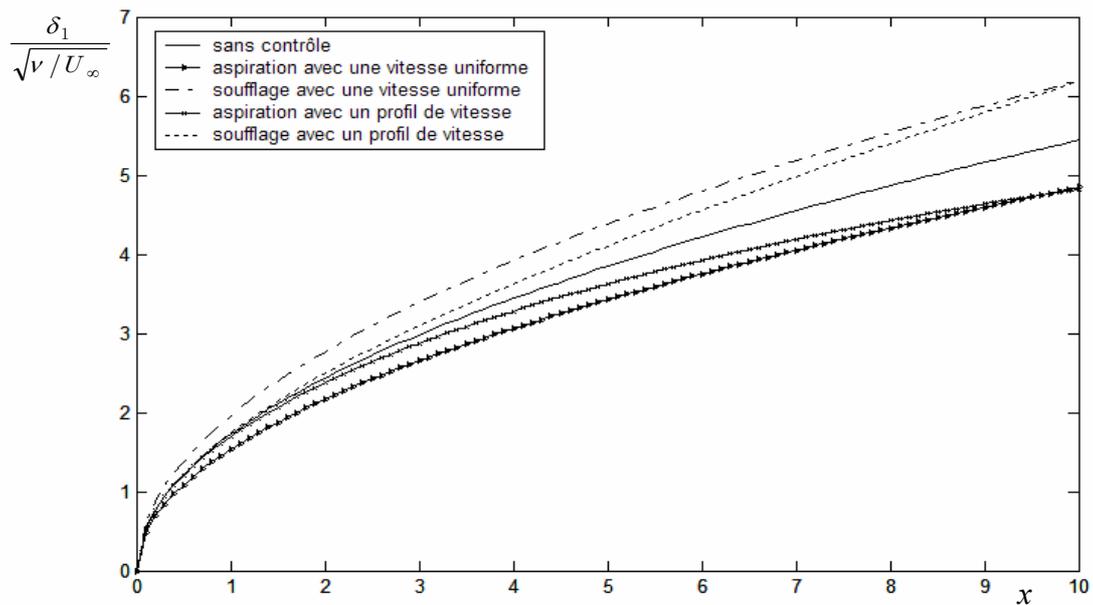


Fig.3.9 : Influence du contrôle actif sur l'épaisseur de déplacement δ_1 en couche limite sur une plaque plane à zéro incidence.

3.4.1.3 Epaisseur de quantité de mouvement.

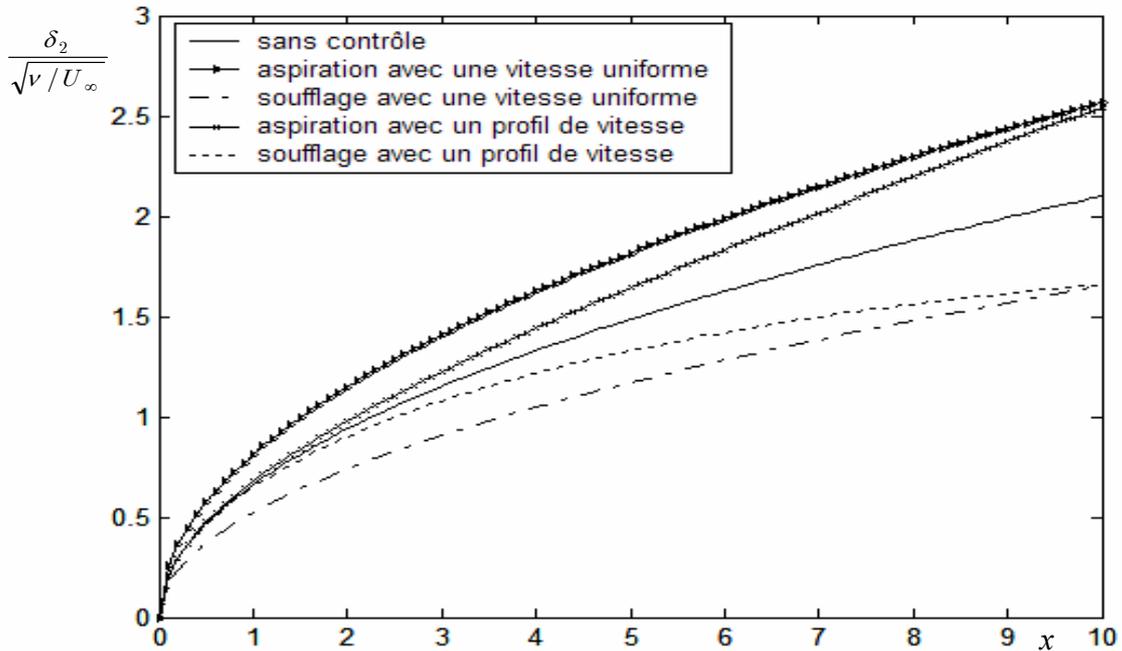


Fig.3.10 : Influence du contrôle actif sur l'épaisseur de quantité de mouvement δ_2 en couche limite sur une plaque plane à zéro incidence.

3.4.1.4 Coefficient de frottement.

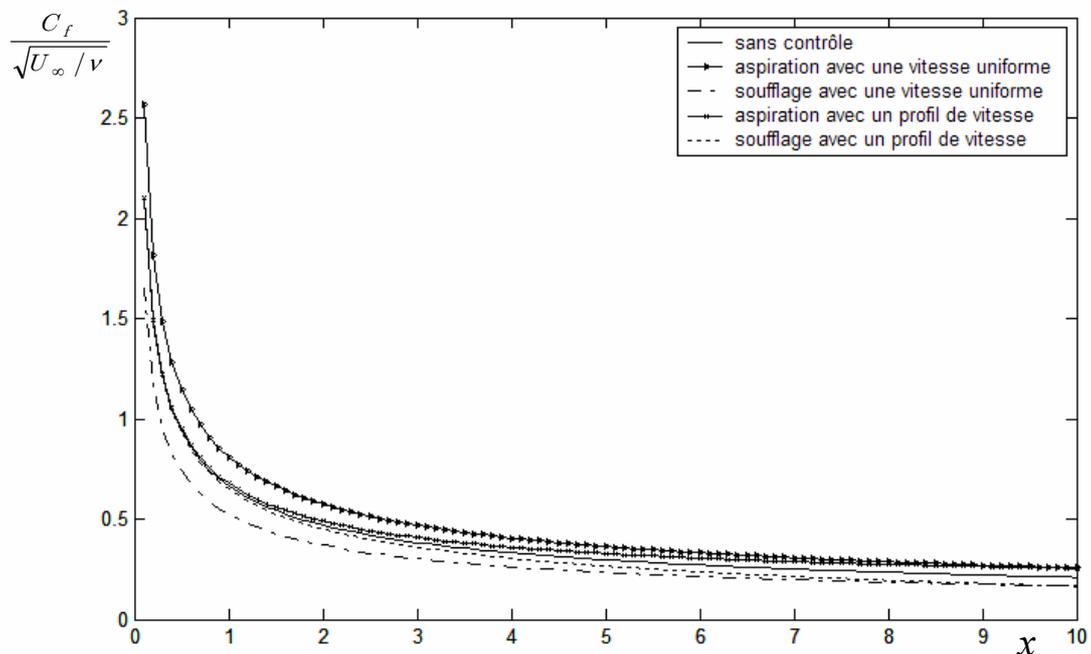


Fig.3.11 : Influence du contrôle actif sur le coefficient de frottement en couche limite sur une plaque plane à zéro incidence.

3.4.2 Commentaires et analyse des résultats.

La résolution de l'équation de la couche limite dynamique en variable réduite a permis de représenter les différentes caractéristiques de l'écoulement visqueux au voisinage de la paroi solide.

L'épaisseur conventionnelle δ , représentée sur la figure (3.8), reflète le bon sens d'évolution et délimite clairement la zone où les effets visqueux sont prépondérants.

Les figures (3.9),(3.10) montrent dans leur ensemble, que les épaisseurs de déplacement et de quantité de mouvement possèdent la même allure que celle de l'épaisseur de la couche limite.

Quant à la courbe représentative du coefficient de frottement C_f figure (3.11), elle montre la dépendance du frottement et de l'abscisse x , autrement dit plus qu'on s'éloigne en aval du bord d'attaque, plus l'effet de frottement s'amortit.

Il est important de noter que les différents procédés de contrôle actif ont une grande influence sur les différentes caractéristiques de la couche limite laminaire. Le soufflage (uniforme ou linéaire) a déplacé l'épaisseur δ vers le haut, ce qui provoque une diminution dans la valeur du coefficient de frottement C_f , et induit un déplacement de la courbe de ce dernier vers le bas relativement à celle de la plaque sans contrôle.

L'épaisseur de déplacement est aussi influencée par le contrôle actif de la même manière que l'épaisseur de la couche limite, par contre, l'épaisseur de quantité de mouvement représentée sur la figure (3.10) possède un comportement contraire relativement à celui de δ et δ_1 . Ce qui traduit la dépendance étroite entre le déficit de quantité de mouvement et de type de contrôle.

Par contre, un comportement tout à fait contraire a été remarqué dans le cas d'une aspiration (uniforme ou linéaire).

On conclut que, les procédés de contrôle actif ont une grande influence sur les différentes caractéristiques de la couche limite dynamique.

Le soufflage fait augmenter l'épaisseur conventionnelle de la couche limite dynamique et l'épaisseur de déplacement, par contre il fait diminuer le coefficient de frottement C_f et l'épaisseur de quantité de mouvement, contrairement au cas de l'aspiration.

Chapitre 4 :

CALCUL DE LA COUCHE LIMITE THERMIQUE EN CONVECTION FORCÉE

4.1 Présentation du problème.

Le champ des vitesses étant connu. Nous nous intéressons au transfert de chaleur entre une plaque plane et un fluide en mouvement uniforme parallèle à la plaque à l'infini amont. L'influence des forces de flottabilité est négligeable, ce qui signifie que la mise en mouvement du fluide résulte de l'action des forces extérieures à l'échange de chaleur, on parle alors de convection forcée.

Nous allons examiner divers cas : celui d'une paroi isotherme (température de paroi imposée constante), adiabatique (flux de chaleur pariétal nul), et en fin avec flux de chaleur, en convection forcée à grande et basse vitesses.

Dans certains cas on va résoudre le problème numériquement, puis analytiquement afin de comparer les résultats obtenus à l'aide de la méthode numérique. L'écoulement du fluide est permanent, bidimensionnel plan et le fluide est à propriétés physiques constantes.

4.2 Mise en équation.

La situation que nous envisageons vérifie les hypothèses suivantes :

H1 : évolution isovolume ;

H2 : forces de flottabilité négligeables, soit $\mathbf{Gr} / \mathbf{Re}^2 \ll 1$ de sorte que le transfert par convection naturelle peut être négligé ;

H3 : le nombre d'Eckert n'est plus négligeable devant le nombre de Reynolds.

Dans ces conditions, les équations locales s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho C_p} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (4.1) \\ (4.2) \\ (4.3) \end{array}$$

Les conditions aux limites associées au modèle précédent sont :

$$\text{à } y = 0 : \quad U = V = 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (\text{paroi adiabatique}) \\ \text{ou} \\ T = Cte = T_p \quad (\text{paroi isotherme}) \\ \text{ou} \\ \frac{\partial T}{\partial y} = Cte \quad (\text{paroi avec flux de chaleur}) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

$$\text{à } y \rightarrow \infty : \quad U = U_\infty \quad \text{et} \quad T = T_\infty \quad (\text{température de l'écoulement potentiel}) \quad (4.5)$$

En raison du découplage des problèmes dynamique et thermique, le système formé des deux premières équations peut être résolu séparément de la dernière équation. On reconnaît les équations du problème de "Blasius" qui admet une solution affine telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(x,y) = U_\infty f'(\eta) \\ V(x,y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu U_\infty}{x}} [\eta f'(\eta) - f(\eta)] \end{array} \right.$$

avec $\eta = y \sqrt{U_\infty / \nu x}$, la fonction $f(\eta)$ étant solution de l'équation différentielle (3.3)

avec les conditions aux limites (3.14), $f(0) = f'(0) = 0$ et $f'(\infty) = 1$.

En prolongeant l'hypothèse d'affinité au champ de température, on se propose de chercher sa solution sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\theta(\eta) = \frac{T(x,y) - T_\infty}{\left(U_\infty^2 / 2C_p \right)} \quad (4.6)$$

Si l'on porte, dans l'équation (4.3), les expressions (3.2) de U et de V et celles des dérivées de T tirées de l'expression (4.6), on arrive aisément à une relation simple, où ils ne figurent que des fonctions de la variable η :

$$\theta'' + \frac{1}{2} \text{Pr} f \theta' + 2 \text{Pr} f'' = 0 \quad (4.7)$$

L'équation (4.7) montre que le champ de température est aussi auto-similaire.

Le nombre de "Prandtl" est constant puisque les propriétés physiques du fluide sont supposées constantes. Les conditions aux limites deviennent :

$$\text{à } \eta = 0 : \quad f = f' = 0 \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \\ \text{ou} \\ \theta = Cte = 1 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = Cte < 0 \end{array} \right. \quad (4.8)$$

$$\text{à } \eta \rightarrow \infty : \quad f' = 1 \quad \text{et} \quad \theta = 0 \quad (4.9)$$

Seule la condition à $\eta = 0$ change avec le type de paroi. La condition à $\eta = \infty$, est maintenue constante pour tous types de paroi. Nous avons donc un problème aux conditions aux limites, gouverné par une équation différentielle de second ordre, dont les coefficients contiennent les fonctions f et f'' .

Puisque $\eta \rightarrow \infty$, on prend la valeur maximale de η de sorte que la condition (4.9) soit satisfaite :

$$\eta = \eta_{\max} : \quad \theta = 0 \quad (4.10)$$

4.3 Méthode de résolution.

Considérons la résolution numérique de l'équation différentielle du second ordre de type :

$$\frac{d^2 \mathcal{F}}{dx^2} + A(x) \frac{d\mathcal{F}}{dx} + B(x)\mathcal{F} = D(x) \quad (4.11)$$

Nous résolvons cette équation, et nous verrons que la résolution de ce problème se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires à matrice tridiagonale. Le problème est reformulé comme un ensemble d'équations différentielles, chacune d'ordre inférieur à deux, en utilisant les formules de différences centrées d'ordre deux :

$$\begin{cases} \mathcal{F}'_i = \frac{1}{2h}(\mathcal{F}_{i+1} - \mathcal{F}_{i-1}) \\ \mathcal{F}''_i = \frac{1}{h^2}(\mathcal{F}_{i+1} - 2\mathcal{F}_i + \mathcal{F}_{i-1}) \end{cases}$$

L'équation (4.11), s'écrit en $x = x_i$ pour $i = 1, 2, 3, \dots, n$ comme suit :

$$\left(1 - \frac{h}{2}A_i\right)\mathcal{F}_{i-1} + (-2 + h^2B_i)\mathcal{F}_i + \left(1 + \frac{h}{2}A_i\right)\mathcal{F}_{i+1} = h^2D_i$$

c'est-à-dire :

$$C_{i1}\mathcal{F}_{i-1} + C_{i2}\mathcal{F}_i + C_{i3}\mathcal{F}_{i+1} = C_{i4} \quad (4.12)$$

avec :

$$\begin{cases} C_{i1} = 1 - \frac{h}{2}A_i \\ C_{i2} = -2 + h^2B_i \\ C_{i3} = 1 + \frac{h}{2}A_i \\ C_{i4} = h^2D_i \end{cases} \quad (4.13)$$

Ecrivant l'équation (4.12) pour $i = 1, 2, 3, \dots, n$, on aura un système de n équations à n inconnues $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ tel qu'il est schématisé à la figure (4.1).

