

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE MOHAMED KHIDER - BISKRA  
FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**

**MEMOIRE MAGISTER EN GENIE MECANIQUE  
Option : Construction Mécanique**

*Présenté par*

**KAMEL MEFTAH**

*Ingénieur d'état en Génie Mécanique*

**THEME**

**INFLUENCE DU TYPE D'ELEMENT SUR  
L'ANALYSE NON-LINEAIRE DES PLAQUES**

SOUTENU LE 28 / 06 / 2005

**Devant le jury :**

Mr : <b>HECINI M.</b>	Maître de Conférences	Université de Biskra	<b>Président</b>
Mr : <b>BENMEBAREK S.</b>	Professeur	Université de Biskra	<b>Rapporteur</b>
Mr : <b>CHEBILI R.</b>	Maître de Conférences	Université de Biskra	<b>Examineur</b>
Mr : <b>BELOUNAR L.</b>	Maître de Conférences	Université de Biskra	<b>Examineur</b>
Mr : <b>KADID A.</b>	Chargé de Cours	Université de Batna	<b>Invité</b>

## CHAPITRE I : INTRODUCTION GENERALE

Le problème mécanique que pose la réalité quotidienne concerne des corps, au temps le dire, qui n'ont jamais des formes simples et pour les quelles on peut espérer des solutions analytiques simples, il devient alors nécessaire de recourir à une pratique plus systématique de la décomposition en morceaux déformables ou modélisation. En conséquence, la méthode des éléments finis est généralement considérée comme l'outil le plus puissant à l'analyse linéaire dans la conception des structures, même si, pour des raisons pratiques (résistance, esthétique...), on limite souvent le domaine de fonctionnement normal des structures à des déplacements faibles, de sorte que des calculs linéaires suffisent à prédire leur comportement, cependant, il ne doit pas être perdu de vue que les structures réelles ont un comportement en général non-linéaire.

A ce stade, cette méthode gagne encore du terrain, leur importance reste indispensable pour des situations non-linéaires délicates (évaluation du comportement au moment de la ruine de la structure), quelle dépend de deux facteurs principaux. Premièrement, en raison des opérations numériques accrues liées aux problèmes non linéaires, la puissance d'un calcul considérable est exigée. Les développements dans la dernière décennie ont assuré des calculateurs numériques qui satisfont ce besoin avec un coût de calcul réduit. Deuxièmement, avant que la méthode des éléments finis puisse être employée dans la conception, l'exactitude de n'importe quelle solution technique proposée doit être prouvée. Le développement des caractéristiques améliorées d'élément et des solutions algorithmiques non linéaires plus efficaces et l'expérience acquise dans les problèmes rencontrés ont assuré la réalisation des analyses non linéaires avec certaine fiabilité. Par conséquent des obstacles à l'exploitation de ces techniques sont rapidement enlevés et le processus sur le plan économique est acceptable pour des applications industrielles choisies.

### I.1. Structures minces et épaisses :

Les structures complexes que l'on étudie couramment sont constituées de sous-ensembles aux géométries les plus diverses : barres ou poutres, plaques et coques minces ou épaisses, parties massives. Pour chacun de ces constituants, on dispose de la formulation de la théorie de l'élasticité ou plasticité ou de modèles théoriques qui en sont dérivés ( théorie des poutres, plaques et coques ). Nous nous sommes intéressés uniquement, dans ce travail, à l'analyse non linéaire ( élasto-plasticité ) des structures de type « plaque ».

Les plaques sont des structures en état plan de contraintes. Ce sont donc des structures minces et planes. Les plaques sont l'équivalent des poutres en 2D : Elles admettent des déplacements verticaux suivant l'axe  $z$ .<sup>[IMB84]</sup>

## I.2. La méthode des éléments finis :

Les sciences de l'ingénieur ( mécanique des solides et des fluides, thermique...) permettent de décrire le comportement de systèmes physiques grâce à des équations aux dérivées partielles. La méthode des éléments finis nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaire ou non linéaire, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.<sup>[TOU81]</sup>

Les techniques de calcul des structures ont connu ces quarante dernières années un développement considérable, motivé par les besoins des industries de pointe et soutenu par les progrès réalisés dans le domaine des ordinateurs. Ainsi la méthode des éléments finis (en abrégé M.E.F ) est communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : aérospatial, nucléaire, génie civil, construction mécanique, etc...

Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que la M.E.F appliquée au calcul des structures est une technique récente, à caractère pluridisciplinaire, car elle met en œuvre les connaissances de trois disciplines de base :

- La mécanique des structures : élasticité, résistance des matériaux, dynamique, plasticité, etc..
- L'analyse numérique : méthodes d'approximation, résolution des systèmes linéaires, résolution des systèmes non linéaires, des problèmes aux valeurs propres....
- L'informatique appliquée : techniques de développement et de maintenance des grands logiciels.<sup>[IMB84]</sup>

La méthode des éléments finis est apparue vers [1955], en même temps que les ordinateurs puissants. D'abord appliquée au calcul des structures et solides, elle a pris, dès [1965], une extension fantastique, quand on a réalisé qu'elle représentait, en fait, une méthode générale de résolution numérique des problèmes aux limites. Tout phénomène physique, dont la modélisation conduit à des équations différentielles avec conditions aux limites, lui devenait accessible : structure, solide, chaleur, fluide, combustion, électromagnétisme, acoustique...<sup>[FRA01]</sup>

Les bases théoriques de M.E.F reposent d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximation. Après la deuxième guerre mondiale on assiste, dans l'industrie aéronautique, au développement de méthodes matricielles permettant de traiter des problèmes de structures assez complexes, parmi les contributions les plus importantes, citons celle de LEVY en [1947] et GARVEY en [1951] pour la méthode des forces et LEVY en [1953] pour la méthode des déplacements. En fin, en [1956] TURNER et CLOUGH publièrent une présentation systématique de la méthode des

déplacements. Ces deux publications sont particulièrement importantes et représentent véritablement le début de la M.E.F comme technique de calcul des structures complexes.

Cependant, il existe bien d'autres types de structures où l'opération de discrétisation n'est pas aussi immédiate ; pour les problèmes de coques ou de plaques par exemple. Il faut alors utiliser des techniques d'approximation appropriées. Dans le cadre de la M.E.F, on étudie un modèle discret du continuum. Ce modèle est basé sur subdivision du domaine continu en sous-domaines de forme géométrique simple que l'on appellera « éléments finis » interconnectés en des points remarquables appelés « nœuds ». De plus, on définit dans chaque élément une approximation adéquate de la solution permettant de résoudre le problème en fonction uniquement des valeurs de la solution aux nœuds.<sup>[IMB84]</sup>

Il existe plusieurs sortes de formulations d'éléments finis en mécanique des structures, formulation contraintes, formulation déplacement ou formulation mixtes....etc. Mais la plus utilisée et qu'on développera dans notre étude est la formulation déplacements vu son efficacité numérique et parce qu'elle permet la résolution aisée de problèmes non linéaires qui sont l'objet de notre projet.

On formule le problème en fonction des déplacements aux nœuds et les différentes étapes de calcul sont les suivantes :

- ❑ Idéalisation / modélisation : choix du modèle mathématique ( champ de déplacement ).
- ❑ Discrétisation : maillage.
- ❑ Choix des hypothèses sur le champ de déplacement dans les éléments ( type d'élément ) et interpolation du déplacement dans l'élément fini en fonction des inconnues nodales qui conduit à l'établissement des matrices de rigidités élémentaires.
- ❑ Formation de la matrice de rigidité de la structure tout entière en vue d'écriture des équations d'équilibre aux nœuds.
- ❑ Formation du vecteur force nodale correspondant aux diverses charges appliquées.
- ❑ Introduction des conditions aux limites de déplacement permettant la détermination des déplacements nodaux de la structure.
- ❑ Résolution des équations d'équilibre pour déterminer le vecteur des déplacements nodaux ( inconnus nodaux ).
- ❑ Substitution des déplacements des nœuds pour construire : le champ de déformation, le champ de contrainte.

### I.3. Eléments plaques :

Les premiers éléments de plaque ont été formulés en utilisant la théorie de Kirchhoff qui néglige les effets de cisaillement transverse (CT). Les plus populaires sont ceux basés sur l'introduction des hypothèses de Kirchhoff sous forme discrète. Wempner et Al [1968], Stricklin et Al [1969] et Dhatt [1969] sont les premiers à avoir introduit l'idée de base relative aux éléments dits « de Kirchhoff-discret », en particulier les éléments DKT (Discrète Kirchhoff Triangle) et DKQ (Discrète Kirchhoff Quadrilatéral) dont les formulations sont dues à Batoz et Al [1980-1982].

Un pas plus important consiste l'abandon de la théorie de Kirchhoff en faveur de la théorie des plaques modérément épaisses de Reissner-Mindlin. Les éléments finis de plaque basés sur la théorie de Reissner-Mindlin [1945-1951] tiennent compte des effets de CT. En conséquence, ils peuvent être utilisés pour l'analyse des plaques épaisses et minces. Ces éléments dits « de premier ordre » sont très populaires, car seule la continuité  $C^0$  des variables cinématiques est requise. De plus, leur extension aux éléments de coque à géométrie courbe de type isoparamétriques dégénérés est simple.<sup>[AYA93]</sup>

Dans notre étude, on s'intéressera aux éléments plaque en flexion basés sur la formulation en déplacement utilisant la théorie de Reissner-Mindlin ( Zienkiewicz & Taylor [1991] ) qui tient compte de l'effet de cisaillement transverse, avec intégration sélective, ils donnent une précision comparable aux meilleurs éléments de Kirchhoff. L'étude se fera pour l'élément à quatre nœuds, l'élément de Serendip à huit nœuds, l'élément de Lagrange à neuf nœuds, l'élément Hétérosis à neuf nœuds qui est développé par Hughes, il est basé sur des fonctions d'interpolation de Serendip pour  $w$  et des fonctions d'interpolation de Lagrange pour  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . Il possède donc un nœud central avec  $\theta_x$  et  $\theta_y$  comme d.d.l, ses performances sont excellentes, il ne présente aucun mécanisme et permet la modélisation des plaques très minces, et l'élément à quatre nœuds avec cisaillement transversal constant par côté  $Q4\gamma$ .

### I.4. Plasticité et analyse non linéaire :

Les travaux scientifiques relatifs à la plasticité remontent à [1864] sur le critère de la contrainte de cisaillement maximal. La formulation actuelle de la théorie a été faite en [1870] par Saint-Venant. Levy plus tard avait obtenu les équations générales en trois dimensions. Une généralisation similaire aux résultats de Levy était établie indépendamment par Von-Mises dans un papier en [1913]. En [1924], Prandtl étend les équations de Saint-Venant/Levy/Von-Mises du problème plan continu pour inclure la composante élastique de déformation. En [1928], Von-Mises généralisa son travail prévu pour un solide rigide parfaitement plastique pour

inclure une fonction générale d'écoulement et discuta la relation entre la direction du taux de déformation plastique ( incrément ) et la surface d'écoulement régulier.

La loi d'écoulement isotrope était formulée dès [1871] par Saint Venant et Levy mais il a fallu attendre les années [1950] pour en voir une utilisation dans les problèmes de structures grâce aux théorèmes limites, puis les années [1970] pour voir des applications pratiques grâce à l'avènement des ordinateurs rapides et de grande capacité. Le cas du chargement radial (invariance des directions principales du tenseur des contraintes en chaque point d'une structure) fournit un vaste champ d'applications aux théories fondées sur l'écrouissage isotrope.

L'écrouissage est presque toujours anisotrope ; cette propriété doit être introduite dans les modèles dès que le chargement n'est plus radial et en particulier lorsqu'il est cyclique. C'est Prager qui vers [1950] en a donné la première formulation simple : l'écrouissage cinématique sur lequel sont fondées la plupart des théories actuelles.<sup>[LEM91]</sup>

Généralement, on a recourt à l'analyse non linéaire des structures quand l'une des deux hypothèses suivantes n'est plus satisfaite :

- Les déplacements sont suffisamment petits pour pouvoir "confondre" les configurations déformées aux configurations non déformées ( pour définir des grandeurs telles que les contraintes, les éléments de volume ...); c'est la linéarité géométrique.
- Les matériaux se comportent de manière élastique linéaire dans le domaine des déformations résultant de ces déplacements; c'est la linéarité matérielle.

Ces deux hypothèses sont dites hypothèses de l'élasticité linéaire, elles sont généralement admises pour le dimensionnement de la plupart des structures courantes. Cependant l'utilisation dans la construction des éléments de forme de plus en plus élancées d'une part et la réalisation de structures plus économiques ou "à risque" d'autre part conduit à abandonner les hypothèses très étroites de l'élasticité linéaire. Il convient également de mieux évaluer les coefficients de sécurité vis-à-vis de la ruine. Il est alors nécessaire d'introduire des comportements plus proche de la réalité. Ainsi, la prise en compte de ces points conduit alors à l'élaboration d'une analyse non linéaire afin de traduire correctement le comportement géométrique ou matériel des structures citées. Si maintenant l'analyse non linéaire est largement utilisée et pratiquement maîtrisée, il n'en demeure pas moins qu'elle reste toujours d'actualité et fait toujours l'objet de nombreuses recherches.<sup>[GUE99]</sup>

Deux types de non linéarité peuvent se manifester dans l'analyse des structures par la M.E.F : les Non linéarités géométriques interviennent lorsque les déplacements et éventuellement les déformations sont suffisamment importantes. Dans ce cas les caractéristiques de rigidité de la structure sont non linéaires, (qui sort du cadre de notre étude). Les non linéarités matérielles

peuvent apparaître dans la dépendance des paramètres physiques ( module de Young ) aux inconnus du problème et aussi dans la dépendance dans les équations aux dérivées partielles.

L'objectif d'un critère de résistance est de prévenir l'endommagement d'une structure soumise à un champ de contraintes. L'endommagement est défini ici comme un état irréversible de la matière. Suivant le type de matériau, le dépassement de la limite élastique, à partir de laquelle le matériau ne peut plus être considéré comme élastique, peut conduire à différents types d'endommagement :

- Pour un matériau ductile, celui-ci va d'abord se plastifier avant la rupture. La plastification va engendrer une déformation permanente.
- Pour un matériau fragile, le stade de plastification sera quasiment inexistant et nous aurons alors une fissuration conduisant rapidement à la rupture complète.

Souvent, la limite élastique est obtenue expérimentalement par un essai simple de traction en contrainte uniaxiale (ou plusieurs lorsqu'il s'agit de matériaux anisotropes). L'objectif du critère est alors de prévoir l'état de chargement à partir duquel l'endommagement du matériau (plastification, rupture...) s'amorcera, et ce, quel que soit l'état de contraintes. Pour les matériaux isotrope ductiles, les critères de plastification les plus connus sont les critères de Tresca et de Von-Mises, pour les matériaux isotrope fragiles, le critère de Mohr<sup>[CHR00]</sup>.

### **I.5. Objectifs du mémoire :**

Dans le cadre de modéliser les plaques par éléments finis pour l'analyse non-linéaire (élasto-plasticité) on arrive souvent aux problèmes suivants :

- La détermination numérique de la réponse statique des solides élastiques, plastiques sous l'action d'un trajet de chargement donné.
- Le choix de type d'élément et leur influence sur les résultats numériques représentant la propagation de la plasticité.
- La détermination du début de la plastification.
- Le calcul de la charge ultime de la structure.

Donc, notre démarche consiste à :

- Elargir un programme de Hinton et Owen<sup>[HIN80]</sup> en éléments finis pour l'analyse non-linéaire des plaques basées sur la théorie de Reissner-Mindlin comprenant :
  - Plusieurs éléments de plaque en flexion qui tiennent compte de l'effet de CT, en particulier l'élément linéaire Q4, les éléments quadratiques (Q8, Q9, HT9) et l'élément à quatre nœuds avec cisaillement transversal constant par côté Q4 $\gamma$ .
  - Plusieurs critères de plasticité ( Von-Mises, Tresca, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager ).

- Des différentes méthodes de résolution de système non linéaire ( Newton Raphson, Newton Raphson modifiée, Rigidité initiale ).
- L'expérimentation numérique permettant l'évaluation de l'influence du type d'élément fini sur le comportement élasto-plastique des plaques minces et épaisses avec différentes conditions aux limites, et testé les différents critères de plasticité pour différents éléments finis utilisés.

### **I.6. Plan de travail :**

Dans le présent travail on se propose une introduction générale ( Chapitre I ), où on a met en évidence la méthode des éléments finis, appliquée au calcul des structures non linéaires formées des plaques minces et épaisses, ainsi que l'aspect historique de la plasticité.

Le deuxième chapitre concerne la formulation en éléments finis des éléments plaques basées sur la théorie de Reissner-Mindlin et une présentation générale sur les éléments utilisés dans le programme ( l'élément linéaire, les éléments quadratiques et l'élément à quatre nœuds avec cisaillement transversal constant par côté ) et a la fin, un bref aperçu a été cité sur la transformation isoparamétrique et l'intégration numérique.

Le troisième chapitre consacré à la théorie d'élasto-plasticité des matériaux :

- La loi de comportement ( élasticité et plasticité ).
- Les critères de plasticité ( Tresca, Von-Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager ).
- La loi d'écrouissage ( écrouissage isotrope, cinématique et mixte ).
- La règle d'écoulement plastique.
- La théorie incrémentale de plasticité.

Le quatrième chapitre est consacré à l'analyse non linéaire des structures : les méthodes de résolution de système non linéaire ainsi que les différents critères de convergence.

La validation du programme et l'expérimentation numérique fait l'objet du cinquième chapitre, en simulant la propagation de la plasticité au niveau de la plaque pour différents cas, on fera varier le type d'élément, l'épaisseur, les conditions aux limites, les critères de plasticité, les méthodes de résolution de système non linéaire. Evidemment cela se fera avec interprétation des résultats obtenus.

Finalement, l'étude sera finalisée par une conclusion générale sur le sujet d'étude et des recommandations.

## CHAPITRE II : FORMULATION EN ELEMENTS FINIS DES ELEMENTS PLAQUES

### II.1. Théorèmes de l'énergie :

#### II.1.1. Notations :<sup>[IMB84]</sup>

Soit un corps solide déformable figure (II.1) dont la géométrie définit un volume (domaine)  $V$  et une surface extérieure  $S$ , sur ce corps agissent des forces de volume  $b_i$  et de surface  $f_i$ .

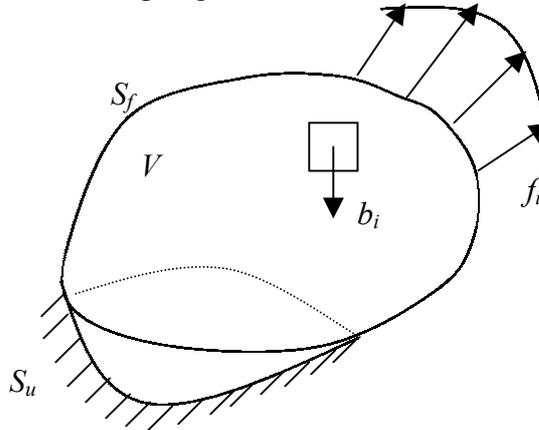


Figure (II.1) : Corps solide déformable<sup>[IMB84]</sup>

Nous travaillerons dans le cadre des petites déformations, cela implique que la position de référence reste la position initiale. Les chargements peuvent être de type volumique ou de type surfacique dans le cas 3-D.

Nous avons adopté dans ce chapitre la notation indicielle qui permet un exposé théorique rigoureux et concis.

La résolution d'un problème de structure consiste à étudier trois champs vectoriels ainsi que leur relation. Le champ de déplacement, noté :

$$u(x) = \begin{cases} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Le champ des déformations noté :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.2})$$

Le champ des contraintes noté :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

Relation déplacement-déformation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{II.4})$$

Dans le cas de la théorie linéaire de l'élasticité ( les déplacements et les déformations sont petits, donc le produit  $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$  devient négligeable ), on aura :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.5})$$

### II.1.2. Les relations de compatibilité :<sup>[IMB84],[COI97]</sup>

Quand on connaît les déplacements il est simple de déterminer les déformations, mais le Problème inverse n'est pas aussi simple : 3 composantes pour le déplacement et 6 composantes pour le tenseur des déformations. On a donc 6 inconnues et trois équations : le problème n'a pas de solution unique. Cela est dû au mouvement de corps solide : Rotation d'ensemble, translation ( Mécanique des milieux indéformables). Il existe des relations de compatibilité pour enlever ces indéterminations qui sont :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial i} \left( -\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ji}}{\partial x_k} \right) \quad (\text{II.6})$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} \right) \quad (\text{II.7})$$

Ces formules sont données sans sommation de l'indice répété.

En d'autres termes la relation générale de compatibilité est :

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (\text{II.8})$$

### II.1.3. Comportement élastique linéaire isotrope (Loi de Hooke) :<sup>[GUE98],[COI97]</sup>

Un matériau est dit élastique si l'état de contraintes ne dépend que de la configuration courante, que des seules déformations instantanées, et non de l'histoire du mouvement ou encore si la variation des contraintes est entièrement définie par comparaison de la configuration courante avec toute configuration antérieure.

Cette définition est une extension de la notion d'élasticité linéaire infinitésimale due à Cauchy; dans ce cas, si  $\varepsilon_{ij}$  est le tenseur infinitésimal des déformations, la relation constitutive est :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{II.9})$$

Où le Tenseur d'ordre quatre  $D_{ijkl}$  n'est pas nécessairement symétrique, et il contient 36 coefficients différents.

Pour un matériau isotrope cette relation devient :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.10})$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé.

Cette équation, généralement appelée loi de Hooke, est due à Cauchy avec des apports de Navier et Poisson.

Dans le cas d'un matériau isotrope ( si toutes ses directions sont équivalentes ) la loi de comportement élastique dépend alors de deux coefficients et s'écrit :

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{II.11})$$

avec :

$$D_{ijkl} = \left( K - \frac{2G}{3} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{II.12})$$

où :  $K$  : Est le module volumique.

$G$  : Est le module de cisaillement.

$D_{ijkl}$  : Sont les composantes du tenseur d'élasticité.

Ou bien :

$$\varepsilon_{ij} = (1+\nu) \frac{\sigma_{ij}}{E} - \frac{\nu}{E} Tr(\sigma_{kl}) \delta_{ij} \quad (\text{II.13})$$

où  $E$  : Le module d'Young.

$\nu$  : Coefficient de Poisson.

avec :  $Tr(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

Et le symbole de Kronecker est défini par :  $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Les relations entre les paramètres de comportements sont les suivantes :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.14})$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (\text{II.15})$$

L'hypothèse de stabilité du matériau impose les conditions suivantes sur les coefficients  $E$  et  $\nu$  :  $E > 0$  et  $\nu < 0.5$ .<sup>[GUE98]</sup>

Par ailleurs, les relations entre les paramètres de comportement  $K$ ,  $G$ ,  $E$  et  $\nu$  sont les suivantes :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.16})$$

$$E = \frac{9KG}{3K+G} \quad \nu = \frac{3K-2G}{6K+2G} \quad (\text{II.17})$$

### II.1.3.1. Etat de déformation plan : <sup>[DEC00],[LOI02]</sup>

L'hypothèse des déformations planes est surtout utilisée pour les corps élastiques cylindriques longs dans la direction  $z$ , de section de forme quelconque mais constante suivant  $z$ , chargés parallèlement au plan des sections de la même manière dans toutes les sections.

On peut alors écrire une loi de comportement réduite pour les déformations planes :

$$\bar{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left( \bar{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{Tr} \bar{\varepsilon} \bar{I} \right) \quad (\text{II.18})$$

$$\sigma_3 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{Tr} \bar{\varepsilon} = \nu \text{Tr} \bar{\sigma} \quad (\text{II.19})$$

avec : 
$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \left( \bar{\sigma} - \nu \text{Tr} \bar{\sigma} \bar{I} \right) \text{ et } \varepsilon_z = 0 \quad (\text{II.20})$$

où :  $\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}$  les parties planes respectives de  $\sigma, \varepsilon$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.21})$$

où :  $\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} ; \varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$

### II.1.3.2. Etat de contrainte plan : <sup>[DEC00],[LOI02]</sup>

L'hypothèse des contraintes planes est surtout utilisée pour modéliser des corps élastiques planes et minces ( plaques ) chargés dans leur plan.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr} \bar{\sigma} \bar{I} \quad (\text{II.22})$$

et 
$$\varepsilon_3 = \frac{\nu}{E} \text{Tr} \bar{\sigma} = -\frac{\nu}{1-\nu} \text{Tr} \bar{\varepsilon} \quad (\text{II.23})$$

ou 
$$\bar{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left( \bar{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-\nu} \text{Tr} \bar{\varepsilon} \bar{I} \right) \text{ et } \sigma_z = 0 \quad (\text{I.24})$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \varepsilon_{ij} \quad (\text{II.25})$$

avec  $\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} ; \varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$

**II.1.4. Equations d'équilibre :**<sup>[GAR01],[GUE98]</sup>

Dans le cas général, on montre que les équations d'équilibre s'écrivent sous la forme :

$$\operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma}}) + \overline{\overline{f}} = \rho \overline{\overline{\gamma}} \quad (\text{II.26})$$

qui se simplifient dans le cas de la statique à :

$$\operatorname{div}(\overline{\overline{\sigma}}) + \overline{\overline{f}} = 0 \quad (\text{II.27})$$

où  $\overline{\overline{f}}$  : est une force volumique dans le cas 3-D.

ou par la notation indicielle :

$$\sigma_{ji,i} + b_j = 0 \quad (\text{II.28})$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{II.29})$$

en élasticité à deux dimensions on aura :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + b_x = 0 \quad (\text{II.30})$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0 \quad (\text{II.31})$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (\text{II.32})$$

**II.1.5. Théorèmes énergétiques en élasticité :**<sup>[IMB84],[GUE98]</sup>

Pour effectuer un calcul de structure, il est nécessaire de connaître :

- L'expression des équations d'équilibre et les efforts appliqués.
- Les conditions aux limites.
- La loi de comportement.

Les différentes formulations énergétiques permettent de faire une synthèse de ces trois éléments constitutifs d'un problème de structure, et ainsi d'obtenir une formulation plus compacte et donc facile à discrétiser. Ce sont ces formulations qui sont à la base des méthodes par éléments finis.

**II.1.5.1. Principe de travaux virtuels :**

Pour un corps solide en équilibre sous l'action de forces de volume  $b_i$  et des forces de surfaces  $f_i$ , et pour tous champs de déplacements virtuels cinématiquement admissible ( $\delta u_i = 0$ ):

$$\int_{S_f} f_i \delta u_i ds + \int_V b_i \delta u_i dV = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV \quad (\text{II.33})$$

Cette relation est l'expression générale du principe des travaux virtuels pour un corps solide déformable.

On peut la mettre sous la forme courante si l'on effectue les hypothèses suivantes :

H1 : Petits déplacements et déformations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II.34})$$

H2 : Existence d'un potentiel de déformation  $W$  tel que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (\text{II.35})$$

Donc :

$$\delta U = \delta \int_V W dV = \int_V b_i \delta u_i dV + \int_{S_f} f_i \delta u_i dS \quad (\text{II.36})$$

L'accroissement virtuel de l'énergie de déformation ( $U = \int_V W dV$ ) est égal à la somme des travaux virtuels des forces de volume et de surface dans tout accroissement virtuel cinématique admissible du champ des déplacements.

### II.1.5.2. Théorème de l'énergie potentielle totale :<sup>[IMB84]</sup>

Le principe des déplacements virtuels et du minimum d'énergie potentielle totale jouent un rôle important dans les méthodes de calcul des structures élastiques. Les déplacements cinématiquement admissibles pour un état d'équilibre stable, qui satisfont les conditions d'équilibre, sont ceux qui minimisent l'énergie potentielle et réciproquement. Soit la première variation de l'énergie potentielle totale :

$$\delta U = \delta \int_V W dV = \int_V b_i \delta u_i dV + \int_{S_f} f_i \delta u_i dS \quad (\text{II.37})$$

de plus, on a :

$$\delta \int_V W dV = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV \quad (\text{II.38})$$

d'où en applique le théorème de Gauss et on obtient donc finalement :

$$\delta U = - \int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i dV + \int_S (\sigma_{ij} n_j - b_i) \delta u_i dS \quad (\text{II.39})$$

la stationnarité de  $V$  implique que :

$$\delta U = 0 + 0 \quad \forall \delta u_i \neq 0 \quad (\text{II.40})$$

Donc les conditions d'équilibre dans  $V$  et sur  $S_f$  constituent les conditions d'extremum de l'énergie potentielle totale pour toute variation cinématiquement admissible des déplacements.

### II.1.6. Application au principe des travaux virtuels :

Pour un corps solide en équilibre, et pour tous champs de déplacements virtuels cinématiquement admissible et satisfaisant les conditions aux limites de déplacement le travail virtuel interne totale de déformation doit être égale au travail virtuel des forces extérieures.

$$\int_V \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \delta \{u\}^T \{f^v\} dV + \int_{S_f} \delta \{u^s\}^T \{f^s\} dS + \sum_i \delta \{u^i\}^T \{F^i\} \quad (\text{II.41})$$

$i$  : points soumis à des forces concentrées.

$\{f^s\}$  : Forces de surface.

$\{f^v\}$  : Forces de volume.

$\{F\}$  : Forces concentrée.

$\{u\}$  et  $\{u^s\}$  : Sont les déplacements correspondant aux forces  $\{f^v\}$  et  $\{f^s\}$ .

L'énergie potentielle totale  $\Pi$  est stationnaire de plus pour un équilibre stable elle est minimum :

$$\Pi = U + V \quad (\text{II.42})$$

$U$  : Energie de déformation interne

$V$  : Potentiel des forces appliquées ( opposé du travail des forces extérieures ).

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{u\}^T \{f^v\} dV - \int_{S_f} \{u^s\}^T \{f^s\} dS - \sum_i \{u^i\}^T \{F^i\} \quad (\text{II.43})$$

#### a. Interpolation de déplacement :

Elle permet d'exprimer le déplacement en tout point de l'élément en fonction du déplacement des nœuds.

$$\{u\} = [N_e] \{u_e\} \quad (\text{II.44})$$

$[N_e]$  : matrice ligne de fonction d'interpolation ou de forme.

#### b. Interpolation de la déformation :

Les déformations de l'élément « e » sont obtenus par différentiation des déplacements :

$$\{\varepsilon_e\} = [L][N_e] \{u_e\} \quad (\text{II.45})$$

$$\text{Donc :} \quad \{\varepsilon_e\} = [B_e] \{u_e\} \quad (\text{II.46})$$

avec :  $[B_e] = [L][N_e]$

où  $[L]$  : Matrice Laplacienne.

**c. Interpolation de la contrainte :**

Les contraintes sont liées aux déformations par la relation :

$$\{\sigma_e\} = [D]\{\varepsilon_e\} + \{\sigma_0^e\} \quad (\text{II.47})$$

où  $\{\sigma_0^e\}$  : les contraintes initiales.

$[D]$  : matrice d'élasticité.

**d. Matrice de rigidité élémentaire :**

D'après le théorème des travaux virtuels on a :

$$W_{int} = W_{ext} \quad (\text{II.48})$$

Donc :

$$\int_{V_e} \{\varepsilon_e\}^T \{\sigma_e\} dV = \{\tilde{u}_e\}^T \{F_e\} \quad (\text{II.49})$$

$$\int_{V_e} ([B_e]\{u_e\})^T ([D][B_e]\{u_e\}) dV = \{\tilde{u}_e\}^T \{F_e\} \quad (\text{II.50})$$

$$\{\tilde{u}_e\}^T \left[ \int_{V_e} [B]^T [D][B] dV \right] \{u_e\} = \{\tilde{u}_e\}^T \{F_e\} \quad (\text{II.51})$$

$$\left[ \int_{V_e} [B_e]^T [D][B_e] dV \right] \{u_e\} = \{F_e\} \quad (\text{II.52})$$

$\{\tilde{u}_e\}$  : déplacement virtuel.

On aura finalement la matrice de rigidité élémentaire sous la forme :

$$[K_e] = \int_{V_e} [B_e]^T [D][B_e] dV \quad (\text{II.53})$$

## II.2. Théorie des plaques en flexion :

### II.2.1. Définition de la plaque :<sup>[IMB84]</sup>

Une plaque est un solide tridimensionnel élastique dont une dimension selon l'épaisseur  $h$  est petite en comparaison des deux autres dimensions et qui comporte généralement un plan de symétrie au milieu de l'épaisseur appelé surface moyenne  $S_m$ . Par convention, cette surface moyenne sera le plan  $xy$ , l'axe  $oz$  correspondant à l'axe transverse selon l'épaisseur.

Les plaques sont classées en deux catégories:

- Plaques épaisses :  $1/20 < h/L < 1/4$
- Plaques minces :  $h/L < 1/20$

### II.2.2. Hypothèses fondamentales :<sup>[IMB84],[TOU81],[BAT90b],[LUC02]</sup>

Les théories des plaques reposent sur les hypothèses suivantes :

**H1:** L'hypothèse des contraintes planes : Les contraintes normales  $\sigma_{zz}$  sont négligeables par rapport aux autres composantes de contraintes.  $\sigma_{zz} = 0$

**H2:** Les pentes de la surface moyenne après déformation  $S'_m$  sont supposées petites par rapport à l'unité.

**H3:** On néglige l'interaction des phénomènes de membrane et de flexion due aux grands déplacements. En d'autres termes, on néglige les contraintes dans la surface moyenne membrane induites par les déformations transverses ( flexion ). Ceci correspond à une approximation du premier ordre si les déplacements transverses sont de l'ordre de l'épaisseur de la plaque.

**H4 :** La construction et les matériaux de la plaque sont tels que les phénomènes de membrane (dans le plan) et de flexion (transverses) sont découplés. Ceci est vrai pour des plaques isotropes monocoques ou multicouches symétriques. ( Exemple : sandwich nid d'abeilles symétrique ).

Ceci permet de découpler totalement l'étude des phénomènes de membrane et de flexion. En général, ces deux types de phénomènes peuvent être couplés au niveau des équations constitutives. C'est le cas de plaque à raidissage continu excentré ou de multicouches dissymétriques ( exemple : Multicouches en matériaux composites).

**H5 :** L'hypothèse dite sections droites ( ou planes ) : Les points situés sur la première normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse, on a dans ce cas  $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0$ . C'est à dire les déplacement  $u$  et  $v$  ( suivant  $x$  et  $y$  ) d'un point varient linéairement en  $z$  et le déplacement transversal  $w$  ( suivant  $z$  ) n'est fonction que de  $x$  et  $y$ .<sup>[IMB84]</sup>

Il existe deux théories des plaques ( les plus importantes ) pour l'analyse linéaire des structures.

1. La théorie de Reissner-Mindlin (hypothèses H1, H2, H3) ou théorie linéaire des plaques. Dans ce cas, il faut prendre en compte les déformations de cisaillement transversal et alors les fibres normales à la surface moyenne avant déformation ne le restent pas au cours de la déformation; la rotation des sections devient distincte de la pente de la surface moyenne. On ne peut plus admettre l'hypothèse H5.

2. La théorie de Kirchoff (hypothèses H1, H2, H3 et H5) ou théorie linéaire des plaques sans cisaillement transversal. Cette théorie est valable dans le cas des plaques minces.

Par ailleurs, on adoptera l'hypothèse H4 ce qui permettra l'étude séparée des phénomènes de flexion.

### II.2.3. Théorie des plaques minces ( Kirchoff ) :<sup>[REM02],[HIN84],[BAT90b]</sup>

Les plaques sont des structures en état plan de contraintes. Ce sont donc des structures minces et planes. Les plaques sont l'équivalent 2D des poutres : elles admettent des déplacements verticaux suivant l'axe  $z$ . On ne considère pas ici l'effet membrane c'est à dire les forces appliquées dans le plan, cet effet pourra par la suite être superposé à la flexion.

#### a. Hypothèses :

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchoff généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant.

- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
- Les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal  $w$  est considéré.
- La contrainte  $\sigma_z$  dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout  $z$ .

#### b. Champs de déplacement :

Les composantes des champs des déplacements pour cette théorie des plaques minces s'expriment comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} = z\theta_y \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} = -z\theta_x \\ w = w(x,y) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.54)} \\ \text{(II.55)} \\ \text{(II.56)} \end{array}$$

**c. Champs de déformation :**

Le vecteur des déformations planes s'écrit :

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (\text{II.57})$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (\text{II.58})$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (\text{II.59})$$

$$2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \quad (\text{II.60})$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{II.61})$$

**II.2.4. Théorie des plaques épaisses ( Reissner-Midlin ) :** <sup>[HIN84],[HYO90],[YAN02]</sup>

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff, une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire.

**a. Hypothèses :**

Les hypothèses de Reissner-Mindlin, reprennent les points 1 et 4 de celles de Kirchhoff. Les points 2 et 3 des précédentes hypothèses ne sont plus retenues afin de prendre en compte les deux nouveaux effets.

**b. Champ de déplacement :**

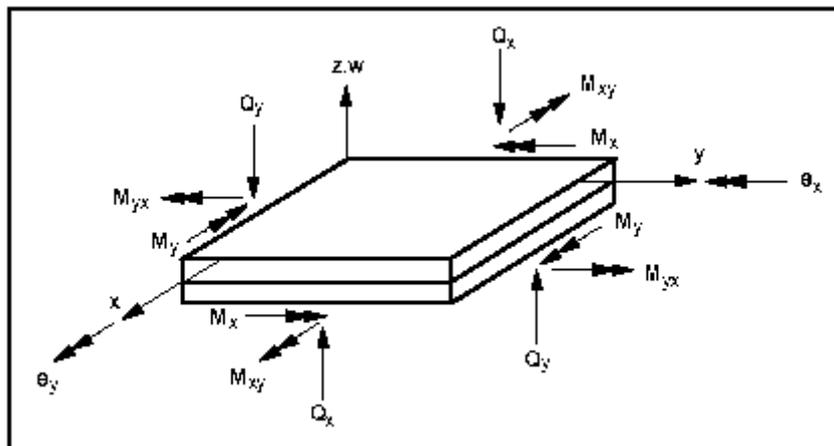
Dans la théorie de Mindlin (prise en compte du cisaillement transversal), on se donne un modèle de déplacements basé sur trois variables indépendantes : Le déplacement transversal  $w$  et les deux rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . La convention de signes est illustrée dans la figure (II.2).

Le champ des déplacements s'exprime alors en fonction de ces trois variables par la relation suivante :

$$u = -z \theta_x(x,y) \quad (\text{II.62})$$

$$v = -z \theta_y(x,y) \quad (\text{II.63})$$

$$w = w(x,y) \quad (\text{II.64})$$



Figure(II.2) : Convention de signes dans la plaque de Mindlin <sup>[HYO90]</sup>

Soient les déplacements  $u$ ,  $v$  et le déplacement transverse  $w$  et les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$ , ou  $\bar{\theta}_x$  et  $\bar{\theta}_y$ . On a évidemment :

$$\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_x \\ \bar{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad (\text{II.65})$$

Pour la formulation des théories des plaques, on utilisera les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  au lieu des rotations conventionnelles  $\bar{\theta}_x$  et  $\bar{\theta}_y$ .

On peut se ramener facilement aux conventions habituelles pour les rotations  $\bar{\theta}_x$  et  $\bar{\theta}_y$  ce qui est nécessaire pour la phase d'assemblage.

Le vecteur de déplacement est  $\{d\} = \{w \ \theta_x \ \theta_y\}^T$  avec :

$$w = w(x,y) \quad (\text{II.66})$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \quad (\text{II.67})$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \quad (\text{II.68})$$

où  $\phi_x$  et  $\phi_y$  sont les rotations transversales dues au cisaillement.

### c. Champ de déformation :

L'état de déformation peut être défini en fonction des trois variables  $w$ ,  $\theta_x$  et  $\theta_y$  par les relations cinématiques suivantes :

Les déformations de flexion sont :

$$\{\varepsilon_f\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\}^T \quad (\text{II.69})$$

$$\text{Où :} \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad (\text{II.70})$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad (\text{II.71})$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.72})$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (\text{II.73})$$

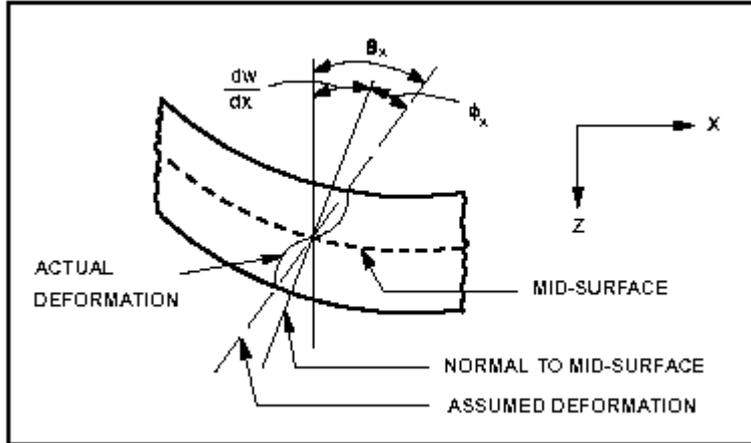
Les déformations de cisaillement sont :

$$\{\varepsilon_c\} = \{\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}\}^T \quad (II.74)$$

Où :

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \quad (II.75)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \quad (II.76)$$



Pour raison de commodité, on suppose qu'il n'y a pas de traction sur la frontière  $\Gamma$  du domaine tridimensionnel  $\Omega$ .

$$\text{L'équation du travail virtuel peut être exprimée par : } \int_{\Omega} \{\delta\varepsilon\}^T \sigma \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta u\}^T b \cdot d\Omega = 0.$$

Où  $\delta u = \{\delta u \quad \delta v \quad \delta w\}^T$  : est le vecteur des déplacements virtuels dans les directions  $x, y, z$ .

$\delta\varepsilon = \{\delta\varepsilon_x \quad \delta\varepsilon_y \quad \delta\varepsilon_z \quad \delta\gamma_{xy} \quad \delta\gamma_{xz} \quad \delta\gamma_{yz}\}^T$  : est le vecteur des déformations virtuelles associées.

$\sigma = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\}^T$  : est le vecteur des contraintes.

$b = \{b_x \quad b_y \quad b_z\}^T$  : est le vecteur des forces corporelles appliquées.

