

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**



UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA  
FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES DE L'INGENIEUR  
Département de génie mécanique

**MEMOIRE**

Pour l'obtention du grade de  
**MAGISTERE**

Option : Construction Mécanique

Par

**MANAA Saadeddine**

**THEME**

**ETUDE NUMERIQUE DU FLAMBAGE MECANIQUE**  
**DES PLAQUES RECTANGULAIRES EN**  
**MATERIAUX COMPOSITES STRATIFIES**

Devant le jury composé de :

**Président :**

Dr : R. ATHMANI

MC à l'Université de Biskra

**Rapporteur:**

Dr : M. HECINI

MC à l'Université de Biskra

**Examineurs :**

Dr.: M. ASSAS

Dr: A. MAMACH

CC l'Université de Batna

CC à l'Université Om Elbouaki

**Invité :**

Mr.: A. TATI

CC à l'Université de Biskra

## **I. Introduction générale :**

### **I.1 Introduction :**

La grande utilisation des plaques avec ou sans ouvertures en matériaux composites stratifié, dans plusieurs types de structures aérospatiale, aéronautiques, marins et d'autres est due aux avantages suivants :

- Le rapport rigidité - poids
- Le rapport résistance – poids

Le besoin d'avoir des ouvertures dans les composantes des structures est d'une considération pratique. Par exemples dans l'aéronautique et l'automobilisme et aussi dans certain avion de transport commercial et militaire et aussi les sous marins, les ouvertures sont nécessaire pour l'accès des lignes hydrauliques et pour l'empêches des dommages.

Dans certaines applications les éléments structuraux doivent résister au flambage et dans d'autres au post-flambage et ainsi pour économiser le poids.

Les plaques avec ouvertures sont souvent soumis aux charges de compression induites mécaniquement ou thermiquement et qui peuvent causer le flambage de ces derniers.

Alors le comportement, de ce type de structure vis-à-vis de la stabilité, doit être bien connu lors de leur conception.

### **I.2 Objectif :**

L'objectif de ce travail est la contribution dans l'étude du flambage mécanique des plaques rectangulaires en matériaux composites stratifié avec la méthode des éléments finis [M.E.F.] et donner un aperçu sur l'importance et la précision des résultats obtenus grâce à l'utilisation de la M.E.F. et la méthode du calcul numérique pour la résolution des problèmes.

### **I.3 Historiques : [2]**

Les travaux sur le comportement du flambage et post-flambage des plaques en matériaux composites stratifiée on débuté depuis les années 70.

En 1972, Martin a publié ce qu'apparaît être parmi les premières études du flambage et de post-flambage des plaques en composites avec ouvertures soumises à un chargement uniaxial de compression. Son travail était basé sur la méthode Rayleigh Ritz dans laquelle la double intégrale a été effectuée numériquement. Des travaux expérimentaux ont été fait en parallèle pendant cette période, et les résultats analytiques et expérimentaux sont révélés de bon accord.

En 1978, Knauss, Starnes et Henneke ont présenté une investigation expérimental de comportement de flambement et les caractéristiques de rupture d'une plaque rectangulaire en grafite-epoxy possédant une ouverture circulaire et soumise un chargement de compression. Dans ce travail, les auteurs on étudiés le cas de deux plaques de 24 et 48 couches avec une ouverture de dimension  $d/w=0,3$ .

En 1982, Herman a présenté ce qu'on peut considérer comme la première investigation du comportement du flambage des plaques soumises au cisaillement avec une ouverture centrale de forme circulaire. Il a utilisé la méthode des éléments finis pour étudier le flambage des plaques en Grafite-epoxy.

En 1983, Nemeth et ses collègues ont présentés une analyse approximative pour le flambement des plaques rectangulaires soumises à la compression avec des ouvertures centrales. Leur étude approximative était basée sur la méthode variationnelle de Kantorovitch.

En 1984 et 1985 , Marshall, Little et El Tayeby, ont présenté une investigation analytique et expérimental du comportement du flambage des plaques rectangulaires orthotropes soumises à un chargement de compression avec des ouvertures circulaires. Ils ont fait une analyse approximative en utilisant la méthode de Rayleigh Ritz .Dans ce travail expérimental les résultats obtenus concernent une plaque carrée simplement appuyée en verre-époxy sans ouverture et avec ouverture jusqu'à  $d/w=0,7$ . Les résultats analytiques et expérimentaux semblaient être en bon accord, spécialement les cas ou  $d/w=0,5$ , ou les dimensions des ouvertures  $d/w \leq 0,5$ .

En 1996. Marshall, Little, El Tayeby et William ont présenté des résultats de flambage des plaques orthotropique avec des ouvertures circulaires. Le travail était analytique parallèlement à un travail expérimental pour des plaques carrées avec des ouvertures des dimensions  $d/w$  égale à 0,3 et 0,5. Les résultats des deux investigations semblaient être en bon accord qualitativement.

## **I.4 Organisation des chapitres :**

C'est le présent chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous donnons un aperçu sur les matériaux composites, comment les concevoir, qu'elles sont les différent procédés de leur fabrication et leur domaine d'utilisation.

Le troisième chapitre est consacré aux relations, les lois et les notions des comportements mécaniques des matériaux composites en générales et précisément les matériaux composites stratifiés car notre étude sera réalisé sur se type des matériaux

composites. Le but dans ce chapitre est l'obtention des relations entre les déformations et les contraintes ainsi que l'obtention de l'expression de la matrice de rigidité pour les utilisés dans la formulation.

Le quatrième chapitre est consacré à la modélisation et formulation en élément fini et la programmation.

Le cinquième chapitre on présente les résultats numériques et leur interprétation.

Le sixième chapitre sera consacré à la conclusion.

## II.1 Définitions générales :

Les matériaux composites sont des matériaux solides, inhomogènes et anisotropes, constitués par l'association à l'échelle microscopique de deux (ou de plusieurs) autres matériaux aux caractéristiques complémentaires; cette association leur confère à l'échelle macroscopique un ensemble de propriétés notamment mécaniques, que chacun des constituantes pris isolément ne possède pas.

Les premiers développements des composites ont été liés aux besoins des industries aérospatiales en matériaux à caractéristiques mécaniques élevées associés à un faible poids. Actuellement, ils sont présents dans tous les secteurs industriels.

## II.2 Les constituants

Les principaux constituants sont le renfort et la matrice. Le renfort a pour mission de supporter l'essentiel de l'effort mécanique appliqué au matériau composite. Le rôle de la matrice (ou liant) est plus complexe: elle doit lier les renforts entre eux, les protéger du milieu extérieur (corrosion par exemple) et répartir la charge mécanique appliquée.

### II.2.1 Le renfort

Il se présente sous forme fibreuse et est généralement, constitué de plusieurs centaines, voire de plusieurs milliers de filaments de très petit diamètre (jusque 10  $\mu\text{m}$  à 12  $\mu\text{m}$ ), à très hautes performances mécaniques et de faible masse volumique. Ainsi, les fibres de carbone sont constituées de 1 000, 3 000, 6 000 ou 12 000 filaments, dont le diamètre varie entre 6  $\mu\text{m}$  et 12  $\mu\text{m}$  [13].

Cette morphologie particulière du renfort résulte du fait que, lors de son utilisation, une structure n'est pas sollicitée mécaniquement de la même façon dans toutes les directions: certaines zones sont sollicitées en traction, d'autres en compression...

L'utilisation d'un renfort fibreux permet de renforcer le matériau dans des directions préférentielles; les matériaux composites permettent donc la réalisation d'un compromis entre la texture du matériau et l'état de charge mécanique auquel il doit répondre, compromis impossible à réaliser avec des matériaux homogènes et isotropes. Les autres raisons qui justifient l'emploi d'un renfort fibreux sont d'ordres physique et technologique (réalisation de tissus par exemple). La recherche de renforts performants s'oriente, à quelques exceptions près, vers les céramiques (carbure de silicium, carbone, verre, etc.), car le comportement mécanique de ces matériaux est directement contrôlé par leurs défauts internes ou de surface.

Lorsque le défaut est important, une faible contrainte appliquée provoque la rupture du matériau; les renforts seront donc utilisés sous forme d'éléments de très petit diamètre. Ainsi les *whiskers*, fibres de très petites dimensions (diamètre voisin de 1  $\mu\text{m}$ , longueur ne dépassant pas quelques centaines de micromètres) sont les renforts mécaniquement les plus performants découverts à ce jour: les whiskers de carbure de silicium présentent un module de Young avoisinant 500 GPa et une résistance à la rupture en traction de l'ordre de 10 000 MPa pour une densité de 3,2 (à titre de la comparaison, le fer a un module de Young de l'ordre de 200 à 300 GPa et une résistance à la rupture de 13 500 MPa). Ces renforts, encore peu employés, devraient être essentiellement utilisés pour le renforcement de métaux ou alliages légers (aluminium, magnésium...). L'utilisation de renforts sous forme de mèches est limitée à des techniques particulières (enroulement filamentaire, pultrusion) [12].

Les fibres de faible diamètre sont ensuite transformées par les techniques de l'industrie papetière et du tissage: les formes usuelles d'emploi des renforts fibreux sont les mats, les tissus (satin, serge, taffetas...), les nappes unidirectionnelles, les fibres longues ou les fibres coupées ainsi que les préformes multidirectionnelles. Les principaux matériaux actuellement utilisés comme renforts sont les fibres de verre, d'aramide et de carbone. D'autres fibres sont également commercialisées mais restent peu utilisées du fait de leur mise en œuvre plus complexe et de leur coût plus élevé: fibres multibrins de carbure de silicium, d'alumine et de silice; monofilaments de grand diamètre de carbure de silicium ou de bore obtenus par dépôt chimique en phase vapeur; whiskers de carbure ou de nitrure de silicium, fibres thermoplastiques (polyéthylène, polyester saturé)...

### II.2.1.1 Les fibres de verre [5].

Les fibres de verre borosilicatées constituent les renforts les plus utilisés actuellement du fait de leur excellent rapport qualité/prix.

Elles sont obtenues à partir d'un mélange fusible d'oxydes de natures différentes : les oxydes formateurs ( $\text{SiO}_2$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$  et  $\text{B}_2\text{O}_3$ ) permettent la création d'une structure vitreuse, les oxydes modificateurs donnent au matériau final ses propriétés spécifiques (diélectriques, mécaniques, chimiques).

La fabrication s'effectue par étirage à grande vitesse (de l'ordre de  $60 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) de filets de verre fondu tombant des orifices d'une filière en alliage de platine maintenue à haute température (voisine de 1 000  $^\circ\text{C}$ ), cet étirage est obtenu mécaniquement (fils continus) ou à l'aide d'un fluide (air) éjecté à grande vitesse (fibres discontinues). Le diamètre des filaments réalisés varie de 3 à 20  $\mu\text{m}$ . Dès la sortie de filière, une opération d'ensimage sur les filaments

est effectuée, par dépôt, de produits à base de silane ou d'organosilane. Cette opération a pour but de protéger les filaments des effets de l'environnement (reprise d'humidité, abrasion résultant de manipulation ou même de frottement entre filaments); permettre la réalisation de fibres compactes (ensemble des filaments) et l'opération de tissage; améliorer l'adhésion de la fibre aux résines utilisées comme matrice.

Les propriétés des fibres de verre dépendent de leur composition chimique. De manière générale, elles présentent une résistance à la rupture élevée; une masse volumique faible (voisine de 2,5); une rigidité relativement moindre d'autres renforts; une bonne inertie chimique en milieu neutre ou acide (améliorée pour les fibres de carbone) mais une dégradation rapide en milieu basique (à l'exception de fibres particulières développées pour renforcer les bétons). Au plan électrolytique, elles sont parfaitement isolantes.

### II.2.1.2 Autres renforts fibreux

La technologie de fabrication de fibres autres que le verre est délicate et coûteuse, ce qui explique en partie leur prix élevé et leur emploi souvent réservé aux applications de pointe. La fabrication des fibres de carbone, par exemple, est réalisée à partir de précurseurs organiques tels que le polyacrylonitrile (PAN) ou le brai. Le procédé comporte plusieurs étapes devant être effectuées selon des conditions de température et d'atmosphère bien déterminées: fibrage du précurseur organique; stabilisation par oxydation à l'air vers 200-300 °C pour le rendre infusible; carbonisation à température voisine de 1 000 °C et sous atmosphère d'azote (à ce stade, la fibre obtenue est caractérisée par une faible masse volumique de 1,7 g·cm<sup>-3</sup>, une résistance à rupture élevée de l'ordre de 3 200 à 4 300 MPa et un faible module de Young de 230 GPa environ); traitement de graphitisation effectué à haute température (jusque vers 3 000 °C) sous atmosphère inerte d'argon, pour améliorer le module de fibres obtenues ont alors un module de Young plus élevé (jusqu'à 700 GPa), mais leur masse volumique a augmenté (voisine de 2 g·cm<sup>-3</sup> et leur résistance à la rupture diminué (environ 2 000 MPa).

Les fibres d'aramides, obtenues par fibrage d'une solution sulfurique concentrée d'un haut polymère aromatique, possèdent une grande résistance à la rupture, associée à une très faible densité (environ 1,45). Comme dans le cas des fibres de carbone, on peut créer des fibres haut module ou haute résistance, ces dernières présentant une bonne résistance à l'impact et permettant par exemple la réalisation de blindage.

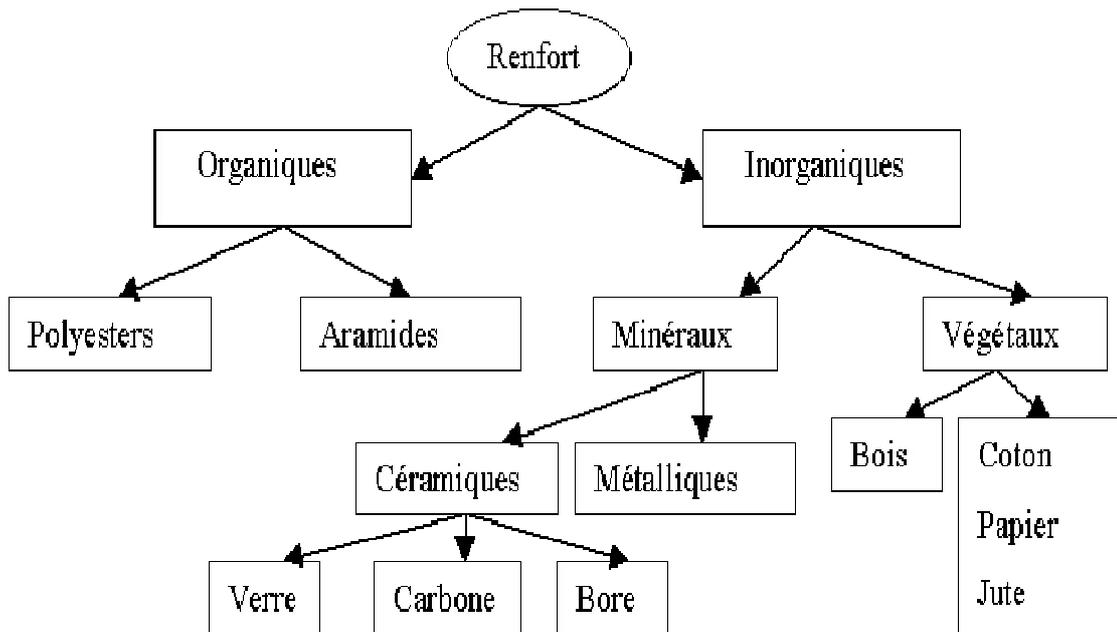


Fig. (II.1) : Principaux matériaux de renfort [07].

Fibre	Densité	Charge de rupture en traction en MPa	Charge de rupture en compression MPa	Allongement à la rupture en %	Module d'élasticité longitudinal en MPa	Diamètre du filament élémentaire en $\mu\text{m}$
Verre E	2,54	3400	1200	4,8	73000	3 - 30
Verre R	2,48	4400	1300	5,4	86000	3 - 30
Aramide bas module	1,45	3100	500	2	70000	12
Aramide haut module	1,45	3100	500	1	130000	12
Carbone haute ténacité	1,78	2800	1800	0,5	200000	8
Carbone haut module	1,8	2200	1300	-	400000	8
Bore	2,63	3500	3500	0,8	400000	100 - 200
Acier XC10	7,85	1000	-	-	210000	-
Aluminium	2,63	358	-	-	69800	-

Tableau II.1 : caractéristiques mécaniques des fibres de base [09].

## II.2.2 Matrice

Les fibres ne peuvent être utilisées seules: il est nécessaire de les placer dans un produit d'emballage, la matrice. Trois familles principales de matériaux fibreux correspondent à des matrices de nature différente: organique, métallique ou céramique. Les plus répandus actuellement sont les matériaux composites à matrice organique, l'emploi de composites à matrice métallique ou céramique restant très limité.



Fig. II.2 : Les différentes familles de matrice [07].

### II.2.2.1 Matrices organiques

Elles sont obtenues à partir de polymères thermoplastiques ou thermodurcissables. Dans le cas des résines thermodurcissables, la mise en forme est effectuée impérativement avant l'étape de polymérisation au cours de laquelle le matériau devient, de façon irréversible, rigide; les produits couramment utilisés sont à base de résines polyester insaturé, époxyde ou phénolique. Pour les résines thermoplastiques, la plasticité nécessaire à la mise en forme est obtenue à volonté par simple chauffage de la matrice, le matériau reprenant sa rigidité lors du refroidissement. Cette particularité permet leur emploi pour des applications en très grande série (pièces d'automobile); outre la cadence plus élevée de fabrication, une opération de recyclage de pièces peut aussi être envisagée. Les principales résines thermoplastiques sont à base de polyamides, de polypropylène ou de polyester saturé. D'autres résines aux propriétés particulières ont été développées plus récemment, en particulier les résines PEEK

(polyétheréthercétone) et PES (polyéthersulfone). L'utilisation des résines thermoplastiques est encore limitée, car leur emploi est plus délicat et nécessite d'opérer à température élevée [13].

Les résines organiques peuvent s'employer à l'état liquide (thermodurcissables) ou solide (granulés thermoplastiques). Les renforts adjoints peuvent être utilisés sous forme de préimprégnés: la résine prépolymérisée est déposée de manière homogène sur le renfort, la réaction de polymérisation étant stoppée par des additifs particuliers et par conservation à basse température des produits. Ce mode opératoire se généralise, car les préimprégnés permettent de réaliser des matériaux ayant des proportions précises en fibre: et en résine, donc des caractéristiques correspondant à celles préconisées par le cahier des charges; en outre, une automatisation de la mise en œuvre peut être envisagée [13].

Les propriétés des composites à matrice organique dépendent de la nature de la résine, de la nature du renfort choisi et de sa forme d'utilisation ainsi que du choix de la méthode de mise en œuvre [12].

Ces matériaux possèdent de bonnes propriétés mécaniques, associées à une faible masse volumique. Toutefois, si on compare les constituants, on s'aperçoit que généralement les matrices organiques ne contribuent que très faiblement aux caractéristiques mécaniques du composite; elles jouent, cependant un rôle fondamental en amortissant les efforts subis par le matériau, efforts transmis par l'intermédiaire des interfaces fibres-matrice: la bonne adhésion de la matrice avec le renfort, permet donc d'obtenir un produit plus performant. Les résines organiques ont une densité faible, sont des isolants électriques et conduisent peu la chaleur, leur conductivité thermique est de l'ordre de  $0,2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  ( $45 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  pour l'acier). Cependant, à l'exception de quelques résines particulières, coûteuses et souvent difficiles à employer, leur température d'utilisation est limitée: en outre, la plupart des résines sont sensibles à l'humidité et aux rayons UV. Les composites à matrice organique seront donc résistants à l'oxydation et à la corrosion, isolant électrique et thermique et permettront de réaliser des pièces de formes complexes, intégrant un maximum de fonctions. Le capot composite d'une automobile moderne de gamme moyenne comprend un seul élément (9,2 kg), celui d'une automobile classique en métal en comportait en moyenne sept (17 kg) [10].

### II.2.2.2 Les matrices métalliques

Les composites à matrice métallique ont été développés pour améliorer certaines caractéristiques des métaux ainsi que pour pallier certains inconvénients des composites à matrice organique (température d'utilisation limitée, vieillissement). Le renforcement des métaux et de leurs alliages par des fibres permet une amélioration de la rigidité, de la

résistance mécanique et de la tenue à la fatigue à température ambiante (pour les métaux mous comme le plomb) mais également à température élevée (aluminium, titane). Les composites à matrice métallique actuellement étudiés ou utilisés un très faible quantité sont ceux à base d'aluminium, de magnésium ou de titane, renforcés par des fibres longues de carbone, de carbure de silicium, d'alumine ou de bore, par des fibres coupées ou des whiskers de carbure de silicium. Ces matériaux présentent des caractéristiques mécaniques élevées et les conservent jusqu'à des températures importantes (400 °C pour l'aluminium). Ils ont une excellente tenue à l'environnement, sont insensibles aux rayons UV, présentent une bonne stabilité dimensionnelle, une bonne conductivité électrique et thermique [13].

### **II.2.2.3 Les matrices céramiques [13]**

Les composites (céramique/céramique) sont des fibres céramiques enrobées dans une matrice céramique. Les renforts fibreux permettent d'améliorer la ténacité des céramiques, matériaux très fragiles. Des conditions doivent cependant être respectées lors de l'élaboration du matériau, en particulier les forces d'adhésion fibres- matrice doivent rester faibles, sinon le composite céramique/céramique se révèle aussi fragile que les céramiques massives.

Les composites (carbone/carbone), fibres de carbone densifiées par du carbone, sont les plus anciens et les plus connus; plus récents, les carbure/carbone, type carbure de silicium/carbure de silicium, devraient se développer, notamment pour des applications thermostructurales en atmosphère oxydante.

De manière générale, les composites céramique/céramique présentent une bonne ténacité, une bonne résistance aux chocs et peuvent être utilisés à très haute température (plus de 2 000 °C pour les carbone/carbone en atmosphère neutre); ces composites sont également caractérisés par une bonne biocompatibilité et un excellent coefficient de friction.

Résines	Nom	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	E (MPa)	$\nu$	R (MPa)	$\alpha$ $\mu\text{m}/\text{m}^\circ\text{C}$
	Polyester	1300	3800	0.37	88	100
	Vinylester	1200	3500	0.35	81	65
TD	Epoxide	1220	5200	0.38	121	40
	Silicone	1550	1000	0.45	3	30
	Polyimide	1217	3450	0.35	80	36
	Phénolique	1350	3000	0.36	70	80
	Polyamide	1130	1900	0.33	70	85
TP	Polycarbonate	1100	2300	0.33	60	70
	Polyester saturé	1310	2800	0.33	55	90
Métaux	Aluminium	2630	69000	0.33	358	23
	Acier XC10	7850	210000	0.29	1000	10
	Cuivre	8940	119000	0.30	350	17
	Magnésium	1660	42000	0.30	280	25

Tableau II.2 Principales caractéristiques mécaniques des résines [12].

Avec :

- ❖ TP : Thermoplastiques
- ❖ TD : Thermodurcissables

## II.3 Procédés de fabrication

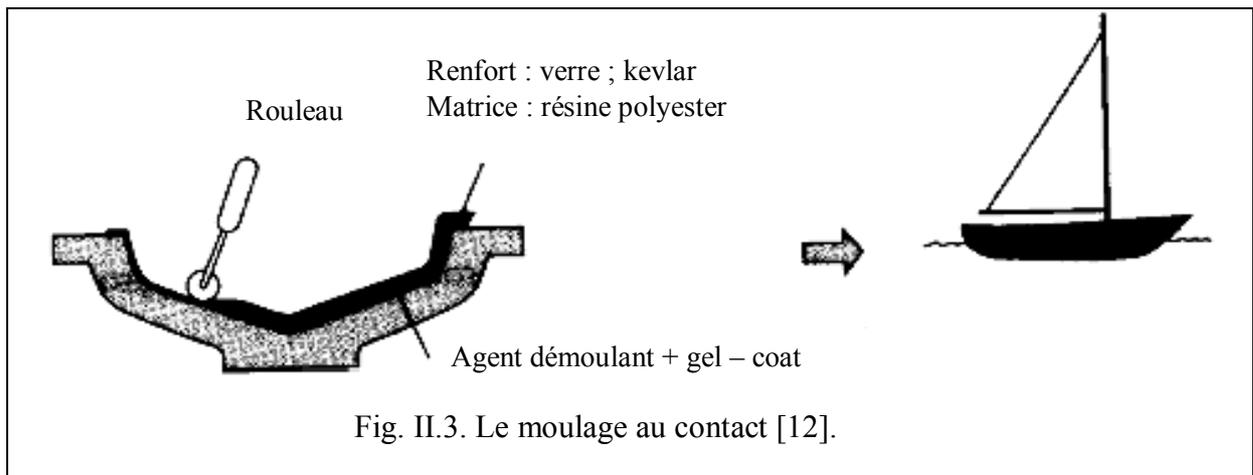
### II.3.1 Composites à matrice organique

Les procédés peuvent être classés en trois catégories principales: artisanaux, réalisation de petites séries, sans gros investissements; moyennes séries, investissements limités, mais permettant des cadences plus importantes; grandes séries, nécessitant des investissements lourds.