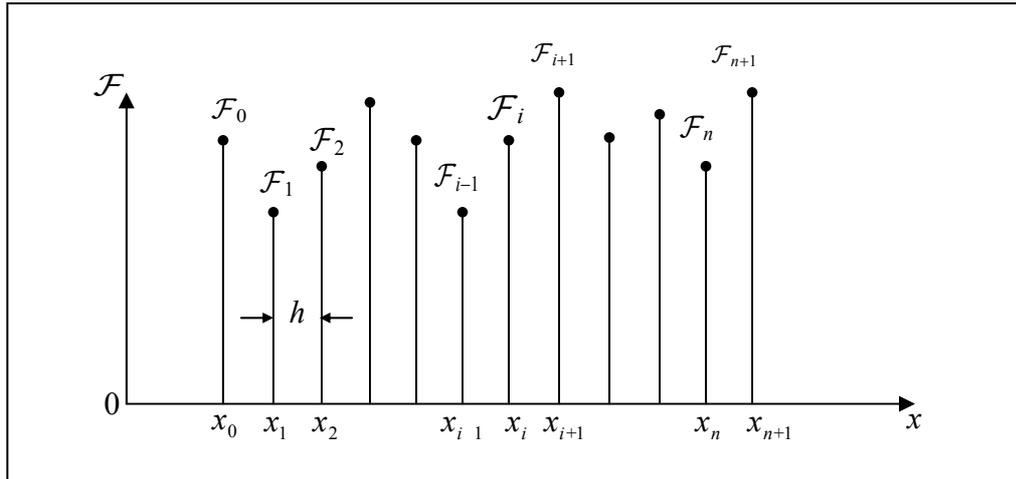


Fig.4.1 : Solution numérique du problème ordinaire avec conditions aux limites [05].

En effet, les équations aux nœuds respectifs 1 et n s'écrivent :

$$\begin{cases} C_{11}\mathcal{F}_0 + C_{12}\mathcal{F}_1 + C_{13}\mathcal{F}_2 = C_{14} & (4.14) \\ C_{n1}\mathcal{F}_{n-1} + C_{n2}\mathcal{F}_n + C_{n3}\mathcal{F}_{n+1} = C_{n4} & (4.15) \end{cases}$$

En introduisant les conditions aux limites; on aboutit à un système formé par une matrice tridiagonale. Sa résolution est rapide même pour des systèmes de grande taille. La méthode d'*élimination de Gauss* est particulièrement bien adaptée à ce type de problème.

4.4 Convection forcée à grande vitesse.

Dans cette situation, la vitesse de l'écoulement externe induit, par arrêt du fluide sur l'obstacle, un apport de chaleur en volume, par dissipation visqueuse. Pour autant, la variation de vitesse est supposée rester limitée à des valeurs telles que la compressibilité du fluide n'ait pas lieu d'intervenir.

Nous posons le problème avec ses trois variantes ; c'est-à-dire, pour une condition à la limite adiabatique, isotherme, et flux de chaleur constant à la paroi. Nous examinerons donc séparément ces trois situations.

4.4.1 Solution en paroi adiabatique.

Nous supposons que :

- Le terme de l'équation (4.3) dû à la dissipation de l'énergie n'est plus négligé : il y a échauffement cinétique.
- La plaque est en matériau parfaitement isolant et son facteur d'émission est nul (figure 4.2).

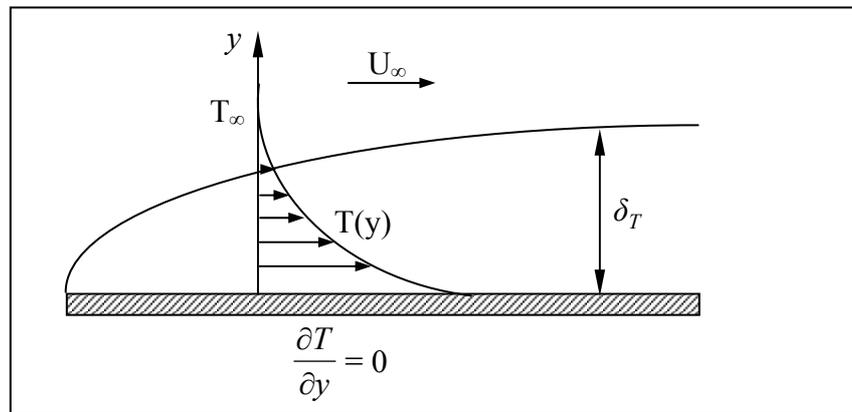


Fig.4.2 : Distribution de températures sur une couche limite thermique le long d'une plaque plane adiabatique.

Dans ces conditions, on retrouve l'équation (4.3) :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\mu}{\rho C_p} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad (4.16)$$

avec les conditions aux limites thermique suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 : \quad \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = 0 \end{array} \right. \quad (4.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \infty : \quad T = T_\infty \end{array} \right. \quad (4.18)$$

A cause de la chaleur dissipée dans la couche limite, la plaque va prendre, en chaque point, une température T_f , supérieure à T_∞ appelée température pariétale de frottement.

Puisque, dans le cas de la plaque plane, la température et la vitesse de l'écoulement libre sont en tout point les mêmes et égales respectivement à T_∞ et à U_∞ , l'échauffement local d'arrêt est en tout point égal à :

$$\Delta T_0 = T_0 - T_\infty = \frac{U_\infty^2}{2C_p} \quad (4.19)$$

Le facteur thermique pariétal ne dépend donc que de la température pariétale de frottement :

$$r = \frac{\Delta T_f}{\Delta T_0} = \frac{T_f - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (4.20)$$

nous considérons ici la même variable adimensionnelle θ telle que :

$$\theta(\eta) = \frac{T(x,y) - T_\infty}{\left(U_\infty^2 / 2C_p \right)}$$

On remarque que, à la paroi, la température $T(x,y)$ appelée la température pariétale de frottement T_f et la valeur de θ est alors égale au facteur thermique pariétal :

$$r = \theta_p \quad (4.21)$$

Donc l'équation qui gouverne ce problème est l'équation (4.7) :

$$\theta'' + \frac{1}{2} \text{Pr} f \theta' + 2 \text{Pr} f''^2 = 0 \quad (4.22)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \eta = 0 & f = f' = 0 & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \end{array} \right. \quad (4.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \eta = \infty & f' = 1 & \theta = 0 \end{array} \right. \quad (4.24)$$

4.4.1.1 Solution analytique.

L'équation (4.22) s'intègre par *la méthode de variation des constantes* :

-Equation homogène :

$$\theta'' + \frac{1}{2} \text{Pr} f \theta' = 0 \quad (4.25)$$

L'équation (4.25) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\theta''}{\theta'} = -\text{Pr} \frac{f}{2} \quad (4.26)$$

Or la fonction $f(\eta)$ étant solution de l'équation différentielle de Blasius ($2f''' + ff'' = 0$) il vient encore :

$$\frac{\theta''}{\theta'} = -\text{Pr} \frac{f'''}{f''} \quad (4.27)$$

L'intégration de l'équation (4.27) donne :

$$\theta' = k_1 f''^{\text{Pr}} \quad (4.28)$$

-Variation des constantes :

On considère k_1 comme une variable, puis on dérive l'équation (4.28), ce qui donne :

$$\theta'' = k_1 \text{Pr} f''^{(\text{Pr}-1)} f''' + k_1' f''^{\text{Pr}} \quad (4.29)$$

Si nous introduisons les équations (4.28) et (4.29) dans l'équation (4.22), nous obtenons après simplifications :

$$k_1' f''^{\text{Pr}} = -2 \text{Pr} f''^2$$

qui peut s'écrire aussi :

$$k_1' = -2 \text{Pr} f'''^{(2-\text{Pr})} \quad (4.30)$$

L'intégration de cette équation, donne :

$$k_1 = -2 \text{Pr} \int_0^\eta f'''^{(2-\text{Pr})} d\eta$$

Remplaçons k_1 par sa valeur dans l'équation (4.28) :

$$\theta' = -2 \text{Pr} f'''^{\text{Pr}} \int_0^\eta f'''^{(2-\text{Pr})} d\eta \quad (4.31)$$

L'introduction des conditions aux limites (4.23) et (4.24) conduit à la solution :

$$\theta = 2 \text{Pr} \int_0^\infty [f'''(\xi)]^{\text{Pr}} \left[\int_0^\xi [f'''(\eta)]^{(2-\text{Pr})} d\eta \right] d\xi \quad (4.32)$$

En particulier, pour $\text{Pr} = 1$, la fonction θ est égale à :

$$\theta_{\text{Pr}=1} = 1 - f'^2 \quad (4.33)$$

La valeur que prend la fonction θ pour $\eta = 0$, conduit à l'expression du facteur thermique pariétal, lequel dépend du nombre de "Prandtl" :

$$r = \theta_p = 2 \text{Pr} \int_0^\infty [f'''(\xi)]^{\text{Pr}} \left[\int_0^\xi [f'''(\eta)]^{(2-\text{Pr})} d\eta \right] d\xi = B(\text{Pr}) \quad (4.34)$$

D'après (4.33), pour $\text{Pr} = 1$, le facteur thermique pariétal est égale à 1, il est supérieur ou inférieur à l'unité, suivant que Pr est lui-même supérieur ou inférieur à l'unité.

4.4.1.2 Solution numérique.

La comparaison de l'équation (4.22) avec l'équation différentielle standard (4.11) donne, $A = \frac{1}{2} \text{Pr} f$, $B = 0$, et $D = -2 \text{Pr} f''^2$.

Les valeurs de A , B , et D connues à η_i nous permettent d'évaluer les coefficients C_{i1} , C_{i2} , C_{i3} et C_{i4} de l'équation (4.13) :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{i1} = 1 - \frac{h}{4} \text{Pr} f_i \\ C_{i2} = -2 \\ C_{i3} = 1 + \frac{h}{4} \text{Pr} f_i \\ C_{i4} = -2h^2 \text{Pr} f_i'' \end{array} \right. \quad (4.35)$$

L'équation au nœud n s'écrit, pour la variable adimensionnelle θ :

$$C_{n1}\theta_{n-1} + C_{n2}\theta_n + C_{n3}\theta_{n+1} = C_{n4} \quad (4.36)$$

Comme la valeur de θ_{n+1} est connue de la condition aux limites pour $\eta = \eta_{\max}$, l'équation (4.36) devient :

$$C_{n1}\theta_{n-1} + C_{n2}\theta_n = C_{n4} - C_{n3}\theta_{n+1}$$

alors, on remplace le coefficient C_{n4} , par $(C_{n4} - C_{n3}\theta_{n+1})$, puis on élimine le coefficient (C_{n3}) de θ_{n+1} , cette modification peut s'exprimer sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{n4} \leftarrow C_{n4} - C_{n3}\theta_{n+1} \\ C_{n3} \leftarrow 0 \end{array} \right. \quad (4.37)$$

$$(4.38)$$

Où $\theta_{n+1} = 0$, (d'après la condition aux limites thermique (4.24)).

L'équation (4.11), s'écrit en remplaçant la fonction \mathcal{F} par θ :

$$C_{11}\theta_0 + C_{12}\theta_1 + C_{13}\theta_2 = C_{14} \quad (4.39)$$

θ_0 est un point fictif, sa valeur est liée aux points intérieurs par la condition aux limites à $\eta = 0$.

Si on remplace $(\partial\theta/\partial\eta)$ par sa valeur dans la formule de différences centrées au nœud 1, on obtient :

$$\theta'_1 = \frac{1}{2h}(\theta_2 - \theta_0) = 0$$

c'est-à-dire : $\theta_2 = \theta_0$

Remplaçant θ_0 par sa valeur dans l'équation (4.39), nous obtenons :

$$C_{12}\theta_1 + (C_{13} + C_{13})\theta_2 = C_{14}$$

donc les coefficients C_{11} et C_{13} deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{13} \leftarrow C_{13} + C_{11} \\ C_{11} \leftarrow 0 \end{array} \right. \quad (4.40)$$

$$(4.41)$$

Après la modification des coefficients C_{n4} , C_{n3} , C_{13} et C_{11} , selon (4.37), (4.38), (4.40) et (4.41), le système (4.12) peut s'écrire sous forme matricielle, comme suit :

$$\begin{bmatrix} C_{12} & C_{13} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & C_{n-1,1} & C_{n-1,2} & C_{n-1,3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & C_{n1} & C_{n2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_{n-1} \\ \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{14} \\ C_{24} \\ C_{34} \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{n-1,4} \\ C_{n4} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

La résolution du système (4.42) peut être effectuée à l'aide de la méthode *d'élimination de Gauss*. Elle peut être présentée sous forme d'une subroutine nommée "TRID", selon les étapes suivantes :

On multiplie la deuxième équation du système (4.42) par C_{12} et la première par C_{21} , puis on prend la différence entre les deux équations pour éliminer θ_1 , l'équation résultante sera :

$$(C_{22}C_{12} - C_{21}C_{13})\theta_2 + C_{23}C_{12}\theta_3 = (C_{24}C_{12} - C_{21}C_{14}) \quad (4.43)$$

Dans cette équation, si on appelle le coefficient de θ_2 par C_{22} , et celle de θ_3 par C_{23} et le membre droit par C_{24} , l'équation (4.43) devient :

$$C_{22}\theta_2 + C_{23}\theta_3 = C_{24} \quad (4.44)$$

Si cette équation remplace la deuxième équation du système (4.43), sa forme ne va pas changée sauf C_{21} qui devient nul. On répète la même technique entre la nouvelle seconde équation et la troisième, le même processus est répété jusqu'à ce que $C_{n-1,1}$ est éliminé.

Le processus d'élimination est achevé par les coefficients :

$$\begin{cases} C_{i2} \leftarrow C_{i2}C_{i-1,2} - C_{i1}C_{i-1,3} \\ C_{i3} \leftarrow C_{i3}C_{i-1,2} \\ C_{i4} \leftarrow C_{i4}C_{i-1,2} - C_{i1}C_{i-1,4} \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (4.45)$$

donc toutes les équations de (4.42) sont de forme simple et ayant deux termes à la gauche. La valeur de θ_n peut être trouver immédiatement par résolution de la dernière équation de (4.42) :

$$\theta_n = \frac{C_{n4}C_{n-1,2} - C_{n1}C_{n-1,4}}{C_{n2}C_{n-1,2} - C_{n1}C_{n-1,3}} \quad (4.46)$$

les autres inconnues peuvent être calculées à l'aide des formules de récurrence :

$$\theta_i = \frac{C_{j4} - C_{j3}\theta_{j+1}}{C_{j2}} \quad j = n-1, n-2, \dots, 2, 1.$$

L'organigramme (4.3) résume les étapes de calcul de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. On considère différents milieux fluides pour effectuer notre calcul.