L'hypothèse H1  $\sigma_{zz} = 0$  étant maintenue et éliminant  $\varepsilon_{zz}$ , le travail virtuel peut être exprimé donc par :

$$\int_{\Omega} \{\delta\varepsilon'\}^T \sigma' \cdot d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta u\}^T b \cdot d\Omega = 0 \quad (II.77)$$

$$\text{avec : } \{\delta\varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\gamma_{xy} \\ \delta\gamma_{xz} \\ \delta\gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta\varepsilon_f\} \\ \{\delta\varepsilon_c\} \end{Bmatrix} \text{ et } \sigma' = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\sigma_f\} \\ \{\sigma_c\} \end{Bmatrix}$$

Dans la théorie des plaques de Mindlin, le domaine  $\Omega$  a une forme spéciale<sup>[HIN80]</sup> :

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in R_3 / z \in \left[ -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] (x, y) \in A \in R^2 \right\} \quad (\text{II.78})$$

Où  $h$  : est l'épaisseur de la plaque et qui peut être en fonction de  $x$  et  $y$ .

$A$  : est la surface de la plaque, ses frontières sont dénotées par  $\Gamma$ .

La forme réduite des relations constitutives est obtenue en mettant  $\sigma_z = 0$  et  $\varepsilon_z = 0$  donc :

$$\sigma' = D' \varepsilon' \quad (\text{II.79})$$

Ce qui donne : ( pour une situation d'élasticité isotrope )

$$D' = \begin{bmatrix} D'_f & 0 \\ 0 & D'_c \end{bmatrix} \quad (\text{II.80})$$

$$\text{Avec : } [D'_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ et } [D'_c] = G.k.h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Où :  $E$  : le module de Young

$\nu$  : le coefficient de Poisson

$h$  : l'épaisseur de la plaque

$G$  : le module de cisaillement

Le facteur  $k < 1$  est introduit pour corriger l'hypothèse fautive d'une contrainte en cisaillement indépendante de  $z$  ( $k = \frac{5}{6}$  dans notre cas)<sup>[HIN80]</sup>.

Par ailleurs :

$$\{\delta \varepsilon_f\} = z \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial(\delta \theta_x)}{\partial x} \\ -\frac{\partial(\delta \theta_y)}{\partial y} \\ -\left( \frac{\partial(\delta \theta_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta \theta_y)}{\partial x} \right) \end{array} \right\} = z \{\delta \hat{\varepsilon}_f\} \quad (\text{II.81})$$

$$\text{et } \{\delta \varepsilon_c\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} - \delta \theta_x \\ \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} - \delta \theta_y \end{array} \right\} = \{\delta \hat{\varepsilon}_c\} \quad (\text{II.82})$$

Les termes symbolisés par  $\hat{\phantom{x}}$  dénotent des quantités intégrées sur l'épaisseur, l'indice  $f$  dénote la flexion et  $c$  le cisaillement ( glissement).

En utilisant les équations (II.81) et (II.82), alors (II.77) peut s'écrire ainsi :

$$\int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ z \{\delta \hat{\varepsilon}_f\}^T \cdot \sigma_f + \{\delta \hat{\varepsilon}_c\}^T \cdot \sigma_c - \{\delta u\}^T \cdot b \right] dz \cdot dA = 0 \quad (\text{II.83})$$

Après l'intégration sur l'épaisseur de la plaque on trouve :

$$\int_A \left[ \{\delta \hat{\varepsilon}_f\}^T \cdot \hat{\sigma}_f + \{\delta \hat{\varepsilon}_c\}^T \cdot \hat{\sigma}_c - \{\delta u\}^T \cdot \hat{b} \right] dA = 0 \quad (\text{II.84})$$

On peut ensuite calculer les moments et efforts tranchants résultants :

$$M_{xx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz \quad M_{yy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_y dz \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz \quad (\text{II.85a})$$

$$T_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad T_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz \quad (\text{II.85b})$$

Avec :  $\hat{\sigma}_f = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$  ;  $\hat{\sigma}_c = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix}$  et généralement, on prend  $\hat{b} = \begin{Bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

où  $q$  représente la distribution de charge latérale appliquée à la plaque.

#### d. Equations d'équilibre :

Les équations d'équilibre peuvent être locales suivant  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Ces équations s'écrivent de plusieurs manières, selon que sont considérés l'équilibre local en termes de contraintes, d'efforts, de déplacements ou l'équilibre global par le théorème des travaux virtuels.<sup>[FEL01a]</sup>

##### Equations d'équilibre en termes d'efforts :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.86})$$

Qui entraîne :

$$T_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (\text{II.87})$$

Et

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.88})$$

Qui entraîne :

$$T_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \quad (\text{II.89})$$

La dernière équation traduit l'équilibre transversal (ou vertical) :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \tau = 0 \quad (\text{II.90})$$

### II.3. Éléments finis $C^0$ pour les plaques Reissner-Mindlin : <sup>[HIN80],[REM02],[TAY03]</sup>

Le plan moyen de la plaque se discrétise en une maille d'éléments isoparamétriques de classe  $C^0$ , l'interpolation du vecteur déplacements  $u$  a la forme :

$$u = \sum_{i=1}^n N_i \cdot d_i \quad (\text{II.91})$$

Et le déplacement virtuel :

$$\delta u = \sum_{i=1}^n N_i \cdot \delta d_i \quad (\text{II.92})$$

où le vecteur des variables nodales est :  $d_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}_i \quad (\text{II.93})$$

$n$  : nombre de nœuds de la structure

La déformation flexionnelle donnée par la relation suivante :

$$\delta \hat{\epsilon}_f = \sum_{i=1}^n B_{fi} \cdot \delta d_i \quad (\text{II.94})$$

avec :

$$B_{fi} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial N_i}{\partial y} & -\frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

La déformation de cisaillement donnée par la relation suivante :

$$\delta \hat{\epsilon}_c = \sum_{i=1}^n B_{ci} \cdot \delta d_i \quad (\text{II.95})$$

où :

$$B_{ci} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix}$$

On remplace les équations (II.92), (II.94) et (II.95) dans l'équation (II.83), on obtient l'expression suivante :

$$\sum_{i=1}^n \{\delta d_i\}^T \left\{ \int_{A-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( [B_{fi}]^T \cdot \sigma_f \cdot z + [B_{ci}]^T \cdot \sigma_c - \{N_i\}^T \cdot b \right) dz \cdot dA \right\} = 0 \quad (\text{II.96})$$

Cette équation doit être vraie pour n'importe quel déplacement virtuel, donc :

$$\int_{A-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( [B_{fi}]^T \cdot \sigma_f \cdot z + [B_{ci}]^T \cdot \sigma_c - \{N_i\}^T \cdot b \right) dz \cdot dA = 0 \quad (\text{II.97})$$

l'équation de la forme  $K \cdot u - F = 0$  qu'on écrit ainsi :  $\Psi_i(d) = 0$

Si on intègre sur l'épaisseur de la plaque, on aura l'équation suivante :

$$\int_A \left( [B_{fi}]^T \cdot \hat{\sigma}_f + [B_{ci}]^T \cdot \hat{\sigma}_c - \{N_i\}^T \cdot \hat{b} \right) dA = 0 \quad (\text{II.98})$$

où :  $\Psi_i(d) = 0$

Quand les contraintes sont non linéaires alors les équations (II.97) et (II.98) donnent un système d'équations non linéaires dont la procédure de résolution sera exposée au quatrième chapitre.

#### II.4. Transformation isoparamétrique : <sup>[IMB84],[FRA01]</sup>

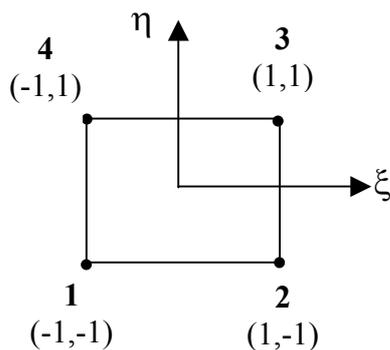
A l'intérieur de l'élément, on a les représentations suivantes pour les coordonnées  $x$  et  $y$  :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n N_i(x,y) & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^n N_i(x,y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (\text{II.99})$$

On définit une transformation du domaine physique  $(x, y)$  de l'élément en un domaine géométrique simple sans dimension  $(\xi, \eta)$  par les relations :

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad (\text{II.100})$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \quad (\text{II.101})$$



**Figure (II.4) :** Elément de référence

La première transformation est obtenue par la règle de dérivation des fonctions composées, on a :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.102})$$

où  $[J]$  la matrice Jacobienne ce qui peut s'écrire :

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{II.103})$$

on obtient finalement les dérivées des  $N_i$  par rapport à  $(x, y)$  en inversant l'équation (II.102) :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.104})$$

avec :

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (\text{II.105})$$

Posons :  $[j] = [J]^{-1}$  ;  $J = \det[J]$

$$\text{Donc :} \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.106})$$

$$[j] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{II.107})$$

et  $J = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21}$

Les déformations  $\{\varepsilon_f\}$  et  $\{\varepsilon_c\}$  sont définies en fonction des variables nodales :

$$\{\varepsilon_f\} = [B_f] \cdot \{d_n\} \quad (\text{II.108})$$

$$\{\varepsilon_c\} = [B_c] \cdot \{d_n\} \quad (\text{II.109})$$

$$\text{avec : } [B_f] = \begin{bmatrix} \langle 0 \rangle & \left\langle -\frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle 0 \rangle & \langle 0 \rangle & \left\langle -\frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle \\ \langle 0 \rangle & \left\langle -\frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle & \left\langle -\frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle \end{bmatrix} \text{ et } [B_c] = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle & \langle -N \rangle & 0 \\ \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle & 0 & \langle -N \rangle \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \{d_n\} = \{w_1 \dots w_n \ ; \ \theta_{x1} \dots \theta_{xn} \ ; \ \theta_{y1} \dots \theta_{yn}\}^T.$$

Et les dérivées des fonctions de forme cartésiennes utilisées dans les matrices  $[B_f]$  et  $[B_c]$  peuvent être obtenues comme suit :

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle = j_{11} \left\langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\rangle + j_{12} \left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\rangle \quad (\text{II.110})$$

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle = j_{21} \left\langle \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\rangle + j_{22} \left\langle \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\rangle \quad (\text{II.111})$$

la discrétisation du volume ( la surface de plaque de Mindlin ) est donnée par :

$$d\Omega = dA = dx.dy = \text{Det}[J] d\xi.d\eta = J.d\xi.d\eta \quad (\text{II.112})$$

On aura les matrices de rigidité élémentaires de flexion et de cisaillement sous la forme :

$$[K_f^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_f^e]^T [D_f] [B_f^e] |J| d\xi.d\eta \quad (\text{II.113})$$

$$[K_c^e] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_c^e]^T [D_c] [B_c^e] |J| d\xi.d\eta \quad (\text{II.114})$$

Les forces nodales au nœud «  $i$  » causées par les forces appliquées s'écrivent ainsi :

$$\{f_i^e\} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_i^e]^T \{b\} |J| d\xi.d\eta \quad (\text{II.115})$$

Chaque élément est caractérisé par les matrices  $[B_c]$  et  $[B_f]$ . La matrice de rigidité  $[K]$  est obtenue par intégration explicite ou, plus généralement, par intégration numérique de type de Gauss pour les quadrilatères.

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [K_f^e] \end{bmatrix} + [K_c^e] \quad (\text{II.116})$$

## II.5. Présentation des éléments isoparamétriques utilisés :

### II.5.1. Élément à 4 nœuds Q4 :<sup>[IMB84],[TOU81]</sup>

Pour l'élément isoparamétrique à quatre nœuds avec variation de déplacement linéaire ; les fonctions de forme sont :

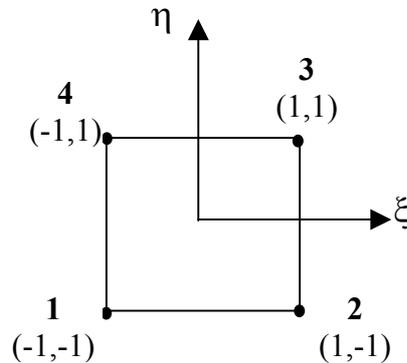


Figure (II.5) : Élément Q4

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (\text{II.117})$$

$\langle N \rangle = \langle N_i \ i=1,4 \rangle$  avec :  $-1 \leq \eta \leq 1$  et  $-1 \leq \xi \leq 1$

où :  $\xi_i, \eta_i$  : sont les coordonnées paramétriques du nœud  $i$ .

### II.5.2. Élément de Serendip à 8 nœuds Q8 :<sup>[MAR02],[STE99]</sup>

L'élément quadrilatéral de Serendip ( Lagrange incomplet ) à huit nœuds aux côtés courbes et avec variation quadratique du champ de déplacement à l'intérieur de l'élément ; les fonctions de formes sont les suivantes :

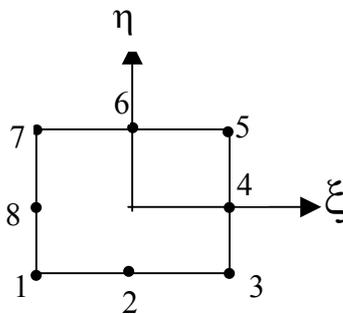


Figure (II.6) : Élément Q8

Pour les nœuds aux sommets ( coins ) :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(-1 + \xi\xi_i + \eta\eta_i)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \quad (\text{II.118})$$

$$i = 1,3,5,7$$

Pour les nœuds au milieu des côtés :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i) \quad ; \ i = 2,6 \quad (\text{II.119})$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i) \quad ; \ i = 4,8 \quad (\text{II.120})$$

Ou 
$$N_i = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) \quad ; \ i = 2,4,6,8 \quad (\text{II.121})$$

### II.5.3. Élément de Lagrange à 9 nœuds Q9 :<sup>[IMB84],[TOU81]</sup>

Pour l'élément quadrilatéral de Lagrange complet à neuf nœuds ; les fonctions de forme sont les suivantes :

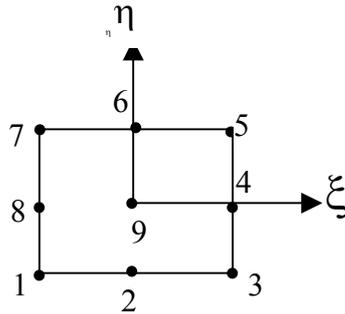


Figure (II.7) : Élément Q9

Pour les nœuds aux sommets ( coins ) :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i) ; i = 1,3,5,7 \quad (\text{II.122})$$

Pour les nœuds au milieu des côtés :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\eta_i^2(\eta^2 - \eta\eta_i)(1 - \xi^2) + \frac{1}{2}\xi_i^2(\xi^2 - \xi\xi_i)(1 - \eta^2) ; i = 2,4,6,8 \quad (\text{II.123})$$

Pour le nœud central :

$$N_i(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (\text{II.124})$$

### II.5.4. Élément Hétérosis HT9 :<sup>[HIN80],[STE99],[NIK87]</sup>

Le principe de l'élément Hétérosis est de traiter séparément l'interpolation de la flèche  $w$  de celle des composantes de la rotation  $\theta_x$  et  $\theta_y$  Figure (II.8).

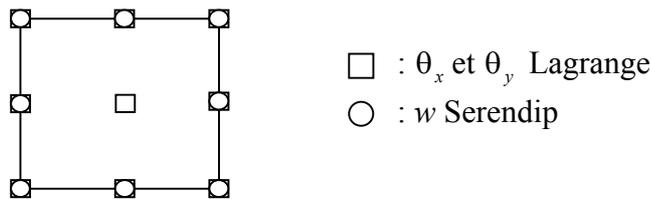


Figure (II.8) : Élément Hétérosis

La flèche est interpolée sur un élément de Serendip à 8 nœuds et les rotations sur un élément de Lagrange superposé à 9 nœuds, les deux interpolations étant quadratiques respectivement incomplète et complète :

$$w = \sum_{i=1}^8 N_i \cdot w_i \quad (\text{II.125})$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^9 N'_i \cdot \theta_{xi} \text{ et } \theta_y = \sum_{i=1}^9 N'_i \cdot \theta_{yi} \quad (\text{II.126})$$

Les fonctions de forme des huit premiers nœuds sont celle de l'élément de Serendip à huit nœuds.

Pour les nœuds aux sommets ( coins ) :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(-1 + \xi\xi_i + \eta\eta_i)(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) ; i = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{II.127})$$

Pour les nœuds au milieu des côtés :

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) ; i = 5, 6, 7, 8 \quad (\text{II.128})$$

Pour le 9<sup>ème</sup> nœud central, la fonction de forme est :

$$N_9(\xi, \eta) = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (\text{II.129})$$

L'élément Hétérosis développé par Hughes est un élément calculé par intégration sélective, il est basé sur des fonctions d'interpolation de Serendip pour  $w$  et des fonctions d'interpolation de Lagrange pour  $\theta_x$  et  $\theta_y$ . Il possède donc un nœud central avec  $\theta_x$  et  $\theta_y$  comme d.d.l, ses performances sont excellentes, il ne présente aucun mécanisme et permet la modélisation de plaques très minces ( $L/h < 10^6$ ).<sup>[NIK87]</sup>

Chacun des éléments Q8, Q9 ou Hétérosis peut être choisi ainsi :

- Pour obtenir la représentation de Serendip à 8 nœuds, on impose la valeur zéro à tous les d.d.l du nœud neuf.
- Pour obtenir un élément équivalent à la représentation de Lagrange à 9 nœuds, tous les d.d.l au nœud neuf sont laissés libres et le déplacement total en ce nœud sera calculé ainsi :

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i(0, 0).a_i + a_9 \text{ où } a_i = \{w_i \theta_{xi} \theta_{yi}\}^T \quad (\text{II.130})$$

- Pour obtenir la représentation de l'élément Hétérosis, seulement le déplacement au nœud neuf  $w_9$  est prise nul, là encore l'expression (II.130) est utilisée pour le déplacement total en ce nœud.

## II.5.5. Élément avec représentation particulière de CT :<sup>[BAT90a],[BAT90b]</sup>

### II.5.5.1. Introduction :

Les difficultés rencontrées pour obtenir des éléments finis avec cisaillement transversal, ayant un nombre réduit de nœuds et de variables nodales et sans mode parasite et libre de tous blocage en cisaillement transversal, ont conduit plusieurs chercheurs<sup>[BAT90b]</sup> à formuler des éléments très satisfaisants ( par exemple l'élément Q4 $\gamma$  ).

L'énergie potentielle intérieure est :

$$\Pi_{\text{int}}^e = U_f^e + U_c^e \quad (\text{II.131})$$

$$\text{avec} \quad U_f^e = \frac{1}{2} \int_A \{\varepsilon_f\}^T [D_f] \{\varepsilon_f\} dA \quad (\text{II.132})$$

$$\text{où : } \{\varepsilon_f\}^T = \left\{ \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right\}$$

$$\text{et} \quad U_c^e = \frac{1}{2} \int_A \{\underline{\gamma}\}^T [D_c] \{\underline{\gamma}\} dA \quad (\text{II.133})$$

$$\text{où : } \{\underline{\gamma}\}^T = \left\{ \underline{\gamma}_{xz} \quad \underline{\gamma}_{yz} \right\}$$

$\underline{\gamma}_{xz}$  et  $\underline{\gamma}_{yz}$  : Sont les déformations indépendantes ou de substitution. Les relations habituelles. :

$$\underline{\gamma}_{xz} = \gamma_{xz} \text{ et } \underline{\gamma}_{yz} = \gamma_{yz} \text{ avec } \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \text{ et } \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \text{, sont exprimées sous forme discrète}$$

(collocation ou intégrale) pour obtenir  $U_c^e$  en fonction des variables nodales  $\{u_n\}$  :

#### a. Collocation :

- En un point «  $s_i$  » :  $\gamma_{sz} \equiv \underline{\gamma}_{sz}$  avec  $\gamma_{sz} = \frac{\partial w}{\partial s} + \theta_s$
- En un point  $(\xi_i, \eta_j)$  situé à l'intérieur de l'élément :  $\gamma_{\xi z} \equiv \underline{\gamma}_{\xi z}$  et  $\gamma_{\eta z} \equiv \underline{\gamma}_{\eta z}$  avec  $\gamma_{\xi z} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \theta_\xi$  et  $\gamma_{\eta z} = \frac{\partial w}{\partial \eta} + \theta_\eta$

#### b. Forme intégrale :

- Sur les côtés  $ij$  ( où à l'intérieur des éléments suivant une direction ) :

$$\int_i^j (\gamma_{sz} - \underline{\gamma}_{sz}) ds = 0 \quad (\text{II.134})$$

- Sur l'élément :

$$\int_A (\gamma_{\xi z} - \underline{\gamma}_{\xi z}) dA = \int_A (\gamma_{\eta z} - \underline{\gamma}_{\eta z}) dA = 0 \quad (\text{II.135})$$

**II.5.5.2. Indicateur de blocage :**<sup>[AYA93],[BAT90b]</sup>

Le blocage c'est un phénomène selon lequel le modèle élément fini devient sur-rigide, quand le rapport d'épaisseur ou un autre paramètre approche une valeur limite. Il faut le faire disparaître si on veut obtenir un élément de plaque incluant les effets de cisaillement transverse.

Si  $[K_c]$  est singulière, l'importance du cisaillement diminue. Cependant le rang de  $[K_c]$  devra être suffisant pour assurer une représentation acceptable des relations du modèle de Kirchhoff :

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y = 0 \quad (\text{II.136})$$

On peut introduire un indicateur de blocage, noté ici  $C_b$  :

$$C_b = \frac{N_{eq}}{\text{Rang}[K_c]} \quad (C_b \geq 1) \quad (\text{II.137})$$

$N_{eq}$  : est le nombre d'équations de la matrice globale  $[K]$  du problème à résoudre.

- Si  $C_b = 3/2$ , il ne semble pas y avoir de risque de blocage en cisaillement transversal. (Une explication heuristique est qu'en chaque point du milieu il y a trois variables cinématiques  $w, \theta_x$  et  $\theta_y$  pour deux variables de cisaillement transversal, soit  $Q_x, Q_y$  ou  $\gamma_{xz}$  et  $\gamma_{yz}$ ).

- Si  $C_b = 1$  il y a blocage.

**Remarque :**

- $N_{eq}$  et le Rang $[K_c]$  sont définis après la prise en compte des conditions aux limites (encastrement).
- Il n'est pas nécessaire que  $C_b$  soit égal à 3/2 pour que l'élément soit acceptable.
- Quelques exemples de la valeur de l'indicateur de blocage et le mode parasite situés dans le tableau suivant :

		Q4	Q8	Q9	Hétérosis
Intégration Exacte	Modes parasites	0	0	0	3
	$C_b$	1	1	12/11	/
Intégration réduite	Modes parasites	4	1	4	/
	$C_b$	3/2	9/8	12/8	/
Intégration sélective	Modes parasites	2	0	1	0
	$C_b$	3/2	9/8	12/8	/

**Tableau(II.1) :** Indicateur  $C_b$  pour différents éléments<sup>[BAT90b]</sup>

### II.5.5.3. Élément à quatre nœuds avec CT constant par côté ( $Q4\gamma$ ) : <sup>[BAT90b]</sup>

Considérons un élément quadrilatéral à 4 nœuds avec une approximation bilinéaire de la géométrie (  $x$  et  $y$  ) et de  $w, \theta_x, \theta_y$ . Qui tient compte l'influence des déformations de cisaillement transversal constant par côté.

L'idée de base pour la formulation de cet élément est de transformer la matrice des déformations de CT  $[B_c]$  de telle façon à avoir la même approximation pour les rotations que pour le déplacement transversal.

La matrice de rigidité de flexion est définie sous la forme :

$$[K_f] = \int_A [B_f]^T [D_f] [B_f] dA \quad (\text{II.138})$$

et celle de cisaillement transversal est définie par :

$$[K_c] = \int_A [B_c]^T [D_c] [B_c] dA \quad (\text{II.139})$$

Où la matrice  $[B_c]$  est définie de manière que les approximations de  $\gamma_{\xi z}$  et  $\gamma_{\eta z}$  soient les mêmes

que celles de  $\frac{\partial w}{\partial \xi}$  et de  $\frac{\partial w}{\partial \eta}$  donc :

$$\{\gamma_\xi\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \theta_\xi \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} + \theta_\eta \end{Bmatrix} = [B'_\xi] \{u_{n\xi}\} \quad (\text{II.140})$$

$$\langle u_{n\xi} \rangle = \langle \dots w_i \quad \theta_{\xi i} \quad \theta_{\eta i} \dots \rangle \quad i = 1, 4$$

Considérons  $\gamma_\xi (\equiv \gamma_{\xi z})$  et  $\gamma_\eta (\equiv \gamma_{\eta z})$  constants sur chaque côté de l'élément ( ou  $\gamma_\xi$  et  $\gamma_\eta$  évalués aux milieux des côtés ) :

On prend par exemple sur le Coté 1-2, d'après l'équation (II.134) nous avons :

$$\int_{-1}^{+1} \gamma_{\xi z} d\xi = \int_{-1}^{+1} (w_{,\xi} + \theta_\xi) d\xi \quad (\text{II.141})$$

En supposant que, l'interpolation du déplacement est linéaire suivant la direction  $\xi$  et suivant  $\eta$  :

- Pour la direction  $\xi$  :

$$w = \frac{1-\xi}{2} w_i + \frac{1+\xi}{2} w_j \quad \text{donc} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{1}{2} (w_j - w_i) \quad \text{et} \quad \theta_\xi = \frac{1-\xi}{2} \theta_{\xi i} + \frac{1+\xi}{2} \theta_{\xi j}$$

Et pour la direction  $\eta$  c'est la même chose.

On trouve après la substitution dans l'équation (II.141) :  $\int_{-1}^{+1} \gamma_{\xi z} d\xi = 2\gamma_{\xi z}^{A1}$

(  $\gamma_{\xi z}, \gamma_{\eta z}$  sont constantes sur les côtés )

$$\int_{-1}^{+1} (w_{,\xi} + \theta_{\xi}) d\xi = (w_2 - w_1) + \theta_{\xi 1} + \theta_{\xi 2} \quad (\text{II.142})$$

Donc dans la base  $\xi$  la longueur du côté 12 est égale à 2.

$$\gamma_{\xi}^{A1} = \frac{1}{2}(w_2 - w_1 + \theta_{\xi 1} + \theta_{\xi 2}) \text{ côté 1-2} \quad (\text{II.143})$$

$$\gamma_{\xi}^{A2} = \frac{1}{2}(w_3 - w_4 + \theta_{\xi 3} + \theta_{\xi 4}) \text{ côté 3-4} \quad (\text{II.144})$$

$$\gamma_{\eta}^{B1} = \frac{1}{2}(w_4 - w_1 + \theta_{\eta 1} + \theta_{\eta 4}) \text{ côté 1-4} \quad (\text{II.145})$$

$$\gamma_{\eta}^{B2} = \frac{1}{2}(w_3 - w_2 + \theta_{\eta 2} + \theta_{\eta 3}) \text{ côté 2-3} \quad (\text{II.146})$$

Dans cet élément l'énergie de déformation de cisaillement transversal sous la forme :

$$U_c^e = \frac{1}{2} \int \{\underline{\gamma}\}^T [D_c] \{\underline{\gamma}\} dA \quad (\text{II.147})$$

avec  $\{\underline{\gamma}\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi} \\ \gamma_{\eta} \end{Bmatrix}$

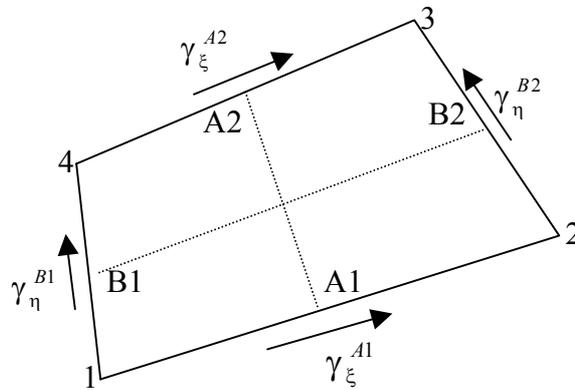


Figure (II.9) : Elément  $Q4\gamma$  [BAT90b]

Et on définit les déformations  $\begin{Bmatrix} \gamma_{\xi} \\ \gamma_{\eta} \end{Bmatrix}$  en un point  $\xi, \eta$  par :

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\xi} \\ \gamma_{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1-\eta}{2} \gamma_{\xi}^{A1} + \frac{1+\eta}{2} \gamma_{\xi}^{A2} \\ \frac{1-\xi}{2} \gamma_{\eta}^{B1} + \frac{1+\xi}{2} \gamma_{\eta}^{B2} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.148})$$

Et on relie  $\left\{ \underline{\gamma}_{-\xi} \right\}$  à  $\left\{ \gamma_{\xi} \right\}$  le long de chaque côté sous la forme :

$$\int_{-1}^{+1} \left( \underline{\gamma}_{-\xi z} - \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} + \theta_{\xi} \right) \right) d\xi = 0 \text{ côtés 12 et 34} \quad (\text{II.149})$$

$$\int_{-1}^{+1} \left( \underline{\gamma}_{-\eta z} - \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} + \theta_{\eta} \right) \right) d\eta = 0 \text{ côtés 23 et 41} \quad (\text{II.150})$$

En trouve finalement :

$$\underline{\gamma}_{-\xi z} = \frac{1-\eta}{2} \left[ \frac{1}{2}(w_2 - w_1) + \theta_{\xi 2} + \theta_{\xi 1} \right] + \frac{1+\eta}{2} \left[ \frac{1}{2}(w_3 - w_4) + \theta_{\xi 3} + \theta_{\xi 4} \right] \quad (\text{II.151})$$

$$\underline{\gamma}_{-\eta z} = \frac{1-\xi}{2} \left[ \frac{1}{2}(w_4 - w_1) + \theta_{\eta 4} + \theta_{\eta 1} \right] + \frac{1+\xi}{2} \left[ \frac{1}{2}(w_3 - w_2) + \theta_{\eta 3} + \theta_{\eta 2} \right] \quad (\text{II.152})$$

donc :

$$\underline{\gamma}_{-\xi z} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi} w_1 - \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \theta_{\xi 1} + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} w_2 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \theta_{\xi 2} + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} w_3 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \theta_{\xi 3} + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} w_4 - \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \theta_{\xi 4} \quad (\text{II.153})$$

$$\underline{\gamma}_{-\eta z} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta} w_1 - \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \theta_{\eta 1} + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} w_2 - \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \theta_{\eta 2} + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} w_3 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \theta_{\eta 3} + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} w_4 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \theta_{\eta 4} \quad (\text{II.154})$$

$$\text{où :} \quad N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) \quad (\text{II.155})$$

$$\text{donc :} \quad \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(\xi_i)(1 + \eta \eta_i) \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(\eta_i)(1 + \xi \xi_i)$$

$$\text{Pour } i = 1 \quad \xi_i = -1 \text{ et } \eta_i = -1 : \quad \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(\eta - 1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_1}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(\xi - 1) \quad (\text{II.156})$$

$$\text{Pour } i = 2 \quad \xi_i = +1 \text{ et } \eta_i = -1 : \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi) \quad (\text{II.157})$$

$$\text{Pour } i = 3 \quad \xi_i = +1 \text{ et } \eta_i = +1 : \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(\eta + 1) \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(\xi + 1) \quad (\text{II.158})$$

$$\text{Pour } i = 4 \quad \xi_i = -1 \text{ et } \eta_i = +1 : \quad \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 + \eta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi) \quad (\text{II.159})$$

Donc on peut écrire les équations ((II.153) et (II.154)) sous la forme matricielle comme suit :

$$\left\{ \gamma_{\xi} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \xi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \eta_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dots \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \vdots \\ w_i \\ \theta_{\xi i} \\ \theta_{\eta i} \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (\text{II.160})$$

$$\text{donc : } \quad \{\gamma_\xi\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\eta z} \end{Bmatrix} = [B'_\xi] \{u_{n\xi}\} \quad (\text{II.161})$$

$$\text{où } \quad [B'_\xi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \xi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & 0 & \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & 0 & \eta_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \dots \end{bmatrix} \quad \xi_i, \eta_i = \pm 1 \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \theta_{\xi i} \\ \theta_{\eta i} \end{Bmatrix} = [J^i] \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.162})$$

$$\text{Ainsi } \quad \{\gamma_\xi\} = [B_\xi] \{u_n\} \quad \langle u_n \rangle = \langle \dots \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \dots \rangle \quad (\text{II.163})$$

$$[B_\xi] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \xi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} J_{11}^i & \xi_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} J_{12}^i & \dots \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \eta_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} J_{21}^i & \eta_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} J_{22}^i & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{II.164})$$

d'où finalement :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \{\gamma_\xi\} = [B_c] \{u_n\} \quad (\text{II.165})$$

$$\text{avec } [B_c] = [J]^{-1} [B_\xi]$$

La matrice  $[K_c]$  est évaluée par un schéma de Gauss de type 2x2. le rang de  $[K]$  est 9, il n'y a pas de mode parasite et ainsi pas de risque de blocage en cisaillement transversal.

Tout cette théorie illustrant l'élément  $Q4\gamma$  est traduite en un sous-programme, dit ELEM08 pour calculé la matrice de rigidité et RESMPAQ pour calculé les efforts résultants.

## II.6. Intégration numérique :<sup>[IMB84],[TOU81],[FRA01],[COF01]</sup>

Dans la solution numérique des problèmes de la mécanique des solides et structures, on est fréquemment amené à devoir évaluer des intégrales, telles que :  $\int_{x1}^{x2} f(x)dx$ ,  $\int_{y1}^{y2} \int_{x1}^{x2} f(x,y)dxdy$  ...etc

Souvent il est difficile ou impossible pour certains types de problème (c'est le cas des problèmes axisymétriques au voisinage de l'axe de révolution, ou dans le cas d'élément d'ordre élevé, ou isoparamétriques courbés) de trouver les expressions exactes de ces intégrales. On peut alors les évaluer de manière approchée par une intégration numérique.

Pour cela, réitérons dans cette partie la notion d'intégration numérique par la méthode de Gauss adoptée dans le programme et sui est la plus utilisée vu ses avantages.

Dans le cas d'une seule dimension d'espace, on souhaite intégrer une fonction  $f(r)$  sur un intervalle de référence, par exemple  $[-1, 1]$  :

$$I = \int_{-1}^1 f(r) dr = \sum_{i=1}^n w_i \cdot f(r_i) \quad (\text{II.166})$$

Où  $w_i$  représente les coefficients de pondération et  $r_i$  les positions des points d'intégration.

Pour des problèmes bidimensionnels, la formule de Gauss est la suivante (sur un intervalle de référence, par exemple  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ) :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r, s) dr ds = \sum_i \sum_j w_i w_j \cdot f(r_i, s_j) \quad (\text{II.167})$$

Le tableau (II.2) donne la position des points d'intégration et les coefficients de pondération des cinq premiers points de Gauss-Legendre.

N <sub>br</sub>	$\pm \xi_i$	$w_i$
2	0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	0.00000 00000 00000 0.77459 66692 41483	0.88888 88888 88888 0.55555 55555 55555
4	0.33998 10435 84856 0.86113 63115 94053	0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454
5	0.00000 00000 00000 0.53846 93101 05683 0.90617 98459 38664	0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189

**Tableau (II.2) :** Points d'intégration et coefficients de pondération de Gauss<sup>[FRA01]</sup>

### Ordre d'intégration :<sup>[IMB84]</sup>

Le choix de point d'intégration est d'une importance en pratique, car d'une part, le coût d'analyse augmente si un ordre d'intégration élevé est utilisé et d'autre part, en utilisant un ordre d'intégration réduit, les résultats obtenus peuvent être sérieusement affectés.

Il y a par ailleurs pour chaque type d'élément un ordre d'intégration minimal nécessaire pour assurer la convergence. On peut, en effet, montrer que la convergence des éléments calculés par intégration numérique est satisfaisante si l'ordre d'intégration est suffisant pour calculer de façon exacte le volume de l'élément.

Le choix d'un nombre minimal de points d'intégration peut être recommandé, d'où la terminologie intégration réduite ( par rapport à l'ordre maximal ), pour justifier cette assertion, il faut noter que l'utilisation de l'intégration réduite évite le phénomène de blocage ( verrouillage ) apparaît quand on utilise l'intégration numérique exacte, l'intégration réduite permet d'obtenir des éléments isoparamétriques simples et performants dans le cas de plaques avec cisaillement transverse et évite le blocage observé avec l'intégration exacte pour la plupart des éléments. Pour

améliorer encore les éléments, on pourra utiliser une technique d'intégration sélective qui consiste à utiliser l'intégration réduite pour évaluer la matrice de rigidité associée à l'énergie de cisaillement afin de soulager ses effets contraignants et pour le reste des termes, l'intégration exacte sera employée pour tenter de conserver les exigences d'ensemble des matrices de rigidité (Tableau (II.3)). Pour notre problème de flexion avec cisaillement transversal on utilisera l'intégration exacte pour une énergie de flexion pure et l'intégration réduite pour l'énergie de cisaillement.

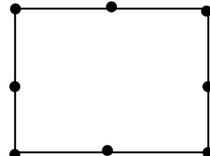
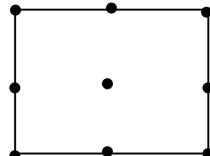
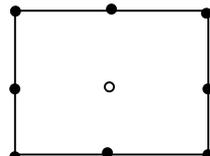
Type d'élément	La règle d'intégration			Contraintes de cisaillement	Nombre de mécanisme
	Type	$K_f$	$K_c$		
 Linéaire 4 Nœuds 12 d.d.l	Réduite :	1x1	1x1	2	4
	Sélective :	2x2	1x1	2	2
	Exacte :	2x2	2x2	8	0
 Serendip Quadratique 8 Nœuds 24 d.d.l	Réduite :	2x2	2x2	8	1
	Sélective :	3x3	2x2	8	0
	Exacte :	3x3	3x3	18	0
 Lagrange Quadratique 9 Nœuds 27 d.d.l	Réduite :	2x2	2x2	8	4
	Sélective :	3x3	2x2	8	1
	Exacte :	3x3	3x3	18	0
 Hétérosis Quadratique 9 Nœuds 26 d.d.l	Sélective :	3x3	2x2	8	0

Tableau (II.3) : Lois d'intégration pour les plaques de Mindlin<sup>[IMB84]</sup>

**Remarque :**

L'élément Hétérosis avec intégration sélective ne présente aucun mécanisme (mode parasite).

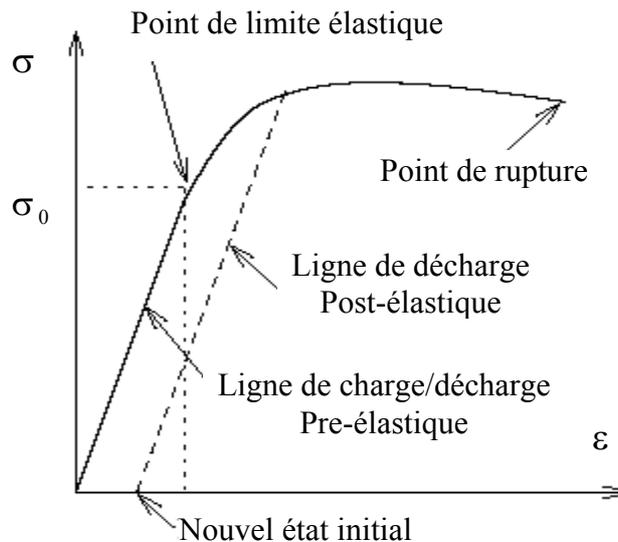
En général on peut dire que les éléments de Mindlin sont applicables pour les plaques épaisses et minces mais quand traiter l'élément mince de la plaque de Mindlin peut être moins précis que des éléments de Kirchhoff, ce qui ne permet pas la déformation transversale de cisaillement.

## CHAPITRE III : THEORIE D'ELASTO-PLASTICITE

### III.1. Introduction :

#### Un aperçu du comportement des matériaux réels :<sup>[GAR01c]</sup>

Si on fait une expérience de traction sur un matériau ( l'acier par exemple ), on constate que, tant que les efforts de traction ne dépassent pas une certaine limite, la relation contrainte-déformation reste linéaire. Cependant au-delà du seuil, on constate que la linéarité et la mémoire de la configuration initiale sont perdues : le matériau a une loi de comportement différente.



**Figure(III.1) :** Courbe  $\sigma_{11} = f(\epsilon_{11})$  dans un essai de traction<sup>[GAR01c]</sup>

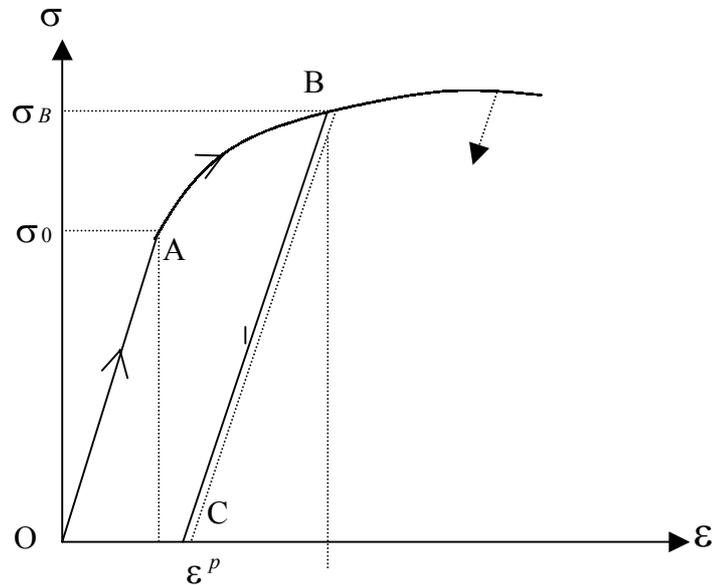
La figure (III.1) Montre l'allure du comportement d'un acier dans un essai de traction sur une éprouvette, dans un plan déformation-contrainte. On y constate clairement deux comportements :

- Tant qu'on reste en dessous du point de limite élastique, le comportement reste élastique, c'est à dire que la courbe de décharge est confondue avec la courbe de charge. Quand le chargement redevient nul, l'éprouvette retrouve donc sa forme initiale.
- Par contre, si le chargement dépasse la limite élastique, et si on décharge ensuite l'éprouvette, on constate qu'on revient à un autre état : le matériau a perdu la mémoire de son état initial et se comporte comme si l'état initial était changé.