Les procédés artisanaux sont essentiellement le moulage au contact (premier procédé employé et encore très utilisé) et le moulage par projections simultanées. Les procédés semi industriels permettent, par l'emploi d'un moule et d'un contre moule, de réaliser des pièces présentant des surfaces parfaitement lisses.

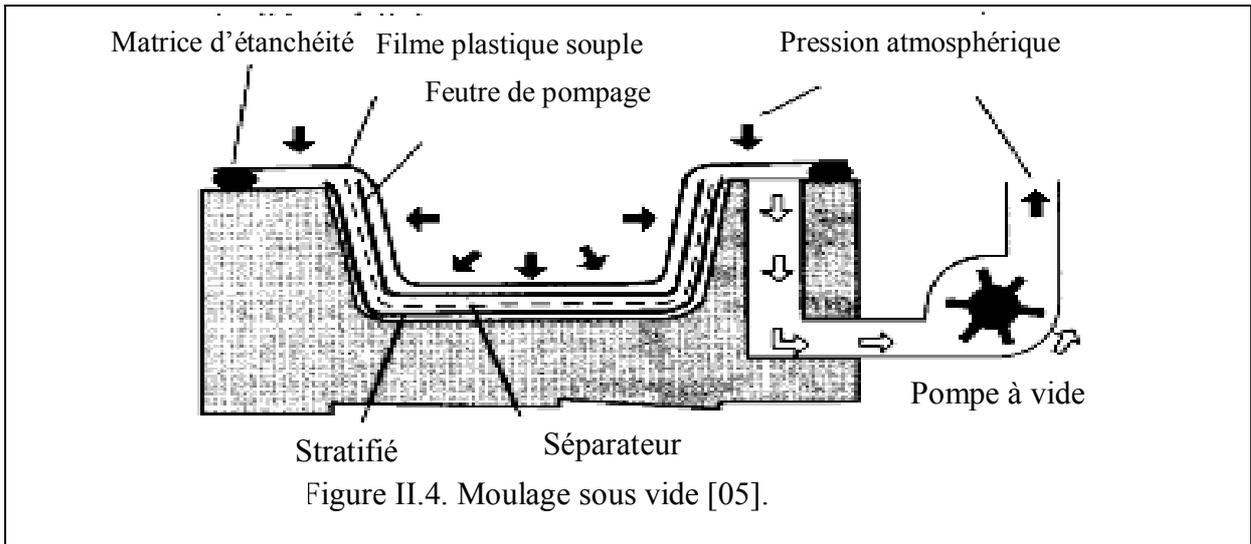
### II.3.1.1 Procédés artisanaux et semi industriels

Pour le moulage au contact (fig. II.3), la première étape est la préparation du moule (polissage, cirage), puis le dépôt d'un agent de démoulage (gel-coat): plusieurs couches de renforts (tissus, mats...) sont ensuite successivement appliquées, chacune étant enduite de résine (généralement polyester) et toutes les bulles éliminées, jusqu'à obtention de l'épaisseur désirée; la polymérisation de la résine est effectuée à température ordinaire ou par chauffage. Cette technique permet la réalisation de pièces lourdes et de grandes dimensions (coques de bateau).

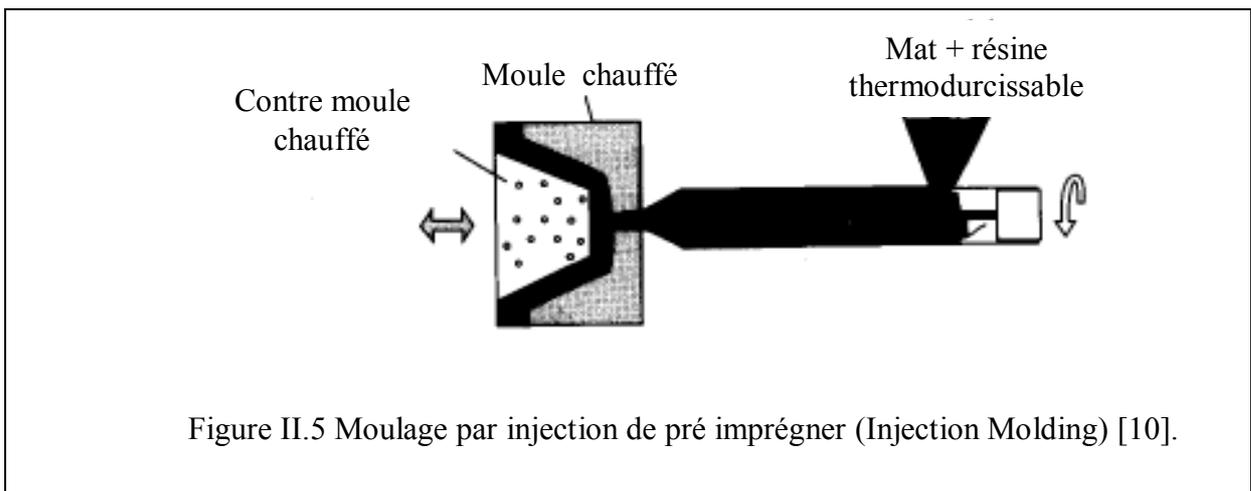


Le moulage par projections simultanées est une forme mécanisée du moulage au contact. Ce procédé consiste à projeter, sous pression sur un moule, un mélange de fibres coupées et de résine à l'aide d'une machine à projeter alimentée en fibres continues (roving); après élimination des bulles, la polymérisation est effectuée à température ambiante. Ce procédé permet d'augmenter la cadence de fabrication, mais les caractéristiques mécaniques du matériau final ne sont pas améliorées.

Le moulage sous vide (fig.II.4) permet d'obtenir des pièces de bonne qualité mécanique par une meilleure imprégnation du renfort, le dépôt renfort- résine, compacté par l'élimination des bulles, est recouvert d'une membrane caoutchouc (poche à vide) qui, en assurant l'étanchéité du système, permet de procéder à l'imprégnation sous vide.



Dans le moulage par injection de résine (fig. II-5), le renfort est placé à l'intérieur d'un ensemble moule/contre- moule en béton et résine ou en acier. La résine, injectée sous pression, imprègne progressivement le renfort en chassant l'air. Cette technique ne permet que des cadences limitées, nécessite une opération de finition et convient pour la réalisation de pièces complexes.



Le moulage par injection de résine sous vide, souvent désigné par RRIM (Reinforced Reaction Injection Molding), combine le moulage sous vide et l'injection de résine et permet de réaliser des matériaux bien imprégnés comportant moins d'inclusion d'air.

### II.3.1.2 Procédés industriels

Les techniques permettant la réalisation de pièces à grande cadence ou en continu sont le moulage par compression, par injection, par centrifugation, par enroulement filamentaire ou par pultrusion.

Le moulage par compression utilise un ensemble moule/contre- moule (fig.II-6) laissant un emplacement correspondant à la forme exacte de l'objet à réaliser; il peut

s'effectuer à froid, avec des moules en béton de résine ou en composite fibres-résine (mais à faible cadence), ou à chaud, avec des moules chauffants en acier. Le moulage par compression à chaud est, parmi les technologies existantes, le mieux adapté à la production en grande série; on distingue le procédé par voie liquide (alimentations séparées du renfort et de la résine) et le procédé par voie sèche, utilisant des preimprégnés (mats ou tissus SMC: *Sheet Molding Compounds*) ou des matériaux en vrac (mélange de fibres et de résine appelé premix ou BMC: *Bulk Molding Compounds*). Le moulage est effectué selon un cycle déterminé (durée, température et pression) pour la fabrication de pièces électriques et pour automobile.

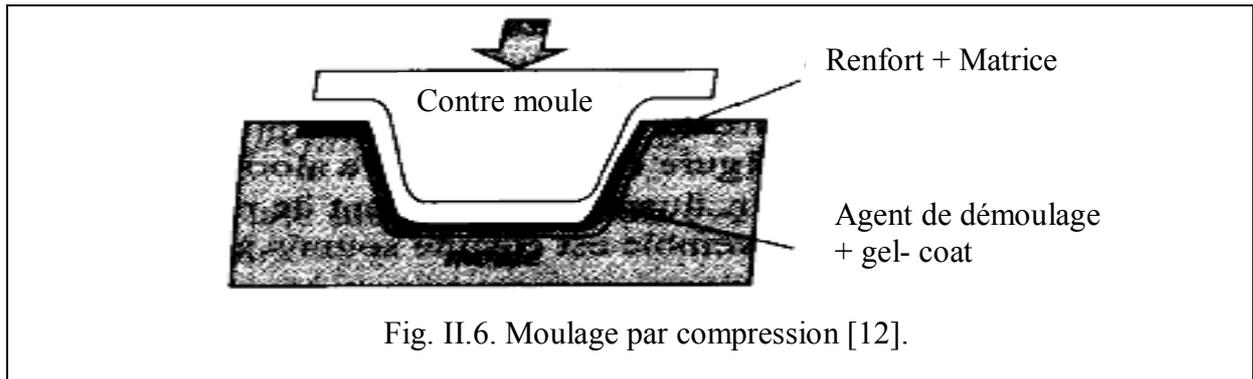


Fig. II.6. Moulage par compression [12].

Les techniques de centrifugation et d'enroulement filamentaire permettent la réalisation de tubes, canalisations, containers...

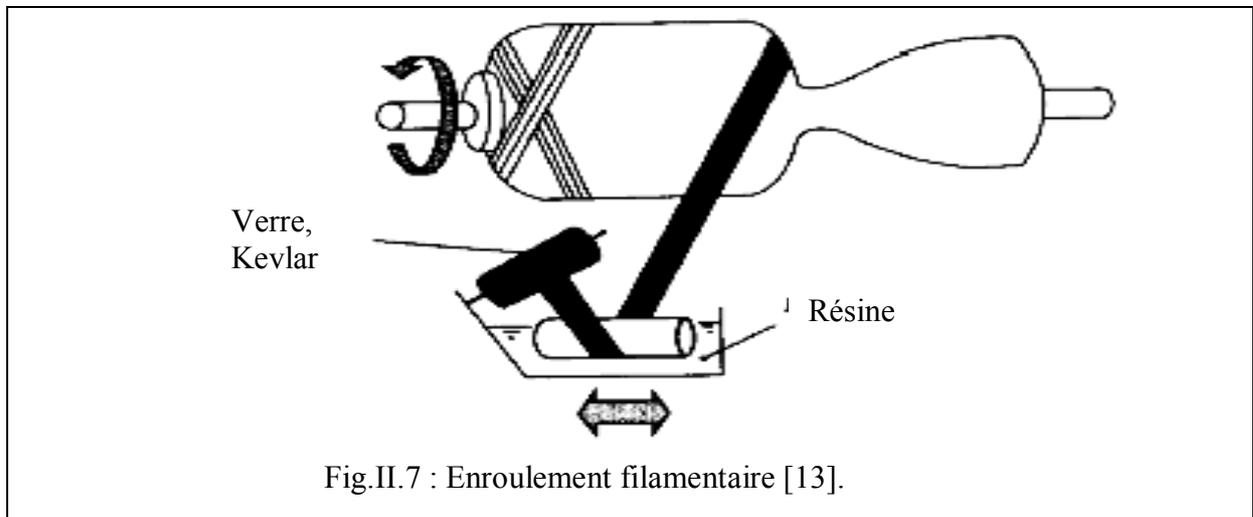


Fig.II.7 : Enroulement filamentaire [13].

La seconde consiste à déposer sur un mandrin en rotation des fils ou des rubans tissés imprégnés de résine; la structure composite est ensuite polymérisée à l'étuve et le mandrin extrait par voie chimique ou mécanique.

Le moulage par pultrusion consiste à tirer un mélange de renfort imprégné de résine à l'intérieur d'une filière de mise en forme chauffée; le produit polymérisé sort en continu de la filière. Cette technique est limitée par les dimensions de filières chauffantes réalisables.

### II.3.2 Composites à matrice métallique [12]

Les procédés de fabrication sont classés selon le mode de mise en œuvre de la matrice: phase gazeuse, liquide ou solide. Les procédés par voie solide et liquide sont les plus utilisés, le choix dépendant de la température de fusion du métal, de sa réactivité vis-à-vis des fibres ainsi que de la forme de la pièce à réaliser; les procédés par voie liquide sont utilisés pour les métaux à bas point de fusion (aluminium, magnésium). Les renforts utilisés doivent être bien mouillés par le métal liquide (ce qui impose un traitement de la surface des fibres) et ne pas réagir avec lui.

La technique de forgeage liquide (*squeeze casting*), consistant à exercer sur le liquide une pression pour imprégner le renfort, est déjà utilisée pour réaliser des composites à matrice aluminium renforcé par des fibres de carbone. La mise en œuvre par voie solide repose sur la compression à chaud (élaboration de composites à matrice titane renforcé par des filaments de grand diamètre de SiC).

### II.3.3 Composites à matrice céramique [12]

Ils sont élaborés en faisant appel à des précurseurs gazeux ou liquides de la matrice. Par voie gazeuse, l'infiltration chimique en phase vapeur dérive du dépôt chimique en phase vapeur (DPCV); elle permet de densifier une préforme fibreuse poreuse à l'aide d'un solide, qui se forme au sein même du renfort porté à haute température à partir d'un précurseur gazeux, par exemple le méthane (composite carbone- carbone) ou le méthyltrichlorosilane  $\text{CH}_3\text{SiCl}_3$  (composite SiC-SiC). Ces procédés sont lents mais conduisent à des matériaux de haute qualité.

Les procédés par voie liquide font appel à des précurseurs constitués d'un sol ou d'un composé organométallique; l'imprégnation du renfort fibreux est réalisée selon les technologies des composites à matrice organique. Une opération de pyrolyse à haute température est ensuite effectuée.

#### Remarques :

- Les caractéristiques des composites seront en fonction des proportions de renfort/matrice, du conditionnement du renfort et du processus de fabrication.
- Les composites ne plastifient pas. Les composites sont affectés par la chaleur et par l'humidité. Ils ne se corrodent pas sauf en cas de contact entre l'aluminium et les fibres de carbone. Ils sont insensibles aux produits chimiques (graisses, huiles etc..) et ont une tenue aux impacts et aux chocs inférieure à celle des métaux.

### III.1. Introduction :

L'élasticité classique c'est l'étude du comportement des solides déformables, élastiques, isotropes, en petites déformations, avec une loi de comportement linéaire. On y ajoute une hypothèse simplificatrice supplémentaire : les déplacements sont petits. Le couple d'hypothèses <<petits déplacements>> et <<petites déformations>> est souvent appelé Hypothèse des petites perturbations souvent abrégées par HPP. L'élasticité classique est donc souvent appelée aussi élasticité linéaire.

Contrairement à la mécanique des fluides, on ne s'intéressera pas ici à la description du mouvement du solide pendant la déformation, mais seulement à l'état final du corps, lorsque l'application du chargement est terminée et que le solide a atteint son état d'équilibre sous la charge.

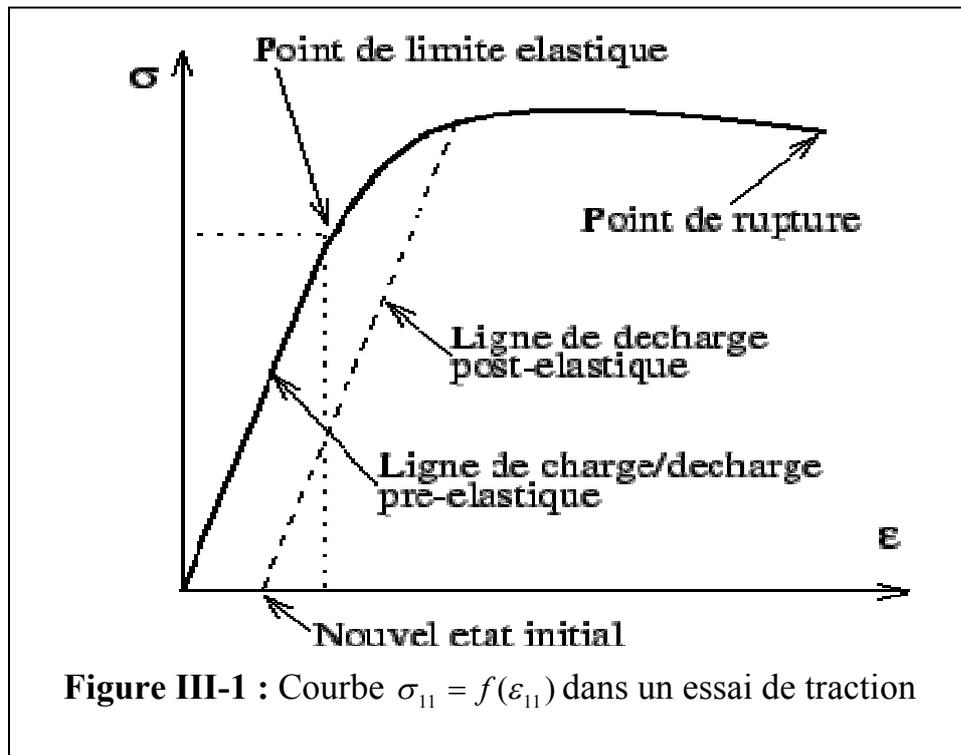
On se donne un corps de forme initiale connue, et dont la loi de comportement est supposée refléter correctement le comportement du matériau. On le soumet à un chargement mécanique (efforts appliqués sur le corps ou déplacements imposés) ou thermique (une variation de température), et on se pose les questions suivantes :

1. Sous quels chargements faut-il calculer l'objet ?
2. Quelles sont les contraintes, les déformations et les déplacements engendrés par ces chargements ?
3. Ces chargements sont-ils supportables par le matériau ?
4. Les valeurs trouvées sont-elles acceptables ?

Comme on le voit, ces questions sont en rapport direct avec les préoccupations d'un constructeur qui doit concevoir un objet ou un assemblage d'objets. La statique des corps élastiques ne permettra de répondre qu'aux questions 2 et 3. Les réponses aux questions 1 et 4 sont sous l'entière responsabilité du constructeur. Il peut parfois être guidé dans cette tâche par des normes ou des règlements.

### III.2- Aperçu du comportement des matériaux réels :

Si on fait une expérience de traction sur un matériau, on constate que, tant que les efforts de traction ne dépassent pas une certaine limite, la relation contrainte déformation reste linéaire. Cependant au-delà du seuil, on constate que la linéarité et la mémoire de la configuration initiale sont perdues : le matériau a une loi de comportement différente.



La courbe de la figure (III-1) montre l'allure du comportement d'un matériau dans un essai de traction sur une éprouvette, dans un plan déformation contrainte. On y constate clairement deux comportements :

- Tant qu'on reste en dessous du point de limite élastique, le comportement reste élastique, c'est à dire que la courbe de décharge est confondue avec la courbe de charge. Quand le chargement redevient nul, l'éprouvette retrouve donc sa forme initiale.
- Par contre, si le chargement dépasse la limite élastique, et si on décharge ensuite l'éprouvette, on constate qu'on revient à un autre état : le matériau a perdu la mémoire de son état initial et se comporte comme si l'état initial était changé.

Ainsi, la loi de comportement élastique linéaire présentée en mécanique des milieux continus a un domaine d'application limité par deux conditions indépendantes :

1. Les déformations doivent être petites car on utilise le tenseur des petites déformations  $\epsilon$  et non un tenseur de déformation exact.
2. La loi de comportement élastique linéaire n'est valide que tant qu'on reste en dessous d'un certain seuil de limite élastique.

Dans la pratique on peut considérer qu'une déformation est petite lorsqu'elle est inférieure à  $10^{-2}$  ou  $10^{-3}$ .

Pour beaucoup de matériaux métalliques, le seuil de limite élastique est dans le domaine des petites déformations. Si bien que, dans ce cas, on peut confondre les deux limitations : Si on est en dessous du seuil de limite élastique, on est dans le domaine des petites déformations.

Mais pour d'autres matériaux, on peut avoir des comportements élastiques avec de grandes déformations, et le comportement élastique peut être non linéaire. Pour de tels matériaux, on peut utiliser l'élasticité linéaire à condition de rester dans le domaine des petites déformations.

Dans tous les cas, la vérification de la validité de ces deux conditions (HPP et limite élastique) ne peut se faire qu'a posteriori, en analysant la solution numérique complète du problème. En construction mécanique, on désire souvent qu'une pièce reprenne sa forme initiale lorsque le chargement a cessé. On doit donc rester dans le domaine élastique, et l'élasticité classique est une théorie satisfaisante.

Mais il existe un grand nombre de problèmes pratiques où elle n'est d'aucun secours :

- Dans les procédés de formage (pliage, emboutissage, forgeage, etc...), il est évident qu'on ne souhaite pas le retour à la forme initiale et qu'on doit s'intéresser au comportement non élastique au-delà de la limite élastique.

On voit donc que, bien qu'elle soit populaire et simple, la théorie de l'élasticité classique ne peut satisfaire tous les besoins.

C'est le constructeur qui a la responsabilité de choisir la théorie à utiliser pour résoudre son problème et la responsabilité de vérifier a posteriori que la solution trouvée est bien dans les limites d'application de la théorie choisie.

### **III.3 Constantes élastiques d'un composite Unidirectionnel :**

La première étape d'un calcul composite consiste à déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau en fonction de celles de ses composants. Dans la plupart des cas, ces calculs se réduisent uniquement au calcul du module d'Young. Il existe divers modèles d'homogénéisations pour l'obtenir.

Soit un matériau composite unidirectionnel (UD) de repère d'orthotropie (l, t), constituer de fibres noyées dans une matrice polymère. Soit une cellule élémentaire de volume unitaire  $V = 1$  constituée de fibres et de matrice avec :

$$V_m = \text{Volume de la matrice/Volume de la cellule: fraction volumique de matrice.}$$

$V_f$  = Volume des fibres/Volume de la cellule : fraction volumique de fibre.

Avec  $V = V_m + V_f = 1$ .

A l'échelle locale, on a les hypothèses suivantes :

- Fibres: comportement élastique linéaire fragile isotrope de coefficients  $E_f$  et  $\nu_f$ .
- Matrice: comportement élastique non linéaire, isotrope de coefficients  $E_m$  et  $\nu_m$ .

### Hypothèses :

- On travaille en élasticité linéaire.
- On suppose que la liaison fibres/matrices est parfaite.

$E_m$  et  $\nu_m$  le module d'élasticité et le coefficient de poisson de la matrice .

$E_f$  et  $\nu_f$  le module d'élasticité et le coefficient de poisson des fibres.

Et soient :

$A$  : la surface d'une section orthogonale à l'axe  $x$  .

$A_m$  et  $A_f$  les surfaces de la section occupées par la matrice et les fibres respectivement.

Si on néglige la surface occupée par les vides, qui sont faible pour un matériau bien dégagé, on a :

$$A = A_m + A_f$$

Nous appellerons  $V_f = A_f / A$  la fraction de fibres en volume, et  $V_m = A_m / A$  la fraction de matrice en volume.

### III.3.1 Module de l'élasticité Longitudinal $E_1$ :

Nous appelons module d'élasticité longitudinal, le module d'élasticité du matériau dans le sens des fibres (figure III-2).

Considérons une éprouvette de longueur  $l$  de section droite  $A$  soumise à une traction simple suivant l'axe 1.