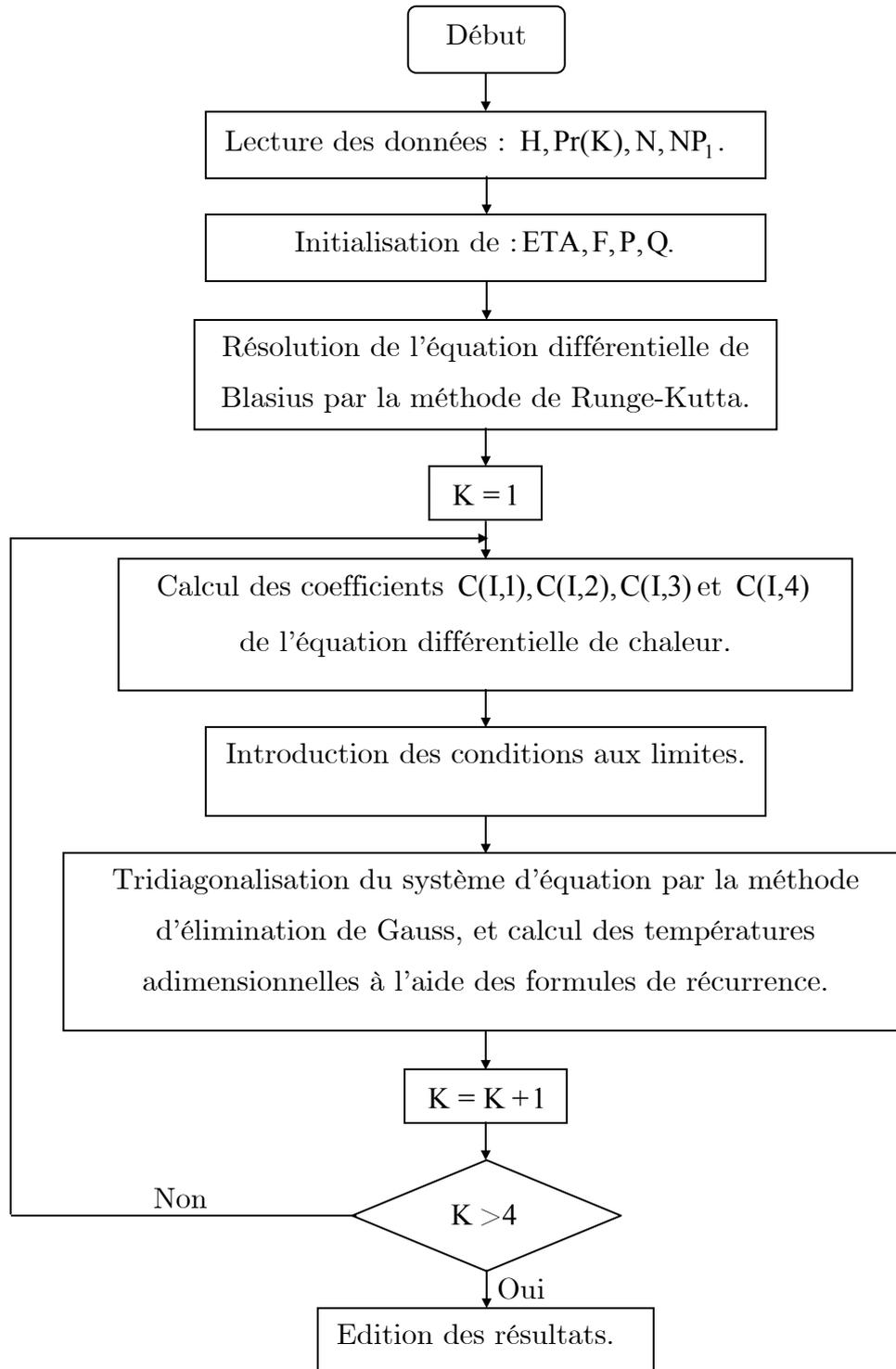


Fig.4.3 : Organigramme de résolution de l'équation de chaleur.

La figure (4.4), présente la distribution de température dans une couche limite thermique sur une plaque plane adiabatique, en convection forcée à grande vitesse.

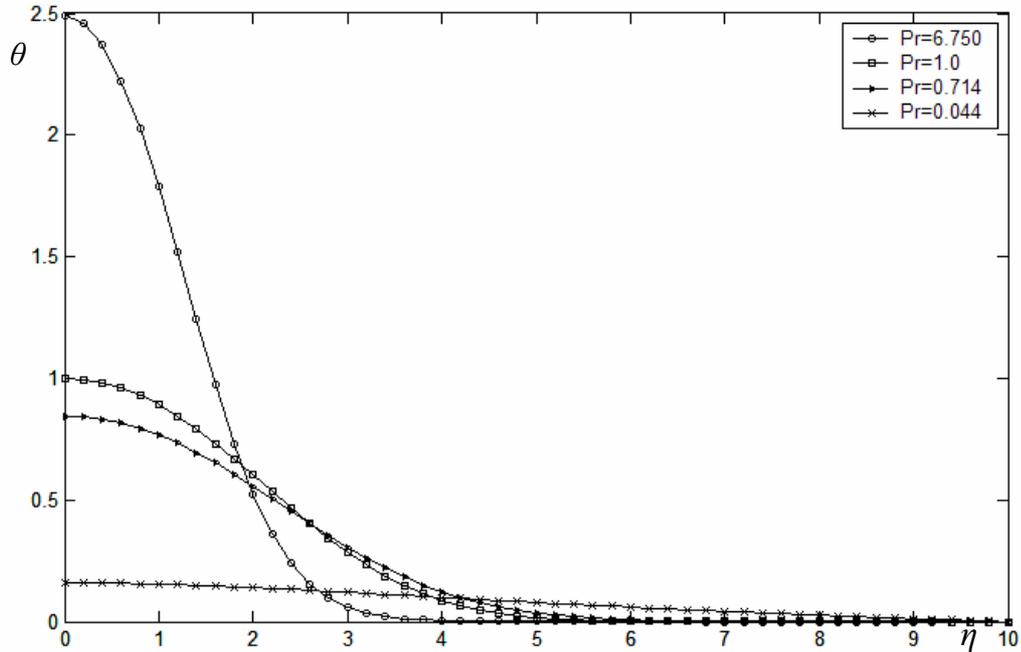


Fig.4.4 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane adiabatique avec dissipation pour divers nombres de Prandtl.

4.4.2 Solution en paroi isotherme.

Dans ce cas, la plaque est maintenue en tout point à une température T_p (figure 4.5). En utilisant la même variable adimensionnelle $\theta(\eta)$.

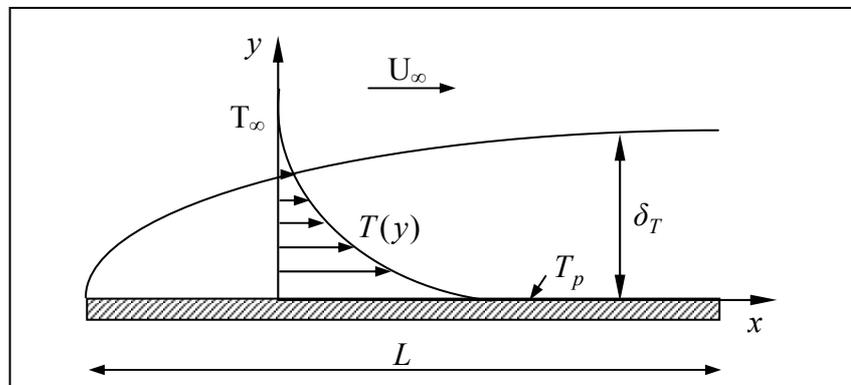


Fig.4.5 : Distribution de température sur une couche limite thermique le long d'une paroi isotherme.

Dans ces conditions, l'équation d'énergie reste la même :

$$\theta'' + \frac{1}{2} \text{Pr} f \theta' + 2 \text{Pr} f'' = 0$$

On choisit comme valeur de température à la paroi T_p :

$$T_p = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2C_p}$$

avec les conditions aux limites transformées :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \eta = 0 & f = f' = 0 & \theta = 1 \end{array} \right. \quad (4.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \eta = \infty & f' = 1 & \theta = 0 \end{array} \right. \quad (4.48)$$

Les coefficients C_{i1}, C_{i2}, C_{i3} et C_{i4} restent les mêmes, d'après les conditions aux limites (4.47) et (4.48). Les valeurs de θ_0 et θ_{n+1} sont connues, donc les équations (4.14) et (4.15) peuvent s'écrire, pour la variable adimensionnelle $\theta(\eta)$ comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{12}\theta_1 + C_{13}\theta_2 = C_{14} - C_{11}\theta_0 \\ C_{n1}\theta_{n-1} + C_{n2}\theta_n = C_{n4} - C_{n3}\theta_{n+1} \end{array} \right. \quad (4.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{n1}\theta_{n-1} + C_{n2}\theta_n = C_{n4} - C_{n3}\theta_{n+1} \end{array} \right. \quad (4.50)$$

d'après l'équation (4.49), les coefficients C_{14} et C_{11} deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{14} \leftarrow C_{14} - C_{11}\theta_0 \\ C_{11} \leftarrow 0 \end{array} \right.$$

et d'après l'équation (4.50), les coefficients C_{n4} et C_{n3} deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{n4} \leftarrow C_{n4} - C_{n3}\theta_{n+1} \\ C_{n3} \leftarrow 0 \end{array} \right.$$

Nous introduisons ces nouveaux coefficients dans le système (4.42), puis on refait les mêmes étapes pour calculer $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$. La figure (4.6) présente la distribution de température dans une couche limite sur plaque plane maintenue à température constante en tenant compte de l'effet de dissipation visqueuse, pour divers milieux fluides.

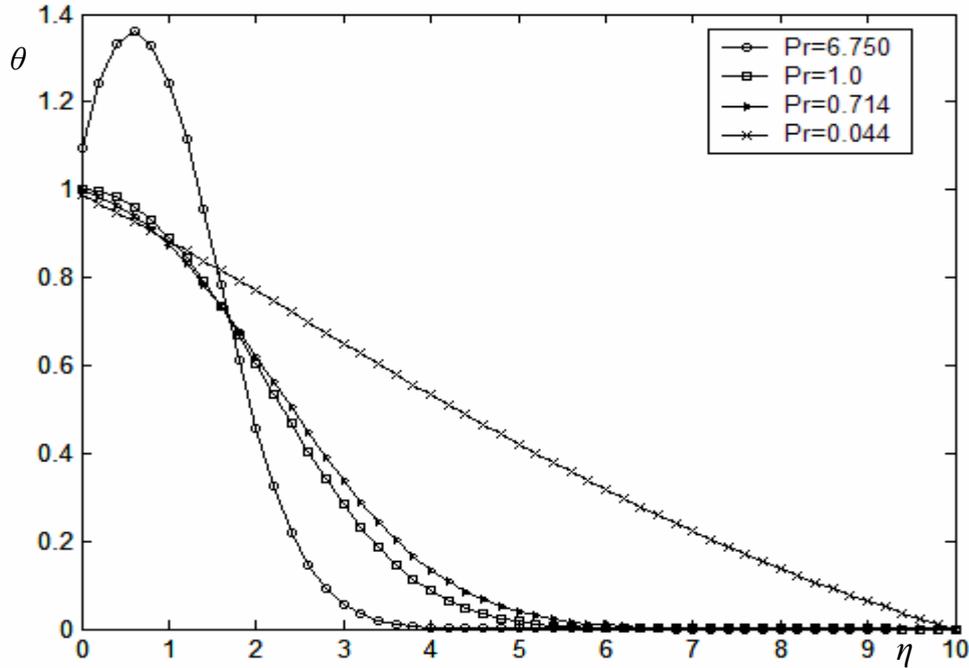


Fig.4.6 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme avec dissipation pour divers nombres de Prandtl.

4.4.3 Solution en paroi avec flux de chaleur constant.

Dans ce cas, l'équation (4.7) reste la même, les conditions aux limites deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \eta = 0 & f = f' = 0 & \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_P = Cte < 0 \end{array} \right. \quad (4.51)$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \eta = \infty & f' = 1 & \theta = 0 \end{array} \right. \quad (4.52)$$

Pour déterminer la valeur de flux à la paroi, on reprend la même variable

adimensionnelle $\theta(\eta)$ telle que :

$$\theta(\eta) = \frac{T(x,y) - T_\infty}{\frac{U_\infty^2}{2C_p}} \quad (4.53)$$

On sait que la densité de flux de chaleur à la paroi se traduit par la relation :

$$\phi_p(x) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p$$

où $\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p$ s'écrit d'après (4.53) comme suit :

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p = \frac{U_\infty^2}{2C_p} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_p \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad (4.54)$$

rappelons que $\eta = y \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2}$ et $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \left(\frac{U_\infty}{\nu x} \right)^{1/2} = \frac{1}{x} \text{Re}_x^{1/2}$.

on a donc :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_p = \frac{\phi_p(x)x}{-\lambda \text{Re}_x^{1/2} \frac{U_\infty^2}{2C_p}} \quad (4.55)$$

avec :

$$\phi_p(x) = k[T_p - T_\infty]$$

et :

$$T_p = \frac{U_\infty^2}{2C_p} + T_\infty$$

la relation (4.55) devient :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_p = \frac{-kx}{\lambda \text{Re}_x^{1/2}} \quad (4.56)$$

Où $\frac{kx}{\lambda}$; le nombre de "Nusselt" est fonction du nombre de "Prandtl" et du nombre de "Reynolds", selon [16] on a :

$$Nu_x = 0.453 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}^{1/2}$$

$$\text{Pr} > 0.6$$

Pour des valeurs de "Prandtl" supérieures ou égales à 0.6 le flux de chaleur pariétal est donné par :

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_P = -0.453 \text{Pr}^{1/3}$$

Comme on a pas d'informations sur la distribution du nombre de "Nusselt" pour ($\text{Pr} < 0.6$), pour cela, on fait recours à la détermination du gradient de température adimensionnelle à partir de la résolution de l'équation phénoménologique générale traitée au paragraphe (4.4.1.1), ce qui conduit à l'équation (4.31) :

$$\theta' = -2 \text{Pr} f''' \int_0^\eta f''^{(2-\text{Pr})} d\eta \quad (4.57)$$

L'intégration analytique de (4.57) est difficile, on utilise la formule de "Trapèze" pour l'approximation de cette intégrale. On sait que :

$$\int_a^b F(x) dx \simeq \frac{b-a}{2n} \left(F(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} F\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) + F(b) \right)$$

avec n est le nombre de subdivisions.

Posons :

$$A_n = \int_0^\eta f''^{(2-\text{Pr})}(\eta) d\eta$$

Appliquons la formule de "Trapèze" pour calculer l'intégrale A_n , soit : $n = 10$:

$$A_n \simeq \frac{\eta_{\max}}{20} \left(f''^{(2-\text{Pr})}(0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f''^{(2-\text{Pr})}\left(i \frac{\eta_{\max}}{10}\right) + f''^{(2-\text{Pr})}(\eta_{\max}) \right)$$

On a : $f''^{(2-\text{Pr})}(\eta_{\max}) = 0$, et $\eta_{\max} = 10$, ce qui donne :

$$A_n \simeq \frac{1}{2} \left(f''^{(2-\text{Pr})}(0) + 2 \sum_{i=1}^9 f''^{(2-\text{Pr})}(i) \right)$$

et :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_p = -2 \text{Pr} f''^{\text{Pr}}(0) A_n$$

Remplaçons $f''^{\text{Pr}}(0)$ par sa valeur on obtient :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_p = -2 \text{Pr} A_n (0.332)^{\text{Pr}} \quad (4.58)$$

Cette relation va nous permettre de connaître la valeur du flux pariétal pour n'importe quel nombre de "Prandtl". En injectant la valeur de flux dans les conditions aux limites (4.51), on obtient :

$$\eta = 0 \quad f = f' = 0 \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_p = -2 \text{Pr} A_n (0.332)^{\text{Pr}} \quad (4.59)$$

si on applique la formule des différences centrées au nœud 1, nous arrivons à la relation suivante :

$$\theta'_1 = \frac{1}{2h} (\theta_2 - \theta_0) = -2 \text{Pr} A_n (0.332)^{\text{Pr}}$$

on a donc :

$$\theta_2 - \theta_0 = -4h \text{Pr} A_n (0.332)^{\text{Pr}} \quad (4.60)$$

En multipliant cette équation par C_{11} :

$$\begin{cases} -C_{11}\theta_0 + C_{11}\theta_2 = -4h \text{Pr} A_n (0.332)^{\text{Pr}} C_{11} \\ C_{11}\theta_0 + C_{12}\theta_1 + C_{13}\theta_2 = C_{14} \end{cases}$$

sa combinaison avec l'équation (4.39), nous donne :

$$C_{12}\theta_1 + (C_{11} + C_{13})\theta_2 = C_{14} - 4h \text{Pr} A_n (0.332)^{\text{Pr}} C_{11}$$

avec cette nouvelle équation, les coefficients C_{13} , C_{14} , et C_{11} seront remplacés comme suit :

$$\begin{cases} C_{13} \leftarrow C_{13} + C_{11} \\ C_{14} \leftarrow C_{14} - 4h \text{Pr} A_n (0.332)^{\text{Pr}} C_{11} \\ C_{11} \leftarrow 0 \end{cases}$$

la condition à $(\eta = \eta_{\max})$ reste valable, alors les coefficients C_{n4} et C_{n3} s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} C_{n4} \leftarrow C_{n4} - C_{n3} \theta_{n+1} \\ C_{n3} \leftarrow 0 \end{cases}$$

On introduit ces nouveaux coefficients (C_{13} , C_{14} , C_{11} , C_{n4} et C_{n3}) dans le système (4.42) ensuite on résout par la méthode d'*élimination de Gauss*. Les résultats obtenus pour ces conditions sont présentés sur la figure (4.7) pour divers nombres de "Prandtl".