### III.2. Domaines d'élasticité :<sup>[BER87]</sup>

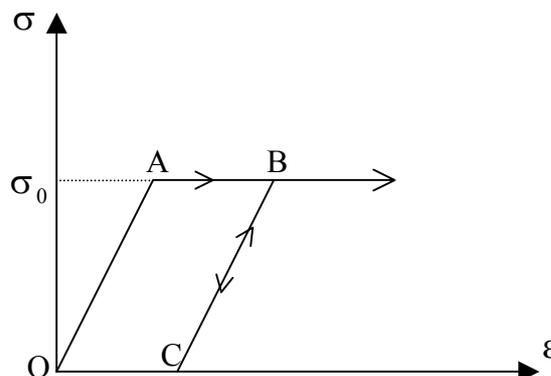
L'expérience est effectuée à vitesse de déformation fixée. On constate l'existence d'un seuil pour la contrainte, soit  $\sigma_0$ , à partir duquel le comportement du matériaux devient irréversible, l'éprouvette ayant été chargée au-delà de  $A$  jusqu'en  $B$ , on effectue une décharge : celle-ci suit sur le diagramme le chemin  $BC$  et non le trajet  $BAO$ . En particulier, on note qu'après décharge totale, il reste une déformation de l'éprouvette représentée par  $OC$  sur la figure (III.2) : cette déformation permanente est la déformation « plastique ». On procède alors à une nouvelle

charge : tant que la contrainte reste inférieure à  $\sigma_B$  celle-ci s'effectue en suivant le trajet  $CB$  identique, au sens de parcours près, à celui décrit lors de la décharge ; Le comportement demeure réversible tout au long de  $CB$ . Quand  $\sigma$  dépasse  $\sigma_B$ , le point figuratif suit la courbe de première charge au-delà de  $B$ , c'est-à-dire la courbe représentant la traction sans décharge. Ainsi lors de la nouvelle charge effectuée à partir de  $C$ ,  $\sigma_B$  apparaît comme le nouveau seuil en traction.



**Figure (III.2) :** *Expérience de traction simple pour un matériau écrouissable*<sup>[BER87]</sup>

Le phénomène observé à la figure (III.2), où la limite actuelle d'élasticité  $\sigma_B$  effectivement une fonction de  $\epsilon^p$ , correspond au cas du matériau dit écrouissable, on précise même dans certains cas « *matériau à écrouissage positif* » pour traduire le fait que le seuil de plasticité est une fonction croissante de  $\epsilon^p$ . Ce phénomène, quoique le plus répandu, n'est pas général pour le comportement plastique. Ainsi la figure (III.3) représente le diagramme relevé dans le cas de l'expérience de traction simple effectuée sur une éprouvette d'acier doux : on constate que celui-ci présente un palier pour des déformations ( palier plastique illimité ) et l'on dit que le matériau correspondant est élastique et parfaitement plastique.

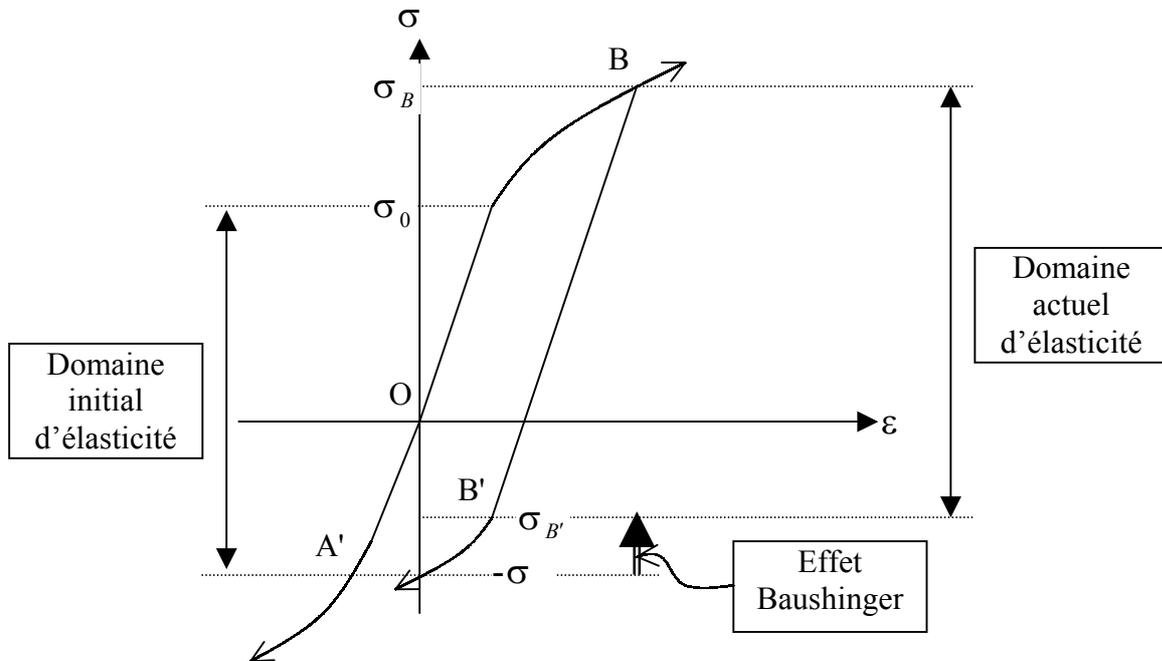


**Figure (III.3) :** *Matériau élastique parfaitement plastique ( Acier Doux )*<sup>[BER87]</sup>

**Remarque :**

Pour le modèle élastique parfaitement plastique, la contrainte ne peut dépasser la valeur  $\sigma_0$  et, lorsqu'elle atteint cette valeur il y a possibilité d'allongement illimité.

On revient maintenant à l'expérience de traction simple dans le cas du matériaux écrouissable, après la décharge suivant  $BC$  on sollicite la même éprouvette en compression figure (III.4).



**Figure (III.4) :** Expérience de traction-compression : effet Baushinger<sup>[BER87]</sup>

On constate alors que la limite d'élasticité en compression, initialement égale  $-\sigma_0$ , se trouve ramenée à la valeur  $\sigma_{B'}$ , supérieure (algébriquement) à  $-\sigma_0$ . Autrement dit, l'écrouissage en traction qui correspond à un relèvement de la limite d'élasticité en traction, s'accompagne d'une diminution (en valeur absolue) de la limite d'élasticité en compression. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Baushinger. Le segment  $[-\sigma_0, \sigma_0]$  définit le domaine initial d'élasticité du matériau en traction-compression simple tandis que le segment  $[-\sigma_{B'}, \sigma_B]$  définit le domaine actuel d'élasticité après écrouissage en traction simple jusqu'à la valeur  $\sigma_{B'}$ .

### III.3. Domaine plastique :<sup>[BER87]</sup>

La plasticité des matériaux est caractérisée par l'apparition des déformations élastiques et des déformations irréversibles, qui se manifestent lorsque la contrainte atteint un certain seuil. L'essai classique de traction sur une éprouvette d'un matériau ayant un comportement élasto-plastique avec écrouissage (Figure (III.2)) permet de mettre en évidence la non-linéarité et le phénomène d'irréversibilité caractérisant le comportement plastique. L'effet du temps est

supposé négligeable. La déformation totale est la somme des déformations élastique et plastique. Le point  $A$  est appelé le seuil de plasticité initial.

Lors d'une recharge  $CB$ , la plastification réapparaît à partir du point de décharge  $B$ , qui définit le seuil de plasticité actuel.

### III.3.1. Notion de surface de charge :

Dans le cas de sollicitation multiaxiale, le seuil de plasticité est remplacé par une surface caractérisée par une fonction scalaire appelée fonction de charge.

$$F(\sigma, R) = 0 \quad (\text{III.1})$$

Avec  $\sigma$  : Tenseur des contraintes

$R$  : L'ensemble des paramètres « cachés » ou « d'écrouissage ».

Cette fonction décrit dans l'espace des contraintes, une surface dite surface de charge ou d'écoulement, la position de cette surface dépend de la valeur instantanée du paramètre d'écrouissage :

Pour  $F < 0$  : C'est l'intérieur de la surface, ce domaine est élastique.

Pour  $F = 0$  : Plastification.

Pour  $F > 0$  : Est un état de contraintes physiquement impossibles en élasto-plasticité.

### III.3.2. Modélisation du comportement élasto-plastique :<sup>[BER87],[LEM91],[BEN03]</sup>

Le comportement réel est modélisé soit par la courbe élasto-plastique parfaite (sans effet Baushinger, figure (III.5.a), soit par celle avec écrouissage ( linéaire ou non ) et donc un module élasto-plastique tangent  $E^{ep}$  linéaire ou non (figure (III.5.b)). Ce dernier cas est plus général :

Donc si  $E^{ep} = 0$  c'est le cas de l'élasto-plasticité parfaite, si  $E^{ep} > 0$  c'est le durcissement ( écrouissage positif ) et si  $E^{ep} < 0$  c'est l'adoucissement (écrouissage négatif).

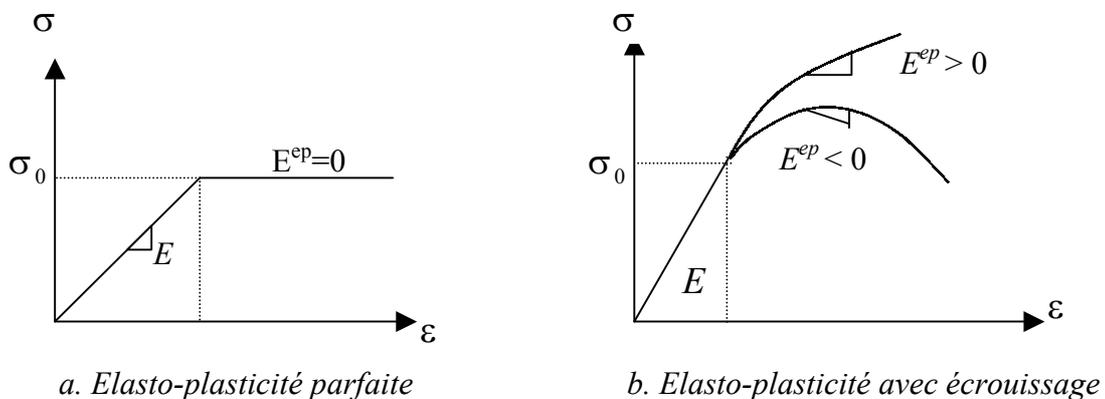


Figure (III.5) : Modélisation du comportement élasto-plastique<sup>[BER87]</sup>

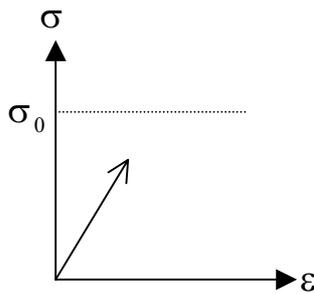
### III.4. Théorie incrémentale de plasticité uniaxiale :

#### III.4.1. Essai de traction : <sup>[OUD01]</sup>

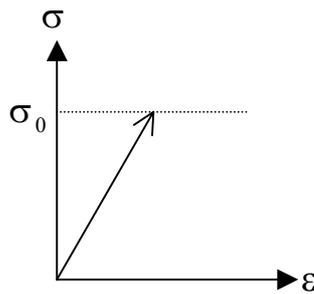
Intéressons nous à l'aspect phénoménologique de l'essai dans le cadre de l'élasto-plasticité classique ( quasi-statique, petites déformations, température constante ).

Considérons une éprouvette de traction, cette éprouvette est soumise à un effort de traction.

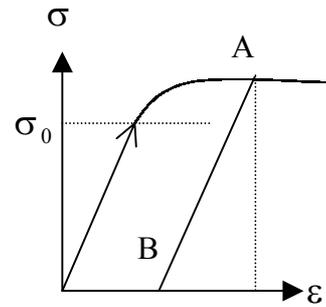
Considérons les graphes  $(\sigma, \varepsilon)$  obtenus pour trois essais de traction avec décharge. Selon le niveau de sollicitation appliqué lors du chargement nous obtenons les allures suivantes :



**Figure (III.6.a) : Essai 1**  
 $\sigma < \sigma_0$



**Figure (III.6.b) : Essai 2**  
 $\sigma = \sigma_0$



**Figure (III.6.c) : Essai 3**  
 $\sigma > \sigma_0$

Essai 1  $\sigma < \sigma_0$  : On est dans le domaine élastique, le comportement du matériau est réversible.

Nous considérons par la suite que la loi de comportement dans le domaine élastique est linéaire.

Essai 2  $\sigma = \sigma_0$  : Cet essai est impossible à réaliser physiquement. La limite d'élasticité ( $\sigma_0$ ), seuil à partir duquel il existe des déformations irréversibles, est définie de façon conventionnelle, elle correspond à un pourcentage de déformation permanente.

Essai 3  $\sigma > \sigma_0$  : La décharge à partir du point A ( chargement maximum) s'effectue parallèlement à la charge élastique, on parle de décharge élastique. En B ( charge nulle ) il ne reste que la déformation plastique ou déformation permanent  $\varepsilon^p$ .

#### III.4.2. Critère d'épuisement :

Le critère d'épuisement dans le cas uniaxiale ( traction simple ) est atteint quand la contrainte  $|\sigma|$  atteint  $\sigma_0$ .

Donc on peut écrire :

$$|\sigma| - \sigma_0 = F(\sigma, \sigma_0) = 0 \quad (\text{III.2})$$

Où  $\sigma_0$  : la limite élastique initiale.

$\sigma$  : la contrainte courante.

**III.4.3. Règle d'écrouissage :**

Cette règle doit donner la limite élastique actuelle  $\sigma_B$  et décrire l'effet Bauschinger.

Différentes idées ont été proposées pour donner l'évolution du seuil qui regroupent :

- L'écrouissage isotrope
- L'écrouissage cinématique
- L'écrouissage mixte ( isotrope et cinématique )

**III.4.3.1. Ecrouissage isotrope :** <sup>[MAR02],[LEM91]</sup>

L'hypothèse de l'écrouissage isotrope est une expansion uniforme du domaine élastique, c'est-à-dire une modification du seuil du patin avec les déformations plastiques. Prenons un matériau avec des limites élastiques en compression et traction identique avant toute histoire de sollicitation. Appliquons maintenant au matériau une traction qui le porte dans le domaine plastique. On a vu que la limite élastique en traction se trouve augmentée. Si on décharge, la limite élastique a changé de la même valeur, on est en présence d'un écrouissage isotrope schématisé par la figure (III.7.a).

D'autre terme si on décharge et on inverse le chargement à partir du point  $B$ , l'écoulement plastique dans l'autre sens commencera à la contrainte  $-\sigma_B$ . Donc il y a une symétrie par rapport à l'axe  $\sigma = 0$  ( point  $O$  ), cela s'exprime par :

$$F(\sigma, \sigma_B) = |\sigma| - \sigma_B = 0 \quad (\text{III.3})$$

où  $\sigma_B$  est la limite élastique actuelle ( dépend de la déformation plastique  $\varepsilon^p$  (Figure (III.7.b)).

$$\sigma_B = \sigma_0 + \int |H \cdot d\varepsilon^p| \quad (\text{III.4})$$

avec :

$H$  : caractéristique du matériau qu'on détermine expérimentalement ( module d'écrouissage ).

**Remarques :**

- Il se peut que la limite élastique soit plus faible en compression qu'en extension. Nous n'avons plus un écrouissage isotrope, c'est ce qu'on appelle l'effet Bauschinger.
- Si  $H$  est constant donc  $\sigma_B = \sigma_0 + H \cdot \varepsilon^p$ .
- En élasto-plasticité parfaite  $H = 0$  donc  $\sigma_B = \sigma_0$ .

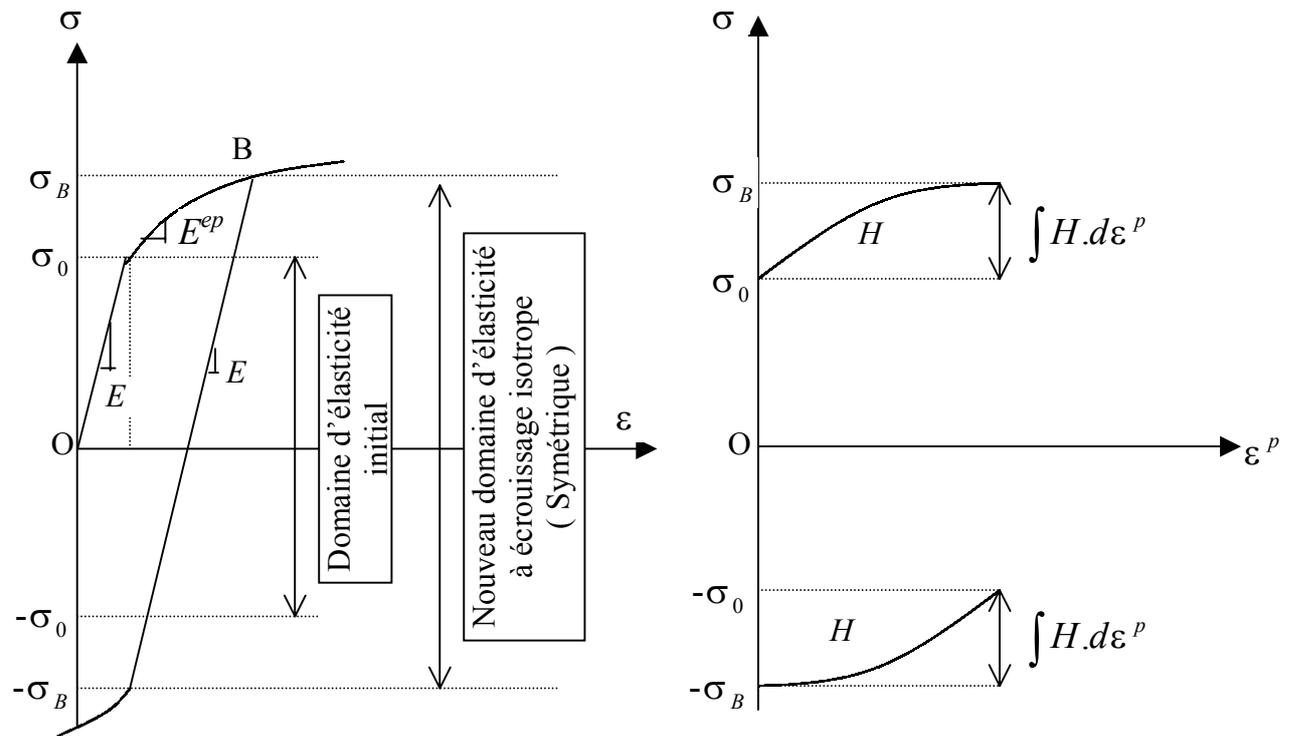


Figure (III.7.a) : Ecroissage isotope<sup>[BEN03]</sup>

Figure (III.7.b) : Limite élastique actuelle en fonction de  $\epsilon^p$  [BEN03]

### III.4.3.2. Ecroissage cinématique :<sup>[MAR02],[LEM91]</sup>

L'écroissage cinématique modifie la position du domaine élastique mais pas l'amplitude du domaine élastique ( $2\sigma_0$ ), schématisé par la figure (III.8.a). Cela signifie que le segment entre les points limite garde la même dimension mais subit une translation et son centre se déplace d'une distance (contrainte)  $\alpha$ , figures (III.8.b/c). ceci s'exprime par :

$$F(\sigma, \alpha, \sigma_0) = F(\sigma - \alpha, \sigma_0) = F(\bar{\sigma}, \sigma_0) = |\bar{\sigma}| - \sigma_0 = 0 \quad (III.5)$$

où  $\alpha$  : est l'ordonné du centre du segment ( back-stress )

$\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$  : est appelée contrainte réduite.

Suivant la règle de Melan-Prager, on a un écroissage cinématique linéaire. l'ordonné  $\alpha$  peut être déterminée comme suit :

$$d\alpha = c.d\epsilon^p \text{ donc } \alpha = \int c.d\epsilon^p \quad (III.6)$$

avec  $c$  : est une caractéristique du matériau égale à  $H$  si l'écroissage est purement cinématique, figure (III.8.c).

#### Remarque :

Dans l'écroissage cinématique l'effet Bauschinger est maximal car l'augmentation de la limite élastique par écroissage dans un sens est totalement perdue dans l'autre sens.

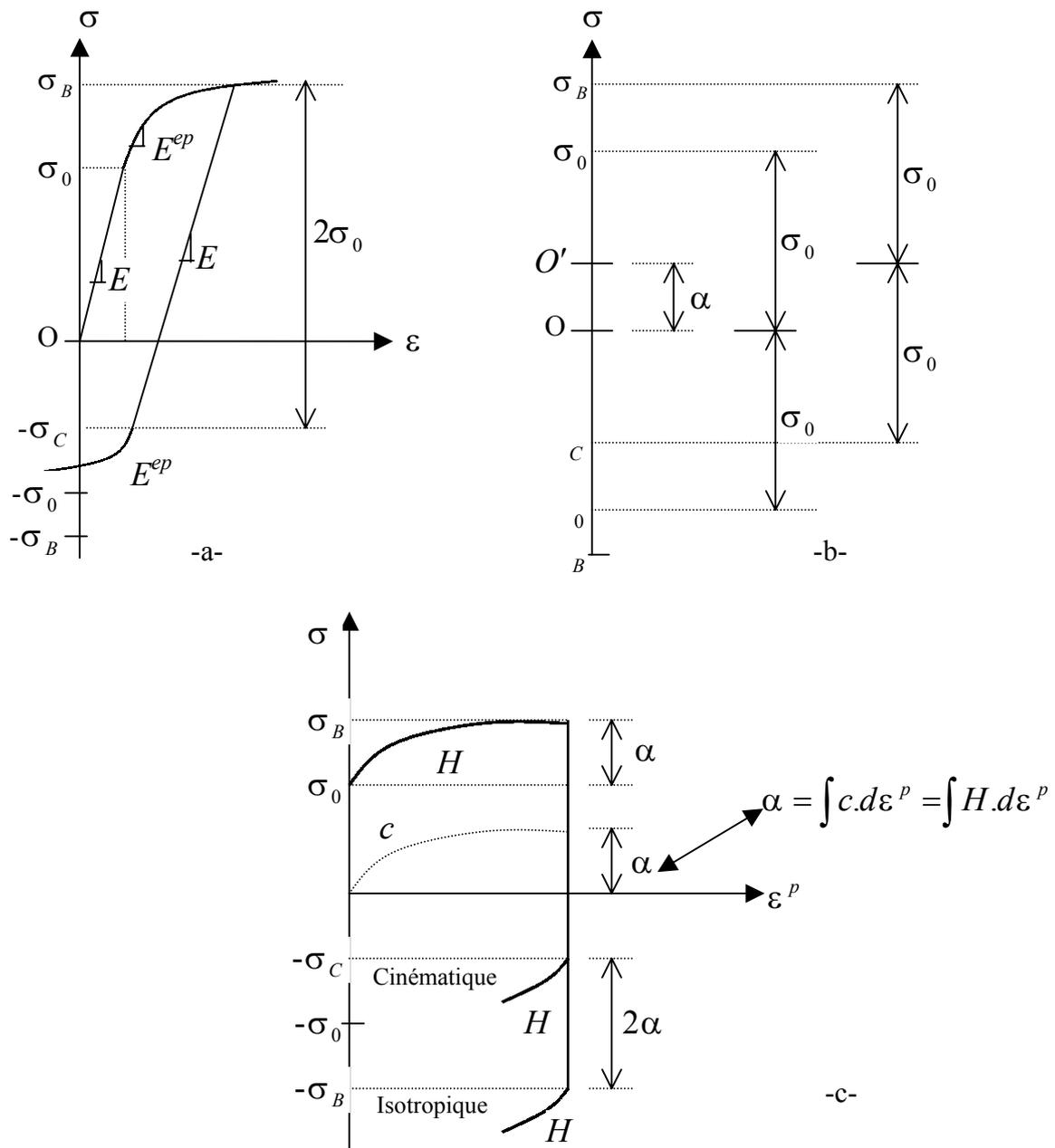


Figure (III.8) : Ecroissage cinématique<sup>[BEN03]</sup>

III.4.3.3. Ecroissage mixte : <sup>[MAR02],[LEM91]</sup>

La combinaison d'un écroissage cinématique et isotrope permet de reproduire certaines caractéristiques rhéologiques importante des matériaux, en particulier l'effet Bauschinger. La figure (III.9) montre un chargement et déchargement obtenus en combinant ces deux effets.

L'expansion du domaine élastique est traduite par  $\Delta\sigma_0$  qu'il est nécessaire de déterminer expérimentalement sur chargement cyclique.

Il est possible de définir :  $p = \frac{\Delta\sigma_0}{\epsilon^p}$  qui définit l'évolution du domaine élastique.

Donc on peut dire que le segment de charge subit une expansion et une translation en même temps, ceci s'exprime par :

$$F(\sigma, \alpha, \sigma_B) = F(\bar{\sigma}, \sigma_B) = |\bar{\sigma}| - \sigma_B = 0 \quad (\text{III.7})$$

Avec :  $\bar{\sigma} = \sigma - \alpha \quad (\text{III.8})$

$$\alpha = (1-M) \int c.d\varepsilon^p \quad (\text{III.9})$$

Et  $\sigma_B = \sigma_0 + M \left| \int H.d\varepsilon^p \right| \quad (\text{III.10})$

Où  $M$  : est le coefficient de mixité tel que  $0 \leq M \leq 1$  dans ce cas les modules d'écrouissage cinématique et isotrope sont différents ( $c \neq H$ ).

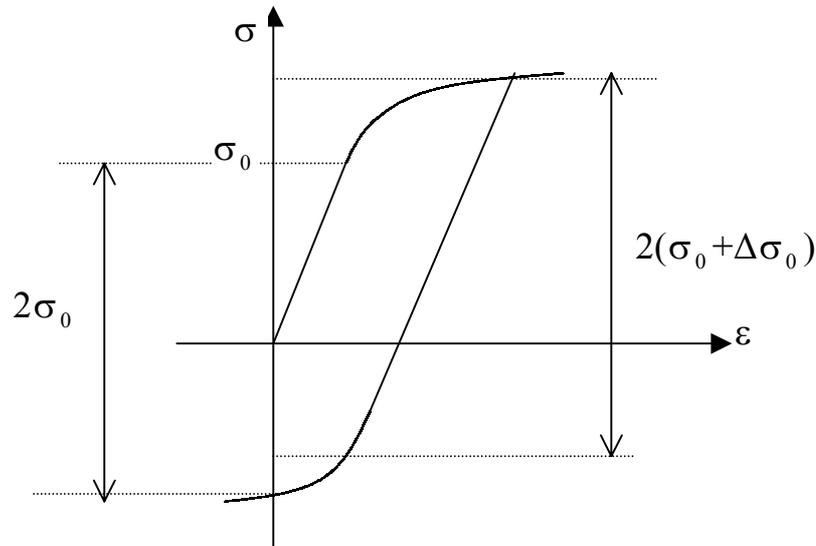


Figure (III.9) : Ecrouissage mixte

#### III.4.4. Règle d'écoulement : <sup>[BER87],[MAR02],[LEM91]</sup>

Il est clair que dès que la limite d'élasticité initiale a été franchie, au cours de l'histoire de charge du matériau, l'apparition des déformations permanentes fait qu'il n'y a plus, comme en élasticité, correspondance biunivoque entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$  : la donnée de  $\sigma$  ne suffit plus à définir  $\varepsilon$ .

En revanche, si l'on connaît non seulement la contrainte actuelle  $\sigma$  mais tout le trajet de charge suivi pour l'atteindre à partir de l'état initial naturel, alors la donnée d'une variation de contrainte  $d\sigma$  suffit à déterminer la variation correspondante de la déformation  $d\varepsilon$ . On dit que la loi de comportement est de type incrémental.

L'incrément total de déformation se compose en général de deux parties : un incrément élastique  $d\varepsilon^e$  et un incrément plastique  $d\varepsilon^p$ .

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (\text{III.11})$$

L'incrément des contraintes  $d\sigma$  est dû aux déformations élastiques et donc :

$$d\sigma = E.d\varepsilon^e \quad (\text{III.12})$$

Donc le module d'élasticité est défini dans chaque état  $(\sigma, \varepsilon)$  par :  $E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^e}$ .

Dans le cas où le point de charge serait à la limite d'élasticité actuelle on définit le « module élasto-plasticité tangent » par la relation :

$$E^{ep} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad \text{donc} \quad : \quad d\sigma = E^{ep} . d\varepsilon \quad (\text{III.13})$$

et le module d'érouissage du matériau étant :

$$H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad \text{donc} \quad : \quad d\sigma = H . d\varepsilon^p \quad (\text{III.14})$$

on a alors la relation évidente :

$$\frac{1}{E^{ep}} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H} \quad (\text{III.15})$$

la relation (III.13) est appelée règle d'écoulement plastique.

#### **a-La relation incrémentale générale :**

L'incrément total des déformations se compose en général de deux parties : un incrément élastique  $d\varepsilon^e$  et un incrément élasto-plastique  $d\varepsilon^{ep}$  ( Figure (III.10) ).

Ce dernier se décompose lui-même en une partie élastique  $d\varepsilon^{e2}$  et une partie purement plastique  $d\varepsilon^p$  :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{e1} + d\varepsilon^{ep} = d\varepsilon^{e1} + d\varepsilon^{e2} + d\varepsilon^p \quad (\text{III.16})$$

L'incrément total des contraintes est dû aux déformations élastiques seulement :

$$d\sigma^e = E . d\varepsilon^{e1} \quad (\text{III.17})$$

La composante de contrainte élasto-plastique  $d\sigma^{ep}$  peut être liée aux déformations élasto-plastiques  $d\varepsilon^{ep}$  (Figure (III.10)) ou plastiques  $d\varepsilon^p$  (Figure (III.7.b)) par :

$$d\sigma^{ep} = E^{ep} d\varepsilon^{ep} \quad (\text{III.18})$$

$$d\sigma^{ep} = H . d\varepsilon^p \quad (\text{III.19})$$

où  $E^{ep}$  : est le module tangent

$H$  : est le module d'érouissage

En élasto-plasticité parfaite :  $E^{ep} = H = 0$

posant :  $d\varepsilon^{e1} = r . d\varepsilon$  et  $d\varepsilon^{ep} = (1-r)d\varepsilon$  avec  $0 \leq r \leq 1$

Et nous avons :  $d\sigma = d\sigma^e + d\sigma^{ep}$

$$\text{Donc} : \quad d\sigma = E d\varepsilon^{e1} + E^{ep} d\varepsilon^{ep} = r E d\varepsilon + (1-r) E^{ep} d\varepsilon = [rE + (1-r)E^{ep}] . d\varepsilon \quad (\text{III.20})$$

La relation incrémentale générale est :

$$d\sigma = E_t . d\varepsilon \quad (\text{III.21})$$

Si  $r = 0$  ;  $E_t = E^{ep}$  Domaine plastique ( charge après épuisement ).

Si  $r = 1$  ;  $E_t = E$  Domaine élastique.

En cas de transition du domaine élastique au domaine plastique :

$$E_t = rE + (1-r)E^{ep} \quad (\text{III.22})$$

### ***b-Algorithmes élasto-plastique uniaxial :***

La méthode utilisée est incrémentale itérative avec une rigidité constante ou variable ( tangente ). Entre deux itérations successives  $i-1$  et  $i$  quatre cas peuvent se présenter selon l'état des contraintes :

Elastique  $\rightarrow$  élastique, alors  $E_t = E.$  ( $r = 1$ )

Elastique  $\rightarrow$  plastique, alors  $E_t = rE + (1-r)E^{ep}.$  ( $0 < r < 1$ )

Plastique  $\rightarrow$  plastique, alors  $E_t = E^{ep}.$  ( $r = 0$ )

Plastique  $\rightarrow$  élastique, alors  $E_t = E.$

Les relations incrémentales infinitésimales précédentes se récrivent en fonction des incréments finis ( $\Delta\varepsilon, \Delta\sigma, \dots$ ).

$\sigma_{i-1}$  et  $\varepsilon_{i-1}$  : Contrainte et déformation obtenues à l'itération  $i-1$  après convergence.

$Y_{i-1}$  et  $\varepsilon_{y(i-1)}$  : Contrainte et déformation de limite élastique à l'itération  $i-1$ .

$\sigma_i$  et  $\varepsilon_i$  : Contrainte et déformation à l'itération  $i$  et qui sont recherchées.

$\sigma_i^e$  : Contrainte fictive à l'itération  $i$  obtenue en supposant un comportement élastique.

La contrainte élastique fictive  $\sigma_i^e$  est calculée systématiquement. Les contraintes à l'itération  $i-1$  sont élastiques si :  $Y_{i-1} > |\sigma_{i-1}|$ .

$$\sigma_i^e = \sigma_{i-1} + E\Delta\varepsilon_i = \sigma_i + E\Delta\varepsilon_i^p \quad (\text{III.23})$$

Avec :  $\Delta\varepsilon_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}$ .

Pour que la contrainte fictive  $\sigma_i^e$  soit égale à la contrainte recherchée  $\sigma_i$  il faut annuler  $E\Delta\varepsilon_i^p$  ( ce terme est considéré comme une contrainte initiale causant une force résiduelle  $\Delta F$  qu'il faut éliminer ).

Les forces résiduelles causées par  $E\Delta\varepsilon_i^p$  sont :

$$\Delta F = \sum_e \int_0^\lambda B^T . E . \Delta\varepsilon^p . A . dx = \sum_e E . \Delta\varepsilon^p . A \quad (\text{III.24})$$

Les forces résiduelles sont égales à la première expression si l'effort normal est variable le long de l'élément et se réduisent à la deuxième expression quand l'effort normal est constant.

Le rapport  $r$  pour une transition élasto-plastique est obtenu par des interpolations :

$$r = \frac{\varepsilon_{y(i-1)} - \varepsilon_{i-1}}{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}} = \frac{Y_{i-1} - |\sigma_{i-1}|}{|\sigma_i^e - \sigma_{i-1}|} = \frac{Y_{i-1} - |\sigma_{i-1}|}{E \Delta \varepsilon_i} \quad (\text{III.25})$$

et nous avons :

$$Y_{i-1} = \sigma_0 + \int_0^{\varepsilon_{i-1}^p} H \cdot |d\varepsilon^p| = \sigma_0 + \sum_{j=0}^{i-1} H \cdot |\Delta \varepsilon_j^p| \quad (\text{III.26})$$

si  $H$  est constante alors :

$$Y_{i-1} = \sigma_0 + H \cdot |\varepsilon_{i-1}^p| \quad (\text{III.27})$$

la déformation plastique totale est calculée par cumul :

$$\varepsilon_i^p = \varepsilon_{i-1}^p + \Delta \varepsilon_i^p \quad (\text{III.28})$$

$$\text{où : } \Delta \varepsilon_i^p = \frac{\Delta \sigma_i^{ep}}{H} = \frac{(1-r)E^{ep} \Delta \varepsilon_i}{H} = \frac{(1-r) \cdot E \cdot \Delta \varepsilon_i}{E+H} = (1-r) \left[ 1 - \frac{E^{ep}}{E} \right] \Delta \varepsilon_i \quad (\text{III.29})$$

ou à partir de (III.23) :

$$\Delta \varepsilon_i^p = \frac{\sigma_i^e - \sigma_i}{E} = \frac{E - E_t}{E} \Delta \varepsilon_i \quad (\text{III.30})$$

L'algorithme est valable dans le cas d'un écrouissage isotrope. En cas d'écrouissage cinématique ou mixte, il faut utiliser les contraintes réduites  $\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$ .

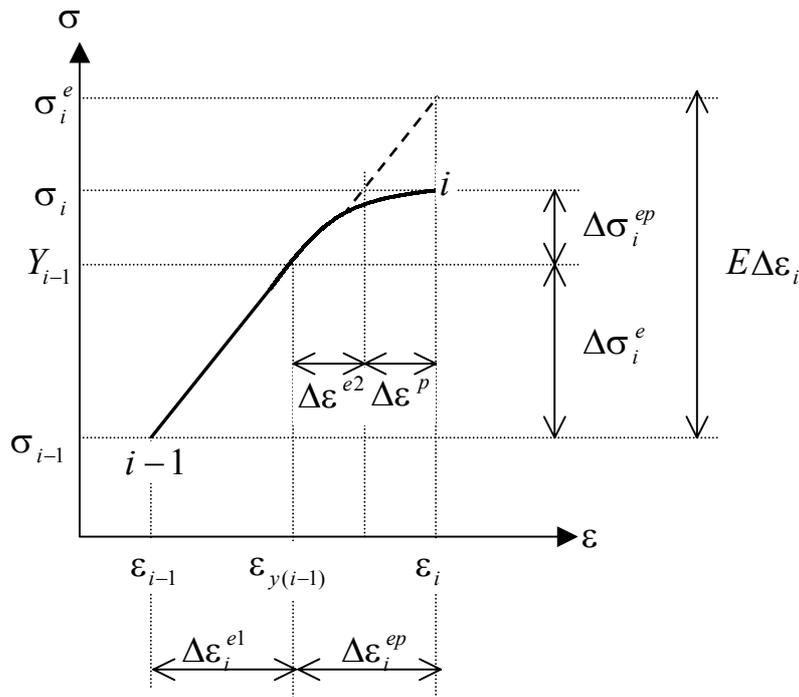


Figure (III.10) : Transition élasto-plastique<sup>[CHA94]</sup>

### III.5. Théorie incrémentale de plasticité multiaxiale :

#### III.5.1. Hypothèses de base :<sup>[GEN99],[MAR02]</sup>

**a. Sur les déformations** : Les déformations étant admises petites, on peut les décomposer additivement en une partie élastique (e) et l'autre plastique (p), la partie élastique étant liée aux contraintes par la loi de Hooke-Cauchy.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad \text{avec : } d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^e \quad (\text{III.31})$$

Où  $d\varepsilon_{ij}^e$  et  $d\varepsilon_{ij}^p$  sont respectivement l'accroissement des déformations élastiques et plastiques. De plus, les déformations plastiques sont supposées incompressibles :  $d\varepsilon_{mm}^p = 0$ .

**b. Sur l'existence de surface de plasticité** : L'état de contrainte peut se présenter par un point dans l'espace à neuf dimensions des contraintes, l'origine en est l'état non contraint de la configuration initiale du corps, et, en son voisinage, existe une zone où un accroissement des contraintes  $d\sigma_{ij}$  ne produit qu'un accroissement élastique des déformations  $d\varepsilon_{ij}^e$  ( $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ ). La frontière de cette zone est la surface de plasticité ou d'écoulement initial, dont on suppose qu'elle existe. Elle se représente par l'équation :

$$F_0(\sigma_{ij}) = 0 \quad (\text{III.32})$$

Un état de contrainte situé à l'intérieur de celle-ci caractérise un état élastique ( $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ ) tandis qu'un point situé sur cette surface définit un état élasto-plastique. Enfin, un point situé à l'extérieur de cette surface est impossible à atteindre.

Lorsque l'écrouissage se produit cette surface (de plasticité) change au fur et à mesure que les déformations plastiques progressent; l'expression mathématique de ces surfaces de plasticité successives s'appelle la fonction de charge (Loading function), elle définit des régions successives dans lesquelles les points représentent des états élastiques et sur la frontière desquelles les points peuvent conduire à des états plastiques; enfin, elle dépend de l'état de contrainte atteint  $\sigma_{ij}$  ; de l'histoire des déformations plastiques  $\varepsilon_{ij}^p$  ; et de l'écrouissage par l'intermédiaire d'un paramètre  $k$ . En résumé :

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = 0 \quad (\text{III.33})$$

cette équation existe, et est telle que (Figure (III.11)).

$F < 0$  : Etat élastique,  $d\sigma_{ij}$  provoque  $d\varepsilon_{ij}^e$  seulement, (c'est l'intérieur de la surface).

$F = 0$  : Etat plastique,  $d\sigma_{ij}$  peut provoquer  $d\varepsilon_{ij}^p$ , (les déformations élastiques peuvent être éventuellement accompagné de déformations plastiques).

$F > 0$  : Etat inadmissible (sans signification).

Lorsque le point représentatif de l'état des contraintes atteint la surface de charge  $F = 0$ , deux cas de comportement élasto-plastique sont possibles :

- La surface de charge n'évolue pas ( modèle élasto-plastique parfait ) et l'expression de la surface de charge ne contient pas de paramètres d'érouissages.
- La surface de charge s'évolue au cours du chargement ( modèle élasto-plastique avec érouissage ).