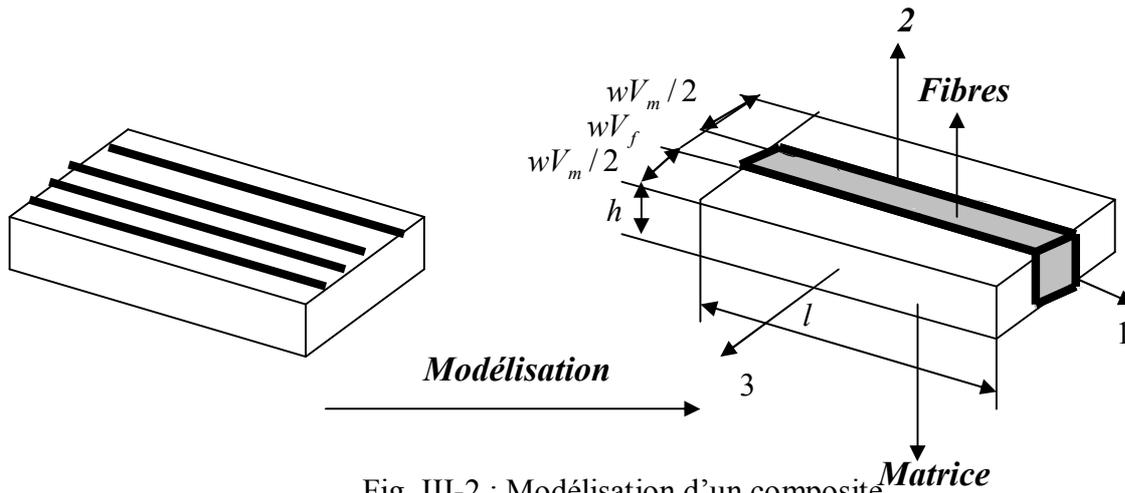


Fig. III-2 : Modélisation d'un composite

L'éprouvette subit un allongement  $\Delta l$  suivant l'axe 1, et donc un allongement relatif :

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{III.1}$$

Puisque les deux matériaux sont supposés linéairement élastiques et isotropes, les expressions des contraintes pour les fibres et la matrice sont :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_f &= E_f \varepsilon_1 \\ \sigma_m &= E_m \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} \quad \text{III.2}$$

Les contraintes  $\sigma_1, \sigma_f$  et  $\sigma_m$  sont appliquées sur les sections d'aire  $A_1, A_f$  et  $A_m$  respectivement.

La force résultante appliquée sur le matériau est telle que :

$$F = \sigma_1 A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \quad \text{III.3}$$

En introduisant l'équation (2) dans l'équation (3), on trouve :

$$\sigma_1 A = E_f \varepsilon_1 A_f + E_m \varepsilon_1 A_m \quad \text{III.4}$$

Sachant que :

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 \quad \text{III.5}$$

L'équation (4) s'écrit alors :

$$E_1 = E_f \frac{A_f}{A} + E_m \frac{A_m}{A} \quad \text{III.6}$$

En fonction des fractions en volume des fibres et de la matrice, l'équation III.6 prend la forme finale suivante :

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad \text{III.7}$$

### III.3.2 Module d'élasticité transversale $E_2$ :

Soit un parallélépipède de matériau composite (fibres parallèles à l'axe **1**) de largeur  $w$  suivant l'axe **2**, de hauteur  $h$  et de longueur  $l$  (figure III-3), soumis à une traction simple d'intensité  $F$  suivant l'axe **2**. Il subit un allongement relatif  $\varepsilon_l$  dans la direction **2**.

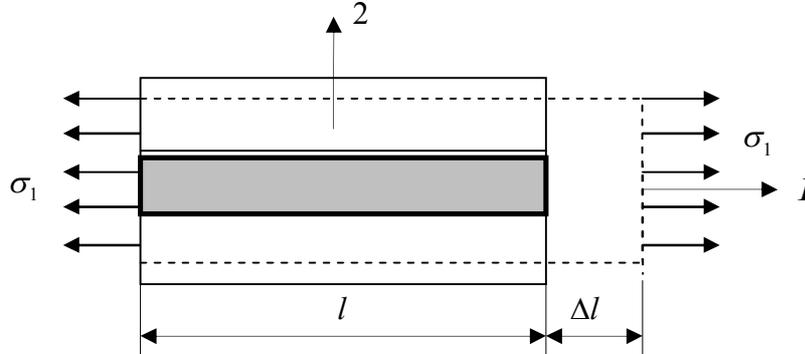


Fig. III-3 : Représentation d'un composite chargé dans la direction 1

Le module de Young transversal  $E_2$  est tel que :

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 \quad \text{III.8}$$

Pour obtenir une approximation de  $E_2$  le matériau est modélisé en rassemblant toutes les fibres au centre et la matrice sur les cotés. Avec cette modélisation, la contrainte normale, dans la matrice et dans les fibres, est la même et vaut :

$$\sigma_2 = \frac{F}{lh} \quad \text{III.9}$$

Les allongements relatifs  $\varepsilon_m$  et  $\varepsilon_f$  de la matrice et des fibres dans la direction **2**, valent :

$$\varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \quad \text{III.10}$$

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f} \quad \text{III.11}$$

Si  $\Delta w$  est l'allongement total,  $\Delta w_m$  et  $\Delta w_f$  les allongements totaux de la matrice et des fibres.

$$w_m : \text{Largeur occupée par la matrice} : w_m = w V_m$$

$$w_f : \text{Largeur occupée par les fibres} : w_f = w V_f$$

D'autre part, l'allongement total  $\Delta w$  est :

$$\Delta w = \Delta w_m + \Delta w_f$$

Et l'allongement relatif total  $\varepsilon_2$  est :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_m V_m + \varepsilon_f V_f \quad \text{III.12}$$

À partir des équations III.8 et III.10, on peut écrire :

$$\sigma_2 = E_2 (\varepsilon_m V_m + \varepsilon_f V_f) \quad \text{III.13}$$

En introduisant les équations III.10 et III.11 dans cette dernière équation, on trouve :

$$\sigma_2 = E_2 \left( \frac{\sigma_2}{E_m} V_m + \frac{\sigma_2}{E_f} V_f \right) \quad \text{III.14}$$

Et, en remplaçant  $\sigma_2$  par sa valeur de l'équation III.10, l'équation III.14 prend la forme

finale suivante:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \quad \text{III.15}$$

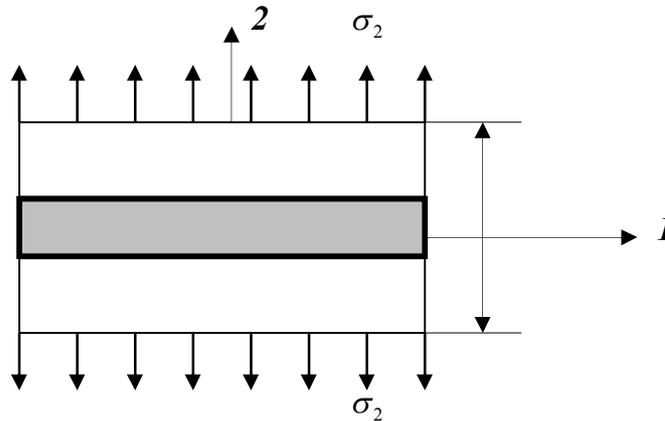


Fig. III-4: Représentation d'un composite chargé dans la direction 2

Dans la réalité, et compte tenu de la sollicitation exercée, le module  $E_f$  à prendre ici est le module d'élasticité des fibres dans la direction perpendiculaire à la direction des fibres, c'est à dire suivant leurs diamètres. Ce module peut être très différent du module  $E_f$  dans le sens des fibres, du fait de l'anisotropie de ces derniers.

### III.3.3 Module de glissement $G_{12}$ :

Réalisons la même modélisation que dans le paragraphe précédent. Le chargement est un cisaillement pur, et le champ de contrainte vaut :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La contrainte tangentielle  $\tau$  est la même dans les deux composantes, on a alors :

$$\tau = G_m \gamma_m \Rightarrow \gamma_m = \frac{\tau}{G_m} \quad \text{III.16}$$

$$\tau = G_f \gamma_f \Rightarrow \gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \quad \text{III.17}$$

A l'échelle microscopique, les déformations sont représentées sur la figure III-5. La déformation tangentielle totale est définie par :

$$\Delta = \gamma w$$

Et, par approximation, on a :

$$\Delta_m = V_m w \gamma_m$$

$$\Delta_f = V_f w \gamma_f$$

Ainsi, on obtient :

$$\gamma = V_m \gamma_m + V_f \gamma_f \quad \text{III.18}$$

Et sachant que :

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{12}} \quad \text{III.19}$$

La combinaison des équations III.16, III.17, III.18 et III.19 donne :

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{V_m}{G_m} + \frac{V_f}{G_f} \quad \text{III.20}$$

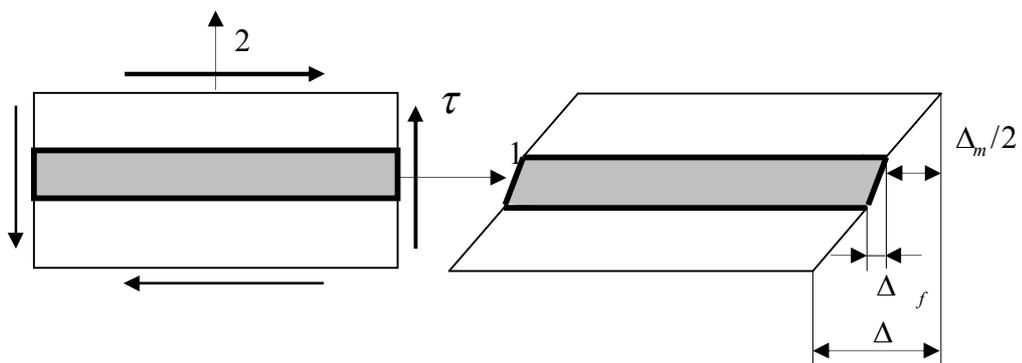


Fig. III-5 : représentation d'un composite en cisaillement.

### III.3.4 Coefficient de Poisson $\nu_{12}$ :

En utilisant toujours la même modélisation, considérons un état de traction simple suivant l'axe 1. Les fibres et la matrice subissent le même allongement relatif  $\varepsilon_1$  suivant

l'axe 1, les allongements relatifs dans la direction transversale de la matrice  $\varepsilon_m$  et  $\varepsilon_f$  des fibres sont :

$$\varepsilon_m = \nu_m \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_f = \nu_f \varepsilon_1$$

La variation de la largeur  $\Delta w$  vaut :

$$\Delta w = -\nu_m \varepsilon_1 V_m w - \nu_f \varepsilon_1 V_f w \quad \text{III.21}$$

Le coefficient de poisson  $\nu_{12}$  du matériau est égal à :

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad \text{III.22}$$

Et puisque :

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta w}{w} \quad \text{III.23}$$

On obtient alors :

$$\nu_{12} = \nu_m V_m + \nu_f V_f \quad \text{III.24}$$

L'isotropie transversale entraîne :

$$\nu_{12} = \nu_{13} \quad \text{III.25}$$

## III.4 Etude des lois de comportement

### III.4.1 Hypothèses de travail

Dans notre étude on va tenir en compte des hypothèses suivantes :

- Milieu élastique entraînant la réversibilité des phénomènes.
- HPP : petites déformations: théorie du premier gradient. Petits déplacements par rapport aux dimensions de la pièce.
- Actions appliquées progressivement: chargement quasi-statique.
- Pas de couplage des phénomènes: hygrothermiques et mécaniques.
- Relations de comportements linéaires.
- Existence d'un potentiel élastique  $W(\varepsilon)$

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Forme quadratique définie positive des composantes du tenseur des déformations :



**Remarque :** pour que la matrice  $S_{ijkl}$  soit symétrique, on travaillera avec les distorsions angulaires.

Les coefficients du tenseur de souplesse s'expriment à l'aide de constantes mécaniques.

$$\text{Pour } \mathbf{i} = (1, 2, 3), S_{iii} = \frac{1}{E_i}$$

$$\text{Pour } i, j = (23, 31, 12), S_{ijj} = \frac{1}{4G_{ij}}$$

$$\text{Pour } i \neq j \text{ et } k \neq 1, S_{ijkk} = \frac{\eta_{ij,k}}{2E_i} = \frac{\eta_{i,kl}}{2G_{kl}} = S_{iikl}$$

$$\text{Pour } i \neq j, S_{ijj} = \frac{-\nu_{ij}}{E_i} = \frac{-\nu_{ji}}{E_j}$$

$$\text{Pour } i \neq j \text{ et } ij \neq lk, S_{ijkl} = \frac{\mu_{kl,ij}}{4G_{ij}} = \frac{\mu_{ij,kl}}{4G_{ikl}}$$

Avec :

$E_i$  : module de tensions

$\eta_{ij,k}$  : coefficients d'influence de 1<sup>ère</sup> espèce.

$G_{ij}$  : module de cisaillement

$\eta_{i,kl}$  : coefficients d'influence de 2<sup>nd</sup>e espèce.

$\nu_{ij}$  : coefficients de contraction

$\mu_{ij,kl}$  : coefficients de CHENTSOV

Dans le paragraphe qui suit, nous allons introduire des symétries matérielles qu'elles nous permettant de simplifier la matrice de souplesse  $S_{ijkl}$

### III.4.2 Matériau orthotrope (orthogonal+anisotrope) :

**Définition :** matériau élastique homogène présentant en tout point 2 symétries du comportement mécanique chacune par rapport à 1 plan, les 2 plans étant orthogonaux.

**Remarque :** Les composantes  $S_{mnpq}$  d'un tenseur exprimées dans un repère  $(1, 2, 3)$  s'écrivent  $\underline{S}_{ijkl}$  dans un repère  $(\mathbf{I}, \mathbf{II}, \mathbf{III})$  :

$$\underline{S}_{ijkl} = \cos_i^m \cos_j^n \cos_k^p \cos_l^q S_{mnpk}$$

Avec  $\cos_i^m$  : cos de l'angle formé par les deux vecteurs unitaires  $m$  et  $i$ .

Après simplification de  $S_{ijkl}$  (élimination des termes nuls), il ne reste que 9 coefficients distincts qui sont:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

Avec

- $E_1, E_2, E_3$  : modules d'élasticité longitudinaux.
- $G_{23}, G_{13}, G_{12}$  : modules de cisaillement.
- $\nu_{23}, \nu_{13}, \nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{32}, \nu_{31}$  : coefficients de Poisson.

Symétrie de la loi de comportement :

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}$$

### III.4.3 Matériau isotrope transverse

**Définition** [13]: c'est un matériau macroscopiquement homogène, c'est un orthotrope mais avec une seule direction différente, c'est donc la même loi de comportement avec :

$$E_2 = E_3, \nu_{12} = \nu_{13}$$

Si on suppose que la direction 3 est axe de symétrie, la relation de comportement s'écrit alors:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_1} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}$$

### III.5. Matériau composite mono couche:

Pour étudier le comportement d'un stratifié constitué de plusieurs plis d'orientation différents, il est nécessaire de connaître le comportement de chacun des plis qui le composent, et ce dans des directions autres que les directions d'orthotropie du pli.

#### III.5.1 Coefficient de Souplesse

Soit  $l, t, z$  les axes d'orthotropie du pli représentés sur la figure (III.05). Pour un stratifié mince constitué par une superposition de plis, nous supposons que les contraintes  $\sigma_{zz}$  sont nulles. Il en résulte que pour un matériau orthotrope la loi de comportement dans le plan  $l, t$ , est décrite comme suite :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_l} & -\frac{\nu_{lt}}{E_t} & 0 \\ -\frac{\nu_{lt}}{E_l} & \frac{1}{E_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{lt}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} \quad \text{III.26}$$

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad \text{III.27}$$

- La contrainte  $\vec{\sigma}$  s'exerçant sur une facette de normale  $\vec{n}$  est donnée par :

$$\{\sigma\} = [\sigma_{ij}]\{n\}$$

$\{\sigma\}$  : Matrice colonne des composantes de :  $\sigma$ .

$[\sigma_{ij}]$  : Matrice des contraintes.

$\{n\}$  : Matrice colonne des cosinus directeurs de :  $\vec{n}$ .

- Coordonnées d'un même vecteur  $\vec{V}$  dans deux repères distincts  $x, y$  et  $l, t$  tels que  $(\vec{x}; \vec{y}) = \theta$

On a :

$$\vec{V} = V_l \vec{l} + V_t \vec{t} = V_x \vec{x} + V_y \vec{y}$$

Avec la relation :

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_l \\ V_t \end{Bmatrix} \quad \text{III.28}$$

$$C = \cos \theta$$

$$S = \sin \theta$$

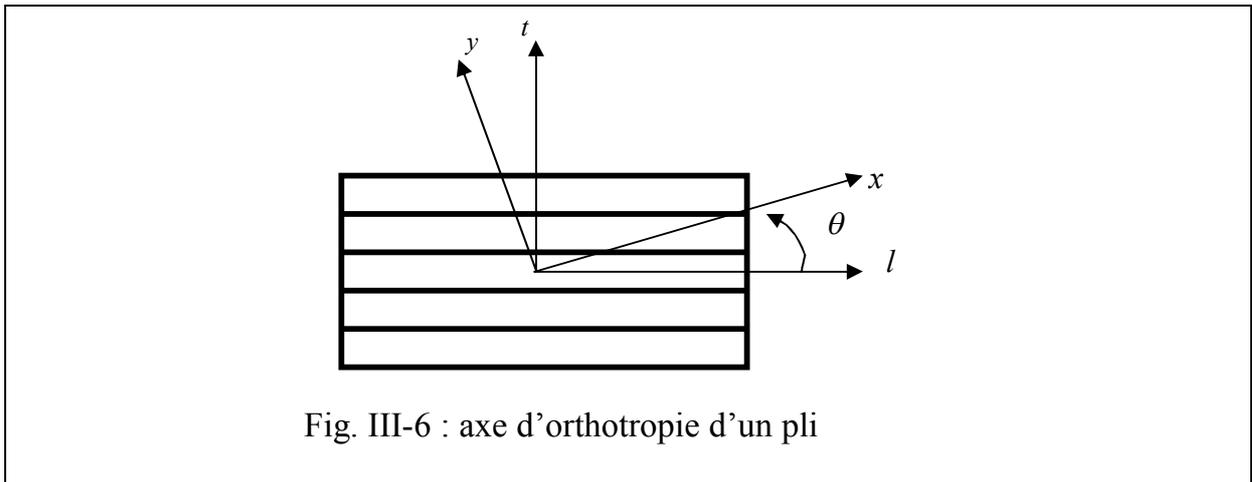


Fig. III-6 : axe d'orthotropie d'un pli

Dans les axes  $l, t$ , exprimons au moyen de la relation (III.27) la contrainte s'exerçant sur la facette de normale  $\vec{x}$  :

$$\{\sigma_{/x}\}_{l,t} = [\sigma_{ij}]_{l,t} \{x\}_{l,t} = [\sigma_{ij}]_{l,t} \begin{Bmatrix} C \\ S \end{Bmatrix}$$

Et dans les axes  $x,y$ , d'après (28) :

$$\{\sigma_{/x}\}_{x,y} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} [\sigma_{ij}]_{l,t} \begin{Bmatrix} C \\ S \end{Bmatrix}$$

D'une manière analogue, la contrainte s'exerçant sur la facette de normale  $\vec{y}$  s'écrit dans les axes  $x,y$  :

$$\{\sigma_{/y}\}_{x,y} = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} [\sigma_{ij}]_{l,t} \begin{Bmatrix} -S \\ C \end{Bmatrix}$$

D'où la matrice des contraintes dans les axes  $x,y$  :

$$[\sigma_{ij}] = [\sigma_{/x}, \sigma_{/y}] = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix} [\sigma_{ij}]_{l,t} \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix}$$

on posant :

$$[P] = \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$

Et en remarquant que la matrice  $[P]$  est orthogonale ( $[P]^T = [P]^{-1}$ ), il vient :

$$[\sigma_{ij}]_{l,t} = [P]^T [\sigma_{ij}]_{x,y} [P]$$

Si l'on développe cette expression, soit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_l & \tau_{lt} \\ \tau_{lt} & \sigma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -S \\ S & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S \\ -S & C \end{bmatrix}$$

Qu'on peut la réarranger sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & -2CS \\ S^2 & C^2 & 2CS \\ SC & -SC & (C^2 - S^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.29}$$

Soit:

$$\{\sigma\}_{l,t} = [T] \{\sigma\}_{xy} \quad \text{III.30}$$

Avec:

$$[T] = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & -2CS \\ S^2 & C^2 & 2CS \\ SC & -SC & (C^2 - S^2) \end{bmatrix}$$

La considération des déformations autorisant une procédure de calcul analogue, on pourra écrire parallèlement :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2CS \\ S^2 & C^2 & -2CS \\ -SC & SC & (C^2 - S^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{lt} \end{Bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix}_{x,y} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \end{Bmatrix}_{l,t} \quad \text{III.31}$$

En introduisant les relations (III.30) et (III.31) dans la relation de comportement (III.26), on trouve :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{E_l} & -\frac{\nu_{lt}}{E_t} & 0 \\ -\frac{\nu_{lt}}{E_l} & \frac{1}{E_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{lt}} \end{bmatrix} [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

**Nouvelle matrice des coefficients de souplesse dans les axes  $x, y$**

Tous calculs effectués, on obtient la loi de comportement suivante, écrite sous forme technique dans les axes  $x, y$  faisant l'angle  $\theta$  avec les axes  $l, t$ . On y a fait apparaître les modules élastiques et les coefficients de Poisson relatifs à ces directions. On constate aussi l'existence de couplages non classiques notés  $\eta$  et  $\mu$  qui montrent, par exemple, qu'une contrainte normale induit une distorsion.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{\eta_{xy}}{G_{xy}} \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\mu_{xy}}{G_{xy}} \\ \frac{\eta_x}{E_x} & \frac{\mu_y}{E_y} & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.32}$$

Avec:

$$E_x(\theta) = \frac{1}{\frac{c^4}{E_l} + \frac{s^4}{E_t} + c^2 s^2 \left( \frac{1}{G_{lt}} - 2 \frac{\nu_{lt}}{E_t} \right)}$$

$$E_y(\theta) = \frac{1}{\frac{s^4}{E_l} + \frac{c^4}{E_t} + c^2 s^2 \left( \frac{1}{G_{lt}} - 2 \frac{\nu_{lt}}{E_t} \right)}$$

$$G_{xy}(\theta) = \frac{1}{4c^2 s^2 \left( \frac{1}{E_l} + \frac{1}{E_t} + 2 \frac{\nu_{lt}}{E_t} \right) + \frac{(c^2 - s^2)^2}{G_{lt}}}$$

$$\frac{\nu_{yx}}{E_y}(\theta) = \frac{\nu_{lt}}{E_t} (c^4 + s^4) - c^2 s^2 \left( \frac{1}{E_l} + \frac{1}{E_t} - \frac{1}{G_{lt}} \right)$$

$$\frac{\eta_{xy}}{G_{xy}}(\theta) = -2cs \left[ \frac{c^2}{E_l} - \frac{s^2}{E_t} + (c^2 - s^2) \left( \frac{\nu_{lt}}{E_t} - \frac{1}{2G_{lt}} \right) \right]$$

$$\frac{\mu_{xy}}{G_{xy}}(\theta) = -2cs \left[ \frac{s^2}{E_l} - \frac{c^2}{E_t} - (c^2 - s^2) \left( \frac{\nu_{lt}}{E_t} - \frac{1}{2G_{lt}} \right) \right]$$

### III.5.2 Coefficient de raideur

Lorsqu'on inverse la relation de comportement (III.26) écrite dans les axes d'orthotropie  $\mathbf{l}, \mathbf{t}$  du pli, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_l}{1-\nu_{lt}\nu_{tl}} & \frac{\nu_{tl}E_l}{1-\nu_{lt}\nu_{tl}} & 0 \\ \frac{\nu_{lt}E_t}{1-\nu_{lt}\nu_{tl}} & \frac{E_t}{1-\nu_{lt}\nu_{tl}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix}$$

Où apparaissent des coefficients élastiques dits de raideur par opposition à ceux de la relation (III.1) dénommés coefficients de souplesse. Pour alléger l'écriture on notera :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_l & \nu_{tl}\bar{E}_l & 0 \\ \nu_{lt}\bar{E}_t & \bar{E}_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} \quad \text{III.33}$$