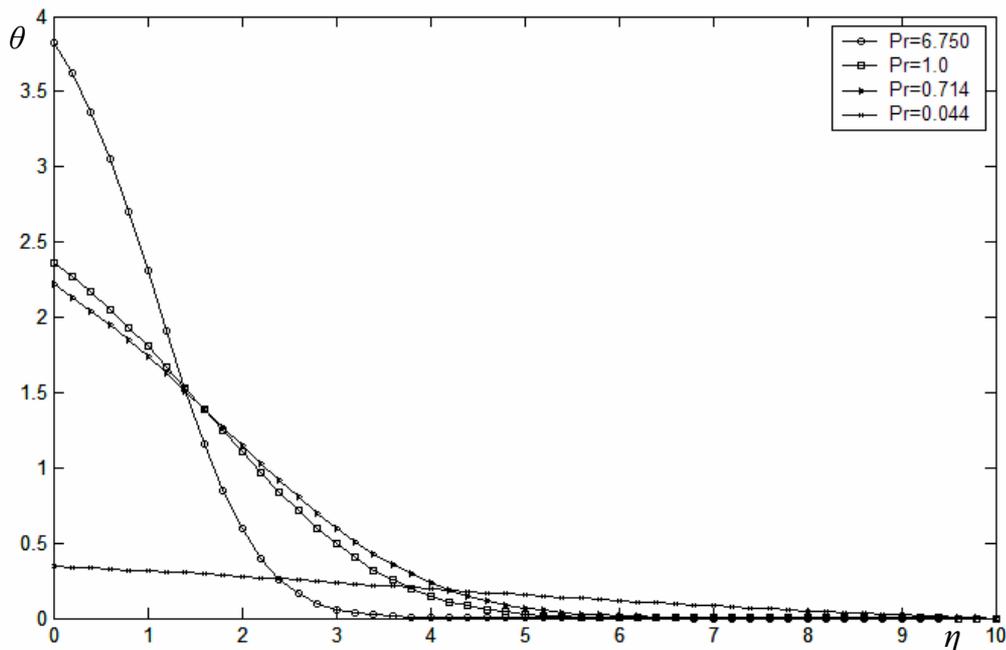


Fig.4.7 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane avec un flux de chaleur en convection forcée à grande vitesse pour divers nombres de Prandtl.

4.5 Convection forcée isovolume à basse vitesse.

Dans cette application, nous supposons que la dissipation par viscosité, résultant de l'arrêt du fluide sur la plaque, dégage une quantité de chaleur négligeable, ce qui est le cas pour des valeurs modérées de la vitesse de l'écoulement externe.

Sous les hypothèses caractérisant cette configuration de couche limite thermique, la solution du problème pour une condition de paroi adiabatique (flux de chaleur pariétal nul) est triviale et s'obtient avec une température de plaque égale à celle du fluide à l'infini, car les variations de température ne sont dues qu'à l'échauffement cinétique, c'est pourquoi, nous examinerons deux cas; celui d'une paroi isotherme et celui avec flux de chaleur pariétal constant.

4.5.1 Solution en paroi isotherme.

4.5.1.1 Solution numérique.

En négligeant le terme de dissipation visqueuse de l'équation (4.7), l'équation d'énergie s'écrit :

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.61)$$

si on garde la même variable adimensionnelle $\theta(\eta)$, l'équation différentielle (4.7) devient :

$$\theta'' + \frac{1}{2} \text{Pr} f \theta' = 0 \quad (4.62)$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \eta = 0 & f = f' = 0 & \theta = 1 \\ \eta = \infty & f' = 1 & \theta = 0 \end{array} \right.$$

La comparaison de l'équation (4.62) et l'équation différentielle standard (4.8) donne, $A = \frac{1}{2} Pr f$, $B = 0$, et $D = 0$.

On remarque que seul le deuxième membre qui va changer ($D = 0$) ce qui conduit au changement du coefficient C_{i4} qui devient nul. Alors pour le cas d'une plaque plane isotherme, les étapes de calcul numérique restent les mêmes avec ($C_{i4} \leftarrow 0$), nous résolvons le problème analytiquement afin de comparer les résultats obtenus avec ceux du calcul numérique.

4.5.1.2 Solution analytique.

L'équation (4.62) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\theta''}{\theta'} = -Pr \frac{f}{2}$$

or la fonction $f(\eta)$ étant solution de l'équation différentielle de "Blasius" ($2f''' + ff'' = 0$), il vient alors :

$$\frac{\theta''}{\theta'} = -Pr \frac{f'''}{f''} \quad (4.63)$$

dont l'intégration est immédiate et donne :

$$\theta(\eta) = 1 - \frac{\int_0^\eta [f''(u)]^{Pr} du}{\int_0^\infty [f''(u)]^{Pr} du} \quad (4.64)$$

Pour un nombre de "Prandtl" égale à l'unité, l'équation (4.64) devient :

$$\theta(\eta) = 1 - f'(\eta)$$

La figure (4.8) représente la distribution de température θ en fonction de η obtenue par le calcul numérique, pour des différents nombre de "Prandtl" en paroi isotherme sans dissipation visqueuse. Dans la figure (4.9) on peut comparer ces

résultats avec ceux obtenus à l'aide de la méthode analytique pour un nombre de "Prandtl" égal à l'unité.

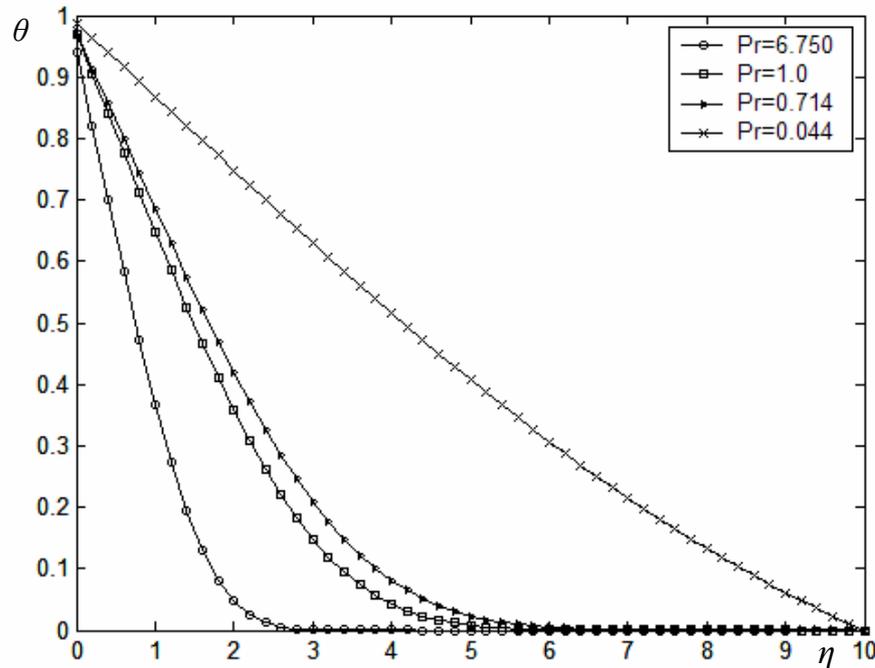


Fig.4.8 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme sans dissipation pour divers nombres de Prandtl.

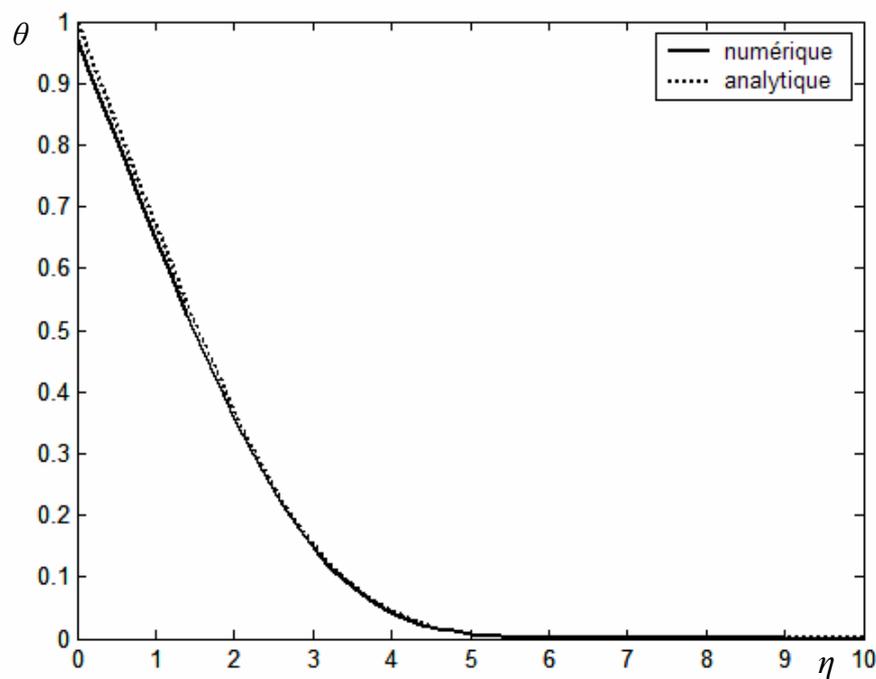


Fig.4.9 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane isotherme sans dissipation pour un nombre de Prandtl égale à l'unité.

4.5.2 Solution numérique en paroi à flux de chaleur constant.

L'intégration de l'équation (4.63) donne l'équation (4.28) :

$$\theta' = k_1 f''^{\text{Pr}}$$

où k_1 est la constante d'intégration, on prend comme valeur ($k_1 = -1$), cette valeur est choisie négative pour vérifier la loi de "Fourrier".

Soit à résoudre l'équation :

$$\theta'' + \frac{1}{2} \text{Pr} f \theta' = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \eta = 0 & f = f' = 0 & \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_P = -f''^{\text{Pr}} \\ \eta = \infty & f' = 1 & \theta = 0 \end{array} \right.$$

ce qui traduit par le changement des coefficients suivants :

- Pas de dissipation visqueuse :

$$C_{i4} \leftarrow 0$$

- Introduction des conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{13} \leftarrow C_{13} + C_{11} \\ C_{14} \leftarrow C_{14} - 2hf''^{\text{Pr}}C_{11} \\ C_{11} \leftarrow 0 \end{array} \right.$$

Les résultats sont présentés sur la figure (4.10).

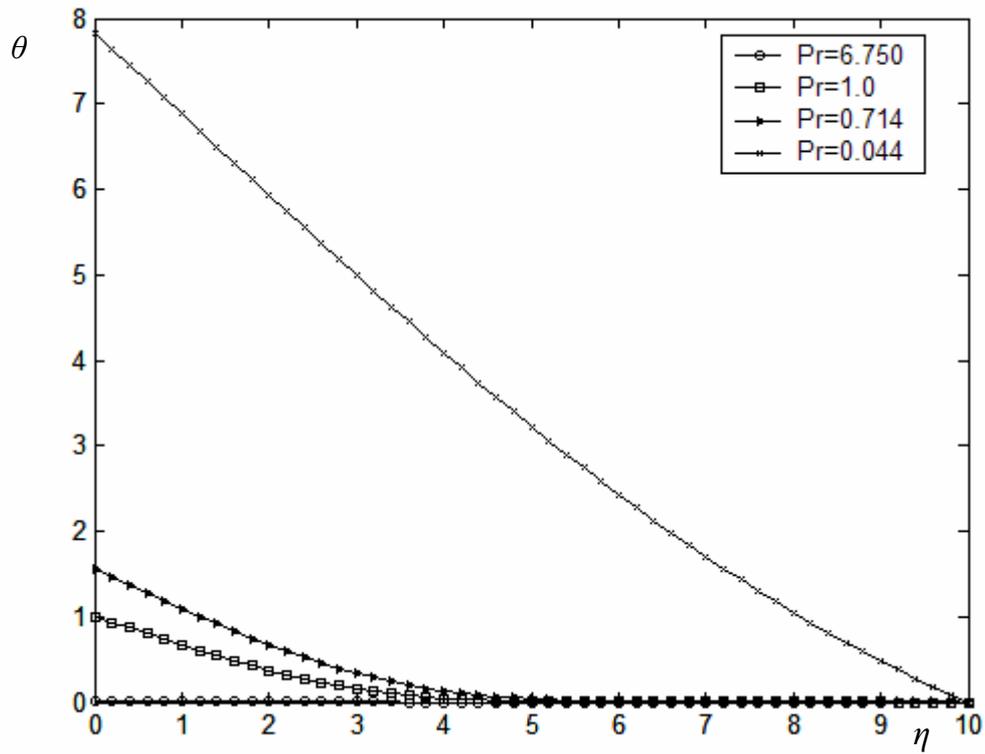


Fig.4.10 : Distribution de température en couche limite sur une plaque plane avec un flux de chaleur sans dissipation pour divers nombres de Prandtl.

4.6 Interpolation des résultats.

Grâce aux nombreux calculs effectués en fonction des différentes valeurs de "Prandtl" et de types de paroi, on a pu faire une interpolation des résultats, afin d'aboutir à une équation plus générale qui peut déterminer le rapport $\mathfrak{R} = \frac{\delta}{\delta_T}$ pour tout les nombres de "Prandtl".

Cette interpolation a été faite selon les cas traités au préalable :

Pour la convection forcée à grande vitesse on a déterminé le rapport \mathfrak{R} pour les trois types de paroi suivant :

- Paroi adiabatique $\left(\frac{\partial T}{\partial y} = 0\right)$,
- paroi isotherme ($T = Cte$),
- paroi avec flux de chaleur pariétal constant $\left(\frac{\partial T}{\partial y} = Cte\right)$.

Pour le cas de la convection forcée à basse vitesse, on refait le même travail en excluant le cas d'une plaque adiabatique.

Les différents milieux fluides étudiés ont été classés selon le nombre de Prandtl, pour des valeurs inférieures à 0.6, (c'est le cas des métaux liquides), et pour des valeurs comprises entre 0.6 et 50 (le cas des liquides et des gaz). Les formules obtenues sont résumées dans le tableau (4.1).

4.6.1 Evaluation des épaisseurs de la couche limite thermique.

Les valeurs de δ_T est extrait du rapport \mathfrak{R} , en remplaçant δ par sa valeur pour chaque cas, on aboutit à la formule de δ_T en fonction du nombre de Prandtl, nombre de Reynolds et la distance x .

Pour illustrer l'influence de type de paroi et du nombre de Prandtl sur l'épaisseur de la couche limite thermique, on choisit différents fluides, puis on trace les épaisseurs δ_T de chaque fluide pour les divers types de paroi.

On choisit à titre d'exemple les fluides suivants :

- Pour les gazs : Air (Pr=0.714).
- Pour les liquides : Eau (Pr=6.750).
- Pour les métaux liquides : Mercure (Pr=0.044).

Tab.4.1 : Principales caractéristiques de la couche limite thermique sur une plaque plane sans contrôle, pour divers milieux fluides et différents types de paroi.