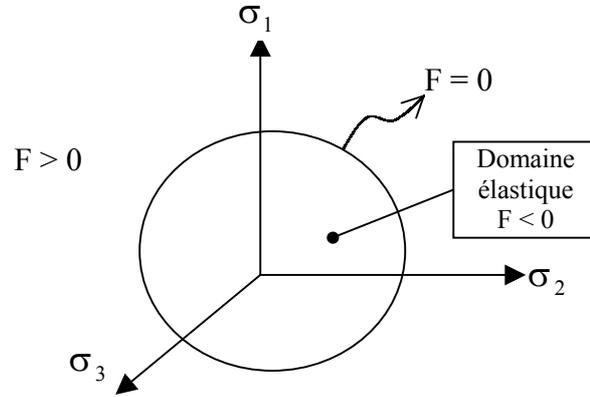


Figure ( III.11 ) : Surface de charge

La valeur particulière  $F = 0$  constitue la condition de plasticité à partir de laquelle on peut définir trois cas de chargement différents, pour un accroissement de sollicitation donné; soit  $dF$  la variation correspondante de la fonction de charge :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial F}{\partial k} dk \quad (\text{III.34})$$

- Si  $dF < 0$  ; alors  $F + dF < 0$  et l'état atteint est élastique; donc  $d\varepsilon_{ij}^p = 0$ ,  $dk = 0$ , et on a un processus de déchargement élastique (unloading)

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (\text{III.35})$$

C'est le cas de décharge et l'incrément de contrainte est dirigé vers l'intérieur du domaine élastique actuel, ( Figure (III.12.b)

- Si  $dF = 0$  et  $d\varepsilon_{ij}^p = 0$  (donc  $dk = 0$ ); Ce processus qui passe d'un état plastique à un autre sans variation des incréments des déformations plastiques est appelé chargement neutre.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (\text{III.36})$$

- Si  $dF > 0$ ;  $d\varepsilon_{ij}^p \neq 0$ ; ce processus fait passer d'un état plastique à un autre et s'appelle chargement (loading), on a pour ce cas :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad (\text{III.37})$$

C'est le cas de chargement et l'incrément de contrainte est dirigé vers l'extérieur du domaine élastique actuel, ( Figure (III.12.a) )

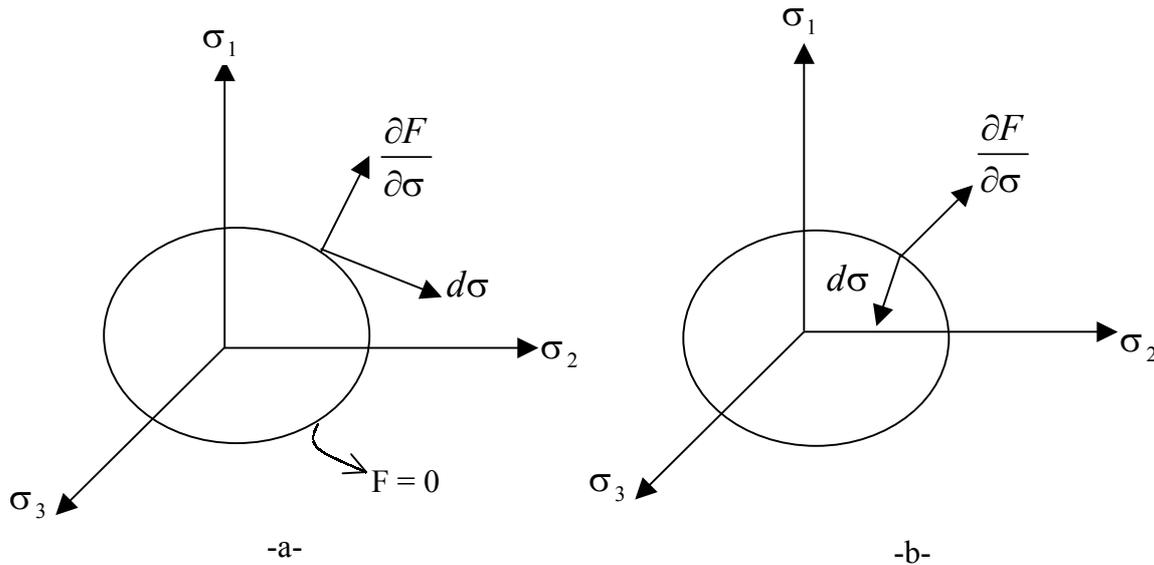


Figure (III.12) : a. Cas de charge / b. Cas de décharge

### III.5.2. Postulat de stabilité de Drucker : <sup>[GUE99]</sup>

Il s'énonce comme suit : " *Le travail effectué pendant un cycle de charge quelconque formé dans l'espace des contraintes est non négatif*".

Ce postulat est une définition de l'érouissage, il permet de montrer que toute surface de plasticité ( $F = 0$ ) est convexe et que le tenseur des incréments des déformations plastiques est normal à la surface de plasticité (loi de normalité).

Soit  $\sigma_{ij}^*$  l'état de contrainte en un point d'un corps pour une sollicitation donnée; par une cause extérieure distincte de la sollicitation première, un état de contrainte additionnel est appliqué puis retiré lentement; Alors, pendant l'application seule, ou pendant le cycle complet (application, retrait), l'agent extérieur fournit un travail non négatif.

Soit  $\sigma_{ij}^*$  l'état de contrainte existant, l'agent extérieur amène d'abord cet état sur la surface de plasticité au point  $\sigma_{ij}$  en suivant un chemin élastique; puis il provoque un accroissement  $d\sigma_{ij}$  des contraintes en domaine plastique, produisant des déformations tant élastiques  $d\varepsilon_{ij}^e$  que plastique  $d\varepsilon_{ij}^p$ ; enfin; il se retire, et l'état de contrainte retourne au niveau  $\sigma_{ij}^*$  en suivant un chemin élastique. Dans ce cycle, le travail élastique est nul, de sorte que le travail de l'agent extérieur est ( produit scalaire) :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p + d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{III.38})$$

Puisqu'on peut choisir  $\sigma_{ij}^* \equiv \sigma_{ij}$ , on a d'abord  $d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \geq 0$  et puisque ce second terme est d'un ordre de grandeur inférieur au premier; ce dernier doit satisfaire :

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{III.39})$$

les égalités ont lieu pour le chargement neutre.

Ce postulat, et les inéquations auxquelles il conduit sont particulièrement évidentes dans l'essai de traction simple.

### III.5.3. Conséquences du Postulat de Drucker :<sup>[GUE99]</sup>

Les inégalités précédentes déduites du Postulat de Drucker, ont des conséquences fondamentales sur la théorie de la plasticité. Puisque, pratiquement, on peut en déduire la forme des équations constitutives recherchées; deux propriétés principales se dégagent de ce postulat :

- a) La convexité : toute surface de plasticité  $F = 0$  est convexe.
- b) La normalité : Le vecteur incrément des déformations plastiques est normal à la surface de plasticité. Cette propriété de normalité se traduit par l'équation :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{III.40})$$

avec :  $d\lambda \geq 0$

Où  $d\lambda$  est un facteur de proportionnalité, qui à cause de  $(d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p)$ , est non négatif. Cette relation fondamentale s'appelle loi de normalité ou loi d'écoulement plastique; on dit aussi que  $F$  est la fonction potentielle plastique.

### III.5.4. Surface de plasticité initiale :<sup>[GUE99]</sup>

Soit  $F_0(\sigma_{ij})$  cette surface, fonction des seules contraintes puisque aucune déformation plastique n'a encore eu lieu. En supposant :

- a- Le matériau isotrope dans sa configuration initiale.
- b- Cette surface (et les suivantes d'ailleurs) est indépendante d'un état de contraintes hydrostatique (hypothèse a).
- c- L'absence initiale d'effet Bauschinger (limites élastiques initiales égales en traction et compression, ou  $F_0(\sigma_{ij}) = F_0(-\sigma_{ij})$  plus généralement); alors cette surface peut s'écrire :

$$F_0(J_2, J_3) = 0 \quad (\text{III.41})$$

avec  $J_2$  et  $J_3$  sont les invariants du tenseur déviateur des contraintes  $s_{ij}$ .

$$\text{où : } s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad J_2 = \frac{1}{2} (s_{ij})^2 \quad \text{et} \quad J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki}$$

**III.5.5. Critère d'épuisement :**<sup>[MAR02]</sup>

Le critère d'épuisement détermine le niveau de charge auquel la déformation plastique commence, il peut être formulé en fonction de l'état de contraintes et d'autres paramètres  $k$  liés aux propriétés d'écroutissement du matériau.

$$F(\sigma, k) = 0 \quad (\text{III.42})$$

Pour les matériaux isotropes, la fonction de charge dépend des trois contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  où  $(\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3)$  :

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k) = 0 \quad (\text{III.43})$$

Pour les métaux, l'expérience a montré que la limite élastique est indépendante de la pression hydrostatique c'est à dire de l'invariant  $I_1$ . On peut donc exprimer la fonction de charge en fonction des invariants  $J_2$  et  $J_3$  du déviateur :

$$F(J_2, J_3, k) = 0 \quad (\text{III.44})$$

Les critères de Tresca et Von-Mises font partie de cette famille. Cependant pour certains matériaux les sols et les bétons l'expérience a montré que des variations de volume apparaissent pendant l'écoulement plastique ( critère de Mohr-Coulomb et Druker-Pargger ) le critère peut également se formuler en fonction des trois invariants de contraintes  $I_1, J_2$  et  $J_3$  :

$$F(I_1, J_2, J_3, k) = 0 \quad (\text{III.45})$$

où :  $I_1$  est le premier invariant du tenseur des contraintes  $\sigma$  .  $I_1 = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

**III.5.6. Critères de Plasticité :**<sup>[GUE99],[GAR01c],[MAR02],[CHE88]</sup>

On appelle critère de plasticité, une loi définit explicitement la forme de la surface de plasticité. Les critères de plasticité ont été initialement développés pour les métaux et ont ensuite été utilisés pour les sols, notamment en tant que critères de rupture.

**III.5.6.1. Critère de Tresca :**

Tresca [1864], après des essais sur le Plomb, conclut que la plastification arrive quand la contrainte tangentielle maximale atteinte une certaine limite. On peut écrire donc :

$$F = \sigma_1 - \sigma_3 - 2k \quad (\text{III.46})$$

où :  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Si les contraintes principales sont  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$ , où  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , alors la plastification commence quand :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = Y(k) \quad (\text{III.47})$$

où :  $Y$  : un paramètre matériel déterminé expérimentalement.

$k$  : paramètre d'écroutissement.

Le seuil de la valeur de  $Y$  est habituellement la contrainte qui est déterminé de l'essai de traction simple ( unidimensionnel )

Pour la condition première plastification, on a :

$$\max \left[ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right] = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} = \frac{\sigma_y}{2} \quad (III.48)$$

$\sigma_y$  : Est la contrainte d'épuisement initiale en traction simple.

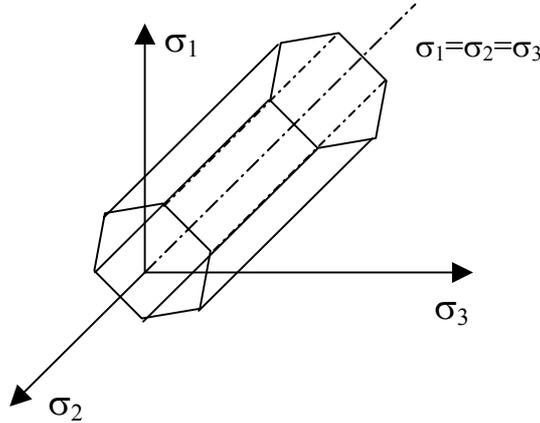


Figure (III.13) : Représentation du critère de Tresca dans l'espace  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$  [CHE88]

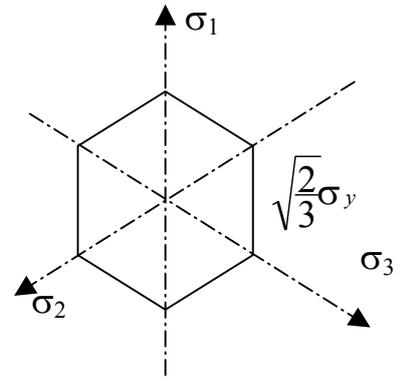


Figure (III.14) : Section du prisme par le plan  $\pi : \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$  [CHE88]

Dans l'espace de contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  , la surface définie par la fonction de charge est un prisme parallèle à l'axe (1,1,1) à base hexagonale régulière (figure (III.13) ).

Le critère de Tresca est parfois exprimé en termes des invariants du tenseur des contraintes déviatoriques sous la forme :

$$F(J_2, \theta) = 2\sqrt{J_2} \cos\theta - \sigma_y = 0 \quad (III.49)$$

ou 
$$4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2J_2^2 + 96k^4J_2 - 64k^6 = 0 \quad (III.50)$$

avec:  $J_2$  et  $J_3$  sont le deuxième et le troisième invariants du tenseur des contraintes déviatoriques.

$\theta$  : angle de similitude défini comme suit :

$$\theta = \frac{1}{3} \text{Arc sin} \left[ -\frac{3J_3\sqrt{3}}{2(J_2)^{3/2}} \right] ; \quad -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \quad (III.51)$$

### III.5.6.2. Critère de Von-Mises :

Le fait que le critère précédant ne prend pas en compte la contrainte principale intermédiaire est une faiblesse et pour la surmonter, Von-Mises [1913] proposa que, la plastification ne commence que quand le deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques  $J_2$  atteint une valeur limite, c'est-à-dire :

$$F = J_2 - k^2 = 0 \quad (III.52)$$

La plastification se produit quand :

$$\sqrt{3J_2} \geq \sigma_y \quad (\text{III.53})$$

$$\text{où } J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{2} [s_x^2 + s_y^2 + s_z^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \quad \text{avec} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$\text{ou :} \quad F = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] - k^2 = 0 \quad (\text{III.54})$$

$$\text{ou :} \quad F = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - k^2 = 0 \quad (\text{III.55})$$

où  $k$  : est une constante. On peut remarquer facilement que dans le cas du cisaillement simple plan, on a :

$$J_2 = \sigma_1^2 = k^2 \quad (\text{III.56})$$

Donc la constante  $k$  représente la contrainte maximale admissible en cisaillement simple.

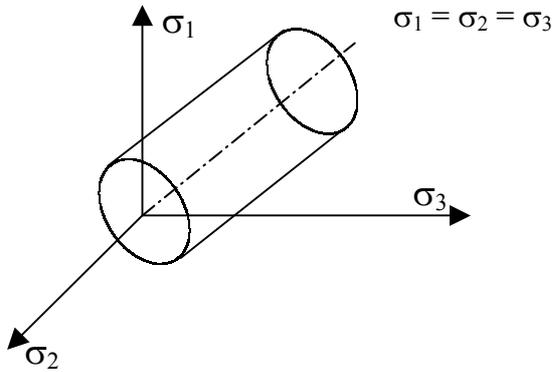
Dans l'espace des contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  à 3 dimensions l'équation (III.53) devient :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_y \quad (\text{III.57})$$

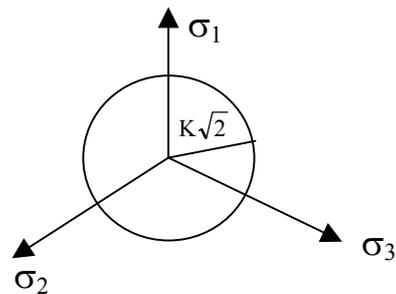
C'est l'équation d'un cylindre à base circulaire axé sur la trisectrice du repère  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ,

Figure (III.15). Sa section par le plan  $\pi$  ( $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ ) est un cercle dont le rayon est  $\kappa\sqrt{2}$

Figure (III.16).



**Figure (III.15) :** Représentation du critère de Von-Mises dans l'espace  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$  [CHE88]



**Figure (III.16) :** Section du cylindre par le plan  $\pi$  [CHE88]

**III.5.6.3. Critère de Mohr-Coulomb :**

Coulomb proposa en [1773] le premier critère de plasticité en mécanique des sols ( applicable aux problèmes de roches et de sols ), et ce critère est encore maintenant très couramment utilisé. Ce critère est une généralisation de celui de Tresca sauf que la contrainte critique de cisaillement n'est plus constante mais dépend de la contrainte normale.

$$|\tau| = c - \sigma_n \cdot \tan(\phi) \quad (\text{III.58})$$

où  $|\tau|$  : la magnitude de la contrainte de cisaillement

$\sigma_n$  : la contrainte normale

$c$  : la cohésion

$\phi$  : l'angle interne de frottement

Si les contraintes principales sont  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  où  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , le critère de Mohr-Coulomb peut être écrit comme suit :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2c \cdot \cos \phi - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi \quad (\text{III.59})$$

Dans l'espace des contraintes principales l'équation (III.58) représente un cône dont la section normale à chaque point est un hexagone irrégulier (figure (III.19)).

**Remarque :**

On a un cône plutôt qu'un cylindre car il y a l'influence de la contrainte hydrostatique indiquée par le dernier terme de l'équation (III.58).

L'équation (III.58) peut écrire en fonction des invariants, on aura :

$$F(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + \frac{\sqrt{J_2}}{3} \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) \sin \phi - c \cdot \cos \phi = 0 \quad (\text{III.60})$$

Où  $I_1$  : est le premier invariant du tenseur des contraintes  $\sigma$

$J_2$  : le deuxième invariant du tenseur déviateur  $S$ .

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \quad \text{Avec : } S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

Le paramètre  $\theta$  appelé angle de similitude est en fonction de  $J_2$  et  $J_3$  :

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad (\text{III.61})$$

$J_3$  : le troisième invariant du tenseur déviateur  $S$ .

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = \text{Det}(S) \quad \text{ou} \quad J_3 = \frac{1}{27} (2I_1^3 + 9I_1 I_2 + 27I_3)$$

avec  $I_2$  : est le deuxième invariant du tenseur des contraintes  $\sigma$ .

$I_3 = \text{Det}(\sigma)$  : est le troisième invariant du tenseur des contraintes  $\sigma$ .

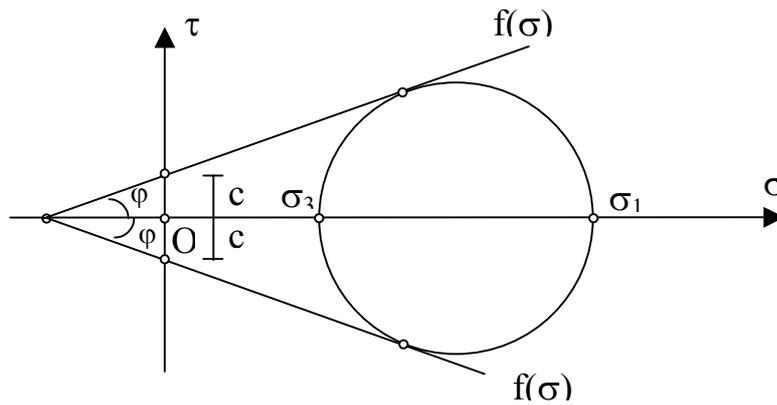


Figure (III.17) : Critère de Mohr-Coulomb.<sup>[GUE99]</sup>

#### III.5.6.4. Critère de Drucker et Prager :

Drucker et Prager [1952] ont présenté un critère qui prend en compte le premier invariant du tenseur des contraintes  $I_1$  et le deuxième invariant du tenseur déviatorique des contraintes ( $J_2$ ), ce critère est une extension de celui de Von-Mises et de celui de Mohr-Coulomb. Sa fonction de charge est donnée par l'expression :

$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (\text{III.62})$$

$\alpha$  et  $k$  définissent en fonction de la cohésion  $c$  et de l'angle de frottement interne  $\phi$ .

L'équation (III.62) représente graphiquement un cône circulaire :

- Pour coïncider le cercle de Drucker-Prager avec les sommets extérieurs de l'hexagone de Mohr-Coulomb à chaque section, on a :

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad \text{et} \quad k = \frac{6c \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (\text{III.63})$$

- Pour faire coïncider avec les sommets intérieurs, on aura :

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad \text{et} \quad k = \frac{6c \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad (\text{III.64})$$

La surface représentative du critère dans l'espace  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  est un cône dont le sommet se trouve sur l'axe  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Figure (III.18)

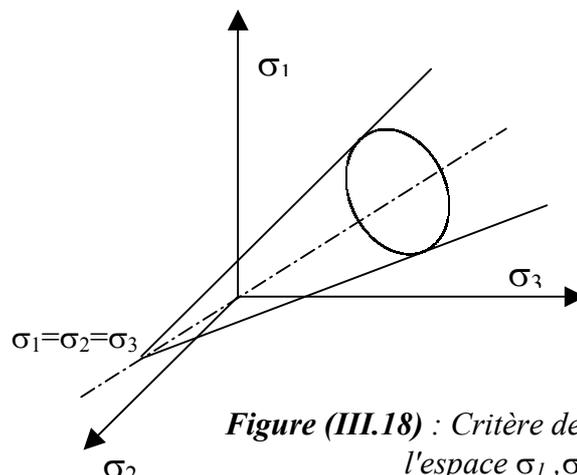


Figure (III.18) : Critère de Drucker et Prager dans l'espace  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ <sup>[CHE88]</sup>

Nelson et Baron ont proposé une modification du critère de Drucker-Prager pour le rendre indépendant de  $I_1$  aux grandes sollicitations, ce qui est parfois le cas pour les sols. Cette version modifiée du critère s'exprime par les équations suivantes :

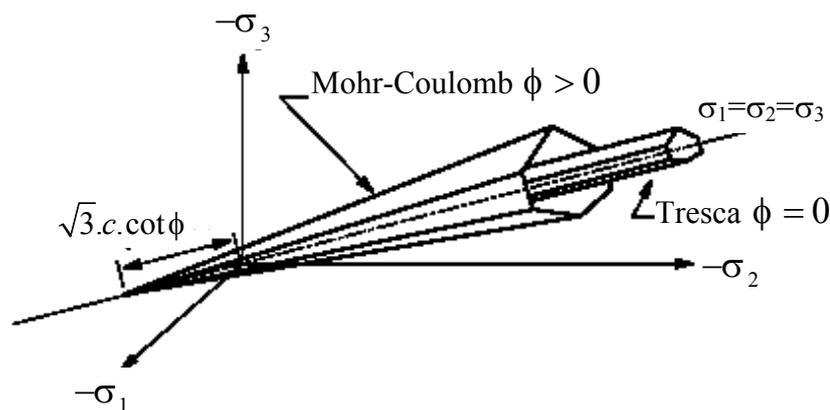
$$F = \sqrt{J_2} - k - \alpha J_1 \left( 1 - \frac{I_1}{2C} \right) = 0 \quad \text{quand} \quad -I_1 + C \geq 0 \quad (\text{III.65})$$

$$F = \sqrt{J_2} - k - \frac{\alpha C}{2} = 0 \quad \text{quand} \quad -I_1 + C < 0 \quad (\text{III.66})$$

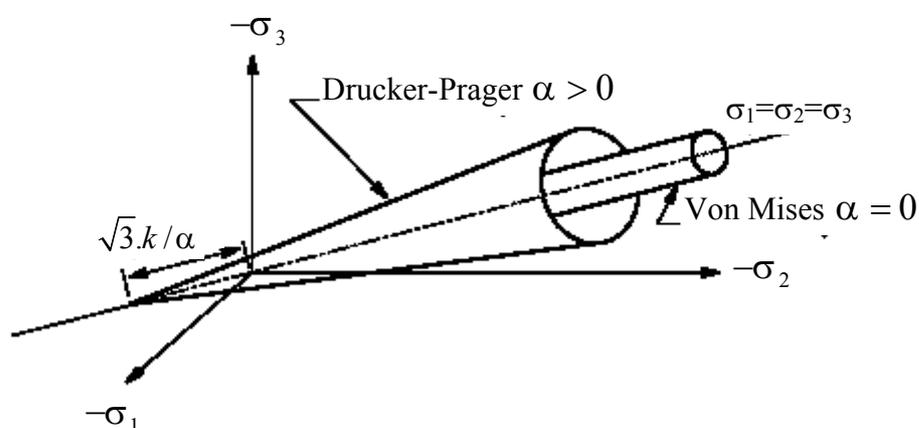
Où  $C$  : Est la pression isotrope de transition.

**Remarques sur les paramètres :**<sup>[CHE88]</sup>

- Le critère de Mohr-Colomb est caractérisé par deux paramètres ( cohésion  $c$  et l'angle de frottement  $\phi$  ), le cas particulier  $\phi = 0$  donne le critère de Tresca ( Figure (III.19)).
- Le critère de Drucker-Prager est décrit au moyen des deux paramètres  $\alpha$  et  $k$  , le cas particulier  $\alpha = 0$  et  $k = 2c/\sqrt{3}$  donne le critère de Von-Mises (Figure (III.20)).



**Figure (III.19):** Critères de Mohr-Colomb et Tresca dans l'espace des contraintes principales<sup>[CHE88]</sup>



**Figure (III.20):** Critères de Drucker-Prager et Von-Mises dans l'espace des contraintes principales<sup>[CHE88]</sup>

**III.5.7. Loi d'écrouissage :** [MAR02,CHE88,HIN80]

On appelle loi d'écrouissage une loi qui décrit explicitement la forme de la fonction de charge ou qui définit l'évolution des surfaces de plasticité successives. Les deux lois pratiquement utilisables sont :

**a) Loi d'écrouissage isotrope :**

Qui postule essentiellement que la fonction de charge est obtenue par une expansion uniforme de la surface de plasticité initiale dans tous les sens. Cette loi est en contradiction directe avec l'effet Bauschinger, et conserve l'isotropie (d'où son nom) Taylor[1931], Hill [1950].

**b) Loi d'écrouissage cinématique :**

Qui suppose essentiellement que la fonction de charge garde la même forme que la surface de plasticité initiale, mais qu'elle se déplace par translation dans l'espace des contraintes. Cette loi introduit partiellement l'effet Bauschinger, ainsi que l'anisotropie produite par les déformations plastiques.

**III.5.7.1. Ecrouissage isotrope :**

Les hypothèses de l'écrouissage isotrope sont :

- a- L'isotropie est conservé.
- b- Quel que soit le chemin suivi dans l'espace des déformations pour atteindre un état de contrainte; la fonction de charge finale est la même.

On déduit de ces hypothèses que la fonction de charge a la même forme que le critère de plasticité initial, que seul la constante qui y apparaît devient fonction d'une certaine mesure de l'écrouissage (paramètre  $k$ ), et que la détermination expérimentale de cette fonction est indépendante de la sollicitation.

Ces hypothèses conduisent bien, géométriquement, à une expansion (homothétie) de la surface initiale, et se traduisent, mathématiquement, par la formule suivante :

$$F(\sigma_{ij}; \alpha; k) = 0 \quad (\text{III.67})$$

$$F(\sigma, k) = f(\sigma) - \sigma_y(k) = 0 \quad (\text{III.68})$$

où  $f(\sigma_{ij})$  : est la contrainte de comparaison.

$\sigma_y(k)$  : la limite élastique courante en traction simple et où la dépendance fondamentale de  $F$  par rapport à  $\alpha$ , qui semble avoir disparu, est en fait maintenue par l'intermédiaire de  $k$ .

Pour mesurer l'écrouissage et en tirer la forme explicite de  $\sigma_y(k)$ , on peut faire deux hypothèses :

a) hypothèse du travail de déformation plastique, on définit :

$$dk \equiv dw^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad \text{avec} \quad W^p = \int_0^{\varepsilon_{ij}^p} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (\text{III.69})$$

et on pose que la contrainte  $\sigma_y(k)$  est une fonction uniforme du travail plastique total :

$$\sigma_y(k) = f_1\left(\int dW^p\right) \quad (\text{III.70})$$

b) hypothèse de l'incrément de déformation plastique de comparaison. On définit :

$$dk \equiv d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p \quad (\text{III.71})$$

avec :

$$\bar{\varepsilon}^p = \int_0^{\varepsilon_{ij}} d\bar{\varepsilon}^p \quad (\text{III.72})$$

et on pose qu'il existe une courbe contrainte-déformation reliant la contrainte  $\sigma_y(k)$  et l'intégrale de l'incrément de déformation plastique de comparaison :

$$\sigma_y(k) = f_2\left(\int d\bar{\varepsilon}^p\right) \quad (\text{III.73})$$

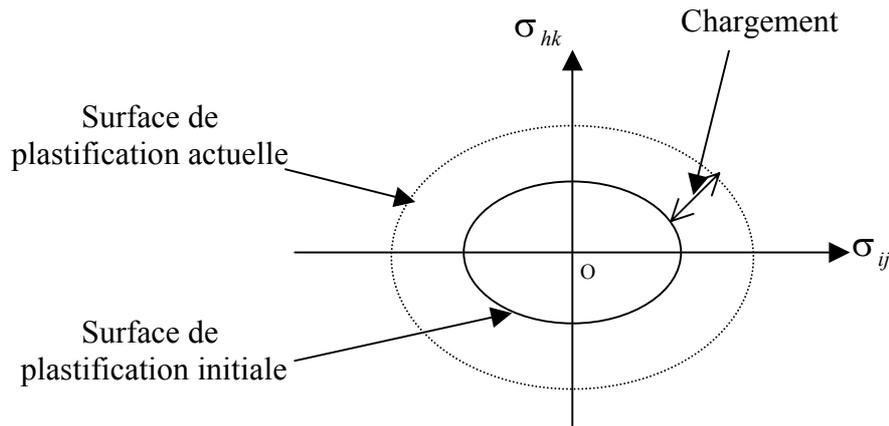


Figure (III.21) : Ecrouissage isotrope<sup>[HIN80]</sup>

le cas le plus simple d'écrouissage isotrope est une charge linéaire :

$$\sigma_y = \sigma_0 + H d\bar{\varepsilon}^p \quad (\text{III.74})$$

$\sigma_0$  : la contrainte initiale.

$H$  : module de plasticité avec :

$$H = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}^p} \quad (\text{III.75})$$

Où  $d\bar{\sigma}$  : contrainte effective.

$d\bar{\varepsilon}^p$  : déformation plastique effective.

Si  $H > 0$  l'écrouissage se produit ( la contrainte augmente « durcissement » )

Si  $H = 0$  plasticité parfaite.

Si  $H < 0$  l'adoucissement ( il y a une baisse dans la contrainte).

Pour l'uniaxial, le module de plasticité est :

$$H = \frac{E_t}{1 - \frac{E_t}{E}} \quad (\text{III.76})$$

avec  $E$  : module d'élasticité

$$E_t : \text{module élasto-plastique tangent, } E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad \text{où } \sigma > \sigma_0$$

### III.5.7.2. Ecroûissage cinématique :

Dans l'écroûissage cinématique, la surface de la charge n'étend pas contracter, mais se déplace comme un corps rigide.

L'équation de la surface de charge est :

$$F(\sigma, \alpha, k) = F(\sigma - \alpha, k) = F(\bar{\sigma}, k) = 0 \quad (\text{III.77})$$

$\bar{\sigma}$  : Vecteur des contraintes réduites.

$\alpha$  : Est de nature tensorielle ; elle indique la position de centre de la surface de charge, égale zéro dans l'état initial.

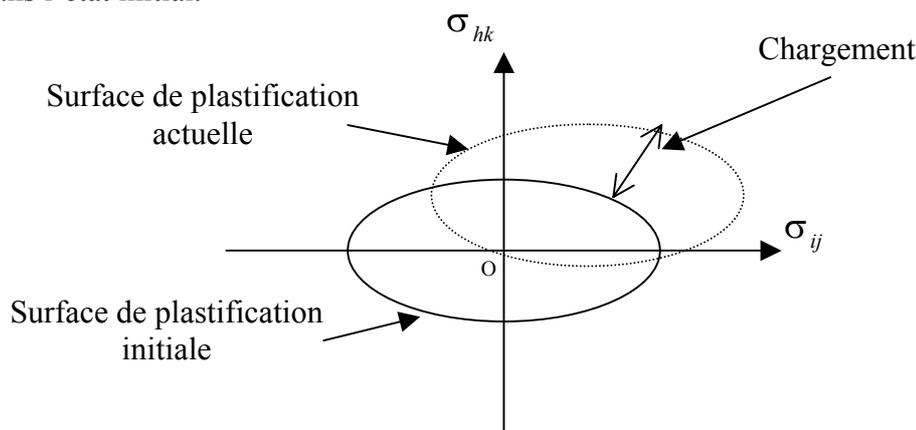


Figure (III.22) : Ecroûissage cinématique<sup>[HIN80]</sup>

#### - Règle d'écroûissage de Prager-Melan :

La règle d'écroûissage cinématique de Prager-Melan définit les coordonnées  $\alpha$  par un déplacement linéaire du centre de la surface :

$$d\alpha = c.d\varepsilon^p \quad \text{donc } \alpha = \int c.d\varepsilon^p \quad (\text{III.78})$$

$c$  : Le facteur de la proportionnalité est constant lier directement du module de plasticité. Si  $c$  est négative :  $c$ 'est l'adoucissement. Dans le cas uniaxial  $c = H$ .

#### - Règle d'écroûissage de Prager-Zieler :

Dans la règle d'écroûissage de Prager-Zieler la translation de la surface de charge a lieu dans la direction du vecteur des contraintes réduites<sup>[LEM91]</sup> :

$$d\alpha = (\sigma - \alpha) d\mu \quad (\text{III.79})$$

L'emploi du tenseur  $(\sigma - \alpha)$  à la place de son déviateur permet de rendre compte de l'influence d'une contrainte hydrostatique sur l'évolution de la variable interne cinématique. Sous chargement complexe, on obtient donc des écoulements différents de ceux du modèle de Prager mais les deux formulations sont identiques dans le cas de l'incompressibilité plastique.

Le multiplicateur  $d\mu$  est déterminé par la condition de consistance :

$$dF = 0 \quad (\text{III.80})$$

$$d\mu = \frac{\{a\}^T \{d\sigma\}}{\{a\}^T \{\sigma - \alpha\}} \quad (\text{III.81})$$

où le paramètre  $c$  a la même signification comme dans la règle de Melan-Prager

$\{a\}$  : est le vecteur d'écoulement.

$$\{a\}^T = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}} \quad \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right] \quad (\text{III.82})$$

Ce vecteur d'écoulement  $\{a\}$  dépend du critère choisi.

Si le vecteur  $\{a\}$  écrit comme suit :

$$\{a\} = C_1 \{a_1\} + C_2 \{a_2\} + C_3 \{a_3\} \quad (\text{III.83})$$

avec :

$$\{a_1\}^T = \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad (\text{III.84})$$

$$\{a_2\}^T = \frac{\partial (J_2)^{1/2}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \{S_x \quad S_y \quad S_z \quad 2\tau_{xy} \quad 2\tau_{yz} \quad 2\tau_{zx}\} \quad (\text{III.85})$$

et

$$\{a_3\}^T = \frac{\partial I_3}{\partial \sigma} = \left\{ \left( S_y S_z - \tau_{yz}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \quad \left( S_x S_z - \tau_{xz}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \quad \left( S_x S_y - \tau_{xy}^2 + \frac{J_2}{3} \right) \right. \\ \left. 2(\tau_{xz} \tau_{xy} - S_x \tau_{yz}) \quad 2(\tau_{xy} \tau_{yz} - S_y \tau_{xz}) \quad 2(\tau_{yz} \tau_{xz} - S_z \tau_{xy}) \right\} \quad (\text{III.86})$$

Et nous avons :

$$C_1 = \frac{\partial F}{\partial I_1} \quad (\text{III.87})$$

$$C_2 = \frac{\partial F}{\partial (J_2)^{1/2}} - \frac{\tan 3\theta}{\sqrt{J_2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (\text{III.88})$$

$$C_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} - \frac{1}{(J_2)^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad (\text{III.89})$$

Alors les différents critères utilisés sont définis par une constante  $C_i$ , qui sont résumés dans le tableau suivant :

Critère	$C_1$	$C_2$	$C_3$
Tresca	0	$2 \cos \theta (1 + \tan \theta \tan 3\theta)$	$\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{J_2 \cos 3\theta}$
Von-Mises	0	$\sqrt{3}$	0
Mohr-Coulomb	$\frac{1}{3} \sin \phi$	$\cos \theta \left[ (1 + \tan \theta \tan 3\theta) + \sin \phi (\tan 3\theta - \tan \theta) / \sqrt{3} \right]$	$\frac{\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \sin \phi}{2J_2 \cos 3\theta}$
Drucker-Prager	$\alpha$	1	0

**Tableau III.1** : Dérivées de  $F$  par rapport aux invariants des contraintes<sup>[HIN80]</sup>

- **L'écroissage cinématique non-linéaire** :<sup>[LEM91]</sup>

Les modèles réels exigent souvent des lois du durcissement non-linéaire. Pour l'écroissage isotrope non linéaire peut être constitué facilement à partir de la fonction  $\sigma_y(k)$ , mais pour l'écroissage cinématique ceci n'est pas simple, la règle d'écroissage cinématique non-linéaire est donnée comme suit :

$$d\alpha = c.d\varepsilon^p - \gamma \sqrt{\frac{2}{3}} \|d\varepsilon^p\| \alpha \quad (\text{III.90})$$

$c$  et  $\gamma$  étant des coefficients caractéristiques de chaque matériau.

$\|d\varepsilon^p\|$  : l'incrément de déformation plastique cumulée.

### III.5.7.3. L'écroissage Mixte :

Il s'agit de superposer ou combinaison des écroissages cinématique et isotrope : le domaine donc se modifier par translation et par dilatation. Celui-ci s'exprime par :

$$F(\sigma, \alpha, k) = F(\sigma - \alpha, k) = F(\bar{\sigma}, k) = 0 \quad (\text{III.91})$$

Le centre de la surface subit une translation définie par les coordonnées  $\alpha$  et la surface de charge en gardant sa forme subit une expansion définie par  $k$  :

$$dk = (\sigma - \alpha).d\varepsilon^p = \bar{\sigma}.d\varepsilon^p \quad \text{donc} : k = \int \bar{\sigma}.d\varepsilon^p \quad (\text{III.92})$$

### III.5.8. Règle d'écoulement plastique :<sup>[CHE88],[HIN80],[STE99]</sup>

Dans la théorie classique de plasticité l'incrément de déformation aura une composante élastique et une autre plastique :

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (\text{III.93})$$

- Le tenseur de déformation élastique incrémental donné par la relation suivante :

$$d\varepsilon_{ij}^e = D_{ijkl} \cdot d\sigma_{kl} \quad (\text{III.94})$$

où  $D_{ijkl}$  : la matrice des constants élastique

- Le tenseur de déformation plastique incrémentale donné par la règle d'écoulement suivante :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (\text{III.95})$$

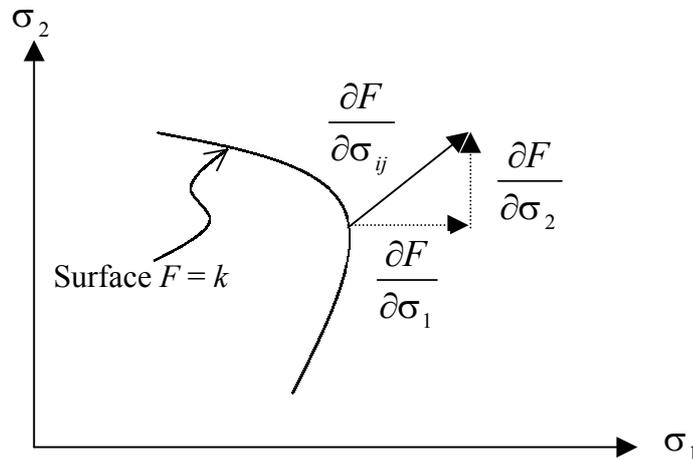
où  $Q$  : Une fonction scalaire des contraintes, appelée potentiel plastique.

$d\lambda$  : Est un facteur scalaire constant appelé le multiplicateur plastique ( il est positif ou nul ), il n'est positif qu'en présence d'écoulement plastique.

La règle d'écoulement est appelée « associée » si la fonction potentielle plastique  $Q$  égale à la fonction de charge  $F$  ( $Q = F$ ), dans ce cas on peut écrire<sup>[HIN80]</sup> :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (\text{III.96})$$

Cette règle s'appelle aussi règle de normalité parce que le vecteur  $d\varepsilon^p$  est normal à la surface de charge (figure (III.23)).



**Figure(III.23)** : Représentation géométrique de la règle de normalité de la plasticité associée<sup>[HIN80]</sup>

### III.6. Formulation matricielle en élasto-plasticité :<sup>[MAR02],[LEM91],[HIN80],[STE99]</sup>

#### III.6.1. Pour un écrouissage simple :

Un écrouissage simple est un écrouissage soit isotrope, soit cinématique mais pas mixte, on a donc soit  $dk = 0$  ou  $d\alpha = 0$ .

En différentiant la fonction  $F$ , on obtient sous forme matricielle :  $F(\sigma, \alpha, k) = 0$  donc  $dF = 0$ .

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \{d\alpha\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (\text{III.97})$$

où  $k$  et  $\alpha$  sont les paramètres d'écrouissage isotrope et cinématique respectivement.

L'incrément des contraintes-déformations élasto-plastique donné comme suit :

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon^e\} = [D]\{d\varepsilon - d\varepsilon^p\} \quad (\text{III.98})$$

$[D]$  : est la matrice des constantes élastiques.

$$\text{En remplaçant : } \left. \begin{array}{l} dk = \sigma^T . d\varepsilon^p \\ d\alpha = c . d\varepsilon^p \\ d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \\ \{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon - d\varepsilon^p\} \end{array} \right\} \text{ dans } \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \{d\alpha\} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0$$

On trouve :

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right\} - c \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} - \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}} \{d\varepsilon\} \quad (\text{III.99})$$

$$\text{Posons : } A = -\frac{1}{d\lambda} \left[ \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T d\alpha + \frac{\partial F}{\partial k} dk \right] \quad (\text{III.100})$$

D'après le travail plastique :  $dk = \sigma^T . d\varepsilon^p$  et selon la règle de Prager :  $d\alpha = c . d\varepsilon^p$  donc :

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \left[ c \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T + \frac{\partial F}{\partial k} \sigma^T \right] d\varepsilon^p \quad (\text{III.101})$$

Or selon la règle de plasticité :  $d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$

$$A = - \left[ c \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \frac{\partial Q}{\partial \sigma} + \frac{\partial F}{\partial k} \sigma^T \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right] \quad (\text{III.102})$$

finalement en remplace l'équation (III.95) dans l'équation (III.98) en trouve :

$$\{d\sigma\} = [D^{ep}] \{d\varepsilon\} \quad (\text{III.103})$$

$$\text{Donc : } [D^{ep}] = [D] - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} - c \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} - \frac{\partial F}{\partial k} \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}} \quad (\text{III.104})$$

où  $[D^{ep}]$  : est la matrice élasto-plastique pour un écrouissage simple ( $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$  ou  $\frac{\partial F}{\partial k} = 0$ ), et c'est la généralisation du module  $E^{ep}$  de l'élasto-plasticité uniaxiale.

Si  $F = Q$  (élasto-plasticité associée) la matrice  $[D^{ep}]$  est symétrique.