Une procédure identique à celle qui a été suivie au paragraphe précédent pour écrire la loi de comportement déformations contraintes conduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2CS \\ S^2 & C^2 & -2CS \\ -SC & SC & (C^2 - S^2) \end{bmatrix}}_{[T_1]} \begin{Bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_t \\ \tau_{lt} \end{Bmatrix} \quad \text{III.34.1}$$

et :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \gamma_{lt} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C^2 & S^2 & -CS \\ S^2 & C^2 & CS \\ 2SC & -2SC & (C^2 - S^2) \end{bmatrix}}_{[T_1']} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.34.2}$$

Les axes  $x, y$  étant toujours déduits des axes  $l, t$  par rotation  $\theta$  autour du troisième axe  $z$ , lorsqu'on substitue les relations (III.34,1) et (III.34,2) dans (III.33), on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T_1] \begin{bmatrix} \bar{E}_l & \nu_{tl}\bar{E}_l & 0 \\ \nu_{lt}\bar{E}_t & \bar{E}_t & 0 \\ 0 & 0 & G_{lt} \end{bmatrix} [T_1'] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Qui peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{31} & \bar{E}_{32} & \bar{E}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.35}$$

Tous calculs effectués, on trouve pour les coefficients de raideurs  $\bar{E}_{ij}$  les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{E}_{11}(\theta) &= c^4 \bar{E}_l + s^4 \bar{E}_t + 2c^2 s^2 (\nu_{tl} \bar{E}_l + 2G_{tl}) \\ \bar{E}_{22}(\theta) &= s^4 \bar{E}_l + c^4 \bar{E}_t + 2c^2 s^2 (\nu_{tl} \bar{E}_t + 2G_{tl}) \\ \bar{E}_{33}(\theta) &= c^2 s^2 (\bar{E}_l + \bar{E}_t - 2\nu_{tl} \bar{E}_l) + (c^2 - s^2)^2 G_{tl} \\ \bar{E}_{12}(\theta) &= c^2 s^2 (\bar{E}_l + \bar{E}_t - 4G_{tl}) + (c^4 + s^4) \nu_{tl} \bar{E}_l \\ \bar{E}_{13}(\theta) &= -cs \left[ c^2 \bar{E}_l - s^2 \bar{E}_t - (c^2 - s^2) (\nu_{tl} \bar{E}_l + 2G_{tl}) \right] \\ \bar{E}_{23}(\theta) &= -cs \left[ s^2 \bar{E}_l - c^2 \bar{E}_t + (c^2 - s^2) (\nu_{tl} \bar{E}_l + 2G_{tl}) \right]\end{aligned}$$

Expressions dans lesquelles :

$$\bar{E}_l = \frac{E_l}{1 - \nu_{tl} \nu_{lt}} \qquad \bar{E}_t = \frac{E_t}{1 - \nu_{tl} \nu_{lt}}$$

## III.6. Comportements mécaniques des stratifiés

### III.6.1 Comportement en membrane

Dans le cas des plaques pressentent la symétrie miroir on a un découplage entre les forces de membrane et celles de flexion. Si nous avons une plaque de matériaux composite stratifiée composée de 2n couche alors si chaque couche de numéro (x) a comme orientation des fibres un angle  $\theta$  la couche numéro (-x) a la même orientation des fibres, dans ce cas on peut dire que on a une symétrie miroir. fig.III.7

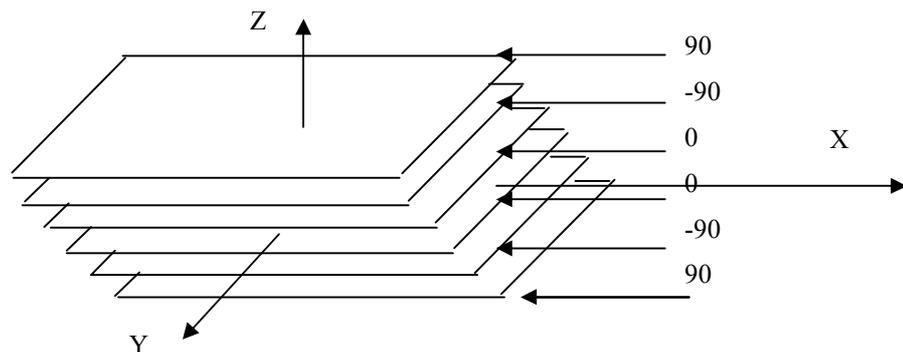
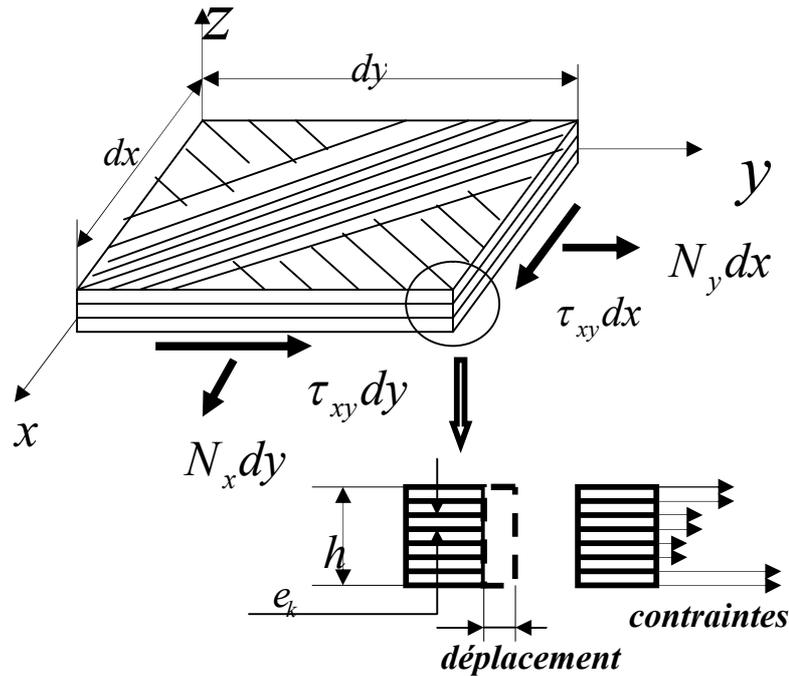


Fig. III.7 Composite avec symétrie miroir

Nous considérons dans ce qui suit un stratifié plan de hauteur  $h$ , constitué de  $n$  plis. Le pli numéro  $k$  à une épaisseur notée  $e_k$ .

Le stratifié est soumis à des sollicitations dans son plan qui sont notées  $N_x, N_y, T_{xy} = T_{yx}$ , par unité de longueur suivant la direction  $y$  ou la direction  $x$ . il s'agit de la déformation dite de membrane, ou éléments de réduction pour les contraintes, ou encore flux d'efforts dans le stratifié.



Ils sont définis comme suit :

- $N_x$  : effort résultant dans la direction  $x$ , par unité de largeur suivant la direction  $y$

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \sum_{k=1^{er} pli}^n (\sigma_x)_k e_k \quad \text{III.36}$$

- $N_y$  : effort résultant dans la direction  $y$ , par unité de largeur suivant la direction  $x$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \sum_{k=1^{er} pli}^n (\sigma_y)_k e_k \quad \text{III.37}$$

- $T_{xy}$  : (ou  $T_{yx}$ ) cisaillement de membrane par unité de largeur suivant la direction  $y$  (respectivement suivant la direction  $x$ ) :

$$\tau_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = \sum_{k=1^{er} pli}^n (\tau_{xy})_k e_k \quad \text{III.38}$$

Le déplacement élastique de tout point du stratifié est supposé bidimensionnel plan, dans le plan  $x, y$  du stratifié. Il a alors pour composantes :  $u_0, v_0$  .

Les déformations qui ne sont pas nulles correspondantes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0x} &= \partial u_0 / \partial x \\ \varepsilon_{0y} &= \partial v_0 / \partial y \\ \gamma_{0xy} &= \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \end{aligned}$$

Nous avons vu dans la partie comportement mécanique d'un pli que nous pouvions l'exprimer dans un repère quelconque, les contraintes en fonction des déformations. L'élément de réduction  $N_x$  défini par la relation (III.36) peut alors être détaillé comme suit :

$$N_x = \sum_{k=1}^n \left( \overline{E}_{11}^k \varepsilon_{0x} + \overline{E}_{12}^k \varepsilon_{0y} + \overline{E}_{13}^k \gamma_{0xy} \right) e_k$$

Soit:

$$N_x = A_{11} \varepsilon_{0x} + A_{12} \varepsilon_{0y} + A_{13} \gamma_{0xy}$$

Avec:

$$A_{11} = \sum_{k=1}^n \overline{E}_{11}^k e_k$$

$$A_{12} = \sum_{k=1}^n \overline{E}_{12}^k e_k$$

$$A_{13} = \sum_{k=1}^n \overline{E}_{13}^k e_k$$

D'une manière analogue on obtient à partir de la relation (III.37) :

$$N_y = A_{21} \varepsilon_{0x} + A_{22} \varepsilon_{0y} + A_{23} \gamma_{0xy}$$

Avec:

$$A_{2j} = \sum_{k=1}^n \overline{E}_{2j}^k e_k$$

Et pour le flux de cisaillement  $T_{xy}$  on peut écrire à partir de la relation (III.38) :

$$T_{xy} = A_{31} \varepsilon_{0x} + A_{32} \varepsilon_{0y} + A_{33} \gamma_{0xy}$$

Avec:

$$A_{3j} = \sum_{k=1}^n \overline{E}_{3j}^k e_k$$

On peut ainsi exprimer les flux d'efforts sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} \quad \text{III.39}$$

Avec :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \overline{E}_{ij}^k e_k \quad \text{III.40}$$

Les expressions de  $\overline{E}_{ij}$  sont :

$$\begin{aligned} \overline{E}_{11}(\theta) &= c^4 \overline{E}_l + s^4 \overline{E}_t + 2c^2 s^2 (\nu_{lt} \overline{E}_l + 2G_{lt}) \\ \overline{E}_{22}(\theta) &= s^4 \overline{E}_l + c^4 \overline{E}_t + 2c^2 s^2 (\nu_{tl} \overline{E}_t + 2G_{tl}) \\ \overline{E}_{33}(\theta) &= c^2 s^2 (\overline{E}_l + \overline{E}_t - 2\nu_{lt} \overline{E}_l) + (c^2 - s^2)^2 G_{lt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{E}_{12}(\theta) &= c^2 s^2 (\bar{E}_l + \bar{E}_t - 4G_t) + (c^4 + s^4) \nu_{tl} \bar{E}_l \\ \bar{E}_{13}(\theta) &= -cs \left[ c^2 \bar{E}_l - s^2 \bar{E}_t - (c^2 - s^2) (\nu_{tl} \bar{E}_l + 2G_t) \right] \\ \bar{E}_{23}(\theta) &= -cs \left[ s^2 \bar{E}_l - c^2 \bar{E}_t + (c^2 - s^2) (\nu_{tl} \bar{E}_l + 2G_t) \right]\end{aligned}$$

Expressions dans lesquelles :

$$\bar{E}_l = \frac{E_l}{1 - \nu_{tl} \nu_{lt}} \qquad \bar{E}_t = \frac{E_t}{1 - \nu_{tl} \nu_{lt}}$$

Il est possible de substituer aux flux d'efforts  $N_x, N_y, T_{xy}$  des contraintes moyennes globales (qui sont fictives) :

$$\begin{aligned}\sigma_{0x} &= N_x / h \\ \sigma_{0y} &= N_y / h \\ \tau_{0xy} &= T_{xy} / h\end{aligned} \tag{III.41}$$

En déduit alors de (39) la loi de comportement en membrane du stratifié rendu « homogène » sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{0x} \\ \sigma_{0y} \\ \tau_{0xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} \tag{III.42}$$

### III.6.2 Modules apparents du stratifié

L'inversion de la relation (III.42) permet d'obtenir ce que l'on peut qualifier de modules apparents et coefficients de couplages associés pour le comportement en membrane dans le plan  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ . ces coefficients apparaissent au moyen de l'identification qui suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} = h[A]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{0x} \\ \sigma_{0y} \\ \tau_{0xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{E}_x} & -\frac{\bar{\nu}_{yx}}{\bar{E}_y} & \frac{\bar{\eta}_{xy}}{\bar{G}_{xy}} \\ -\frac{\bar{\nu}_{xy}}{\bar{E}_x} & \frac{1}{\bar{E}_y} & \frac{\bar{\mu}_{xy}}{\bar{G}_{xy}} \\ \frac{\bar{\eta}_x}{\bar{E}_x} & \frac{\bar{\mu}_y}{\bar{E}_y} & \frac{1}{\bar{G}_{xy}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{0x} \\ \sigma_{0y} \\ \tau_{0xy} \end{Bmatrix} \tag{III.43}$$

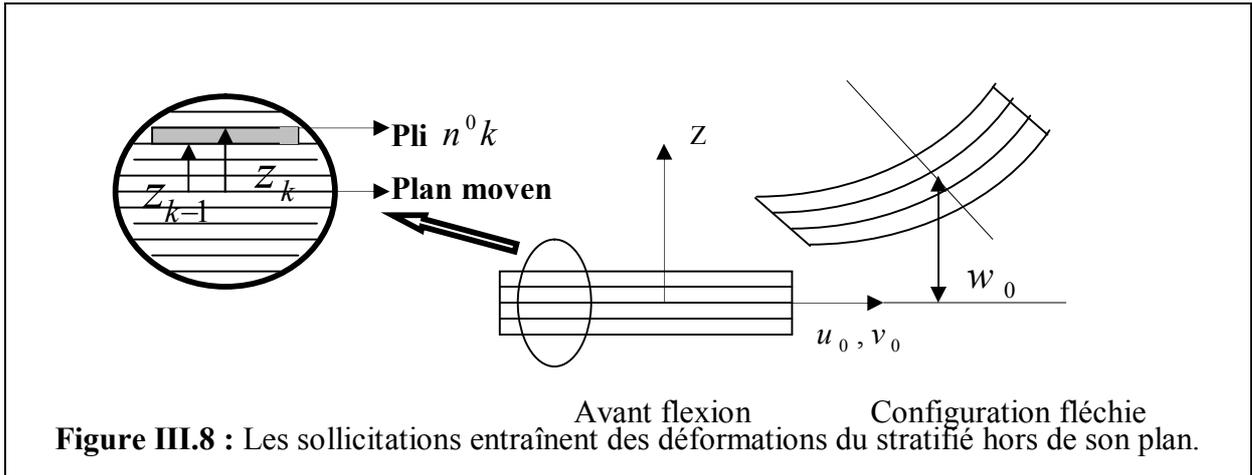
**Remarque 1 :** si le stratifié est équilibré (autant de plis dans une direction que dans l'autre), on a découplage entre déplacements dus à la traction et distorsion angulaire due au cisaillement, c'est à dire :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix}$$

**Remarque 2 :** Les  $A_{ij}$  sont indépendants de l'ordre d'empilement des plis.

### III.6.3 Comportement en Flexion : « Hypothèse de Love »

Au paragraphe précédent nous nous sommes limités aux sollicitations  $N_x, N_y, T_{xy}$  agissant dans le plan du stratifié. Nous examinerons maintenant le cas où les sollicitations entraînent des déformations du stratifié hors de son plan, suivant la figure ci-après fig.III.8. Le stratifié considéré est (comme précédemment) supposé pourvu de la symétrie miroir.



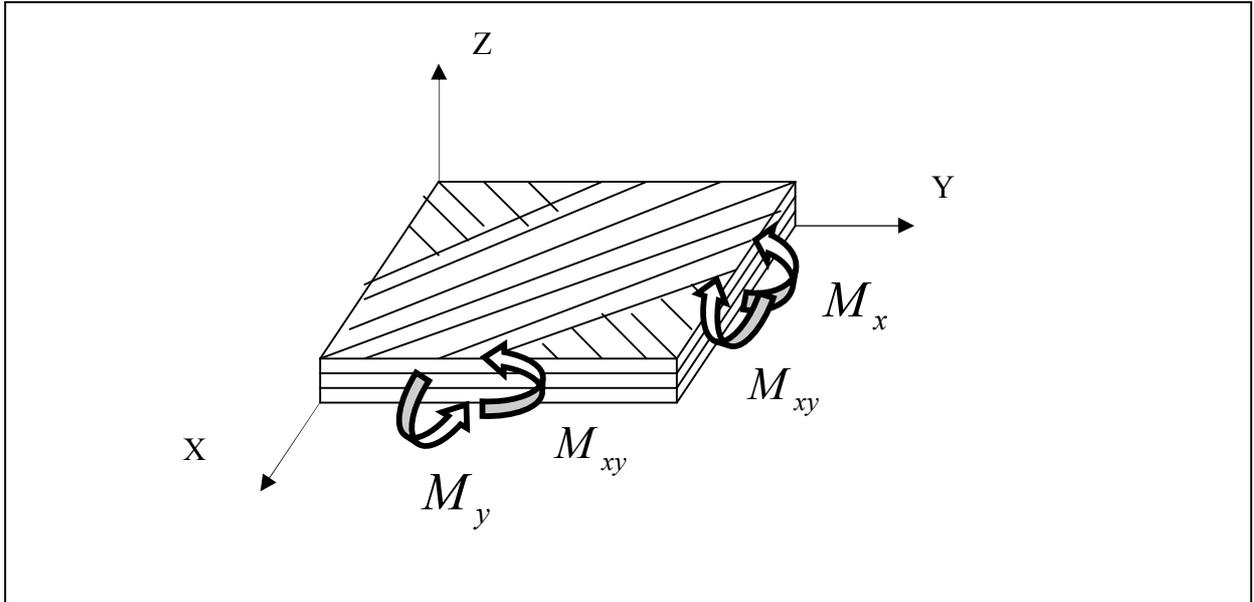
On suppose (Hypothèse de Love) qu'une ligne perpendiculaire au plan moyen avant déformation demeure perpendiculaire à la surface moyenne transformée du plan moyen dans la configuration fléchie. Donc si l'on note comme précédemment  $u_0$  et  $v_0$  les composantes du déplacement dans le plan moyen, et  $w_0$  le déplacement hors de ce plan, le déplacement de tout point de cote  $z$  dans le stratifié (en configuration non déformée) s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w &= w_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{III.44}$$

On en déduit les déformations non nulles correspondantes :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_{0x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{0y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{0xy} - z \left( 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad \text{III.45}$$

Aux efforts de membrane  $N_x, N_y, T_{xy}$  décrits dans le paragraphe précédent viennent s'ajouter des moments par unité d'envergure suivant la direction  $y$  ou la direction  $x$ .



Tout comme pour les efforts de membrane, ces moments servent aussi à synthétiser les efforts de cohésion mis en évidence sur les coupures, suivant une méthode générale classique, commune à toute les structures (poutres, plaques,...). On doit donc les interpréter comme les moments unitaires des efforts de cohésion. Ils s'écrivent alors :

- $M_y$  : moment fléchissant d'axe  $y$ , dû aux contraintes  $\sigma_x$ , par unité de largeur suivant la direction  $y$  :

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad \text{III.46}$$

- $M_x$  : Moment fléchissant d'axe  $x$ , dû aux contraintes  $\sigma_y$ , par unité de largeur suivant la direction  $x$  :

$$M_x = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad \text{III.47}$$

- $M_{xy}$  : (ou  $-M_{yx}$ ) Moment de torsion d'axe  $x$  (ou  $y$ ), dû aux contraintes  $\tau_{xy}$ , par unité de largeur suivant  $y$  (ou suivant  $x$ ) :

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad \text{III.48}$$

Compte tenu de la relation qui permet d'exprimer dans un repère quelconque, les contraintes dans un pli en fonction des déformations de ce dernier, l'élément de réduction  $M_y$  s'écrit :

$$M_y = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\bar{E}_{11}^k \varepsilon_x + \bar{E}_{12}^k \varepsilon_y + \bar{E}_{13}^k \gamma_{xy}) z dz$$

Du fait de l'existence de la symétrie miroir, tout intégrale de type :

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} \overline{E}_{1j} z dz$$

Dans l'expression ci-dessus s'accompagne d'une intégrale tel que :

$$\int_{-z_k}^{z_{k-1}} \overline{E}_{1j} z dz$$

Qui lui est opposée en signe. Les intégrales de ce type disparaissent et il reste :

$$M_y = \sum_{k=1^{er} pli}^n - \left[ \overline{E}_{11}^k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \overline{E}_{12}^k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \overline{E}_{13}^k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3} 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right]$$

Soit encore:

$$M_y = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - D_{13} 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

Avec: 
$$D_{1j} = \sum_{k=1^{er} pli}^n \overline{E}_{1j}^k \frac{(z_k^3 - z_{k-1}^3)}{3}$$

En procédant de manière analogue avec  $M_x$  et  $M_{xy}$ , on obtient sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ -M_y \\ -M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{III.49}$$

### III.6.4 Comportement en Membrane – Flexion Couples d'un stratifié sans symétrie miroir

Si on reprend les considérations du paragraphe précédant, en l'absence de la symétrie miroir, on note de nouveau la présence des intégrales des types :

$$\int_{-z_k}^{z_{k-1}} \overline{E}_{ij} z dz = \overline{E}_{ij}^k \frac{(z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2}$$

Qui caractérisent le pli numéro  $k$ . lorsqu'on effectue la sommation à tous les plis du stratifié, ces intégrales conduisent à des termes non nuls qui prennent la forme :

$$B_{ij} = \sum_{k=1^{er} pli}^n \overline{E}_{ij}^k \frac{(z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2}$$

On aura ainsi pour le développement de  $M_y$  :

$$M_y = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - D_{13} 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + B_{11} \varepsilon_{0x} + B_{12} \varepsilon_{0y} + B_{13} \gamma_{0xy}$$

Expression qui fait apparaître le couplage des comportements de flexion et de membrane.

D'une manière analogue, l'effort de membrane  $N_x$  tel qu'il est développé en fin du paragraphe précédant, s'écrit :

$$N_x = A_{11} \varepsilon_{0x} + A_{12} \varepsilon_{0y} + A_{13} \gamma_{0xy} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - B_{13} 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

Si l'on développe de la même façon les autres efforts unitaires :  $M_x, M_y, N_y, T_{xy}$ , on peut regrouper les résultats obtenus. On obtient la relation comportement global sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ -M_y \\ -M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \text{III.50}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix}$$

### Remarques :

- ❖ Dans le cas général, on a un couplage entre les comportements en membrane et en flexion dans un stratifié quelconque, mais la symétrie miroir implique le découplage, c'est à dire que les  $B_{ij}$  sont nulles et les termes  $(Z_k^2 - Z_{k-1}^2)$  s'annulent 2 par 2. Les termes  $[E_{16}]^k$  et  $[E_{26}]^k$  s'obtiennent en fonction de  $\sin\Theta^k$  et  $\sin 3\Theta^k$  qui ne changent pas de signe pour 2 couches symétriques.
- Si on évite ce couplage, le comportement en membrane est indépendant de l'ordre de la séquence d'empilement.
- Pour les stratifiés équilibrés, les termes  $A_{16}$  et  $A_{26}$  sont nulles.

## IV.1 Introduction

Durant les deux dernières dizaines d'années la méthode d'éléments finis a été établie comme un outil très performant pour la résolution des systèmes d'analyse des structures et les sciences d'ingénieur (mécanique des solides et des fluides, thermiques....) permettent de décrire le comportement de système physique grâce à des équations aux dérivées partielles, la méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations.

Elle constitue un outil de travail efficace, ce qui permet de traiter les équations différentielles les plus compliquées pour des formes géométriques et conditions limites délicates.

## IV.2 Éléments utilisés

Pour effectuer nos études du flambage mécanique après la formulation en élément fini de ces plaques nous avons choisi comme élément rectangulaire de 24 degrés de liberté.

La figure (IV-1) montre la géométrie de élément rectangulaire utilisé, de les dimensions a et b, et l'épaisseur t.