Type de convection	Milieu fluide	Type de paroi	$\delta_T \frac{\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$	$\frac{\delta}{\delta_T}$	$\Delta \frac{\sqrt{\text{Re}_x}}{x}$
A basse vitesse	Liquides et gaz	Isotherme	$\frac{4.8876}{\text{Pr}^{0.3675}}$	$1.023 \text{Pr}^{0.3675}$	$0.664 \text{Pr}^{-2/3}$
		Avec flux de chaleur	$\frac{4.6241}{\text{Pr}^{0.6664}}$	$1.0813 \text{Pr}^{0.6664}$	$0.970 \text{Pr}^{-3.72}$
	Métaux liquides	Isotherme	$\frac{6.6313}{\text{Pr}^{0.1103}}$	$0.7540 \text{Pr}^{0.1103}$	$1.128 \text{Pr}^{-1/2}$
		Avec flux de chaleur	$\frac{6.4201}{\text{Pr}^{0.2144}}$	$0.7788 \text{Pr}^{0.2144}$	$\text{Pr}^{-1.267}$
A grande vitesse	Liquides et gaz	Isotherme	$\frac{5.3596}{\text{Pr}^{0.2014}}$	$0.9329 \text{Pr}^{0.2014}$	$0.522 + 0.664 \text{Pr}^{-2/3}$
		Avec flux de chaleur	$\frac{5.9228}{\text{Pr}^{0.2481}}$	$0.8442 \text{Pr}^{0.2481}$	$0.906 \text{Pr}^{-2/3}$
		Adiabatique	$\frac{5.3614}{\text{Pr}^{0.1981}}$	$0.9326 \text{Pr}^{0.1981}$	0
	Métaux liquides	Isotherme	$\frac{6.9061}{\text{Pr}^{0.0996}}$	$0.7240 \text{Pr}^{0.0996}$	$0.522 + 1.18 \text{Pr}^{-1/2}$
		Avec flux de chaleur	$\frac{5.881}{\text{Pr}^{0.3402}}$	$0.8502 \text{Pr}^{0.3402}$	$1.18 \text{Pr}^{0.045}$
		Adiabatique	$\frac{6.2298}{\text{Pr}^{0.1409}}$	$0.8026 \text{Pr}^{0.1409}$	0

4.6.1.1 Epaisseur conventionnelle de la couche limite thermique.

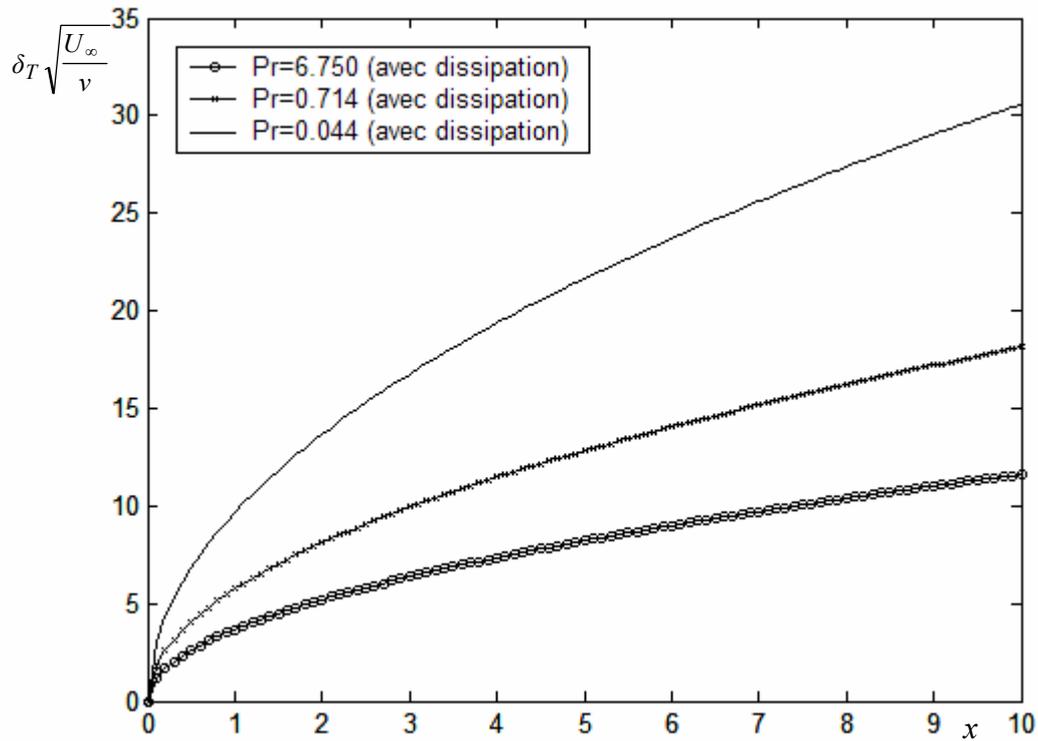


Fig.4.11 : Influence du nombre de Prandtl sur l'épaisseur de couche limite thermique le long d'une paroi adiabatique en convection forcée à grande vitesse.

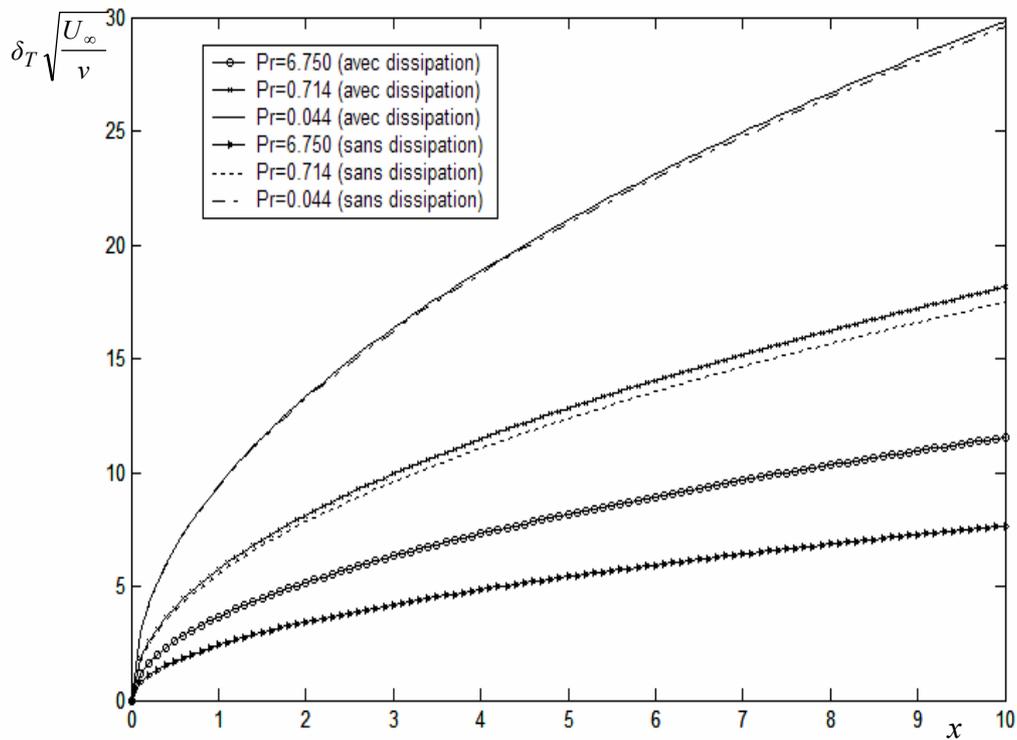


Fig.4.12 : Influence du nombre de Prandtl sur l'épaisseur de couche limite thermique le long d'une paroi isotherme.

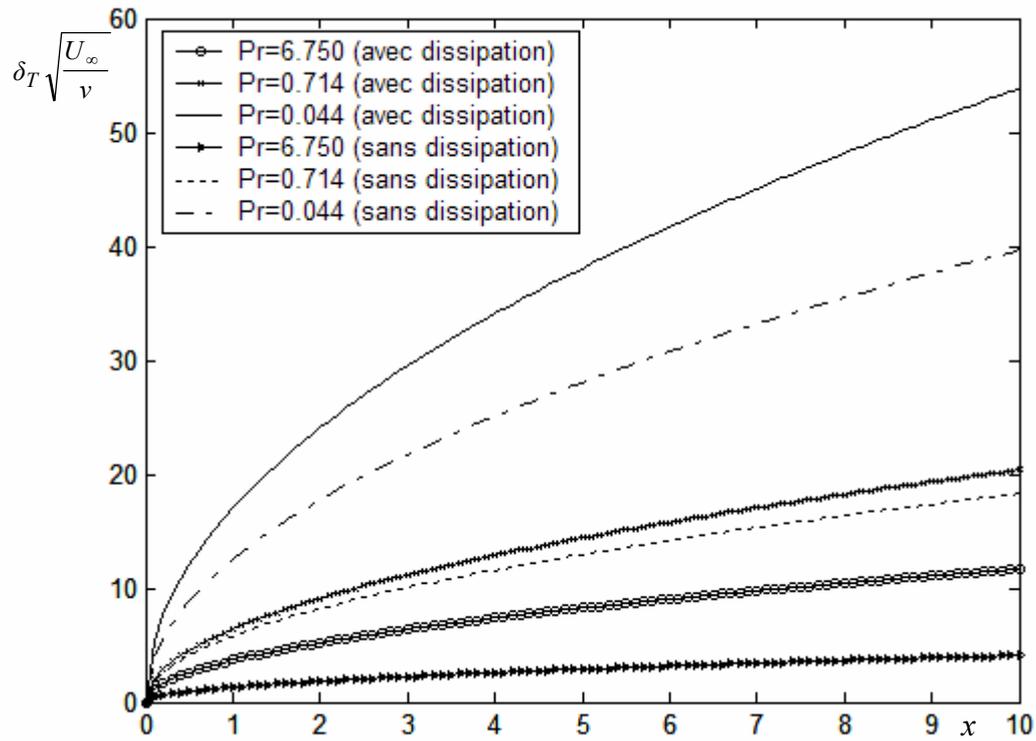


Fig.4.13 : Influence du nombre de Prandtl sur l'épaisseur de couche limite thermique le long d'une paroi avec flux de chaleur.

4.6.1.2 Epaisseur d'enthalpie de la couche limite thermique.

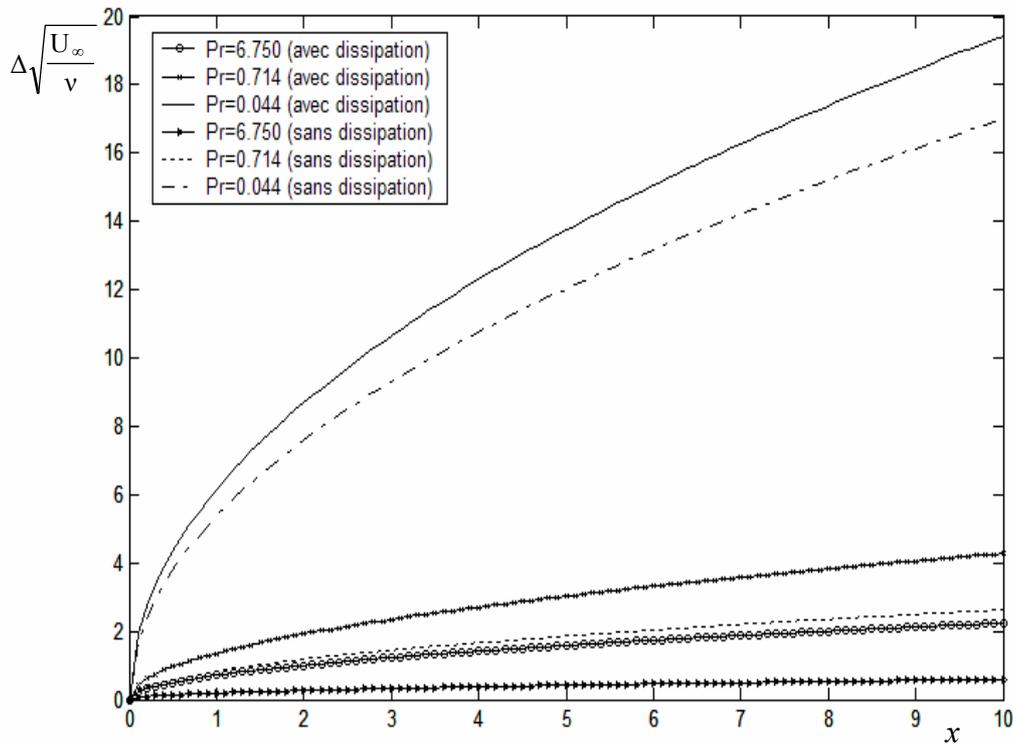


Fig.4.14 : Influence du nombre de Prandtl sur l'épaisseur d'enthalpie de couche limite thermique le long d'une paroi isotherme.

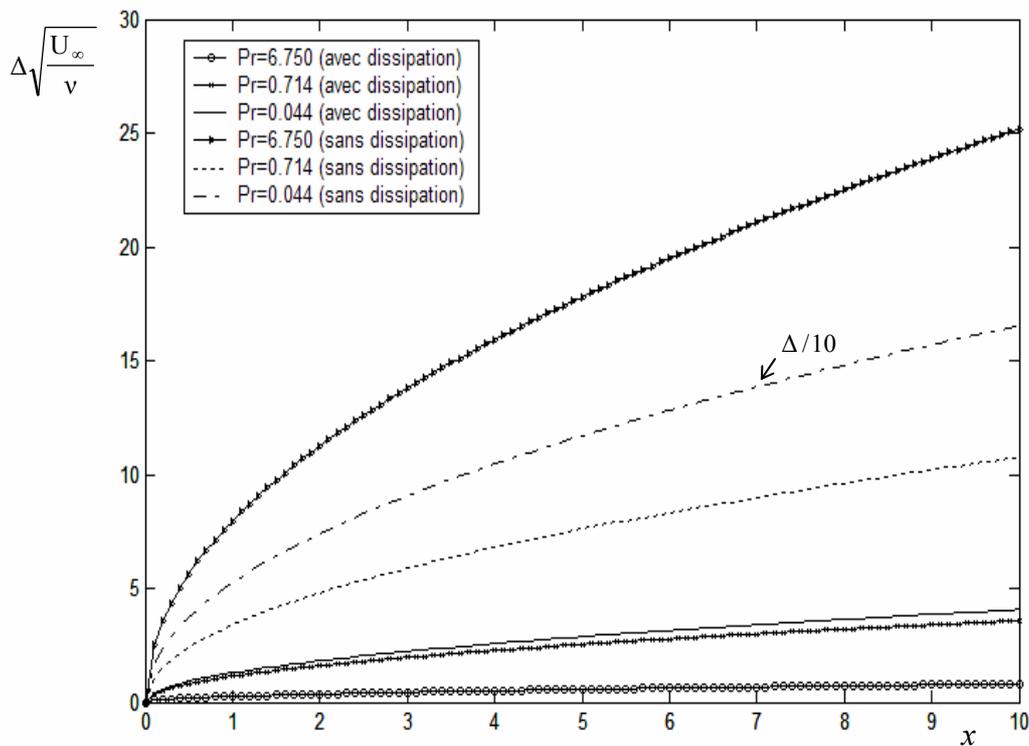


Fig.4.15 : Influence du nombre de Prandtl sur l'épaisseur d'enthalpie de couche limite thermique le long d'une paroi avec flux de chaleur.

4.6.2 Rapport des épaisseurs \Re .

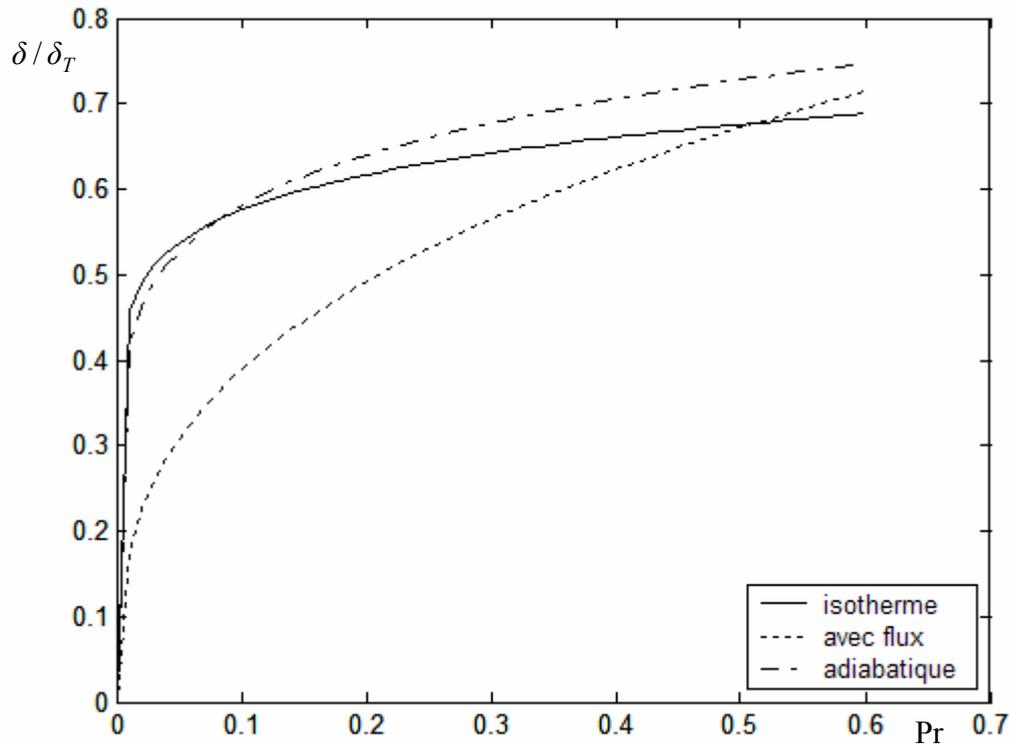


Fig.4.16 : Influence de type de paroi et du nombre de Prandtl sur le rapport des épaisseurs dynamique et thermique en convection forcée à grande vitesse pour les métaux liquides.