### III.6.2. Pour un écrouissage mixte :

Pour un écrouissage mixte, la fonction de charge est donnée par la relation :

$$F(\sigma - \alpha, k) = F(\bar{\sigma}, k) = 0 \quad (\text{III.102})$$

l'incrément des déformations plastique se décompose en deux :

$$d\varepsilon^p = d\varepsilon^{pi} + d\varepsilon^{pc} \quad (\text{III.103})$$

$d\varepsilon^{pi}$  et  $d\varepsilon^{pc}$  sont les composantes dues à l'écrouissage isotrope et cinématique respectivement,

on peut les exprimer sous la forme :

$$d\varepsilon^{pi} = M.d\varepsilon^p \text{ et } d\varepsilon^{pc} = (1-M).d\varepsilon^p \quad (\text{III.104})$$

avec  $M$  coefficient de mixité :  $0 \leq M \leq 1$

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \left[ \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T d\alpha + \frac{\partial F}{\partial k} dk \right] \quad (\text{III.105})$$

donc :

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T d\sigma - Ad\lambda \quad (\text{III.106})$$

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \left[ D.d\varepsilon - D \frac{\partial Q}{\partial \sigma} d\lambda \right] - Ad\lambda = 0 \quad (\text{III.107})$$

D'où :

$$d\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right\} + A} \{d\varepsilon\} \quad (\text{III.108})$$

Et on obtient :

$$d\sigma = \left[ D \right] - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \right\} + A} d\varepsilon = [D^{ep}] . d\varepsilon \quad (\text{III.109})$$

la règle du travail plastique pour le paramètre  $k$  d'écrouissage isotrope donne :

$$dk = \bar{\sigma}^{-T} . d\varepsilon^{pi} = \bar{\sigma}^{-T} . M . d\varepsilon^p \quad (\text{III.110})$$

de même, la règle de Prager pour un écrouissage cinématique sera :

$$d\alpha = c . d\varepsilon^{pc} = c . (1-M) . d\varepsilon^p \quad (\text{III.111})$$

avec :  $\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$

$$\text{donc : } A = -\frac{1}{d\lambda} \left[ \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T (1-M).c + \frac{\partial F}{\partial k} (\sigma - \alpha)^T .M \right] .d\varepsilon^p \quad (\text{III.112})$$

Or d'après l'équation (III.95)  $d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$  en trouve :

$$A = -(1-M).c. \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - M \frac{\partial F}{\partial k} (\sigma - \alpha)^T \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad (\text{III.113})$$

et donc :

$$[D^{ep}] = [D] - \frac{[D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D]}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} - (1-M).c \left\{ \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} - M \frac{\partial F}{\partial k} \{ \sigma - \alpha \}^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\}} \quad (\text{III.114})$$

Où  $[D^{ep}]$  est la matrice élasto-plastique pour un écrouissage mixte en appliquant le travail plastique pour écrouissage isotrope et la règle de Prager pour l'écrouissage cinématique.

A partir de  $[D^{ep}]$ , on déduit la matrice de rigidité tangente  $[K_t]$  en élasto-plasticité :

$$[K_t] = \int_V [B]^T [D^{ep}] [B] .dV \quad (\text{III.115})$$

### III.7. Grandeurs effectives :

La fonction de charge  $F$  est en général une combinaison unidimensionnelle des différentes composantes des contraintes. Cette combinaison est appelée contrainte effective se réduisant à la contrainte uniaxiale pour un problème unidimensionnel. Ainsi les résultats expérimentaux uniaxiaux serviront à l'étude des problèmes multidimensionnels.

$$F(\sigma) = \sigma_{ef} \quad (\text{III.116})$$

Cette contrainte effective sera comparée à la limite élastique courante  $Y$  ou  $\sigma_B$  ( $Y = \sigma_B$ ) obtenue par un essai uniaxial.

Le paramètre d'écrouissage  $k$  dépend de la déformation plastique effective (il est égal au travail plastique) :

$$dk = \sigma .d\varepsilon^p = Y .d\hat{\varepsilon}^p = \hat{\sigma} .d\hat{\varepsilon}^p = F(\sigma) .d\hat{\varepsilon}^p \quad (\text{III.117})$$

$$\text{donc : } d\hat{\varepsilon}^p = \frac{\sigma .d\varepsilon^p}{F(\sigma)} \quad (\text{III.118})$$

La définition de la déformation plastique effective est alors :

$$\hat{\varepsilon}^p = \frac{2}{3} [(e^p)^T (e^p)]^{1/2} \quad (\text{III.119})$$

où  $e^p$  : est le tenseur déviateur des déformations plastique  $\varepsilon^p$ .

La définition correspondante de la contrainte effective est :

$$\varepsilon^p \sigma = \hat{\varepsilon}^p \hat{\sigma} \quad (\text{III.120})$$

$$\hat{\sigma} = \left[ \frac{3}{2} (S)^T (S) \right]^{1/2} = \sqrt{3} \sqrt{J_2} \quad (\text{III.121})$$

où  $S$  : est le tenseur déviateur des contraintes.

$$S_{ij} = \sigma_{ii} - \delta_{ij} \frac{\sigma_{ij}}{3} = \sigma_{ii} - \delta_{ij} \frac{I_1}{3} \quad (\text{III.122})$$

$\delta_{ij}$  : est le symbole de Kronecker défini par :  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

### III.8. Organigramme élasto-plastique général :<sup>[HIN80],[CHA94]</sup>

L'incrément des déformations dans le cas d'une transition élasto-plastique doit être décomposé en une partie élastique  $\Delta \varepsilon^e = r \Delta \varepsilon$  et une partie élasto-plastique  $\Delta \varepsilon^{ep} = (1-r) \Delta \varepsilon$ .

Nous avons :

$$\Delta \varepsilon = r \Delta \varepsilon + (1-r) \Delta \varepsilon \quad ; \quad d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^{ep} \quad (\text{III.123})$$

Et 
$$d\sigma = d\sigma^e + d\sigma^{ep} \Rightarrow d\sigma = D d\varepsilon^e + D^{ep} d\varepsilon^{ep} \quad (\text{III.124})$$

L'incrément des contraintes entre les itérations  $i-1$  et  $i$  est :

$$\Delta \sigma = \int_{\varepsilon^{i-1}}^{\varepsilon^i} D(d\varepsilon - d\varepsilon^p) = \int_{\varepsilon^{i-1}}^{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon} D.d\varepsilon + \int_{\varepsilon^{i-1}}^{\varepsilon^{i-1}+\Delta\varepsilon} D^{ep}.d\varepsilon \quad (\text{III.125})$$

$$\Delta \sigma = r \Delta \sigma^e + \int_{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon^{i-1}+\Delta\varepsilon} D^{ep}.d\varepsilon \Rightarrow r \Delta \sigma^e + \int_{\varepsilon^{i-1}+r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon^{i-1}+\Delta\varepsilon} D^{ep}(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (\text{III.126})$$

Le facteur  $r$  doit être tel que le point revient sur la surface de charge :

$$F(\sigma + r \Delta \sigma^e) = 0 \quad (\text{III.127})$$

L'expression de Taylor donne une approximation d'ordre 1 :

$$r = \frac{-F(\sigma^i)}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \Delta \sigma^e} \quad (\text{III.128})$$

On peut également calculer une valeur approchée de  $r$  comme dans le cas uniaxial en utilisant les grandeurs effectives :

$$r = \frac{Y_{i-1} - \hat{\sigma}_{i-1}}{\hat{\sigma}_i^e - \hat{\sigma}_{i-1}} \quad (\text{III.129})$$

$\hat{\sigma}_i^e$  : est la contrainte effective calculée élastiquement.

La valeur de  $r$  pour les autres cas est :

Transition élastique – élastique :  $r = 1$ .

Transition plastique – plastique :  $r = 0$ .

Transition plastique – élastique :  $r = 1$ .

Pour les éléments en charge ( $r \neq 1$ ), l'intégrale est calculée numériquement par des algorithmes explicites ou implicites. Les premiers sont les plus utilisés (méthode d'Euler et Runge-Kutta). Dans la méthode d'Euler explicite l'intégrale est calculée par sous-incrémentation en  $m$  pas :

$$\int_{\varepsilon^{i-1} + r\Delta\varepsilon}^{\varepsilon^{i-1} + \Delta\varepsilon} D^{ep} . d\varepsilon = \sum_{j=1}^m D_{j-1}^{ep} \frac{(1-r)\Delta\varepsilon}{m} \quad (\text{III.130})$$

$D_{j-1}^{ep}$  : signifie que la matrice élasto-plastique  $D^{ep}$  est calculée au sous-incrément précédent.

Le nombre de sous incréments  $m$  doit être suffisant pour obtenir une bonne précision. La valeur idéale de  $m$  dépend de l'excès de contrainte. Hinton<sup>[HIN80]</sup> propose l'entier immédiatement supérieur à :  $\frac{8(\hat{\sigma}_i^e - Y_{i-1})}{\sigma_0}$

$$\text{Donc :} \quad m = \frac{8(\hat{\sigma}_i^e - Y_{i-1})}{\sigma_0} + 1 \quad (\text{III.131})$$

Dans la méthode de Runge-Kutta, la matrice tangente  $D^{ep}$  est déterminée au milieu de l'incrément avant d'être utilisée pour la totalité de l'incrément. Cela donne une meilleure précision et permet en plus d'apprécier l'erreur commise. Ces intégrations aboutissent en général à des contraintes qui ne sont pas exactement sur la surface de charge, et des corrections peuvent être effectuées par des réductions.

Une des réductions simples consiste à multiplier les composantes du vecteur de contrainte par le rapport des contraintes effectives :

$$\sigma_i = \sigma_i \frac{\sigma_0 + H\hat{\varepsilon}_i^p}{F(\sigma_i)} = \sigma_i \frac{Y_i}{F(\sigma_i)} \quad (\text{III.132})$$

$\hat{\varepsilon}_i^p$  : est la déformation plastique effective.

Cette dernière réduction peut être effectuée à l'intérieur, ou l'extérieur de la boucle de sous incrémentation.

Le calcul de toutes les composantes des déformations plastiques n'est pas indispensable. On se limite à la valeur effective.

## CHAPITRE IV : ANALYSE NON-LINEAIRE DES STRUCTURES

### IV.1. Introduction :

Ce chapitre passe en revue les problèmes structuraux non-linéaires en s'intéressant à la manifestation des sources physiques du comportement non-linéaire. Nous commencerons par introduire la réponse comme étant une caractérisation illustrée des non-linéarités d'un système structural. La réponse est une représentation graphique du concept fondamental du chemin d'équilibre. En conclusion, les non-linéarités sont classifiés selon leur source dans le modèle mathématique de la mécanique des milieux continus et corrélés avec le système physique. Des exemples de ces non-linéarités dans des applications pratiques de technologie sont donnés.

### IV.2. Chemin d'équilibre et Diagrammes de réponse :<sup>[FEL01b]</sup>

Le concept du chemin d'équilibre joue un rôle important car il permet d'expliquer les mystères de l'analyse structurale non-linéaire. Ce concept se prête à la représentation graphique sous forme d'un diagramme de réponse. La forme la plus largement répandue de ces représentations est le diagramme de réponse ( Charge-déformation ).

A travers cette représentation beaucoup de concepts principaux peuvent être illustrés et interprétés en termes physiques, mathématiques ou informatiques.

#### IV.2.1. Réponse charge-déformation

Le comportement statique total ou global de beaucoup de structures peut être caractérisé par un réponse charge-déformation ou force-déplacement. La réponse est habituellement tracée en deux dimensions  $(x,y)$  comme illustré sur la figure (IV.1). Dans cette figure la quantité " *représentative* " de force est tracée par rapport à la quantité " *représentative* " de déplacement. Si la courbe de réponse est non-linéaire, le comportement de la structure est non-linéaire

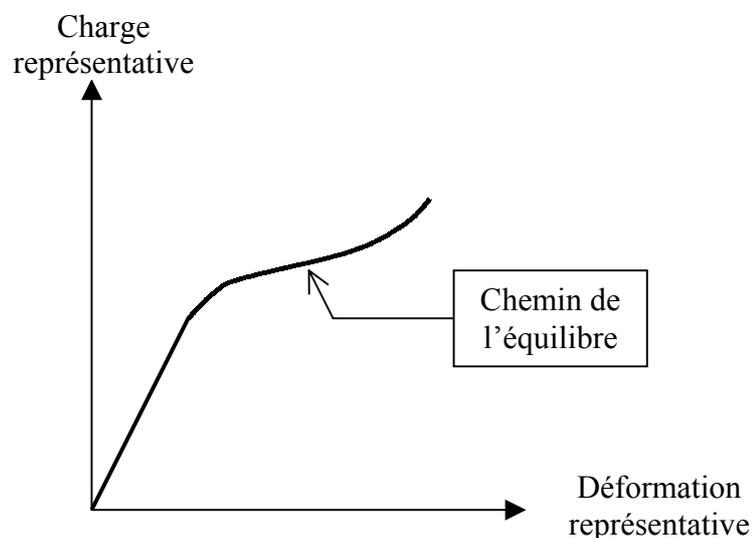


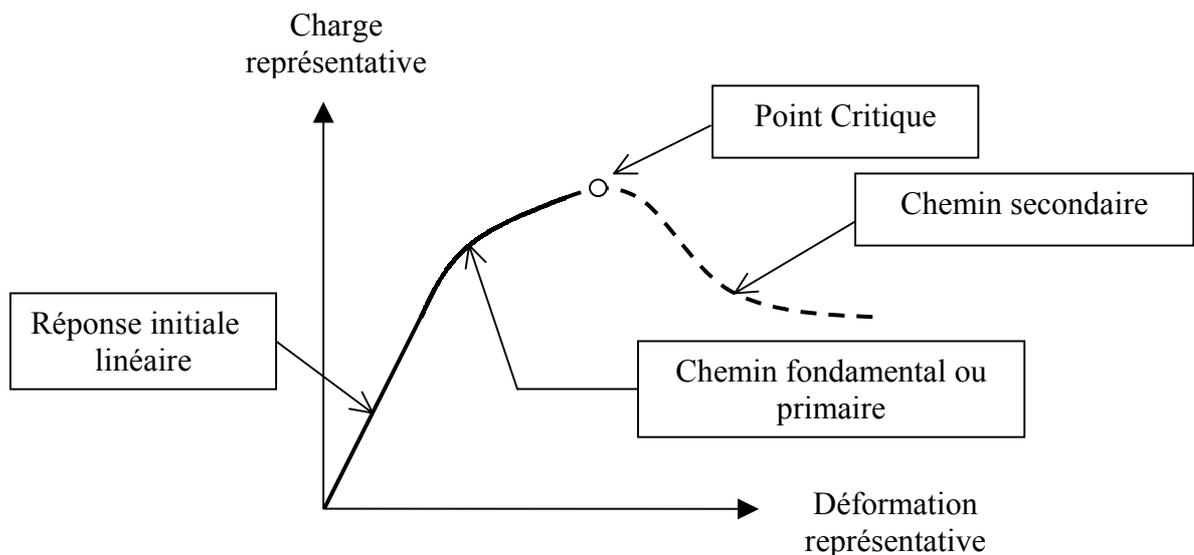
Figure (IV.1) : Diagramme de réponse Charge-déformation<sup>[FEL01b]</sup>

**Remarques :**

- Le qualificateur " *représentatif* " implique un choix parmi beaucoup de candidats possibles. Pour les structures relativement simples, le choix des variables (charge, déformation) est souvent relativement évident en prenant en considération la disponibilité des données expérimentales. Pour des structures plus complexes le choix peut ne pas être évident, et beaucoup de possibilités peuvent exister.
- Ce type de réponse ne devrait pas être confondu avec ce qui dans la dynamique structurale s'appelle « le réponse temporelle ». Une histoire de réponse concerne le temps tracé habituellement le long de l'axe horizontal, des entrées ou des sorties tracées verticalement.

**IV.2.2. Terminologie :**

Une courbe régulière montrée dans un diagramme charge-déformation s'appelle un chemin. Chaque point sur le chemin représente une configuration ou un état possible de la structure. Si le chemin représente des configurations de l'équilibre statique, il s'appelle un chemin d'équilibre. Chaque point dans un chemin d'équilibre s'appelle point d'équilibre. Un point d'équilibre est la représentation graphique d'un état d'équilibre ou de configuration d'équilibre. L'origine du domaine de réponse ( charge zéro, déformation nulle ) s'appelle l'état de référence parce que c'est la configuration par rapport à laquelle les charges et les déformations ont mesuré. Cependant, l'état de référence peut être choisi plutôt arbitrairement, et cette liberté est exploitée dans quelques formulations non-linéaires et méthodes de résolution, comme nous le verrons plus tard.<sup>[FEL01b]</sup>



**Figure (IV.2) :** Chemin d'équilibre fondamental ( primaire ) et secondaire<sup>[FEL01b]</sup>

Pour des problèmes concernant les structures parfaites l'état de référence est sans contraintes et non déformé, et est également un état d'équilibre. Ceci signifie qu'un chemin d'équilibre passe à travers l'état de référence, comme indiqué sur la figure (IV.1). Le chemin qui croise l'état de référence s'appelle le chemin fondamental d'équilibre (Certains auteurs<sup>[FEL01b]</sup> appellent également ceci un chemin primaire). Le chemin fondamental s'étend de l'état de référence jusqu'aux états spéciaux appelés les points critiques. N'importe quel chemin qui n'est pas un chemin fondamental mais qui est relié à lui à un point critique s'appelle un chemin secondaire, voir la figure (IV.2).

### IV.3. Points spéciaux d'équilibre : <sup>[FEL01b]</sup>

Certains points d'un chemin d'équilibre ont une signification spéciale dans les applications ( points spéciaux ). D'intérêt à notre sujet sont les points critiques, tournants et de rupture.

#### IV.3.1. Points critiques :

Il y a deux types:

**1. Points limites :** Ce sont les points où la tangente au chemin d'équilibre est horizontale, c'est à dire parallèle à l'axe de déformation.

**2. Points de bifurcation :** Ce sont des points où deux chemins ou plus d'équilibre se croisent.

Aux points critiques la relation entre la charge caractéristique donnée et la déformation associée n'est pas unique. Physiquement, la structure devient incontrôlable.

#### IV.3.2. Points tournants :

Les points où la tangente au chemin d'équilibre est verticale, c'est à dire parallèle à l'axe des charges, s'appellent points tournants. Ce ne sont pas les points critiques et ont moins de signification physique. Ils ont une certaine signification numérique, parce qu'ils peuvent affecter la performance de certaines méthodes de résolution.

#### IV.3.3. Points de rupture :

Les points où un chemin s'arrête soudainement ou se coupe en raison de la rupture physique s'appellent les points de rupture. Le phénomène de la rupture peut être local ou global en nature. Dans le premier cas ( par exemple rupture d'un composant non critique de structure ) la structure peut regagner l'équilibre fonctionnel après un saut dynamique vers un autre chemin d'équilibre. Dans le deuxième cas la rupture est catastrophique ou destructive et la structure ne retrouve pas l'équilibre fonctionnel.

#### IV.4. Réponse linéaire :

Une structure linéaire est un modèle mathématique caractérisé par un chemin fondamental linéaire d'équilibre pour tous les choix possibles des variables de charge et de déformation.

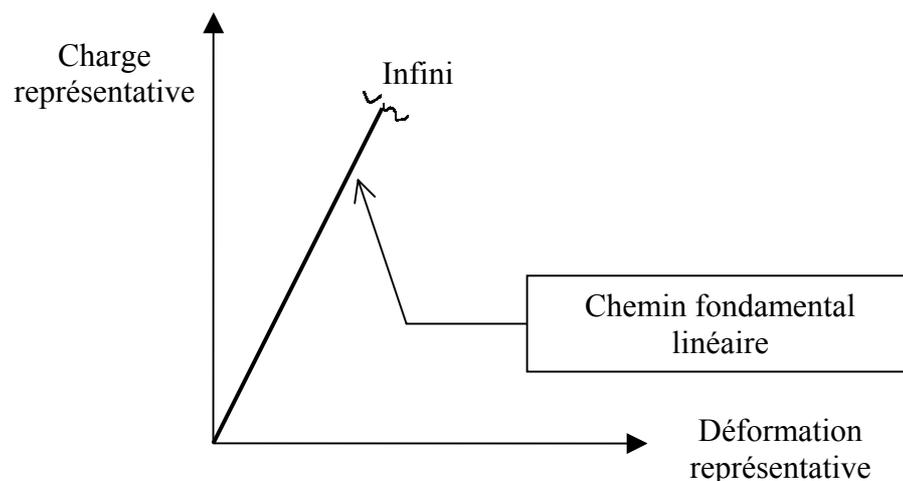
Ceci est montré schématiquement sur la figure (IV.3). Il n'est pas difficile de prévoir les conséquences d'un tel comportement :

1. Une structure linéaire peut soutenir n'importe quelle charge et subir n'importe quelle grandeur de déplacement.
2. Il n'y a aucun point critique, tournant ou de rupture.
3. La réponse à différents systèmes de charge peut être obtenue par le principe de superposition.
4. La décharge remet la structure en position d'équilibre.

Les conditions pour qu'un tel modèle soit applicable sont:

- Elasticité linéaire parfaite pour toute déformation.
- Déformations infinitésimales.
- Résistance infinie.

Ces hypothèses sont non seulement physiquement peu réalistes mais mutuellement contradictoires. Par exemple, si les déformations doivent rester infinitésimales pour n'importe quelle charge, les corps doivent être rigides plutôt qu'élastiques, ce qui contredit la première prétention. Ainsi, il y a nécessairement des limites placées sur la validité du modèle linéaire. Néanmoins, le modèle linéaire peut être une bonne approximation de parties de la réponse non-linéaire. En particulier, la réponse du chemin fondamental à proximité l'état de référence; voir par exemple la figure (IV.2). Puisque pour beaucoup des structures ce segment représente l'état de service, le modèle linéaire est largement répandu dans des calculs de conception. L'avantage principal de ceci est que la superposition des effets s'applique. <sup>[FEL01b]</sup>



**Figure (IV.3) :** Diagramme de réponse pour un modèle purement linéaire <sup>[FEL01b]</sup>

#### IV.5. Rigidité tangente et stabilité :

La tangente à un chemin d'équilibre peut être considérée comme la limite du rapport :

$$\frac{\text{Incrément de force}}{\text{Incrément de déplacement}}$$

C'est par définition une rigidité ou, plus précisément, la rigidité tangente associées aux forces et déplacements représentatifs. Le rapport réciproque s'appelle flexibilité ou la souplesse. Le signe de la rigidité de tangente est étroitement associé à la question de la stabilité d'un état d'équilibre. Une rigidité négative est nécessairement associée à un équilibre instable. Une rigidité positive est nécessaire mais non suffisante pour la stabilité. Si les quantités de charge et de déplacements sont conjugués dans le sens de travail virtuel, la surface sous le diagramme charge-déformation peut être interprété comme le travail effectué par le système.

#### IV.6. Sources des non-linéarités : <sup>[FEL01b]</sup>

Un diagramme de réponse caractérise seulement le comportement grossier d'une structure, comme il pourrait être observé simplement en faisant une expérience sur une machine d'essai mécanique. Pour l'analyse structurale il y a deux sources de comportement non-linéaire. Les deux sources sont discutées dans les sections suivantes.

##### IV.6.1. Non-linéarité géométrique :

###### *Source physique :*

Le changement dans la géométrie au fur et à mesure que la structure se déforme est pris en considération en établissant les équations contraintes-déplacements et les équations d'équilibre.

###### *Applications :*

Structures minces dans des applications de construction aérospatiale, civile et mécanique. Structures tendues comme les câbles et les membranes gonflables. Formage des métaux et du plastique. Analyse de tous les types de stabilité.

##### IV.6.2. Non-linéarité matérielle :

###### *Source physique :*

Le comportement matériel ou rhéologique dépend de l'état actuel des déformations et probablement aussi de l'histoire de la déformation. D'autres variables constitutives ( précontrainte, température, temps, humidité, champs électromagnétiques, etc...) peuvent être concernées.

###### *Applications :*

Structures soumises à l'élasticité non-linéaire, à plasticité, à la visco-élasticité, et aux effets de fluage.

## IV.7. Résolution d'un système d'équation non linéaire :<sup>[HIN80]</sup>

### IV.7.1. Plasticité dans les plaques :

Dans l'analyse élasto-plastique de la plaque de Mindlin, on suppose que quand les moments atteignent la valeur de plastification  $M_0$ , le point de Gauss devient plastique instantanément (en réalité l'étendu de la plasticité sur l'épaisseur est graduelle). De plus, on suppose que la fonction de plasticité  $F$  est fonction des moments de flexion  $\hat{\sigma}_f$ , mais non fonction des forces de cisaillement  $\hat{\sigma}_c$ . La fonction de plasticité est aussi considérée fonction du paramètre d'écroutissage  $\hat{H}$ .

Durant la plastification, on suppose que  $\hat{\sigma}_f$  doit rester sur la surface de plasticité donc :

$$\hat{F}(\hat{\sigma}_f, \hat{H}) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Où en considérant les matériaux de Tresca et Von-Mises :

$$\hat{F}(\hat{\sigma}_f, \hat{H}) = \int_{-h/2}^{h/2} F(\sigma_f, H).dz \quad (\text{IV.2})$$

#### Remarque :

On travaille là sur toute l'épaisseur de la plaque donc :

- $\hat{F}$  remplace  $F$ .
- $\{M_x, M_y, M_{xy}\}$  remplacent  $\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$ .
- $M_0 = \frac{\sigma_0 \cdot l \cdot h^2}{4}$  remplace  $\sigma_0$ .

Ainsi, les relations incrémentales de résultantes de contrainte-déformation sont données par :

$$\begin{Bmatrix} d\hat{\sigma}_f \\ d\hat{\sigma}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{D}_{ep})_f & 0 \\ 0 & \hat{D}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\hat{\varepsilon}_f \\ d\hat{\varepsilon}_c \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.3})$$

Dans lesquelles :

$$(\hat{D}_{ep})_f = \hat{D}_f - \frac{\hat{d}_D \cdot \hat{d}_D^T}{\hat{A} + \hat{d}_D^T \cdot \hat{\alpha}} \quad (\text{IV.4})$$

$$\text{où : } \hat{\alpha} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{F}}{\partial M_x} \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial M_y} \\ \frac{\partial \hat{F}}{\partial M_{xy}} \end{Bmatrix}$$

$$; \hat{d}_D = \hat{D}_f \cdot \hat{\alpha} ; \hat{A} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{H}} d\hat{H} \text{ et } \hat{D}_f = \int_{-h/2}^{h/2} D'_f \cdot z \cdot dz ; \hat{D}_c = \int_{-h/2}^{h/2} D'_c \cdot dz$$

Avec  $\lambda$  la constante de proportionnalité.

Le symbole  $\hat{\phantom{x}}$  dénote une quantité intégrée sur l'épaisseur.

Notez que  $\hat{D}_c$  reste élastique

### IV.7.2. Résolution du système d'équations d'équilibre non linéaire dans le cas des plaques de Mindlin :

Pour les plaques de Mindlin, la forme incrémentale des équations d'équilibre durant l'incrément de charge est :

$$\psi(d^p) + K_T(d^p)\Delta d^p = 0 \quad (IV.5)$$

où  $\psi$  est donnée d'après l'équation (II.58).

Cependant la matrice de rigidité tangentielle est donnée par :

$$K_T = \int_A \left( [B_f]^T \left[ (\hat{D}_{ep})_f \right] [B_f] + [B_c]^T \left[ \hat{D}_c \right] [B_c] \right) dA \quad (IV.6)$$

Elle est évaluée sur toute l'épaisseur.

Comme  $[(D_{ep})_f]$  est fonction de  $z$ , la technique d'intégration numérique sera employée dans l'évaluation de l'intégral sur l'épaisseur de la plaque.

### IV.7.3. Résumé des procédés de résolution :

Les procédés de résolution de l'analyse élasto-plastique des plaques de Mindlin sont résumés dans les tables : (IV.1) et (IV.2).

**Table (IV.1) : Etapes de la technique de résolution pour les plaques de Mindlin multicouches et unicouches**<sup>[HIN80]</sup>

- 01 Commencer un nouvel incrément de charge  $f = f + \Delta f$ .
- 02 Mettre  $\Delta f$  égal au vecteur incrémental de charge courant.
- 03 Mettre  $d^0$  égal à 0 pour le premier incrément ou égal au vecteur de déplacement total à la fin du dernier incrément de charge.
- 04 Mettre  $\Psi^0$  égal au vecteur force résiduelle à la fin du dernier incrément ou à zéro 0 au premier incrément de charge.
- 05 Mettre  $\Psi^0 = \Psi^0 + \Delta f$ .
- 06 Résoudre  $\Delta d^0 = -[K_T]^{-1} \cdot \Psi^0$   
Utiliser l'ancienne valeur de  $[K_T]$  ou celle mise à jour..
- 07 Mettre  $d^l = d^0 + \Delta d^0$
- 08 Evaluer  $\Psi^l(d^l)$
- 09 Si la solution a convergé, aller à 11, sinon continuer.
- 10 Continuer l'itération jusqu'à convergence de solution.
- 11 Si ce n'est pas le dernier incrément aller à 1. autrement arrêter.

**Table (IV.2) : Boucle itérative de l'analyse élasto-plastiques des plaques de Mindlin unicouche**<sup>[HIN80]</sup>

- 01 Mettre le numéro d'itération  $i = 1$ .
- 02 Résoudre  $\Delta d^i = -[K_T]^{-1} \cdot \Psi^i$  ( Utiliser l'ancien  $K_T$  ou celui mis à jour )
- 03 Mettre  $d^{i+1} = d^i + \Delta d^i$ .
- 04 Pour chaque point de Gauss, évaluer les incréments de déformation :
- $$\Delta \hat{\varepsilon}_f^i = B_f \cdot \Delta d^i$$
- $$\Delta \hat{\varepsilon}_c^i = B_c \cdot \Delta d^i$$
- 05 Utilisant les rigidités élastiques, estimer, à chaque point de Gauss, les incréments de contraintes et les contraintes résultantes :
- $$\Delta \hat{\sigma}_f^i = \hat{D}_f \cdot \Delta \hat{\varepsilon}_f^i \quad \text{d'où} \quad \hat{\sigma}_f^{i+1} = \hat{\sigma}_f^i + \Delta \hat{\sigma}_f^i$$
- $$\Delta \hat{\sigma}_c^i = \hat{D}_c \cdot \Delta \hat{\varepsilon}_c^i \quad \text{d'où} \quad \hat{\sigma}_c^{i+1} = \hat{\sigma}_c^i + \Delta \hat{\sigma}_c^i$$
- 06 A chaque point de Gauss dépendant de l'état de  $\hat{\sigma}_f^i$  et de  $\hat{\sigma}_c^i$ , ajuster  $\hat{\sigma}_f^{i+1}$  pour satisfaire le critère de plasticité et préserver la condition de normalité.
- 07 Evaluer le vecteur force résiduelle :
- $$\Psi^{i+1} = \int_A \left( [B_f]^T \cdot \hat{\sigma}_f + [B_c]^T \cdot \hat{\sigma}_c \right) \cdot dA - f$$
- 08 Si la solution a convergé, continuer, sinon mettre  $i = i+1$  et aller à 2.
- 09 Aller à l'incrément de charge suivant.

#### IV.8. Méthodes de résolution :

Les algorithmes de résolution des problèmes non linéaires sont devenus une nécessité face au développement de modèles théoriques à comportement complexe. Il devient indispensable de disposer d'algorithmes de résolution fiables et efficaces. Les algorithmes de résolution classiques utilisés dans la méthode des éléments finis sont des algorithmes incrémentaux et itératifs, qui présentent souvent des difficultés de convergence liées essentiellement à l'existence de points limites en charges, en déplacements ou les deux en même temps.<sup>[TAY03]</sup>

Cependant, les algorithmes de résolution dépendent d'une manière générale du type de problème non linéaire que l'on souhaite traiter.

Notre objectif est d'exposer ces algorithmes d'une part, et d'autre part de déterminer celui qui est le plus performant en matière de la qualité de la solution trouvée et du temps de calcul numérique mis pour décrire tout le chemin d'équilibre avec les éventuels points limites en charges ou en déplacements.<sup>[GUE99]</sup>

Les méthodes de résolution que nous présentons dans ce qui suit, sont basées sur des processus incrémentaux. Elles consistent à appliquer par incrément successif un niveau de charge et à trouver pour chaque incrément la réponse de la structure. Cette dernière est obtenue après avoir linéarisé en chaque incrément les équations d'équilibre.

Ces méthodes incrémentales se divisent en deux types :

- Méthode incrémentale pure.
- Méthode incrémentale itérative.

Le choix d'une méthode de résolution doit tenir compte de plusieurs facteurs :

- Le type de non-linéarité : prépondérante ou non.
- La précision et la rapidité de convergence désirée.
- Le risque de divergence.

#### IV.8.1. Méthode incrémentale pure :<sup>[HYO90]</sup>

Dans la méthode incrémentales pure, un incrément de charge est imposé, la matrice de rigidité tangente permet d'avoir l'accroissement du déplacement correspondant. En effet, l'équilibre n'est pas corrigé dans ce cas; entraînant souvent une divergence de la solution recherchée, Figure(IV.1). Ce problème peut être évité en utilisant des incréments très petits, ce qui rend la méthode lourde, donc faiblement utilisée.

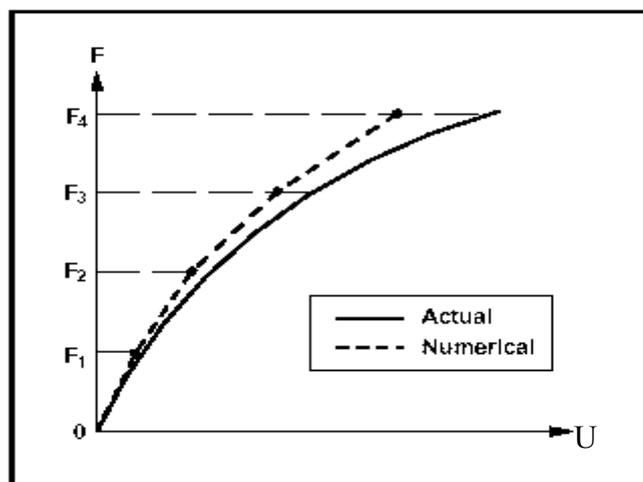


Figure (IV.4) : Méthode incrémentale<sup>[HYO90]</sup>

#### IV.8.2. Méthode incrémentale itérative :<sup>[CHR00],[QUO00],[CHE88]</sup>

La méthode incrémentale itérative utilise le même processus incrémental que la méthode précédant seulement, une correction de l'équilibre est introduite sur chaque incrément en utilisant un processus itératif. Cette correction peut se faire de plusieurs manières suivant le type de matrice de rigidité utilisée (initiale, tangente) définissant ainsi plusieurs méthodes incrémentales itératives dont la plus connue est celle de Newton-Raphson.

Dans l'analyse incrémental, la charge totale  $\{F\}$  agissant sur une structure est appliquée incrémentalement par pas. à l'étape  $m+1$ , la charge peut être exprimée par :

$${}^{m+1}\{F\} = {}^m\{F\} + {}^{m+1}\{\Delta F\} \quad (\text{IV.7})$$

Là où l'indice supérieur gauche  $m$  a été employé pour indiquer le  $m^{\text{eme}}$  pas incrémental.

Supposant que les solutions au  $m^{\text{eme}}$  pas  ${}^m\{U\}$ ,  ${}^m\{\sigma\}$ ,  ${}^m\{\varepsilon\}$  sont connues, et à l'étape ( $m+1$ ) nous avons correspondant à la charge incrémentale  $\{\Delta F\}$  :

$${}^{m+1}\{U\} = {}^m\{U\} + \{\Delta U\} \quad (\text{IV.8})$$

$${}^{m+1}\{\sigma\} = {}^m\{\sigma\} + \{\Delta\sigma\} \quad (\text{IV.9})$$

Nous avons :

$${}^{m+1}\{F\} = {}^{m+1}\{R\} \quad (\text{IV.10})$$

L'équation (IV.10) représente l'équilibre des forces nodales extérieures  ${}^{m+1}\{F\}$  et des forces nodales internes  ${}^{m+1}\{R\}$ .

Mais généralement les deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence entre les deux est appelée ( Forces résiduelles ) :<sup>[CHE88]</sup>

$$\Delta F = {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\} \quad (\text{IV.11})$$

Pour assurer l'équilibre, ces résidus doivent être minimisés.

#### IV.8.2.1 Méthode de Newton-Raphson ( Rigidité tangente ) :<sup>[CHE88],[COF01],[COF03]</sup>

La méthode de Newton-Raphson utilise la matrice de rigidité tangente recalculée à chaque itération pour la correction de l'équilibre, voir Figure (IV.5).

Cette méthode a une convergence très rapide, mais son inconvénient principal réside dans le temps de calcul de l'actualisation de la matrice de rigidité tangente à chaque itération.

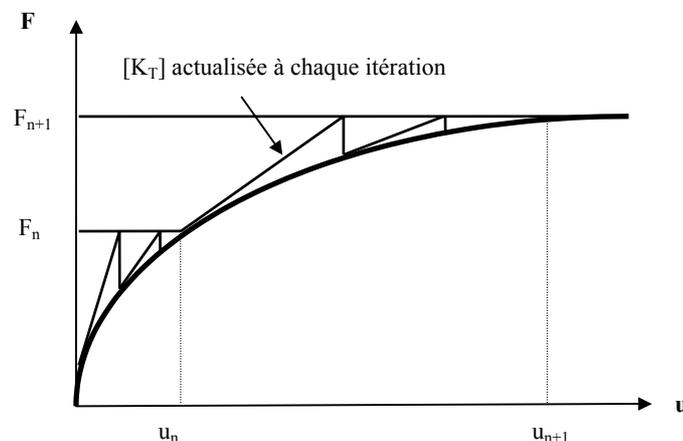


Figure (IV.5) : Méthode de Newton-Raphson<sup>[CHE88]</sup>

Algorithme de la méthode de Newton-Raphson : <sup>[CHE88]</sup>

$${}^{m+1}[K]^{(i-1)} \{\Delta U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}^{(i-1)} \quad (\text{IV.12})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (\text{IV.13})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(0)} = {}^m\{U\} \quad (\text{IV.14})$$

$${}^{m+1}[K]^{(0)} = {}^m[K] \quad (\text{IV.15})$$

$${}^{m+1}\{F\}^{(0)} = {}^m\{F\} \quad (\text{IV.16})$$

(  $i = 1, 2, \dots$  )

#### IV.8.2.2. Méthode de Newton-Raphson modifiée : <sup>[CHE88],[COF01],[COF03],[ZIE77]</sup>

La méthode de Newton-Raphson modifiée est identique à la précédente mais, utilise la matrice de rigidité tangente recalculée au début de chaque incrément et gardée constante pour toutes les itération pour la correction de l'équilibre, voir Figure (IV.6). Cette méthode a une convergence moins rapide que la précédente, mais elle a l'avantage de garder la matrice de rigidité constante pour chaque incrément ce qui permet d'avoir un gain sensible dans le temps de calcul.

En effet, dans la méthode de résolution de Newton-Raphson modifiée, nous pouvons éviter au début le calcul systématique de la matrice de rigidité tangente, en la remplaçant par une matrice de rigidité initiale dans le but de vérifier la fiabilité des forces internes correspondant aux contraintes dans la structure. Ou bien, pour résoudre les problèmes de faibles non-linéarité ou de non-linéarité matérielle. Cependant, la lenteur de convergence liée à cette méthode peut être améliorée en la couplant avec des méthodes d'accélération de convergence de type "line-search".

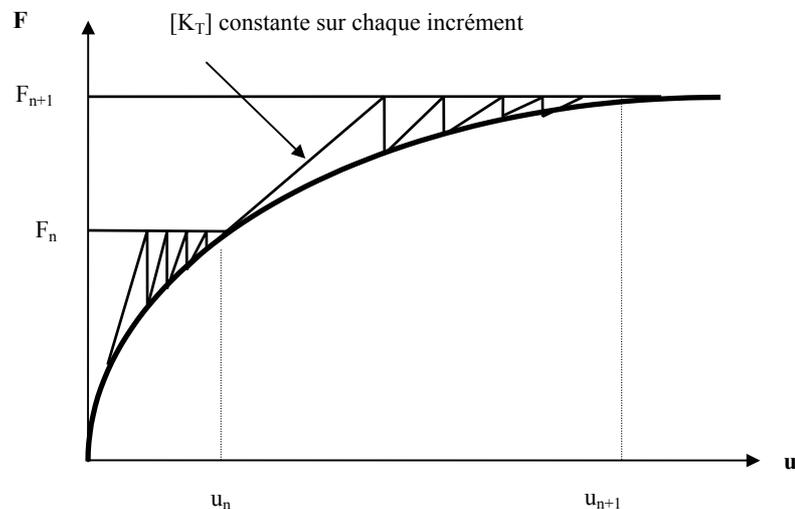


Figure (IV.6) : Méthode de Newton-Raphson modifiée <sup>[CHE88]</sup>

Actuellement, la méthode de résolution de Newton-Raphson standard constitue la base d'algorithmes de résolutions la plus répandue pour résoudre les problèmes de structures non linéaires. Signalons tout de même qu'on reste toujours gagnant en terme de nombre d'itérations par incrément avec l'utilisation de la méthode de résolution de Newton-Raphson. Par contre le temps de calcul reste coûteux, car pour une modélisation de taille importante et des degrés de liberté élevés, à cause de l'assemblage et de l'actualisation de sa matrice de rigidité tangente à chaque incrément.

Algorithme de la méthode de Newton-Raphson modifiée:<sup>[CHE88]</sup>

En remplace la matrice de rigidité tangente  ${}^{m+1}[K]^{(i-1)}$  de l'équation (IV.12 ) par  ${}^n[K]$  la matrice de rigidité tangente évaluée a l'étape  $n$  de charge (  $n < m+1$  ).

Si  ${}^n[K]$  est évaluée seulement au début de la première étape de charge donc la matrice élastique initiale  ${}^n[K] = [K]_0$  est employée pour toutes les étapes de charge : Souvent, la matrice de la rigidité est évaluée au début de chaque pas de la charge ou pour le  $m+1$  pas, la matrice de rigidité utilisée est :

$${}^n[K] = {}^{m+1}[K]^{(0)} = {}^m[K] \quad (\text{IV.17})$$

Donc l'algorithme est :

$${}^n[K]\{\Delta U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}^{(i-1)} \quad (\text{IV.18})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (\text{IV.19})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(0)} = {}^m\{U\} \quad (\text{IV.20})$$

$${}^{m+1}\{F\}^{(0)} = {}^m\{F\} \quad (\text{IV.21})$$

$$(i = 1, 2, \dots)$$

### IV.8.2.3. Méthode de la rigidité initiale :

La méthode de la rigidité initiale utilise une matrice de rigidité élastique constante pour éviter les coûteuses actualisations de  $[K]$ , cette méthode assure toujours la convergence vers la solution désirée.