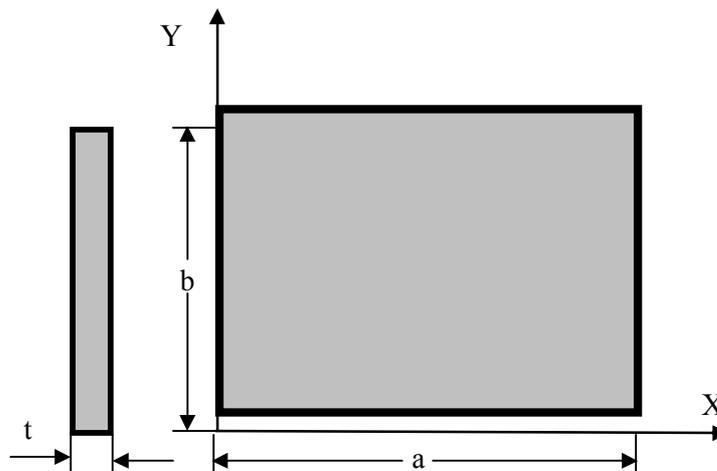


Fig. IV-1 Élément Plaque rectangulaire.

## IV.3 Fonctions des déplacements des éléments

L'élément possède quatre (4) nœuds de 6 degrés de liberté chacun, ces degrés de liberté sont

- Deux degrés dans le plan (X, Y) qui sont u et v.
- Quatre hors plan qui sont  $w, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right), \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)$ , ces déplacements sont montrés sur la

figure (IV-2). Les fonctions des déplacements pour les déplacements dans le plan sont bilinéaires et pour les déplacements hors plan sont cubiques.

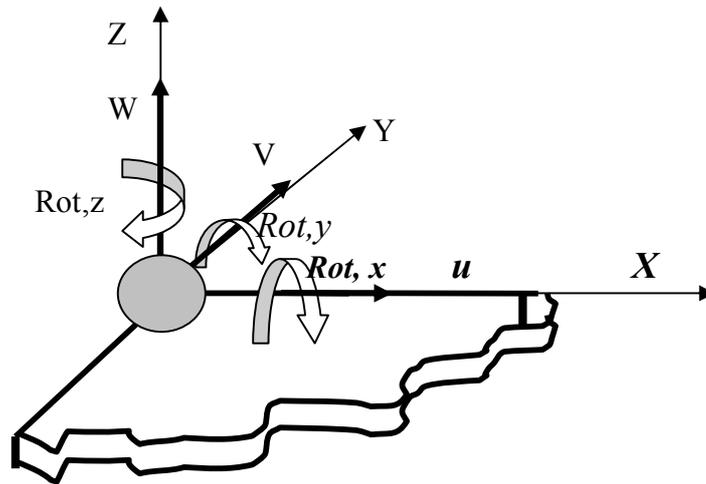


Fig.IV-2 : Les déplacements possible de chaque nœud de l'élément.

Les fonctions des déplacements sont données en fonction des coordonnées généralisées par les relations suivantes [2] :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v(x, y) &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \end{aligned} \quad \text{IV.1}$$

Et

$$\begin{aligned} w(x, y) &= c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2 + c_7 x^3 \\ &+ c_8 x^2 y + c_9 xy^2 + c_{10} y^3 + c_{11} x^3 y + c_{12} x^2 y^2 \\ &+ c_{13} xy^3 + c_{14} x^3 y^2 + c_{15} x^2 y^3 + c_{16} x^3 y^3 \end{aligned} \quad \text{IV.2}$$

Ou à l'aide des variables nodales par :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^4 L_i(x, y) u_i = \frac{1}{ab} [ (a-x)(b-y)u_1 + x(b-y)u_2 + xyu_3 + (a-x)yu_4 ] \\ v(x, y) &= \sum_{i=1}^4 L_i(x, y) v_i = \frac{1}{ab} [ (a-x)(b-y)v_1 + x(b-y)v_2 + xyv_3 + (a-x)yv_4 ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w(x, y) &= \sum_{i=4}^{20} L_i(x, y) \\
&= \frac{1}{a^3 b^3} \left[ (a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2)w_1 + ax(x-a)^2(b^3 + 2y^3 - 3by^2) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 \right. \\
&\quad \left. + by(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(y-b)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 + abxy(x-a)^2(y-b)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_1 \right. \\
&\quad \left. + (3ax^2 - 2x^3)(b^3 + 2y^3 - 3by^2)w_2 + a(x^3 - ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 \right. \\
&\quad \left. + by(3ax^2 - ax^3)(y-b)^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_2 + abxy(x^2 - ax)(y-b)^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_2 \right. \\
&\quad \left. + (3ax^2 - 2x^3)(3by^2 - 2y^3)w_3 + a(x^3 - ax^2)(3by^2 - 2y^3) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 \right. \\
&\quad \left. + b(3ax^2 - 2x^3)(y^3 - by^2) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 + abxy(x^2 - ax)(y^2 - by) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_3 \right. \\
&\quad \left. + (a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(3by^2 - 2y^3)w_4 + ax(x-a)^2(3by^2 - 2y^3) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_4 \right. \\
&\quad \left. + b(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(y^3 - by^2) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_4 + abxy(x-a)^2(y^2 - by) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_4 \right]
\end{aligned}$$

Ou sous la forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L_u] & 0 \\ [L_v] & 0 \\ 0 & [L_w] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_m \\ a_f \end{Bmatrix} = [L_{uvw}] \{q\} \quad \text{IV.3}$$

$$[a_m] = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]$$

$$[a_b] = [w_1 \quad \dots \quad w_4 \quad w_{,x1} \quad \dots \quad w_{,x4} \quad w_{,y1} \quad \dots \quad w_{,y4} \quad w_{,xy1} \quad \dots \quad w_{,xy4}]$$

En outre, les fonctions de forme de déplacement ont été rassemblées dans des vecteurs :

$$\begin{aligned}
[L_u] &= [L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\
[L_v] &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad L_4] \\
[L_w] &= [L_5 \quad L_6 \quad L_7 \quad \dots \quad L_{19} \quad L_{20}]
\end{aligned}$$

### IV.3.1 Vecteurs des déformations

Les déformations de membrane et de flexion peuvent être écrites en termes de déplacements nodaux et des fonctions d'interpolation de déplacements:

$$\{\varepsilon_L^0\} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [L_{u,x}] \\ [L_{v,y}] \\ [L_{u,y}] + [L_{v,x}] \end{Bmatrix} \{q\} = [S_\varepsilon] \{q\} \quad \text{IV.4}$$

$$\{k\} = - \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} [L_{w,xx}] \\ [L_{w,yy}] \\ 2[L_{w,xy}] \end{Bmatrix} \{q\} = [S_K] \{q\} \quad \text{IV.5}$$

Où  $[S_\varepsilon]$  et  $[S_K]$  sont deux matrices de dimensions (3x24), avec  $[S_\varepsilon]$  est la matrice qui relie les déformations dans le plan au vecteur des déplacements.

On a aussi :

$$\{\varepsilon_{nL}^0\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} w_{,x}^2 \\ w_{,y}^2 \\ 2w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} \quad \text{IV.6}$$

Avec :

$$\begin{Bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} = [G] \{q\}$$

$$\{G\} = \begin{Bmatrix} [L_{w,x}] \\ [L_{w,y}] \end{Bmatrix}$$

Où  $\{G\}$  est de dimension (2x24) et qui relie les déformations ou vecteur déplacements.

Ainsi, la déformation non linéaire de flexion peut être écrite comme suit:

$$\{\varepsilon_{nL}^0\} = \frac{1}{2} [G] \{q\} \quad \text{IV.7}$$

En fin

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} \quad \text{IV.8}$$

$$\{\varepsilon^0\} = \{\varepsilon_L^0\} + \{\varepsilon_{nl}^0\} \quad \text{IV.9}$$

### IV.3.3 Vecteurs des efforts et moments résultants

Il est utile d'écrire les efforts résultantes au niveau du plan moyen d'un stratifié et qui sont données comme suit :

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{IV.10}$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \tag{IV.11}$$

En fin nous pouvons écrire la relation sous forme matricielle qu'elle nous donne la relation qui relie les efforts aux déformations :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \end{Bmatrix} \tag{IV.11}$$

### IV.4.1 Calcul des matrices de rigidité [K]<sup>e</sup> et [K]<sub>g</sub>

On appliquons le théorème de l'énergie potentielle U, pour un élément de dimensions a et b et l'épaisseur t on a [13] :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a ([\varepsilon_L^0]^T [A][\varepsilon_L^0] + [\varepsilon_L^0]^T [B][K] + [K]^T [B][\varepsilon_L^0] + [K]^T [D][K]) dx dy - \int_0^b \int_0^a [\varepsilon_L^0]^T [N] dx dy + \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a [\varepsilon_{nL}^0]^T [N] dx dy \tag{IV.12}$$

En substituant les relations (IV.4),( IV.5), (IV.7) dans l'équation (IV.12) on obtient :

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \{q\}^T ([S_\varepsilon]^T [A][S_\varepsilon] + [S_\varepsilon]^T [B][S_K] + [S_K]^T [B][S_\varepsilon] + [S_K]^T [D][S_K]) [q] dx dy - \int_0^b \int_0^a ([q]^T [S_\varepsilon]^T [N]) dx dy + \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a [q]^T [G]^T [N][G][q] dx dy \tag{IV.13}$$

En se basant sur le principe de minimum d'énergie potentiel on obtient :

$$[K]\{q\} = [F] \tag{IV.14}$$

Ou :

$$[K]^e = [K_1] + [K_2] + [K_3] + [K_4] \tag{IV.15}$$

Avec:

$$[K_1] = \int_0^b \int_0^a [S_\varepsilon]^T [A][S_\varepsilon] dx dy \quad \text{Membrane} \quad \text{IV.16}$$

$$[K_2] = \int_0^b \int_0^a [S_\varepsilon]^T [B][S_k] dx dy \quad \text{Couplage} \quad \text{IV.17}$$

$$[K_3] = \int_0^b \int_0^a [S_k]^T [B][S_\varepsilon] dx dy$$

$$[K_4] = \int_0^b \int_0^a [S_k]^T [D][S_k] dx dy \quad \text{Flexion} \quad \text{IV.18}$$

$$[F] = [S_\varepsilon][N]$$

Avec :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}$$

Tel que :

$[K_1]$ ,  $[K_2]$ ,  $[K_3]$  et  $[K_4]$  sont les sous matrices de la matrice de rigidité élémentaire  $[K]^e$ .

La matrice de rigidité globale  $[K]_g$  s'obtient en assemblant les matrices de rigidités élémentaires.

#### IV.4.1 Calcul de la matrice géométrique $[K^G]$

L'élimination de la 2<sup>ème</sup> variation de l'équation de l'énergie potentiel totale nous permet d'avoir l'équation standard du problème de valeur propre suivante.

$$([K_g] + \lambda [K^G])\{q\} = 0 \quad \text{IV.19}$$

Avec :

$$[K^G]^e = [G]^T [N][G] \quad \text{Matrice géométrique élémentaire}$$

Pour le calcul de la matrice géométrique globale  $[K^G]$  on fait la somme des matrices géométriques élémentaires.

#### IV.4.3 Les charges critiques $N_{cr}$ :

La résolution de l'équation

$$[K]\{q\} = [F]$$

Pour le calcul des charges critiques minimales nous dérivons deux fois l'équation de l'énergie du potentielle minimale et nous l'égalisons à zéro elle nous donne l'équation suivante :

$$([K] - \lambda [K^G])q = 0$$

Le calcul des charges critiques se fait en deux étapes :

La première étape consiste à la résolution de l'équation (IV.14) pour la détermination de la distribution des efforts à travers la plaque.

Dans le cas générale d'une plaque sans ouvertures on a pas recourt à la détermination des efforts car la distribution est uniforme.

Par contre dans notre cas, l'existence des ouvertures fait que la distribution sera non uniforme notamment au tour de l'ouverture. Le calcul sera fait avec le programme en élément fini, avec le quel on calcule les matrices de rigidité  $[K_g]$  et la matrice géométriques  $[K^G]$  globales.

La deuxième étape consiste en la résolution de l'équation (IV.19) pour nous permet de déterminer le vecteur  $\{\lambda\}$ .

La charge critique en question est la valeur minimale des composantes de  $\{\lambda\}$

## IV.5. Programmation :

Pour la détermination des charges critiques on a élaboré deux programmes.

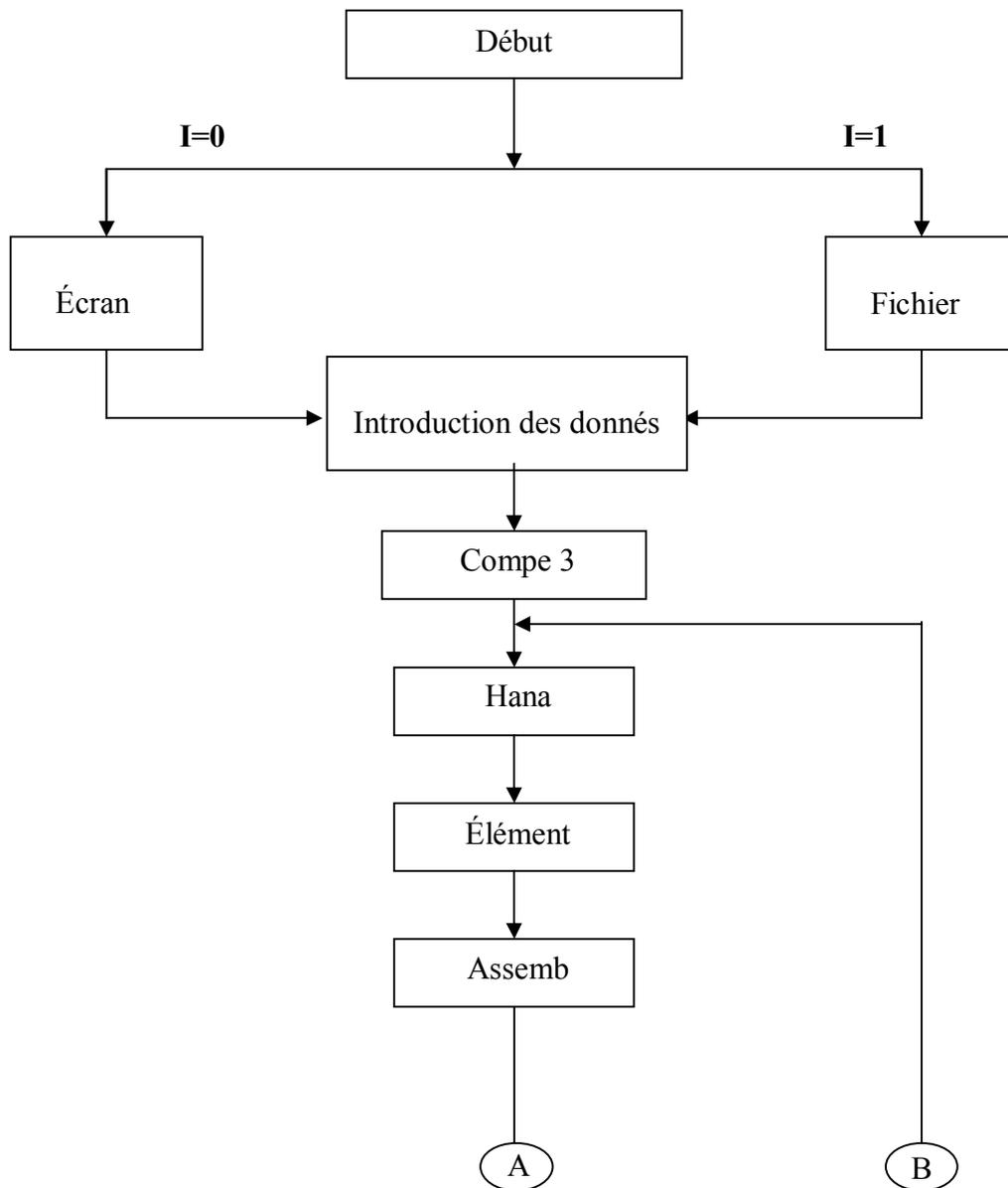
Le premier est un programme écrit en langage Fortran qui détermine les matrices de rigidité et géométrique globales.

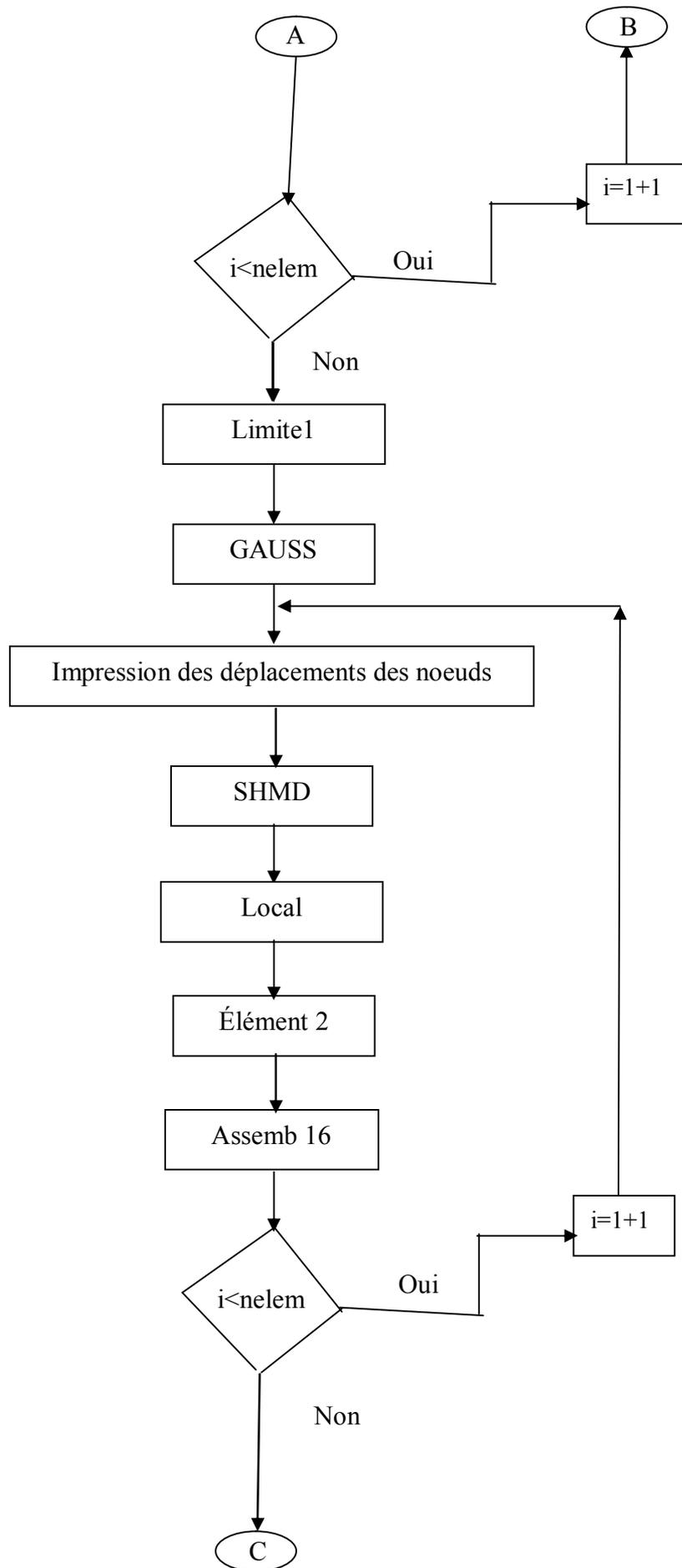
Le deuxième est un programme écrit en Matlab pour la résolution de l'équation (19).

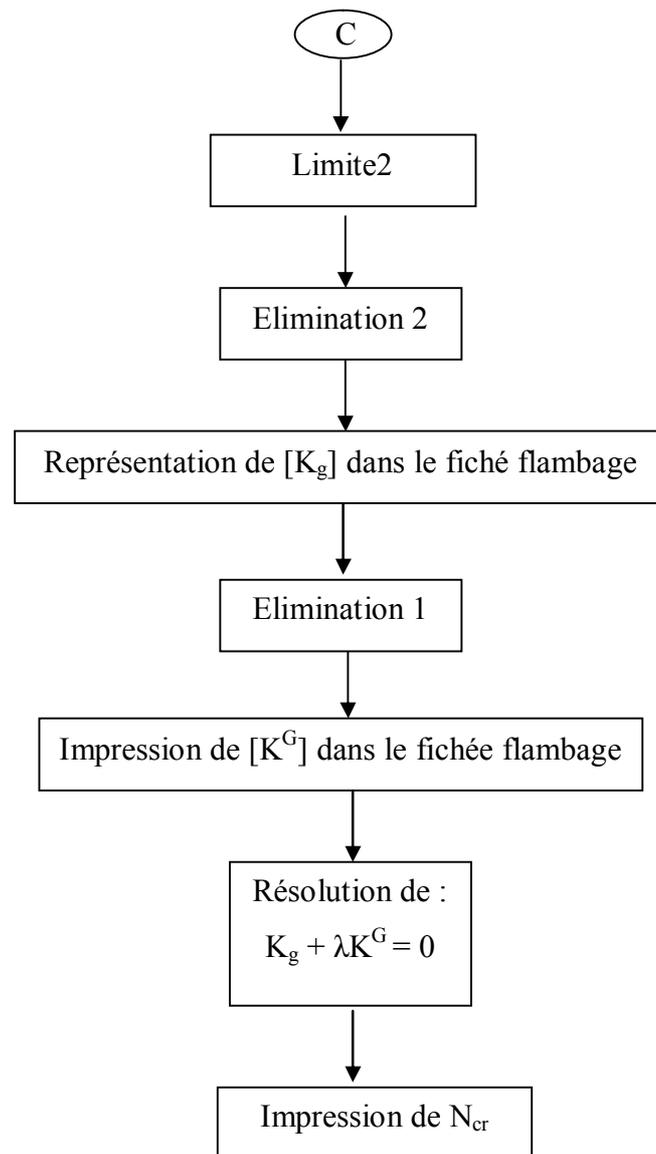
On montre sur le tableau [IV.1] les fonctions des différentes sous-routines constituent le programme en fortran.

### IV.5.1 Organigramme :

L'organigramme utilisé pour l'élaboration du programme est le suivant :







Subroutine	Fonction
Comp 3	Calcul des matrices A, B et D
HANA	Constriction du tableau de localisation
Elément	Constriction de la matrice de rigidité élémentaire
Assemb	Assemblage des matrices : $[K]^e$ , $[K^G]$
SHMD	Calcul des efforts $N_x$ , $N_y$ et $N_{xy}$ dans les éléments
Gauss	Calcul des déplacements
Local	localisation
Limite	Condition aux limites
Elimination2	Elimination des lignes zéro
Elimination1	Elimination des colonnes zéro
Exemple 1	Résolution de l'équation $K_g + \lambda K^G = 0$

Tableau IV.1 Tableau des sousroutines

### IV.5.2 Test de précision :

A fin de tester la précision de résultats obtenus pour l'élément utilisé, on procède à un comparaison avec l'équations analytiques de Timochenko [15] et celle de Withny [16]. On va calculer les charges critiques pour deux types des plaques en matériaux composites. Le premier cas c'est l'application de la formule de Timoshenko pour une plaque de type isotrope, le deuxième cas c'est l'application de la formule de Withny pour une plaque de type orthotrope.