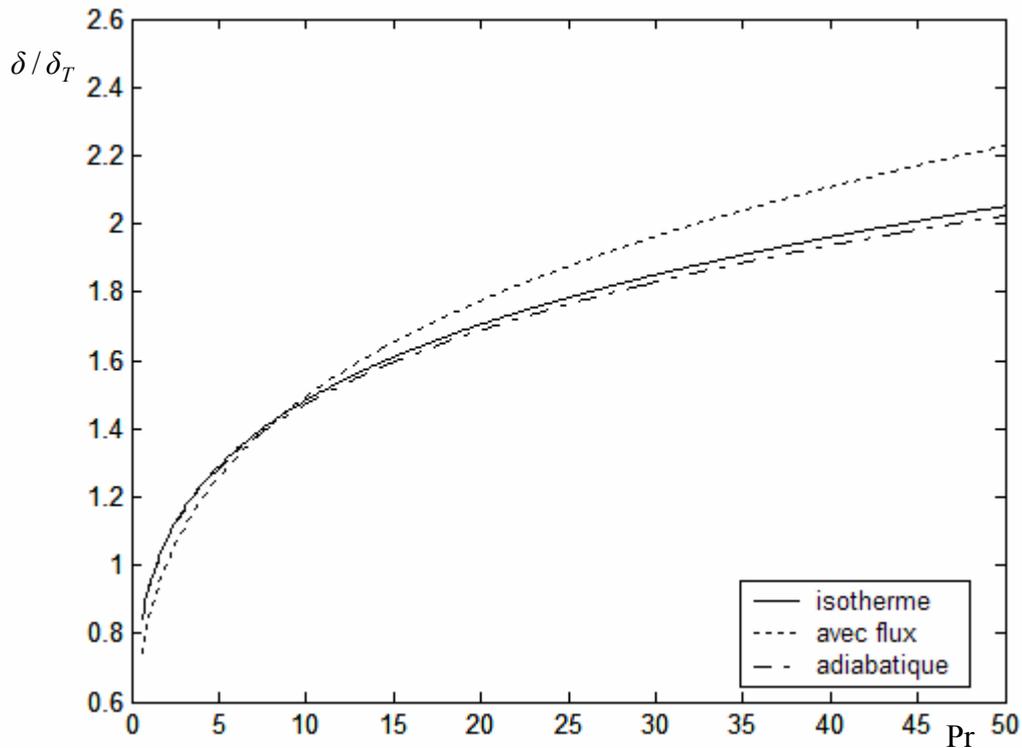


Fig.4.17 : Influence de type de paroi et du nombre de Prandtl sur le rapport des épaisseurs dynamique et thermique en convection forcée à grande vitesse pour les liquides et les gaz.

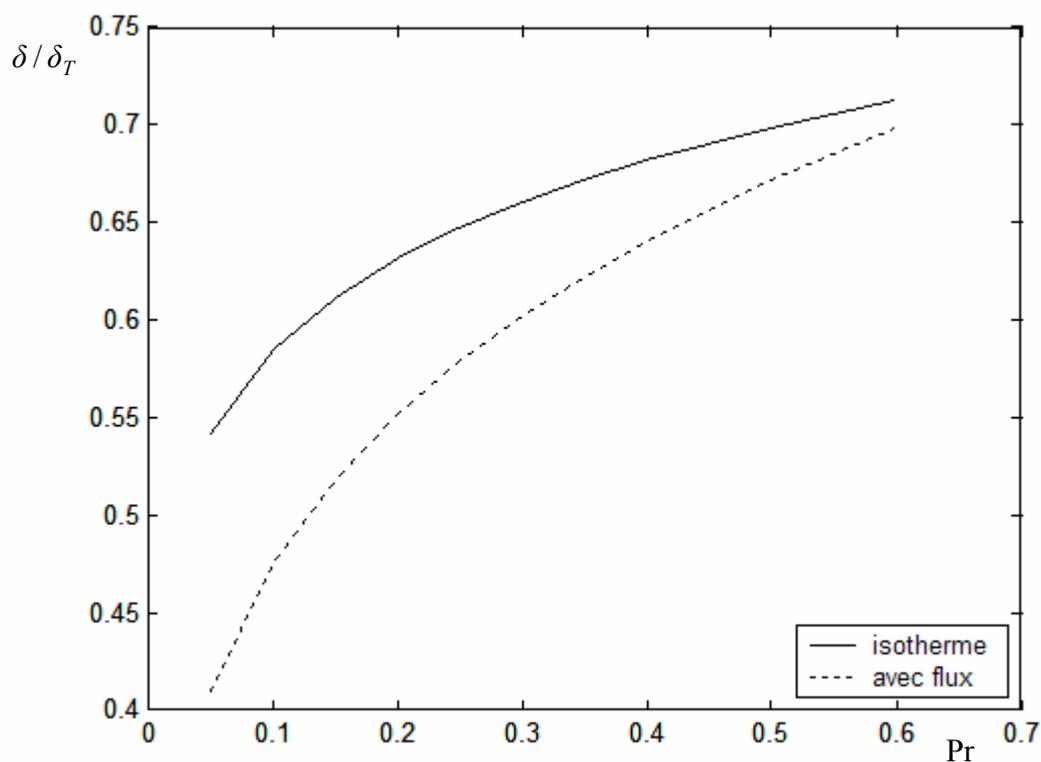


Fig.4.18 : Influence de type de paroi et du nombre de Prandtl sur le rapport des épaisseurs dynamique et thermique en convection forcée à basse vitesse pour les métaux liquides.

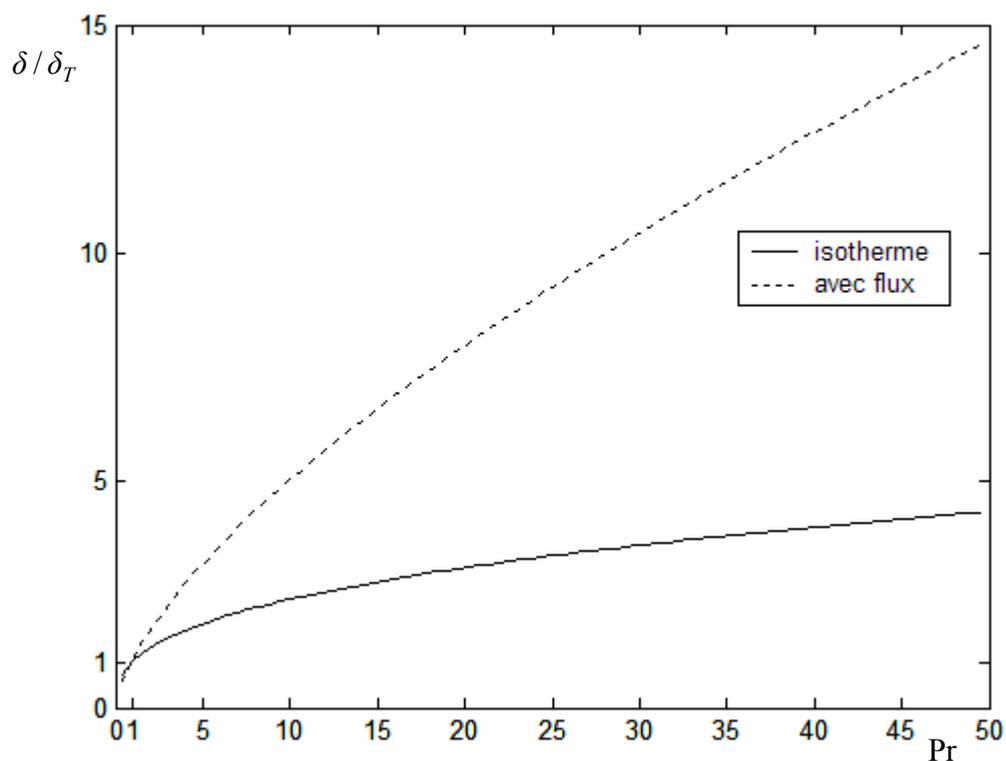


Fig.4.19 : Influence de type de paroi et du nombre de Prandtl sur le rapport des épaisseurs dynamique et thermique en convection forcée à basse vitesse pour les liquides et les gaz.

4.7 Contrôle actif de la couche limite thermique.

On refait le même travail de la section (3.3) pour le contrôle de la couche limite thermique. On étudie seulement le cas d'un soufflage ou aspiration avec une vitesse uniforme. On représente les résultats de calcul sous forme graphique sur les figures suivantes :

4.7.1 En convection forcée à grande vitesse.

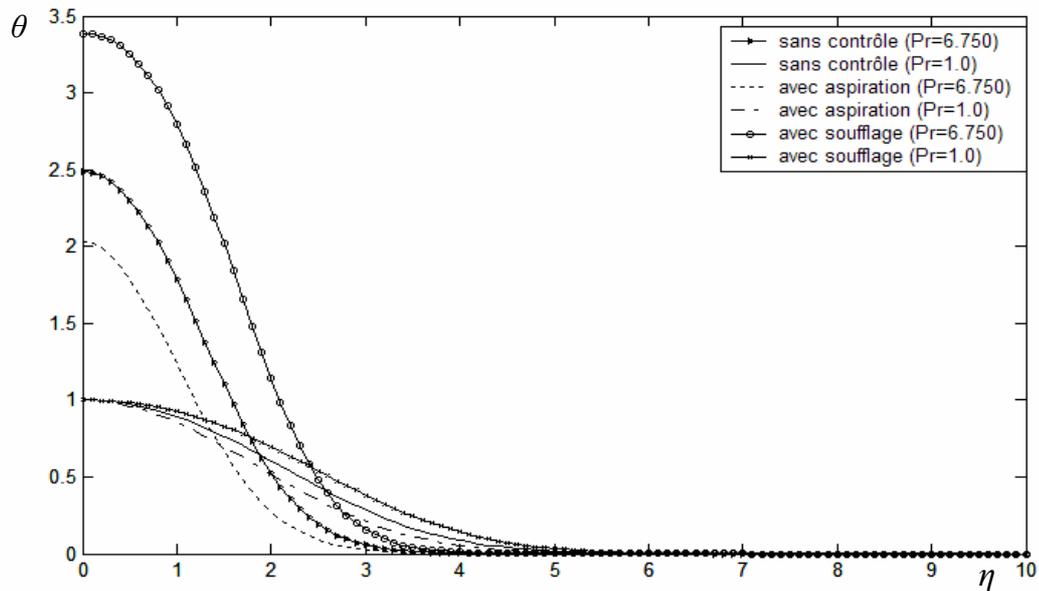


Fig.4.20 : Distribution de température dans une couche limite le long d'une paroi adiabatique avec dissipation en présence du contrôle ($Pr \geq 1$).

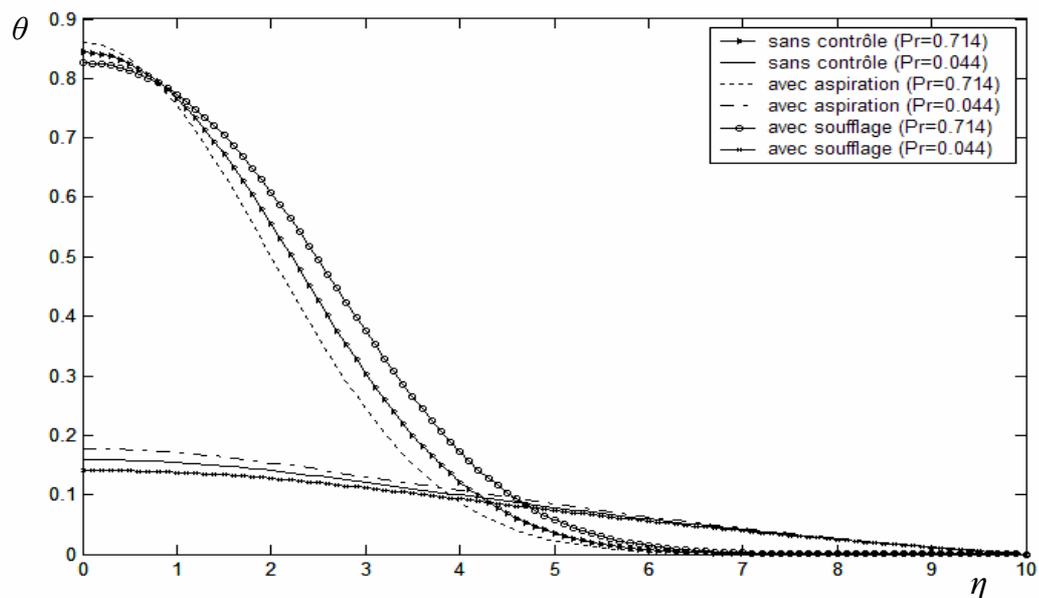


Fig.4.21 : Distribution de température dans une couche limite le long d'une paroi adiabatique avec dissipation en présence du contrôle ($Pr < 1$).

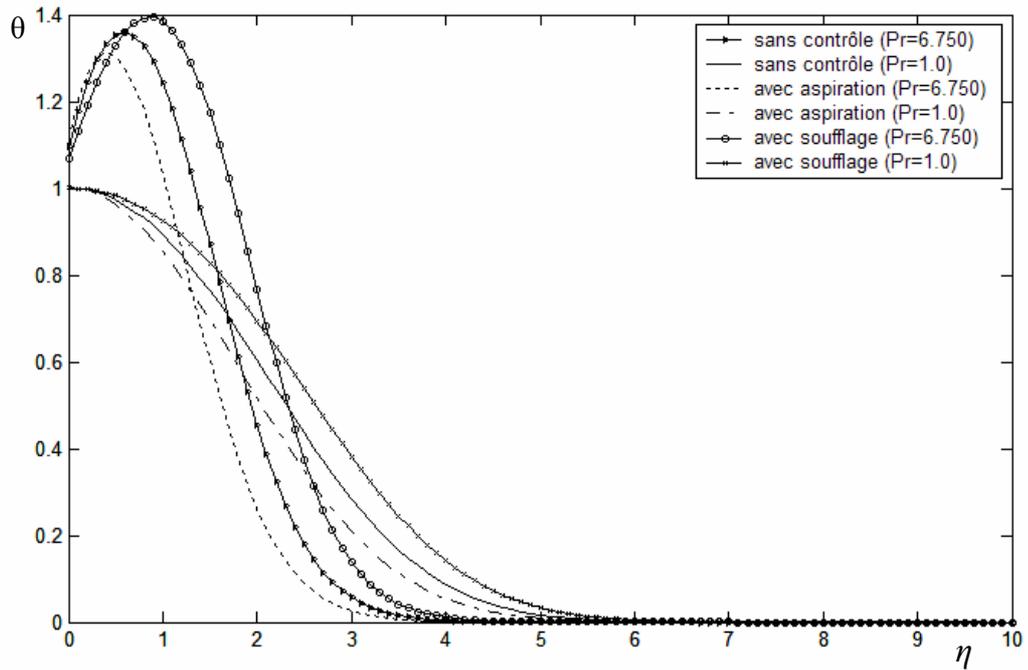


Fig.4.22 : Distribution de température dans une couche limite sur une paroi isotherme avec dissipation en présence du contrôle ($Pr \geq 1$).