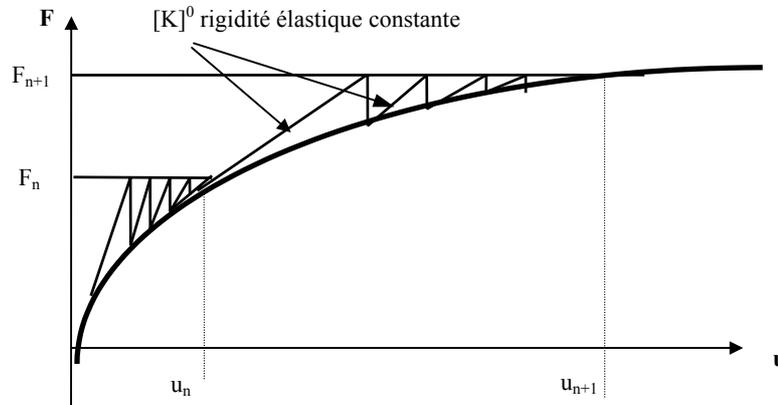


Figure (IV.6) : Méthode de la rigidité initiale<sup>[CHE88]</sup>

Algorithme de la méthode de la rigidité initiale :<sup>[CHE88]</sup>

$$[K]^0 \{\Delta U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}^{(i-1)} \quad (\text{IV.22})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (\text{IV.23})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(0)} = {}^m\{U\} \quad (\text{IV.24})$$

$${}^{m+1}\{F\}^{(0)} = {}^m\{F\} \quad (\text{IV.25})$$

(  $i = 1, 2, \dots$  )

### IV.9. Critères de convergence :

<sup>[CHE88]</sup>

Un critère de convergence défini correctement pour terminer l'itération d'équilibre est une partie essentielle d'une stratégie incrémentale efficace de solution.

A la fin de chaque itération, la solution obtenue doit être vérifiée en utilisant une tolérance choisie, pour voir si la convergence a eu lieu. Pour une analyse par éléments finis en déplacement, le calcul du déplacement devrait approcher le déplacement exact, car le déplacement exact n'est pas connu à l'avance, une approximation de ce critère peut être exprimée comme suit :

$$\frac{\|\{\Delta U\}^{(i)}\|_2}{\|{}^{m+1}\{U\}^{(i)} - {}^m\{U\}\|_2} \leq \varepsilon_D \quad (\text{IV.26})$$

Avec :  $\{\Delta U\}^{(i)}$  le déplacement incrémental de  $i^{\text{ème}}$  itération.

$\| \cdot \|_2$  : est utilisé pour dénoter la norme Euclidienne d'un vecteur.

$\varepsilon_D$  : est la tolérance prescrite pour le déplacement  $\{U\}$ .

Ce critère est donc appelé le critère du déplacement.

Pour une itération de l'équilibre, nous cherchons une solution  $\{U\}$  pour assurer la condition d'équilibre (IV.10). A cette fin, un deuxième critère de la convergence est exigé pour les forces résiduelles, où la différence entre la force interne et la force externe  $\Delta F = {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}$  doit être nul.

Cependant, il est impossible et inutile que les forces résiduelles atteignent zéro dans un processus numérique. Donc, nous introduisons une approximation de la forme :

$$\frac{\| {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}^{(i)} \|_2}{\| {}^{m+1}\{F\} - {}^m\{R\} \|_2} \leq \varepsilon_F \quad (\text{IV.27})$$

avec  $\varepsilon_F$  : est une tolérance prescrite pour la force.

Ce critère est donc appelé le critère de force.

Dans certains cas de discontinuité ( fissuration par exemple ) les forces peuvent augmenter alors que les déplacements diminuent donc un troisième critère doit fournir une mesure de la façon que les déplacements et les forces sont à leurs valeurs d'équilibre. Ce critère est appelé critère d'énergie interne.

$$\frac{\{\Delta U\}^{(i)T} \left( {}^{m+1}\{F\} - {}^{m+1}\{R\}^{(i)} \right)}{\{\Delta U\}^{(i)T} \left( {}^{m+1}\{F\} - {}^m\{R\} \right)} \leq \varepsilon_E \quad (\text{IV.28})$$

$\varepsilon_E$  : est une tolérance prescrite pour l'énergie interne.

N'importe quel critère de ces trois critères ou de leurs combinaisons peuvent être employées pour terminer une itération, mais la tolérance doit être soigneusement choisie. Une tolérance trop grande mènera à un résultat imprécis, alors qu'une tolérance trop serrée peut mener à des calculs laborieux et inutiles.

## CHAPITRE V : VALIDATION ET EXPERIMENTATION NUMERIQUE

### V.1. Introduction :

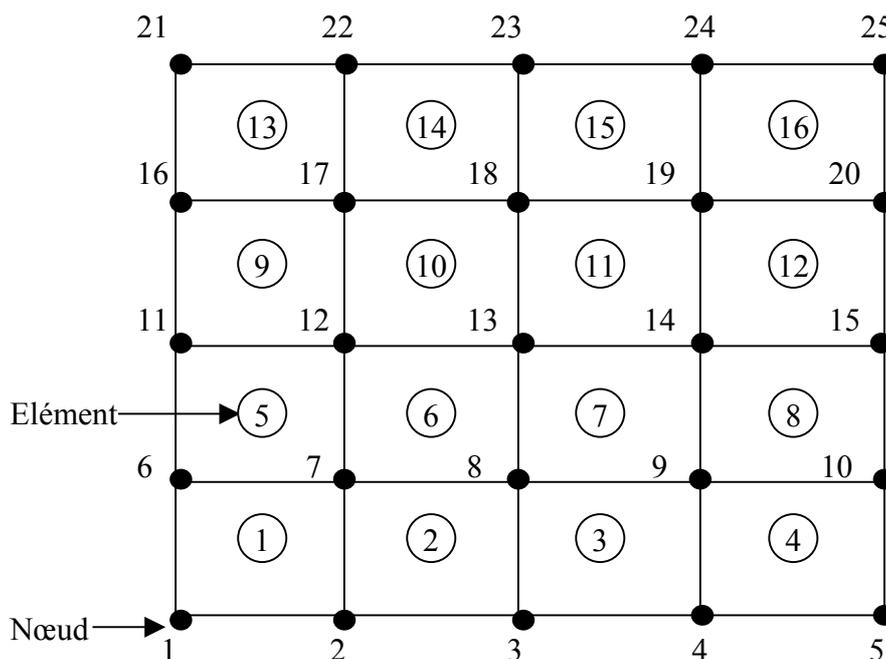
Ce chapitre portera sur la simulation numérique de la propagation de la plasticité à travers la plaque en flexion sous différentes conditions.

Sachant que le programme utilise une bibliothèque d'éléments : Hétérosis à 9 nœuds, Lagrange à neuf nœuds Q9, Serendip à huit nœuds Q8, linéaire à 4 nœuds Q4 et l'élément avec cisaillement transversal constant par côté Q4 $\gamma$ .

Mais pour valider le programme, une partie sera consacrée à la comparaison des résultats de notre programme avec la solution analytique Timoshenko<sup>[TIM85]</sup> et avec le logiciel RDM6<sup>[YVE98]</sup> (utilisant l'élément Q4 $\gamma$ ) dans le domaine linéaire (élasticité), puis aux résultats obtenus de programmes traitant des problèmes dans le domaine non linéaire (élasto-plasticité) notamment ceux de Hinton et Owen<sup>[HIN80]</sup>.

Lors de l'expérimentation numérique, on abordera le cœur du sujet à savoir la réponse statique des plaques (élastiques, plastiques) sous l'action d'un trajet de chargement donné, et la propagation de la plasticité au niveau de la plaque et la charge ultime pour différents cas (on fera varier le type d'élément, l'épaisseur de la plaque, les conditions aux limites, le critère de plasticité et la méthode de résolution de système non linéaire), pour mieux illustrer le phénomène étudié.

Ci après, la représentation des éléments finis plaques utilisés dans le programme ainsi que le mode de numérotation des nœuds.



**Figure (V.1) :** Représentation et numérotation des éléments à 4 nœuds Q4 et Q4 $\gamma$ .

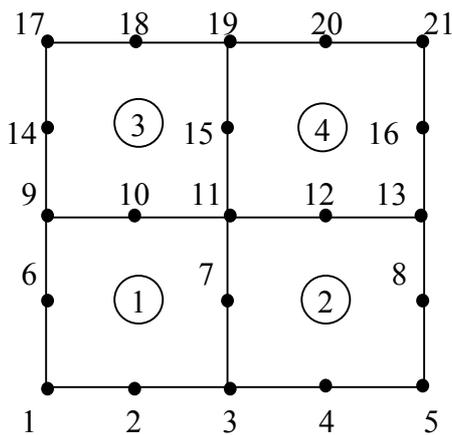


Figure (V.2) : Représentation et numérotation des éléments à 8 nœuds Q8.

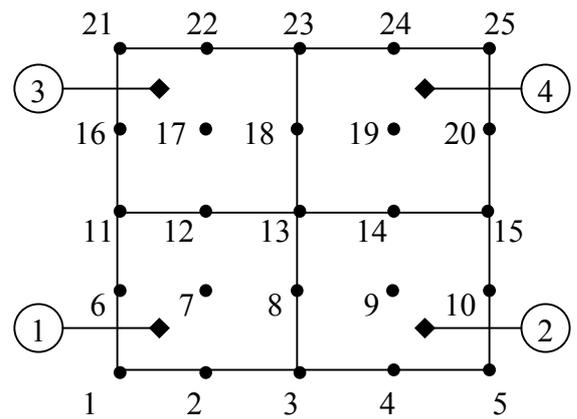


Figure (V.3) : Représentation et numérotation des éléments à 9 nœuds Q9 et HétérosisHT9

**V.2. Validation :**

**V.2.1. Domaine linéaire :**

Pour la validation dans le domaine élastique, les résultats donnés par notre programme seront comparés à ceux donnés par le logiciel RDM6 ainsi que ceux théoriques de Timoshenko.

Selon la théorie des plaques de Timoshenko<sup>[TIM85]</sup>, la flèche maximale d'une plaque carrée est donnée par la relation :

$$W_{th} = \alpha \frac{q \cdot a^4}{D} \tag{V.1}$$

Où  $D$  : la rigidité à la flexion de la plaque

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \tag{V.2}$$

$\alpha$  : Facteur numérique dépendant du rapport  $b/a$  (la longueur sur la largeur) ainsi que des conditions aux limites). Les valeurs de  $\alpha$  sont dans le tableau (V.1).

$q$  : Charge répartie sur la plaque.

$a$  : La largeur de la plaque.

$h$  : L'épaisseur de la plaque.

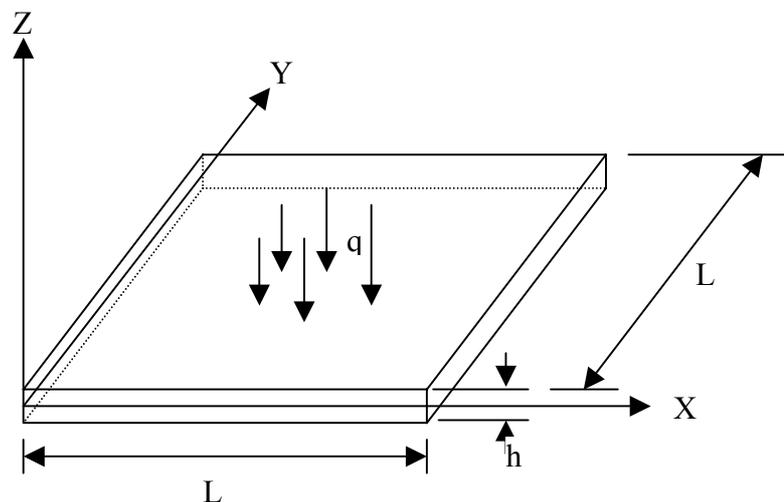


Figure (V.4) : Plaque carrée soumise a une charge répartie  $q$

Conditions d'appui	b/a	$\alpha$
Plaque Simplement appuyée.	1	0,00406
Plaque encastree.	1	0,00126
Plaque ayant un côté encastree et trois simplement appuyés.	1	0,00279
Plaque ayant un côté libre et trois simplement appuyés.	1	0,01286
Plaque à deux côtés opposés en appui simple et deux encastrés.	1	0,00192

**Tableau (V.1) :** Les valeurs de  $\alpha$  <sup>[TIM85]</sup>

La comparaison se fera avec cinq éléments : l'élément de Lagrange à 9 nœuds (Q9), l'élément Hétérosis à 9 nœuds (HT9), l'élément Serendip à 8 nœuds (Q8), l'élément à 4 nœuds (Q4) et l'élément à 4 nœuds avec cisaillement transversal constant par côté Q4 $\gamma$ .

Les données du problème sont les suivantes :

Plaque carrée :  $a = b = L = 1$  m, Epaisseurs : ( $h = 0.01$  m ,  $h = 0.1$  m et  $h = 0.5$  m).

Module de Young  $E = 210\,000\,000$  KN/m<sup>2</sup> , Coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ .

La charge répartie  $q = 10$  KN/m<sup>2</sup>.

Conditions d'appui	Plaque Simplement appuyée	Plaque encastree	Plaque ayant un côté encastree et trois simplement appuyés	Plaque ayant un côté libre et trois simplement appuyés.	Plaque à deux côtés opposés en appui simple et deux encastrés	
Déplacement Max ( m )						
$W_{th}$	$2,111 \times 10^{-3}$	$6,552 \times 10^{-4}$	$1,450 \times 10^{-3}$	$6,687 \times 10^{-3}$	$9,984 \times 10^{-4}$	
$W_{RDM6}$	$2,065 \times 10^{-3}$	$6,309 \times 10^{-4}$	$1,375 \times 10^{-3}$	$6,167 \times 10^{-3}$	$9,030 \times 10^{-4}$	
Notre Programme	$W_{Q4}$	$2,065 \times 10^{-3}$	$6,311 \times 10^{-4}$	$1,376 \times 10^{-3}$	$6,171 \times 10^{-3}$	$9,086 \times 10^{-4}$
	$W_{Q4\gamma}$	$2,065 \times 10^{-3}$	$6,309 \times 10^{-4}$	$1,375 \times 10^{-3}$	$6,167 \times 10^{-3}$	$9,077 \times 10^{-4}$
	$W_{Q8}$	$2,089 \times 10^{-3}$	$6,613 \times 10^{-4}$	$1,355 \times 10^{-3}$	$6,698 \times 10^{-3}$	$9,836 \times 10^{-4}$
	$W_{Q9}$	$2,117 \times 10^{-3}$	$6,648 \times 10^{-4}$	$1,453 \times 10^{-3}$	$6,694 \times 10^{-3}$	$10,02 \times 10^{-4}$
	$W_{HT9}$	$2,101 \times 10^{-3}$	$6,442 \times 10^{-4}$	$1,431 \times 10^{-3}$	$6,698 \times 10^{-3}$	$9,791 \times 10^{-4}$

**Tableau (V.2) :** Les résultats obtenus par la théorie de Timoshenko, le logiciel RDM6 et notre programme ( pour  $h = 0.01$  )

Conditions d'appui		Plaque Simplement appuyée	Plaque encastrée	Plaque ayant un côté encastré et trois simplement appuyés	Plaque ayant un côté libre et trois simplement appuyés.	Plaque à deux côtés opposés en appui simple et deux encastrés
Déplacement Max ( m )						
$W_{RDM6}$		$2,178 \times 10^{-6}$	$7,439 \times 10^{-7}$	$1,522 \times 10^{-6}$	$6,391 \times 10^{-6}$	$1,061 \times 10^{-6}$
Notre Programme	$W_{Q4}$	$2,187 \times 10^{-6}$	$7,584 \times 10^{-7}$	$1,537 \times 10^{-6}$	$6,497 \times 10^{-6}$	$1,079 \times 10^{-6}$
	$W_{Q4\gamma}$	$2,178 \times 10^{-6}$	$7,439 \times 10^{-7}$	$1,522 \times 10^{-6}$	$6,391 \times 10^{-6}$	$1,061 \times 10^{-6}$
	$W_{Q8}$	$2,219 \times 10^{-6}$	$7,793 \times 10^{-7}$	$1,588 \times 10^{-6}$	$7,027 \times 10^{-6}$	$1,146 \times 10^{-6}$
	$W_{Q9}$	$2,222 \times 10^{-6}$	$7,884 \times 10^{-7}$	$1,594 \times 10^{-6}$	$7,024 \times 10^{-6}$	$1,152 \times 10^{-6}$
	$W_{HT9}$	$2,219 \times 10^{-6}$	$7,809 \times 10^{-7}$	$1,588 \times 10^{-6}$	$7,027 \times 10^{-6}$	$1,146 \times 10^{-6}$

Tableau (V.3) : Les résultats obtenus par le logiciel RDM6 et notre programme ( pour  $h = 0.1$  )

Conditions d'appui		Plaque Simplement appuyée	Plaque encastrée	Plaque ayant un côté encastré et trois simplement appuyés	Plaque ayant un côté libre et trois simplement appuyés.	Plaque à deux côtés opposés en appui simple et deux encastrés
Déplacement Max ( m )						
$W_{RDM6}$		$3,957 \times 10^{-8}$	$2,809 \times 10^{-8}$	$3,654 \times 10^{-8}$	$8,871 \times 10^{-8}$	$3,380 \times 10^{-8}$
Notre Programme	$W_{Q4}$	$4,127 \times 10^{-8}$	$2,986 \times 10^{-8}$	$3,833 \times 10^{-8}$	$9,086 \times 10^{-8}$	$3,563 \times 10^{-8}$
	$W_{Q4\gamma}$	$3,957 \times 10^{-8}$	$2,809 \times 10^{-8}$	$3,654 \times 10^{-8}$	$8,871 \times 10^{-8}$	$3,380 \times 10^{-8}$
	$W_{Q8}$	$3,873 \times 10^{-8}$	$2,753 \times 10^{-8}$	$3,579 \times 10^{-8}$	$8,695 \times 10^{-8}$	$3,305 \times 10^{-8}$
	$W_{Q9}$	$3,884 \times 10^{-8}$	$2,764 \times 10^{-8}$	$3,588 \times 10^{-8}$	$8,703 \times 10^{-8}$	$3,316 \times 10^{-8}$
	$W_{HT9}$	$3,873 \times 10^{-8}$	$2,754 \times 10^{-8}$	$3,579 \times 10^{-8}$	$8,705 \times 10^{-8}$	$3,305 \times 10^{-8}$

Tableau (V.4) : Les résultats obtenus par le logiciel RDM6 et notre programme ( pour  $h = 0.5$  )

Les résultats obtenus par notre programme dans le domaine linéaire ( l'élasticité ) sont comparables à ceux obtenus avec le logiciel et à ceux de la théorie de timoshenko.

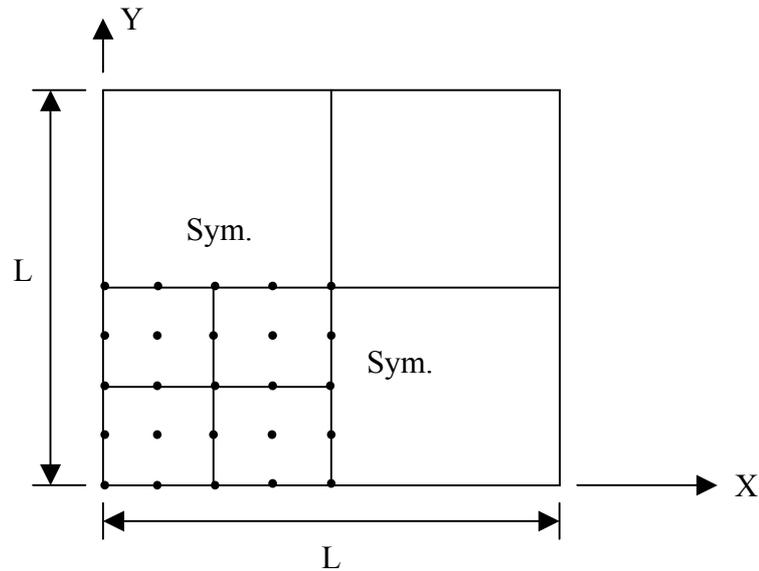
On remarque le bon comportement pour les plaques modérément épaisses (  $h = 0.1$  et  $h = 0.5$  respectivement ) de l'élément  $Q4\gamma$  et pour les plaques minces (  $h = 0.01$  ) les éléments quadratiques (  $Q8, Q9, HT9$  ) donnent des résultats comparables à ceux du logiciel RDM6.

## V.2.2. Domaine non linéaire :

### V.2.2.1. Exemple ( 2.1 ) :

Dans le domaine non-linéaire on validera les résultats donnés par notre programme par rapport à ceux de Hinton ( §9-7de la référence[HIN80] ).

Pour cela, on considère une plaque carrée simplement appuyée en élasto-plasticité avec le critère de Von-Mises. La structure est discrétisée avec des éléments hétérosis



*Figure(V.5) : Plaque carrée simplement appuyée*

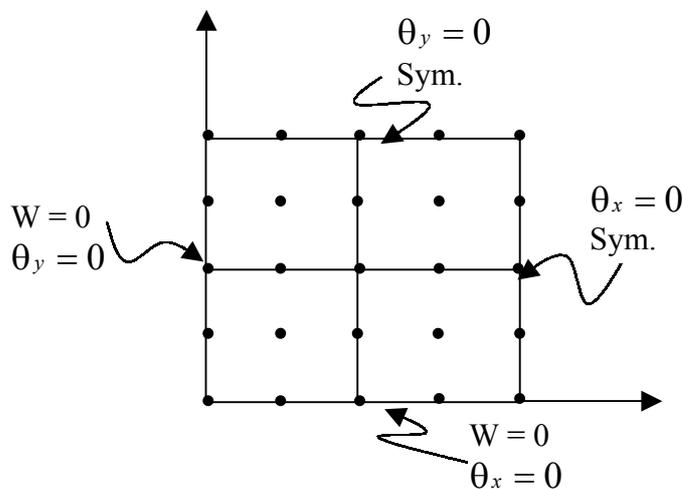
Les données du problème sont les suivantes :

Plaque carrée :  $a = b = L = 1$  m ; l'épaisseur :  $h = 0,01$  m.

Module de Young  $E = 210\,000\,000$  KN/m<sup>2</sup> , Coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$

La limite élastique :  $\sigma_0 = 200\,000$  KN/m<sup>2</sup>.

Par symétrie, on prend le quart de la plaque. Les conditions aux limites sont indiquées sur la figure (V.6).



*Figure (V.6) : Conditions aux limites d'un quart de la plaque ( exemple (2.1) )*

On arrive à des résultats similaires, qu'on présente dans la figure suivante :

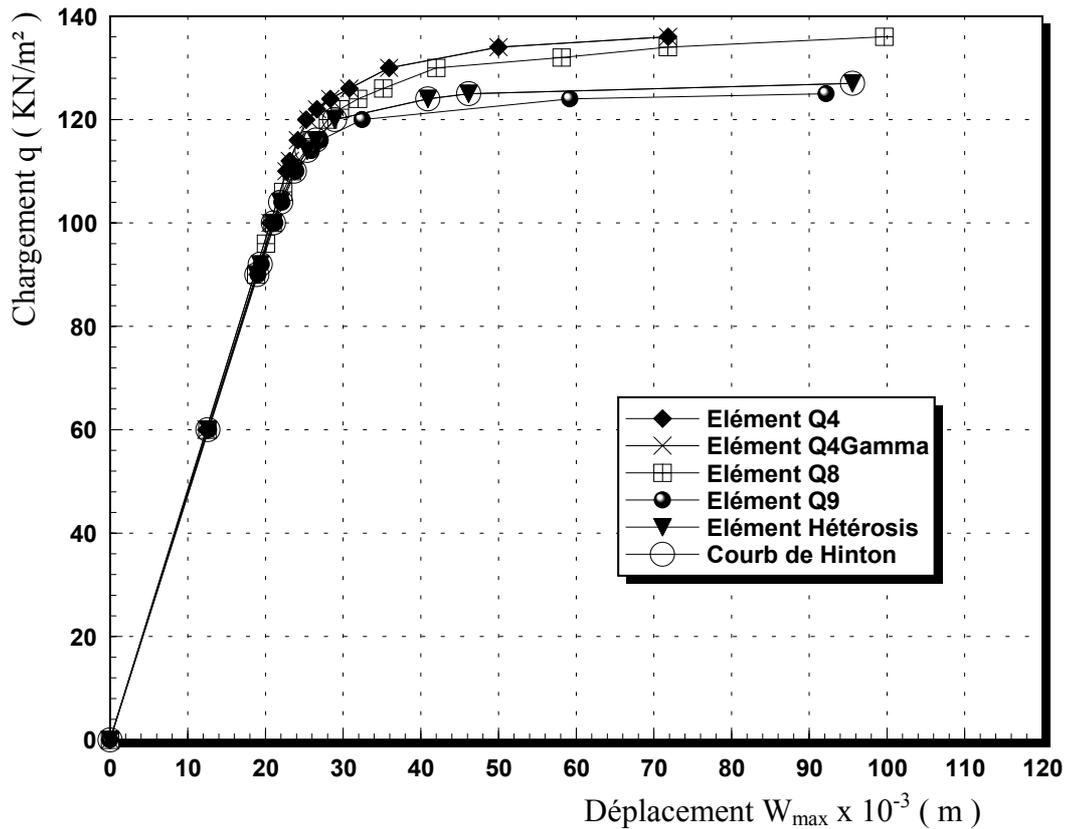


Figure (V.7) : Courbe chargement-déplacement des éléments : Hétérosis HT9, Lagrange Q9, Serendip Q8, Q4 et Q4  $\gamma$  et la courbe de Hinton<sup>[HIN80]</sup>

### Analyse et interprétation :

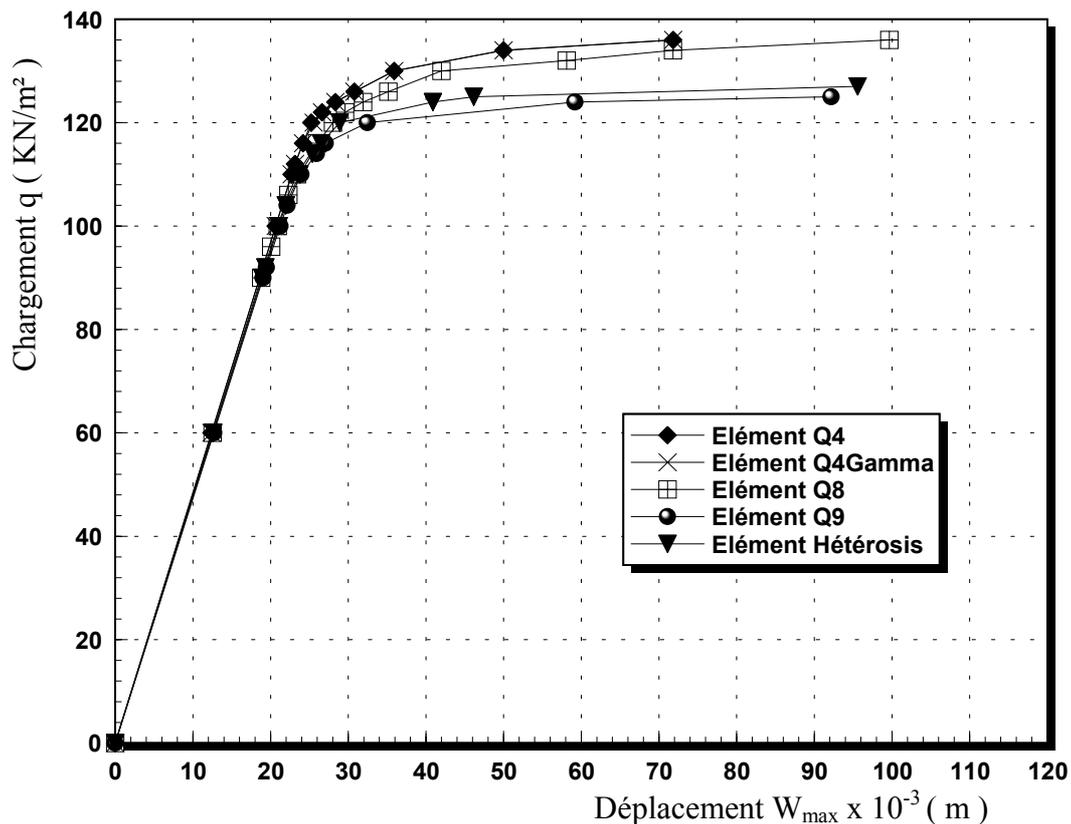
La figure (V.7) représente la courbe du déplacement au centre de la plaque en fonction du chargement appliqué avec différents types d'éléments. On remarque que les éléments de Lagrange et l'Hétérosis à 9 nœuds sont les plus performants, leurs courbes sont confondues avec celle de Hinton et Owen<sup>[HIN80]</sup>. Donc les résultats obtenus sont comparables à ceux donnés par le programme de Hinton.

### V.3. Expérimentation numérique :

Dans cette partie, il s'agit d'exécuter le programme pour différents cas (maillages, conditions aux limites, épaisseurs, critères de plasticité et méthodes de résolution), afin d'étudier leur influence, au fur et à mesure, on suit la propagation de la plasticité aux points de Gauss sur toute la structure. Les points de Gauss plastifiés seront présentés en couleur noire (indice **p**) dans les simulations.

#### V.3.1. Exemple ( 3.1 ) : Idem exemple ( 2.1 )

On reprend l'exemple (2.1) pour savoir la réponse statique des plaques ( élasto-plastique ) sous l'action d'un trajet de chargement donné, simulant la propagation de la plasticité au niveau de la plaque simplement appuyée, cet exemple porte sur les éléments Hétérosis, Lagrange à 9 nœuds, Serendip à 8 nœuds et les éléments Q4 et Q4 $\gamma$ . La plastification des points de Gauss est donnée par le critère de Von-Mises en combinaison avec la méthode de résolution de Newton-Raphson modifiée.



**Figure (V.8) :** Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Hétérosis, Lagrange Q9, Serendip Q8, Q4 et Q4 $\gamma$  ( Plaque simplement appuyée )

**Simulation de la propagation de la plasticité :**

Elément Q4 / Elément Q4 $\gamma$	Elément Hétérosis / Elément Q9
Un quart de la structure	Un quart de la structure

Chargement 112

x x	x <b>p</b>
x x	x x
x x	x x
x x	x x

116

x x	x <b>p</b>
x x	x x
x x	x x
<b>p</b> x	x x

96

x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
<b>p</b> x x	x x x

102

x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
<b>p</b> x x	x x x
<b>p</b> <b>p</b> x	x x x

120

x x	<b>p</b> <b>p</b>
x x	x <b>p</b>
x x	x x
<b>p</b> x	x x

122

x x	<b>p</b> <b>p</b>
x x	x <b>p</b>
<b>p</b> x	x x
<b>p</b> <b>p</b>	x x

106

x x x	x x <b>p</b>
x x x	x x x
x x x	x x x
x x x	x x x
<b>p</b> x x	x x x
<b>p</b> <b>p</b> x	x x x

110

x x x	x <b>p</b> <b>p</b>
x x x	x x <b>p</b>
x x x	x x x
x x x	x x x
<b>p</b> x x	x x x
<b>p</b> <b>p</b> x	x x x

124

x x	<b>p</b> <b>p</b>
x x	<b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> x	x x
<b>p</b> <b>p</b>	x x

126

x x	<b>p</b> <b>p</b>
x x	<b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b>	x x
<b>p</b> <b>p</b>	x x

114

x x x	x <b>p</b> <b>p</b>
x x x	x <b>p</b> <b>p</b>
x x x	x x x
x x x	x x x
<b>p</b> <b>p</b> x	x x x
<b>p</b> <b>p</b> x	x x x

116

x x x	x <b>p</b> <b>p</b>
x x x	x <b>p</b> <b>p</b>
x x x	x x x
<b>p</b> x x	x x x
<b>p</b> <b>p</b> x	x x x
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	x x x

130

x x	<b>p</b> <b>p</b>
x <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> x
<b>p</b> <b>p</b>	x x

136

x <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> x

120

x x x	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>
x x x	x <b>p</b> <b>p</b>
x x <b>p</b>	x x <b>p</b>
<b>p</b> x x	<b>p</b> x x
<b>p</b> <b>p</b> x	x x x
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	x x x

124

x x x	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>
x x <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>
x <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> x
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> x x
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	x x x

138

<b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b>

128

x x <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>
x <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> x
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> x x

132

<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>
<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>	<b>p</b> <b>p</b> <b>p</b>

**Figure (V.9) :** Propagation de la plasticité dans la plaque en flexion des éléments Hétérosis, Lagrange Q9, Q4 et Q4 $\gamma$  (plaque carrée simplement appuyée)  
 x : Point de Gauss Non Plastifié.  
 p : Point de Gauss Plastifié.

### Analyse et interprétation :

La figure (V.8) montre que la plasticité est détectée précocement avec les éléments Hétérosis HT9 et Lagrange Q9. En augmentant la charge, la plasticité se produit pour les éléments Q4 et Q4 $\gamma$ .

Pour la plaque simplement appuyée avec un maillage par des éléments Hétérosis et Lagrange, la figure (V.9) montre que la plastification se manifeste aux points de Gauss qui sont proches des coins de la plaque à cause du blocage des rotations ( $\theta_x, \theta_y$ ) au nœud du coin, et puis s'étend aux alentours du nœud central, jusqu'à la plastification totale du fait que les rotations sont libres.

Cependant, la charge ultime pour le cas d'un maillage avec les éléments quadratiques est approximativement égale à « 132KN/m<sup>2</sup> », tandis que celle calculée avec les éléments Q4 et Q4 $\gamma$  elle est relativement supérieure, égale à « 138KN/m<sup>2</sup> ».

### V.3.2. Exemple ( 3.2 ) :

Cet exemple porte sur la simulation de la propagation de la plasticité dans une plaque complètement encastree utilisant les éléments quadratiques Q8, Q9, HT9 et les éléments Q4 et Q4  $\gamma$ . La plastification des points de Gauss est donnée par le critère de Von-Mises en utilisant la méthode de résolution de Newton-Raphson modifiée.

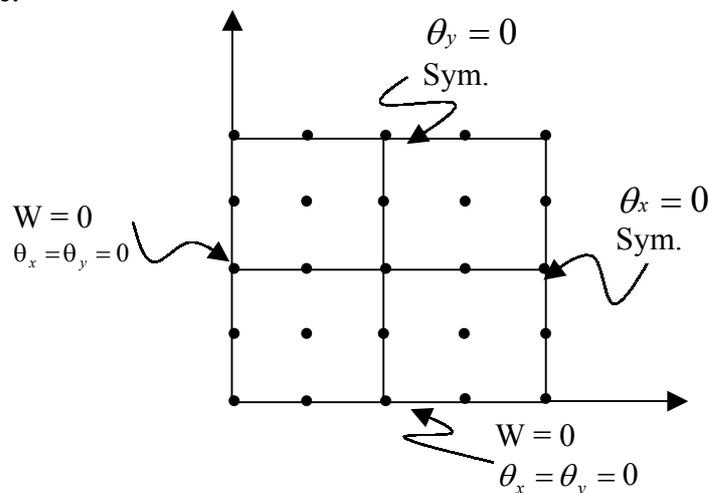
Les données du problème sont les suivantes :

Plaque carrée :  $a = b = L = 1$  m ; l'épaisseur :  $h = 0,01$  m.

Module de Young  $E = 210\,000\,000$  KN/m<sup>2</sup> , Coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$

La limite élastique :  $\sigma_0 = 200\,000$  KN/m<sup>2</sup>.

Par symétrie, on prend le quart de la plaque. Les conditions aux limites sont indiquées sur la figure suivante.



**Figure (V.10) :** Conditions aux limites d'un quart de la plaque (Plaque carrée complètement encastree)

On arrive à des résultats similaires, qu'on présente dans la figure suivante :

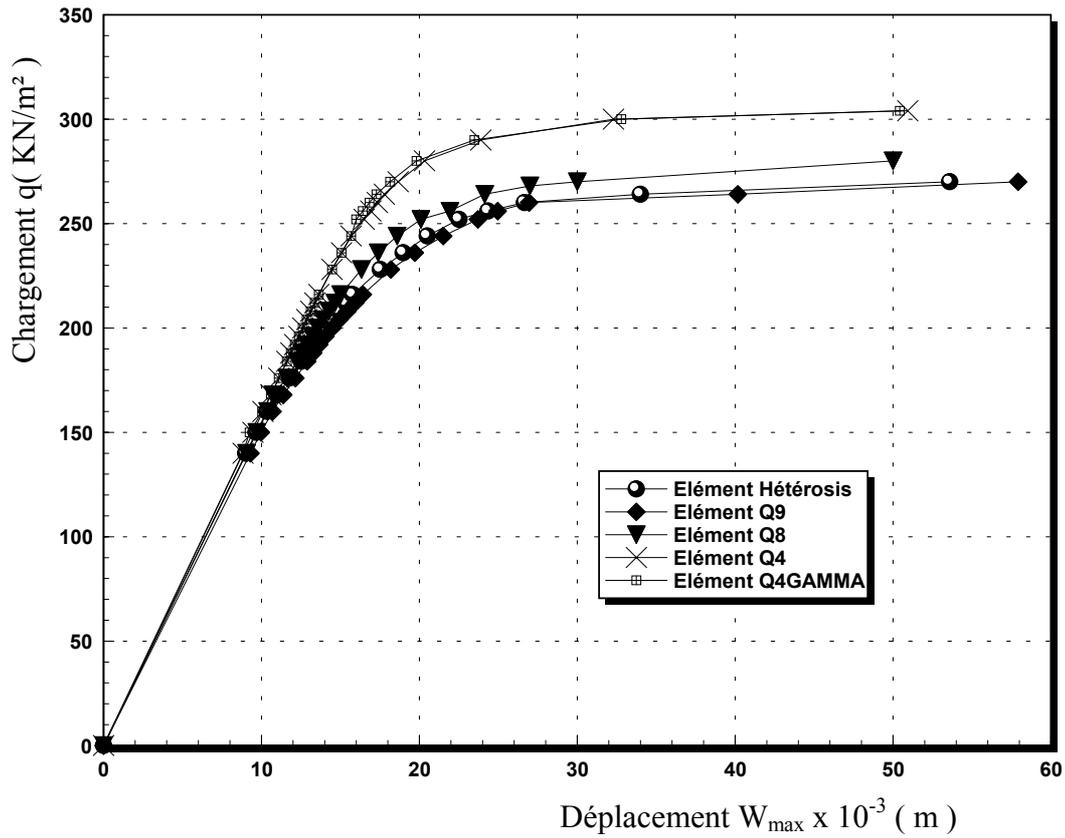
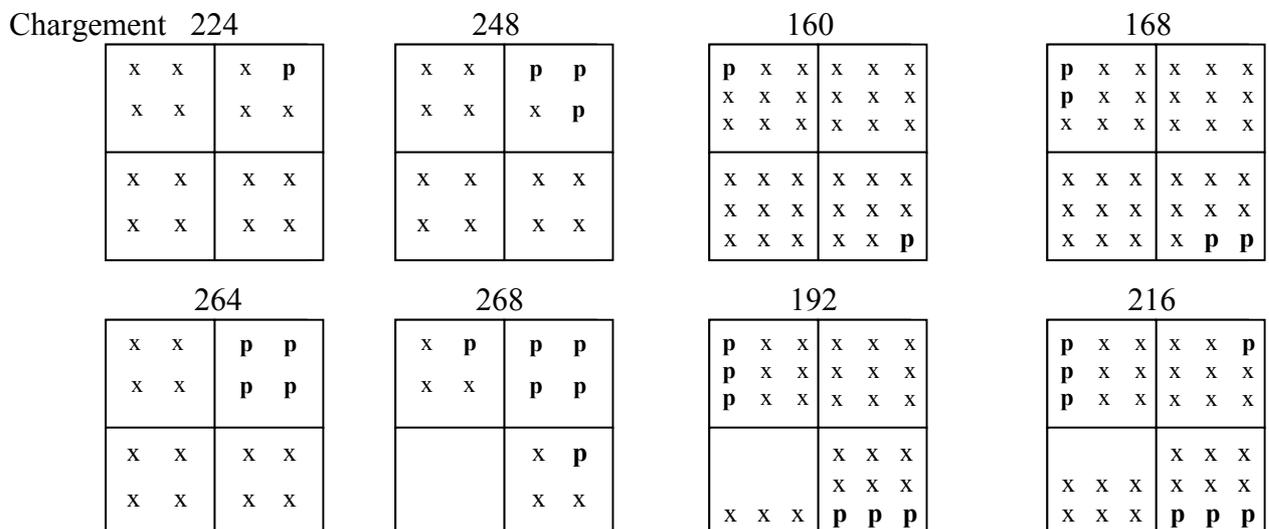
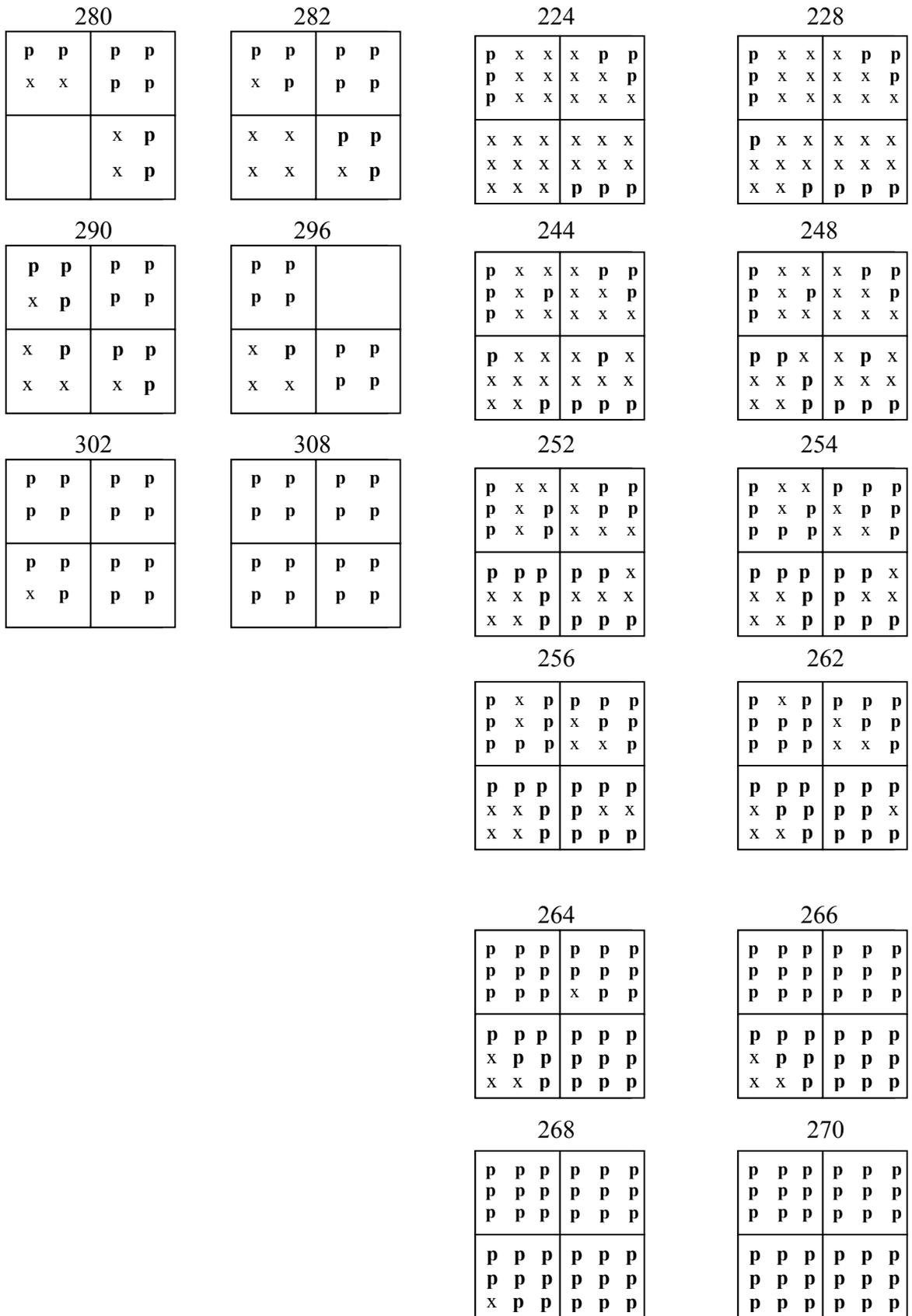


Figure (V.11) : Courbe chargement-déplacement des éléments Hétérosis, Lagrange Q9, Serendip Q8, Q4 et Q4 $\gamma$  (Plaque carrée complètement encastree)

**Simulation de la propagation de la plasticité :**

Elément Q4 / Elément Q4 $\gamma$ Un quart de la structure	Elément Hétérosis / Elément Q9 Un quart de la structure
--	--





**Figure (V.12) :** Propagation de la plasticité dans la plaque en flexion des éléments Hétérosis, Lagrange  $Q_9$ ,  $Q_4$  et  $Q_4\gamma$  (plaque carrée encadrée)  
 x : Point de Gauss Non Plastifié.  
 p : Point de Gauss Plastifié.