#### 1- Plaque isotrope

Le cas d'une plaque isotrope de forme carré de coté  $b=20$  et un épaisseur  $t=2\text{mm}$  avec un module de Young  $E=2 \times 10^7$  et  $G = 8 \times 10^6$  avec  $\nu=0,3$ . on obtient les résultats suivants :

$$N_{cr} = (K \pi^2 E t) / (12 b^2 (1-\nu^2)) \quad \text{avec } K=4 \quad [15]$$

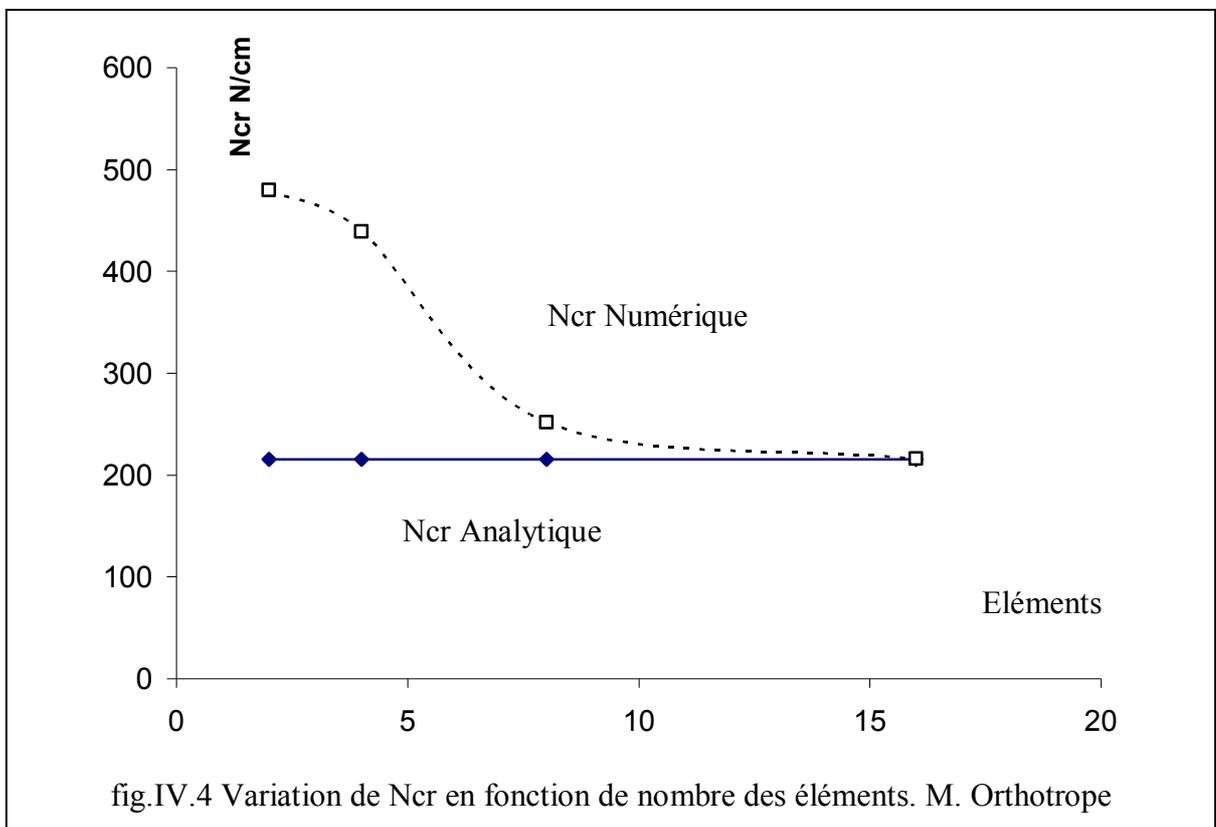
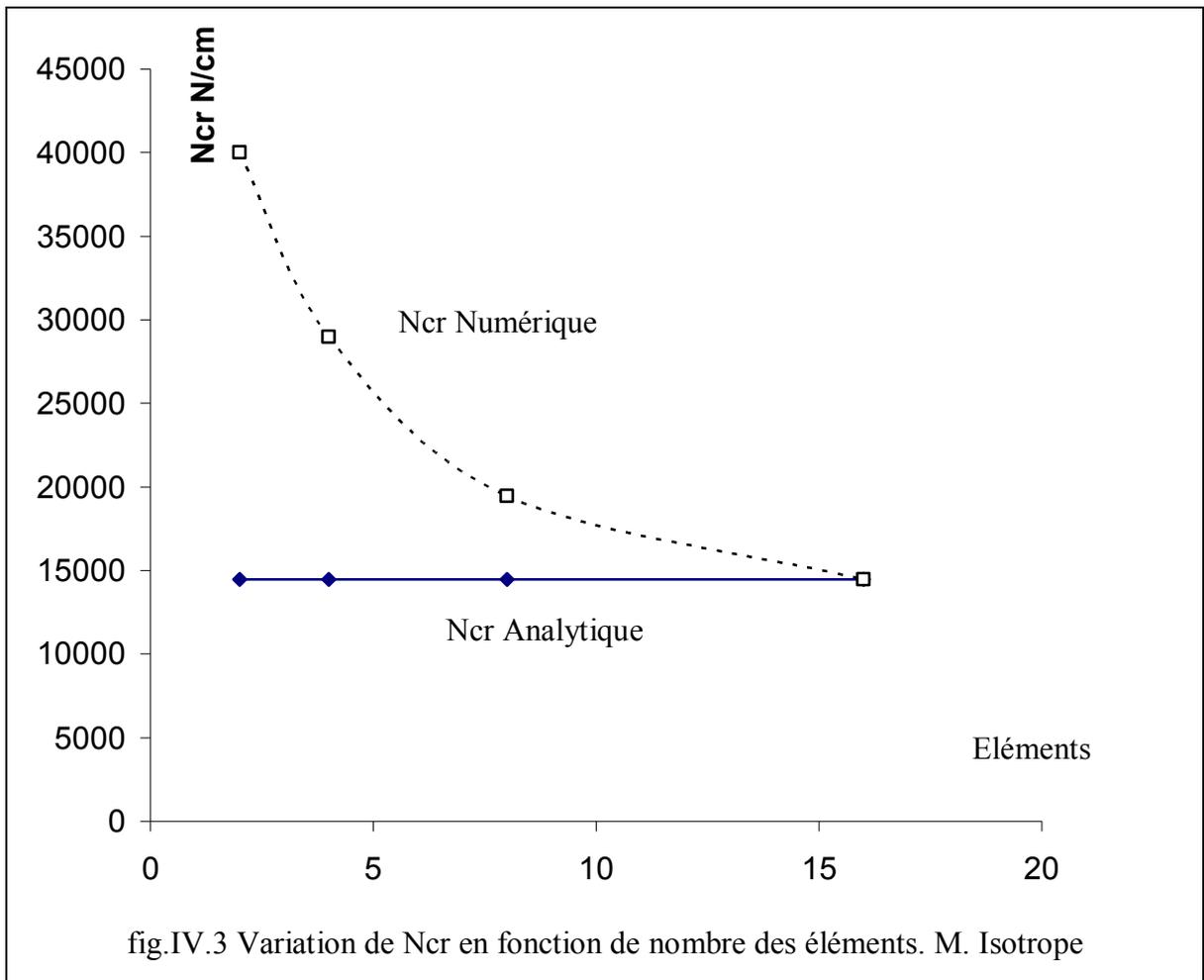
	2 éléments	4 éléments	8 éléments	16 éléments	Timochenko
$N_{cr}$	39997.449	28974.564	19464.2156	1.4460558+6	14460,9588294

#### 2- Plaque orthotrope

Le cas d'une plaque orthotrope d'une forme carré de coté  $a = b = 20$ , cette plaque est composée de six couches de même épaisseur et des angles de stratification comme suite 90,-90, 0, 0,-90,90 et module de Young  $E1=123.0E+05$ ,  $E2= 8.2E+05$  et  $G = 4.1E+05$  avec  $\nu=0,25$  et un épaisseur  $t=0.175\text{mm}$  pour chaque couche. On obtient les résultats suivants :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[ m^2 \frac{D_{11}}{D_{22}} \left( \frac{b}{a} \right) + 2 \frac{D_{12} + D_{66}}{D_{22}} + \frac{1}{m^2} \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right] \quad [16]$$

	2 éléments	4 éléments	8 éléments	16 éléments	Withny
$N_{cr}$	4.79974e+2	4.3874564e+2	3.94642156e+2	2.1598015e+2	215,704645507



Les deux figure (fig.IV.3 et fig.IV.4) représentent la variation de la charge critique  $N_{cr}$  en fonction de nombre des éléments pour deux types de matériaux composites .Les résultats obtenus et qui sont représentés sous forme de courbe montre que les résultats analytique et numériques sont très proche l'une à l'autre et quand le nombre des éléments augmente les deux valeurs se rapprochent de plus en plus .D'après ces résultats en peut dire que l'élément donne des résultats acceptables.

### V.1 Présentation de l'élément utilisé :

Notre étude est réalisé sur des plaques carrées en matériaux composites stratifiés des côté  $W= 100$  mm et un épaisseur  $t=2$ mm, ces plaques ont des ouvertures des formes carrées avec des cotes  $C$  comme le montre la figure suivante (fig.V.1), ces plaques sont constitués d'un nombre de couche égale à 6. Les couches n'ont pas les mêmes orientations, car chaque fois on donne un angle différent des autres cas, les angles d'orientations que on a choisi sont par ordre comme suit:  $(0),(15,-15,0,0,-15,15)$ ,  $(30,-30,0,0,-30,30)$ ,  $(45,-45,0,0,-45,45)$ ,  $(60,-60,0,0,-60,60)$ ,  $(75,-75,0,0,-75,75)$ ,  $(90,-90,0,0,-90,90)$

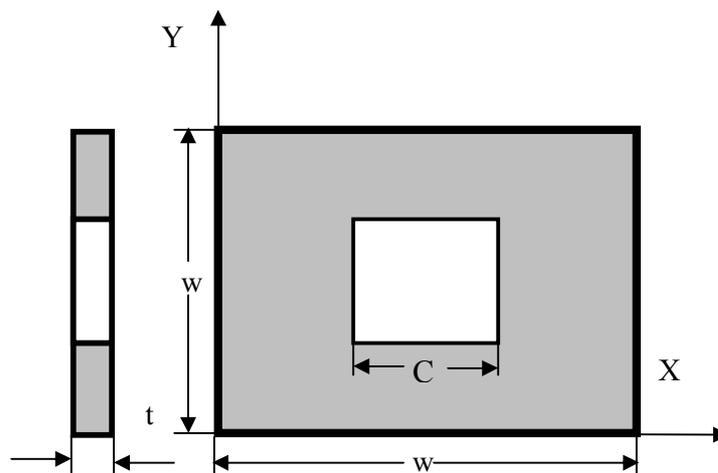
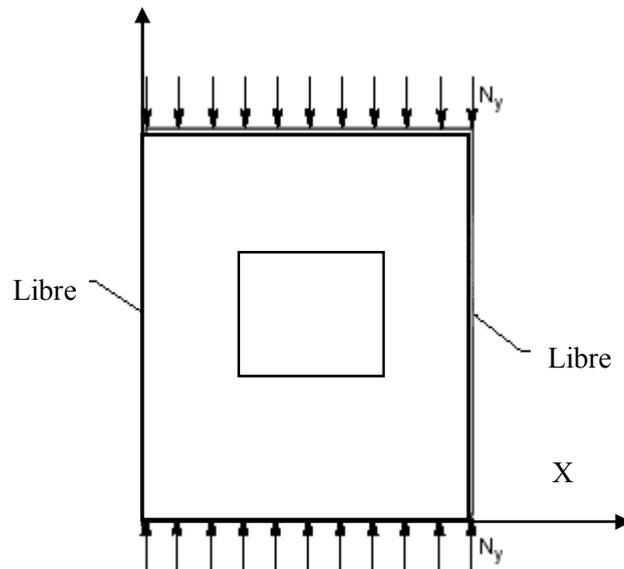


Fig. V.1 Plaque rectangulaire avec ouverture

### V.1 Présentation des conditions aux limites :

On a choisie pour faire notre étude quatre conditions aux limites, ces derniers sont la première condition est simplement appuyée, côté libre, la deuxième est le cas simplement appuyée, côté fixe, la troisième est une encastrement, côté libre et la dernière c'est une encastrement, côté fixe

La figure V.2 représente la première condition aux limites. La plaque est simplement appuyée de deux côtés suivant l'axe X et les deux autres côtés sont libres.



figV.2 : 1CL, Simplement appuyée, Coté libre

La figure V.3 représente la deuxième condition aux limites. le cas d'une plaque simplement appuyée, coté fixe.

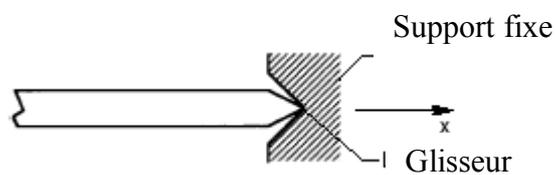
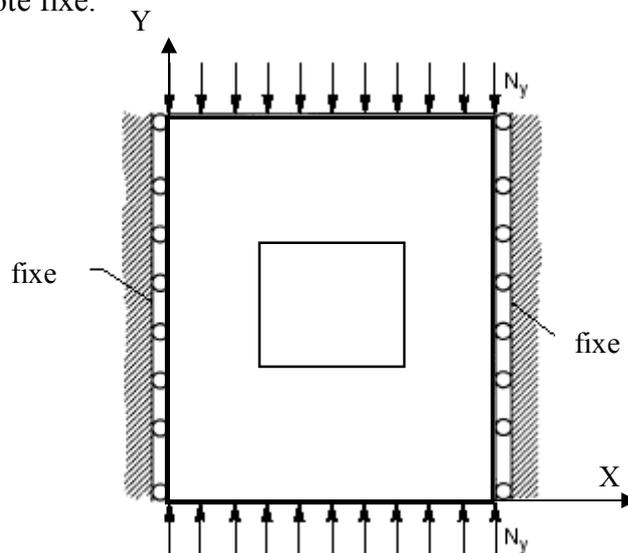


fig.V.3 : 2 CL, Simplement appuyée, Coté fixe

La figure V.4 représente la troisième condition aux limites. Dans ce cas la plaque a un encastrement, et coté libre

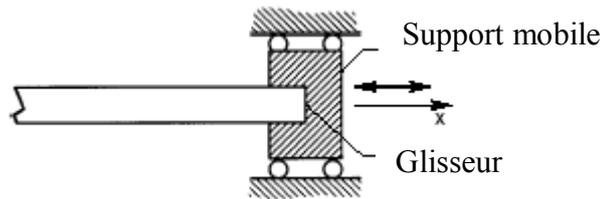


fig.V.4 :3 CL, Encastrement, Coté Libre

La figure V.5 représente la dernière condition aux limites c'est la 4 CL : encastrement, coté fixe

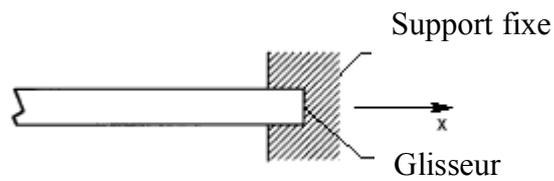


fig.V.5 : 4 CL, Encastrement, Coté fixe

## V.2 Représentation des résultats et discussion :

Les résultats obtenues sont présentés par ordre des application des conditions aux limites et variation du rapport  $C/W$  comme suite :

Tableau V.1 Variation de  $N_{cr}$  en fonction de l'angle d'orientations des fibres ( $\theta$ ) pour  $C/W = 0$

Angle	1 CL : simplement appuyée, coté libre	2 CL : simplement appuyée, coté fixe	3 CL : encastrement, coté libre	4 CL: encastrement, coté fixe
$\theta$	$N_{cr}$			
0	148,65	184,205	155,65	225
15	285,5	354,4	310	391
30	366,09	423,45	397	446
45	306,058	382,94	342	410
60	180	170,45	142	255
75	103,11	70,12	42,311	125
90	60	40	20	87

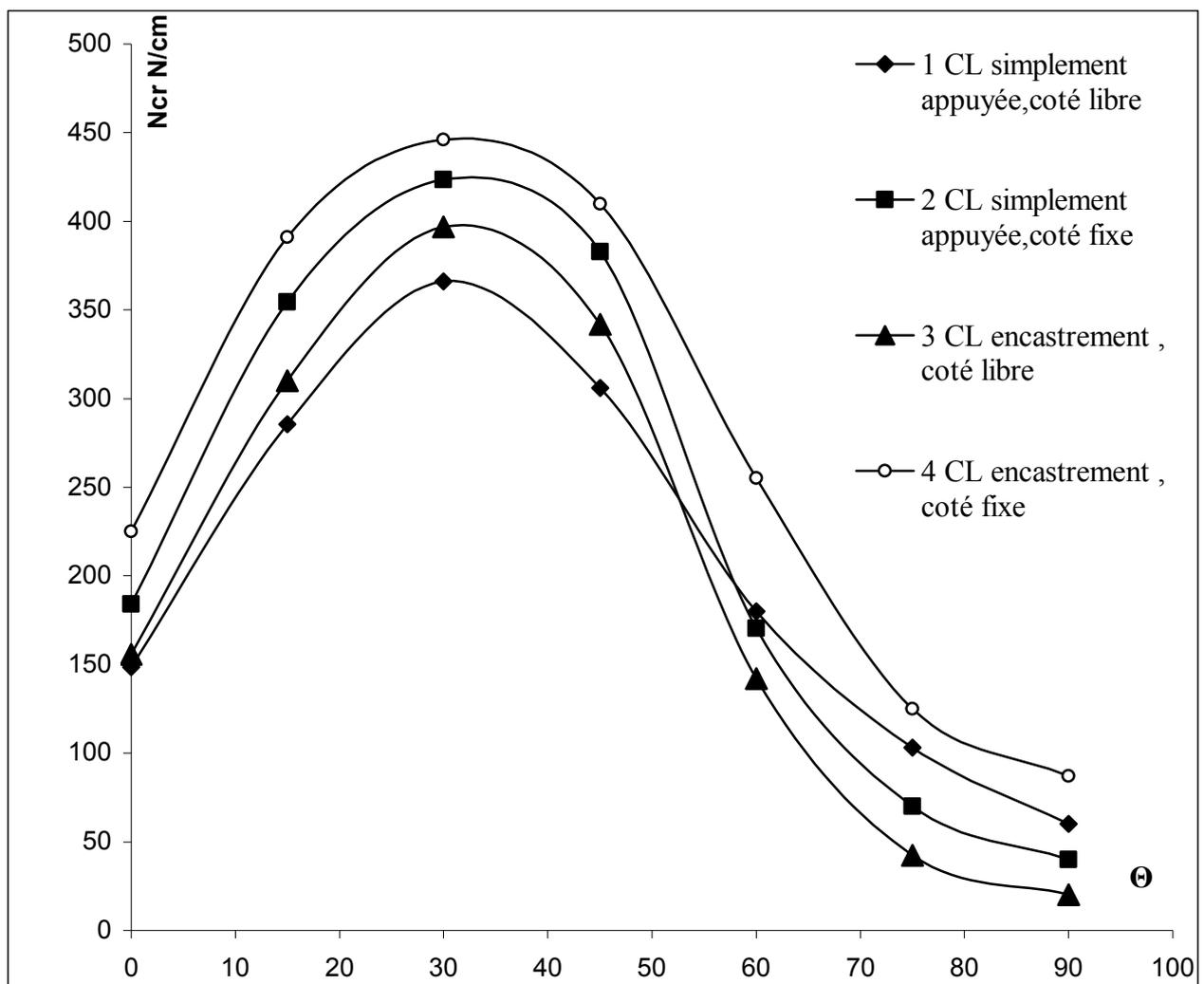


fig.V.5 -Variation de  $N_{cr}$  en fonction de L'angle d'orientation des fibres  $\theta$ , pour le rapport :  $C/W = 0$

Tableau V.2 Variation de $N_{cr}$ en fonction de l'angle d'orientations des fibres ( $\theta$ ), pour $C/W = 0,2$				
Angle	1 CL : simplement appuyée, coté libre	2 CL : simplement appuyée, coté fixe	3 CL : encastrement, coté libre	4 CL : encastrement, coté fixe
$\theta$	$N_{cr}$			
0	457	520,1	288	633
15	573,97	773	375	924
30	910,58	896,63	720	1059
45	577,14	427,23	231	282,83
60	308	214	99,21	43,36
75	221	174	75,53	10,7
90	154	95,752	32,92	10,3

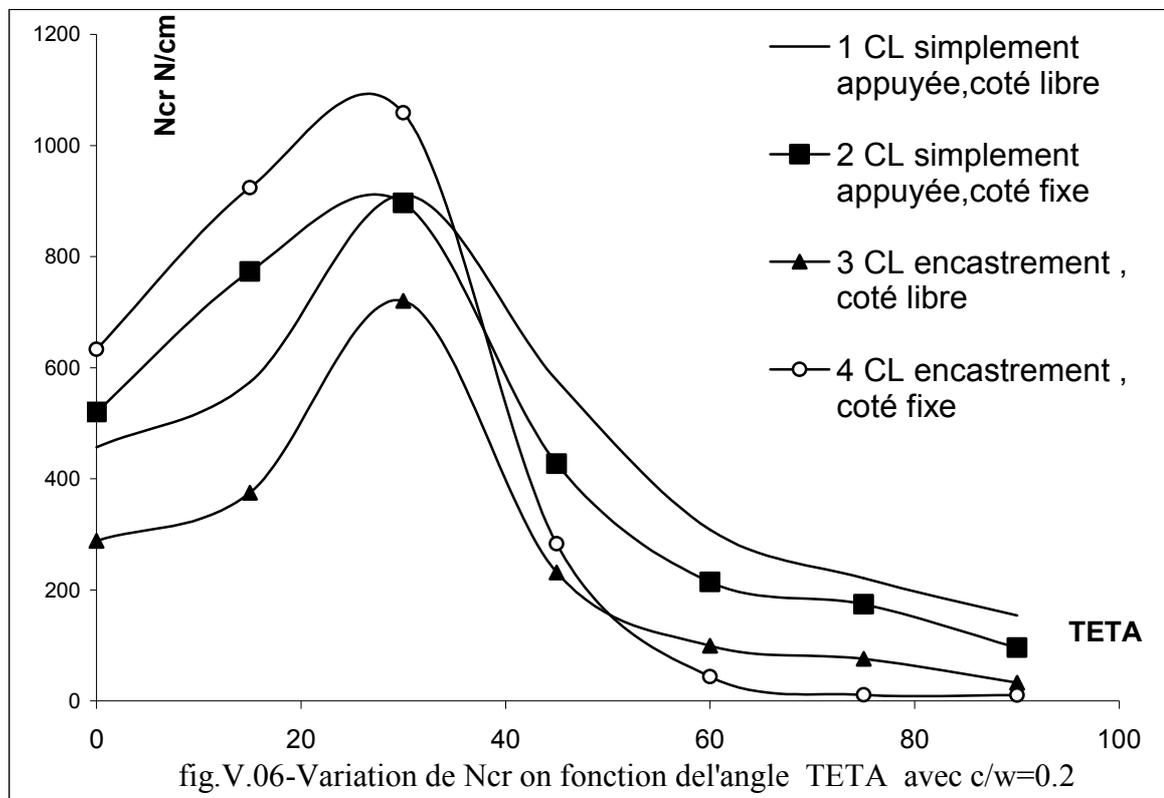


Tableau V.3 Variation de  $N_{cr}$  en fonction de l'angle d'orientations des fibres ( $\theta$ ), pour  $C/W = 0,4$

Angle	1 CL simplement appuyée, coté libre	2 CL simplement appuyée, coté fixe	3 CL encastrement, coté libre	4 CL encastrement, coté fixe
$\theta$	$N_{cr}$			
0	126,59	205,3	269,1	740
15	175,5	289,2	623	996,8
30	689,4	402,7	769	903
45	451	185,94	617	647
65,2	232	122,9	233	251,4
75	90,38	85,2	160	196,25
90	34,79	75,03	134	163