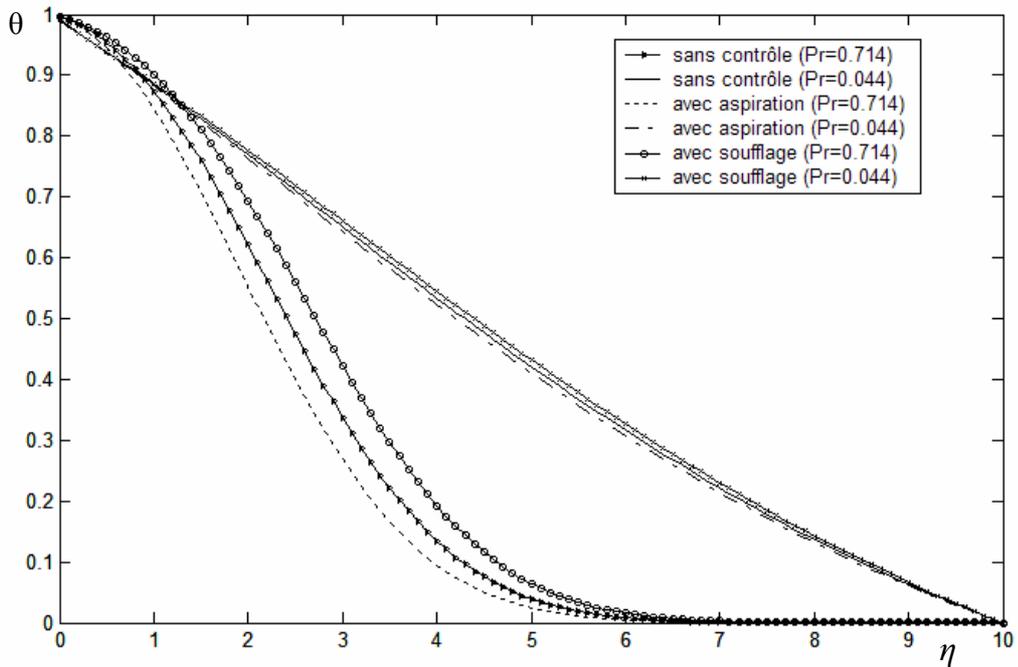


Fig.4.23 : Distribution de température dans une couche limite sur une paroi isotherme avec dissipation en présence du contrôle ($Pr < 1$).

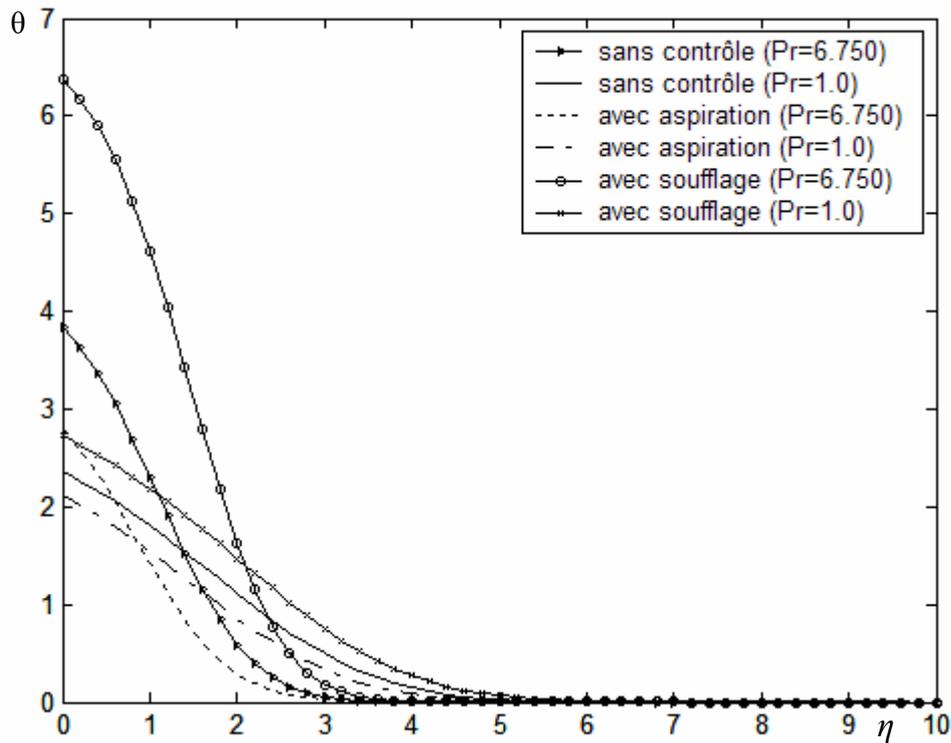


Fig.4.24 : Distribution de température dans une couche limite sur une paroi avec flux de chaleur avec dissipation en présence du contrôle ($Pr \geq 1$).

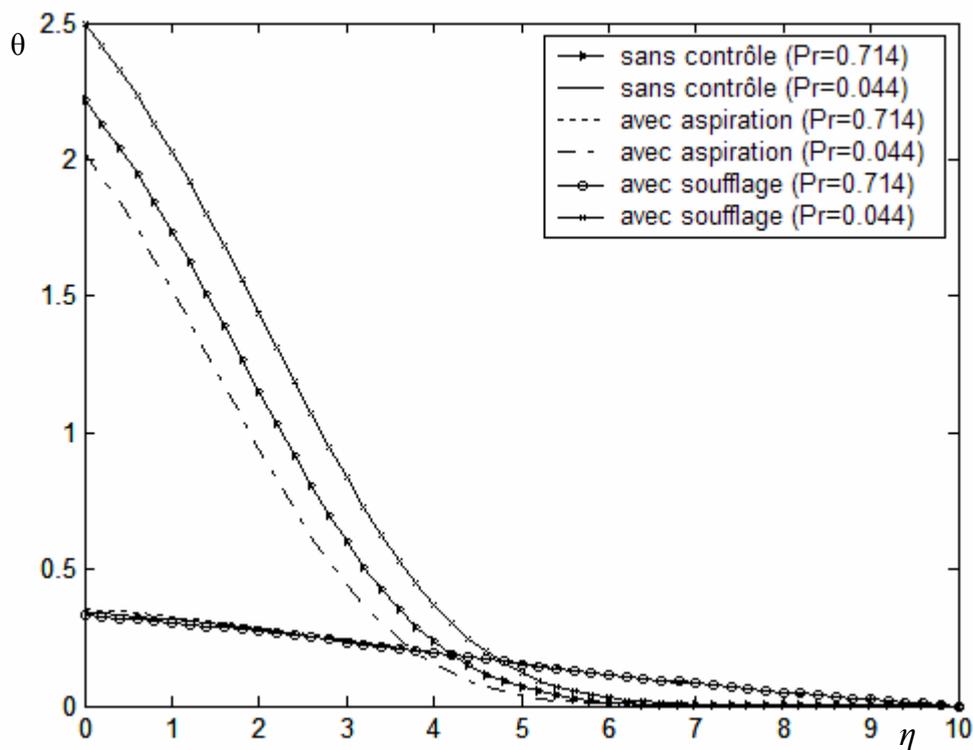


Fig.4.25 : Distribution de température dans une couche limite sur une paroi avec flux de chaleur avec dissipation en présence du contrôle ($Pr < 1$).

4.7.2 En convection forcée à basse vitesse.

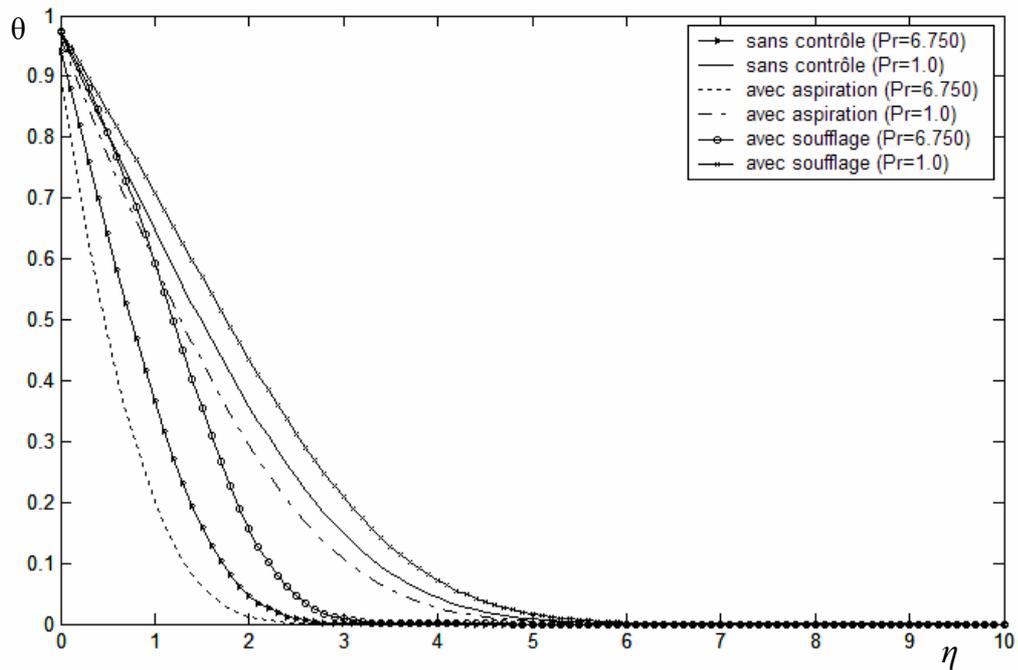


Fig.4.26 : Distribution de température dans une couche limite sur une paroi isotherme sans dissipation en présence du contrôle ($Pr \geq 1$).

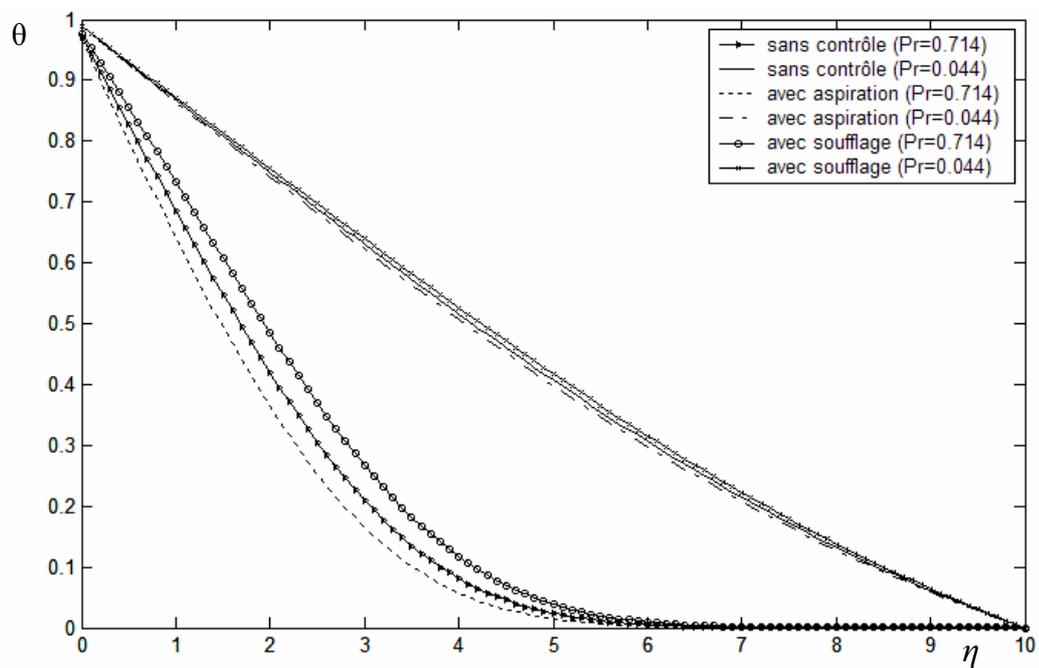


Fig.4.27 : Distribution de température dans une couche limite sur une paroi isotherme sans dissipation en présence du contrôle ($Pr < 1$).

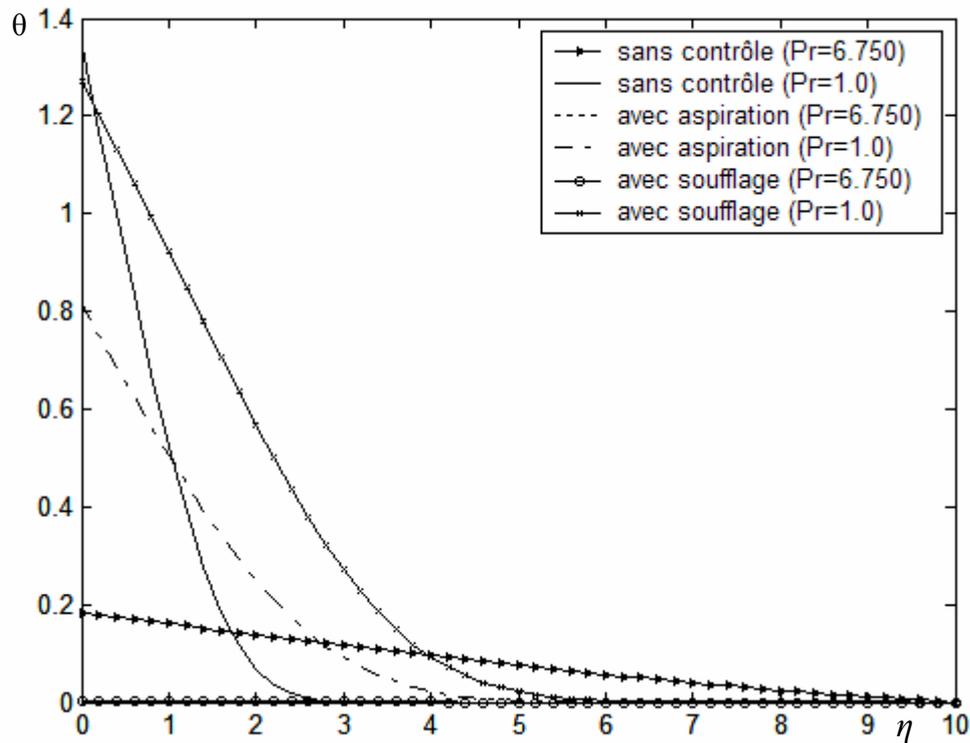


Fig.4.28 : Distribution de température dans une couche limite sur une paroi avec flux de chaleur sans dissipation en présence du contrôle ($Pr \geq 1$).

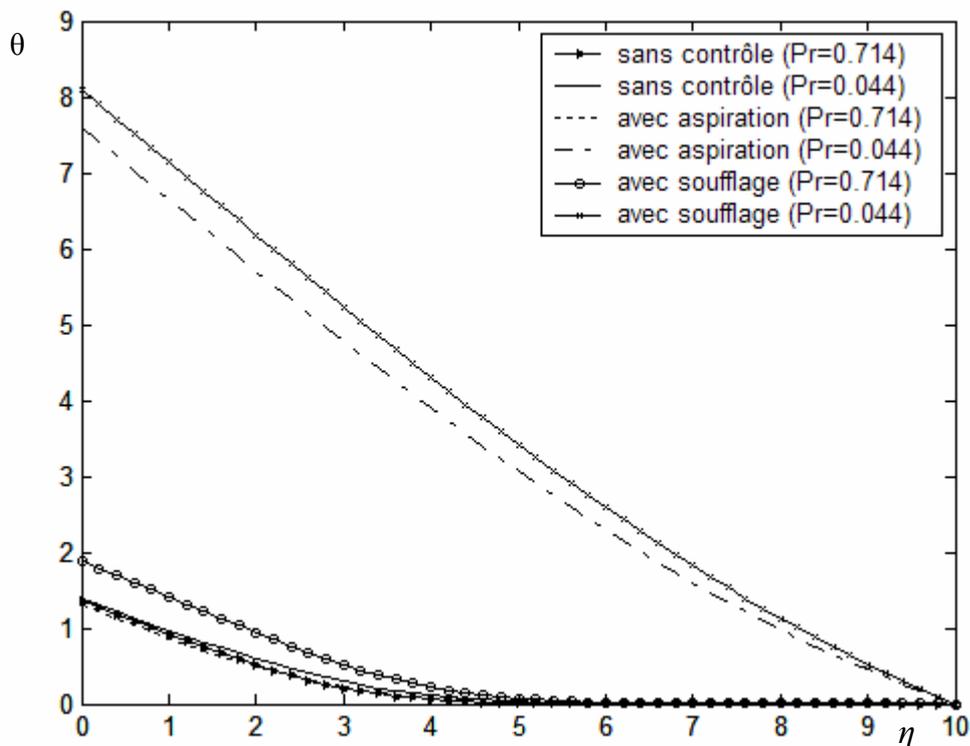


Fig.4.29 : Distribution de température dans une couche limite sur une paroi avec flux de chaleur sans dissipation en présence du contrôle ($Pr < 1$).