**Analyse et interprétation :**

La figure (V.11) représente la courbe du déplacement du nœud central suivant l'axe  $z$  en fonction de la charge. Dans cet exemple ( plaque carrée complètement encastree ) on remarque que la plasticité commence d'abord au niveau des éléments Hétérosis et Lagrange Q9 puis en augmentant la charge, la plasticité se produit pour les éléments Q4 et Q4 $\gamma$ , donc les éléments de Lagrange et Hétérosis à 9 nœuds sont plus performants.

La figure (V.12) montre la propagation de la plasticité dans la plaque pour les différents éléments. Elle débute aux points de Gauss proches des côtés encastres ( du fait que les rotations sont bloquées suivant les deux directions ), puis se propage vers le milieu de la plaque et ensuite elle englobe toute la plaque.

D'après les courbes, figure (V.11), nous voyons que la charge ultime obtenue par les éléments Q9 et HT9 est 270KN/m<sup>2</sup>, cependant elle est au niveau de 308KN/m<sup>2</sup> pour les éléments Q4 $\gamma$ .

Par conséquent, on constate une grande différence entre la valeur de la charge ultime prédite par l'élément Hétérosis pour la plaque complètement encastree, et celle calculée pour la plaque simplement appuyée. Ce qui montre l'influence des conditions aux limites sur le phénomène de la plastification.

**V.3.3. Exemple ( 3.3 ) :**

Dans cet exemple on fait varier l'épaisseur (  $h = 0.01$ ,  $h = 0.1$  et  $h = 0.5$  ) de la plaque pour les plaques simplement appuyée et complètement encastree , et on trace les courbes chargement-déplacement pour chaque épaisseur et on utilise différents types de maillages ( M1 (2x2) , M2 (4x4) ) pour les éléments Hétérosis, Serendip Q8, Lagrange Q9, Q4 et Q4  $\gamma$ .  
( les mêmes données physiques de l'exemple ( 2.1 ) )

• Plaque simplement appuyée :

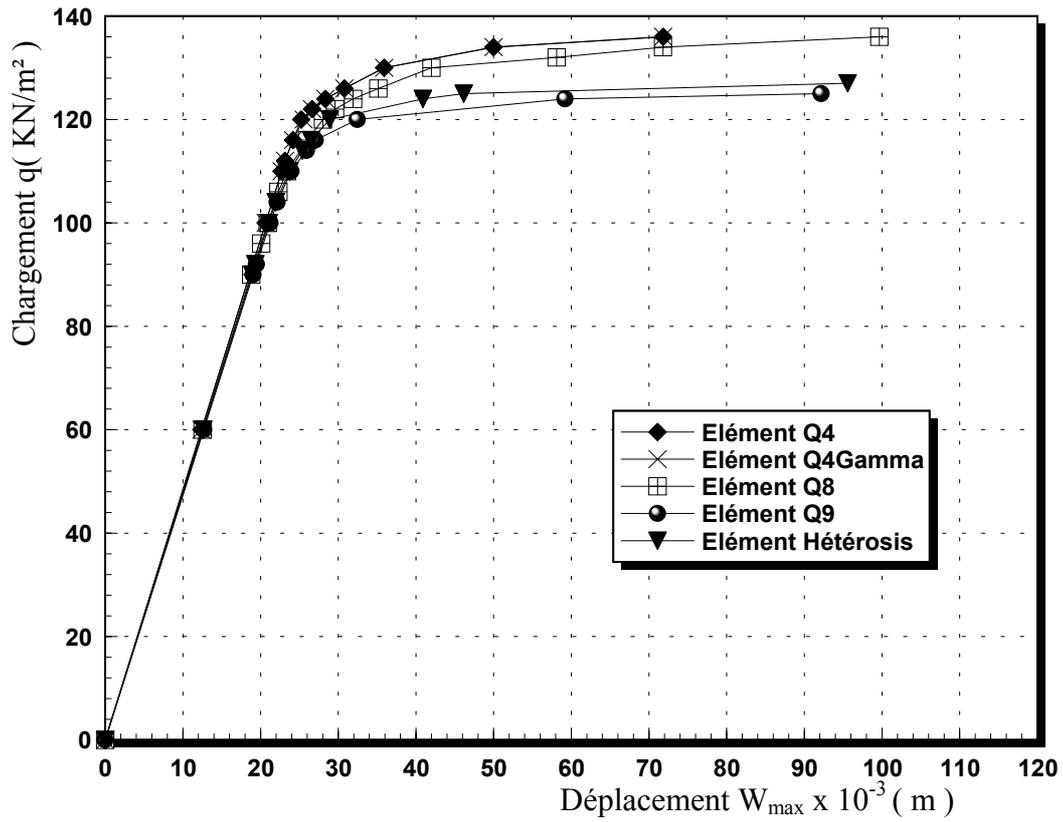


Figure (V.13) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec  $h = 0.01$  et  $M1 = 2 \times 2$  (Plaque simplement appuyée)

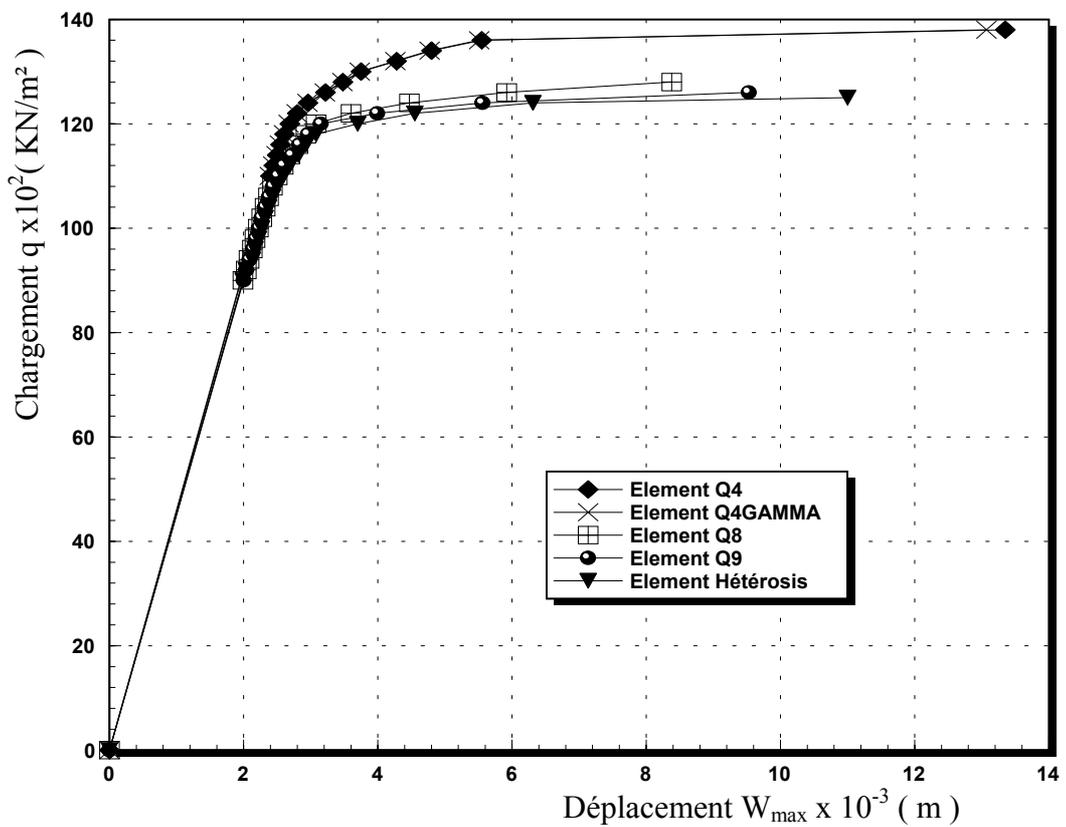


Figure (V.14) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec  $h = 0.1$  et  $M1 = 2 \times 2$  (Plaque simplement appuyée)

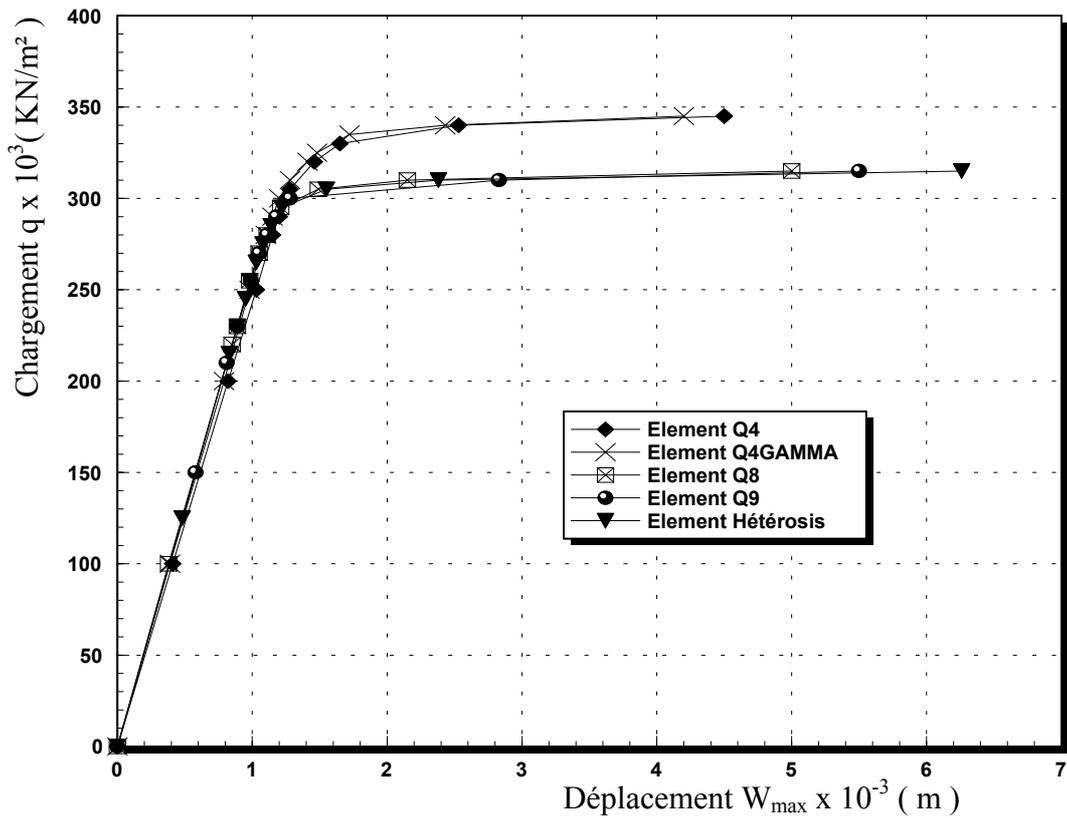


Figure (V.15) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion  
Avec  $h = 0.5$  et  $M1 = 2 \times 2$  ( Plaque simplement appuyée )

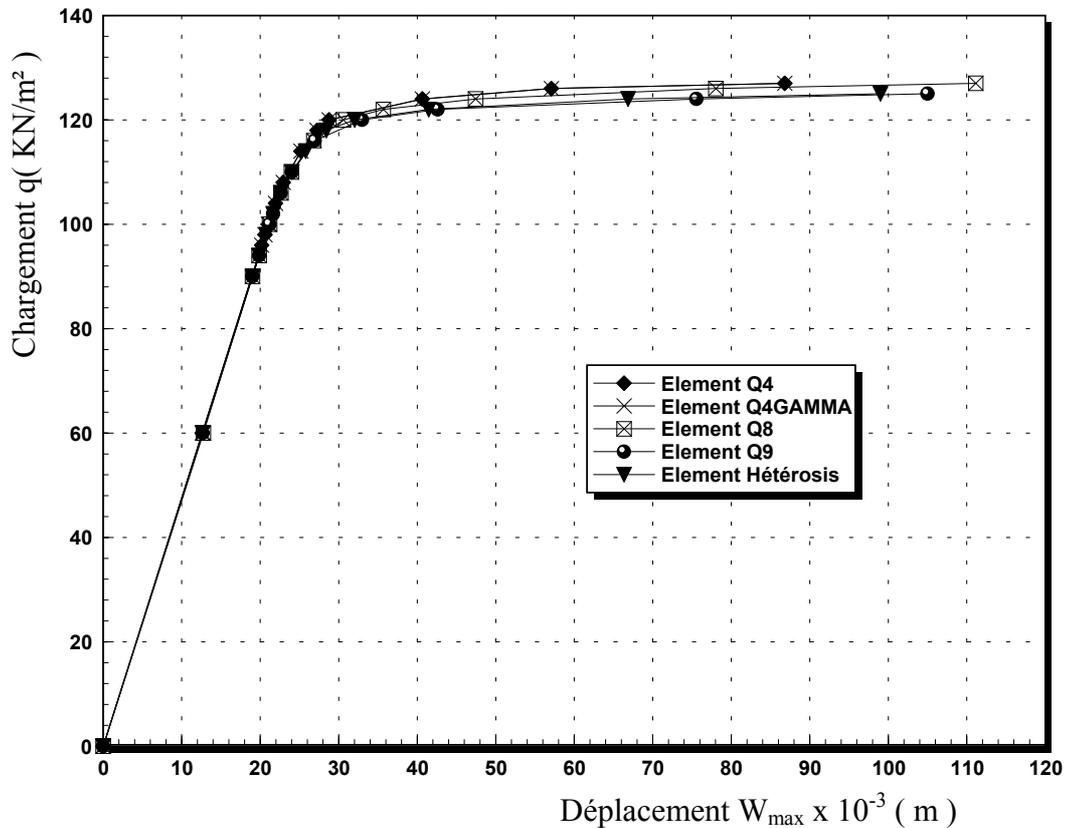


Figure (V.16) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion  
Avec  $h = 0.01$  et  $M2 = 4 \times 4$  ( Plaque simplement appuyée )

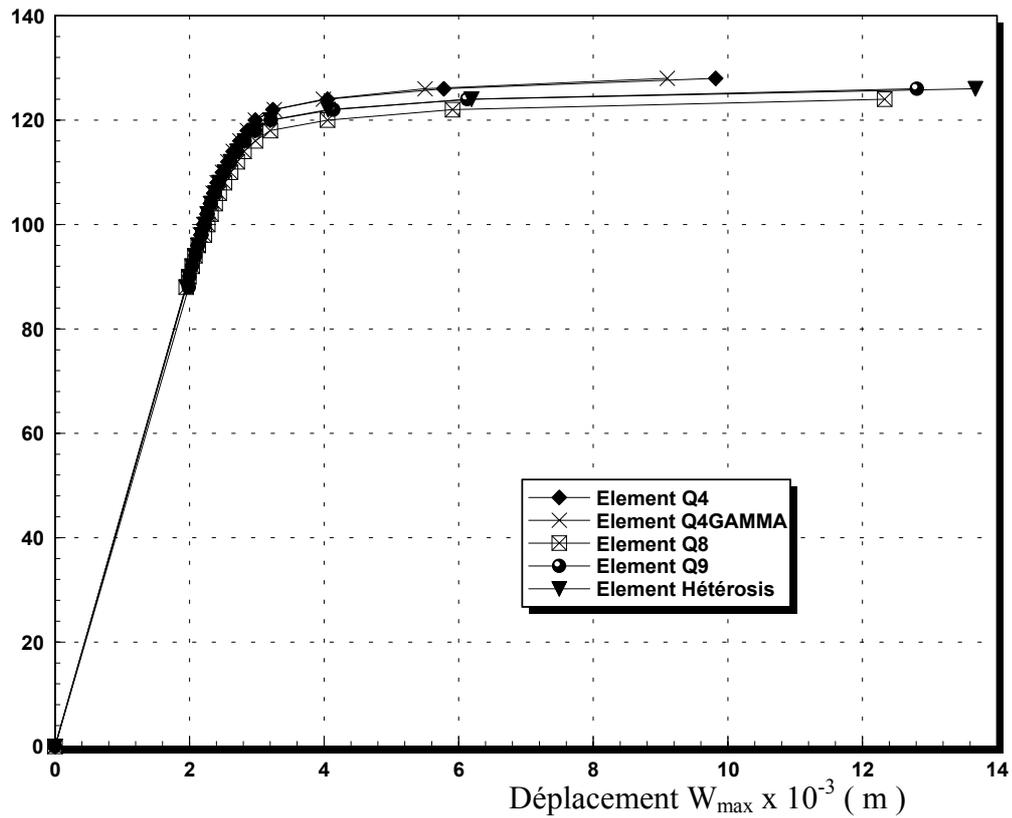


Figure (V.17) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec  $h = 0.1$  et  $M2 = 4 \times 4$  (Plaque simplement appuyée)

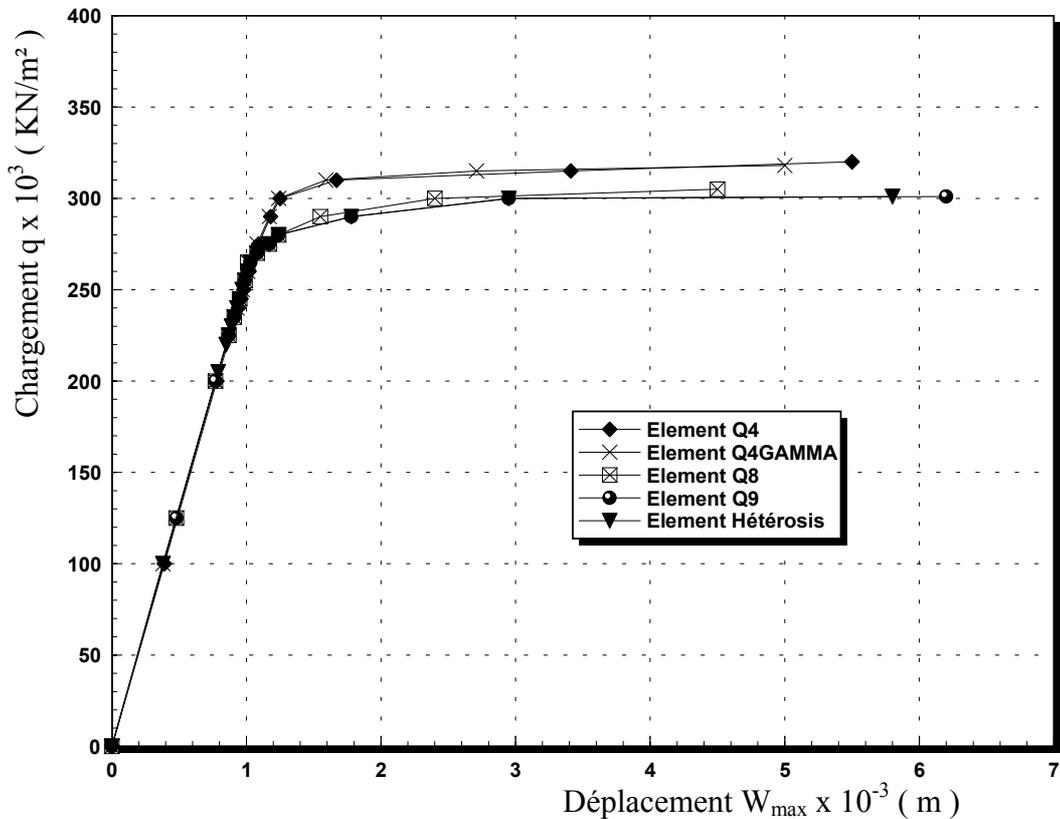


Figure (V.18) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec  $h = 0.5$  et  $M2 = 4 \times 4$  (Plaque simplement appuyée)

• Plaque encadrée :

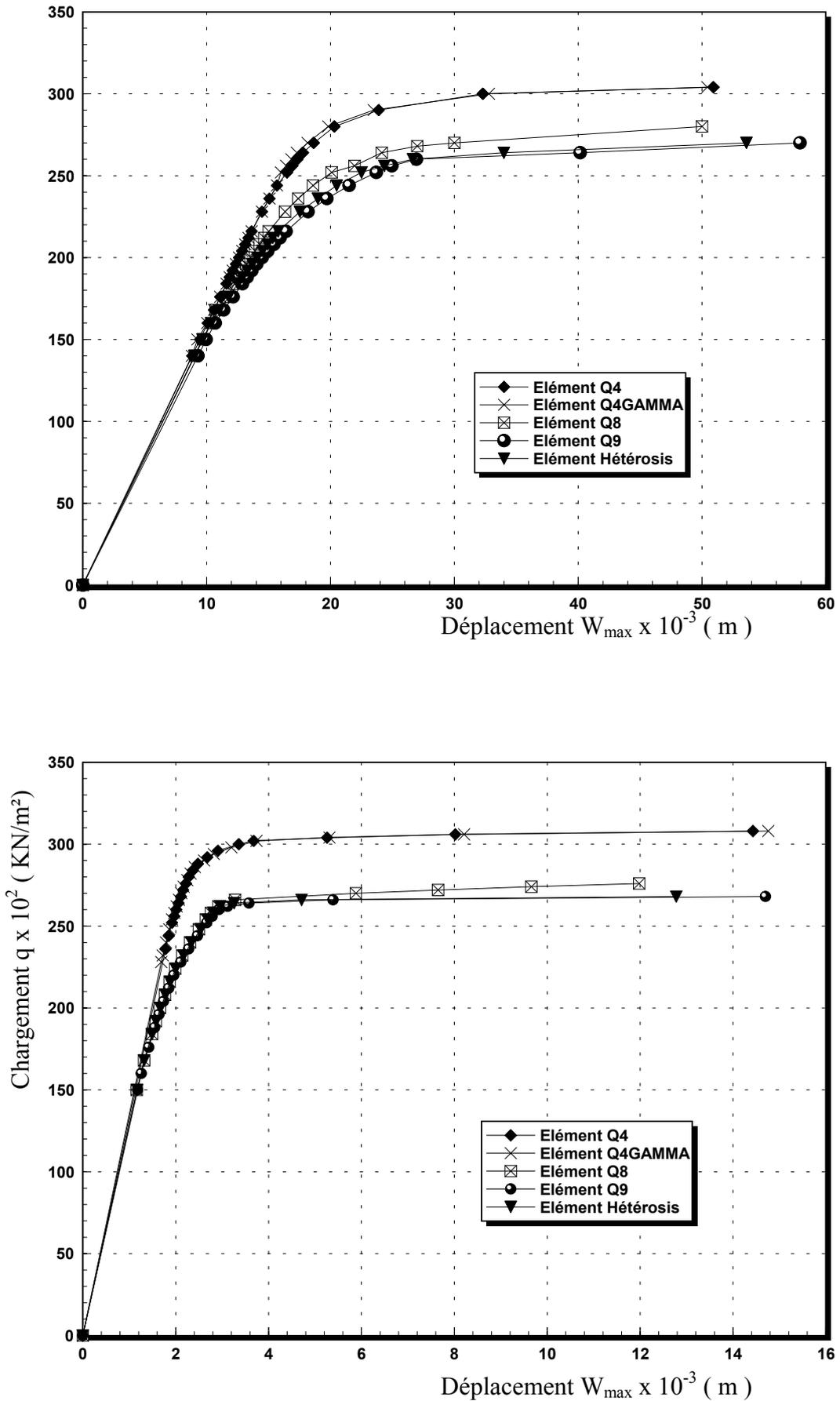


Figure (V.20) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec  $h = 0.1$  et  $Ml = 2 \times 2$  (Plaque encadrée)

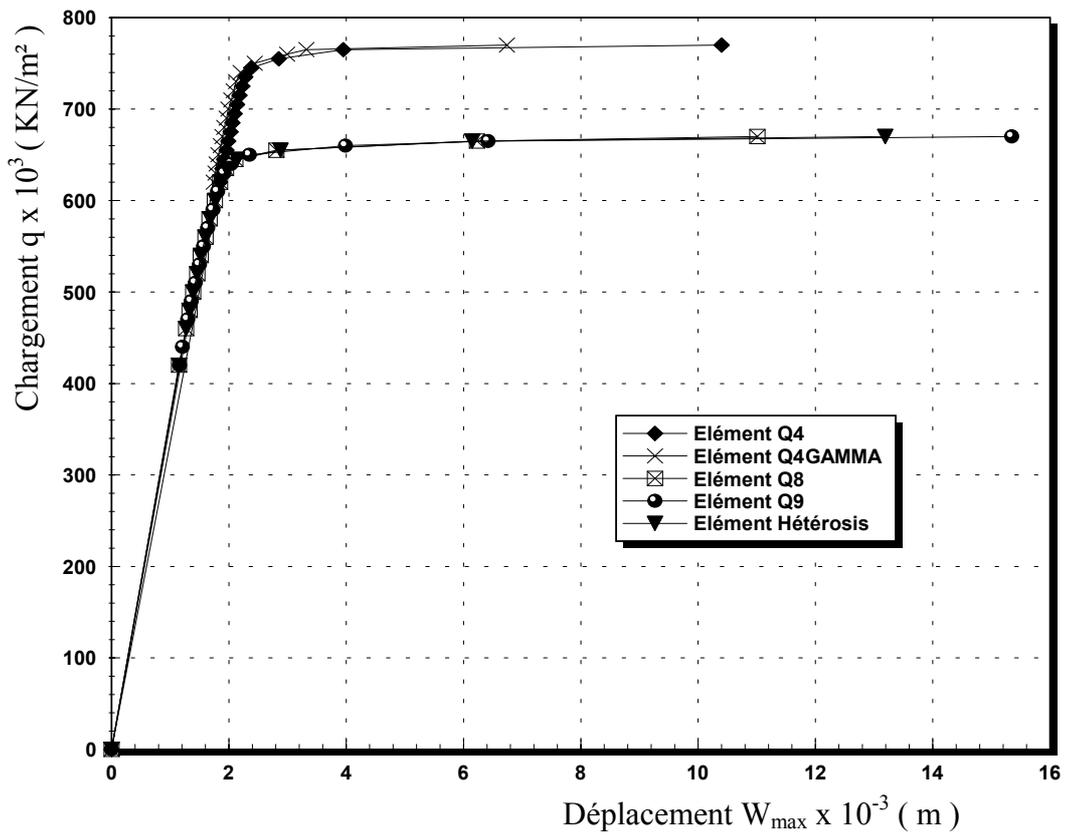


Figure (V.21) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec  $h = 0.5$  et  $MI = 2 \times 2$  (Plaque encastree)

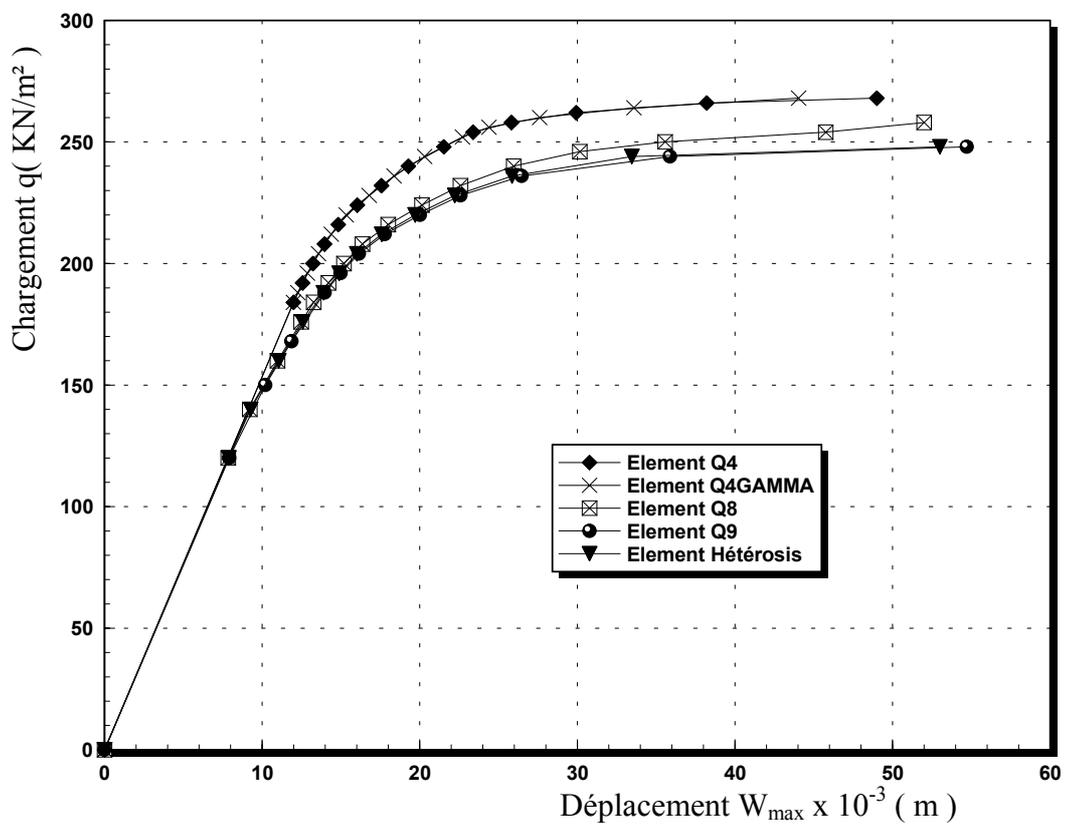


Figure (V.22) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec  $h = 0.01$  et  $M2 = 4 \times 4$  (Plaque encastree)

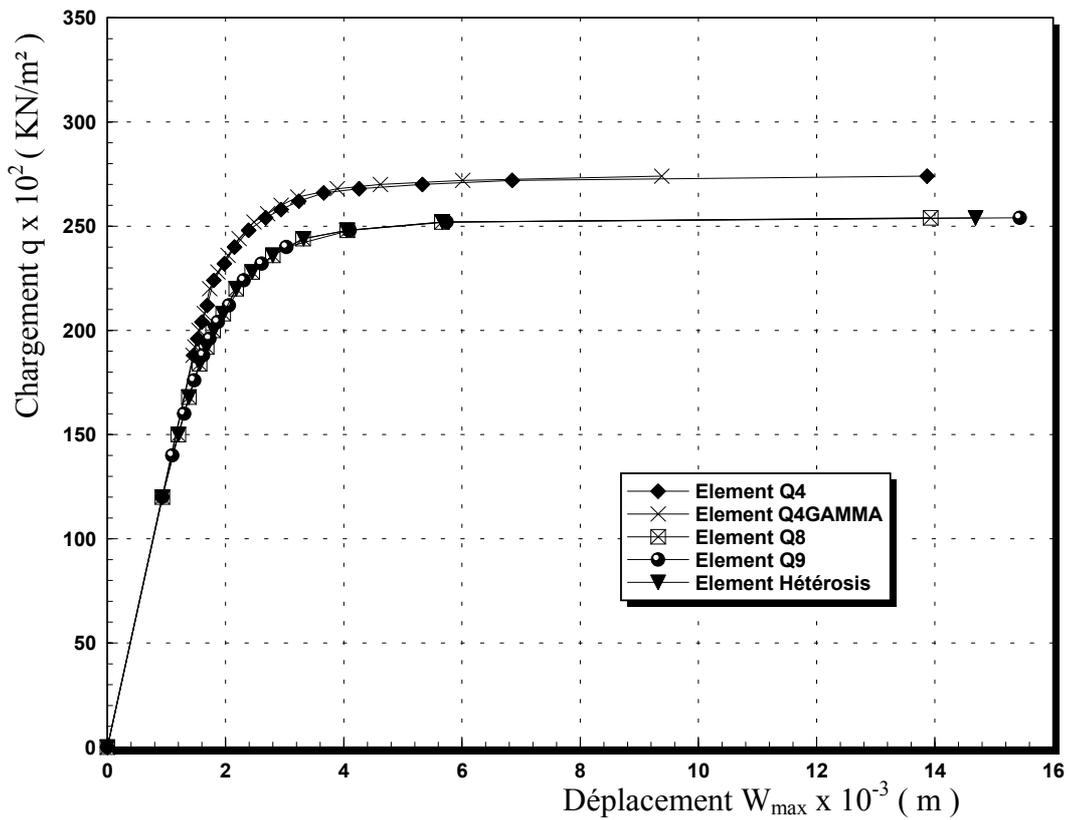


Figure (V.23) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec  $h = 0.1$  et  $M2 = 4 \times 4$  (Plaque encastrée)

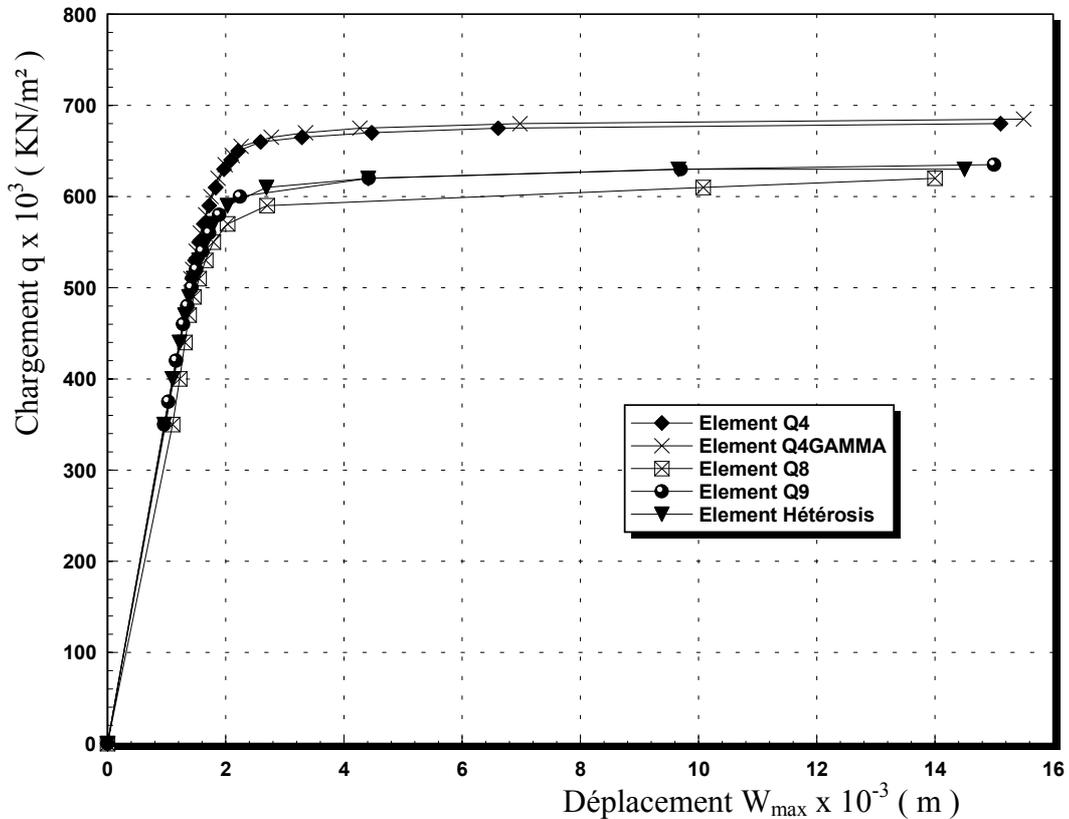


Figure (V.24) : Courbe chargement-déplacement des éléments plaque en flexion Avec  $h = 0.5$  et  $M2 = 4 \times 4$  (Plaque encastrée)

### Analyse et interprétation :

Les figures précédentes confirment encore la performance des éléments quadratiques ( HT9, Q9, Q8 ) par rapport aux éléments linéaires ( Q4, Q4 $\gamma$  ).

On constate le comportement décevant de l'élément Q4 $\gamma$  qui peut être expliqué par le fait que la formulation élasto-plastique adoptée concerne uniquement les contraintes de flexion, les contraintes de cisaillement sont supposées élastiques.

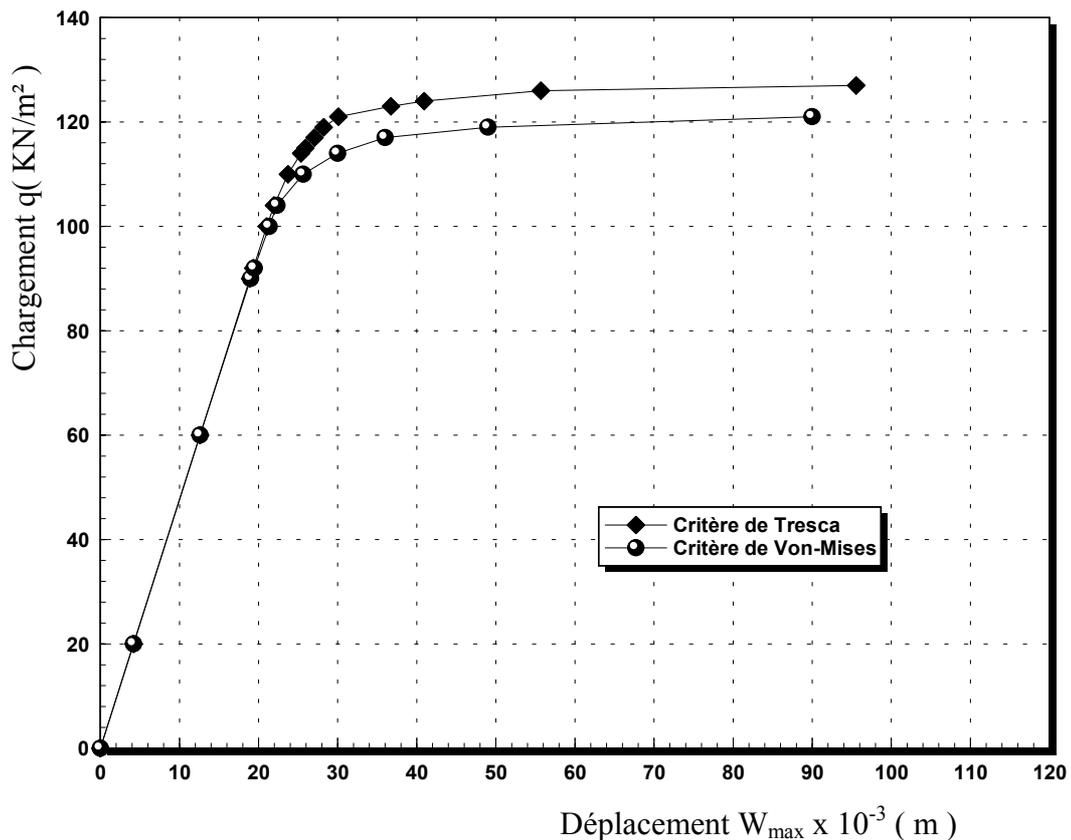
Le raffinement du maillage donne des résultats qui garantissent une convergence rapide vers la solution adéquate, par une allure semblable à celle dans l'analyse linéaire.

L'épaisseur de la plaque a une influence remarquable sur le phénomène de plastification, où la limite élastique et la charge ultime d'autant petites que l'épaisseur est faible.