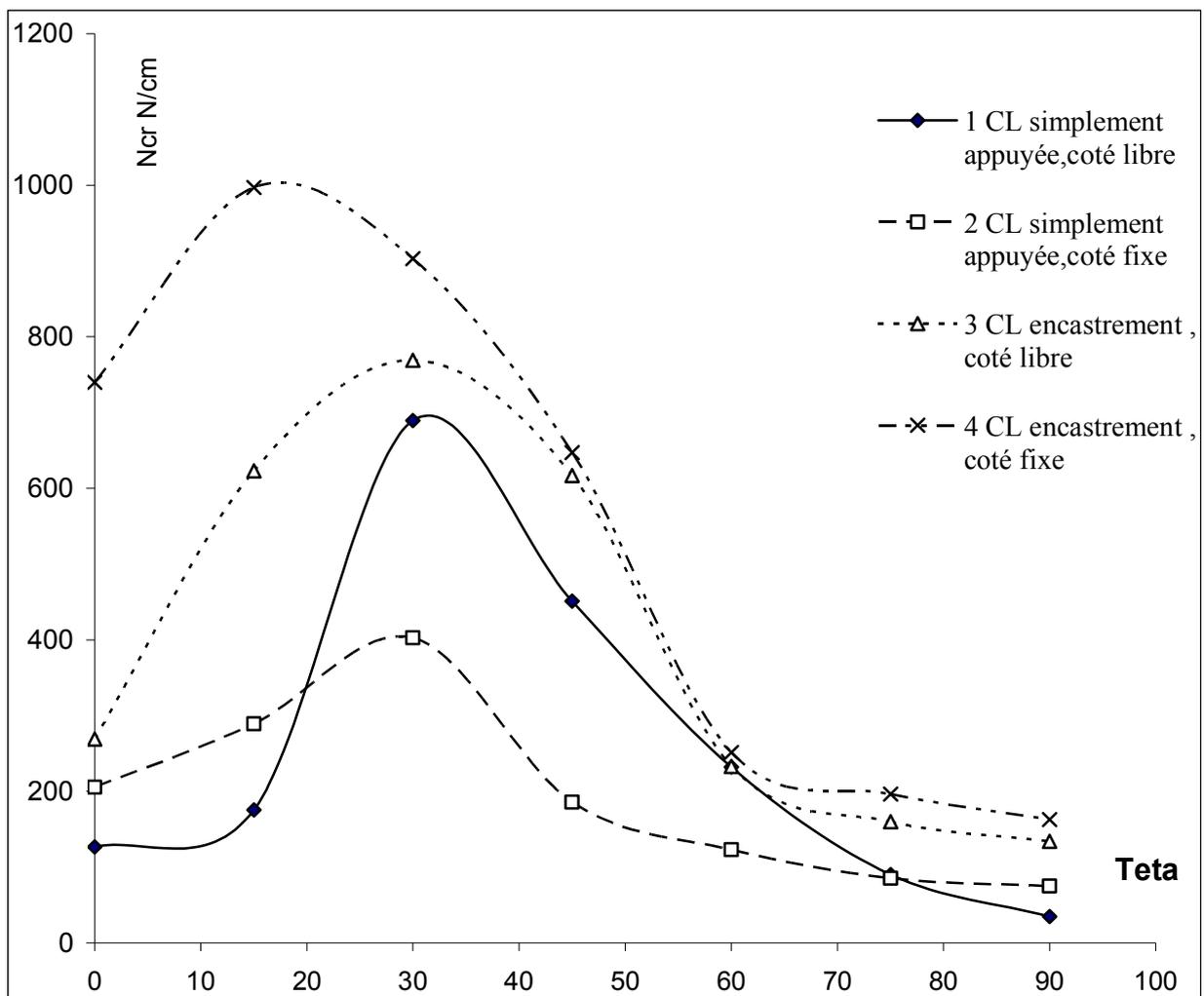


Fig.V.7 variation de  $N_{cr}$  en fonction de Teta ( $c/w=0,4$ )

Tableau V.4 Variation de  $N_{cr}$  en fonction de l'angle d'orientations des fibres ( $\theta$ ) pour  $C/W = 0,6$

Angle	1 CL simplement appuyée, coté libre	2 CL simplement appuyée, coté fixe	3 CL encastrement, coté libre	4 CL encastrement, coté fixe
$\theta$	$N_{cr}$			
0	124,6	342	311	255
15	164	378	331	295,2
30	266	549	429	419,1
45	125,68	395	345	317,5
60	63	187	108	85
75	26,07	122	75	65,2
90	13,602	91	63	47,25

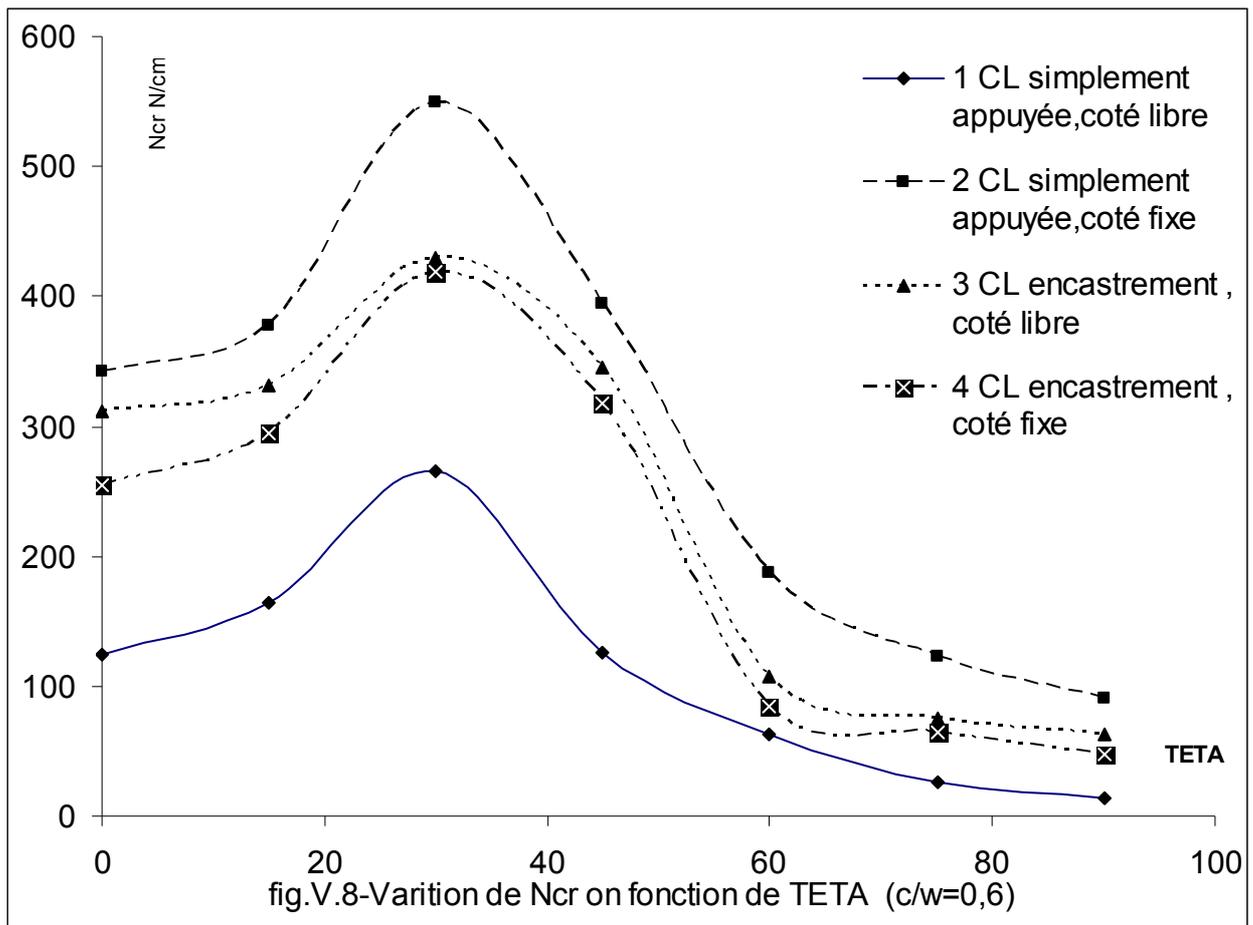


Tableau V.5 Variation de  $N_{cr}$  en fonction de l'angle d'orientations des fibres ( $\theta$ ) pour  $C/W = 0,8$

Angle	1 CL simplement appuyée, coté libre	2 CL simplement appuyée, coté fixe	3 CL encastrement, coté libre	4 CL encastrement, coté fixe
$\theta$	$N_{cr}$			
0	7,5907	110,63	27	193,64
15	12,527	352,11	65	380
30	58	392,48	189,45	498
45	23,33	218	51,683	290
60	15,19	58	35,35	102
75	9,119	16,956	27,21	68
90	5,2589	16,563	20,55	44

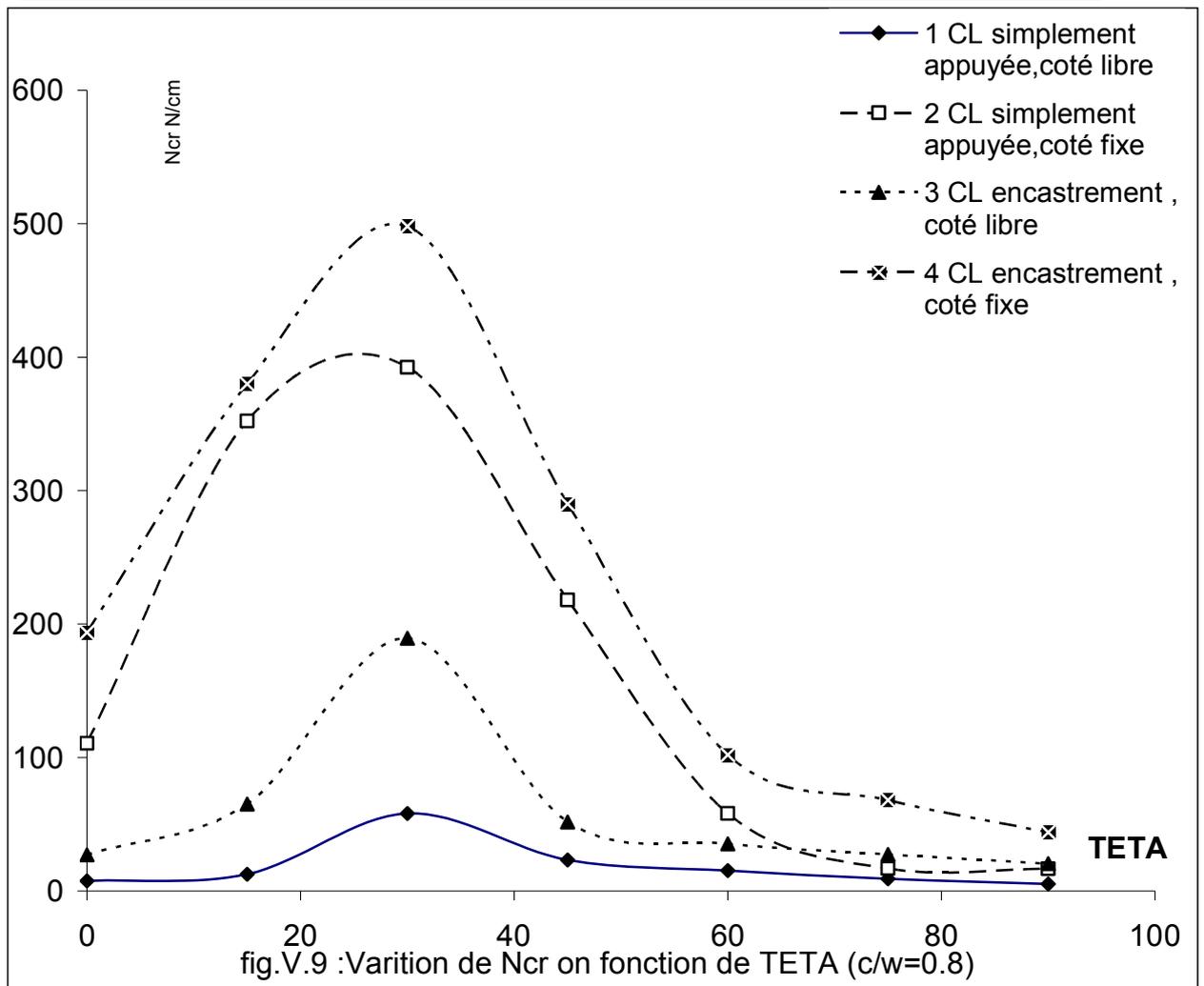


Tableau V.6 :La première condition aux limites : (simplement appuyée, coté libre)

L'angle $\theta$	c/w=0	c/w = 0,2	c/w = 0,4	c/w = 0,6	c/w = 0,8
	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$
0	148,65	457	126,59	124,6	7,5907
15	285,5	573,97	175,5	164	12,527
30	366,09	910,58	689,4	266	58
45	306,058	577,14	451	125,68	23,33
60	180	308	232	63	15,19
75	103,11	221	90,38	26,07	9,119
90	60	154	34,79	13,602	5,2589

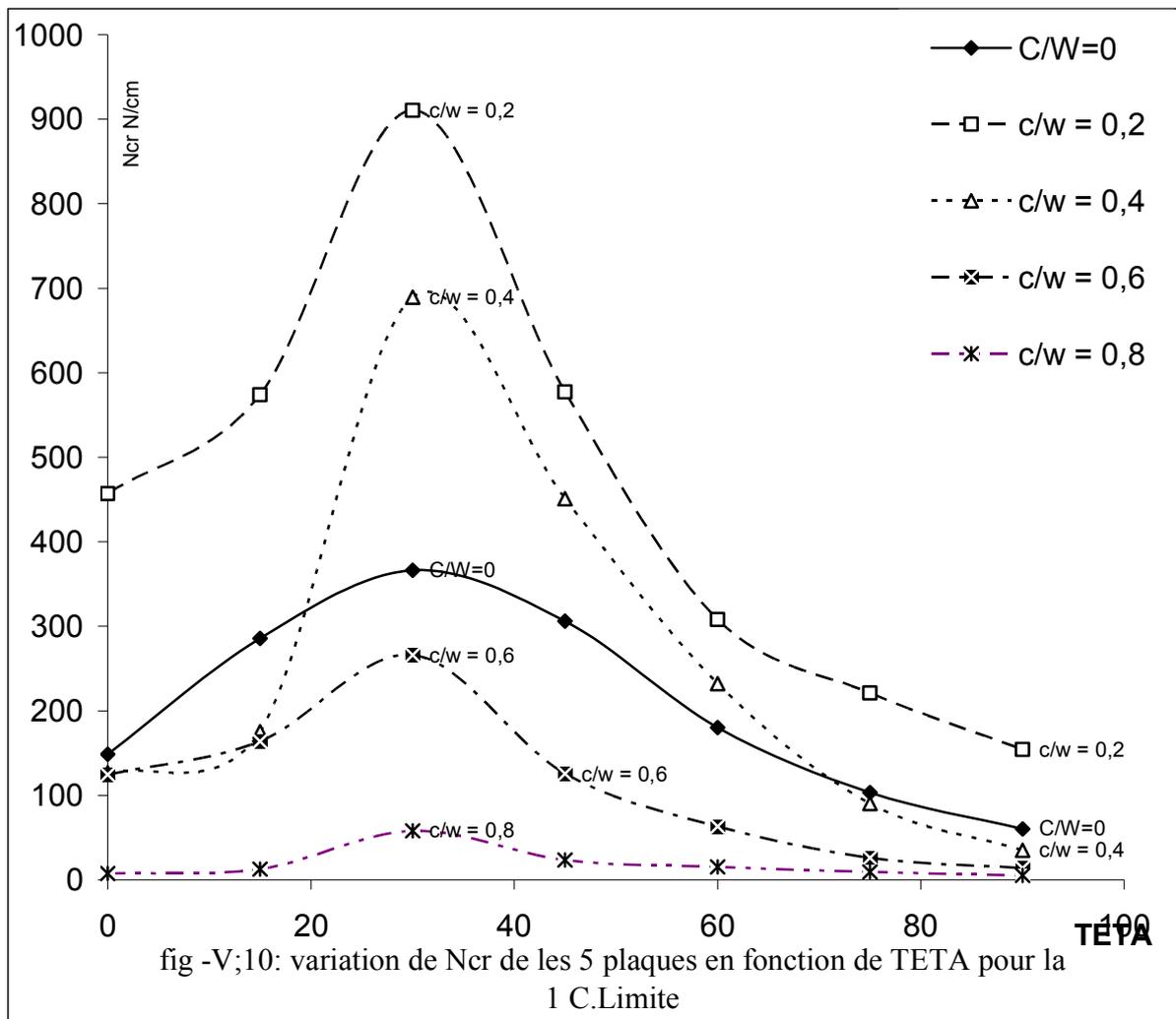


Tableau V.7 : La deuxième condition aux limites : (simplement appuyée, coté fixe)

Angle $\theta$	$c/w = 0$	$c/w = 0,2$	$c/w = 0,4$	$c/w = 0,6$	$c/w = 0,8$
	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$
0	184,205	520,1	205,3	342	110,63
15	354,4	773	289,2	378	352,11
30	423,45	896,63	402,7	549	392,48
45	382,94	427,23	185,94	395	218
60	170,45	214	122,9	187	58
75	70,12	174	85,2	122	16,956
90	40	95,752	75,03	91	16,563

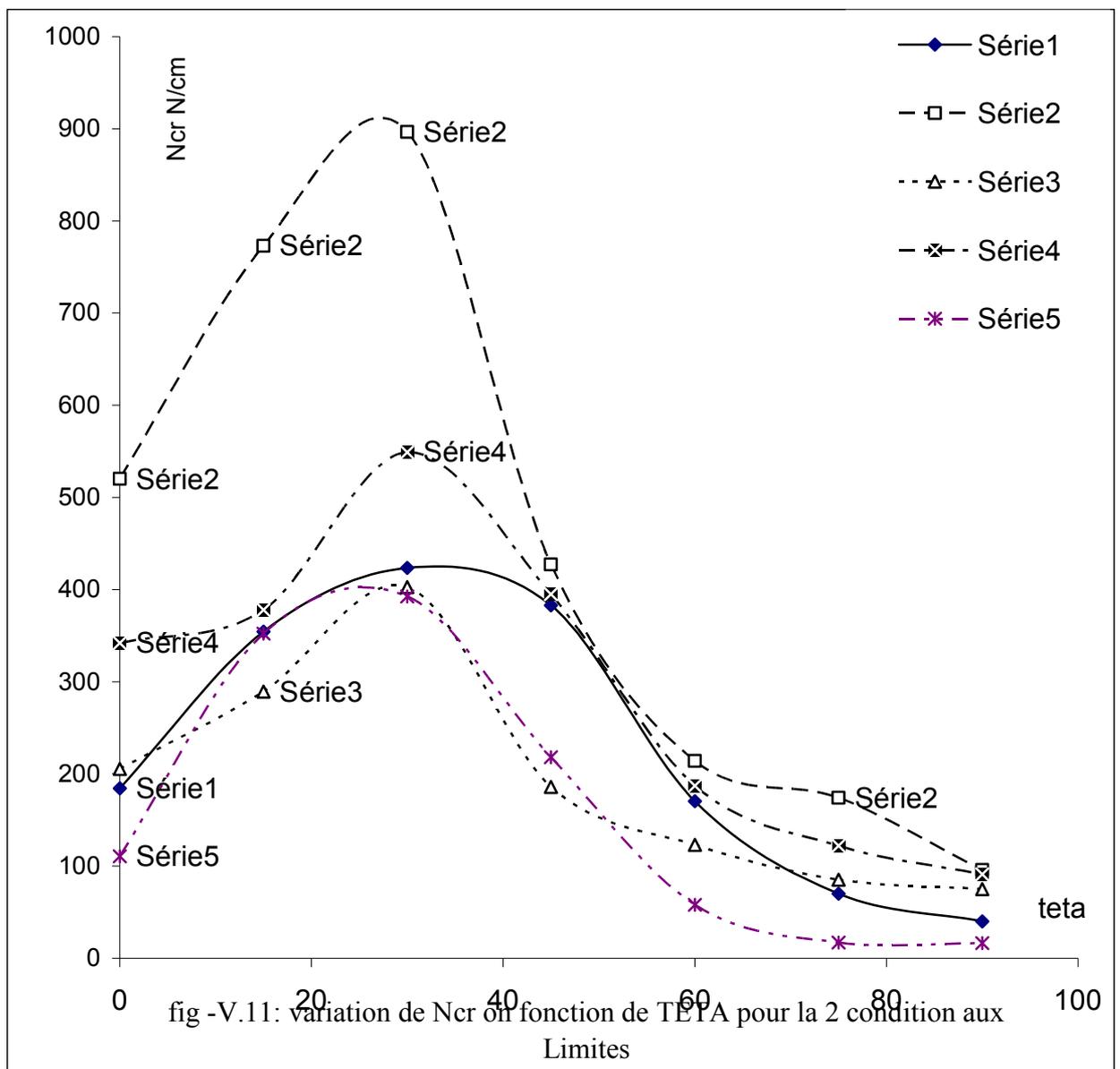


Tableau V.8 : La troisième condition aux limites : (encastrement, coté libre)

Angle $\theta$	c/w=0	c/w = 0,2	c/w = 0,4	c/w = 0,6	c/w = 0,8
	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$
0	155,65	288	269,1	311	27
15	310	375	623	331	65
30	397	720	769	429	189,45
45	342	231	617	345	51,683
60	142	99,21	233	108	35,35
75	42,311	75,53	160	75	27,21
90	20	32,92	134	63	20,55

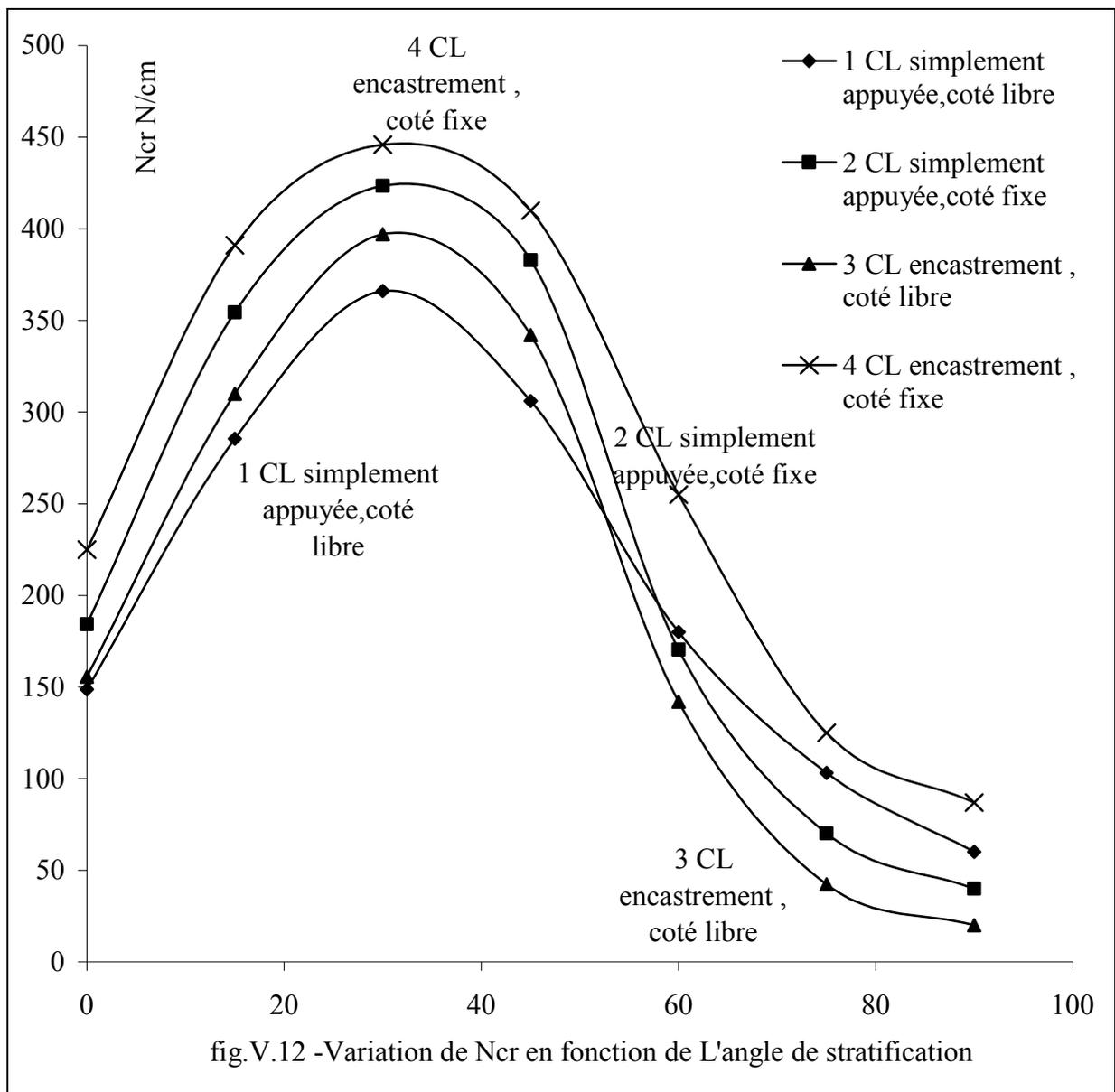


Tableau V.9 La quatrième condition aux limites : (encastrement, coté fixe)

L'angle $\theta$	c/w=0	c/w = 0,2	c/w = 0,4	c/w = 0,6	c/w = 0,8
	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$
0	225	633	740	255	193,64
15	391	924	996,8	295,2	380
30	446	1059	903	419,1	498
45	410	282,83	647	317,5	290
60	255	43,36	251,4	85	102
75	125	10,7	196,25	65,2	68
90	87	10,3	163	47,25	44