4.8 Commentaires et analyse des résultats.

La détermination de la loi de distribution de température pour divers milieux fluides, avec des conditions aux limites différentes, conduit à proposer des corrélations pour chaque cas, ce qui a permis de représenter les différentes caractéristiques de la couche limite thermique.

4.8.1 Distribution de température adimensionnelle.

4.8.1.1 Paroi adiabatique en convection forcée à grande vitesse.

Dans cette partie, l'ensemble de la couche limite est énergétiquement isolé, il n'y a échange d'énergie ni à travers la paroi, ni à travers la frontière de la couche limite. Les courbes de la figure (4.4), montrent que la température à la paroi, a une valeur supérieure, égale ou inférieure à l'unité suivant que le nombre de Prandtl est supérieur égal ou inférieur à l'unité. Cette distribution de température est justifiée comme suit ; pour des nombres de Prandtl supérieurs à l'unité ($\nu > a$), le fluide est plus visqueux que conducteur, l'élévation de température est provoquée d'une part par la dissipation visqueuse et d'autre part par le frottement des particules de fluide. Par contre pour des nombres de Prandtl inférieurs à l'unité, où le fluide est plus conducteur que visqueux, la température reste inférieure à l'unité, ce qui indique que l'écart de température est inférieur à l'énergie cinétique de fluide puisque la température effective est précisément celle produite par la dissipation visqueuse.

4.8.1.2 Paroi isotherme.

-En convection forcée à basse vitesse :

Comme le montre la figure (4.8), la température à la paroi est égale à l'unité puis elle se dégrade en s'éloignant de la paroi. On remarque qu'au sein de la couche limite la température s'élève ou se dégrade selon que le nombre de Prandtl est supérieur ou inférieur à l'unité, ce qui indique que pour $Pr < 1$ l'effet conductif est le plus dominant, et quant la dissipation visqueuse est considérée négligeable, les fluides

qui correspondent à des nombres de Prandtl supérieurs à l'unité ayant les basses températures.

-En convection forcée à grande vitesse :

Les courbes de la figure (4.6), gardent la même allure que les courbes de la figure précédente pour des nombres de Prandtl inférieurs ou égaux à l'unité. L'élévation de température est remarquable à cause de la dissipation visqueuse. Pour les fluides qui correspondent à des nombres de Prandtl supérieurs à l'unité, on remarque qu'il y'a une augmentation de température près de la paroi qui peut être justifiée par le caractère visqueux de ces fluides.

Il faut signaler qu'il y a un transfert de chaleur entre la plaque et le fluide, ce dernier s'échauffe ou se refroidit par la plaque suivant que la température de frottement est supérieure ou inférieure à la température de la paroi T_p .

4.8.1.3 Paroi avec flux de chaleur constant.

Pour les deux types de convection considérées, les courbes des figures (4.7) et (4.10), reflètent la distribution de température pour ce type de paroi. Ces courbes ayant la même allure que celles d'une paroi isotherme, l'élévation de température au sein de la couche limite est provoquée par le flux de chaleur qui imposé à la paroi.

Pour les divers types de paroi considérés, on peut noter que, quand la distance à la paroi augmente, la température diminue jusqu'à ce qu'elle prend la valeur de T_∞ correspondant à l'écoulement libre. Toutes les courbes présentent une inflexion vers le milieu de la couche limite. Si on prend par exemple l'eau ($Pr = 6.750$) et le mercure ($Pr = 0.044$), la température de l'eau sera au voisinage immédiat de la paroi, plus élevée que celle du mercure, mais dans la partie de la couche limite voisine de l'écoulement libre, c'est la température du mercure qui sera plus grande que celle de l'eau.

4.8.2 Epaisseur conventionnelle de la couche limite thermique δ_T .

L'épaisseur de la couche limite thermique δ_T , délimite la région où l'effet thermique est prépondérant. Pour les divers types de paroi considérés, cette épaisseur diminue ou augmente avec l'augmentation ou la diminution du nombre de Prandtl. (figures (4.11),(4.12) et (4.13)).

Comme le montrent les figures (4.12) et (4.13), l'effet de dissipation visqueuse est très important pour les parois isothermes notamment avec un flux de chaleur constant à la paroi, où l'on constate que la dissipation fait augmenter l'épaisseur de la couche limite thermique.

On ce qui concerne l'influence du type de paroi, on constate que : la couche limite thermique est plus épaisse pour une paroi avec flux que pour une paroi adiabatique, et que la couche limite est plus mince pour une paroi isotherme.

4.8.3 Epaisseur d'enthalpie Δ .

L'épaisseur d'enthalpie possède la même allure que celle de la couche limite thermique et la même loi de variation. Dans toutes les situations, l'épaisseur d'enthalpie est plus mince que l'épaisseur de la couche limite thermique.

4.8.4 Le rapport \mathfrak{R} .

Les figures (4.16) à (4.19), représentent le rapport entre l'épaisseur de la couche limite dynamique et thermique. Les courbes des figures (4.17) et (4.19) montrent clairement que, pour un fluide dont le nombre de Prandtl égal à l'unité, il y a une parfaite coïncidence des propriétés dynamiques et thermiques. Suivant que le nombre de Prandtl est supérieur ou inférieur à l'unité, le rapport \mathfrak{R} est supérieur ou inférieur à l'unité, ceci indique que : pour des nombres de Prandtl supérieurs à l'unité, la couche limite dynamique est plus épaisse que la couche limite thermique, qui est traduit par la dominance de l'effet visqueux sur l'effet conductif. Le comportement contraire est remarqué pour des nombres de Prandtl inférieurs à l'unité où l'effet conductif est le plus important.

Il faut noter que le rapport des épaisseurs dynamique et thermique est aussi influencé par le type de convection et de paroi ; par exemple pour le cas de la convection forcée à grande vitesse, l'augmentation de l'épaisseur de la couche limite thermique conduit à la diminution du rapport \mathfrak{R} , contrairement au cas de la convection forcée à basse vitesse.

4.8.5 Influence du contrôle actif sur la couche limite thermique.

Les résultats du champ thermique sont influencés par : le contrôle actif et le type de paroi, ainsi que du nombre de Prandtl et du type de convection forcée.

Pour les divers types de paroi, et pour les deux types de convection forcée, (figures (4.20), (4.22), (4.24), (4.26) et (4.28)), les fluides qui correspondent à des nombres de Prandtl supérieurs à l'unité sont influencés par le soufflage dans le sens de l'augmentation de la température au sein de la couche limite thermique. On remarque aussi qu'il y a une augmentation de l'épaisseur de cette couche limite. Le cas inverse est remarqué pour l'aspiration.

Pour les fluides qui correspondent à des nombres de Prandtl inférieurs à l'unité, on peut faire les remarques suivantes :

Pour le cas d'une paroi adiabatique, (figure (4.21)), et pour $Pr \ll 1$, la situation inverse est remarquée, c'est l'aspiration qui fait augmenter la température au sein de la couche limite thermique.

Pour le cas d'une paroi isotherme, (figure (4.23)), les courbes possèdent la même allure que celles des figures (4.20), (4.22), (4.24), (4.26) et (4.28).

Pour le cas d'une paroi avec flux de chaleur, (figures (4.25) et (4.29)), le soufflage et l'aspiration jouent le même rôle, c'est-à-dire : ils augmentent la température au sein de la couche limite.

4.9 Conclusion.

Les résultats obtenus ont une grande importance dans l'industrie, à titre d'exemple, pour la lubrification des pièces de températures différentes avec réduction du transfert thermique entre elles, ce sont des milieux tels que $Pr \gg 1$ qui sont favorables. A l'opposé, pour favoriser un haut niveau de transfert thermique tout en minimisant les pertes d'énergie par viscosité, on cherche des milieux tels que $Pr \ll 1$, ce sont les métaux liquides qui sont alors les plus indiqués : l'analyse du comportement de ces métaux liquides est actuellement un axe de recherche important, puisqu'ils sont utilisés dans les systèmes de refroidissement des réacteurs nucléaires.

CONCLUSION GENERALE

L'objectif principal de ce travail est l'analyse du comportement des fluides en convection forcée sous l'influence de plusieurs paramètres. L'étude fait partie d'un axe de recherche très important.

On a étudié la couche limite sur une plaque plane lisse à incidence nulle en écoulement laminaire incompressible.

Après simplification des équations de "*Navier-Stokes*" et de l'équation d'énergie selon les hypothèses de "Prandtl", on a déduit les équations qui régissent notre problème.

La résolution du problème dynamique a permis de déterminer le champ des vitesses, ainsi que les différentes caractéristiques de la couche limite laminaire.

Une fois le champ des vitesses est déterminé, l'équation d'énergie est résolue avec des différentes conditions aux limites à la paroi pour divers nombres de "Prandtl".

Les résultats obtenus par cette étude illustrent la dépendance des phénomènes thermiques et dynamiques en couche limite laminaire sur une plaque plane.

Dans certaines situations, la résolution des équations analytiquement a permis de valider les résultats.

Les résultats obtenus en présence du contrôle actif des couches limites dynamiques et thermiques, montrent clairement l'influence de ce dernier sur les caractéristiques de ces couches limites.

En perspective à ce travail, on propose une étude qui peut traiter les couches limites qui se développent sur diverses configurations d'obstacles, en écoulement laminaire ou turbulent, pour des fluides compressibles ou incompressibles.

BIBLIOGRAPHIE

- [01] S. W. Bedford. "Fluid Mechanics". W C B / MC Graw-Hill, 1998.
- [02] M. BOUMAH RAT & A. GOURDIN. "Méthodes numériques appliquées". Techniques et Documentation, Paris, 1983.
- [03] S. CANDEL. "Mécanique des fluides". Edition Dunod, Paris, 1995.
- [04] P. CHASSAING. "Mécanique des fluides, éléments d'un premier parcours". CÉPADÈUS, Paris, 2000.
- [05] C. Y. CHUEN. "An Introduction to Computational Fluid Mechanics". Seminole Publishing Company Boulder, Colorado, 1983.
- [06] R. COMOLET. " Mécanique Expérimentale des fluides". Tomes I et II, Masson, 1994.
- [07] M. DAMOU. "Mécanique des fluides". Office des Publications Universitaires, Alger, 1996.
- [08] J. F. DOUGLAS & J. M. GASIOREK & J. a. SWAFFIELD. "Fluid Mechanics". Pearson Prentice Hall, 2001.
- [09] J. H. FERZIEGER & M. PERIC. "Computational Methods for fluid dynamics". Edition Springer, Berlin, 2002.
- [10] C. F. GERALD & P. O. WHEATLEY. "Applied Numerical Analysis". Addition-Wesley Publishing Company, 1994.
- [11] M. HUG. "Mécanique des Fluides Appliquées". Eyrolles, 1975.
- [12] F. JEDRZEJEWSKI. "Introduction aux Méthodes Numériques". Springer, Paris, 2001.

-
- [13] R. JOULIE. "Mécanique des Fluides Appliquées". Ellipses, édition Marketing, USA, 1998.
- [14] S. KHERIE. "Mécanique des Fluides". Publications de l'Université Badji Mokhtar, Annaba, 2000.
- [15] L. KHEZZAR. "Procédés de Transfert de Chaleur et de Masse". Office des Publications Universitaires, Alger, 1995.
- [16] D. LINO. "Techniques de l'Ingénieur, Sciences Fondamentales, Mathématiques, Physiques, Mécanique". Istra BL, 1997.
- [17] J. H. LIENHARD IV & J. H. LIENHARD V. "A Heat Transfer Textbook". PH Logiston Press Compridge Massachusetts, USA, 2004.
- [18] P. H. MARTY. "Transferts Thermiques Convectifs". ILP Génie, 2001.
- [19] B. R. MUNSON. "Fundamentals of Fluid Mechanics". John Willey et Sons, Inc, 2002.
- [20] J. P. NOUGIER. "Méthodes de Calcul Numérique". Masson, Paris, 1991.
- [21] M. PASKOWITZ. "Heat Transfer in a Laminar Boundary Layer on a Flat Plate". 2003.
- [22] S. V. PATANKAR. "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow". Humispers, Mc Graw-Hill, Newyork, 1980.
- [23] F. PENEAU. "Etude Numérique par Simulation des Grandes Echelles de L'influence d'une Forte Turbulence Extérieure sur les Transferts Pariétaux au sein d'une Couche Limite". Thèse de Doctorat, Université de TOULOUSE, Paris. 1999.
- [24] J. F. SACADURA. "Initiation aux Transferts Thermiques". Techniques et Documentation, Paris, 1980.

- [25] P. SAGAUT. "Introduction à la Simulation des Grandes Echelles pour les Ecoulements de Fluides Incompressible". Springer, Berlin, 1998.
- [26] H. SCHLISHTING. "Boundary Layer Theory". MC Graw-Hill, Newyork, 1968.
- [27] G. D. SMITH. "Numerical Solution of Partial Differential Equations". Oxford University Press. Brunel, 1964.
- [28] N. S. & TAIBI. "Pratique du Fortran 77". Berti éditions. 1675.
- [29] J. H. WELTY & C. E. WICKS & R. E. WILSON. "Fundamentals of Momentum, Heat, and Mass Transfer". John Wiley et Sons, Inc, USA, 1976.

Résumé

Une étude théorique sur le comportement de l'écoulement visqueux type couche limite en présence de l'effet thermique est présentée.

L'écoulement a eu lieu dans un domaine bidimensionnel, avec une vitesse uniforme à l'infini pour les différents types de parois (isotherme, adiabatique et avec apport de chaleur).

L'équation du bilan énergétique est résolue tout en spécifiant les conditions aux limites adéquates.

L'approche analytique et numérique (programmation en FORTRAN F32 sous Windows) a permis la détermination des caractéristiques de la couche limite en présence du contrôle et de l'effet du nombre de "Prandtl".

Mots clé : couche limite, plaque lisse, effet thermique, contrôle actif.

Abstract

A theoretical study on the behaviour of the viscous flow of the boundary layer type under a heating effect is presented.

The flow is taking place in a two-dimensional field, with a uniform speed of the infinite for the various types of walls (isotherm, adiabatic and with contribution of heat).

The equation of the energy balance is solved while specifying the adequate boundary conditions.

The analytical and numerical approach (programming in FORTRAN F32 under Windows) allowed the determination of the characteristics of the boundary layer in the presence of control and the effect of the of "Prandtl" number.

Key words: boundary layer, smooth plate, heating effect, control active.

ملخص

تعرضت الدراسة النظرية لسلوك الجريان اللزج من نوع الطبقة الحدية بوجود التأثير الحراري. حدد الجريان في مجال ثنائي الأبعاد بسرعة منتظمة عند اللانهاية, من اجل انواع سطح مختلفة (ثابتة الحرارة, كاظمة و بإسهام حراري).

حللت معادلة موازنة الطاقة بتحديد الشروط الحدية الملائمة.

سمحت لنا التقريبات التحليلية و العددية بتحديد خصائص الطبقة الحدية بوجود المراقبة و تأثير عدد " Prandtl".

كلمات المفتاح: الطبقة الحدية، صفيحة ملساء، التأثير الحراري، المراقبة الفعلية.