### V.4. Comparaison entre les critères de Von-Mises et Tresca :

#### V.4.1. Exemple (4.1) :

On reprend l'exemple (2.1) en utilisant la méthode de résolution de Newton Raphson modifiée et les deux critères de plasticité Von-Mises et Tresca



*Figure (V.25) : Courbe chargement- déplacement pour l'élément Hétérosis  
Comparaison ente les critères de Von-mises et Tresca*

### Analyse et interprétation :

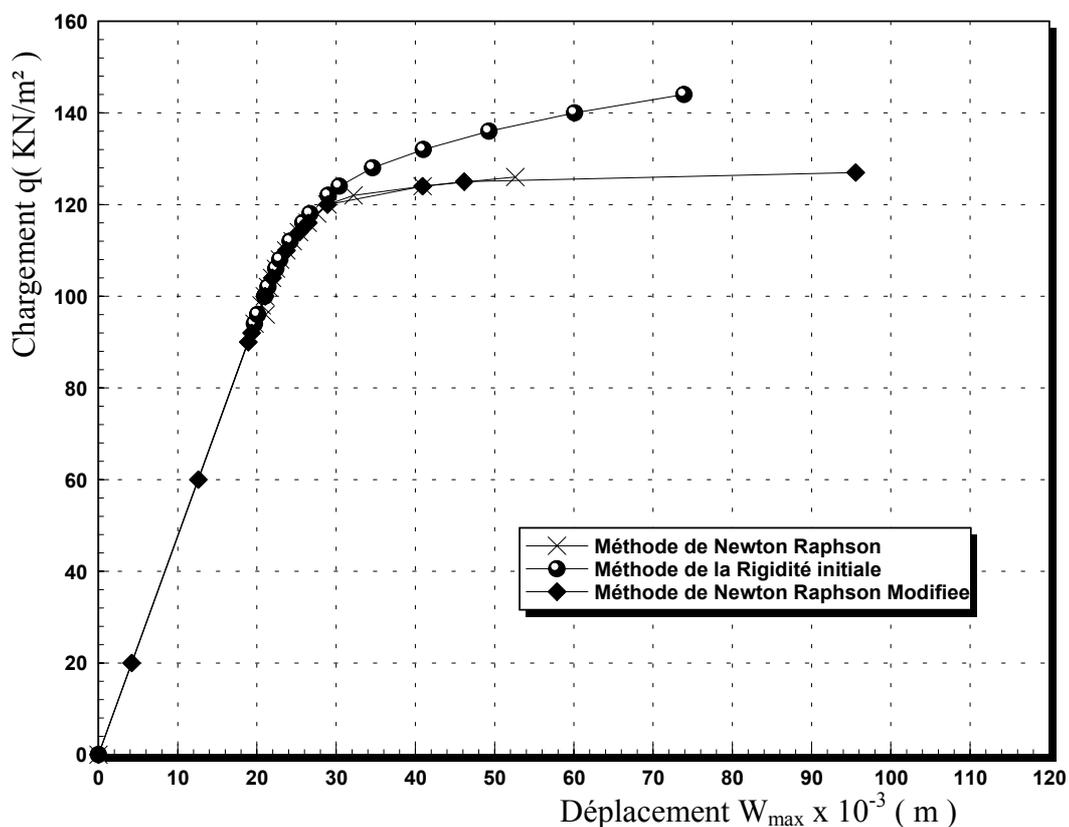
La figure (V.25) montre l'influence du critère de plasticité sur la limite élastique et la charge ultime. On remarque que la plastification se déclenche d'abord pour le cas du critère de Von-Mises puis, après l'augmentation de charge, pour celui de Tresca.

Par ailleurs, pour la plupart des métaux, le critère de Von-Mises donne des résultats plus proches de l'expérimentation que celui de Tresca.

## V.5. Comparaison entre les méthodes de résolution :

### V.5.1. Exemple ( 5.1 ) :

On reprend l'exemple ( 2.1 ) avec trois méthodes de résolution différentes. Il s'agit de la méthode de rigidité initiale, la méthode de Newton-Raphson ( rigidité tangentielle ) et la méthode de Newton-Raphson modifiée.



**Figure (V.26) :** Courbe chargement-déplacement de l'élément Hétérosis avec des différentes méthodes de résolution ( critère de Von-Mises ) ( plaque carrée simplement appuyée )

**Analyse et interprétation :**

La figure (V.26) donne le déplacement du nœud central en fonction du chargement avec différentes méthodes de résolution de système non linéaire ( la méthode de rigidité initiale, la méthode de Newton-Raphson et la méthode de Newton-Raphson modifiée ) pour l'élément Hétérosis.

On remarque que les résultats de la méthode de rigidité tangentielle (Newton-Raphson) et de la méthode de Newton-Raphson modifiée ( avec actualisation de la matrice de rigidité lors de la 2<sup>ème</sup> itération ) sont plus précis que ceux de la rigidité initiale puisque la courbe est légèrement plus inclinée, la plastification de la plaque plus immédiate.

Toutefois, dans les deux méthodes de Newton-Raphson ( rigidité tangentielle et modifiée ) il faut à chaque incrément et à chaque itération recalculer la matrice de rigidité ( l'actualiser ) alors que pour la rigidité initiale la matrice de rigidité reste invariable durant l'incrément ceci permis d'éviter les coûteuses actualisations de [K].

## CONCLUSION

Le présent travail a porté sur l'élaboration d'un programme en éléments finis pour l'analyse non linéaire ( comportement élasto-plastique ) des éléments plaques en flexion. L'étude a été faite pour des plaques homogènes ( isotropes ) et les éléments choisis sont de type déplacement basés sur la théorie de Mindlin-Reissner qui tient compte l'effet de cisaillement transverse, la théorie sans cisaillement de Kirchhoff est interprétée comme un cas limite de la théorie de Reissner-Mindlin.

Les éléments utilisés sont :

- L'élément linéaire à quatre nœuds Q4.
- L'élément quadratique de Serendip à huit nœuds Q8.
- L'élément quadratique de Lagrange à neuf nœuds Q9.
- L'élément Hétérosis à neuf nœuds HT9.
- L'élément à quatre nœuds avec Cisaillement transversal constant par côté Q4 $\gamma$ .

L'expérimentation est réalisée par un programme comportant une bibliothèque d'éléments qui a été enrichie par notre contribution et des blocs ou sous programmes séparés qui exécutent les différentes opérations de l'analyse. Cette approche permet de faire des modifications éventuelles suivant le problème traité au niveau de chaque module sans pour autant modifier le reste du programme. De plus le programme donne l'option de choisir le critère de plasticité ( Von-Mises , Tresca , Mohr-Coulomb, Drucker-Prager ), et la méthode de résolution de système non-linéaire ( Newton Raphson ,Newton Raphson modifiée , Rigidité initiale ).

Dans le domaine linéaire ( élasticité ), on constate la robustesse des éléments quadratiques ( Q8, Q9 et HT9 ), d'après les résultats satisfaisants obtenus pour les plaques épaisses et minces.

Pour les plaques épaisses, il convient à la nature du comportement de l'élément Q4 $\gamma$  qui est un élément performant.

Dans le domaine non-linéaire, dans un premier lieu on a validé les résultats de notre programme avec ceux numériques de Hinton et Owen<sup>[HIN80]</sup>. Lors de l'expérimentation numérique, on a constaté une fois de plus le bon comportement des éléments quadratiques. Cependant pour les plaques épaisses il y a lieu de noter le comportement décevant de l'élément Q4 $\gamma$  qui peut être expliqué par la supposition que la fonction de plasticité « F » est fonction des contraintes de flexion, et non fonction des contraintes de cisaillement.

Les conditions aux limites influent considérablement sur la limite élastique et la charge ultime de la structure, où la valeur prédite pour les plaques encastées est plus grande que celle obtenue dans les plaques simplement appuyées. Ce qui montre l'effet des conditions aux limites sur le phénomène de la plastification.

Le suivi de la propagation de la plastification utilisant les éléments quadratiques, montre qu'elle débute aux points de Gauss proches des côtés encastés ( du fait que les rotations sont bloquées suivant les deux directions ), puis se propage vers le milieu de la plaque et ensuite elle englobe toute la plaque.

L'intégration numérique offre un avantage supplémentaire dans l'analyse non linéaire des plaques ; elle permet de suivre la propagation de la plastification à l'intérieur des éléments ( points de Gauss ).

## **RECOMMANDATIONS**

Une extension logique de notre travail sera l'étude élasto-plastique des coques.

En ce qui concerne l'élément  $Q4\gamma$ , pour améliorer sa performance dans le domaine non-linéaire, il serait souhaiter à ce que la fonction de charge serra en fonction des contraintes de flexion et des contraintes de cisaillement.

## NOTATIONS

$b$	Vecteur des forces de volume
$f$	Vecteur des forces de surface
$f^c$	Vecteur des forces concentrées
$u$	Vecteur des déplacements $u_i$
$\varepsilon$	Tenseur des déformations $\varepsilon_{ij}$
$\sigma$	Tenseur des contraintes $\sigma_{ij}$
$u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$	Dérivée partielle de $u_i$ par rapport à $x_j$
$D_{ijklm}$	Composantes du tenseur d'élasticité
$\lambda, \mu$	Coefficients de Lamé
$\nu$	Coefficient de Poisson
$E$	Module d'élasticité ( de Young )
$G$	Module de cisaillement
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker
$\delta u_i$	Déplacement virtuel
$W_{ext}$	Travail des forces extérieures
$W_{int}$	Travail interne
$T$	Energie cinétique ( potentiel des forces appliquées )
$U$	Energie de déformation
$V$	Energie potentielle totale
$D$	Matrice constitutive du matériau ( matrice des coefficients élastiques )
$E^{ep}$	Module élasto-plastique tangent uniaxial
$\sigma_0, \sigma_y$	Limite élastique initiale uniaxiale
$\sigma_B, Y$	Limite élastique actuelle
$\varepsilon^p$	Déformation plastique
$\varepsilon^{ep}$	Déformation élasto-plastique
$H$	Paramètre plastique ( d'écrouissage )
$I_1$	Premier invariant du tenseur des contraintes
$[J]$	Matrice Jacobienne
$J_2$	Deuxième invariant du tenseur déviatoire des contraintes
$J_3$	Troisième invariant du tenseur déviatoire des contraintes
$S_{ij}$	Tenseur déviatoire
$F$	Fonction de plasticité
$D^{ep}$	Matrice élasto-plastique
$K, K_{ij}$	Matrice de rigidité de la structure
$K_t$	Matrice de rigidité tangente
$K_{ij}^e$	Matrice de rigidité élémentaire
$\sigma_{xx}$	Contrainte normale
$\tau_{xy}$	Contrainte de cisaillement
$u^e$	Déplacement élémentaire
$[N]$	Matrice des fonctions de forme

$\varepsilon^e$	Déformations élémentaires
$D^e$	Matrice d'élasticité élémentaire
$h$	Epaisseur de la plaque
$T_x, T_y (\hat{\sigma}_c)$	Efforts résultats de cisaillement ( tranchants )
$M_x, M_y, M_{xy} (\hat{\sigma}_f)$	Efforts résultats de flexion ( moments )
$\sigma_f$	Contraintes de flexion
$\sigma_c$	Contraintes de cisaillement
$\sigma, \bar{\sigma}$	Contraintes réduites
$\sigma_n$	Contrainte normale
$\varepsilon_f$	Déformations de flexion
$\varepsilon_c$	Déformations de cisaillement
$\varepsilon'$	Déformations réduites
$u$	Déplacement suivant l'axe des $x$
$v$	Déplacement suivant l'axe des $y$
$w$	Déplacement suivant l'axe des $z$
$\theta_x$	Rotation de la normale dans le plan $xy$
$\theta_y$	Rotation de la normale dans le plan $xz$
$d_i$	Déplacement nodal
$[B]$	Matrice reliant les déplacements aux variables nodales
$[B_f], [B_c]$	Matrices relient les courbures ou les déformations de Cisaillement aux variables nodales
$\Psi, \Delta F$	Forces résidu
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes
$\xi, \eta, \zeta$	Coordonnées isoparamétriques
$\wedge$	Dénote une quantité intégrée sur l'épaisseur
$[A]^T$	Transposé de la matrice $[A]$
$[A]^{-1}$	Inverse de la matrice $[A]$
$C_b$	Indicateur de blocage
$N_{eq}$	Nombre d'équations de la matrice de rigidité globale $[K]$
$\left\{ \underline{\gamma} \right\}, \underline{\gamma}_{xz}, \underline{\gamma}_{yz}$	Déformations de CT indépendantes
$\left\{ \gamma \right\}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{\xi z}, \gamma_{\eta z}, \gamma_{sz}$	Déformations de CT
$\frac{\gamma_{xz}}{m}, \frac{\gamma_{yz}}{m}$	Déformations indépendantes
$\left\{ U \right\}^m$	Déplacement à l'incrément $m$
$\left\{ \sigma \right\}^m$	Contrainte à l'incrément $m$
$\left\{ \varepsilon \right\}^m$	Déformation à l'incrément $m$
$\left\{ F \right\}^m$	Charge à l'incrément $m$
$\left\{ R \right\}^m$	Réaction à l'incrément $m$
Q4, Q8, Q9	Eléments quadrilatéraux à 4, 8, 9 nœuds
HT9	Elément Hétérosis à 9 nœuds
Q4 $\gamma$	Elément quadrilatéral à 4 nœuds et CT particulier
CT	Cisaillement Transversal

## RESUME

L'objectif de ce mémoire est de déterminer l'influence de type d'élément sur l'analyse non linéaire (l'élasto-plasticité) des plaques en flexion utilisant la méthode des éléments finis basée sur le model en déplacement et la théorie des plaques épaisses de Reissner-Mindlin qui tient compte de l'effet de cisaillement transversal (la théorie sans cisaillement transversal de Kirchhoff est interprétée comme un cas limite de la théorie de Reissner-Mindlin).

Le mémoire se scinde en trois grandes parties : la formulation en éléments finis des éléments plaques, la théorie d'élasto-plasticité et l'expérimentation numérique.

La première partie concerne la formulation en éléments finis des plaques : les hypothèses des théories de Kirchhoff et Reissner-Mindlin , et les relations contraintes-déformations, ainsi que les fonctions de formes des éléments finis plaques incorporées dans le programme, citant ; Les éléments à quatre nœuds : l'élément bilinéaire Q4, l'élément avec cisaillement transversal constant par côté Q4 $\gamma$  , les éléments quadratiques : à huit nœuds (Serendip Q8), à neuf nœuds (Lagrange Q9), et l'Hétérosis à neuf nœuds (HT9).

La deuxième partie est consacrée pour la théorie du comportement élasto-plastique des matériaux : loi de comportement, loi d'écrouissage et critères de plasticité. A la fin, un aperçu sur l'analyse non linéaire des structures et les différentes techniques de résolution de système non linéaire ainsi que les différents critères de convergence, ont été illustrés.

La troisième partie du mémoire est consacrée pour élargir un programme en éléments finis pour l'analyse non linéaire (élasto-plasticité) des plaques en flexion, le programme contient une bibliothèque des éléments et des blocs ou sous programmes séparés qui exécutent les différentes opérations de l'analyse, de plus le programme permet de choisir le critère de plasticité et la méthode de résolution du système non linéaire. Finalement, des expérimentations numériques ont été élaborées, simulant les charges ultimes et la propagation des zones plastifiées pour des différents cas (conditions aux limites, épaisseurs, critères de plasticité et méthodes de résolution).

### MOTS – CLES :

Élément fini, Plaque en flexion, Cisaillement transversal, Plasticité, Analyse non linéaire.

## **ABSTRACT**

The objective of this work is to determine the influence of type of element on the non linear analysis (elasto-plasticity) of plates in bending using the finites elements method based on the displacement model, using the thick plates theory of Reissner-Mindlin which takes account of the transverse shearing effect (the Kirchhoff's theory without transverse shearing is interpreted like a limit case in the theory of Reissner-Mindlin).

The work is divide in to three big parts: finites elements formulation of plates elements, the theory of elasto-plasticity and the numeric experimentation.

The first part concerns finites elements formulation of plates: hypotheses of Kichhoff's theories and Reissner-Mindlin, and stress-strain relations, as well as forms functions of finites elements plates incorporated in the program: the four nodes elements; the bilinear element Q4, the element with constant transverse shear by side Q4, the quadratics elements with eight nodes (Serendip Q8), with nine nodes (Lagrange Q9), also, the nine nodes Hétérosis element (HT9)

The second part is consecrated for the behavior elasto-plastic theory of materials : behavior's law, hardening's law, plasticity criterion, at last, a preview on the non linear analysis of structures and the different techniques of non linear system resolution as well as the different convergence criterion were illustrated.

The third part concerns the development of a finite elements program for the non-linear analysis (elasto-plasticity) of plates bending, the program contains a library of elements and blocks or subroutines which execute the different operations of the analysis. Besides, the program permits to choose the criteria of plasticity and the method of non-linear resolution system. Finally, some numeric experimentation have been elaborated, simulating the ultimate loads and the propagation of plastic zones for different cases (boundary conditions, thickness, criterion of plasticity and resolution methods).

### **WORDS - KEYS:**

Finite element, Plate bending, Transverse Shear, Plasticity, Nonlinear Analysis.

# ملحوظ

- )

- " " " " ) ( "

.( " - "

:

" " :

" - "

. Q4<sub>γ</sub> HT9 Q9 Q8 Q4 :

:

( - )

.( )

## ANNEXE

### I. Structure du Programme :

Ce programme d'analyse non linéaire par éléments finis comprend les blocs fonctionnels nécessaires à l'analyse élastique et élasto-plastique à savoir le bloc des données, le bloc de formulation des rigidités élémentaires, le bloc d'assemblage et de résolution du système global et enfin le bloc des résultats, figure (a).

Pour pouvoir traiter le problème non linéaire d'une façon incrémentale et contrôler la convergence, des blocs complémentaires ( ou des boucles ) sont inclus dans le programme et qui sont :<sup>[HIN80]</sup>

- Un bloc incrémental sur le chargement : l'analyse élasto-plastique non linéaire est procédée d'une manière incrémentale, alors ce bloc contrôle l'incrémentation des charges appliquées.
- Un bloc itératif qui permet de contrôler le nombre d'itérations jusqu'à la convergence de la solution.

Notez que le programme utilise une très bonne bibliothèque d'éléments de la plaque en flexion :

- L'élément de Lagrange à neuf nœuds Q9.
- L'élément de Serendip à huit nœuds Q8.
- L'élément Hétérosis à neuf nœuds HT9.
- L'élément à quatre nœuds Q4.
- L'élément à quatre nœuds avec cisaillement transversal constant par côté Q4 $\gamma$ <sup>[BAT90b]</sup>.

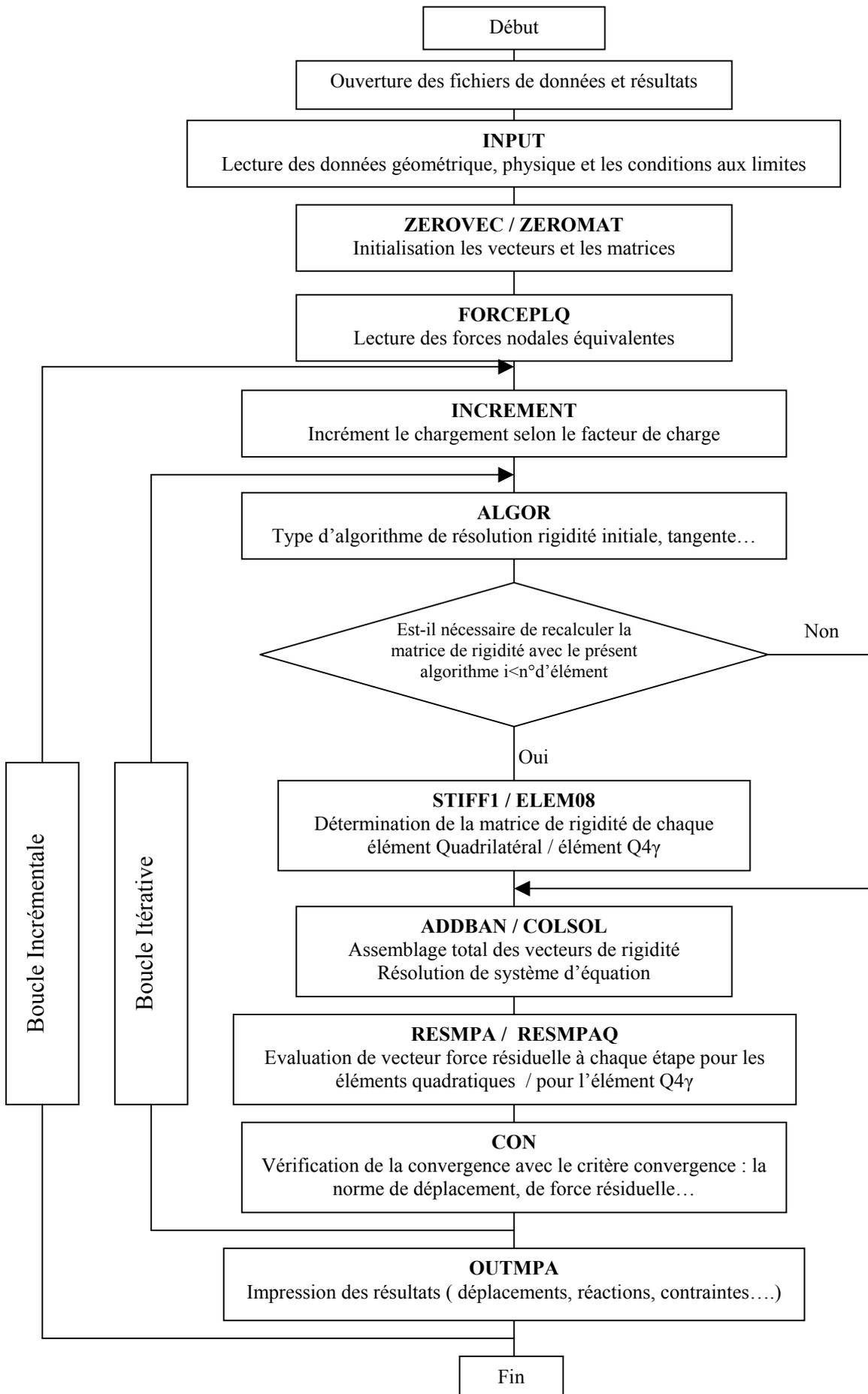


Figure ( a ) : Structure du Programme <sup>[HIN80]</sup>

## II. Construction de fichier de donnée :<sup>[HIN80]</sup>

### Titre

**NPOIN** : nombre total de points nodaux dans la structure ( nombre des nœuds )

**NELEM** : Nombre total d'éléments finis dans la structure

**NNELEM** : Nombre de nœuds par élément

**NMATS** : Nombre total de différents matériaux dans la structure

**NGAUS** : Nombre de points de Gauss

**NAPP** : Nombre de points appui dans la structure ( Conditions aux limites )

**Numel** : Numéro de l'élément sous considération

**Matno** : Numéro d'identification des propriétés du matériau

**Lcons** : Points de connections ( les 4 premiers sont les nœuds aux sommets, les 4 qui suivent sont les nœuds au milieu des côtés, le dernier est le nœud central.

**Ipoint** : Numéro du point nodal

**Coord** : coordonnées des nœuds suivant x et y

**J** : classement du nœud appui

**Iap** : Numéro de ce nœud appui

**ID** : Condition d'appui du nœud suivant x, y, z,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  ( 0 : Libre, 1 : fixe )

**Numat** : Numéro d'identification du matériau

**Props** : caractéristiques du matériau : E,  $\nu$ , h, Q,  $\sigma_0$ , H

**Ifr** : Paramètre = 1 : Forces nodales équivalentes à calculer, = 0 : pas de force Nodale

**Im** : Type d'élément (=1 : l'élément classique Q4, Q8, Q8, Q9, = 2 l'élément Q4 $\gamma$ )

**Npb** : Type d'élément ( = 1 : L'élément classique, = 4 : l'élément Hétérosis )

**Nincs** : Nombre d'incrément auquel le chargement total est appliqué

**Niters** : Nombre maximum d'itérations permises.

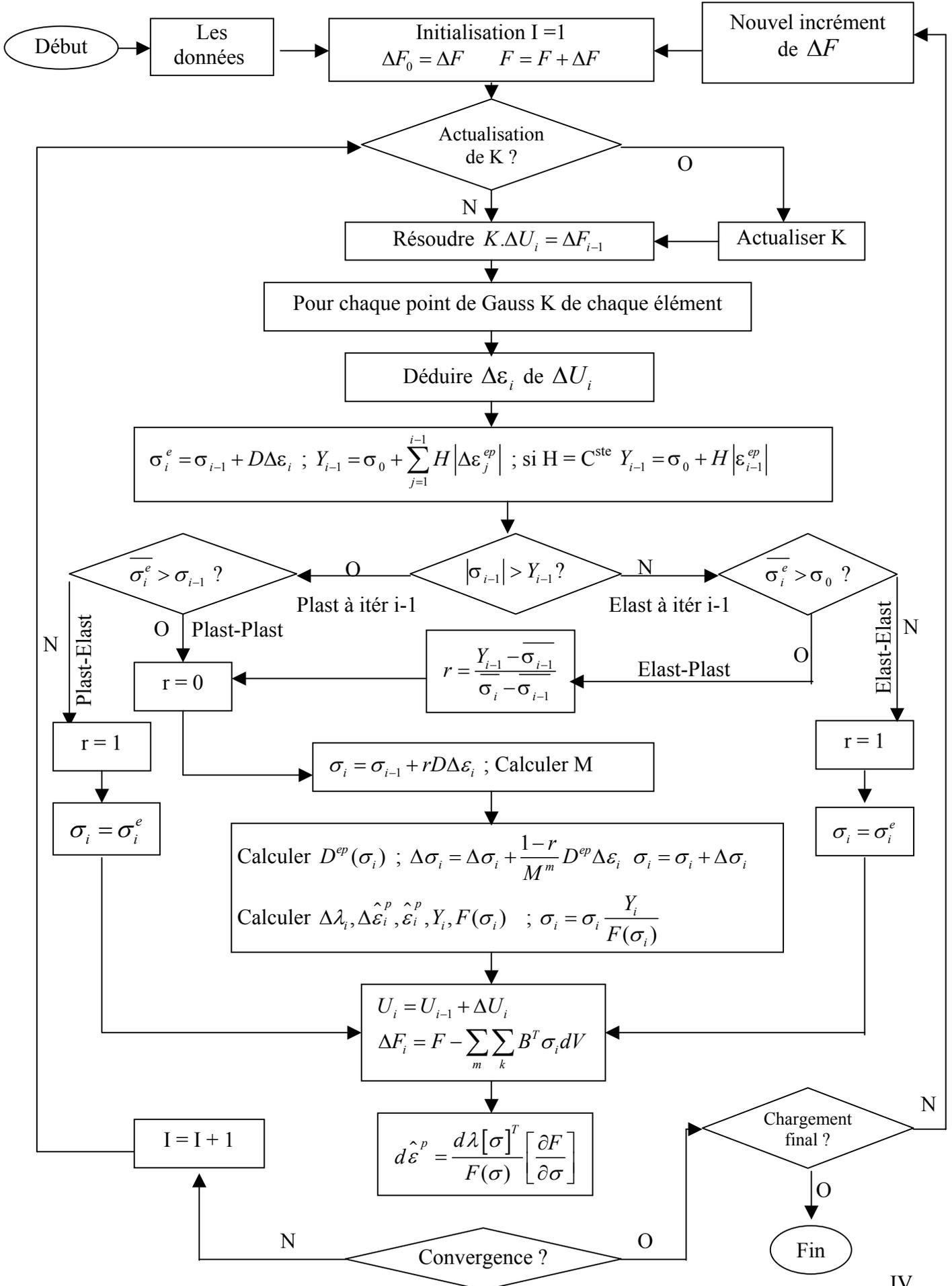
**Konv** : : Code de convergence

**Tol** : Paramètre contrôlant la tolérance permise dans le processus de convergence

**Fact** : Facteur de charge

**Imp** : Paramètre d'impression des résultats ( = 0 impression des résultats après la convergence, = 1 impression des résultats après la première itération de l'incrément, = 2 impression des résultats après chaque itération pour chaque incrément de charge ).

## III. Organigramme élasto-plasticité multiaxiale :



**IV. Sous-programme de l'élément Q4 $\gamma$  ( ELEM08 , RESMPAQ ) :**Subroutine ELEM08 : Calcul de la matrice de rigidité pour l'élément Q4 $\gamma$ .Subroutine RESMPAQ : Calcul des efforts résultants aux points de Gauss pour l'élément Q4 $\gamma$ .

```

C*****
C----- MATRICE DE RIGIDITE POUR L'ELEMENT Q4GAMMA
SUBROUTINE ELEM08(coord,lcons,matno,ielem,props,vke,epstn,incs,strsg,ncrit,kgt)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
PARAMETER (PG = .577350269189626D0)
PARAMETER (PG1=-.577350269189626D0)
DIMENSION vcore(2,4),coord(2,*),lcons(9,*),ake(378),vke(27,27),
.      epstn(*),strsg(5,*),stres(5),devia(4),dvect(5),matno(*),props(7,*),avect(5),
DIMENSION VJI(2,2),VH(3,3),VHC(2,2),VB(3,27),VBC(2,27),VJNX(8),VJNY(8)
DIMENSION VPG(2,4),VWG(4),VN(4),VKSI(4),VETA(4)
DATA VH/9*0.D0/,VHC/4*0.D0/,VB/81*0.D0/,VBC/54*0.D0/
DATA VPG/PG1,PG1,PG,PG1,PG,PG,PG1,PG/,VWG/4*1.D0/
C----- INITIALISATION DES PARAMETRES-----
idle=12
ike=144
nnelem=4
ipg=4
ih=3
ihc=2
lprop=matno(ielem)
epais=props(3,lprop)
C***** EVALUATE THE COORDINATES OF THE ELEMENT NODAL POINTS*****
do 10 in=1,4
ln=lcons(in,ielem)
ln=iabs(ln)
do 10 idime=1,2
vcore(idime,in)=coord(idime,ln)
10 CONTINUE
C----- CALCUL DES TERMES DE LA MATRICE JACOBIENNE AUX 4 NOEUDS
C      VJNX(8)=<J11, J12, (NOEUD1) ; J11 J12 (NOEUD2)..>
C      VJNY(8)=<J21, J22, (NOEUD1) ; J21 J22 (NOEUD2)..>
CALL JACND4(VCORE,VJNX,VJNY)
C----- MATRICE RIGIDITE VKE: 12x12 SYMETRIQUE
CALL ZEROMAT(VKE,27,27)
C----- BOUCLE D'INTEGRATION NUMERIQUE : 4 POINTS
DO 220 IG=1,IPG
C----- CALCUL DE N,KSI N,ETA AU POINT IG (CODE=1)
CALL NQ4(1,VPG(1,IG),VPG(2,IG),VN,VKSI,VETA)
C----- MATRICE JACOBIENNE INVERSE : VJI(2,2)
CALL JAC2D(nnelem,ielem,vksi,veta,vcore,vji,detj)
C----- MATRICE : VB(3,12) :BETAX,X BETAY,Y ET BETAX,Y+BETAY,X,VHC(2,12) : GAMAX, GAMAY
CALL BQ4GAM(VJI,VKSI,VETA,VJNX,VJNY,VB,VBC)
C----- CONSTRUIRE LA MATRICE DES PROPRIETES ELASTIQUES
C----- CONSTANT PAR ELEMENT : VH(3,3) , VHC(2,2)
CALL HPLCT(lprop,props,vh,vhc)
C----- MULTIPLIER VH,VHC PAR POIDS*DETJ
C=DETJ*VWG(IG)
DO 210 I=1,IH
DO 210 J=1,IH
210 VH(I,J)=VH(I,J)*C
DO 215 I=1,IHC
DO 215 J=1,IHC
215 VHC(I,J)=VHC(I,J)*C
if(incs.eq.1)goto 80
kgt=kgt+1
if(epstn(kgt).eq.0d0)goto 80
hards=props(7,lprop)
do 90 is=1,3
90 stres(is)=strsg(is,kgt)
call invmp(devia,ncrit,sint3,steff,stres,theta,varj2,yield)
call flowmp(abeta,avect,devia,VH,dvect,hards,ncrit,sint3,steff,theta,varj2)

```

```

      do 100 is=1,3
      do 100 js=1,3
100    VH(is,js)=VH(is,js)-abeta*dvect(is)*dvect(js)
80    CONTINUE
C----- CALCULER : VKE=VKE+BT*VH*B
      CALL BTDB(IH,27,VB,VH,VKE)
      CALL BTDB(IHC,27,VBC,VHC,VKE)
220  CONTINUE
C----- VECTORISATION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ELEMENTAIRE
      kk=0
      do 50 il=1,27
      do 50 jl=il,27
      kk=kk+1
      ake(kk)=vke(il,jl)
50    continue
      RETURN
      END
C*****
C-----CONTRAINTES ---ELEMENT Q4GAMMA-----
      SUBROUTINE RESMPAQ (F,COORD,EFFST,FI,EPSTN,LCONS,
      .
      .
      .
      MATNO,NCRIT,NELEM, PROPS,STRSG,ID,NEQS)
C----- DECLARATIONS
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      PARAMETER (PG = .577350269189626D0)
      PARAMETER (PG1=-.577350269189626D0)
      DIMENSION F(*),ID(5,*),EFFST(*),FI(*),VWG(4)
      .
      .
      .
      EPSTN(*),LCONS(9,*),MATNO(*),PROPS(7,*), VJI(2,2),VH(3,3),VHC(2,2),
      .
      .
      .
      VB(3,12),VBC(2,12), VJNX(8),VJNY(8),VPG(2,4),VKSI(4),VDLE(12),VD(20),
      .
      .
      .
      VETA(4),COORD(2,*),STRSG(5,*),VGF(3),VGC(2),VN(4),VCORE(2,4),VM(3),VT(2),DU(5,4),
      .
      .
      .
      STRES(5),SGTOT(5),SIGMA(5),DESIG(5),AVECT(5),DVECT(5), DEVI(4)
      DATA VH/9*0.D0/,VHC/4*0.D0/,VB/36*0.D0/,VBC/24*0.D0/
      DATA ZERO/0.D0/,DEUX/2.D0/
      DATA VPG/PG1,PG1,PG,PG1,PG,PG,PG1,PG/,VWG/4*1.D0/
C----- INITIALISATION DES PARAMETRES
      IDLE=12
      IKE=144
      NNELEM=4
      IPG=4
      IH=3
      IHC=2
C*** EVALUATE THE COORDINATES OF THE ELEMENT NODAL POINTS
      CALL ZEROVEC(FI,NEQS)
      KG=0
      DO 20 IELEM=1,NELEM
      LPROP=MATNO(IELEM)
      DO 10 IN=1,4
      LN=LCONS(IN,IELEM)
      LN=IABS(LN)
      DO 10 IDIME=1,2
      VCORE(IDIME,IN)=COORD(IDIME,LN)
10    CONTINUE
      CALL ZEROVEC(VD,20)
      CALL ZEROVEC(VDLE,12)
      CALL ZEROMAT(DU,5,4)
      DO 77 IN=1,NNELEM
      LC=LCONS(IN,IELEM)
      DO 76 IL=1,5
      IF(ID(IL,LC).GT.0) DU(IL,IN)=F(ID(IL,LC))
76    CONTINUE
77    CONTINUE
      KK=1
      DO 12 IT=1,4
      DO 13 IR=1,5
      VD(KK)=DU(IR,IT)
      KK=KK+1
13    CONTINUE
12    CONTINUE
      K=1
      J=2

```

```

31  CONTINUE
    DO 32 I=K,K+2
      VDLE(I)=VD(I+J)
32  CONTINUE
      K=K+3
      J=J+2
      IF(I.LE.12)GOTO 31
C-----CALCUL DES EFFORTS RESULTANTS AUX POINTS DE GAUSS
      CALL JACND4(VCORE,VJNX,VJNY)
C-----BOUCLE D'INTEGRATION NUMERIQUE:4 POINTS DE GAUSS
      DO 710 IG=1,IPG
        KG=KG+1
C-----CALCUL DE N,KSI N,ETA AU POINT IG (CODE=1)
        CALL NQ4(1,VPG(1,IG),VPG(2,IG),VN,VKSI,VETA)
C-----MATRICE JACOBIENNE INVERSE: VJI(2,2)
        CALL JAC2D(NNELEM,IELEM,VKSI,VETA,VCORE,VJI,DETJ)
C-----CONSTRUIRE LA MATRICE B: VB(3,12): KAPAX, KAPAY,KAPAXY
C-----VBC(2,12): GAMAX, GAMAY
        CALL BQ4GAM(VJI,VKSI,VETA,VJNX,VJNY,VB,VBC)
C-----CALCUL DES COURBURES ET CIS.: VGF=C*BF*U, VGC=C*BC*VDLE
        CALL MATVEC(IH,12,VB,VDLE,VGF)
        CALL MATVEC(IHC,12,VBC,VDLE,VGC)
C-----CONSTRUIRE LA MATRICE DES PROPRIETES ELASTIQUES
C-----CONSTANT PAR ELEMENT: VH(3,3), VHC(2,2)
        CALL HPLCT(LPROP,PROPS,VH,VHC)
C-----CALCUL DES MOMENTS MX,MY,MXY ET EFFORTS TRANCHANTS TX,TY
C      :VM=VH*VGF, VT=VHC*VGC
        CALL MATVEC(IH,IH,VH,VGF,VM)
        CALL MATVEC(IHC,IHC,VHC,VGC,VT)
C-----CALCUL DE LA FONCTION N AU POINT IG (CODE=0)
        CALL NQ4(0,VPG(1,IG),VPG(2,IG),VN,VKSI,VETA)
C-----CALCUL DE X Y AU POINT DE GAUSS
        X=VCORE(1,1)*VN(1)+VCORE(1,2)*VN(2)+VCORE(1,3)*VN(3)+VCORE(1,4)*VN(4)
        Y=VCORE(2,1)*VN(1)+VCORE(2,2)*VN(2)+VCORE(2,3)*VN(3)+VCORE(2,4)*VN(4)
C-----STRES=VM ET VT-----
        DO 777 IS=1,3
          STRES(IS)=VM(IS)
777  CONTINUE
          STRES(4)=0.0
          STRES(5)=0.0
          BRING=1.0
          PREYS=PROPS(6,LPROP)+EPSTN(KG)*PROPS(7,LPROP)
          C=DETJ*VWG(IG)
          DO 150 ISTRE=1,3
            DESIG(ISTRE)=STRES(ISTRE)
            SIGMA(ISTRE)=STRSG(ISTRE,KG)+STRES(ISTRE)
150  CONTINUE
          CALL INVMP ( DEVIA,NCRIT,SINT3,STEFF,SIGMA,THETA,VARJ2,YIELD)
          ESPRE=EFFST(KG)-PREYS
          IF (ESPRE.GE.0.0) GOTO 50
          ESCUR=YIELD-PREYS
          IF (ESCUR.LE.0.0) GOTO 60
          RFACT=ESCUR/(YIELD-EFFST(KG))
          GOTO 70
50  ESCUR =YIELD-EFFST(KG)
          IF (ESCUR.LE.0.0) GOTO 60
          RFACT=1.0
70  MSTEP=ESCUR*8.0/PROPS(6,LPROP)+1.0
          ASTEP=MSTEP
          REDUC=1.0-RFACT
          DO 80 ISTRE=1,3
            SGTOT(ISTRE)=STRSG(ISTRE,KG)+REDUC*STRES(ISTRE)
80  STRES(ISTRE)=RFACT*STRES(ISTRE)/ASTEP
          DO 90 ISTEP=1,MSTEP
            CALL INVMP ( DEVIA,NCRIT,SINT3,STEFF,SGTOT,THETA,VARJ2,YIELD)
            HARDS=PROPS(7,LPROP)
            CALL FLOWMP (ABETA,AVECT,DEVIA,VH,DVECT,HARDS,CRIT,SINT3,STEFF,THETA,VARJ2)
            AGASH=0.0
            DO 100 ISTRE=1,3

```

```

100   AGASH=AGASH+AVECT(ISTRE)*STRES(ISTRE)
      DLAMD=AGASH*ABETA
      IF(DLAMD.LT.0.0)DLAMD=0.0
      BGASH=0.0
      DO 110 ISTRE=1,3
      BGASH=BGASH+AVECT(ISTRE)*SGTOT(ISTRE)
110   SGTOT(ISTRE)=SGTOT(ISTRE)+STRES(ISTRE)-DLAMD*DVECT(ISTRE)
      EPSTN(KG)=EPSTN(KG)+DLAMD*BGASH/YIELD
90    CONTINUE
      DO 120 ISTRE=1,3
120   DESIG(ISTRE)=SGTOT(ISTRE)-STRSG(ISTRE,KG)
      CALL INVMP ( DEVI,NCRIT,SINT3,STEFF,SGTOT,THETA,VARJ2,YIELD)
      CURYS=PROPS(6,LPROP)+EPSTN(KG)*PROPS(7,LPROP)
      IF (YIELD.GT.CURYS) BRING=CURYS/YIELD
60    DO 130 ISTRE=1,3
      SGTOT(ISTRE)=BRING*(STRSG(ISTRE,KG)+DESIG(ISTRE))
130   STRSG(ISTRE,KG)=SGTOT(ISTRE)
      EFFST(KG)=BRING*YIELD
C-----CALCUL ET ASSEMBLAGE DES FORCES NODALES INTERNES
      DO 16 IN=1,NNELEM
      LN=LCONS(IN,IELEM)
      DO 16 IDL=1,3
      DO 16 IS=1,3
      IF(ID(IDL+2,LN).NE.0) FI(ID(IDL+2,LN))=FI(ID(IDL+2,LN))+
&    VB(IS,3*IN+IDL-3)*SGTOT(IS)*C
16    CONTINUE
C-----CISAILLEMENT-----
      STRES(4)=VT(1)
      STRES(5)=VT(2)
      DO 3100 ISTRE=4,5
      SGTOT(ISTRE)=STRSG(ISTRE,KG)+STRES(ISTRE)
3100  STRSG(ISTRE,KG)=SGTOT(ISTRE)
C-----CALCUL ET ASSEMBLAGE DES FORCES NODALES INTERNES
      DO 166 IN=1,NNELEM
      LN=LCONS(IN,IELEM)
      DO 166 IDL=1,3
      DO 166 IS=1,2
      IF(ID(IDL+2,LN).NE.0) FI(ID(IDL+2,LN))=FI(ID(IDL+2,LN))+
&    VBC(IS,3*IN+IDL-3)*SGTOT(IS+3)*C
166   CONTINUE
710   CONTINUE
20    CONTINUE
      RETURN
      END

```