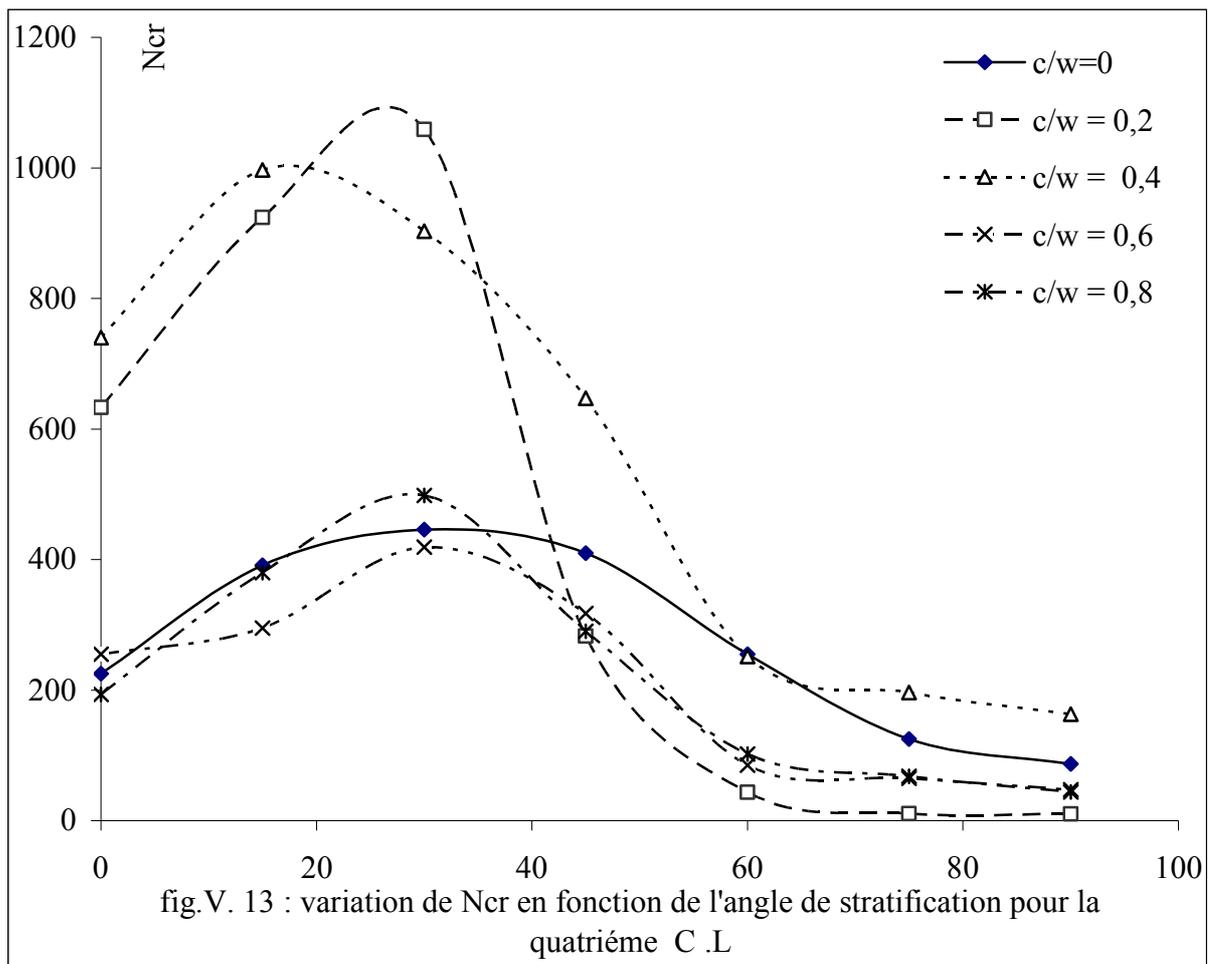


Tableau V.10 Variation  $N_{cr}$  de en fonction de  $C/W$  pour  $\theta = 0$

Le rapport $C/W$	1 CL simplement appuyée, coté libre	2 CL simplement appuyée, coté fixe	3 CL encastrement, coté libre	4 CL encastrement, coté fixe
	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$
0	148,65	184,205	155,65	225
0,2	457	520,1	288	633
0,4	126,59	205,3	269,1	740
0,6	124,6	342	311	255
0,8	7,5907	110,63	27	193,64

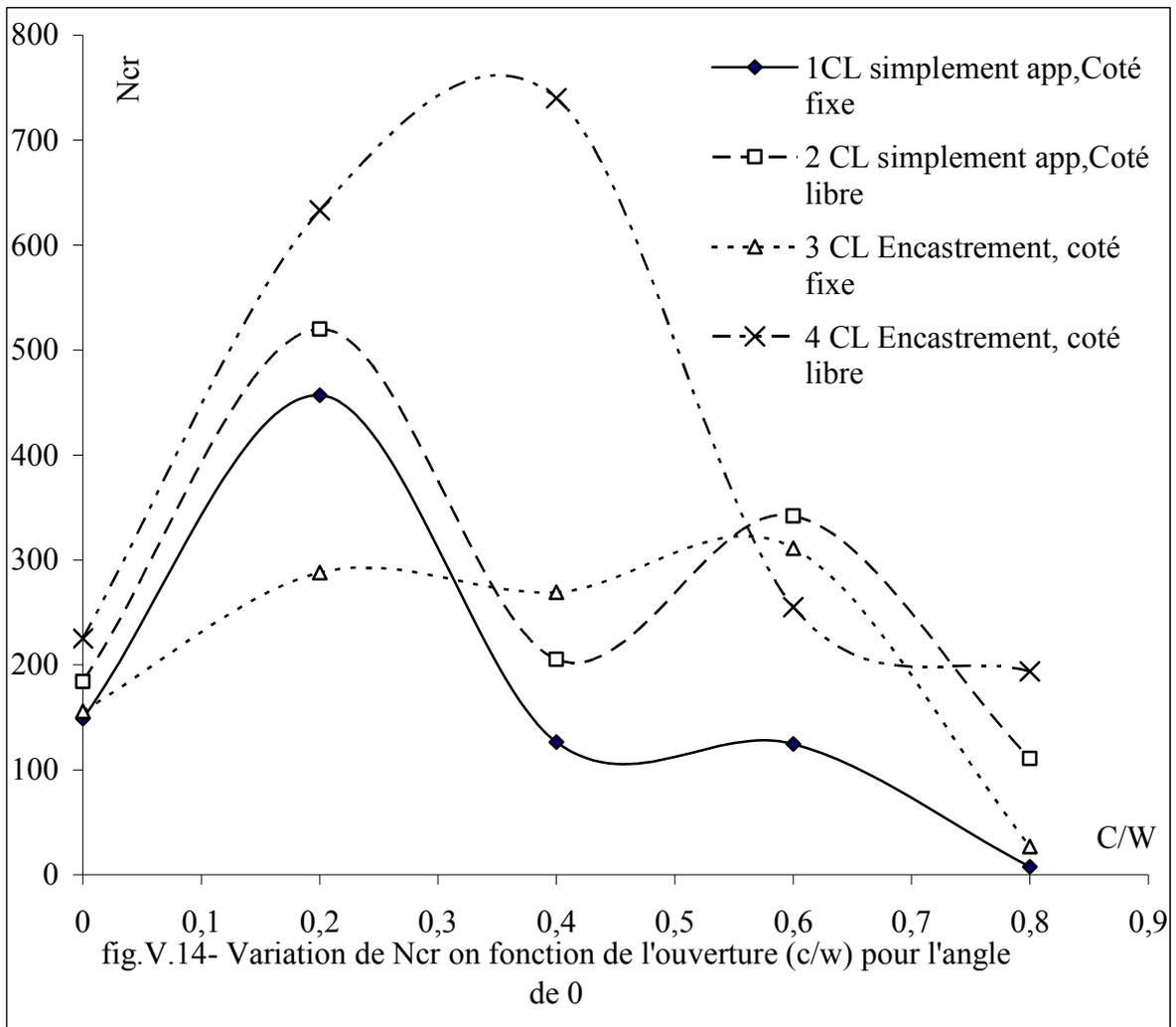
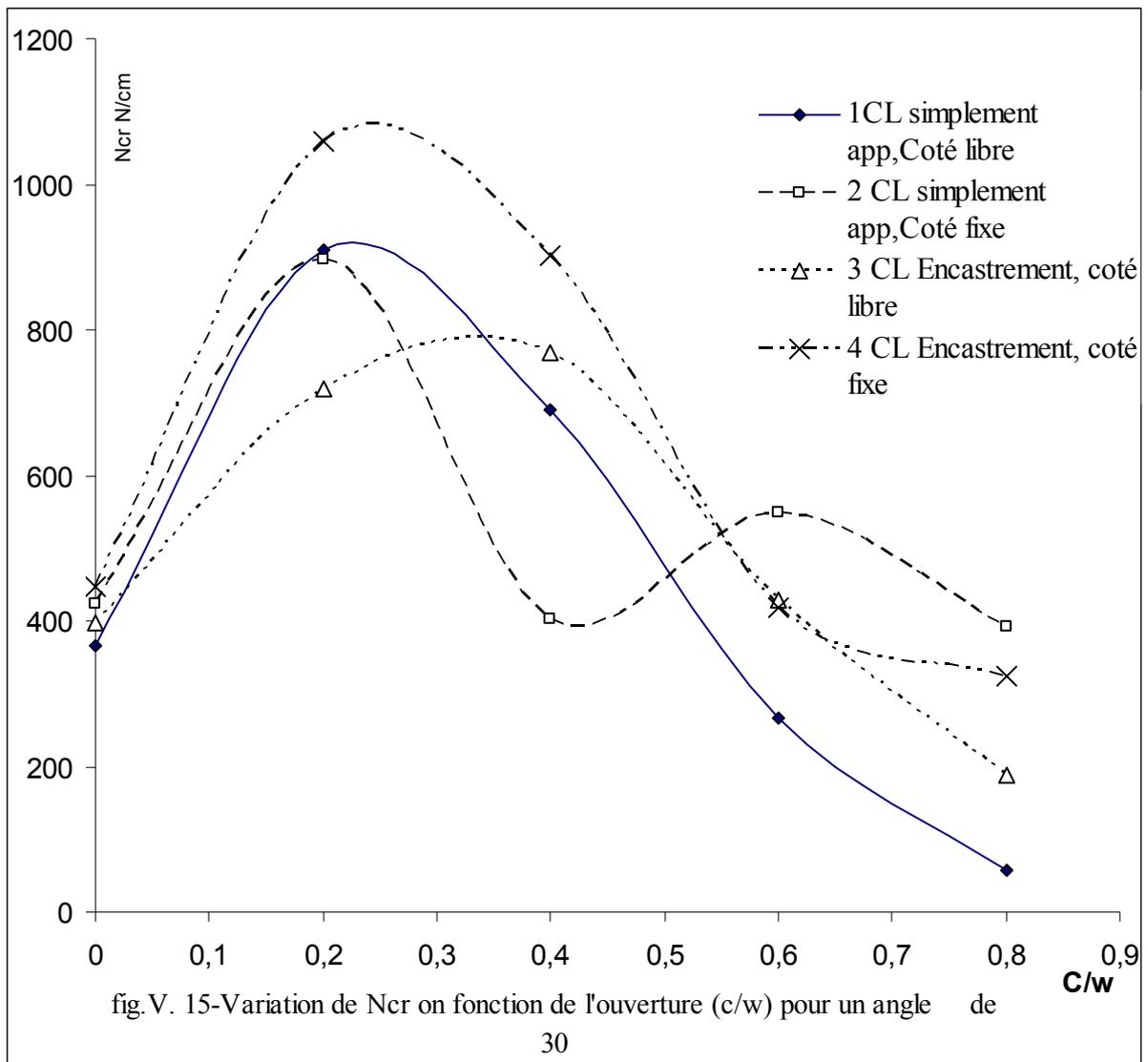
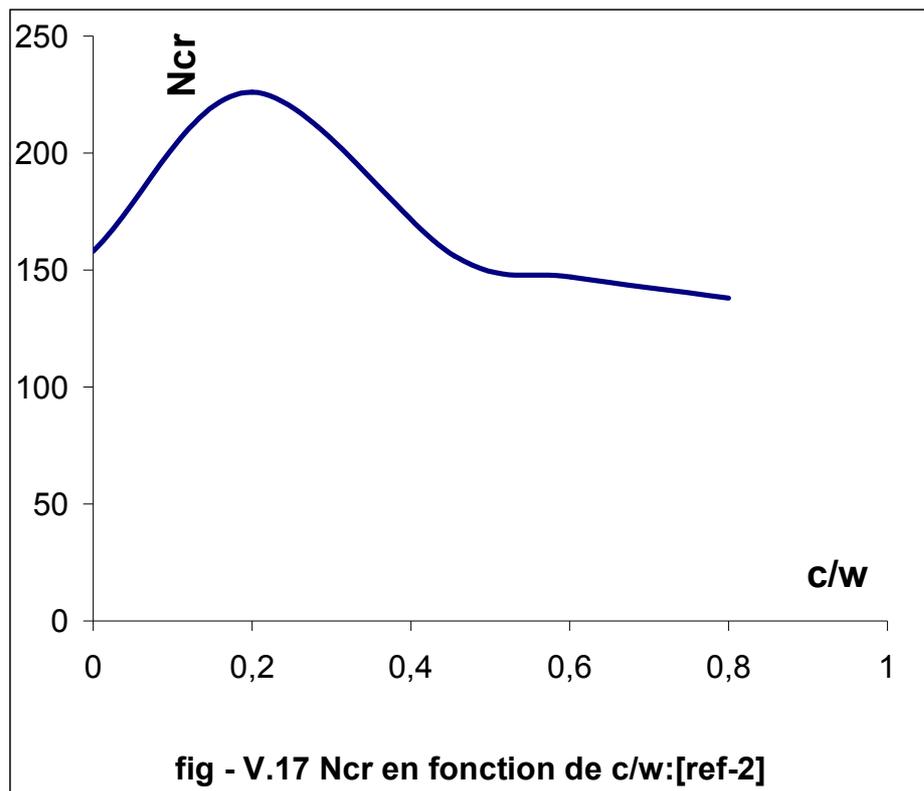
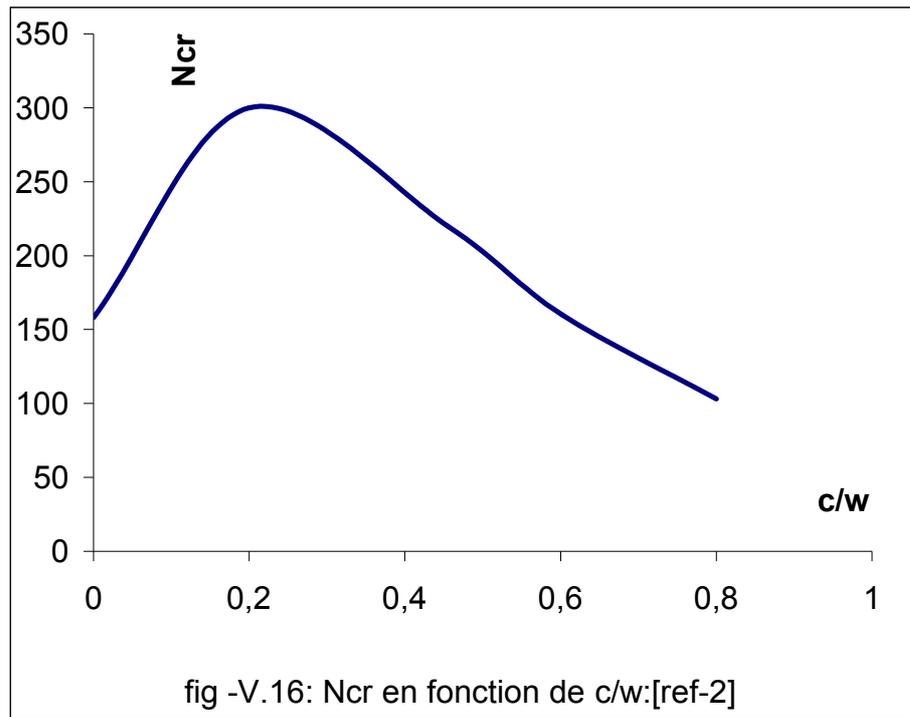


Tableau V.11 Variation $N_{cr}$ de en fonction de C/W pour $\theta = 30$				
Le rapport C/W	1CL simplement app. Coté fixe	2 CL simplement app. Coté libre	3 CL Encastrement, coté fixe	4 CL Encastrement, coté libre
	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$	$N_{cr}$
0	366,09	423,45	397	446
0,2	910,58	896,63	720	1059
0,4	689,4	402,7	769	903
0,6	266	549	429	419,1
0,8	58	392,48	189,45	325





**Discussion :**

Les figures de V.5 à V.9 montrent les courbes des charges critiques en fonction de  $\theta$  l'angle de stratification, et pour des différentes conditions aux limites et rapports ( $c/w$ ) des ouvertures. On remarque que ces courbes représentent pratiquement la même allure.

On remarque (figure V.5) un changement de mode de flambage lorsque l'angle de stratification  $\theta$  atteint  $30^\circ$ . Le tableau V.5 qui représente les valeurs des charges critiques nous montre que les valeurs de ces derniers sont maximales pour le cas d'encastrement et coté fixe (4 CL).

Dans la figure V.6 on remarque un changement de mode de flambage lorsque l'angle de stratification  $\theta$  atteint  $30^\circ$ . Le tableau V.6 qui représente les valeurs des charges critiques nous montre que les valeurs de ces derniers sont maximales pour le cas d'encastrement et coté fixe (4 CL) avant le changement des modes des flambage, après les changements des modes les valeurs des charges critique pour le cas d'une plaque simplement appuyée et des cotés libres seront les plus grandes.

La figure V.7 montre les courbes de la charge critique en fonction de  $\theta$  l'angle de stratification pour le rapport ( $c/w=0,4$ ) et pour les différentes conditions aux limites. On remarque un changement de mode de flambage lorsque l'angle de stratification  $\theta$  atteint  $30^\circ$  sauf le cas de l'application de la quatrième condition aux limites (encastrement, coté fixe) le changement de mode se voit lorsque  $\theta$  atteint  $15^\circ$ . Le tableau V.1 qui représente les valeurs des charges critiques nous montre que les valeurs de ces derniers sont maximales pour le cas d'encastrement et coté fixe (4 CL).

Un changement de mode de flambage dans la figure V.8 lorsque l'angle de stratification  $\theta$  atteint  $30^\circ$ . Le tableau V.8 qui représente les valeurs des charges critiques nous montre que les valeurs de ces derniers sont maximales pour le cas d'une plaque simplement appuyée et des cotés fixes (2 CL).

La figure V.9 montre les courbes de la charge critique en fonction de  $\theta$  l'angle de stratification pour le rapport ( $c/w=0,8$ ) et pour les différentes conditions aux limites. On remarque un changement de mode de flambage lorsque l'angle de stratification  $\theta$  atteint  $30^\circ$ . Le tableau V.9 qui représente les valeurs des charges critiques nous montre que les valeurs de ces derniers sont maximales pour le cas d'une plaque a encastrement et coté fixe (4 CL).

Les figures de V.6 à V.13 montrent les courbes des variations des charges critiques en fonction de  $\theta$  l'angle de stratification, et pour des différents rapports ( $c/w$ ) des ouvertures, Dans chaque figure on fixe les conditions aux limites. On remarque que ces courbes représentent pratiquement la même allure. Pour les figures V.10 à V.12 on remarque qu'il y a un changement de mode de flambage lorsque l'angle d'orientation des couches atteint une valeur ( $\theta =30^\circ$ ).Le cas d'un encastrement et coté fixe (figure V.13) le changement de mode reste le même pour tous les cas sauf le cas du rapport ( $c/w=0,4$ ), on remarque que le changement se voit lorsque l'angle  $\theta$  atteint la valeur de  $15^\circ$ .

Les figures de V.14 à V.15 montrent les variations des charges critiques en fonction des différents rapports ( $c/w$ ) des ouvertures, et pour différentes conditions aux limites avec un angle de stratification  $\theta$  fixe.

Pour la courbe V.14, pour un angle de stratification  $\theta=0$ , On remarque qu'il y a quatre changements de mode de flambage, pour chaque valeur du rapport ( $c/w$ ) on a un mode différent des autres modes. Mais dans le cas de la quatrième condition au limites (encastrement, coté fixe) on remarque qu'il y a un seul changement de mode si lorsque  $c/w=0,4$ .

Pour la courbe V.15, pour un angle de stratification  $\theta=30$ , On remarque qu'il y a un changement de mode de flambage lorsque  $c/w=0,2$  des cas d'une plaque simplement appuyée et coté libre et aussi une plaque avec encastrement et coté fixe. Le cas d'une encastrement et coté libre le changement de mode aura lieu pour le rapport  $c/w=0,4$ .le cas d'une plaque

simplement appuyée et coté fixe on remarque quatre changements de mode de flambage, pour chaque rapport  $c/w$  il y a un mode différent des autres modes.

- CL : Condition au Limite.
- 1 CL : Simplement appuyée, Coté libre.
- 2 CL : Simplement appuyée, Coté fixe.
- 3 CL : Encastrement, Coté Libre.
- 4 CL : Encastrement, Coté fixe.

## Conclusion :

Après le travail qu'on a effectué, pour le même nombre des couches (plis) et le même épissures  $t$ , on a conclu que les caractéristiques des plaques rectangulaires des matériaux stratifiés, qui sont souvent utilisées pour la construction Aéronautique et d'autre, sont très sensibles aux efforts de compression, qui cause le flambement et par conséquent la connaissance des efforts de flambement est nécessaire pour la conception de la force de structure. D'après les résultats obtenus, on a remarqué que les conditions d'appuis jouent un rôle très important sur la valeur de la charge critique  $N_{cr}$ .

Pour les plaques sans ouvertures, les meilleures valeurs de la charge critique sont en fonctions des conditions aux limites et de l'angle d'orientation des couches (fibres) on a :

Pour le cas d'un appui simple et coté libre,  $N_{cr \text{ MAX}}$  est pour un angle d'orientation entre 25 et 35 degré. Dans le cas d'un appui simple et coté fixe,  $N_{cr \text{ MAX}}$  est pour un angle d'orientation entre 25 et 35 degré, et pour le cas d'un encastrement et coté libre,  $N_{cr \text{ MAX}}$  est pour un angle d'orientation entre 25 et 35 degré. Pour une plaque avec un encastrement simple et coté fixe,  $N_{cr \text{ MAX}}$  est pour un angle d'orientation entre 25 et 35 degré.

Pour une ouverture de 0,2 ( $c/w=0.2$ ) on a  $N_{cr \text{ MAX}}$  est obtenu pour  $\theta \in [25, 35]$  et la quatrième condition aux limites (cas d'encastrement et coté fixe), le cas d'une ouverture de 0.4 ( $c/w=0.4$ ) on a  $N_{cr \text{ MAX}}$  est obtenu pour  $\theta \in [10, 20]$  et la quatrième condition aux limites (cas d'encastrement et coté fixe). Pour une ouverture de 0.6 ( $c/w=0.6$ ) on a  $N_{cr \text{ MAX}}$  est obtenu pour  $\theta \in [25, 35]$  et la deuxième condition aux limites (cas d'appuis simple et coté fixe). Pour une ouverture de rapport ( $c/w=0.8$ ) on a  $N_{cr \text{ MAX}}$  est obtenu pour  $\theta \in [25, 35]$  et la quatrième condition aux limites (cas d'encastrement et coté fixe).

Les paramètres qu'on a pris en considération dans notre étude, sont les orientations des couches (angle de stratification), les conditions aux limites et le rapport ( $c/w$ ), il reste toujours des paramètres qu'ils peuvent être des projets d'études et de recherches, ces paramètres sont la géométrie des ouvertures, les autres cas des conditions aux limites, d'autres angles de stratification et aussi les types des matériaux des fibres c'est-à-dire le rapport  $\frac{E_l}{E_t}$ .

Le domaine de recherche du phénomène du flambage en matériaux composite est très vaste et une simple étude comme la notre n'est qu'une contribution parmi d'autre.